ÜBER DIE KONSTRUKTION ALGEBRAISCHER ZAHLKÖRPER UNENDLICHEN GRADES

Von

Mikao MORIYA

§ 1.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir einige algebraische Zahlkörper von unendlichem Grade (wir wollen sie kurz „unendliche Zahlkörper" nennen) konstruieren, in denen eine sehr merkwürdige Eigenschaft hervortritt, die in den algebraischen Zahlkörpern von endlichem Grade (wir nennen sie kurz „endliche Zahlkörper") niemals vorkommt. Um den Gegensatz zur späteren Untersuchung deutlicher zu machen, geben wir zunächst einige Sätze über die endlichen Zahlkörper.

Zuerst wollen wir den folgenden Satz, der als der TSCHEBOTAREFFsche Dichtigkeitssatz[1] bekannt ist, in einer anderen Form darstellen.

Satz 1. *Es sei Ω ein endlicher Zahlkörper, K sein endlicher galoisscher Erweiterungskörper, und $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von K/Ω. Für eine zyklische Untergruppe $\{s\}$ aus $\mathfrak{G}$, die durch ein Element s aus $\mathfrak{G}$ erzeugt ist, existieren unendlich viele Primideale aus $\mathfrak{G}$, die $\{s\}$ als ihre Zerlegungsgruppe haben.*

Zur Vereinfachung nennen wir die oben betrachteten Primideale die $\{s\}$ zugehörigen Primideale.

Satz 2. *Es sei Ω ein endlicher Zahlkörper und k seine Erweiterung von endlichem Grade. Wenn es in k überhaupt ein Primideal*

(1) TSCHEBOTAREFF, Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, wenn zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann., 95 (1926). Siehe auch HASSE, Bericht über neuere Untersuchung und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II, Jahresbericht der D.-M.-V. (1930) der Ergänzungsbände VI. Band, S. 133.

Journal of Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Ser. I, Vol. II, No. 3, 1934.

vom Relativgrade f in bezug auf Ω gibt, dann gibt es unendlich viel solche.

Beweis. Es sei K der kleinste k enthaltende galoissche Zahlkörper über Ω, und $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von K/Ω. k gehöre zu einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal vom Relativgrade f in bezug auf Ω, und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K. Ferner seien $\mathfrak{G}_Z$, $\mathfrak{G}_T$ die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach Ω. Der Durchschnitt g_z bzw. g_t von $\mathfrak{G}_Z$ bzw. $\mathfrak{G}_T$ mit $\mathfrak{U}$ ist bekanntlich die Zerlegungs- bzw. Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach k. Nach der galoisschen Theorie wissen wir, dass $\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$ und g_z/g_t zyklisch sind. Wenn man den Index von $\mathfrak{G}_Z$ nach $\mathfrak{G}_T$ bzw. den von g_z nach g_t mit F bzw. $\bar{f}$ bezeichnet, dann ist $f=\dfrac{F}{\bar{f}}$.

Wir behaupten nun folgendes:

Es gibt ein Element aus $\mathfrak{G}_Z$, dessen f-te Potenz erst in $\mathfrak{U}$ fällt, also erst Element aus g_z wird.

Es sei σ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$, (d. h. die F-te Potenz von σ fällt erst in $\mathfrak{G}_T$) und $\bar{b}$ der früheste Exponent von σ, derart dass $\sigma^{\bar{b}}$ erst Element aus $\mathfrak{U}$, danach also Element aus g_z wird. Ferner sei $\sigma^b T$ ein erzeugendes Element von g_z/g_t, wobei T ein Element aus $\mathfrak{G}_T$ bedeutet. Dann ist $(\sigma^b T)^{\bar{f}}$[2] ein Element aus g_t, um so mehr Element aus $\mathfrak{G}_T$; folglich muss $\sigma^{b\bar{f}}$ ein Element aus $\mathfrak{G}_T$ sein. Da $f\bar{f}=F$ ist, so muss b unbedingt durch f teilbar sein. Weil $\sigma^b T$ ein erzeugendes Element von g_z/g_t ist, gilt $(\sigma^b T)^a=\sigma^{\bar{b}}t$, wobei t ein Element aus g_t bedeutet. Hieraus folgt $\sigma^{ab}T'=\sigma^{\bar{b}}t$, wo T' ein Element aus $\mathfrak{G}_T$ ist. Also ist

$$\sigma^{ab-\bar{b}}=t(T')^{-1},$$

d. h. $\sigma^{ab-\bar{b}}$ ist ein Element aus $\mathfrak{G}_T$. Da σ ein erzeugendes Element aus $\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$ ist, so muss

$$ab-\bar{b}\equiv 0 \pmod{F}.$$

(2) Da $\mathfrak{G}_T$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}_Z$ ist, so ist $(\sigma^b T)^{\bar{f}}=\sigma^{b\bar{f}}\bar{T}$ mit einem geeigneten Element $\bar{T}$ aus $\mathfrak{G}_T$.

sein, und daraus folgt, dass $\bar{b}$ durch f teilbar ist, weil b durch f teilbar ist.

Nun sei $\bar{b} = ff^*$. Dann ist $\sigma^* = \sigma^{f*}$ ein Element, dessen f-te Potenz erst in $\mathfrak{U}$, also in g_z fällt. σ^* ist also eines der gesuchten Elemente.

Nun betrachten wir die durch σ^* erzeugte zyklische Gruppe $\{\sigma^*\}$. Die Ordnung von $\{\sigma^*\}$ ist offenbar durch f teilbar. Nach Satz 1 gibt es unendlich viele Primideale in K, die zu $\{\sigma^*\}$ gehören. Da σ^{*f} erst in $\mathfrak{U}$ fällt, so sind fast alle[3] zu $\{\sigma^*\}$ gehörigen Primideale in K Primteiler derjenigen Primideale aus k, deren Relativgrade nach Ω f sind.

Satz 3. *Es sei k ein beliebiger Erweiterungskörper vom Grade n über einem endlichen Zahlkörper Ω. Wenn n durch eine Primzahl l teilbar ist, dann gibt es in k unendlich viele Primideale vom Relativgrade l in bezug auf Ω.*

Beweis. K sei der kleinste k enthaltende galoissche Körper über Ω. $\mathfrak{G}$ sei die galoissche Gruppe von K/Ω, und $\mathfrak{U}$ die invariante Gruppe von k. Dann ist n der Index von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{U}$. Es sei $\mathfrak{G}_l$ eine SYLOWSCHE Gruppe von $\mathfrak{G}$ in bezug auf l. Dann gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{G}_l$, welches nicht zu $\mathfrak{U}$ gehört, weil sonst n zu l prim sein müsste. s^{l^ν} werde erst Element aus $\mathfrak{U}$. Dann ist $s^{l^{\nu-1}} = s'$ ein Element, dessen l-te Potenz erst Element aus $\mathfrak{U}$ wird. Nach Satz 1 gibt es unendlich viele Primideale aus K, die zur Gruppe $\{s'\}$ gehören. Diese Primideale sind fast alle Primteiler derjenigen Primideale aus k, deren Relativgrade in bezug auf Ω l sind.

Auf Grund von Satz 2 und 3 können wir weiterhin folgendes behaupten:

Satz 4. *Es sei Ω ein endlicher Zahlkörper und k irgendeine endliche Erweiterung von Ω. Dann gibt es in k unendlich viele Primideale, deren Relativgrade nach Ω grösser sind als 1.*

---

(3) Hier meine ich unter dem Wort „fast alle", dass man die Diskriminantenteiler von K/Ω, die zu $\{\sigma^*\}$ gehören (also endlich viele Primideale), ausschliessen soll.

§ 2.

Im betonten Gegensatz zu den endlichen Zahlkörpern gilt Satz 4 allgemein nicht mehr für die unendlichen Zahlkörper. Vielmehr existieren unendliche Zahlkörper, für die der folgende Satz gilt:

Es existieren unendliche Zahlkörper, derart beschaffen, dass es in ihren geeigneten Erweiterungen von endlichem Grade nur endlich viele Primideale gibt, deren Relativgrade in bezug auf den Grundkörper grösser sind als 1.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir vorerst den folgenden Existenzsatz beweisen:

Satz 5. *Es sei Ω ein endlicher Zahlkörper und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ eine Primidealmenge aus Ω. Ferner seien $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1t_1}; f_{21}, \ldots, f_{2t_2}; \ldots; f_{r1}, f_{r2}, \ldots, f_{rt_r}$ gegebene natürliche Zahlen. Dann existiert ein unendlicher Zahlkörper, in dem nur $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$ endlich viele Primteiler $\mathfrak{P}_{i1}, \ldots, \mathfrak{P}_{it_i}$ enthalten, und der Relativgrad[4] von $\mathfrak{P}_{i\nu}$ nach Ω $f_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, t_i)$ ist, aber aus einer von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ verschiedenen Primidealmenge $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l, \ldots, \mathfrak{q}_l$ immer diejenigen Primteiler hat, deren Relativgrade nach Ω alle durch eine beliebig bestimmte natürliche Zahl h_l teilbar sind.*

Beweis. Zum Beweis benutzen wir einen von Herrn HASSE[5] bewiesenen Existenzsatz. Man kann einen endlichen Zahlkörper k_1 über Ω konstruieren, so dass in k_1 die in Voraussetzung gegebenen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{q}_1$ die folgende Primidealzerlegung besitzen:

$$\mathfrak{p}_i = \left(\prod_{\varkappa=1}^{t_i} \mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(1)}\right)^{e_i}$$

mit
$$N_{k_1\Omega}(\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(1)}) = \mathfrak{p}_i^{f_{i\varkappa}} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, r \\ \varkappa = 1, \ldots, t_i \end{pmatrix},$$

(4) Wir definieren den Relativgrad eines Primideals nach seinem Grundkörper wie in einer Arbeit von HERBRAND. Siehe HERBRAND, Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini, Math. Ann., Bd. 106, S. 478. Im folgenden bezeichnen wir diese Arbeit mit *H.*

(5) HASSE, Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper, Math. Ann., Bd. 95, S. 229.

wobei $e_i \sum_{\varkappa=1}^{t_i} f_{i\varkappa}$ = der Grad m_1 von k_1 nach Ω ist. Ferner ist

$\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{Q}_{11}^{(1)})^{e_{11}} \ldots . (\mathfrak{Q}_{1\mu}^{(1)})^{e_{1\mu}}$ mit $N_{k_1\Omega}(\mathfrak{Q}_{11}) = \mathfrak{q}_1^{f_1^{(1)}}, \ldots ., N_{k_1\Omega}(\mathfrak{Q}_{1\mu}^{(1)}) = \mathfrak{q}_1^{f_\mu^{(1)}}$.
Dabei sind $f_1^{(1)}, \ldots, f_\mu^{(1)}$ alle durch h_1 teilbar und $e_{11}f_1^{(1)} + \ldots + e_{1\mu}f_\mu^{(1)} = m_1$.

Dann kann man einen Zahlkörper k_2 vom Grade m_2 über k_1 so konstruieren, dass in k_2 die folgende Primidealzerlegung stattfindet:

$$\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(1)} = (\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(2)})^{m_2} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots ., r \\ \varkappa = 1, \ldots ., t_i \end{pmatrix},$$

und alle Primteiler $\mathfrak{Q}_{21}^{(2)}, \ldots ., \mathfrak{Q}_{2\nu}^{(2)}$ von $\mathfrak{q}_2$ nur diejenigen Relativgrade nach k_1 haben, die sämtlich durch h_2 teilbar sind.

Weiter kann man dieses Verfahren folgendermassen fortsetzen: Man kann nämlich den Körper k_3 vom Grade m_3 über k_2 so konstruieren, dass in k_3

$$\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(2)} = (\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(2)})^{m_3} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots ., r \\ \varkappa = 1, \ldots ., t_i \end{pmatrix}$$

sind, und jeder Primteiler von $\mathfrak{q}_3$ aus Ω einen durch h_3 teilbaren Relativgrad nach k_2 hat. Im Allgemeinen macht man es so: Man soll über k_{n-1} einen Zahlkörper k_n vom Grade m_n konstruieren, derart dass in k_n

$$\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(n-1)} = (\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(n)})^{m_n} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots ., r \\ \varkappa = 1, \ldots ., t_i \end{pmatrix}$$

sind, und jeder Primteiler von $\mathfrak{q}_n$ aus Ω den durch h_n teilbaren Relativgrad über k_{n-1} hat.

Nun bestimmt eine Körperfolge $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ über Ω einen unendlichen Zahlkörper k, der die im Satz 5 verlangte Eigenschaft hat. Das beweist man folgendermassen:

1. $\mathfrak{p}_i$ sei ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots ., \mathfrak{p}_r$. Dann ist $\mathfrak{p}_i$ nur durch diejenigen Primteiler aus k teilbar, deren Grade nach Ω $f_{i\varkappa}$ sind. Denn $\mathfrak{p}_i$ ist durch die Primideale $\mathfrak{P}_{i\varkappa}$ aus k teilbar, die durch die Primidealfolge $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots ., \mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(n)}, \ldots .$ definiert sind. Wir benutzen die Bezeichnung $\mathfrak{P}_{i\varkappa} = \{\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(n)}\}$. Nach der Konstruktion von k hat $\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(1)}$ den Relativgrad $f_{i\varkappa}$ nach Ω, aber $\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(2)}, \mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(3)}, \ldots .$ haben den

Relativgrad 1 nach $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Also hat $\mathfrak{P}_{i\nu}^{(n)}$ den Relativgrad $f_{i\nu}$ über Ω[6]. (Es ist auch leicht einzusehen, dass jedes $\mathfrak{p}_i$ in k nur durch endlich viele Primideale $\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{P}_{i2}, \ldots, \mathfrak{P}_{it_i}$ teilbar ist.)

2. Es sei $\mathfrak{q}_r$ ein beliebiges Primideal aus der Primidealmenge $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l, \ldots$. Nun sei $\mathfrak{Q}_r = \{\mathfrak{Q}_r^{(s)}\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ ein Primteiler von $\mathfrak{q}_r$ in k. Da nach der Konstruktion von k $\mathfrak{Q}_r^{(r)}$ aus k_r den durch h_r teilbaren Relativgrad nach k_{r-1} hat, so hat $\mathfrak{Q}_r$ den durch h_r teilbaren Relativgrad nach Ω. Damit ist der Beweis beendet.

Durch den obigen Satz kann man auch folgenden Satz beweisen;

Satz 6. *Es sei Ω ein endlicher Zahlkörper, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ seien eine Primidealmenge aus Ω und $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1t_1}; f_{21}, f_{i2}, \ldots, f_{2t_2}; \ldots; f_{r1}, f_{r2}, \ldots, f_{rt_r}$ gegebene natürliche Zahlen. Es existiert ein unendlicher Zahlkörper k über Ω und eine Erweiterung von endlichem Grade über k, derart dass jedes Primideal $\mathfrak{p}_i$ in K endlich viele Primteiler hat und die Relativgrade dieser Primteiler nach k $f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{it_i}$ sind, aber alle anderen Primideale aus K den Relativgrad 1 nach k haben.*

Beweis. Zunächst konstruieren wir einen Körper Ω_0 vom Grade n über Ω, derart dass in Ω_0 die folgende Primidealzerlegung stattfindet:

$$\mathfrak{p}_i \doteq (\mathfrak{P}_{i1}^{(0)} \ldots \mathfrak{P}_{it_i}^{(0)})^{e_i} \quad \text{mit} \quad N_{\Omega_0\Omega}(\mathfrak{P}_{i\nu}^{(0)}) = \mathfrak{p}_i^{f_{i\nu}},$$

wobei $e_i \sum_{\nu=1}^{t_i} f_{i\nu} = n$ $\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, r \\ \nu = 1, \ldots, t_i \end{pmatrix}$ sind, und ferner für ein von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{a}$ aus Ω

$$\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{A}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{A}}_n \quad \text{mit} \quad N_{\Omega_0\Omega}(\overline{\mathfrak{A}}_i) = \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{A}}_i \neq \overline{\mathfrak{A}}_j \quad (i \neq j) \quad \text{ist.}$$

Es sei h eine natürliche Zahl, welche durch die Relativgrade aller Primideale aus Ω_0 (in bezug auf Ω) teilbar ist. Dann können wir nach Satz 5 einen Zahlkörper k so konstruieren, dass die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{a}$ in k sämtlich nur einen einzigen Primteiler haben und sogar ihre Relativgrade nach Ω 1 sind, aber die von ihnen

(6) *H.* S. 478.

verschiedenen Primideale aus Ω in k nur diejenigen Primteiler besitzen, deren Relativgrade in bezug auf Ω immer durch h teilbar sind.

Durch die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in k und Ω_0 sieht man sofort, dass k und Ω_0 ausser Ω keinen Zahlkörper gemeinsam besitzen. Nun bilden wir das Kompositum K von k und Ω_0. k sei durch eine Körperfolge $k_0 = \Omega$, k_1, ..., k_s, ... definiert. Dann ist K durch die Körperfolge Ω, $\Omega_0 = K_0$, $\Omega_0 k_1 = K_1$, ..., $\Omega_0 k_s = K_s$, ... definiert.

Dass jedes $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, ..., r)$ in K nur endlich viele verschiedene Primteiler hat, kann man folgenderweise beweisen:

Nach der Konstruktion von k hat $\mathfrak{p}_i$ nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{p}_i^{(\infty)}$ in k. Da K eine endliche Erweiterung über k ist, so enthält $\mathfrak{p}_i^{(\infty)}$ in K nur endlich viele verschiedene Primteiler.(7) Also enthält $\mathfrak{p}_i$ in K nur endlich viele verschiedene Primteiler.

Nun sei $\mathfrak{P}_i$ ein beliebiger Primteiler von $\mathfrak{p}_i$ in K und $\mathfrak{P}_i$ sei durch die Primidealfolge $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{P}_i^{(0)}$, $\mathfrak{P}_i^{(1)}$, ..., $\mathfrak{P}_i^{(s)}$, ... definiert, wobei $\mathfrak{P}_i^{(s)}$ $(s = 0, 1, ...)$ die durch $\mathfrak{P}_i$ teilbaren Primideale aus K_s sind. (Also ist $\mathfrak{P}_i^{(0)}$ ein Primideal unter $\mathfrak{P}_{i1}^{(0)}$, ..., $\mathfrak{P}_{it_i}^{(0)}$.) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\mathfrak{P}_i^{(0)} = \mathfrak{P}_{i1}^{(0)}$, also $N_{\Omega_0\Omega}(\mathfrak{P}_i^{(0)}) = N_{\Omega_0\Omega}(\mathfrak{P}_{i1}^{(0)}) = \mathfrak{p}^{f_{i1}}$ ist.

$\mathfrak{p}_i^{(1)}$, $\mathfrak{p}_i^{(2)}$, ... $\mathfrak{p}_i^{(s)}$, ... seien die durch $\mathfrak{P}_i$ teilbaren Primideale (wir nennen sie auch „die $\mathfrak{P}_i$ entsprechenden Primideale") aus k_1, k_2, ..., k_s, ... Dann ist nach der Konstruktion von k

$$\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{p}_i^{(s)})^{m_1 m_2 \cdots m_s},$$

wobei m_1, m_2, ..., m_s die Relativgrade von k_1/k_0, k_2/k_1, ..., k_s/k_{s-1} sind. Da Ω_0 und k_s über Ω teilerfremd sind, so ist der Relativgrad $f_i^{(s)}$ von $\mathfrak{P}_i^{(s)}$ nach k_s gleich

$$\frac{f_{i1}}{(f_{i1}, 1)} = f_{i1}\,,^{(8)}$$

weil der Relativgrad von $\mathfrak{p}_i^{(s)}$ nach Ω 1 ist. Daraus folgt nach der

(7) *H.* S. 484. Théorème 10.
(8) *H.* S. 489. Lemme 2.

Definition über den Relativgrad[9], dass $\mathfrak{P}_i$ den Relativgrad f_{i1} in bezug auf k hat.

Für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}_{i\nu}^{(0)}$ unter $\mathfrak{P}_{i1}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{P}_{it_i}^{(0)}$ gibt es immer ein Primideal in K, welches Primteiler von $\mathfrak{P}_{i\nu}^{(0)}$ ist. Aus der obigen Beweisführung ergibt sich, dass der Relativgrad dieses Primideals nach k $f_{i\nu}$ ist. Also hat jeder Primteiler von $\mathfrak{p}_i$ einen Wert von $f_{i1}, \ldots, f_{ir_i}$ als seinen Relativgrad in bezug auf k, und für jedes $f_{i\nu}$ von $f_{i1}, \ldots, f_{it_i}$ gibt es in K mindestens einen Primteiler von $\mathfrak{p}_i$, dessen Relativgrad $f_{i\nu}$ ist.

Mit derselben Überlegung kann man auch beweisen, dass das Primideal $\mathfrak{a}$ in K nur diejenigen Primteiler hat, deren Relativgrade nach k 1 sind.

Nun sei $\mathfrak{Q}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ primes Primideal aus K. $\mathfrak{q}$ sei das $\mathfrak{Q}$ entsprechende Primideal aus Ω und $\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \ldots$ $\mathfrak{Q}^{(s)}, \ldots$ die $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Primideale aus $K_0, K_1, \ldots, K_s, \ldots$. Ferner seien $\mathfrak{q}^{(1)}, \mathfrak{q}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{q}^{(s)}, \ldots$ die $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Primideale aus $k_1, k_2, \ldots, k_s, \ldots$. Es seien h_s $(s = 1, 2, \ldots)$ die Relativgrade von $\mathfrak{q}^{(s)}$ nach Ω und f sei der Relativgrad von $\mathfrak{Q}^{(0)}$ nach Ω. Dann sind die Relativgrade von $\mathfrak{Q}^{(s)}$ nach k_s

$$\frac{f}{(f, h_s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots).^{(10)}$$

Wenn s hinreichend gross ist, dann ist h_s durch h, also durch f teilbar (nach der Konstruktion von k). Daher sind immer $\frac{f}{(f, h_s)} = 1$, wenn s genügend gross ist, d. h. der Relativgrad von $\mathfrak{Q}$ nach k ist 1. Damit ist der Beweis fertig.

Bemerkung 1. Nach diesem Satz kann man insbesondere einen unendlichen Zahlkörper und seinen endlichen Erweiterungskörper K so konstruieren, dass alle Primideale aus K den Relativgrad 1 nach k haben.

Bemerkung 2. Auf Grund derselben Überlegung wie im Satz 6 kann man einen unendlichen Zahlkörper k und seine endliche galois-

(9) *H.* S. 483. Définition.
(10) *H.* S. 489. Lemme 2.

sche (auch abelsche und zyklische) Erweiterung K über k konstruieren, derart dass in K nur endlich viele Primideale existieren, deren Relativgrade nach k grösser sind als 1, aber die anderen Primideale alle die Relativgrade 1 nach k haben.

§ 3.

In diesem Paragraphen konstruieren wir einen unendlichen Zahlkörper, für dessen beliebige Erweiterung von endlichem Grade Satz 2 und Satz 3 stets gelten.

Es seien $l_1 < l_2 < \ldots, < l_s < \ldots$ unendlich viele verschiedene Primzahlen. Dann können wir über Ω einen zylischen Zahlkörper k_1 vom Grade l_1 und über k_1 einen zyklischen Zahlkörper k_2 vom Grade l_2 konstruieren. Man kann allgemein einen zyklischen Zahlkörper vom Grade l_n über k_{n-1} konstruieren. Dann definiert die Körperfolge $\Omega, k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ einen unendlichen Zahlkörper k.

Satz 7. *Es sei K ein beliebiger Erweiterungskörper vom Grade n über k. Dann gilt für K Satz 2 und Satz 3.*

Beweis. Wenn μ eine geeignete natürliche Zahl ist, dann ist K durch eine Körperfolge $\Omega, k_1, \ldots, k_\mu, K_\mu, K_{\mu+1}, \ldots, K_s, \ldots$ definiert[11], wobei K_s eine Erweiterung vom Grade n über k_s ist. $\mathfrak{P}$ sei ein Primideal aus K, welches den Relativgrad f nach k hat. Ferner sei $\mathfrak{P}$ durch die Primidealfolge $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\mu)}, \mathfrak{P}^{(\mu)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(s)}, \ldots$ de niert, wobei $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\mu)}$ die $\mathfrak{P}$ entsprechenden Primideale aus $\Omega, k_1, \ldots, k_\mu$ und $\mathfrak{P}^{(s)}$ $(s = \mu, \mu+1, \ldots)$ die $\mathfrak{P}$ entsprechenden Primideale aus K_s bedeuten. Da der Relativgrad von $\mathfrak{P}$ nach k f ist, so haben $\mathfrak{P}^{(s)}$ immer den Relativgrad f nach k_s, wenn s hinreichend gross ist[12].

Nun nehmen wir s $(s \geqq \mu)$ so gross, dass alle $l_{s+1}, l_{s+2}, \ldots$ grösser sind als f. Nach Satz 2 in § 1 gibt es in K_s unendlich viele Primideale, deren Relativgrade nach k_s f sind. Es sei $\mathfrak{Q}^{(s)}$ ein beliebiges

(11) Für eine algebraische Zahl α sei $K = k(\alpha)$. Dann ist α schon eine Wurzel einer in k_μ irreduziblen Gleichung n-ten Grades, ist also $K_\mu = k_\mu(\alpha)$, wenn μ hinreichend gross ist. Ferner folgt, dass $K_{\mu+1} = k_{\mu+1}(\alpha), \ldots, K_s = k_s(\alpha), \ldots$ sind.

12) *H.* S. 484.

unter solchen Primidealen. Dann ist ein Primteiler $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{Q}^{(s)}$ aus K vom Relativgrad f nach k. Denn seien $\mathfrak{Q}^{(s)}$, $\mathfrak{Q}^{(s+1)}$, ... $(s \geqq \mu)$ die $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Primideale aus K_s, K_{s+1}, ... Dann sind die Relativgrade $f = f^{(s)}$, $f^{(s+1)}$, ... von $\mathfrak{Q}_s$, $\mathfrak{Q}_{s+1}$, ... nach k_s, k_{s+1}, ... durch die folgenden Formeln gegeben:

$$f^{(s+1)} = \frac{f}{(h_{s+1}, f)},$$

$$f^{(s+2)} = \frac{f}{(h_{s+2}, f)},$$

$$\vdots \quad ,$$

wobei $h_{s+\nu}$ den Relativgrad des $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Primideales aus $k_{s+\nu}$ nach k_s bedeutet. Da h_{s+1}, h_{s+2}, ... Teiler von l_{s+1}, $l_{s+1}l_{s+2}$, ... und nach der Wahl von s f zu l_{s+1}, l_{s+2}, ... prim sind, so sind alle $f^{(s+1)}$, $f^{(s+2)}$, ... gleich f. Also ist der Relativgrad von $\mathfrak{Q}$ nach k gleich f. Weil es in $K^{(s)}$ unendlich viele dieser $\mathfrak{Q}^{(s)}$ gibt, so existieren in K unendlich viele Primideale, deren Relativgrade nach k f sind.

Nun sei l ein Primteiler von n. Da die Relativgrade von K_μ/k_μ, $K_{\mu+1}/k_{\mu+1}$, ..., n sind, so gibt es nach Satz 3 in K_μ, $K_{\mu+1}$, ..., K_s, ... unendlich viele Primideale, deren Relativgrade nach k_μ, $k_{\mu+1}$, ..., k_s, ... l sind. Wenn s hinreichend gross ist, dann sind alle l_{s+1}, l_{s+2}, ... prim zu l. Es sei $\mathfrak{Q}^{(s)}$ ein Primideal aus K_s, dessen Relativgrad nach k_s gleich l ist. Dann folgt nach dem obigen Beweis, dass ein Primteiler $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{Q}^{(s)}$ in K den Relativgrad l nach k hat. Da nach Satz 2 in § 1 in K_s unendlich viele Primideale existieren, deren Relativgrade in bezug auf k_s l sind, so gibt es in K unendlich viele Primideale, deren Relativgrade nach k l sind. Damit ist der Beweis beendet.

Den 26. Juni 1934.
Mathematisches Institut
der Hokkaidô Kaiserlichen Universität
zu Sapporo.