HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | ZUR THEORIE DER UNITÄREN GEOMETRIE |
| Author(s) | Hombu, Hitoshi |
| Citation | Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 3(1), 027-042 |
| Issue Date | 1935 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/55909 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | JFSHIU_03_N1_027-042.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

# ZUR THEORIE DER UNITÄREN GEOMETRIE

Von

Hitoshi HOMBU

## I.

1. In den zentrierten affinen komplexen Raum von $n$ Dimensionen kommt eine Metrik hinein durch die Angabe von dem stets reelle positive Werte annehmenden Betrag des Vektors $v^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$(1) \qquad (vv) = g_{\lambda \mathrm{M}} v^\lambda v^{\mathrm{M}} ,$$

wo $v^{\mathrm{M}}$ die Konjugierten von $v^\mu$ bedeuten, und es ist

$$(2) \qquad g_{\lambda \mathrm{M}} = \bar{g}_{\mu \Lambda} .$$

Die Transformationen des affinen Vektorkörpers, welche die Form (1) d.h. den Betrag jedes Vektors invariant erhalten, werden die unitären Transformationen genannt.

Ist der Rang von $g_{\lambda \mathrm{M}}$ gleich $n$, so kann man bekanntlich für die $v^\mu$ eine lineare Koordinatentransformation mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante, zugleich für die Konjugierten $v^{\mathrm{M}}$ die konjugierte so bestimmen, dass der positive definite HERMITEsche Ausdruck sich zur normalen Form

$$(3) \qquad (vv) = \sum v^i v^I$$

bringen lässt. Das neue Koordinatensystem heisst normal.

In einem normalen Koordinatensystem wird eine infinitesimale unitäre Abbildung durch die folgende Form mit reellen Parametern $e^i_{\cdot j}, f^i_{\cdot j}$ gegeben:

$$(4) \qquad Uf = \sum d^i_{\cdot j} v^j \frac{\partial f}{\partial v^i} = \sum (e^i_{\cdot j} + i f^i_{\cdot j}) v^j \frac{\partial f}{\partial v^i} ,$$

$$e^i_{\cdot j} = -e^j_{\cdot i} , \qquad f^i_{\cdot j} = f^j_{\cdot i} .$$

2. Eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $X_n$ ist der Inbegriff der Werte, die $n$ Variablen $x^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ annehmen. $X_n$ wird die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller solchen Koordinatentransformationen unterworfen, bei denen die neuen Koordinaten $x^k$, $k = 1', 2', \ldots, n'$ analytische Funktionen von $x^\nu$ sind und eine nicht verschwindende Funktionaldeterminante haben. Die konjugierten $x^K$, $K = \bar{1}', \ldots, \bar{n}'$ von $x^k$ sind dann analytische Funktionen von $x^N$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Transformationen der konjugierten in eineindeutiger Weise zugeordnet.

In jedem Punkte von $X_n$ betrachtet man erstens die Grössen erster Art (gewöhnliche kontravariante, kovariante und gemischte Grössen) bzw. die Grössen zweiter Art, die sich in üblicher Weise bei Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ bzw. $\bar{\mathfrak{G}}$ transformieren. Zweitens wird nach SCHOUTEN und VAN DANTZIG[1] der Begriff der HERMITEschen Grössen definiert, deren Bestimmungszahlen sich wie das Produkt der Bestimmungszahlen von Grössen erster und zweiter Art transformieren: z. B.

$$g_{iJ} = A_i^\lambda A_J^M g_{\lambda M} ,$$

wobei

$$A_i^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} , \qquad A_J^M = \frac{\partial x^M}{\partial x^J} .$$

In $X_n$ sei ein positiver definiter HERMITEscher Tensor $g_{\lambda M}$ zweiten Grades und $n$-ten Ranges eingeführt. $X_n$, die dann die HERMITEsche Massbestimmung

$$ds^2 = g_{\lambda M} dx^\lambda dx^M$$

bekommen hat, soll unitär heissen und mit $U_n$ bezeichnet werden. In $U_n$ hat SCHOUTEN und VAN DANTZIG erst eine lineare Übertragung in solcher Weise hergeleitet, dass bei der Parallelverschiebung eines Vektors sein Betrag unverändert bleibt und dass sie noch drei natürlichen (intrinsèque) Forderungen genügt, aufgefasst als eine

(1) J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Über unitäre Geometrie, Math. Ann., 103 (1930), S. 319-346.

gewöhnliche lineare Übertragung in einer reellen $X_{2n}$, deren Koordinaten $\frac{1}{2}(x^\lambda + x^\Lambda) \equiv x^{\lambda r}$ und $\frac{1}{2i}(x^\lambda - x^\Lambda) \equiv x^{\lambda i}$ sind. Die lineare Mannigfaltigkeit, die die Linienelemente in einem Punkte erzeugen, ist ein zentrierter affiner komplexer Raum. Um also die unitäre Übertragung, die von SCHOUTEN und VAN DANTZIG stammt, vollständig festzulegen, ist es hinreichend, die dritte der drei Forderungen zusammen mit der Forderung, dass die linearen Abbildungen von der Übertragung unitär seien, aufzustellen.

3. Im Folgenden möchte ich eine neue verallgemeinerte Geometrie begründen, indem die Massbestimmung in $X_n$ sich folgendermassen definiert:

$$(5) \qquad ds^2 = \Omega(x^\lambda, x^\Lambda, dx^\lambda, dx^\Lambda) ,$$

wobei die Funktion $\Omega$ stets reelle Werte annimmt und positiv-homogen von erster Dimension in bezug auf $dx^\lambda$ und auch auf $dx^\Lambda$ ist.

In jedem Punkte in $X_n$ wird jedes System von $n$ Differentialen $dx^\lambda$ (und zugleich $dx^\Lambda$) der Koordinaten als eine Richtung im Punkte aufgefasst, und ein Linienelement erster Ordnung bedeutet ein System von $2n$ Werten von $x^\lambda$ und $dx^\lambda = x^{\lambda\prime} ds$. Der Punkt $x$ heisse das Zentrum des Linienelementes. Die $X_n$ heisse die verallgemeinerte komplexe Mannigfaltigkeit erster Ordnung $K_n^{(1)}$, wenn zu jedem Punkte in $X_n$ jedes System von Differentialen $dx^\lambda$ adjungiert wird, anders gesagt, die $K_n^{(1)}$ ist der Inbegriff der Linienelemente erster Ordnung in $X_n$, die mit $(x, dx)$ oder $(x, x')$ angedeutet werden.[1]

In $K_n^{(1)}$ definitionsgemäss wird eine Metrik

$$(6) \qquad g_{\lambda M}(x^\lambda, x^\Lambda, x^{\lambda\prime}, x^{\Lambda\prime})\,\delta x^\lambda \delta x^M, \quad g_{\lambda M} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^{\lambda\prime} \partial x^{M\prime}}$$

in der Umgebung des Elementes $(x, x')$ eingeführt, die die quadrierte Entfernung zwischen den Zentrums $x$ und $x+\delta x$ des Elementes $(x, x')$

(1) Vgl. A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo 56 (1932), S. 245-276.

und des benachbarten $(x+\delta x, x'+\delta x')$ gibt. Das in $x^{\lambda\prime}$ und $x^{\Lambda\prime}$ nullte homogene $g_{\lambda M}$ ist ein kovarianter HERMITEscher Tensor zweiten Grades. Es soll vorausgesetzt werden, dass der Rang des Fundamentaltensors $g_{\lambda M}$ gleich $n$ ist; dann dürfen wir $g_{\lambda M}$ und $g^{M\nu}$ zum Herauf- und Herunterziehen der Indizes von den Grössen verwenden, wie bei einem gewöhnlichen Fundamentaltensor.

Der zentrierte affine Raum in jedem Elemente ist HERMITEsch. Die verallgemeinerte unitäre Übertragung $U_n$ wird folgendermassen geschrieben:

$$\delta v^{\nu} = dv^{\nu} + \omega_{\lambda}^{\nu} v^{\lambda}, \qquad \text{konj.}, \tag{7}$$

welche aber der Relation

$$\delta g_{\lambda M} = 0$$

genügt. Um die Übertragung festzulegen, ist es genug, die modifizierte zusätzliche Forderung nach SCHOUTEN und VAN DANTZIG einzuführen: Ein in einer isotropen $X_n$ gelegener Vektor soll bei paralleler Verschiebung in einer in einer isotropen $X_n$ der anderen Art enthaltenen Richtung $(dx, dx')$ in $K_n^{(1)}$ nach einer benachbarten isotropen $X_n$ der erstgenannten Art in einen pseudoäquipollenten Vektor übergehen. Die Übertragung (7) bekommt sodann die Form

$$\delta v^{\nu} = dv^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} v^{\lambda} dx^{\mu} + C_{\lambda\mu}^{\nu} v^{\lambda} dx^{\mu\prime}, \qquad \text{konj.}, \tag{8}$$

wobei $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ und $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ in die Form

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = g^{M\nu} \dfrac{\partial g_{\lambda M}}{\partial x^{\mu}}, \\ C_{\lambda\mu}^{\nu} = g^{M\nu} \dfrac{\partial g_{\lambda M}}{\partial x^{\mu\prime}} = g^{M\nu} \dfrac{\partial^3 \Omega}{\partial x^{M\prime} \partial x^{\lambda\prime} \partial x^{\mu\prime}}, \quad \text{konj.} \end{array} \right. \tag{9}$$

gegeben werden.

4. Das kovariante Differential von $x^{\mu\prime}$ selbst folgt sofort aus (8)

$$\delta x^{\mu\prime} = dx^{\mu\prime} + \Gamma_{\lambda\omega}^{\mu} x^{\lambda\prime} dx^{\omega} = dx^{\mu\prime} + G_{\omega}^{\mu} dx^{\omega}, \quad \text{konj.} \tag{10}$$

$$G_{\omega}^{\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^{\mu} x^{\lambda\prime}, \qquad \text{konj.} \tag{11}$$

Mittels $\delta x^{\mu'}$ lässt (8) sich in die Gestalt

$$(8') \quad \delta v^{\nu} = \left(\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\omega}} - \frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} G^{\mu}_{\omega}\right) dx^{\omega} + \left(\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\Omega}} - \frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{M'}} G^{M}_{\Omega}\right) dx^{\Omega} + \frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\omega'}} \delta x^{\omega'}$$

$$+ \frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\Omega'}} \delta x^{\Omega'} + (\Gamma^{*\nu}_{\lambda\omega} dx^{\omega} + C^{\nu}_{\lambda\omega} \delta x^{\omega'}) v^{\lambda}, \quad \text{konj.}$$

schreiben, wo

$$(12) \qquad \Gamma^{*\nu}_{\lambda\omega} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\omega} - C^{\nu}_{\lambda\mu} G^{\mu}_{\omega}, \quad \text{konj.}$$

Unter Berücksichtigung von (8') werden die kovarianten Ableitungen verschiedener Art folgendermassen definiert[1]:

$$(13) \qquad \begin{cases} \nabla_{\omega} v^{\nu} = \dfrac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\omega}} - \dfrac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} G^{\mu}_{\omega} + \Gamma^{*\nu}_{\lambda\omega} v^{\lambda}, \\ \nabla_{\Omega} v^{\nu} = \dfrac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\Omega}} - \dfrac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{M'}} G^{M}_{\Omega}, \\ \bar{\nabla}_{\omega} v^{\nu} = \dfrac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\omega'}} + C^{\nu}_{\lambda\omega} v^{\lambda}, \\ \bar{\nabla}_{\Omega} v^{\nu} = \dfrac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\Omega'}}. \end{cases}$$

Man berechnet leicht, dass die Krümmungs- und die Torsionsgrösse der Übertragung nur die folgenden nicht verschwindenden Bestimmungszahlen haben:

$$(14) \qquad \begin{cases} S^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\omega} = \Gamma^{*\lambda}_{[\mu\omega]}, & \underset{_}{S}{}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\Omega} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial G^{\lambda}_{u}}{\partial x^{\Omega}} - \dfrac{\partial G^{\lambda}_{u}}{\partial x^{\Lambda'}} G^{\Lambda}_{\Omega}\right), \\ \bar{\underset{_}{S}}{}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\Omega} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G^{\lambda}_{u}}{\partial x^{\Omega'}}, & \bar{S}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\omega} = \dfrac{1}{2} C^{\lambda}_{\mu\omega}, \quad \text{konj.}; \end{cases}$$

(1) Siehe A. KAWAGUCHI, Theory of connections in the generalized FINSLER manifold, III, Proc. of the Imp. Acad., 9 (1933), S. 347-350; E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, Paris, 1934.

$$
(15)\quad \begin{cases} R^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho} = -R^{\cdots\nu}_{\Omega\mu\rho} = \dfrac{\partial \Gamma^{*\nu}_{\rho\mu}}{\partial x^{\Omega}} - \dfrac{\partial \Gamma^{*\nu}_{\rho\mu}}{\partial x^{\Lambda'}} G^{\Lambda}_{\Omega} + C^{\nu}_{\rho\lambda}\left(\dfrac{\partial G^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\Omega}} - \dfrac{\partial G^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\Lambda'}} G^{\Lambda}_{\Omega}\right), \\ \overline{R}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho} = \dfrac{\partial \Gamma^{*\nu}_{\rho\mu}}{\partial x^{\Omega'}} + C^{\nu}_{\rho\lambda}\dfrac{\partial G^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\Omega'}}, \qquad \overline{\overline{R}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho} = \dfrac{\partial C^{\nu}_{\rho\mu}}{\partial x^{\Omega'}}, \\ \overline{R}^{\cdots\nu}_{\Omega\mu\rho} = -\dfrac{\partial C^{\nu}_{\rho\mu}}{\partial x^{\Omega}} + \dfrac{\partial C^{\nu}_{\rho\mu}}{\partial x^{\Lambda'}} G^{\Lambda}_{\Omega}, \quad \text{konj.}, \end{cases}
$$

so dass

$$
(16)\quad \begin{cases} \nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}v^{\nu} = S^{\cdots}_{\mu\omega}\nabla_{\lambda}v^{\nu}, \quad \bar{\nabla}_{[\mu}\bar{\nabla}_{\omega]}v^{\nu} = \bar{\nabla}_{[M}\bar{\nabla}_{\Omega]}v^{\nu} = 0, \\ (\nabla_{\mu}\nabla_{\Omega} - \nabla_{\Omega}\nabla_{\mu})v^{\nu} = -R^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho}v^{\rho} + 2\underline{S}^{\cdots\lambda}_{\mu\Omega}\bar{\nabla}_{\lambda}v^{\nu} - 2\underline{S}^{\cdots\Lambda}_{\Omega\mu}\bar{\nabla}_{\Lambda}v^{\nu}, \\ (\nabla_{\mu}\bar{\nabla}_{\omega} - \bar{\nabla}_{\omega}\nabla_{\mu})v^{\nu} = 2\overline{S}^{\cdots\lambda}_{\mu\omega}\nabla_{\lambda}v^{\nu}, \quad \nabla_{[M}\nabla_{\Omega]}v^{\nu} = S^{\cdots\Lambda}_{M\Omega}\nabla_{\Lambda}v^{\nu}, \\ (\nabla_{\mu}\bar{\nabla}_{\Omega} - \bar{\nabla}_{\Omega}\nabla_{\mu})v^{\nu} = -\overline{R}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho}v^{\rho} + 2\underline{\overline{S}}^{\cdots\lambda}_{\mu\Omega}\bar{\nabla}_{\lambda}v^{\nu}, \\ (\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\Omega} - \bar{\nabla}_{\Omega}\bar{\nabla}_{\mu})v^{\nu} = -\overline{\overline{R}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho}v^{\rho}, \\ (\nabla_{\Omega}\bar{\nabla}_{\mu} - \bar{\nabla}_{\mu}\nabla_{\Omega})v^{\nu} = -\overline{R}^{\cdots\nu}_{\Omega\mu\rho}v^{\rho} + 2\underline{\overline{S}}^{\cdots\Lambda}_{\Omega\mu}\bar{\nabla}_{\Lambda}v^{\nu}, \\ (\nabla_{M}\bar{\nabla}_{\Omega} - \bar{\nabla}_{\Omega}\nabla_{M})v^{\nu} = 2\overline{S}^{\cdots\Lambda}_{M\Omega}\nabla_{\Lambda}v^{\nu}, \quad \text{konj.} \end{cases}
$$

Unmittelbar aus (14) und (15) folgen die Beziehungen

$$
(17)\quad \begin{cases} R^{\cdots\nu}_{\mu\Omega 0} \equiv R^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho}x^{\rho\prime} = 2\underline{S}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega}, \\ \overline{R}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega 0} \equiv \overline{R}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho}x^{\rho\prime} = 2\underline{\overline{S}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega}. \\ \overline{R}^{\cdots\nu}_{\Omega\mu 0} \equiv \overline{R}^{\cdots\nu}_{\Omega\mu\rho}x^{\rho\prime} = 0, \qquad \overline{\overline{R}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega 0} \equiv \overline{\overline{R}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho}x^{\rho\prime} = 0, \quad \text{konj.} \end{cases}
$$

und ferner

$$
(18)\quad \begin{cases} R^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho} = 2\bar{\nabla}_{\rho}\underline{S}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega} + 4\overline{S}^{\cdots\pi}_{\mu\rho}\underline{S}^{\cdots\nu}_{\pi\Omega} + 4\underline{\overline{S}}^{\cdots\nu}_{\mu\Lambda}\underline{\overline{S}}^{\cdots\Lambda}_{\Omega\rho}, \\ \overline{R}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho} = 2\bar{\nabla}_{\rho}\underline{\overline{S}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega} + 4\overline{S}^{\cdots\pi}_{\mu\rho}\underline{\overline{S}}^{\cdots\nu}_{\pi\Omega}, \qquad \overline{R}^{\cdots\nu}_{\Omega\mu\rho} = -2\nabla_{\Omega}\overline{S}^{\cdots\nu}_{\mu\rho}, \\ \overline{\overline{R}}^{\cdots\nu}_{\mu\Omega\rho} = 2\bar{\nabla}_{\Omega}\overline{S}^{\cdots\nu}_{\mu\rho}; \quad \text{konj.}, \end{cases}
$$

die besagen, dass die Torsionsgrössen $\underline{S}^{\cdots\lambda}_{\mu\Omega}$, $\underline{\overline{S}}^{\cdots\lambda}_{\mu\Omega}$, $\overline{S}^{\cdots\lambda}_{\mu\omega}$ in unserer Krümmungstheorie dieselbe Rolle spielen, wie der Grundtensor in der BERWALDschen Krümmungstheorie von dem FINSLERschen Raum.

5. In den folgenden Tafeln möchten wir die vollen Identitäten[1] ausser (18) für die Torsionsgrösse sowie für die Krümmungsgrösse

(1) Wir gehen nicht auf die nähere Diskutierung dieser Identitäten ein.

zum Ausdruck bringen, die mit der sogenannten BIANCHIschen Identität analog sind:

$$
(19)\quad \left\{\begin{array}{l}
\nabla_{[\lambda} S_{\mu\omega]}^{\cdot\cdot\,\rho} = 2 S_{\pi[\lambda}^{\cdot\cdot\,\rho} S_{\mu\omega]}^{\cdot\cdot\,\pi}, \quad \nabla_{\mathrm{M}} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\sigma} + R_{[\mu|\mathrm{M}|\omega]}^{\cdot\cdot\,\sigma} = 4 \underline{S}_{[\mu|\mathrm{M}|}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{S}_{\omega]\pi}^{\cdot\cdot\,\sigma}, \\
\nabla_{[\mu} \underline{S}_{\omega]\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\sigma} - S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\pi} \underline{S}_{\pi\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\sigma} + 2 \underline{S}_{\mathrm{M}[\mu}^{\cdot\cdot\,\Lambda} \overline{S}_{\omega]\Lambda}^{\cdot\cdot\,\sigma} = 0, \quad \nabla_{[\mu} \underline{S}_{|\mathrm{M}|\,\omega]}^{\cdot\cdot\,\Lambda} = S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\pi} \underline{S}_{\mathrm{M}\pi}^{\cdot\cdot\,\Lambda}, \\
2 \nabla_{[\mu} \overline{S}_{\omega]\rho}^{\cdot\cdot\,\sigma} + \overline{\nabla}_{\rho} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\sigma} = 4 S_{\pi[\mu}^{\cdot\cdot\,\sigma} \overline{S}_{\omega]\rho}^{\cdot\cdot\,\pi} + 2 S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{S}_{\pi\rho}^{\cdot\cdot\,\sigma}, \\
\overline{R}_{[\omega|\Lambda|\mu]}^{\cdot\cdot\,\pi} = \overline{\nabla}_{\Lambda} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\pi} + 4 \overline{S}_{[\mu|\rho|}^{\cdot\cdot\,\pi} \underline{S}_{\omega]\Lambda}^{\cdot\cdot\,\rho}, \quad \nabla_{[\mu} \overline{S}_{\omega]\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\pi} = S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\lambda} \overline{S}_{\lambda\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\pi}, \\
\overline{\nabla}_{\mathrm{P}} \underline{S}_{\lambda\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\pi} - \nabla_{\mathrm{M}} \overline{S}_{\lambda\mathrm{P}}^{\cdot\cdot\,\pi} + 2 \overline{S}_{\mathrm{MP}}^{\cdot\cdot\,\mathrm{N}} \underline{S}_{\lambda\mathrm{N}}^{\cdot\cdot\,\pi} = 0, \quad \overline{\nabla}_{[\omega} \overline{S}_{|\lambda|\mu]}^{\cdot\cdot\,\sigma} = 2 \overline{S}_{\lambda[\mu}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{S}_{|\pi|\,\omega]}^{\cdot\cdot\,\sigma}, \\
\overline{\nabla}_{[\mu} \underline{S}_{|\mathrm{P}|\,\omega]}^{\cdot\cdot\,\mathrm{N}} = 0, \qquad \overline{R}_{\mathrm{P}[\mu\omega]}^{\cdot\cdot\,\pi} = \overline{\overline{R}}_{[\mu|P|\,\omega]}^{\cdot\cdot\,\pi} = 0, \quad \text{konj.}
\end{array}\right.
$$

und

$$
(20)\quad \left\{\begin{array}{l}
\nabla_{[\mu} R_{\omega]\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\pi} R_{\pi\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + 2 \underline{S}_{\mathrm{M}[\omega}^{\cdot\cdot\,\mathrm{P}} \overline{R}_{\mu]\underline{\mathrm{P}}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \\
\nabla_{[\mathrm{M}} R_{|\omega|\mathrm{N}]\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = S_{\mathrm{MN}}^{\cdot\cdot\,\Lambda} R_{\omega\Lambda\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + 2 \underline{S}_{\omega[\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{R}_{\mathrm{N}]\pi\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \\
\nabla_{[\mu} \overline{R}_{\omega]\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\lambda} \overline{R}_{\lambda\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \quad \nabla_{[\mathrm{M}} \overline{R}_{\mathrm{N}]\lambda\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = S_{\mathrm{MN}}^{\cdot\cdot\,\mathrm{P}} \overline{R}_{P\lambda\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \\
\nabla_{M} \overline{R}_{\lambda\mathrm{P}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} - \overline{\nabla}_{\mathrm{P}} R_{\lambda\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} - 2 \overline{S}_{\mathrm{MP}}^{\cdot\cdot\,\mathrm{N}} R_{\lambda\mathrm{N}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + 2 \underline{\overline{S}}_{\lambda\mathrm{P}}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{R}_{\mathrm{M}\pi\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} \\
\qquad\qquad + 2 \underline{S}_{\lambda\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{\overline{R}}_{\pi\mathrm{P}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 0, \\
\nabla_{\lambda} \overline{R}_{\mathrm{P}\mu\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + \overline{\nabla}_{\mu} R_{\lambda\mathrm{P}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + 2 \overline{S}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\pi} R_{\pi\mathrm{P}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} \\
\qquad\qquad + 2 \underline{\overline{S}}_{\mathrm{P}\mu}^{\cdot\cdot\,\mathrm{N}} \overline{R}_{\lambda\mathrm{N}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} - 2 \underline{S}_{\mathrm{P}\lambda}^{\cdot\cdot\,Q} \overline{\overline{R}}_{\mu Q\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 0, \\
\overline{\nabla}_{[\mu} \overline{R}_{|\mathrm{P}|\,\omega]\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 2 \underline{\overline{S}}_{\mathrm{P}[\mu}^{\cdot\cdot\,\mathrm{N}} \overline{\overline{R}}_{\omega]\mathrm{N}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \quad \overline{\nabla}_{[\mathrm{M}} \overline{R}_{|\lambda|\mathrm{N}]\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 2 \underline{\overline{S}}_{\lambda[\mathrm{N}}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{\overline{R}}_{|\pi|\mathrm{M}]\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \\
\overline{\nabla}_{[\mu} \overline{\overline{R}}_{\omega]\mathrm{P}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 0, \qquad \overline{\nabla}_{[\mathrm{M}} \overline{\overline{R}}_{|\lambda|\mathrm{N}]\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 0, \\
\nabla_{\lambda} \overline{\overline{R}}_{\omega\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} - \overline{\nabla}_{\omega} \overline{R}_{\lambda\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 2 \overline{S}_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\,\pi} \overline{R}_{\pi\mathrm{M}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu}, \\
\nabla_{\mathrm{M}} \overline{\overline{R}}_{\lambda\mathrm{N}\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + \overline{\nabla}_{\mathrm{N}} \overline{R}_{\mathrm{M}\lambda\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} + 2 \overline{S}_{\mathrm{MN}}^{\cdot\cdot\,P} \overline{R}_{\mathrm{P}\lambda\rho}^{\cdot\cdot\,\nu} = 0, \quad \text{konj.}
\end{array}\right.
$$

6. Wie wohl bekannt ist, werden in der $n$-dimensionalen FINSLER-metrischen Mannigfaltigkeit $F_n$ zwei bemerkenswerte Übertragungen $B_n$, $C_n$ von L. BERWALD und E. CARTAN bestimmt, welche beide für die invariantentheoretische Behandlung dieses Raumes eine wichtige Rolle spielen. In ein in dem $F_n$ liegende $X_m$ kommt wieder eine FINSLERsche Metrik hinein, folglich induzieren zwei Übertragungen $B_m$ bzw. $C_m$. Aber im allgemeinen fallen diese keineswegs mit denjenigen Übertragungen zusammen, die aus $B_n$ bzw. $C_n$ durch die Projektionsmethode in die pseudo-normale $(n-m)$-Richtung her-

geleitet werden.[1] Die pseudo-normale Richtung wird in bezug auf die in der Umgebung des Linienelementes definierte Metrik betrachtet. Diese Unbequemlichkeit verschwindet gewissermassen in unserer verallgemeinerten unitären Geometrie.[2]

Es sei eine $X_m$ mittels der Parametergleichungen

$$x^\nu = x^\nu(y^1, \ldots, y^m) \tag{21}$$

mit $m$ komplexen Parametern $y^a$, $a, \ldots, g = 1, \ldots, m$ gegeben. Die Funktionen $x^\nu$ seien im betrachteten Gebiet regulär und die Funktionalmatrix habe überall den Rang $m$. Aus den $\binom{\nu}{a}$-Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors $B$ der $X_m$

$$B_a^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^a}, \quad \text{konj.} \tag{22}$$

und dem Fundamentaltensor $g'_{aB}$ der in $X_m$ induzierten Massbestimmung

$$g'_{aB} = B_a^\lambda B_B^{\mathrm{M}} g_{\lambda \mathrm{M}} \tag{23}$$

lassen sich die $\binom{a}{\nu}$-Bestimmungszahlen des $B$

$$B_\lambda^c = g'^{Bc} B_B^{\mathrm{M}} g_{\lambda \mathrm{M}}, \quad \text{konj.} \tag{24}$$

bilden, für welche besteht

$$B_b^\mu \frac{\partial B_u^c}{\partial y^D} = B_b^\mu \frac{\partial B_u^c}{\partial y^{D'}} = B_b^\mu \frac{\partial B_\mu^c}{\partial y^{d'}} = 0, \quad \text{konj.} \tag{25}$$

Die zum Fundamentaltensor $g'_{aB}$ gehörige Übertragung, induziert in $X_m$, ist nichts anderes als diejenige, die aus der Forderung erhalten

(1) In der Jahresversammlung für 1933 der "Physico-Mathematical Society of Japan" hat der Verfasser eine kleine Bemerkung zur BERWALDschen Übertragung vorgetragen. Für die CARTANsche Übertragung vgl. M. HAIMOVICI, Formules fondamentales dans la théorie des hypersurfaces d'un espaces de FINSLER, Comptes rendus, Paris, 1934, Tome 198.

(2) Alles sind fast analog wie in der Theorie von SCHOUTEN und VAN DANTZIG.

wird, dass das kovariante Differential eines in ihr liegenden Vektors die Projektion des kovarianten Differentials in $U_n$ auf ihm sein soll:

$$\delta' v^c = B^c_\lambda \delta v^\lambda , \qquad \text{konj.} \tag{26}$$

$$\delta' g'_{aB} = 0 ,$$

$$\omega'^c_a = B^{c\mu}_{\lambda a}\omega^\lambda_\mu + B^c_\lambda dB^\lambda_a , \qquad \text{konj.} \tag{27}$$

Für das Linienelement, das in $U_m$ liegt, ergibt sich ohne weiteres

$$dx^\nu = B^\nu_a dy^a , \quad \delta x^{\nu\prime} = B^\nu_a \delta' y^{a\prime} + H^\nu_a dy^a , \quad \text{konj.} \tag{28}$$

wo

$$H^\nu_a = B^\nu_{ab} y^{b\prime} + G^\nu_\omega B^\omega_a - B^\nu_b G'^b_a , \quad \text{konj.} \tag{29}$$

$H^\nu_a$ ist mit dem Index $\nu$ unitärorthogonal zur $U_m$[1]. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Beziehungen zwischen den kovarianten Ableitungen in $U_n$ und $U_m$ für ein in $U_m$ liegendes Vektorfeld $v^\nu$ folgendermassen schreiben:

$$\begin{cases} \nabla'_a v^c = B^{c\mu}_{\lambda a}\nabla_\mu v^\lambda + B^c_\lambda H^\mu_a \bar\nabla_\mu v^\lambda , \quad \bar\nabla'_a v^c = B^{c\mu}_{\lambda a}\bar\nabla_\mu v^\lambda , \quad \text{konj.} \\ \nabla'_A v^c = B^{c\mathrm{M}}_{\lambda A}\nabla_\mathrm{M} v^\lambda + B^c_\lambda H^\mathrm{M}_A \bar\nabla_\mathrm{M} v^\lambda , \quad \bar\nabla'_A v^c = B^{c\mathrm{M}}_{\lambda A}\bar\nabla_\mathrm{M} v^\lambda , \quad \text{konj.} \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} B^\beta_\mu \nabla_\beta v^\nu + H^\beta_\mu \bar\nabla_\beta v^\nu = \nabla'_\mu v^\nu + v^\lambda H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} , \\ B^\mathrm{B}_\mathrm{M}\nabla_\mathrm{B} v^\nu + H^\mathrm{B}_\mathrm{M}\bar\nabla_\mathrm{B} v^\nu = \nabla_\mathrm{M}' v^\nu + v^\lambda H^{\cdot\cdot\nu}_{\mathrm{M}\lambda} , \quad \text{konj.} \\ B^\beta_\mu \bar\nabla_\beta v^\nu = \bar\nabla_\mu' v^\nu + v^\lambda \bar H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} , \quad B^\mathrm{B}_\mathrm{M}\bar\nabla_\mathrm{B} v^\nu = \bar\nabla_\mathrm{M}' v^\nu + v^\lambda \bar H^{\cdot\cdot\nu}_{\mathrm{M}\lambda} , \end{cases} \tag{31}$$

wo

$$B^\alpha_a \delta B^\nu_\alpha = H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} dy^b + H^{\cdot\cdot\nu}_{Ba} dy^B + \bar H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} \delta' y^{b\prime} + \bar H^{\cdot\cdot\nu}_{Ba} \delta' y^{B\prime} ,$$

also

$$\begin{cases} H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B^{\beta\alpha}_{ba}\nabla_\beta B^\nu_\alpha + B^\alpha_a H^\beta_b \bar\nabla_\beta B^\nu_\alpha , \quad \bar H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B^{\beta\alpha}_{ba}\bar\nabla_\beta B^\nu_\alpha , \quad \text{konj.} \\ H^{\cdot\cdot\nu}_{Ba} = B^{\mathrm{M}\alpha}_{Ba}\nabla_\mathrm{M} B^\nu_\alpha + B^\alpha_a H^\mathrm{M}_B \bar\nabla_\mathrm{M} B^\nu_\alpha , \quad \bar H^{\cdot\cdot\nu}_{Ba} = B^{\mathrm{M}\alpha}_{Ba}\bar\nabla_\mathrm{M} B^\nu_\alpha . \quad \text{konj.} \end{cases} \tag{32}$$

(1) In der Tat, $H^\nu_a = C^\nu_\lambda (B^\lambda_{ab} y^{b\prime} + G^\lambda_\omega B^\omega_a)$.

ist. Man sieht leicht, dass

$$(33)\qquad H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}x^{\lambda\prime}=H_{\mu}^{\nu}\,,\quad(\overline{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}x^{\lambda\prime}=H_{\mathfrak{M}\lambda}^{\cdot\cdot\nu}x^{\lambda\prime}=\overline{H}_{\mathfrak{M}\lambda}^{\cdot\cdot\nu}x^{\lambda\prime}=0)\quad\text{konj.}$$

ist, indem man die Relation

$$x^{\alpha\prime}\delta B_{\alpha}^{\nu}=C_{\alpha}^{\nu}\delta x^{\alpha\prime}=H_{\alpha}^{\nu}dy^{a}$$

berücksichtigt. Setzt man

$$L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}=B_{\mu\alpha}^{\mathfrak{z}\nu}\nabla_{\beta}B_{\lambda}^{\alpha}+B_{\alpha}^{\nu}H_{\mu}^{\beta}\overline{\nabla}_{\beta}B_{\lambda}^{\alpha}\,,\quad\text{usw.,}$$

so ist

$$L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}=H_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}\,,\qquad\text{usw.}^{(1)}$$

Für die Bestimmungszahlen von $H_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^{\cdot\cdot\mathfrak{C}}$ gelten wegen (25) und (29)

$$(34)\qquad\begin{cases}H_{ba}^{\cdot\cdot\nu}=\left(\dfrac{\partial B_{a}^{\rho}}{\partial y^{b}}+B_{ab}^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}+B_{a}^{\alpha}H_{b}^{\beta}C_{\alpha\beta}^{\rho}\right)C_{\rho}^{\nu}\,,\\ \overline{H}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}=2B_{ba}^{\mathfrak{z}\alpha}C_{\rho}^{\nu}\overline{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\rho}\,,\quad H_{Ba}^{\cdot\cdot\nu}=\overline{H}_{Ba}^{\cdot\cdot\nu}=0\,,\quad\text{konj.,}\end{cases}$$

woraus (33) wieder folgt. In üblicher Weise aus (31) und (16) folgt

$$(35)\qquad\begin{cases}D_{[\mu}H_{\omega]}^{\nu}=(B_{\mu\omega}^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\rho}+2B_{[\mu}^{\alpha}H_{\omega]}^{\beta}\overline{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\rho})H_{\rho}^{\nu}\,,^{(2)}\\ 2\underline{S}'^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega}=2B_{\mu\Omega}^{\alpha\mathfrak{M}}\underline{S}_{\alpha\mathfrak{M}}^{\cdot\cdot\nu}+2B_{\mu}^{\alpha}H_{\Omega}^{\mathfrak{M}}\underline{\overline{S}}_{\alpha\mathfrak{M}}^{\cdot\cdot\nu}+H_{\alpha}^{\nu}H_{\Omega\cdot\mu}^{\cdot\alpha}-D_{\Omega}H_{\mu}^{\nu}\,,\\ H_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu}=\overline{D}_{\omega}H_{\mu}^{\nu}+2B_{\mu\omega}^{\alpha\beta}H_{\tau}^{\nu}\overline{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\tau}\,,\quad\overline{S}'^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\omega}=B_{\mu\omega\tau}^{\mathfrak{x}\beta\nu}\overline{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\tau}\,,\\ S'^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\omega}=B_{\mu\omega\tau}^{\mathfrak{x}\beta\nu}S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\tau}+2B_{[\mu}^{\alpha}H_{\omega]}^{\mathfrak{z}}B_{\tau}^{\nu}\overline{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\tau}\,,\\ 2\overline{\underline{S}}'^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega}=2B_{\mu\Omega}^{\alpha\mathfrak{M}}\overline{\underline{S}}_{\alpha\mathfrak{M}}^{\cdot\cdot\nu}+H_{\alpha}^{\nu}\overline{H}_{\Omega\cdot\mu}^{\cdot\alpha}-\overline{D}_{\Omega}H_{\mu}^{\nu}\,,\quad\text{konj.}\end{cases}$$

---

(1) $B_{\alpha}^{\nu}\delta B_{\lambda}^{\alpha}=g^{\nu\Delta}g_{\lambda\Sigma}(B_{\Delta}^{\Lambda}\delta B_{\Lambda}^{\Sigma})$.

(2) Es ist zu beachten, dass für jede in $X_m$ definierte Grösse von $U_n$ die invarianten Ableitungen $D_\mu G$, $\overline{D}_\mu G$ (konj.) erklärt werden, wie folgt:

$$D_{\mu}G=B_{\mu}^{\alpha}\nabla_{\alpha}G+H_{\mu}^{\alpha}\overline{\nabla}_{\alpha}G\,,\qquad\overline{D}_{\mu}G=B_{\mu}^{\alpha}\overline{\nabla}_{\alpha}G\,,\quad\text{konj.}$$

$$\delta G=D_{a}Gdy^{a}+D_{A}Gdy^{A}+\overline{D}_{a}G\,\delta' y^{a\prime}+\overline{D}_{A}G\,\delta' y^{A\prime};$$

z. B.

$$H_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu}=D_{\mu}B_{\omega}^{\nu}\,,\qquad\text{usw.}$$

und

$$(36)\quad \begin{cases} R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega\lambda} = B^{\alpha M\rho\nu}_{\mu\Omega\lambda\tau} R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\alpha M\rho} + H^{\alpha}_{\mu} H^{M}_{\Omega} B^{\rho\nu}_{\lambda\tau} \overline{\overline{R}}^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\alpha M\rho} + H^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\lambda} H^{\cdot\nu}_{\Omega\cdot\rho}, \\ \overline{R}'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega\lambda} = B^{\alpha M\rho\nu}_{\mu\Omega\lambda\tau} \overline{R}^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\alpha M\rho} + H^{\alpha}_{\mu} B^{M\rho\nu}_{\Omega\lambda\tau} \overline{\overline{R}}^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\alpha M\rho} + H^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\lambda} \overline{H}^{\cdot\nu}_{\Omega\cdot\rho}, \\ \overline{\overline{R}}'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega\lambda} = B^{\alpha M\rho\nu}_{\mu\Omega\lambda\tau} \overline{\overline{R}}^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\alpha M\rho} + \overline{H}^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\lambda} \overline{H}^{\cdot\nu}_{\Omega\cdot\rho}, \quad \text{konj.}, \end{cases}$$

von denen die letzte die Verallgemeinerung der GAUSSschen Gleichung für $U_m$ in $U_n$ ist.

## II.

**7.** Der Reduktionssatz für die unitäre Übertragung $U_n$ lautet, dass die Differentialkomitanten von $g_{\lambda M}$ die algebraischen Komitanten von $g_{\lambda M}$, $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$, $R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega\lambda}$ (konj.) und den kovarianten Ableitungen von $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$, $R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega\lambda}$ (konj.) sind. Die speziellen Übertragungen $\mathfrak{E}$, für welche die kovarianten Ableitungen von $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$, $R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\Omega\lambda}$ alle identisch verschwinden, bilden deshalb eine bemerkenswerte Klasse. Im folgenden möchte ich eine einleitende Bemerkung für diese Übertragungen vorausschicken, in der sich der fundamentale Satz erwähnen lässt.

In seinen gründlichen Arbeiten[1] hat E. CARTAN alle RIEMANNsche Räume $\mathfrak{E}$ mit solcher Eigenschaft näher untersucht, dass die Parallelverschiebung in diesen Räumen die zu einem zweidimensionalen Elemente gehörige Krümmung, also auch den Krümmungstensor $K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\omega\lambda}$ invariant lässt. Unser fundamentaler Satz und sein Beweisgang sind ganz analog wie dort angegebenen.

Wählt man normales nicht-holonomes lokales Bezugssystem in jedem Punkte der $U_n$ anstatt des zu krummlinigen Koordinaten der $U_n$ tangentialen holonomen Systems, so wird die unitäre Punktübertragung durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$(37)\qquad d\xi^i + \omega^i + \omega^i_j \xi^j = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

(1) E. CARTAN, Sur une classe remarquable d'espaces de RIEMANN, I. II, Bulletin Soc. Math. France, 54 (1926), S. 214–264; 55, S. 114–134; Annali di mat., (4) 4 (1927), S. 209–256; Annales École Norm., (3) 44 (1927), S. 345–467.

wo $\omega^i$ die PFAFFschen Ausdrücke bezüglich der Differentialen der Koordinaten sind und $\omega_j^i = -\bar{\omega}_i^j$ bezüglich dieser Differentialen und derselben der von der Wahl des lokalen Bezugssystems abhängigen Parameter; man setzt

$$\omega^i = \overset{i}{u}_\lambda dx^\lambda \,, \tag{38}$$

$$(g_{)M} = \sum_{i=1}^{n} \overset{i}{u}_\lambda \overset{i}{u}_M \,, \qquad ds^2 = \sum \omega^i \omega^I)^{(1)} \,.$$

Die Torsions- und Krümmungsgrössen lassen sich folgendermassen erklären:

$$(\omega^i)' = \sum_{k=1}^{n} [\omega^k \omega_k^i] - \sum_{k,l} S_{kl}^{\cdot\cdot i} [\omega^k \omega^l] \,, \tag{39}$$

$$(\omega_j^i)' = \sum_{k=1}^{n} [\omega_j^k \omega_k^i] - \sum_{K,l} R_{Klj}^{\cdot\cdot\cdot i} [\omega^K \omega^l] \,. \tag{40}$$

Umgekehrt wird die von SCHOUTEN und VAN DANTZIG aufgestellte Übertragung durch die Gleichungen (37)–(39) charakterisiert. Geht man nämlich aus dem nicht-holonomen Bezugssysteme zu dem holonomen zurück, so ergibt sich aus (39)

$$0 = [dx^\mu, \ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\nu + \Gamma_{\mu\Omega}^\lambda dx^\Omega] - S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} [dx^\mu dx^\nu] \,,$$

also

$$\Gamma_{\mu\Omega}^\lambda = 0 \,.$$

In jedem Punkte der $U_n$ wird die holonomische Gruppe von den Transformationen des Vektorkörpers bei parallelen Umkreisungen geschlossener Kurven betrachtet; die holonomischen Gruppen in den verschiedenen Punkten sind einander homolog.(2) In jedem Punkte der $U_n$ kann man nach CARTAN solches Bezugssystem zugrunde legen, dass die holonomischen Gruppen analytisch in demselben Aus-

(1) $I = \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}$.

(2) Vielleicht wird es nützlich sein, anstatt der holonomischen Gruppe die von den Transformationen des lokalen Bezugssystems (bei Umkreisungen geschlossener Kurven) erzeugte Gruppe zu betrachten.

druck $\Gamma$ dargestellt würden und auch dass die fundamentale Gruppe der $U_n$ die Gruppe $I$ werde. Die in Betracht kommenden Bezugssysteme *in einem Punkte* werden durch die Transformationen aus $\Gamma$ miteinander transformiert, sind folglich von den $r$ Parametern der holonomischen Gruppe $\Gamma$ abhängig. Man bezeichnet mit $U_\alpha f$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$

$$(41) \qquad \begin{cases} U_\alpha f = \sum \underset{\alpha}{d^i_{\cdot j}} v^j \dfrac{\partial f}{\partial v^i} = \sum (\underset{\alpha}{e^i_{\cdot j}} + i \underset{\alpha}{f^i_{\cdot j}}) v^j p_i \,, \\ (\underset{\alpha}{e^i_{\cdot j}} = -\underset{\alpha}{e^j_{\cdot i}}, \quad \underset{\alpha}{f^i_{\cdot j}} = \underset{\alpha}{f^j_{\cdot i}}) \end{cases}$$

die $r$ linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe $\Gamma$. Dann gehen die $\omega^i_j$ bei Verwendung $r$ neuer Ausdrücke über in:

$$(42) \qquad \omega^i_j = \sum_{\rho=1}^{r} \underset{\rho}{d^i_{\cdot j}} \theta^\rho \,, \qquad \text{konj.};$$

die stets reelle Werte annehmenden $\theta^\rho$ sind PFAFFsche Ausdrücke bezüglich der Differentialen der Koordinaten $x^\lambda$, $x^\Lambda$ und der $r$ Parameter der Gruppe $I$, und bilden nebst $\omega^i$, $\omega^I$ ein $(2n + r)$ linear unabhängiges PFAFFsches System.

Die Klammerausdrücke der infinitesimalen Transformationen $U_\alpha f$ werden mit den Strukturkonstanten $c^{\cdot\cdot\tau}_{\alpha\beta}$ gegeben:

$$(U_\alpha U_\beta) = \sum_{\tau=1}^{r} c^{\cdot\cdot\tau}_{\alpha\beta} U_\tau f \,,$$

woraus folgt

$$(43) \qquad \sum_{k=1}^{n} (\underset{\alpha}{d^i_{\cdot k}} \underset{\beta}{d^k_{\cdot j}} - \underset{\beta}{d^i_{\cdot k}} \underset{\alpha}{d^k_{\cdot j}}) = -\sum_{\tau=1}^{r} c^{\cdot\cdot\tau}_{\alpha\beta} \underset{\tau}{d^i_{\cdot j}} \,.$$

Dabei ist es zu beachten, dass alle $c^{\cdot\cdot\tau}_{\alpha\beta}$ reel sind.

8. Infolge (42) folgt aus (39)

$$(44) \qquad \omega^{i\prime} = \sum_{\rho=1}^{r} \underset{\rho}{d^i_{\cdot k}} [\omega^k \theta^\rho] - \sum_{k,l} S^{\cdot\cdot i}_{kl} [\omega^k \omega^l] \,,$$

und aus (40)

$$\sum_{\rho=1}^{r} d_{\cdot j}^{i}{}_{\rho} \left\{\theta^{\rho\prime} - \sum_{(\lambda,\mu)} c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} [\theta^{\lambda}\theta^{\mu}]\right\} = -\sum_{K,h} R_{Khj}^{\cdot\cdot\cdot i} [\omega^{K}\omega^{h}]$$

unter Berücksichtigung von (43), woraus sich ohne weiteres ergibt

$$\theta^{\alpha\prime} - \sum_{(\lambda,\mu)} c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} [\theta^{\lambda}\theta^{\mu}] = -\sum_{K,h} b_{\cdot Kh}^{\alpha} [\omega^{K}\omega^{h}], \tag{45}$$

$$R_{Khj}^{\cdot\cdot\cdot i} = \sum_{\rho=1}^{r} d_{\cdot j}^{i}{}_{\rho} b_{\cdot Kh}^{\rho}, \qquad \text{konj.}, \tag{46}$$

da der Rang der Matrix $(d_{\cdot j}^{i}{}_{\rho}\ \bar{d}_{\cdot j}^{i}{}_{\rho})$ gleich $r$ ist. Weil die linke Seite von (45) reelle Werte annimmt, muss die Relation

$$\bar{b}_{\cdot Kh}^{\alpha} = -b_{\cdot Hk}^{\alpha}$$

bestehen. Wenn man also definitionsgemäss $b_{\cdot Kh}^{\alpha} = -b_{\cdot hK}^{\alpha}$, $b_{\cdot KH}^{\alpha} = b_{\cdot kh}^{\alpha} = 0$, $\bar{d}_{\cdot j}^{i}{}_{\rho} = d_{\cdot J}^{I}{}_{\rho}$, $d_{\cdot j}^{I}{}_{\rho} = d_{\cdot J}^{i}{}_{\rho} = 0$ setzt, so ist

$$R_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}\cdot\cdot\cdot\mathfrak{B}}^{\cdot\cdot\cdot\mathfrak{A}} = \sum_{\rho=1}^{r} d_{\cdot\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}{}_{\rho} b_{\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D}}^{\rho}, \tag{46'}$$

$$\bar{d}_{\cdot\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}{}_{\rho} + d_{\cdot\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}{}_{\rho} = 0, \quad \bar{b}_{\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D}}^{\rho} + b_{\cdot\bar{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}}^{\rho} = 0. \tag{47}$$

Für den Raum $\mathfrak{E}$ erkennt man, dass $R_{Klj}^{\cdot\cdot\cdot i}$, $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ und somit auch $b_{\cdot Kl}^{\alpha}$ konstant sind, und dass wegen der Beziehungen[1]

S.D. (54), (55)
$$\begin{cases} R_{\Omega\mu\lambda N} = -R_{\Omega\mu N\lambda}, & \text{konj.} \\ R_{\Omega\mu\lambda N} - R_{\lambda N\Omega\mu} = 2\nabla_{\lambda} S_{\Omega N\mu} - 2\nabla_{\Omega} S_{\lambda\mu N} \end{cases}$$

für die Bestimmungszahlen $R_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}\cdot\cdot\cdot\mathfrak{B}}^{\cdot\cdot\cdot\mathfrak{A}}$ einfacher

$$\begin{aligned} R_{IjkL} &= -R_{IjLk} = R_{jILk} = -R_{jIkL} \\ &= R_{kLIj} = -R_{kLjI} = R_{LkjI} = -R_{LkIj} \end{aligned} \tag{48}$$

besteht. Der durch die Gleichung

$$R = \sum R_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} p^{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} = \sum R_{IjKl} p^{Ij} p^{Kl} \quad (R_{IjKl} \overset{*}{=} R_{Ijk\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot L})^{(2)}$$

(1) SCHOUTEN und VAN DANTZIG, a. a. O. Die dort aufgestellten Formeln werden mit S. D. zitiert.

2) $p^{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = v^{[\mathfrak{A}} w^{\mathfrak{B}]}$.

definierte Ausdruck wird infolge (46) und (58) folgendermassen umgeschrieben

$$R = \sum_{\alpha,\beta} A^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \quad (A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}) , \tag{49}$$

wo die $\xi_\rho$ linear in bezug auf $p^{Ij}$ und mit der infinitesimalen Transformation $U_\rho f$ verbunden ist:

$$\xi_\rho = \sum d_{Ij}\, p^{Ij} ; \qquad (d_{\rho}^{\cdot\cdot Ij} \overset{*}{=} d_{\rho}^{\cdot\cdot iJ}) , \tag{50}$$

infolgedessen gilt

$$b_{\cdot\cdot Kh}^{\alpha} = \sum_{\rho=1}^{r} A^{\alpha\rho} d_{\rho Kh} . \tag{51}$$

Da

$$\bar{\xi}_\alpha = \sum \bar{d}_{\alpha Ij} p^{Ij} \overset{*}{=} \sum (e_{\alpha}^{\cdot\cdot i}{}_j - i f_{\alpha}^{\cdot\cdot i}{}_j) p^{iJ} = -\sum (-e_{\alpha}^{\cdot\cdot j}{}_i - i f_{\alpha}^{\cdot\cdot j}{}_i) p^{Ji} = \xi_\alpha ,$$

sind die $\xi_\alpha$ und folglich die Koeffizienten $A^{\alpha\beta}$ der $\xi$ in (49) reel.

9. Aus den Beziehungen

$$\text{S.D. (53)} \qquad \begin{cases} R_{\dot\Omega\dot\mu\dot\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - R_{\dot\Omega\dot\lambda\dot\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 2\nabla_\Omega S_{\dot\mu\dot\lambda}^{\cdot\cdot\nu} , \\ 0 = \nabla_{[\omega} S_{\dot\mu\dot\lambda]}^{\cdot\cdot\nu} + 2 S_{[\dot\omega\dot\mu}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\dot\lambda]\alpha}^{\cdot\cdot\nu} , \end{cases} \quad \text{konj.}$$

$$\text{S.D. (58)} \qquad \nabla_{[\mu} R_{\xi]\dot\Omega\dot\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = S_{\dot\mu\dot\xi}^{\cdot\cdot\alpha} R_{\alpha\dot\Omega\dot\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} , \quad \nabla_{[\mu} R_{\xi]\dot\Omega\,\dot\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mathrm{N}} = S_{\dot\mu\dot\xi}^{\cdot\cdot\alpha} R_{\alpha\dot\Omega\,\dot\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mathrm{N}} , \quad \text{konj.}$$

folgt

$$\sum_{\rho} d_{\rho}^{\cdot\cdot m}{}_i\, b_{\cdot\cdot Kj}^{\rho} = \sum_{\rho} d_{\rho}^{\cdot\cdot m}{}_j\, b_{\cdot\cdot Ki}^{\rho} , \quad S_{[\dot i\dot j}^{\cdot\cdot\cdot l} S_{\dot k]\dot l}^{\cdot\cdot\cdot m} = 0 , \quad \text{konj.,} \tag{52}$$

$$S_{\dot i\dot j}^{\cdot\cdot\cdot l} b_{\cdot\cdot Kl}^{\rho} = 0 , \qquad \text{konj.} \tag{53}$$

Da die Formen $R$ und $S_{ijK}\, p^{ij} z^K$ gegenüber der holonomischen Gruppe (41) invariant sein müssen, bestehen die Relationen

$$(c_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\lambda} A^{\mu\rho} + c_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\mu} A^{\lambda\rho}) = 0 , \tag{54}$$

$$d_{\rho}^{\cdot\cdot k}{}_i S_{\dot k\dot j}^{\cdot\cdot\cdot m} - d_{\rho}^{\cdot\cdot k}{}_j S_{\dot k\dot i}^{\cdot\cdot\cdot m} = S_{\dot i\dot j}^{\cdot\cdot\cdot k} d_{\rho}^{\cdot\cdot m}{}_k , \quad \text{konj.} \tag{55}$$

Wenn umgekehrt die Konstanten $d^{i}_{\rho\ :j}$ ($\bar{d}^{i}_{\rho\ :j}+d^{j}_{\rho\ :i}=0$), $c^{\cdot\cdot\ \tau}_{\alpha\beta}$ ($c^{\cdot\cdot\ \tau}_{\alpha\beta}+c^{\cdot\cdot\ \tau}_{\beta\alpha}=0$), $A^{\alpha\beta}$ ($=A^{\beta\alpha}$), von denen die letzten zwei reel sind, die Bedingungen (43), (52)–(55) erfüllen, so gilt die JACOBIsche Identität für das Multiplikationsgesetz von den Operatoren $Y_\rho$, $X_i$, $X_K$, welche folgendermassen erklärt werden:

$$(56)\qquad \begin{cases} (Y_\rho X_i) = -d^{k}_{\rho\ :i}\, X_k f, & \text{konj.} \\ (X_i X_j) = -S^{\cdot\cdot\ k}_{ij}\, X_k f, & \text{konj.} \\ (X_K X_h) = -\sum_{\rho} A^{\sigma\rho} d_{Kh}\, Y_\sigma f, & \text{konj.} \\ (Y_\rho Y_\sigma) = c^{\cdot\cdot\ \alpha}_{\rho\sigma}\, Y_\alpha f, \end{cases}$$

und infolgedessen existieren die $(2n+r)$ PFAFFschen Ausdrücke von den $(2n+r)$ Veränderlichen, die den Differentialgleichungen (44), (45) genügen.

Somit kann man den folgende Satz, wie in der CARTANschen Theorie, leicht bestätigen:

*Es sei ein System der Konstanten* $d^{i}_{\rho\ :j}=-\bar{d}^{j}_{\rho\ :i}$, $c^{\cdot\cdot\ \tau}_{\alpha\beta}=\bar{c}^{\cdot\cdot\ \tau}_{\alpha\beta}=-c^{\cdot\cdot\ \tau}_{\beta\alpha}$, $A^{\alpha\beta}=\bar{A}^{\alpha\beta}=A^{\beta\alpha}$, $S^{\cdot\cdot\ k}_{[ij]}$ *gegeben, welche den Relationen (43), (52)–(55) genügen. Ist ferner der Rang der Matrices* $(d^{i}_{\rho\ :j}\ d^{I}_{\rho\ :J})$ *und* $(A^{\alpha\beta})$ *gleich* $r$, *so existiert ein unitärer Raum* $\mathfrak{E}$ *mit der Torsionsgrösse* $S^{\cdot\cdot\ k}_{ij}$ *und der von (46) und (51) gegebenen Krümmungsgrösse* $R^{\cdot\cdot\cdot\ i}_{Khj}$; *die holonomische Gruppe des Vektorkörpers ist eben die Gruppe* $\Gamma$, *und der Raum* $\mathfrak{E}$ *lässt eine transitive unitäre Bewegungsgruppe* $G$ *zu, deren Struktur sich von (56) erklären lässt.* (Es existiert im allgemeinen keine Spiegelung, die das $ds^2$ unverändert lässt.)

Dezember 1934.