HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜBER NICHT-HOLONOME ÜBERTRAGUNG IN ALLGEMEINER MANNIGFALTIGKEIT T_{n}
Author(s)	Hosokawa, Tôyomon
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 2(1-2), 001-011
Issue Date	1934
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55902
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_02_N1-2_001-011.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

ÜBER NICHT-HOLONOME ÜBERTRAGUNG IN ALLGEMEINER MANNIGFALTIGKEIT T_n

Von

Tôyomon HOSOKAWA.

Bekanntlich wird eine RIEMANNsche Übertragung in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_m induziert, welche in eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit V_n eingebettet ist. Prof. J. A. SCHOUTEN[1] hat gezeigt, dass in eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit L_n mit einer inearen (überschiebungsinvarianten) Übertragung eine Übertragung für die Grössen der X_m induziert wird. In dieser Arbeit möchten wir das analoge Problem für die allgemeine metrische Mannigfaltigkeit T_n[2] betrachten. Im ersten Abschnitt behandeln wir die Theorie einer Mannigfaltigkeit T_{n-1} und T_m $(m<n)$ in einer allgemeinen affinen Mannigfaltigkeit A_n. Alsdann werden im zweiten Abschnitt die nicht-holonomen Parameter in T_n eingeführt und eine lineare Übertragung in bezug auf solche Parameter festgelegt. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften einer T_m in T_n. Wir sollen dabei Übertragungsparameter Λ^a_{bc} für eine T_m in T_n einführen. Durch nähere Betrachtung dieser Grössen, erhalten wir die verallgemeinerten Gleichungen von GAUSS, die für eine T_m in A_n abgeleitet werden.

Ich erlaube mir hier Herrn Prof. A. KAWAGUCHI meinen aufrichtigsten Dank für seinen freundlichen Rat und Berichtigungen bei dieser Arbeit auszusprechen.

I.

Jedem Punkte (x) der Mannigfaltigkeit X_n ordnen wir ein bestimmtes Linienelement p^ν im Punkte (x) zu, das das orientierte Linien-

(1) J. A. SCHOUTEN, Math. Zeitschrift, 30 (1929), S. 149–172.

(2) T. HOSOKAWA, Science Reports, Tôhoku Imp. University, Series I, Bd. 19 (1930), S. 37–51.

element des Punktes (x) genannt wird. Der Inbegriff aller Paare von Punkten in X_n und orientierten Linienelemente im Punkte heisst BERWALD-FINSLERsche n-dimensionale Mannigfaltigkeit T_n, und jeder Punkt der X_n wird Grundpunkt der T_n genannt. Die allgemeinen linearen Übertragungen in T_n wurden schon untersucht[3]. Es sei eine X_{n-1} in einer A_n, wobei jeder Punkt in X_{n-1} die Rolle eines in T_n liegenden Grundpunktes spielt. P sei ein Punkt in X_{n-1}, und p^ν ein orientiertes Linienelement in P, dann liegt die Richtung von p^ν entweder innerhalb oder ausserhalb der tangenten $(n-1)$-Richtung von X_n in P. Im ersten Falle dürfen wir p^ν auch als Grösse in X_{n-1} betrachten. Wir sagen dann dass p^ν in X_{n-1} liegt. Im anderen Falle hat es noch keinen Sinn, von einer „X_{n-1}-Komponenten" von p^ν zu reden. Um solche Komponenten zu definieren, ist es notwendig, jedem Punkte in X_{n-1} eine feste Richtung zuzuordnen, welche die X_{n-1} nicht tangiert. Die Projektion von p^ν auf X_{n-1} in der gewählten Richtung liefert uns dann die „X_{n-1}-Komponente" von p^ν. Eine Richtung, die in solcher Weise einem Punkte einer X_{n-1} zugeordnet ist, heisst eine *erste Pseudonormale Richtung*. Ein solches System aller Paare von Punkten in X_{n-1} und dem in X_{n-1} liegenden orientierten Linienelemente im Punkte wird die in A_n eingespannte T_{n-1} genannt. Bei solcher Wahl der Urvariablen, dass x^{a_n} auf X_{n-1} konstant ist, ergeben sich die Beziehungen

$$\omega_\lambda^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \nu \\ 0 & \lambda \neq \nu \end{cases} \qquad \lambda, \nu = a_1, \ldots, a_{n-1}$$

$$\omega_{a_n}^{a_n} = \omega_\lambda^{a_n} = 0; \qquad \omega_{a_n}^{\nu} = \text{unbestimmt},$$ [4]

für den Einheitsaffinor ω_λ^ν der X_{n-1}, und man nimmt bei irgendeiner Wahl der Grösse des kovarianten tangenten Vektors t_λ einen Vektor n^ν in der ersten pseudonormalen Richtung so an, dass

$$\omega_\lambda^\nu = \theta_\lambda^\nu - t_\lambda n^\nu ,$$

(3) T. HOSOKAWA, a.a.O.
(4) J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, S. 135.

wobei θ_λ^ν der Einheitsaffinor in X_n ist und n^ν der *erste Pseudonormalvektor* heisst. Daher sind die „X_{n-1}-Komponenten" von p^ν

$$p^\nu = \omega_\lambda^\nu p^\lambda \,. \tag{1.1}$$

Da T_{n-1} in A_n eingebettet ist, kann man zwei Fälle unterscheiden: Entweder ist die Richtung von $v^\nu(x, p)$ in der tangenten $(n-1)$-Richtung enthalten oder nicht. Im ersten Falle, kann $v^\nu(x, p)$ als eine Grösse von T_{n-1} betrachtet werden. Im Falle, wo sich $v^\nu(x, p)$ nicht in T_{n-1} legt, kann man von einer „T_{n-1}-Komponente" von $v^\nu(x, p)$ reden, wenn jedem Punkte in T_{n-1} eine feste ausserhalb T_{n-1} liegende Richtung, *zweite pseudonormale Richtung* zugeordnet wird.

Lässt man B_λ^ν den Einheitsaffinor von T_{n-1} und wählt die Urvariablen wie oben, so ist

$$B_\lambda^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda = \nu \\ 0 & \text{„} \quad \lambda \neq \nu \end{cases} \qquad \lambda, \nu = a_1, \ldots, a_{n-1} \,,$$

$$B_{a_n}^{a_n} = B_\lambda^{a_n} = 0 \,; \qquad B_{a_n}^\nu = \text{unbestimmt.}$$

Normiert man die Grösse des tangenten Vektors T_λ für einen Vektor N^ν in der zweiten pseudonormalen Richtung folgendermassen

$$T_\lambda N^\lambda = 1 \,, \tag{1.2}$$

so ist

$$B_\lambda^\nu = A_\lambda^\nu - T_\lambda N^\nu \,, \tag{1.3}$$

wobei diese Gleichung von der Wahl der Urvariablen unabhängig ist, und wir wollen N^ν den *zweiten Pseudonormalvektor* nennen.

Wenn eine zweite pseudonormale Richtung eingeführt ist, bedeutet $B_\alpha^\lambda v^\alpha$, bezw. $B_\mu^\alpha w_\alpha$ die T_{n-1}-Komponente von v^α bezw. w_α, und man kann auch für jede Grösse höheren Grades ihre T_{n-1}-Komponente bilden.

Wir erhalten für einen Skalar f sowie jeden Vektoren v^ν und w_λ

$$\nabla'_\mu f = B^\alpha_\mu \nabla_\alpha f ,$$

$$(1.4) \qquad \nabla'_\mu v^\nu = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} \nabla_\alpha v^\beta , \qquad \nabla'_\mu w_\lambda = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_\alpha w_\beta ,$$

wobei ∇' das Zeichen der kovarianten Differentiation in T_{n-1} ist, und wobei $B^{\alpha\nu}_{\mu\beta}$ wie $B^\alpha_\mu B^\nu_\beta$ abgekürzt ist.

$$(1.5) \qquad \nabla'_\mu B^\nu_\lambda = -\nabla_\mu (T_\lambda N^\nu) \text{ und } \nabla'_\mu B^\nu_\lambda = -B^{\alpha\beta\nu}_{\mu\lambda\tau} \nabla_\alpha T_\beta N^\tau = 0.$$

Infolge (1.4) ist:

$$(1.6) \qquad \omega^t_l K'^{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\tau}\dot{s}}_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{t}\dot{s}} = \omega^s_m B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\tau} K^{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\nu}\dot{m}}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{l}\dot{m}} \text{ (5)}$$

und

$$(1.7) \qquad B^\alpha_\mu \nabla_\alpha v^\nu = \nabla'_\mu v^\nu + B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha v^\lambda) T_\lambda N^\nu = \nabla'_\mu v^\nu - B^\alpha_\mu v^\lambda (\nabla_\alpha T_\lambda) N^\nu .$$

Nach (1.7) ergibt sich durch Differentiation

$$(1.8) \qquad B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\tau} (\nabla_\beta B^\delta_\alpha) \nabla_\delta v^\tau + B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\tau} \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\tau = \nabla'_\omega \nabla'_\mu v^\nu - v^\delta B^{\beta\alpha\nu}_{\mu\omega\tau} (\nabla_\alpha T_\delta) \nabla_\beta N^\tau ,$$

daraus folgt bei Alternation nach ω, μ

$$(1.9) \qquad B^{\beta\alpha\nu}_{\mu\omega\tau} \nabla_{[\beta} \nabla_{\alpha]} v^\tau = \nabla'_{[\omega} \nabla'_{\mu]} v^\nu + v^\delta L^{\dot{\nu}}_{[\dot{\omega}} H_{\mu]\delta} ,$$

wobei

$$H_{\mu\lambda} = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_\alpha T_\beta \qquad \text{und} \qquad L^{\dot{\nu}}_{\dot{\mu}} = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} \nabla_\alpha N^\beta$$

ist. (1.9) wird sogleich

$$(1.10) \qquad B^{\beta\alpha\nu}_{\mu\omega\tau} \left(-R^{\dot{\tau}}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\delta}} v^\delta + K^{\dot{s}}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{t}} p^t \frac{\partial v^\tau}{\partial p^s} \right)$$

$$= \left(-R'^{\dot{\nu}}_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}} v^\lambda + K'^{\dot{m}}_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{l}} p^l \frac{\partial v^\nu}{\partial p^m} \right) + v^\delta L^{\dot{\nu}}_{[\dot{\omega}} H_{\mu]\delta}$$

(5) T. Hosokawa, a.a.O., S. 48.

und man erhält unter Berücksichtigung von (1.6)

$$(1.11)\qquad B^{\beta\alpha\nu\delta}_{\mu\omega\tau\lambda}R_{\dot\beta\dot\alpha\dot\delta}{}^{\tau}+B^{\beta\alpha\tau}_{\mu\omega\lambda}K_{\dot\beta\dot\alpha\dot\iota}{}^{\delta}\,p^{\iota}\frac{\partial B^{\nu}_{\tau}}{\partial p^{\delta}}=R'_{\dot\omega\dot\mu\lambda}{}^{\nu}+2L_{[\dot\omega}{}^{\nu}H_{\mu]\lambda}\,.$$

Die letzten Gleichungen sind die verallgemeinerten *Gaussschen Gleichungen* für T_{n-1} in A_n.

Auf analoge Weise können wir T_m in A_n definieren. Die „X_m-Komponenten" von p^{ν} sind

$$(1.12)\qquad p^{\nu}=\omega^{\nu}_{\lambda}p^{\lambda}\,,$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{\nu}_{\lambda}=\begin{cases}1 & \text{für}\quad \lambda=\nu\\ 0 & ,,\quad \lambda\neq\nu\end{cases} && \nu,\lambda=a_1,\ldots,a_m\\ &\omega^{\mu}_{\varkappa}=0 && \mu=a_{m+1},\ldots,a_n\\ &\omega^{\lambda}_{\mu}=\text{unbestimmt} && \varkappa=a_1,\ldots,a_n\,.\end{aligned}\right\}$$

Nach Einführung des zweiten pseudonormalen $(n-m)$-Vektors bedeutet $B^{\nu}_{\lambda}v^{\lambda}$ bezw. $B^{\nu}_{\lambda}w_{\nu}$ die „T_m-Komponente" von v^{ν} bezw. w_{λ} und man kann auch für jede Grösse höheren Grades ihre T_{n-1}-Komponente bilden. Der Affinor B^{ν}_{λ} wird dabei folgendermassen dargestellt:

$$(1.3)\qquad B^{\nu}_{\lambda}=A^{\nu}_{\lambda}-s!sT_{\lambda\omega_2\ldots\omega_s}N^{\nu\omega_2\cdots\omega_s}\quad\text{und}\quad s!T_{\lambda_1\ldots\lambda_s}N^{\lambda_1\cdots\lambda_s}=1,$$

wobei wir setzen: $n-m=s$.

Für jeden Vektoren v^{ν} und w_{λ} in T_m gelten die Ausdrücke:

$$(1.4)\qquad \nabla'_{\mu}v^{\nu}=B^{\alpha\nu}_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}v^{\beta}\,,\qquad \nabla'_{\mu}w_{\lambda}=B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda}\nabla_{\alpha}w_{\beta}\,,$$

wobei ∇' das Zeichen der kovarianten Differentiation in T_m ist.

Wenn wir $T_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s}$ in s reale Faktoren zerlegen:

$$T_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s}=\overset{(1)}{T}_{[\lambda_1}\ldots\overset{(s)}{T}_{\lambda_s]}\,,$$

so kann man $N^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}$ auch in s reale Faktoren zerlegen:

$$N^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s} = \underset{(1)}{N^{[\nu_1}}\cdots\underset{(s)}{N^{\nu_s]}},$$

so dass

$$\overset{(u)}{T}_{\omega}\underset{(v)}{N^{\omega}} = 0 \quad \text{für} \quad u \neq v .$$

Bei der Normierung der $s-1$ ersten Faktoren $\overset{(u)}{T}_{\lambda}$, $\underset{(u)}{N^{\nu}}$, so dass

$$\overset{(v)}{T}_{\lambda}\underset{(v)}{N^{\lambda}} = 1 , \qquad v = 1, \ldots, s-1, \tag{1.15}$$

folgt aus (1.13)

$$\overset{(s)}{T}_{\lambda}\underset{(s)}{N^{\lambda}} = 1 . \tag{1.16}$$

Infolge von (1.13), (1.15) und (1.16) erhalten wir auch

$$B^{\nu}_{\lambda} = A^{\nu}_{\lambda} - \sum_{u} \overset{(u)}{T}_{\lambda}\underset{(u)}{N^{\nu}} .$$

Wir können somit leicht ausführen:

$$\omega^{t}_{l} K'^{\ldots s}_{\omega\mu\ldots t} = \omega^{s}_{m} B^{\beta\alpha}_{\omega\mu} K^{\ldots m}_{\beta\alpha\ldots l} \tag{1.17}$$

und

$$B^{\beta\alpha\nu\delta}_{\mu\omega\tau\lambda} R^{\ldots\tau}_{\beta\alpha\ldots\delta} + B^{\beta\alpha\tau}_{\mu\omega\lambda} K^{\ldots s}_{\beta\alpha\ldots t} p^{t} \frac{\partial B^{\nu}_{\tau}}{\partial p^{s}} = R'^{\ldots\nu}_{\omega\mu\ldots\lambda} + 2H_{\lambda[\omega}{}^{\tau} L_{\mu]}{}^{\nu}{}_{\tau} , \tag{1.18}$$

wobei

$$H_{\mu\lambda}{}^{\nu} = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_{\alpha} B^{\nu}_{\beta} , \qquad L_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda} = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} \nabla_{\alpha} B^{\beta}_{\lambda} .$$

II.

Beim Übergang von den Urvariablen x^{ν} $(\alpha, \beta, \ldots = a_1, \ldots, a_n)$ zu neuen Urvariablen x^{k} $(h, k, \ldots, m = 1, 2, \ldots, n)$

$$x^{k} = x^{k}(x^{a_1}, \ldots, x^{a_n}) , \tag{2.1}$$

transformieren sich die Differentiale der Urvariablen linear homogen:

$$dx^k = \bar{\omega}^k_\lambda dx^\lambda , \tag{2.2}$$

wobei $\bar{\omega}^k_\lambda = \frac{\partial x^k}{\partial x^\lambda}$ und die Funktionaldeterminante $|\bar{\omega}^k_\lambda|$ nicht verschwinden dürfen. Ist p^ν ein bestimmtes orientiertes Linienelement in bezug auf das Bezugssystem $\left(\begin{smallmatrix}\nu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)$, so stellt sich das orientierte Linienelement durch

$$p^k = \bar{\omega}^k_\nu p^\nu \tag{2.3}$$

in bezug auf das System $\left(\begin{smallmatrix}k\\ i\end{smallmatrix}\right)$ dar.

Die Bestimmungszahlen $\underset{a_i}{e^{a_j}}$ bezw. $\overset{a_j}{e}_{a_i}$ der n-kontravar. bezw. n-kovar. Massvektoren $\underset{\lambda}{e}$ bezw. $\overset{\nu}{e}$ in bezug auf das System $\left(\begin{smallmatrix}\nu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)$ hängen bekanntlich im allgemeinen vom Orte x^ν ab. Jetzt betrachten wir den Fall, wo diese Bestimmungszahlen auch noch von orientierten Linienelementen p^ν abhängig sind[6]. Dann gilt auch dasselbe für die Bestimmungszahlen $\underset{i}{e}(x, p)$, $\overset{k}{e}(x, p)$ der Massvektoren in bezug auf das System $\left(\begin{smallmatrix}k\\ i\end{smallmatrix}\right)$. Die Beziehungen zwischen den Bestimmungszahlen der Massvektoren in bezug auf die Systeme $\left(\begin{smallmatrix}\nu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}k\\ i\end{smallmatrix}\right)$ lauten:

$$\underset{\lambda}{e^k} = \bar{A}^k_\nu \underset{\lambda}{e^\nu} , \qquad \overset{\nu}{e}_i = \bar{A}^\lambda_i \overset{\nu}{e}_\lambda \tag{2.4}$$

und

$$\underset{i}{e^\nu} = \bar{A}^\nu_k \underset{i}{e^k} , \qquad \overset{k}{e}_\lambda = \bar{A}^i_\lambda \overset{k}{e}_i . \tag{2.5}$$

Die Grösse zweiten Grades $\bar{A}$ mit dem Bestimmungszahlen $\bar{A}^k_\lambda$ ist von den orientierten Linienelementen abhängig, die im allgemeinen auch von x^ν abhängen. Die n^2 Zahlen $\bar{A}^k_\lambda$ können als Bestimmungszahlen von kontravarianten bezw. kovarianten Massvektoren $e^k(x, p)$ bezw. $\underset{\lambda}{e}(x, p)$ in bezug auf $\left(\begin{smallmatrix}\nu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)$ bezw. $\left(\begin{smallmatrix}k\\ i\end{smallmatrix}\right)$ betrachtet werden.

(6) Diesen Begriff hat zuerst Herr Prof. A. KAWAGUCHI eingeführt.

Wenn wir ein Linienelement dx^u als einen dem Systeme $\binom{\nu}{\lambda}$ angehörenden Vektor betrachten, hat der Vektor die folgenden Bestimmungszahlen in bezug auf das System $\binom{k}{i}$:

$$(dx)^k = dx^u \bar{A}^k_\mu ,$$

die von dx^k verschieden sind, da diese Gleichungen mit (2.2) nicht identisch sind.

T_n sei jetzt eine allgemeine Mannigfaltigkeit F_n, d.h. sie habe eine lineare asymmetrische und überschiebungsinvariante Übertragung mit den Parametern $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x, p)$ in bezug auf das System $\binom{\nu}{\lambda}$. Die Übertragung im Systeme $\binom{k}{i}$ geht in einer Übertragung in $\binom{\nu}{\lambda}$ folgendermassen vor sich:

$$\nabla_j v^k = \bar{A}^{\mu k}_{j\nu} \nabla_\mu v^\nu , \tag{2.6}$$

wobei $\bar{A}^{\mu k}_{j\nu}$ abkürzend für $\bar{A}^\mu_j \bar{A}^k_\nu$ eingeführt ist; so ist

$$\nabla_j v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \left(\bar{A}^{\mu k \lambda}_{j\nu i} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \bar{A}^{\mu k}_{j\nu} \frac{\partial \bar{A}^\nu_i}{\partial x^\mu} - \bar{A}^k_\nu p^o \varphi^m_{oj} \frac{\partial \bar{A}^\nu_i}{\partial p^m} \right) v^i - p^o \varphi^m_{oj} \frac{\partial v^k}{\partial p^m} .$$

Wir setzen

$$\Lambda^k_{ij} = \bar{A}^{\mu k \lambda}_{j\nu i} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \bar{A}^{\mu k}_{j\nu} \frac{\partial \bar{A}^\nu_i}{\partial x^\mu} - \bar{A}^k_\nu p^h \varphi^m_{hj} \frac{\partial \bar{A}^\nu_i}{\partial p^m} , \tag{2.7}$$

welches die Parameter der Übertragung in bezug auf das System $\binom{k}{i}$ sind:

$$\nabla_j v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Lambda^k_{ij} v^i - p^h \varphi^m_{hj} \frac{\partial v^k}{\partial p^m} . \tag{2.8}$$

Das System $\binom{k}{i}$ sehen wir jetzt als dasselbe von nicht-holonomen Parametern in der F_n an. *Wir haben die Bedingung für die Holonomität Parameter*[7].

(7) Ist $\Lambda^k_{[ij]} = S^{\cdot\cdot k}_{ij}$, so heisst das Parameter holonomisch.

$$(2.9)\qquad \bar{A}^k_\nu \bar{A}^\nu_{[i,|\mu|}\bar{A}^\mu_{j]} - \bar{A}^k_\nu p^h \varphi^m_{h[j}\bar{A}^\nu_{i];\,m} = 0\,,$$

wo

$$\bar{A}^\nu_{i,\mu} = \frac{\partial \bar{A}^\nu_i}{\partial x^\mu}\,, \qquad \bar{A}^\nu_{i;\,m} = \frac{\partial \bar{A}^\nu_i}{\partial p^m} \qquad \text{usw.}$$

Aus (2.7) folgt weiter

$$(2.10)\qquad \Lambda^k_{[ij]} = S_{ij}{}^k + \bar{A}^k_\nu \bar{A}^\nu_{[i,|\mu|}\bar{A}^\mu_{j]} - \bar{A}^k_\nu p^h \varphi^m_{h[j}\bar{A}^\nu_{i];\,m}\,.$$

Ist f ein Skalar, so ist

$$f_{[,\lambda,\mu]} = 0\,.$$

Nach (2.6) haben wir

$$(2.11)\qquad \nabla_{[j}\nabla_{i]}f = \frac{1}{2}K_{ji}{}^m p^l \frac{\partial f}{\partial p^m} + S_{ji}{}^k \nabla_k f\,,$$

oder unter Berücksichtigung von (2.8)

$$(2.12)\qquad \nabla_{[j}\nabla_{i]}f = \frac{1}{2}K_{ji}{}^m p^l \frac{\partial f}{\partial p^m} + \Lambda^k_{[ji]}\nabla_k f + f_{[,i,j]}\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(2.13)\qquad f_{[,i,j]} = (\Lambda^k_{[ji]} + S_{ji}{}^k)\nabla_k f\,.$$

Für eine nicht-symmetrische Übertragung in bezug auf $\binom{\nu}{\lambda}$ gilt

$$(2.14)\qquad \nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]}v^\nu = -\frac{1}{2}R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu v^\lambda + \frac{1}{2}K_{\omega\mu}{}^m p^l \frac{\partial v^\nu}{\partial p^m} + S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha v^\nu\,,$$

oder durch Differentiation und Alternation nach h, j entsteht dann aus (2.8)

$$(2.15)\qquad \begin{aligned}\nabla_{[h}\nabla_{j]}v^k = {} & \Lambda^k_{i[j,h]}v^i + \Lambda^l_{i[j}\Lambda^k_{|l|h]}v^i + p^t\varphi^s_{i[j}\Lambda^k_{|i|h];\,s}v^i + \varphi^s_{i[h,j]}p^t v^k_{;s} \\ & + \varphi^i_{t[h}\varphi^s_{|i|j]}p^t v^k_{;s} + p^i\varphi^m_{i[h}\varphi^s_{|t|j];\,m}p^t v^k_{;s} + \Lambda^i_{[hj]}\nabla_i v^k + v^k_{[,j,h]}\,.\end{aligned}$$

So folgt unter Berücksichtigung von (2.13)

$$\nabla_{[h}\nabla_{j]}v^k = (\Lambda^k_{i[j,h]} + \Lambda^l_{i[j}\Lambda^k_{|l|h]} + p^t\varphi^s_{t[j}\Lambda^k_{|i|h];s})v^i + \frac{1}{2}K_{hjt}{}^s p^t \frac{\partial v^k}{\partial p^s}$$

$$+ S_{hj}{}^i \nabla_i v^k - S_{hj}{}^l \Lambda^k_{li} v^i + \Lambda^k_{li}\Lambda^i_{[hj]}v^l ,$$

d.h.

$$\nabla_{[h}\nabla_{j]}v^k = -\frac{1}{2}\Re_{hji}{}^k v^i + \frac{1}{2}K_{hjt}{}^s p^t v^k_{;s} + S_{hj}{}^i \nabla_i v^k , \tag{2.16}$$

wobei

$$\Re_{hji}{}^k = \Lambda^k_{i[h,j]} + \Lambda^l_{i[h}\Lambda^k_{|l|j]} + \Lambda^k_{il}(\Lambda^l_{[jh]} - S_{jh}{}^l) + p^t\varphi^s_{i[h}\Lambda^k_{|i|j];s} .$$

Es folgt aus (2.9), dass $\Re_{hji}{}^k$ für holonome Parameter in die gewöhnliche Krümmungsgrösse

$$R_{hji}{}^k = \Lambda^k_{i[h,j]} + \Lambda^l_{i[h}\Lambda^k_{|l|j]} + p^t\varphi^s_{i[h}\Lambda^k_{|i|j];s}$$

übergeht.

III.

Liegt X_m in der Mannigfaltigkeit T_n, so kann man die $(n-m)$-Richtung der Einspannung in jedem Punkte der X_m betrachten. In einem Punkte der X_m ist jedes orientierte Linienelement von X_m auch orientiertes Linienelement von T_n, aber nicht umgekehrt. Unter orientiertem Linienelemente von X_m verstehen wir dabei ein orientiertes Linienelement, das in der örtlichen m-Richtung liegt. Die X_m-Komponente eines orientierten Linienelementes wird analytisch folgendermassen festgelegt:

$$p^\nu = \bar{\omega}^\nu_\lambda p^\lambda ,$$

wobei $\bar{\omega}^\nu_\lambda$ der Einheitsaffinor von X_m ist.

Der Inbegriff von allen Paare jedes Punktes von X_m und des orientierten Linienelementes wird die „eingespannte T_m in T_n" geheissen.

Nun wählen wir in T_n das System $\left(\begin{matrix} k \\ i \end{matrix}\right)$ so, dass die m ersten kontravarianten Massvektoren $\underset{a}{e}(x, p)$, $a, \ldots, g = 1, 2, \ldots, m$, in den Punkten der T_m auf beliebige Weise in der örtlichen m-Richtung von T_m liegen, und die übrigen $\underset{p}{e}(x, p)$, $p, \ldots, v = m+1, \ldots, n$, in denselben Punkten in der $(n-m)$-Richtung der Einspannung. Im allgemeinen sind die x^k daher nicht-holonome Parameter, während die x^a innerhalb T_m auch nicht-holonome Parameter darstellen.

Setzen wir:

$$\overline{B}^{\nu}_{\lambda} = \underset{a}{e}_{\lambda}\underset{a}{e}^{\nu}; \qquad \overline{B}^{\nu}_{\lambda} = \overline{A}^{\nu}_{\lambda} - \underset{p}{e}_{\lambda}\underset{p}{e}^{\nu},$$

so ist $\overline{B}^{\nu}_{\lambda}$ der Einheitsaffinor der T_m:

$$(3.1) \qquad \overline{B}^{c}_{a} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a = c \\ 0 & ,, \quad a \neq c \end{cases} \qquad \overline{B}^{p}_{a} = \overline{B}^{a}_{p} = \overline{B}^{q}_{p} = 0 .$$

Man kann nun für jede Grösse in T_m eine Übertragung definieren: *Das kovariante Differential eines Feldes von Grössen der T_m in bezug auf ein in T_m liegendes Linienelement dx^{ν} ist die T_m-Komponente der kovarianten Ableitung in T_n.*

Man kann auf ganz analoge Weise wie in I und II die Verallgemeinerung der *Gaussschen Gleichung* für T_m in A_n haben:

$$\overline{B}^{\beta\alpha c\delta}_{ba\tau d}\Re_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\delta}}{}^{\tau} + \overline{B}^{\beta\alpha\tau}_{bad}K_{\dot{\beta}\dot{\alpha}e}{}^{h}p^{e}\frac{\partial \overline{B}^{c}_{\tau}}{\partial p^{h}} = \Re'_{\dot{a}\dot{b}\dot{d}}{}^{c} + 2H_{\dot{d}[\dot{a}}{}^{\tau}L_{\dot{b}]}{}^{c}{}_{\tau} .$$

Mathematisches Seminar
Hokkaido Kaiserl. Universität
Sapporo, März 1932.