



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGEN DIE DER ERWEITERTEN TRANSFORMATIONS-GRUPPE ANGEHÖREN
Author(s)	Hokari, Shisanji
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 3(1), 015-026
Issue Date	1935
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55911
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_03_N1_015-026.pdf



ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGEN, DIE DER ERWEITERTEN TRANSFORMATIONS- GRUPPE ANGEHÖREN

Von

Shisanji HOKARI

In dieser Arbeit möchten wir die Übertragungen, die zur (analytischen und umkehrbaren) Transformationsgruppe

$$(1) \begin{cases} \bar{y}^i = \bar{y}^i(y^1, y^2, \dots, y^m), & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x^{m+1}, \dots, x^{m+n}; y^1, \dots, y^m), & (\lambda = m+1, \dots, m+n)^{(1)} \end{cases}$$

angehören, behandeln. Diese Transformationsgruppe wurde von Professor A. KAWAGUCHI in seiner Arbeit⁽²⁾: *die Übertragungstheorien der Funktionenräume*, behandelt. Wir zeigen alsdann, dass die vorliegende Arbeit als die speziellen Fälle die Theorien von T. HOSOKAWA,⁽³⁾ A. WUNDHEILER,⁽⁴⁾ V. HLAVATÝ⁽⁵⁾ und É. CARTAN⁽⁶⁾ enthält.

1. Wir nehmen x^λ als das Koordinatensystem der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n an, und adjungieren jedem Punkte in X_n eine N -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_N$, die auf ein System von N reellen Funktionen $v^1, v^2, \dots, v^N$ der m reellen Variablen $y^1, y^2, \dots, y^m$

(1) Die lateinischen Indizes durchlaufen die Werte $1, 2, \dots, m$
griechischen Indizes durchlaufen die Werte $m+1, \dots, m+n$.

(2) A. KAWAGUCHI, The Foundation of the Theory of Displacements, II, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 10 (1934), S. 45–48.

(3) T. HOSOKAWA, Tôkyo Butsuri-gakko Zasshi, Bd. 42 (1933), S. 376–382; Kinematic connections and their application to physics, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 10 (1934), S. 49–52.

(4) A. WUNDHEILER, Kovariante Ableitung und die CESÀROSche Unbeweglichkeitsbedingungen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 36 (1932), S. 104–109.

(5) V. HLAVATÝ, Über eine Art der Punktkonnexion, Mathematische Zeitschrift, Bd. 38 (1933), S. 135–145.

(6) É. CARTAN, Sur les espaces de FINSLER, Comptes Rendus, Bd. 196 (1933), S. 582–586; Les espaces de FINSLER, Actualités scient. et industr. Nr. 79, Exposés de géométrie, Publiés de É. CARTAN, II.

bezogen ist. Wir verstehen unter einem *kontravarianten Punkte* in $\mathfrak{X}_N$ ein System von N reellen Werten, welche n Funktionen $v^1, v^2, \dots, v^N$ annehmen.

Selbstverständlich sollen alle Funktionen v^A ($A = 1, 2, \dots, N$)⁽¹⁾ vom adjungierten Punkte x^λ in X_n abhängen: $v^A(x, y) = v^A(x^{m+1}, \dots, x^{m+n}; y^1, \dots, y^m)$.

Wir setzen voraus, dass die Funktionen v^A sich bei den Transformationen (1) in folgender Weise transformieren:

$$(2) \quad \bar{v}^A = P_F^A v^F,$$

wobei P_F^A im allgemeinen die Funktionen von x^λ und y^i sind und die Funktionaldeterminante $|P_F^A|$ nicht verschwindet. Definieren wir *die lineare Punktübertragung* in $\mathfrak{X}_N$ folgendermassen:

$$(3) \quad \delta v^A = dv^A + \Gamma_F^A v^F,$$

so transformieren sich *die Parameter* Γ_F^A der Übertragung nach (1) in folgender Weise

$$(4) \quad \bar{\Gamma}_F^A = P_M^A (Q_F^N \Gamma_N^M + dQ_F^M)^{(2)},$$

wobei

$$P_N^A Q_F^N = \delta_F^A \quad (3).$$

2. Die vorkommenden Funktionen Γ_F^A , welche die Punktübertragung in $\mathfrak{X}_N$ bestimmen, hängen im allgemeinen von x^λ und y^i ab. Die Funktionen Γ_F^A , welche vorher in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_N$ ausgezeichnet werden müssen, hängen nämlich ausser vom Orte x^λ in der Mannigfaltigkeit X_n auch noch von m Parameter y^i ab. A. WUNDHEILER⁽⁴⁾ hatte den speziellen Fall, wobei m gleich 1 ist, untersucht und bequemlichkeitshalber den Parameter y "Zeit" benannt.

(1) Die grossen lateinischen und griechischen Indizes durchlaufen die Werte 1, 2, ..., N .

(2) Siehe A. KAWAGUCHI, a. a. O., S. 48.

(3) δ_F^A ist das KRONECKERSche Delta, $\delta_F^A = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ für $\begin{matrix} A = F \\ A \neq F \end{matrix}$.

(4) Siehe A. WUNDHEILER, a. a. O.

Wir betrachten zuerst einen besonderen Fall, wobei N gleich $m+n$ ist. Wenn wir ferner

$$\begin{aligned} z^A &= y^i & \text{für} & \quad A = i, \\ z^A &= x^\lambda & \text{für} & \quad A = \lambda \end{aligned}$$

setzen, so folgt

$$(5) \quad P_\alpha^i = Q_\alpha^i = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = m+1, \dots, N,$$

wobei

$$P_M^A = \frac{\partial \bar{z}^A}{\partial z^M}, \quad P_N^A Q_I^N = \delta_I^A.$$

Als die Transformationsformel des kontravarianten Punktes v^A erhalten wir aus (2) und (5) folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \bar{v}^i = P_j^i v^j, \\ \bar{v}^\lambda = P_\mu^\lambda v^\mu + P_j^\lambda v^j, \end{cases}$$

z. B.

$$\begin{cases} d\bar{y}^i = \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j} dy^j, \\ d\bar{x}^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial y^j} dy^j, \end{cases}$$

deshalb sind $dy^1, \dots, dy^m, dx^{m+1}, \dots, dx^N$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Punktes in $\mathfrak{X}_N$.

In solchem Falle bleiben noch alle Relationen richtig, welche wir in Nr. 1 erklärten. Ausser den ausgesprochen Voraussetzungen nehmen wir jetzt ferner noch die weitere an, dass in dem dort betrachteten Bereiche $\mathfrak{X}_N$ die Γ_I^A lineare Funktionen in bezug auf dz^A sind, d.h.

$$\Gamma_I^A = \Gamma_{IA}^A dz^A,$$

wobei Γ_{IA}^A die Funktionen von x und y sind. Wir erhalten aus (4) und (5)

$$(6) \quad \Gamma_{IA}^A d\bar{z}^A = P_M^A \left(Q_I^N \Gamma_{NB}^M dz^B + \frac{\partial Q_I^M}{\partial \bar{z}^B} d\bar{z}^B \right).$$

Die Transformationen (1) werden folgendermassen umgeschrieben:

$$\bar{z}^A = \bar{z}^A(z) ,$$

so

$$d\bar{z}^A = P_A^A dz^A .$$

Die Gleichungen (6) werden demnach wie folgt:

$$(7) \quad \bar{\Gamma}_{IA}^A = P_M^A \left(Q_I^N Q_A^B \Gamma_{NB}^M + \frac{\partial Q_I^M}{\partial \bar{z}^A} \right) ,$$

d. h.

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{jk}^i &= P_l^i \left(Q_j^N Q_k^A \Gamma_{NA}^l + \frac{\partial Q_j^l}{\partial \bar{y}^k} \right) , \\ \bar{\Gamma}_{\alpha k}^i &= P_l^i Q_\alpha^s Q_k^A \Gamma_{sA}^l , \\ \bar{\Gamma}_{j\alpha}^i &= P_l^i Q_j^N Q_\alpha^s \Gamma_{Ns}^l , \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i &= P_l^i Q_\alpha^r Q_\beta^s \Gamma_{rs}^l , \\ (7') \quad \bar{\Gamma}_{jk}^\alpha &= P_A^\alpha \left(Q_j^N Q_k^r \Gamma_{Nr}^A + \frac{\partial Q_j^A}{\partial \bar{y}^k} \right) , \\ \bar{\Gamma}_{\beta k}^\alpha &= P_\delta^\alpha \left(Q_\beta^r Q_k^N \Gamma_{rN}^\delta + \frac{\partial Q_\beta^\delta}{\partial \bar{y}^k} \right) + P_i^\alpha Q_\beta^r Q_k^r \Gamma_{ri}^\alpha , \\ \bar{\Gamma}_{j\beta}^\alpha &= P_A^\alpha \left(Q_j^N Q_\beta^r \Gamma_{Nr}^A + \frac{\partial Q_j^A}{\partial \bar{x}^\beta} \right) , \\ \bar{\Gamma}_{\beta\tau}^\alpha &= P_\delta^\alpha \left(Q_\beta^r Q_\tau^s \Gamma_{rs}^\delta + \frac{\partial Q_\beta^\delta}{\partial \bar{x}^\tau} \right) + P_i^\alpha Q_\beta^r Q_\tau^r \Gamma_{ri}^\alpha . \end{aligned}$$

Der Inbegriff von N Bestimmungszahlen w_A , welche sich bei (1) nach

$$(8) \quad \bar{w}_A = Q_A^r w_r$$

transformieren, wird als *kovarianter Punkt* in $\mathfrak{X}_N$ genannt. Diese Gleichungen lauten wegen (5) und (8) ausgeschrieben

$$\begin{cases} \bar{w}_i = Q_i^j w_j + Q_i^\alpha w_\alpha , \\ \bar{w}_\alpha = Q_\alpha^s w_\beta . \end{cases}$$

Wenn $\varphi(x, y)$ ein Skalar ist, so sind

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^i} = \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^i} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{y}^i} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x^\alpha}, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x^\beta}, \end{cases}$$

deshalb sind $\frac{\partial \varphi}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y^m}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^{m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^{m+n}}$ die Bestimmungszahlen eines kovarianten Punktes in $\mathfrak{X}_N$.

Die zugehörigen kovarianten Ableitungen von v^A bzw. w_A sind durch

$$\nabla_A v^A = \frac{\partial v^A}{\partial z^A} + \Gamma_{BA}^A v^B$$

bzw.

$$(9) \quad \nabla_A w_A = \frac{\partial w_A}{\partial z^A} - \Gamma_{AA}^B w_B$$

gegeben. Wir erhalten aus (9)

$$2\nabla_{[B}\nabla_{C]}w_D = K^A{}_{BCD}w_A,$$

wobei

$$(10) \quad K^A{}_{BCD} = \frac{\partial \Gamma_{BD}^A}{\partial z^C} - \frac{\partial \Gamma_{BC}^A}{\partial z^D} + \Gamma_{DB}^E \Gamma_{EC}^A - \Gamma_{CB}^E \Gamma_{ED}^A.$$

Aus (10) sehen wir, dass folgende Relationen entstehen:

$$K^A{}_{B(CD)} = 0.$$

Wir heissen die $K^A{}_{BCD}$ die Krümmungsgrösse von $\mathfrak{X}_N$.

Wenn die Transformationen von y^i die identischen sind, so erhalten wir

$$P_i^i = Q_i^i = 0 \quad \text{und} \quad P_j^i = Q_j^i = \delta_j^i,$$

deswegen folgt aus (7'):

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{jk}^i &= Q_j^N Q_k^A \Gamma_{NA}^i, \\
 \bar{\Gamma}_{\alpha k}^i &= Q_\alpha^\beta Q_k^A \Gamma_{\beta A}^i, \\
 \bar{\Gamma}_{j\alpha}^i &= Q_j^N Q_\alpha^\beta \Gamma_{N\beta}^i, \\
 \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i &= Q_\alpha^\tau Q_\beta^\delta \Gamma_{\tau\delta}^i, \\
 (7'') \quad \bar{\Gamma}_{jk}^\alpha &= P_A^\alpha \left(Q_j^N Q_k^F \Gamma_{NF}^A + \frac{\partial Q_j^A}{\partial \bar{y}^k} \right), \\
 \bar{\Gamma}_{\beta k}^\alpha &= P_\delta^\alpha \left(Q_\beta^\tau Q_k^A \Gamma_{\tau A}^\delta + \frac{\partial Q_\beta^\delta}{\partial \bar{y}^k} \right) + P_i^\alpha Q^\tau Q_k^F \Gamma_{\tau F}^i, \\
 \bar{\Gamma}_{j\beta}^\alpha &= P_A^\alpha \left(Q_j^N Q_\beta^\tau \Gamma_{N\tau}^A + \frac{\partial Q_j^A}{\partial \bar{x}^\beta} \right), \\
 \bar{\Gamma}_{\beta\tau}^\alpha &= P_\delta^\alpha \left(Q_\beta^\tau Q_\tau^\varepsilon \Gamma_{\tau\varepsilon}^\delta + \frac{\partial Q_\beta^\delta}{\partial \bar{x}^\tau} \right) + P_i^\alpha Q_\beta^\tau Q_\tau^\varepsilon \Gamma_{\tau\varepsilon}^i.
 \end{aligned}$$

Konstruieren wir eine Determinante

$$(11) \quad v^A = \begin{vmatrix} v_1^A & v_2^A & \dots & v_{m+1}^A \\ v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_{m+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^m & v_2^m & \dots & v_{m+1}^m \end{vmatrix}$$

aus $m+1$ kontravarianten Punkten v_a^A ($a = 1, 2, \dots, m+1$) in $\mathfrak{X}_N$, so erhalten wir wegen der Eigenschaft der Determinante $v^i = 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$. Wir erhalten noch die weitere Eigenschaft, dass die Funktionen v^λ sich bei den Transformationen (1) wie ein kontravarianter Punkt transformieren, nämlich

$$(12) \quad \bar{v}^\lambda = P_\mu^\lambda v^\mu.$$

v^A wird also wegen n Bestimmungszahlen v^λ ($\lambda = m+1, \dots, N$) bestimmen, so wird der Inbegriff von n Bestimmungszahlen v^λ als *kontravarianter Vektor im Punkte x^λ der Mannigfaltigkeit X_n* angesehen. Jedem kontravarianten Punkte v^A (in $\mathfrak{X}_N$) mit $v^i = 0$

($i = 1, 2, \dots, m$) sind demnach unendlich viele kontravariante Vektoren zugeordnet. Der Inbegriff von n Bestimmungszahlen w_λ , welche sich bei (1) nach

$$\bar{w}_\lambda = Q_\lambda^\mu w_\mu$$

transformieren, wird als *kovarianter Vektor im Punkte x^λ der X_n* definiert.

Wir führen zunächst einige Beschränkungen, um die kovarianten Ableitungen von Vektoren abzuleiten. Da die Transformationen von y^i identisch sind, v^i ($i = 1, 2, \dots, m$) sind alle Skalaren: $\bar{v}^i = v^i$. Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Punktes v^λ sind

$$\begin{aligned} \text{a) } \nabla_A v^\lambda &= \frac{\partial v^\lambda}{\partial z^A} + \Gamma_{BA}^\lambda v^B, & (\lambda = m+1, \dots, N), \\ \text{b) } \nabla_A v^i &= \frac{\partial v^i}{\partial z^A} + \Gamma_{BA}^i v^B, & (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (13)$$

Dieser kontravariante Punkt mit $v^i=0$ ($i=1, 2, \dots, m$) stellt zugleich unendlich viele kontravariante Vektoren dar. Deshalb werden wir ein System von Werten von v^λ als Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektor verstehen. Verlangen wir, dass die rechten Seiten der Gleichungen (13. b) im Falle identisch verschwinden, so sind

$$\Gamma_{\lambda A}^i = 0.$$

Für alle kontravariante Punkte sind diese Bedingungen dafür hinreichend, aber wir nehmen hier stärkere Bedingungen vor, nämlich

$$(14) \quad \Gamma_{BA}^i = 0. \quad (1)$$

(1) Unter diesen Bedingungen erhalten wir für allgemeine Übertragung $\nabla_A v^i = \frac{\partial v^i}{\partial z^A}$. Wenn die Transformationen von y^i identisch sind, so ist v^i ein Skalar. Die kovarianten Ableitungen eines Skalars φ ist den gewöhnlichen gleich: $\nabla_A \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z^A}$.

Die Punktübertragung Γ mit $\Gamma_{BA}^i = 0$ wollen wir *spezielle Punktübertragung* nennen. Unter diesem Falle vereinfachen sich die letzten Transformationsformeln von (7'') zu

$$(15) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\tau}^\alpha = P_\delta^\tau \left(Q_\beta^\tau Q_\tau^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\varepsilon}^\delta + \frac{\partial Q_\beta^\delta}{\partial \bar{x}^\tau} \right),$$

die von den Indizes $1, \dots, m$ unabhängig sind. Die Bestimmungszahlen $K_{\mu\nu}^\lambda$, welche wir *die Bestimmungszahlen der Krümmungsgrösse von X_n* nennen, transformieren sich bei der speziellen Punktübertragung nach (15) von den Indizes $1, \dots, m$ unabhängig und geben uns also einen Affinor:

$$K_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\mu}^\delta \Gamma_{\delta\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\delta \Gamma_{\delta\nu}^\lambda.$$

Wir setzen – analog zur gewöhnlichen Ableitung der Determinante – die folgenden Regel voraus, um die kovariante Ableitung von Vektoren abzuleiten,

$$(16) \quad \nabla_A v^\lambda = \begin{vmatrix} \nabla_A v_1^\lambda & v_2^\lambda & \dots & v_{m+1}^\lambda \\ \nabla_A v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_{m+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla_A v_1^m & v_2^m & \dots & v_{m+1}^m \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} v_1^\lambda & v_2^\lambda & \dots & \nabla_A v_{m+1}^\lambda \\ v_1^1 & v_2^1 & \dots & \nabla_A v_{m+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^m & v_2^m & \dots & \nabla_A v_{m+1}^m \end{vmatrix}.$$

Wir erhalten nach (16) und (14)

$$(17) \quad \nabla_A v^\lambda = \frac{\partial v^\lambda}{\partial z^A} + \Gamma_{\mu A}^\lambda v^\mu.$$

Führen wir das kovariante Differential ein mittels der Formel

$$\delta = \nabla_A dz^A,$$

so folgt aus den Formeln (17) bei der speziellen Übertragung

$$\delta v^\lambda = dv^\lambda + \Gamma_{\mu A}^\lambda v^\mu dz^A,$$

d. h.

$$\delta v^\lambda = dv^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu + \Gamma_{\mu i}^\lambda v^\mu dy^i.$$

Wir erklären, ebenso wie in dem Falle der gewöhnlichen Vektorübertragung, als Parallelübertragung des kontravarianten Vektors v^λ im Punkte x^λ von x^λ nach dem unendlich benachbarten Punkte $x^\lambda + dx^\lambda$ den Übergang vom Vektor v^λ im Punkte x^λ zum Vektor $v^\lambda + dv^\lambda$ im Punkte $x^\lambda + dx^\lambda$, wenn dv^λ die Bestimmungszahlen:

$$dv^\lambda = -\Gamma_{\mu A}^\lambda v^\mu dz^A$$

hat.

Die Parallelübertragung eines kovarianten Vektors w_λ im Punkte x^λ von x^λ nach dem unendlich benachbarten Punkte $x^\lambda + dx^\lambda$ ist eindeutig definiert durch die Forderung, dass bei simultaner Parallelverschiebung dieses Vektors w_λ und eines beliebigen kontravarianten Vektors v^λ die Grösse $v^\lambda w_\lambda$ ungeändert bleibt. Aus dieser Forderung erhalten wir

$$dw_\lambda = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu w_\nu dx^\mu + \Gamma_{\lambda i}^\nu w_\nu dy^i$$

und als das kovariante Differential des kovarianten Vektors w_λ

$$\delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu w_\nu dx^\mu - \Gamma_{\lambda i}^\nu w_\nu dy^i.$$

Analog für irgendwelche Grössen. Die Übertragung in der Mannigfaltigkeit X_n hängt nach dem Vorhergehenden im allgemeinen ausser vom Orte in X_n auch noch von der Wahl des Parameter ab.

Wenn wir ferner noch $m = 1$ setzen, so erhalten wir die Theorien von T. HOSOKAWA, A. WUNDHEILER und V. HLAVATÝ.

3. Die Übertragung in einem metrischen allgemeinen Raume ist zum erstenmal von L. BERWALD⁽¹⁾ studiert worden. Aus seiner

(1) L. BERWALD, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 34 (1925), S. 213-220; Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Mathematische Zeitschrift, Bd. 25 (1926), S. 40-73. usw.

Arbeit wissen wir, dass bei Parallelübertragung der Figur, die aus gegebenen Vektoren im Punkte und dem *ausgezeichneten Linienelemente* dieses Punktes besteht, längs eines willkürlichen Linienelementes sich im allgemeinen die Länge des Vektors und der Winkel zweier Vektoren in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement ändert. Seit jener Zeit ist von vielen Gelehrten diese Geometrie studiert worden, indem die Übertragungsparameter Γ nicht nur vom Orte, sondern auch von der Richtung in der Mannigfaltigkeit abhängig sind. CARTAN⁽¹⁾ verbesserte die obenerwähnten Unvollkommenheiten, indem er die Übertragung mittels neuer Weise definierte.

Wir kehren zur allgemeinen Punktübertragung zurück und wollen jetzt die CARTANSchen Theorie ableiten.

Wir führen zweitens y^i als das Koordinatensystem der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit Y_m , und adjungieren jedem Punkte in Y_m eine N -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}_N$, die auf ein System von N Funktionen $v^1, v^2, \dots, v^N$ der n reellen Variablen x^λ bezogen ist. Wir setzen voraus, dass *alle Grössen in $\mathfrak{Y}_N$ von dem Verhältniss der Variablen $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ nur abhängen*. Demnach können wir unter einem Systeme der Variablen $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen Vektors⁽²⁾ verstehen und setzen voraus, dass alle vorkommenden Funktionen von x^λ nur von der Richtung des Vektors abhängen sollen. In diesem Falle bleiben auch alle Relationen richtig, welche wir in Nr. 1 erklärten, bestehen. In der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}_N$, die im Punkte der Mannigfaltigkeit Y_m adjungiert wird, betrachten wir ein n -dimensionales Vektorfeld $\mathfrak{B}_n$. Dieses Vektorfeld $\mathfrak{B}_n$ besteht aus den Systemen, welche wir als kontravariante Vektoren heissen, von Funktionen v^A mit $v^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Wir nehmen ferner an, dass

$$m = n \quad \text{und} \quad N = m + n .$$

(1) Siehe É. CARTAN, a. a. O.

(2) Dieser Vektor ist nichts anders als das ausgezeichnete Linienelement.

Ein kontravarianter Vektor wird also wegen n Bestimmungszahlen v^λ ($\lambda = n+1, \dots, 2n$) bestimmt und transformiert sich bei den Transformationen (1) nach (2) in folgender Weise:

$$(18) \quad \bar{v}^\lambda = P_\mu^\lambda v^\mu.$$

x^λ ist also ein kontravarianter Vektor, deshalb muss x^λ sich bei den Transformationen des Koordinatensystems y^μ folgendermassen transformieren:

$$(19) \quad \bar{x}^\lambda = \frac{\partial \bar{y}^{\lambda-n}}{\partial y^{\mu-n}} x^\mu.$$

Aus (18) und (19) erhalten wir

$$P_\mu^\lambda = \frac{\partial \bar{y}^{\lambda-n}}{\partial y^{\mu-n}} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu}.$$

Wenn $v^\lambda w_\lambda$ eine Invariante für jeden beliebigen kontravarianten Vektor v^λ ist, so nennen wir ein System w_λ einen *kovarianten Vektor*. Die Bestimmungszahlen dieses kovarianten Vektors werden sich bei den Transformationen (1) folgendermassen transformieren:

$$\bar{w}_\lambda = Q_\lambda^\mu w_\mu.$$

Wir erhalten aus (3) als kovariantes Differential des kontravarianten Vektors v^λ bzw. kovarianten Vektors w_λ

$$(20) \quad \delta v^\lambda = dv^\lambda + \Gamma_{\mu A}^\lambda v^\mu dz^A$$

bzw.

$$\delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma_{\lambda A}^\mu w_\mu dz^A.$$

Die vorkommenden Parameter sind nur $\Gamma_{\mu A}^\lambda$, deshalb erhalten wir aus (7')

$$\bar{\Gamma}_{\delta k}^\alpha = P_\delta^\alpha \left(Q_\delta^\gamma Q_k^\lambda \Gamma_{\gamma \lambda}^\delta + \frac{\partial Q_\delta^\alpha}{\partial \bar{y}^k} \right)$$

und

$$(21) \quad \bar{F}_{\nu\rho}^{\omega} = \Gamma_{\mu\tau}^{\lambda} P_{\lambda}^{\omega} Q_{\nu}^{\mu} Q_{\rho}^{\tau}.$$

Demnach verstehen wir aus (21), dass $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ die in den λ kontravarianten, in den μ und ν kovarianten Bestimmungszahlen eines Affinors ist.

Schreiben wir genau die Gleichungen (20), so erhalten wir

$$\delta v^{\lambda} = dv^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} v^{\mu} dx^{\nu} + \Gamma_{\mu i}^{\lambda} v^{\mu} dy^i.$$

Die Parallelübertragung in diesem Raume ist also bestimmt durch ein System von (reellen und regulär-analytischen) Funktionen $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ und $\Gamma_{\mu i}^{\lambda}$, die letzten in den x^{λ} positiv-homogen von nullter Dimension sind.

Diese Übertragung ist mit der CARTANSchen Übertragung identisch.

20. Dezember 1934.

Mathematisches Seminar,
Universität zu Sapporo.