HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	KONFORME INVARIANTEN IM FINSLERSCHEN RAUME
Author(s)	Hombu, Hitoshi
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 2(3), 157-168
Issue Date	1934
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55905
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_02_N3_157-168.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

KONFORME INVARIANTEN IM FINSLERSCHEN RAUME

Von

Hitoshi HOMBU

In vorliegender Arbeit wird die Theorie von Invarianten der Form $a(x, y, y')dx$ unter der Gruppe aller ebenen Punkttransformationen sowie der Transformationen

$$\bar{a}(x, y, y')dx = \sigma(x, y)a(x, y, y')dx$$

untersucht. Die Formen mit der Gestalt $\sqrt{E+2Fy'+Gy'^2}dx$ — die Koeffizienten E, F, G seien Funktionen der x, y — sind unter den oben-genannten Transformationen immer miteinander überführbar; anders gesagt, ist es stets möglich zwei beliebige RIEMANNsche Räume von 2 Dimensionen konform aufeinander abzubilden. Was die von ähnlichen Indikatrizes der Massbestimmung definierten FINSLERschen Räume betrifft, so wollen wir auch sie einander konform heissen, da sie unter der Winkelmessung im Sinne von P. FINSLER[1] oder von J. L. SYNGE, J. H. TAYLOR, L. BERWALD[2] konform sind aber nicht[3] unter derjenigen im Sinne von G. LANDSBERG[4]. Unsere Theorie ist deshalb die der konformen Invarianten in gewissem Sinne.

---

(1) P. FINSLER, Über die Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Dissertation Göttingen 1918, S. 39.

(2) J. L. SYNGE, A generalisation of the Riemannian line-element, Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 27 (1925), p. 61–67. J. H. TAYLOR, A generalisation of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas, Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 27 (1925), p. 246–264. L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschr., Bd. 25, S. 40–73.

(3) Siehe P. DELENS, Sur certains problèmes relatifs aux espaces de Finsler, Comptes Rendus, Paris, tome 195 (1933), p. 1356–1358.

(4) G. LANDSBERG, Über die Krümmung in der Variationsrechnung, Math. Ann., Bd. 65 (1908), S. 313-349.

In seiner interessanten Arbeit „Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés" hat E. CARTAN[5] die Invariantentheorie der Form $\alpha(x, y, y')dx+\beta(x, y, y')dy'$ gegenüber der Gruppe aller ebenen Berührungstransformationen vollständig aufgelöst, dadurch auch die der Form $\alpha(x, y, y')dx$ gegenüber der Gruppe aller ebenen Punkttransformationen. Nun ist es leicht, unsere Theorie zu entwickeln; in der Tat, unter Verwendung seiner Resultate gelangt man zu der Klassifizierung der Formen und zu dem Redukutionssatz.

1. Zunächst erwähnen wir die von CARTAN herrührenden Ergebnisse im Falle $\beta \equiv 0$.

Es sei eine Form $\omega = F(x, y, y')dx$ gegeben. Man kann dafür ein System von den drei invarianten PFAFFschen Ausdrücke ω_1, ω_2, ω_3 bestimmen, welche den Relationen

$$\text{(CI)} \qquad \begin{cases} \omega_1' = -[\omega_2\,\omega_3], \\ \omega_2' = [\omega_1\,\omega_3]-I[\omega_2\,\omega_3], \\ \omega_3' = -K[\omega_1\,\omega_2]-J[\omega_2\,\omega_3], \end{cases}$$

genügen, wobei I, J, K die drei fundamentalen Differentialinvarianten sind. Diese drei Ausdrücke haben die folgende Gestalt

$$\text{(CII)} \qquad \begin{cases} \omega_1 = F\,dx+X(dy-y'dx), \\ \omega_2 = \dfrac{dy-y'dx}{W}, \\ \omega_3 = W(dX-F_y\,dx)+v(dy-y'dx), \end{cases}$$

wobei

$$\text{(CIII)} \qquad \begin{cases} X = F_{y'}, \\ \dfrac{1}{W^2} = FX_{y'}, \\ v = W_{y'}(X_x+y'X_y-F_y)-(W_x+y'W_y)X_{y'}-WX_y. \end{cases}$$

(5) Mathematica, vol. IV (1930), p. 114-136.

Die Invariante I ist von der Form

$$\text{(CIV)} \qquad I = WX - FW_{y'} .$$

Durch die Gleichung

$$dH = H_1\omega_1 + H_2\omega_2 + H_3\omega_3$$

definiert man die kovarianten Ableitungen H_1, H_2, H_3 einer Invariante H. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass sie wieder Invarianten[6] sind, und die Integrabilitätsbedingungen

$$\text{(C15)} \qquad \begin{cases} H_{23} - H_{32} = -H_1 - IH_2 - JH_3 , \\ H_{31} - H_{13} = -H_2 , \\ H_{12} - H_{21} = -KH_3 \end{cases}$$

erfüllen, welche sich auf

$$\text{(C15')} \qquad \begin{cases} H_{23} = -H_1 - IH_2 , \\ H_{13} = H_2 , \\ H_{12} = H_{21} \end{cases}$$

reduzieren, wenn H nur vom Orte abhängt[7].

Für die fundamentalen Invarianten I, J, K gilt die sogenannte BIANCHIsche Identität

$$\text{(C16)} \qquad J = I_1 , \qquad K_3 + KI + J_1 = 0 .$$

2. Wir betrachten zwei Formen $\omega = F(x, y, y')dx$ und $\bar{\omega} = \bar{F}(x, y, y')dx$ mit der Relation

$$\bar{\omega} = \sigma\omega , \qquad \bar{F} = \sigma F ,$$

(6) Alle Differentialinvarianten von ω sind Funktionen der fundamentalen Invarianten und ihrer kovarianten Ableitungen.

(7) $H_3 \equiv 0$.

woraus hervorgeht

$$(1) \qquad \bar{\omega}_1 = \sigma\,\omega_1\,,$$

$$(2) \qquad \bar{\omega}_2 = \sigma\,\omega_2$$

unter der Berücksichtigung ihrer Definitionsgleichungen. Bei der Bildung der kovarianten bilinearen Form von (1) folgt

$$\bar{\omega}_1' = \sigma_2[\omega_2\,\omega_1] - \sigma[\omega_2\,\omega_3]\,;$$

die linke Seite ist aber $-[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3]$ zufolge (CI), so dass dies uns

$$\bar{\omega}_3 = \omega_3 - \rho_2\,\omega_1 + \lambda\,\omega_2\,, \qquad \rho_i = \frac{\sigma_i}{\sigma}$$

gibt, wo λ die noch unbestimmte Koeffiziente ist. In derselben Weise aus (2) ergibt sich

$$(3) \qquad I = \bar{I}\,,$$

$$(4) \qquad \lambda = \rho_1 + I\rho_2\,,$$

$$(4') \qquad \bar{\omega}_3 = \omega_3 - \rho_2\,\omega_1 + (\rho_1 + I\rho_2)\omega_2\,.$$

Es ist bemerkenswert, dass I konform invariant ist; z.B. $I \equiv 0$ ist charakteristisch für RIEMANNsche Räume.

Schliesslich wenden wir uns zur Betrachtung der kovarianten bilinearen Form von (4'), um die Bedingungen der konformen Transformierbarkeit abzuleiten. Eine leichte Rechnung gibt die Gleichungen

$$(5) \qquad \lambda_1 + \rho_{22} - K = -\sigma^2 K - \sigma\,\rho_2\,\bar{J}\,,$$

$$(6) \qquad \rho_2 - \lambda_3 - \lambda\,I - J = -\sigma\,\bar{J}\,,$$

$$(7) \qquad \rho_{23} + \lambda = 0\,.$$

(7) reduziert sich auf die Identität infolge (C15'), und (6) ist gleichbedeutend mit

$$(6') \qquad I_3\,\rho_2 = \sigma J - \bar{J}\,.$$

Aus der Gleichung

$$dH = H_1\omega_1 + H_2\omega_2 + H_3\omega_3 = H_{\bar{1}}\bar{\omega}_1 + H_{\bar{2}}\bar{\omega}_2 + H_{\bar{3}}\bar{\omega}_3 ,$$

wobei die gestrichenen Suffizes die kovarianten Ableitungen in bezug auf $\bar{\omega}$'s bedeuten, geht die wichtige Formel hervor

$$(8) \qquad \begin{cases} H_1 = \sigma H_{\bar{1}} - \rho_2 H_{\bar{3}} , \\ H_2 = \sigma H_{\bar{2}} + \lambda H_{\bar{3}} = \sigma H_{\bar{2}} + (\rho_1 + I\rho_2)H_{\bar{3}} , \\ H_3 = H_{\bar{3}} \end{cases}$$

für beliebige Invariante (Skalar) H. Setzen wir $H = I = \bar{I}$, so ergibt sich ohne weiteres (6'), also ist (6) nur eine Folge von (3).

3. Nun setzen wir I_3 von y' abhängig zu sein voraus, so gilt es auch für $\bar{I}$, denn $\bar{I}_{\bar{3}} = I_3 \neq 0$ infolge (8). Durch die kovariante Differentiation von (3) ergibt sich

$$(9) \qquad \rho_2 = \sigma\bar{L} - L , \qquad \rho_1 = (M + IL) - \sigma(\bar{M} + \bar{I}\bar{L}) ,$$

wo

$$L = \frac{J}{I_3} , \quad M = \frac{I_2}{I_3} ; \qquad \bar{L} = \frac{\bar{J}}{\bar{I}_{\bar{3}}} , \quad \bar{M} = \frac{\bar{I}_{\bar{2}}}{\bar{I}_{\bar{3}}} .$$

Bilden wir die Integrabilitätsbedingungen (C15') für die Gleichungen (9), so erhalten wir

$$(10) \qquad L + (M + IL)_3 = \sigma(\bar{L} + (\bar{M} + \bar{I}\bar{L})_{\bar{3}}) , \quad M - L_3 = \sigma(\bar{M} - \bar{L}_{\bar{3}}) .$$

Diese Relationen zeigen, dass die Invarianten $\mathfrak{L} \equiv L + (M + IL)_3$ und $\mathfrak{M} \equiv M - L_3$ beide konforme Kovarianten erster Ordnung genannt werden dürfen. Im allgemeinen heisst ein Skalar H von der Ordnung n, die sich durch unseren Transformationen folgendermassen transformiert:

$$H = \sigma^n \bar{H} .$$

Ziehen wir jetzt die noch übrige Gleichung (5) in Betracht, so wird die konforme Kovariante zweiter Ordnung

$$\mathfrak{R} = K+L_2-M_1+L\mathfrak{L}+(M+IL)\mathfrak{M} \tag{11}$$

leicht abgeleitet, welche aber identisch verschwindet, wie die direkte Rechnung zeigt.

Andererseits wird mit Hilfe von (9) die konforme invariante Form

$$\omega_{\mathrm{III}} = \omega_3+L\omega_1+M\omega_2 \tag{12}$$

hergeleitet. Sodann können wir das konforme kovariante Differential δH und die Ableitungen H_{I}, H_{II}, H_{III} einer konformen Kovariante n-ter Ordnung durch die Gleichung

$$\delta H = dH-n((M+IL)\omega_1-L\omega_2)H = H_{\mathrm{I}}\omega_1+H_{\mathrm{II}}\omega_2+H_{\mathrm{III}}\omega_{\mathrm{III}}, \tag{13}$$

definieren, woraus die Formel folgt

$$\boxed{\begin{aligned} H_{\mathrm{I}} &= H_1-LH_3-n(M+IL)H, \\ H_{\mathrm{II}} &= H_2-MH_3+nLH, \\ H_{\mathrm{III}} &= H_3. \end{aligned}} \tag{14}$$

Die Definitionsgleichung zeigt, dass die ersten zwei von den Ableitungen von höherer Ordnung bei eins als H sind, während die letzte von derselben Ordnung wie H ist:

$$H_{\mathrm{I}} = \sigma^{n+1}\overline{H}_{\overline{\mathrm{I}}}, \qquad H_{\mathrm{II}} = \sigma^{n+1}\overline{H}_{\overline{\mathrm{II}}}, \qquad H_{\mathrm{III}} = \sigma^{n}\overline{H}_{\overline{\mathrm{III}}}.$$

Ausserdem besteht die Relation

$$I_{\mathrm{I}} = 0, \qquad I_{\mathrm{II}} = 0. \tag{15}$$

Man überzeugt sich, dass die Integrabilitätsbedingungen und die verallgemeinerte BIANCHIsche Identität dann folgendermassen lauten:

$$\begin{cases} H_{\mathrm{II\,III}}-H_{\mathrm{III\,II}} = -H_{\mathrm{I}}-IH_{\mathrm{II}}-(\mathfrak{L}+I\mathfrak{M})H_{\mathrm{III}}-n\mathfrak{M}H, \\ H_{\mathrm{III\,I}}-H_{\mathrm{I\,III}} = -H_{\mathrm{II}}-\mathfrak{M}H_{\mathrm{III}}+n\mathfrak{L}H, \\ H_{\mathrm{I\,II}}-H_{\mathrm{II\,I}} = n\mathfrak{N}H, \end{cases} \tag{16}$$

wobei

$$\mathfrak{N} = LL_3 + M(M+IL)_3 - L_1 - (M+IL)_2 , \tag{17}$$

und

$$\mathfrak{M}_{II} + \mathfrak{M}_I I + \mathfrak{L}_I = 0 ,$$

$$\mathfrak{N}_{III} + \mathfrak{N} I + \mathfrak{L}_{II} - \mathfrak{M}_I = \mathfrak{L}^2 + I\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \mathfrak{M}^2 . \tag{18}$$

Die in dieser Weise gewonnenen Kovarianten I, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bilden die fundamentalen konformen im Falle $I_3 \neq 0$.

4. Zweitens betrachten wir den Fall, dass die konforme Invariante I nicht konstante Ortsfunktion ist, so dass $I_3 \equiv 0$. Zweimalige Differenzierung von I in bezug auf ω_1 und ω_2 gibt die Gleichungen

$$I_1 = \sigma\bar{I}_{\bar{1}} , \qquad I_2 = \sigma\bar{I}_{\bar{2}} , \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \rho_1 I_1 - \rho_2 I_2 = I_{11} - \sigma^2\bar{I}_{\bar{1}\bar{1}} , \qquad \rho_2 I_1 + \lambda I_2 = I_{12} - \sigma^2\bar{I}_{\bar{1}\bar{2}} , \\ \rho_2 I_2 - \lambda(I_1 + II_2) = I_{22} - \sigma^2\bar{I}_{\bar{2}\bar{2}} \end{gathered} \tag{20}$$

und folglich

$$I_{11} + II_{12} + I_{22} \equiv E = \sigma^2\bar{E} \equiv \sigma^2(\bar{I}_{\bar{1}\bar{1}} + \bar{I}\bar{I}_{\bar{1}\bar{2}} + \bar{I}_{\bar{2}\bar{2}}) . \tag{21}$$

Setzen wir nun voraus, dass die Kovariante

$$D \equiv I_1^2 + II_1 I_2 + I_2^2$$

von Null verschieden ist, so wird ρ_1 und ρ_2 aus (20) folgendermassen gelöst:

$$\rho_1 = (M+IL) - \sigma(\bar{M} + \bar{I}\bar{L}), \qquad \rho_2 = \sigma\bar{L} - L , \tag{9'}$$

wo

$$L = \frac{I_2 I_{11} - I_1 I_{12}}{D} , \qquad M = \frac{I_1 I_{11} + (I_2 + II_1) I_{12}}{D} \tag{22}$$

(8) Ausgehend von der Integrabilitätsbedingung $\rho_{12} = \rho_{21}$ von (9) ergibt sich auch die konforme Kovariante zweiter Ordnung $\mathfrak{N}$.

ist. Mit Hilfe von (9′) ist es möglich, wie früher in § 3, die konformen kovarianten Ableitungen durch dieselbe Formel (14) zu definieren. Die dabei auftretenden Kovarianten erster Ordnung sind

$$(10') \quad \begin{cases} \mathfrak{L} \equiv L+(M+IL)_3 = \dfrac{I_2(I_{11}+II_{12}+I_{22})-I_1 I_2^2}{D} = \dfrac{I_2(E-I_1 I_2)}{D}, \\ \mathfrak{M} \equiv M-L_3 = I_1 \cdot \dfrac{I_{11}+II_{12}+I_{22}-I_1 I_2}{D} = \dfrac{I_1(E-I_1 I_2)}{D}. \end{cases}$$

Überdies ergibt sich die Relation

$$(15') \qquad I_{1\,1} = I_{2\,1} = I_{1\,2} = 0, \qquad I_{2\,2} = I_{11}+II_{12}+I_{22} = E.$$

Auch in der Lage von (16′) stehen

$$(16') \quad \begin{cases} H_{2\,3}-H_{3\,2} = -H_1-IH_2-(\mathfrak{L}+I\mathfrak{M}+I_1)H_3-n\mathfrak{M}H, \\ H_{3\,1}-H_{1\,3} = -H_2-\mathfrak{M}H_3+n\mathfrak{L}H, \\ H_{1\,2}-H_{2\,1} = -\mathfrak{K}H_3+n\mathfrak{M}H, \end{cases}$$

wobei

$$\mathfrak{K} = K+L_2-M+L(\mathfrak{L}+I_1)+(M+IL)\mathfrak{M}_1,$$
$$\mathfrak{N} = LL_3+M(M+IL)_3-L_1-(M+IL)_2.^{(9)}$$

Es soll nun die analytische Form des Raumes $I_3 \equiv 0$ und $D \equiv 0$ bestimmt werden, um in diesem Falle die konformen Eigenschaften zu betrachten. Wählen wir also das Koordinatensystem in solcher Weise, dass die von y' unabhängige Invariante I nur von einer der Koordinaten, z.B. x, abhängig wird, so wird auch das nicht konstante Verhältniss $I_1/I_2 = \alpha$[10] nur von x abhängig[11]. Aus der Relation

$$dI = I_x dx = I_1\omega_1+I_2\omega_2 = I_1 F dx+\left(I_1 X+\frac{I_2}{W}\right)(dy-y'dx)$$

(9) Aus (15′) und (16′) folgt $\mathfrak{K} : \mathfrak{N} = I_1 : I_2$.

(10) Weder I_1 noch I_2 verschwinden.

(11) Wenn das Verhältniss I_1/I_2 nur von dem Orte abhängt, so ist notwendigerweise $D \equiv 0$.

folgt

$$I_1 X + \frac{I_2}{W} = 0 \qquad \text{oder} \qquad aF_{y'}^2 = FF_{y'y'} .$$

Durch Integration ergibt sich ohne weiteres

$$F = c(y' + d)^{\frac{1}{1-a^2}} ,$$

wobei c und d nur von dem Orte abhängig sind. Bei der Koordinatentransformation

$$x^* = \frac{1}{1-a^2} , \qquad y^* = f(x, y) ,$$

wo die Funktion f der Differentialgleichung $f_x = d(x, y) f_y$ genügt, gelangt man zu der normale Form

$$\omega = F\,dx = a(x, y) y'^x\,dx . \tag{23}$$ (12)

Da die Formen aller Räume, welche den Relationen $I_3 \equiv 0$, $D \equiv 0$ genügen, bei geeigneten Koordinatentransformationen zu der normalen Form (23) gehen, können sie konform aufeinander abgebildet werden, wenn wir

$$\sigma = \frac{\bar{a}(x, y)}{a(x, y)}$$

setzen. Nebenbei erkennt man aus (23), dass die Transformationen

$$y^* = f(y) , \qquad x^* = x , \tag{24}$$

und nur solche, den Raum konform auf sich selbst abbilden, dass also der Raum die unendliche Gruppe (24) als die konformen Transformationen gestattet[13].

(12) Durch Wahl solches Koordinatensystems hat die Invariante I den Wert

$$I = \frac{\pm (2x-1)}{\sqrt{x(x-1)}} .$$

(13) Es gibt die konforme Abbildung dieser Räume, bei der die beliebigen, von jeder der Linien $I =$ konst. nur einmal geschnittenen Kurven einander entsprechen.

5. Schon in der oben zitierten Arbeit hat CARTAN die analytische Form des MINKOWSKIsche Raumes von konstantem I angegeben[14]. Mit ihrer Hilfe können wir leicht das konforme Problem auflösen; aber wir gehen jetzt nicht auf diesem Wege, sondern bestimmen von unserem Standpunkte aus die verallgemeinerten metrischen Räume von konstantem I.

Es sei jetzt ein FINSLERscher Raum $I=$ konst. gegeben. Dafür, dass der Raum konform auf dem MINKOWSKIsche $I=$ konst., $K=0$ abgebildet werden soll, muss die Ortsfunktion $\sigma(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (5) genügen, d.h.

$$\rho_{11}+I\rho_{12}+\rho_{22}-K=0\,. \tag{25}$$

Infolge der Integrabilitätsbedingungen von ρ und der BIANCHIschen Identität (C16) erhalten wir

$$(\rho_{11}+I\rho_{12}+\rho_{22}-K)_3=-I(\rho_{11}+I\rho_{12}+\rho_{22}-K)\,,$$

daraus folgt, dass (25) nur eine Gleichung gibt, obwohl die linke Seite von y' abhängt. Die Existenz der Lösungen dieser Differentialgleichung bedeutet, dass ein beliebiger Raum von konstantem I mit dem speziellen MINKOWSKIschen und folglich auch mit einem beliebigen anderen von demselben I konform gegenseitig abhängig ist, und dass die dabei in Betracht kommenden konformen Transformationen sogleich gefunden werden, indem wir die den MINKOWSKIschen Raum konform in sich selbst abbildenden Transformationen ableiten.

Wir legen vorübergehend in dem MINKOWSKIschen Raum ein gewöhnliches kartesisches Koordinatensystem zugrunde, dann hängt die Funktionen F und somit auch X, W, I nur von y' ab. Die Differentialgleichung (25) lautet in gewöhnlicher Form

$$\begin{aligned}(26)\quad &(W^2X^2-IWX+1)\rho_{xx}\\ &+\big(2y'(W^2X^2-IWX+1)-FW(2WX-1)\big)\rho_{xy}\\ &+\big(y'^2(W^2X^2-IWX+1)-y'FW(2WX-I)+F^2W^2\big)\rho_{yy}=0\,,\end{aligned}$$

(14) A. a. O., S. 135.

wo die Koeffizienten von ρ_{xx}, ρ_{xy} und ρ_{yy} die Funktionen von nur y' sind. Da aber die (25), wie wir schon gesehen haben, für die verschiedenen Werte von y' nur eine Gleichung gibt, müssen die Verhältnisse dieser Koeffizienten von y' unabhängig und also konstant sein. Andererseits lässt im allgemeinen eine Differentialgleichung von konstanten Koeffizienten

$$a\,\rho_{xx}+b\,\rho_{xy}+c\,\rho_{yy}=0$$

durch reelle lineare Transformation $(x, y)\rightarrow(u, v)$ zu einer der normalen Formen

$$\text{(27)}\qquad \rho_{uu}+\rho_{vv}=0\,,\qquad \rho_{uu}-\rho_{vv}=0\,,\qquad \rho_{vv}=0$$

führen. Wenden wir nun die reelle lineare Koordinatentransformation an, die (26) zu der normalen Form führt, so soll die in diesem Koordinatensysteme auftretende Differentialgleichung (26) eben die Gestalt (27) haben. Daher können wir die Form von (26) als normal voraussetzen, ohne die Allgemeinheit zu verlieren.

(i) $\rho_{yy}=0$. Aus

$$W^2X^2-IWX+1=0\,,\qquad 2WX-I=0$$

folgt

$$I=2\,,\qquad WX=1=-FW_{y'}\,.$$

Eine leichte Rechnung gibt $F=ce^{ay'}$; nach einer Transformation von der Form $x=s\bar{x}$, $y=t\bar{y}$ erhalten wir

$$\text{(A)}\qquad \boxed{Fdx=e^{y'}dx\,.}$$

Die konformen Transformationen auf sich selbst werden durch

$$x=f(x^*)\,,\qquad y=f'(x^*)y^*+g(x^*)$$

und

$$\rho=A(x)y+B\,,\qquad \sigma=e^{Ay+B}$$

gegeben, welche Gesamtheit eine unendliche Gruppe mit zwei willkürlichen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bildet.

(ii) $\rho_{xx}+\rho_{yy}=0$. Aus

$$W^2X^2-IWX+1 \equiv V = y'^2V-y'FW(2WX-I)+F^2W^2,$$
$$2y'V = FW(2WX-I)$$

oder

$$(1+y'^2)V^2 = F^2W^2, \qquad \frac{2y'}{1+y'^2} = \frac{2WX-I}{FW} = \frac{(FW)_{y'}}{FW}$$

folgt

$$FW = c(1+y'^2), \qquad WX-\frac{I}{2} = cy', \qquad V = c^2(1+y'^2),$$

wo

$$c^2 = 1-\frac{I^2}{4}.$$

Daraus ergibt sich

(B) $$\boxed{Fdx = e^{\frac{I}{\sqrt{4-I^2}}\tan^{-1}y'} \cdot \sqrt{1+y'^2}\cdot dx} \qquad (2>I\geqq 0).$$

(iii) $\rho_{xx}-\rho_{yy}=0$.

(C) $$\boxed{Fdx = y'^{\frac{\sqrt{I^2-4}+I}{2\sqrt{I^2-4}}}\cdot dx} \qquad (I>2).$$

Die zu (B) bzw. (C) gehörigen konformen Transformationen werden durch

$$x+iy \equiv z = f(z^*) \equiv f(x^*+iy^*)^{(15)}$$

bzw.

$$x = f(x^*), \qquad y = g(y^*)$$

gegeben.

Sapporo, Juni 1934.

(15) $f(z^*)$ ist eine beliebige analytische Funktion von z^*.