THEORIE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER UNENDLICHEN GRADES.

Von

Mikao MORIYA

INHALT

EINLEITUNG.

Die Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, welche zuerst von STIEMKE[1] in Angriff genommen und dann von Herrn KRULL[2] weiter entwickelt wurde, ist von HERBRAND[3] sehr eingehend arithmetisch untersucht worden. Es ist schon bei STIEMKE klar gewesen, dass der sogenannte Fundamentalsatz der Idealtheorie—ein beliebiges Ideal aus einem Zahlkörper ist als ein Potenzprodukt der

(1) STIEMKE, Über unendliche algebraische Zahlkörper, Math. Zeitschr., **25** (1926).
(2) KRULL, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern I, Math. Zeitschr., **29** (1929), und II, Math. Zeitschr., **31** (1930).
Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann, **100** (1928).
(3) HERBRAND, Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini, I, Math. Ann., **106** (1932), und II, Math Ann., **108** (1933).

Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. III, Nos. 3-4, 1935.

Primideale darstellbar—in algebraischen Zahlkörpern unendlichen Grades nicht mehr allgemein gilt. Vielmehr hat Herr KRULL nachher gezeigt, dass sich ein beliebiges ganzes Ideal aus einem algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades als ein kleinstes gemeinsames Vielfach aller Primärkomponenten des Ideals darstellen lässt. Für Untersuchung über die Primärkomponenten hat er den Begriff der Werte von Primäridealen eingeführt. Dieser Begriff der Werte, wie Herr KRULL selber in einer anderen Arbeit[1] gezeigt hat, hat enge Beziehung mit der Bewertungstheorie der Körper.

Endlich ist die galoissche Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades von HERBRAND arithmetisch behandelt. Und zwar läuft seine Untersuchung in zwei Richtungen. Die eine ist die galoissche Theorie der algebraischen Zahlkörper von endlichem Grade über einem algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, und die andere die galoissche Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

Dabei bietet in beiden Fällen die Existenz der „unendlichen Ideale" oft Schwierigkeiten dar, und sie zeigt uns noch, dass die Menge aller Ideale (ausser dem Nullideal) aus einem algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades keine multiplikative Gruppe bildet. Aus dieser Tatsache folgt ohne weiteres, dass die heutige Klassenkörpertheorie im Grossen auf algebraische Zahlkörper unendlichen Grades nicht mehr in originaler Form übertragbar ist. Ob aber die Klassenkörpertheorie im Kleinen für algebraische Zahlkörper unendlichen Grades gilt oder nicht, ist noch eine Frage.

Um dieses Problem zu beantworten, werde ich zuerst in der vorliegenden Arbeit den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines Primideals aus einem algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades untersuchen. Was ist aber der $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper eines algebraischen Zahlkörpers? Wenn der betrachtete Zahlkörper von endlichem Grade ist, dann ist der $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper bekanntlich der Körper aller $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen, welche von den Zahlen des betrachteten Körpers erzeugt sind. Wenn aber der betrachtete Körper von unendlichem Grade ist, dann verlieren

(1) Siehe Fussnote (2) von S. 107.

die $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen allgemein ihre Bedeutung. Wir müssen also in diesem Fall den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper auf andere Weise definieren. Wir führen nämlich für ein Primideal $\mathfrak{p}$ eine $\mathfrak{p}$ zugehörige Bewertung des betrachteten Körpers ein. Wenn man nach KÜRSCHÁK in bezug auf eine $\mathfrak{p}$ zugehörige Bewertung den derivierten Körper des betrachteten Körpers bildet, dann nennt man diesen derivierten Körper den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper. Wenn insbesondere der betrachtete Körper von endlichem Grade ist, dann wird eine $\mathfrak{p}$ zugehörige Bewertung diskret, und daraus folgt bekanntlich, dass der derivierte Körper ein Körper ist, welcher aus den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen besteht.

In § 1 dieser Arbeit will ich die Definition der Bewertung (Exponentenbewertung) voranstellen und anschliessend an diese Definition die Begriffe der Konvergenz, Fundamentalreihen und perfekten Körper einführen. In § 2 will ich zeigen, wie man eine Bewertung eines Körpers in seinem algebraischen Erweiterungskörper 1. Art (endlichen oder unendlichen Grades) erweitern kann. Diese Frage hat schon Herr OSTROWSKI in einer vor kurzem erschienenen Arbeit[1] beantwortet. Satz 5 und Satz 6 sind auch schon von Herrn OSTROWSKI bewiesen, und meine Beweise für die beiden Sätze sind wesentlich gar nicht neu. Als Übergang zu allgemeiner Bewertung entwickle ich in § 3 die Theorie der diskret bewerteten Körper. Mit Hilfe von § 3 untersuche ich in § 4 unendliche algebraische Erweiterungskörper 1. Art k über einem bezüglich einer diskreten Bewertung perfekten Körper k_0. Dabei verstehe ich unter einem unendlichen algebraischen Erweiterungskörper 1. Art k über k_0 denjenigen Körper, der als ein Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen Körpern $k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_n \subset \ldots$ definiert ist, deren jeder aber endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über k_0 ist. Ferner betrachte ich in § 5 über einem in § 4 betrachteten unendlichen algebraischen Erweiterungskörper 1. Art k einen endlichen galoisschen Erweiterungskörper 1. Art K. Ich werde zwischen K und k die HILBERTsche Theorie der galoisschen Zahlkörper entwickeln.

(1) OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Teil I, Math. Zeitschr., **39** (1934).

Die bisherige Theorie kann man auf allgemeine Körper anwenden. Von § 6 an beschränke ich die Körper auf algebraische Zahlkörper. In § 6 führe ich wie Herr KRULL den Begriff der Werte von Idealen ein. Manche Sätze in diesem Paragraphen findet man schon in einer Arbeit von Herrn KRULL[1]. In § 7 untersuche ich ganz unabhängig von der Bewertung der Körper galoissche Zahlkörper endlichen Grades über einem unendlichen algebraischen Zahlkörper. Diese Untersuchung ist von HERBRAND ziemlich weit entwickelt. Aber über die Arbeit von HERBRAND hinaus behandle ich hier Zerlegungs- und Trägheitskörper. Ferner definiere ich die Verzweigungsgruppe etwas anders als HERBRAND. Im letzten Paragraphen definiere ich erst den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines algebraischen Zahlkörpers unendlichen Grades. Ich will in diesem Paragraphen klar machen, wie weit man die Theorie der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades parallel der der üblichen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper entwickeln kann.

Am Ende möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass meine vorliegende Arbeit in manchen Stellen mit den Arbeiten von Herrn DEURING[2], KRULL[3] und OSTROWSKI[4] inhaltlich übereinstimmt, und sogar, dass ich für einige schon bekannte Sätze ihre Beweise hier wiedergebe. Trotzdem findet man doch anderseits manche auf feinere Einzelheiten eingehende Sätze in dieser Arbeit, weil in ihr, wie in § 4, 5 und 7, Körper von spezieller Struktur behandelt werden.

Anschliessend an diese Arbeit beabsichtige ich eine Abhandlung über die Klassenkörpertheorie im Kleinen für algebraische Zahlkörper unendlichen Grades zu veröffentlichen. Wie man wohl sich denken kann, treten dabei viele methodische Schwierigkeiten auf, denen man in der Klassenkörpertheorie im Kleinen für algebraische Zahlkörper endlichen Grades nie begegnet. Die Ursache dieser Schwierigkeiten besteht darin, dass in $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpern von unendlichen algebraischen Zahlkörpern die Bewertung nicht mehr allgemein diskret ist.

---

(1), (3) Siehe Fussnote (2) in Seite 107, und noch KRULL, galoissche Theorie bewerteter Körper, Sitzungsber. d. bayr. Ak. d. W., Math.-Naturw. Abt., 1930.

(2) DEURING, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann., **105** (1931).

(4) Siehe Fussnote in Seite 109.

Verzeichnis einiger inhaltlich verwandter, häufig zitierter Arbeit.

HASSE, Über $\mathfrak{P}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., **104** (1931). Zitiert mit Ha.

HERBRAND, Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini, I, Extensions algébriques de degré fini, Math. Ann., **106** (1932). Zitiert mit He.

KRULL, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern I, Math. Zeitschr., **29** (1929), und II, Math. Zeitschr., **31** (1930). Die erste Arbeit zitiere ich mit K. I, und die zweite mit K. II.

OSTROWSKI, Fragen der allgemeinen Körpertheorie, Jour. f. Math., **143** (1913). Zitiert mit O. I.

Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Teil I, Math. Zeitschr., **39** (1934). Zitiert mit O. II.

§ 1. BEWERTUNG DER KÖRPER.

Bewertung. Wir verstehen unter einer *Bewertung*[1] eines (kommutativen) Körpers k eine eindeutige Funktion φ der Elemente aus k, die vier folgenden Postulaten genügt:

1. $\varphi(a)$ ist eine reelle Zahl für ein Element a aus k, und dem Nullelement ordnen wir ∞ zu. Dies bedeutet aber, dass die Bewertung des Nullelementes grösser ist als Bewertungen aller anderen Körperelemente.

2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ für zwei beliebige Körperelemente a und b.

3. $\varphi(a+b) \geqq \text{Min}(\varphi(a), \varphi(b))$.

4. Es gibt mindestens ein Körperelement a, dessen Bewertung eine von Null verschiedene reelle Zahl ist.

Aus diesen vier Bewertungspostulaten folgen sofort:

(a) $\varphi(1) = 0$ für das Einselement 1[2] aus k,

(b) $\varphi(a+b) = \text{Min}(\varphi(a), \varphi(b))$, wenn $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ ist.

(1) Gegenüber der Bewertung, die von KÜRSCHÁK definiert ist, nennt man auch diese Bewertung die Exponentenbewertung. Wir können aber von unserer Bewertung zu der von KÜRSCHÁK und von der Kürschákschen Bewertung zu unserer übergehen. Die Sätze, welche unter der Kürschákschen Bewertung gelten, bleiben durch kleine Modifikation bei unserer Bewertung auch gültig.

(2) Wenn kein Missverständnis möglich, gebrauche ich im folgenden immer 1 als Symbol des Einselementes.

Ein Körper, dessen jedem Elemente eine Bewertung φ angegeben ist, heisst ein *bewerteter Körper*, und wir nennen φ auch Bewertung des Körpers.

Die Frage, ob man einem gegebenen Körper immer eine Bewertung geben kann, lasse ich hier unberührt. Da ich aber später die algebraischen Körper über einem Körper behandle, so will ich hier eine folgende Bemerkung voranschicken.

Es kann über einem Körper k ein algebraischer bewerteter Körper L nur dann existieren, wenn in k ein Element, dessen Bewertung nicht Null ist, existiert. Denn ein beliebiges Element $\gamma \neq 0$ aus L genügt einer irreduziblen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots . + a_n = 0$$

mit Koeffizienten aus k. Bezeichnet man mit φ die Bewertung von L, so ist

$$\varphi(\gamma^n + a_1 \gamma^{n-1} + \ldots . + a_n) \geqq \text{Min}\,(\varphi(\gamma^n),\ \varphi(a_1\gamma^{n-1}),\ \ldots . ,\ \varphi(a_n))\ .$$

Haben alle Elemente aus k die Bewertungen Null, dann muss

$$\varphi(\gamma^n + a_1 \gamma^{n-1} + \ldots . + a_n) \geqq \text{Min}\,(n\varphi(\gamma)\ ,\ \varphi(a_n))$$

sein. Für $\varphi(\gamma) \neq 0$ bedeutet dies einerseits, dass $\varphi(\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} \ldots . + a_n)$ gleich $n\varphi(\gamma)$ oder $\varphi(a_n)$ sein muss, was aber unmöglich ist, weil $\varphi(\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} \ldots . + a_n)$ anderseits ∞ wird.

Nach dieser Bemerkung kann man behaupten: *Ein absoluter algebraischer Körper von der Primzahlcharakteristik kann nicht bewertet sein.* Denn der genannte Körper ist bekanntlich algebraisch über seinem Primkörper. Da dieser Primkörper endlich viele verschiedene Elemente enthält, so besitzen alle vom Nullelement verschiedenen Elemente aus dem Primkörper Bewetung Null, ist also er nicht bewertet[1]. Hieraus folgt die Behauptung.

Ganze Elemente aus einem bewerteten Körper. Ein Element aus einem bewerteten Körper k heisst *ganz*, wenn seine Bewertung nicht

(1) O. II. S. 286.

negativ ist, und insbesondere, wenn seine Bewertung Null ist, dann heisst es *Einheit.*

Die Menge aller ganzen Elemente aus k bildet eine *Maximalordnung* (oder *Bewertungsring*) P, und die Menge aller Elemente mit positiver Bewertung bildet ein Primideal $\mathfrak{p}$ in P[1]. Dieses Primideal $\mathfrak{p}$ heisse das φ zugehörige Primideal.

Zwei ganze Elemente a und b heissen „*kongruent*" in bezug auf eine Bewertung φ, wenn $\varphi(a-b) > 0$ ist, oder wir gebrauchen dabei auch Ausdruck „*a und b sind kongruent mod* $\mathfrak{p}$". Die ganzen Elemente aus k, welche mod $\mathfrak{p}$ zueinander kongruent sind, bilden eine Klasse. Diese Klassen genügen offenbar der Äquivalenzrelation. Wir nennen diese Klassen die *Restklassen* mod $\mathfrak{p}$.

Ist nun a bzw. b ein Element, welches zur Restklasse A bzw. B gehört, dann definieren wir die Restklasse mod $\mathfrak{p}$, zu welcher $a+b$ gehört, als die Summe von A und B $-A+B-$, und die Restklasse mod $\mathfrak{p}$, zu welcher ab gehört, das Produkt AB von A mit B. Dass die Summe und das Produkt zweier Restklassen A, B nur von den Restklassen A und B, aber nicht von der Wahl der Elemente a, b abhängig sind, kann man wie üblich beweisen.

Die Restklasse, zu welcher das Nullelement des Körpers gehört, heisst die *Nullklasse*, und die Restklasse, welcher das Einselement des Körpers angehört, die *Einsklasse.*

Durch diese Definition kann man leicht verifizieren, dass die Gleichungen

$$A+X=B \qquad \text{und} \qquad AY=B$$

(im letzten Fall ist A keine Nullklasse) immer lösbar sind, d.h. wir können immer die Klassen X, Y eindeutig aufsuchen, derart dass die obigen Gleichungen erfüllt werden.

Also bilden die sämtlichen verschiedenen Restklassen mod $\mathfrak{p}$ einen Körper. Dabei wird die Nullklasse das Nullelement und die Einsklasse das Einselement. Diesen Körper nennen wir den *Restklassenkörper* mod $\mathfrak{p}$. Später gebrauchen wir oft einen Ausdruck „*eine durch ein*

(1) K. II. S. 534.

Körperelement a repräsentierte Klasse". Dies bedeutet diejenige Restklasse mod $\mathfrak{p}$, in der a vorkommt.

Perfekte Körper. Es sei k ein bewerteter Körper. Dann sagen wir, dass eine Körperelementfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ zu einem Körperelement a *konvergiert*, wenn für eine beliebige positive Zahl M und eine geeignete (von M abhängige) natürlich Zahl N $\varphi(a-a_m) > M$ wird, falls $m \geqq N$ ist. Dieses Element a nennt man das *Grenzelement* der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Eine Körperelementfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ heisse *Fundamentalreihe*, wenn für eine beliebige positive Zahl M und eine geeignete (von M abhängige) natürliche Zahl N immer

$$\varphi(a_{m_1}-a_{m_2}) > M$$

wird, falls $m_1, m_2 \geqq N$ sind.

Nach Definition ist eine konvergente Folge sicher eine Fundamentalreihe, aber die Umkehrung dieser Tatsache ist nicht mehr allgemein richtig d. h. eine Fundamentalreihe in k braucht kein Grenzelement in k zu besitzen.

Ein Körper, in dem alle Fundamentalreihen ihre Grenzelemente besitzen, heisse *perfekter Körper*. Nach KÜRSCHÁK[1] können wir einen bewerteten Körper k so erweitern, dass der Erweiterungskörper L bewertet ist, derart dass in L die Bewertung von k beibehalten ist, und der Körper L perfekt wird. Im folgenden verstehen wir unter einem perfekten Körper eines bewerteten Körpers durchweg einen oben erwähnten perfekten Körper.

Insbesondere diejenigen perfekten Körper, welche zwischen k und sich selbst keine perfekten Körper mehr besitzen, heissen *derivierte Körper* von k. Nach Definition muss jeder derivierte Körper von k die Grenzelemente aller Fundamentalreihen aus k enthalten. Wenn es aber einen perfekten Körper gibt, in welchen erst die Grenzelemente aller Fundamentalreihen aus k eintreten, dann ist er sicher ein deri-

(1) KÜRSCHÁk, Über die Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Journ. f. Math., **142** (1913). S. 225–228.

vierter Körper von k. Für den Beweis, dass ein bewerteter Körper wirklich zu einem perfekten Körper, in den erst die Grenzelemente aller Fundamentalreihen aus k eintreten, erweitert werden kann, verweise ich auf die Arbeit von KÜRSCHÁK[1].

Nach Struktur der derivierten Körper sind sie immer zueinander isomorph und sie sind folgenderweise charakterisiert: *In einem derivierten Körper und sogar erst in diesem Korper besitzen alle Fundamentalreihen aus k ihre Grenzelemente.* Deshalb wollen wir immer annehmen, dass die derivierten Körper zueinander gleich sind. In diesem Sinne gibt es also nur einen einzigen derivierten Körper eines bewerteten Körpers k, und wir bezeichnen ihn mit $\bar{k}$.

Bewertung eines derivierten Körpers.

Weil die Bewertung von $\bar{k}$ die von k beibehält, so wollen wir die Bewertung von $\bar{k}$ auch mit φ bezeichnen. Da jedes Element aus $\bar{k}$ durch eine Fundamentalreihe aus k definiert ist, so sei $\gamma \neq 0$ aus $\bar{k}$ das Grenzelement einer Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ aus k. Dann existiert für eine beliebige positive Zahl M eine natürliche Zahl N, derart, dass für jede natürliche Zahl $i \geqq N$

$$\varphi(\gamma - a_i) > M$$

wird. Hieraus folgt für $\gamma \neq 0$, dass

$$\varphi(\gamma) = \varphi(a_j)$$

ist, falls $j \geqq N' \geqq N$ ist, wobei N' eine geeignete positive Zahl ist. Denn ist nämlich $\gamma \neq 0$, so gibt es sicher eine feste positive Zahl G, derart dass jedes $\varphi(a_j)$ $(j \geqq N')$ kleiner ist als G. Also ist $\varphi(\gamma - a_j)$ $= \mathrm{Min}\,(\varphi(\gamma), \varphi(a_j)) < G$, wenn $\varphi(\gamma) \neq \varphi(a_j)$ ist. Dies ist aber Widerspruch, weil M mit j über alle Grenzen wachsen kann.

Diskrete Bewertung. Wenn unter den Bewertungen der Elemente aus k die kleinste positive existiert, dann spricht man von der *diskreten Bewertung.* In diesem Fall gibt es sicher ein Körperelement a, dessen Bewertung positiv, aber nicht grösser ist als die Bewertungen aller anderen Körperelemente. Wenn b ein beliebiges Element aus k mit

(1) Siehe Fussnote von S. 114.

positiver Bewertung ist, dann ist für eine geeignete natürliche Zahl ν

$$\varphi(a^{\nu}) = \varphi(b),$$

d.h. $\frac{b}{a^{\nu}}$ ist eine Einheit. Denn da $\varphi(b) \geqq \varphi(a)$ ist, so kann man eine natürliche Zahl n und $n+1$ so wählen, dass

$$n\varphi(a) < \varphi(b) \leqq (n+1)\varphi(a)$$

wird. Wir wollen zeigen, dass wirklich $\varphi(b) = (n+1)\varphi(a)$ ist. Wäre $\varphi(b) < (n+1)\varphi(a)$, so würde

$$0 < \varphi\left(\frac{a^{n+1}}{b}\right) < \varphi(a)$$

sein, was aber Widerspruch wäre, weil in k eine kleinere Bewertung als $\varphi(a)$ exitierte. Also ist $\frac{b}{a^{n+1}}$ eine Einheit aus k. Hieraus folgt sofort, dass jedes Element aus k als ein Produkt einer ganzen Potenz von a mit einer Einheit aus k eindeutig darstellbar ist. Wir nennen die Elemente aus k, welche die kleinste positive Bewertung besitzen, *Primelemente.*

Polynome in einem bewerteten Körper k.

Es sei $f(x) = a_n x^n + \ldots . + a_0$ ein Polynom, dessen Koeffizienten alle die Elemente aus k sind. Dann wollen wir dieses Polynom kurz *Polynom in* k nennen. Unter $\varphi(f(x))$ versteht man die kleinste Bewertung der Koeffizienten aus $f(x)$. Dann gilt für zwei Polynome $f(x)$ und $g(x) = b_m x^m + \ldots . + b_0$ in k:

1. $\varphi(f(x)+g(x)) \geqq \mathrm{Min}\,(\varphi(f(x)),\ \varphi(g(x)))$.
2. $\varphi(f(x) \cdot g(x)) \geqq \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$.

Insbesondere, wenn $\varphi(f(x)) \neq \varphi(g(x))$ ist, dann ist

$$\varphi(f(x)+g(x)) = \mathrm{Min}\,(\varphi(f(x)),\ \varphi(g(x)))\ ,$$

und für ein Element a aus k ist

$$\varphi(af(x)) = \varphi(a) + \varphi(f(x))\ .$$

Zum Beweis können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n \geqq m$ ist. Dann ist

$$f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n+\ldots.+(a_0+b_0)\ ,$$

worin aber $b_n = b_{n-1} = \ldots. = b_{m+1} = 0$ verstanden werden soll, wenn $n > m$ ist. Also folgt nach Definition

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) &= \text{Min}\,(\varphi(a_n+b_n),\ \ldots.,\ \varphi(a_0+b_0)) \\ &\geqq \text{Min}\,(\varphi(a_n),\ \varphi(b_n),\ \ldots.,\ \varphi(a_0),\ \varphi(b_0))\end{aligned}$$

Aus dem letzten geht hervor, dass

$$\text{Min}\,(\varphi(a_n),\ \varphi(b_n),\ \ldots.,\ \varphi(a_0),\ \varphi(b_0)) = \text{Min}\,(\varphi(f(x)),\ \varphi(g(x)))\ .$$

Also ist $\varphi(f(x)+g(x)) \geqq \text{Min}\,(\varphi(f(x)),\ \varphi(g(x)))$.

Wenn $\varphi(f(x)) \neq \varphi(g(x))$ ist, dann ist $\varphi(f(x)) > \varphi(g(x))$, oder $\varphi(f(x)) < \varphi((x))$. Für den ersten Fall folgt ohne weiteres

$$\text{Min}\,(\varphi(a_n),\ \ldots.,\ \varphi(a_0)) > \text{Min}\,(\varphi(b_n),\ \ldots.,\ \varphi(b_0))\ .$$

Ist $\varphi(g(x)) = \varphi(b_i)$, so ist

$$\text{Min}\,(\varphi(a_n+b_n),\ \ldots.,\ \varphi(a_0+b_0)) = \varphi(b_i) = \varphi(g(x))\ ,$$

weil $\varphi(a_i+b_i) = \varphi(b_i)$ ist, und folglich jedes Glied keine kleinere Bewertung als $\varphi(a_i+b_i)$ besitzt. Also ist

$$\varphi(g(x)) = \varphi(f(x)+g(x))\ .$$

Ebenso kann man für den zweiten Fall zeigen, dass

$$\varphi(f(x)) = \varphi(f(x)+g(x))$$

ist. Daher ist jedenfalls

$$\varphi(f(x)+g(x)) = \text{Min}\,(\varphi(f(x)),\ \varphi(g(x)))\ .$$

Um nun $\varphi(f(x)\cdot g(x)) \geqq \varphi(f(x))+\varphi(g(x))$ zu zeigen, betrachten wir den Koeffizienten von $x^{\mu+\nu}$ in $f(x)g(x)$ $(0 \leqq \mu+\nu \leqq n+m)$. Er ist aber

$$a_{\mu+\nu}b_0+a_{\mu+\nu-1}b_1+\ldots.+a_0b_{\mu+\nu}\ ,$$

wobei man die a_j bzw. b_i gleich Null setzen soll, wenn $j > n$ bzw.

$i > m$ ist. Also ist

$$\varphi(a_{\mu+\nu}b_0+a_{\mu+\nu-1}b_1+\ldots.+a_0b_{\mu+\nu}) \geqq \mathrm{Min}\,(\varphi(a_{\mu+\nu})+\varphi(b_0),\ \ldots.,\ \varphi(a_0)+\varphi(b_{\mu+\nu}))\ .$$

Wenn $\varphi(a_k)$ bzw. $\varphi(b_l)$ eine kleinste Bewertung der Koeffizienten von $f(x)$ bzw. $g(x)$ ist, dann sind die Bewertungen der Koeffizienten von $f(x)\cdot g(x)$ nicht kleiner als

$$\varphi(a_k)+\varphi(b_l)\ .$$

Also ist $\varphi(f(x)\cdot g(x)) \geqq \varphi(f(x))+\varphi(g(x))$.

Ist besonders $g(x)$ gleich einem Körperelement a, so ist

$$\begin{aligned}\varphi(af(x)) &= \mathrm{Min}\,(\varphi(a\,a_n),\ \ldots.,\ \varphi(a\,a_0))\\ &= \mathrm{Min}\,(\varphi(a)+\varphi(a_n),\ \ldots.,\ \varphi(a)+\varphi(a_0))\\ &= \varphi(a)+\varphi(f(x))\ .\end{aligned}$$

Nun definieren wir die Kongruenz zwischen den Polynomen in k. Zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus k heissen *kongruent* in bezug auf φ, wenn

$$\varphi(f(x)-g(x)) > 0$$

ist. Wir bezeichnen dies durch

$$f(x) \equiv g(x)\ (\varphi)\ .$$

Nach Defininition kann man leicht beweisen:

Wenn $f_1(x) \equiv f_2(x)$, $f_2(x) \equiv f_3(x)$ (φ) sind, dann ist auch $f_1(x) \equiv f_3(x)$ (φ) .

Wenn $g_1(x) \equiv g_2(x)$, $g_3(x) \equiv g_4(x)$ (φ) sind, dann ist

$$g_1(x)\,g_3(x) \equiv g_2(x)\,g_4(x)\ (\varphi)\ .$$

Konvergenz der Polynomreihen. Es seien $f^{(i)}(x) = a_n^{(i)}x^n + a_{n-1}^{(i)}x^{n-1} + \ldots + a_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots.)$ Polynome in einem bewerteten Körper k.

Wenn die Folgen $a_j^{(1)}, a_j^{(2)} \ldots, a_j^{(m)}, \ldots$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ in k konvergieren, und die Grenzelemente a_j besitzen, dann heisst die Polynomreihe

$$f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(m)}(x), \ldots$$

„*konvergent*" in bezug auf die Bewertung φ von k.

Das Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ nennt man das *Grenzpolynom* der obigen Polynomreihe. Aus Definition sieht man sofort ein, dass für eine beliebige positive Zahl M immer

$$\varphi(f(x) - f^{(i)}(x)) > M$$

ist, wenn i grösser ist als eine geeignete natürliche Zahl. Man kann ferner leicht folgende Tatsache beweisen: Wenn $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x), \ldots$ bzw. $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x), \ldots$ eine Polynomreihe mit dem Grenzpolynom $g(x)$ bzw. $h(x)$ ist, dann konvergiert die Polynomreihe

$$g_1(x)\,h_1(x), \; g_2(x)\,h_2(x), \; \ldots, \; g_m(x)\,h_m(x), \; \ldots$$

zu $g(x)h(x)$.

Im folgenden betrachten wir einen perfekten Körper k in bezug auf eine Bewertung φ, und wir verstehen unter Polynomen in k immer Polynome von x mit *ganzen* Koeffizienten aus k. Dann gilt

Hilfssatz 1. Es seien $g(x)$, $h(x)$ zwei Polynome in k, deren Grade resp. r, s sind, und die Bewertung der Resultante $R(g, h)$ von $g(x)$, $h(x)$ sei gleich einer nicht negativen Zahl. Ferner sei $f(x)$ ein Polynom in k, dessen Grad nicht grösser ist als $r+s-1$. Dann kann man in k zwei Polynome $u(x)$ vom kleineren Grade als r und $v(x)$ vom kleineren Grade als s finden, derart dass

$$g(x)\,v(x) + h(x)\,u(x) = R(h, g)\,f(x)$$

wird.[1]

Beweis. Wir setzen

$$g(x) = a_r x^r + \ldots + a_0\,, \quad h(x) = b_s x^s + \ldots + b_0\,,$$

(1) Für Hilfssatz 1 ist es nicht notwendig, dass k perfekt ist, sondern k braucht nur ein beliebiger bewerteter Körper zu sein.

und

$$f(x) = c_{r+s-1}x^{r+s-1} + \ldots + c_0 ,$$

wobei c_{r+s-1} eventuell Nullelement sein kann.

Für zwei noch zu bestimmende Polynome

$$u(x) = p_{r-1}x^{r-1} + \ldots + p_0 \quad \text{und} \quad v(x) = q_{s-1}x^{s-1} + \ldots + q_s$$

in k gilt folgende Identität

$$g(x)\,v(x) + h(x)\,u(x) = R(h, g)f(x)$$

dann und nur dann, wenn das lineare Gleichungssytem in p, q

$$r+s \begin{cases} a_r q_{s-1} & + b_s p_{r-1} & = R(h, g)c_{r+s-1} \\ a_{r-1}q_{s-1} + a_r q_{s-2} & + b_{s-1}p_{r-1} + b_s p_{s-2} & = R(h, g)c_{r+r-2} \\ \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & \\ a_0 q_0 & & + b_0 p_0 = R(h, g)c_0 \end{cases}$$

lösbar ist. Wir erhalten aus diesem System

$$R(h, g)p_i = R(h, g)m_i \qquad (i = 0, \ldots, r-1) ,$$

$$R(h, g)q_j = R(h, g)n_j \qquad (j = 0, \ldots, s-1) ,$$

wobei m_i, n_i resp. lineare Formen von $c_{r+s-1}, \ldots, c_0$ mit ganzen Koeffizienten aus k sind. Also können wir in k ganze Elemente p_i, q_j finden.

Hilfssatz 2. Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade n in k und $g_0(x)$, $h_0(x)$ zwei Polynome[1] mit folgender Eigenschaft:

1. Der Grad von $g_0(x)h_0(x)$ ist gleich n.
2. Der höchste Koeffizient von $g_0(x)h_0(x)$ ist gleich dem von $f(x)$.
3. Die Bewertung der Resultante $R(g_0, h_0)$ von $g_0(x)$ und $h_0(x)$ ist gleich einer nicht negativen Zahl ρ.
4. $\varphi(f(x) - g_0(x)h_0(x)) \geqq 2\rho + c$, wo c eine positive Zahl und eine Bewertung eines Elementes aus k ist.

Dann gibt es in k zwei Polynome $g(x)$, $h(x)$, derart dass

(1) Dabei sind $g_0(x)$, $h_0(x)$ keine trivialen Polynome.

$$f(x) = g(x)h(x)$$

mit $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x)$ (φ) wird.[1]

Beweis. Wir wollen zeigen, dass in k nach Voraussetzung zwei Polynome $g_1(x)$, $h_1(x)$ mit folgender Eigenschaft existieren:

1. Der Grad von $g_1(x)h_1(x)$ ist gleich n.
2. Der höchste Koeffizient von $g_1(x)h_1(x)$ ist gleich dem von $f(x)$.
3. Die Bewertung der Resultante von $g_1(x)$, $h_1(x)$ ist gleich ρ.
4. $\varphi(f(x)-g_1(x)h_1(x)) \geqq 2\rho+2c$.

Wir nehmen nämlich aus k ein Element a_1 mit $\varphi(a_1) = \rho+c$ heraus und bilden zwei Polynome

$$g_0(x)+a_1u_1(x) \qquad \text{und} \qquad h_0(x)+a_1v_1(x)\ ,$$

wobei $u_1(x)$ und $v_1(x)$ noch zu bestimmende Polynome in k sind. Dann ist

$$f(x)-(g_0(x)+a_1u_1(x))(h_0(x)+a_1v_1(x))$$
$$= f(x)-g_0(x)h_0(x)-a_1(g_0(x)v_1(x)+h_0(x)u_1(x))-a_1^2u_1(x)v_1(x)$$

Da $\varphi\left(\dfrac{f(x)-g_0(x)h_0(x)}{a_1}\right) = \varphi(f(x)-g_0(x)h_0(x))-\varphi(a_1) \geqq 2\rho+c-(\rho+c) \geqq \rho$ ist, so kann man nach Hilfssatz 1 zwei Polynome $u(x)$, $v(x)$ in k finden, derart dass

$$g_0(x)v_1(x)+h_0(x)u_1(x) = \frac{f(x)-g_0(x)h_0(x)}{a_1}$$

wird, wobei der Grad von $u_1(x)$ und $v_1(x)$ resp. kleiner sind als der von $g_0(x)$ und $h_0(x)$. Wenn man also die oben bestimmten Polynome $u_1(x)$ und $v_1(x)$ nimmt, dann sind $g_1(x) = g_0(x)+a_1u_1(x)$ und $h_1(x) = h_0(x)+a_1v_1(x)$ die gesuchten Polynome.

Denn weil $\varphi(f(x)-g_1(x)h_1(x)) = \varphi(a_1^2u_1(x)v_1(x))$ ist, so ist

$$\varphi(f(x)-g_1(x)h_1(x)) \geqq 2\varphi(a_1) = 2\rho+2c\ .$$

(1) RYCHLIK, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, Jour. f. Math., **153** (1924). S. 100–101.

Ferner sind der Grad von $g_1(x)$ und der von $h_1(x)$ resp. gleich dem von $g_0(x)$ und $h_0(x)$, und der höchste Koeffizient von $g_1(x)h_1(x)$ gleich dem von $f(x)$, weil der Grad von $u_1(x)$ und der von $v_1(x)$ resp. kleiner sind als der von $g_0(x)$ und $h_0(x)$. Die Bewertung der Resultante von $g_1(x)$ und $h_1(x)$ ist gleich $R(f_0, g_0)$, weil $\varphi(a_1) = \rho + c$ ist.

Wir können dieses Verfahren weiter fortsetzen und allgemein erhalten wir zwei Polynome

$$g_\nu(x) = g_0(x) + a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + \ldots + a_\nu u_\nu(x) ,$$
$$h_\nu(x) = h_0(x) + a_1v_1(x) + a_2v_2(x) + \ldots + a_\nu v_\nu(x)$$

in k. Dabei sind die Grade von $u_1(x), \ldots, u_\nu(x)$ alle kleiner als der von $g_0(x)$ und die Grade von $v_1(x), \ldots, v_\nu(x)$ alle kleiner als der von $h_0(x)$. Also sind der Grad und der höchste Koeffizient von $g_\nu(x)$, $h_\nu(x)$ resp. gleich dem von $g_0(x)$, $h_0(x)$, und $\varphi(f(x) - g_\nu(x)h_\nu(x)) \geqq 2\varphi(a_\nu)$ mit $\varphi(a_\nu) \geqq \rho + 2^{\nu-1}c$. Ferner ist die Resultante von $g_\nu(x)$, $h_\nu(x)$ gleich $R(g_0, h_0)$.

Für $i < j \leqq \nu$ ist

$$\varphi(g_j(x) - g_i(x)) \geqq \varphi(a_{i+1}) \geqq \rho + 2^i c .$$

Bildet man also eine Polynomreihe

$$g_0(x), \; g_1(x), \; \ldots, \; g_\nu(x), \; \ldots \; ^{(1)} ,$$

so bilden die Koeffizienten einer bestimmten Potenz von x der Polynomreihe $g_0(x), \ldots, g_\nu(x) \ldots$ eine Fundamentalreihe in k. Da k ein perfekter Körper ist, so besitzt sie ein Grenzelement in k. Es gibt also in k das Grenzpolynom $g(x)$ der Polynomreihe $g_0(x)$, $g_1(x)$, $\ldots, g_\nu(x), \ldots$. Ebenso gibt es in k ein Polynom $h(x)$, zu dem die Polynomreihe $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_\nu(x), \ldots$ konvergiert.

Da offenbar die Polynomreihe $g_0(x)h_0(x), \ldots, g_\nu(x)h_\nu(x), \ldots$ zu $g(x)h(x)$ konvergiert, so ist

$$f(x) = g(x)h(x) ,$$

und

$$g(x) \equiv g_0(x) , \qquad h(x) \equiv h_0(x) \quad (\varphi) .$$

(1) Wenn für einen passenden Index ν $f(x) = g_\nu(x)h_\nu(x)$ ist, dann kann man $a_{\nu+1} = a_{\nu+2} = \ldots = 0$ setzen.

Damit ist der Beweis beendet.

Hilfssatz 3. Es sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom in k. Dann ist $f(x)$ in k reduzibel, wenn es unter $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ eine Einheit gibt, aber mindestens eines von a_n und a_0 keine Einheit ist.

Beweis. Es sei a_0 keine Einheit und a_i die erste Einheit in der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}$. Dann ist

$$f(x) \equiv (a_n x^{n-i} + \ldots + a_i) x^i \quad (\varphi) .$$

Da a_i Einheit ist, so kann man aus der Determinantendarstellung der Resultante von $a_n x^{n-i} + \ldots + a_i$ und x^i leicht einsehen, dass die Bewertung der genannten Resultante gleich Null ist. Nach Hilfssatz 2 ist also $f(x)$ in k reduzibel.

Wenn aber a_0 Einheit ist, dann ist nach Voraussetzung a_n keine Einheit. Betrachtet man also ein Polynom

$$g(X) = a_0 X^n + \ldots + a_n ,$$

so ist nach dem obigen Beweis $g(X)$ in k reduzibel. Wenn man in $g(X)$ $X = \frac{1}{x}$ setzt und $g\left(\frac{1}{x}\right)$ mit x^n multipliziert, so wird offenbar $f(x)$ reduzibel in k.

§ 2. ALGEBRAISCHE ERWEITERUNG 1. ART ÜBER EINEM PERFEKTEN KÖRPER.

In diesem Paragraphen untersuchen wir algebraische Erweiterungskörper 1. Art über einem perfekten Körper. Wir bezeichnen dabei mit k einen perfekten Körper und durch K einen algebraischen Erweiterungskörper 1. Art über k. Die Elemente aus k bezeichnen wir immer durch die lateinischen Buchstaben und die Elemente aus K durch die griechischen.

Unsere erste Frage ist folgende: Wie kann man den Körper K bewerten, derart dass dabei für die Elemente aus k die ursprünglichen Bewertungen von k beibehalten sind? Wir nennen diese Bewertung von K der Einfachheit halber eine erweiterte Bewertung von k. Um

die obige Frage zu beantworten, untersuchen wir zunächst, wie sich die oben genannte erweiterte Bewertung verhalten soll, falls K wirklich so bewertet wird. Diese erweiterte Bewertung von k wollen wir nun mit φ bezeichnen. Dann ist für ein beliebiges Element a aus k $\varphi(a)$ von vornherein angegeben.

Wir nennen diejenigen Elemente aus K, welche nicht negative Bewertungen besitzen, *ganz*, und insbesondere die Elemente, deren Bewertungen gleich Null sind, heissen *Einheiten* aus K. Dass diese Definition eine Erweiterung der Definition der ganzen Elemente und Einheiten aus k ist, wird man sofort einsehen.

Satz 1. Kriterium der Ganzheit der Elemente aus K.

Ein Element aus K ist dann und nur dann ganz, wenn es einer irreduziblen Gleichung genügt, welche die ganzen Koeffizienten aus k besitzen, und deren höchster Koeffizient 1 ist.

Beweis. Es sei γ ein Element aus K, welches einer irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots . + a_0 = 0$$

genügt, wobei $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots . , a_0$ ganze Elemente aus k bedeuten.

Dann ist

$$f(\gamma) = \gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots . + a_0 = 0 .$$

Hieraus folgt

$$\varphi(\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots . + a_0) = \infty .$$

Da aber

$$\varphi(\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots . + a_0) \geqq \mathrm{Min}\,(n\varphi(\gamma), \varphi(a_{n-1}) + (n-1)\varphi(\gamma), \ldots . , \varphi(a_0))$$

ist, so muss $\varphi(\gamma) \geqq 0$ sein. Denn sonst würde

$$\varphi(f(\gamma)) = n\varphi(\gamma) < 0$$

sein, weil $\varphi(a_{n-1}), \ldots . , \varphi(a_0) \geqq 0$ sind. Insbesondere, wenn $\varphi(a_{n-1}), \ldots . , \varphi(a_0) > 0$ sind, dann ist $\varphi(\gamma) > 0$.

Umgekehrt genüge ein ganzes Element γ aus K einer irreduziblen Gleichung mit ganzen Koeffizienten aus k:

$$f(x) = a_n x^n + \ldots . + a_0 = 0 .$$

Dann kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(x)$ ein primitives[1] irreduzibles Polynom in k ist. Ich behaupte, dass $\varphi(a_0) > 0$, $\varphi(a_n) > 0$ nicht zugleich eintreten können. Denn wäre dies der Fall, so müssten $\varphi(a_{n-1}), \ldots . , \varphi(a_1)$ sämtlich positiv sein, weil sonst nach Hilfssatz 3 in § 1 $f(x)$ in k reduzibel würde. Wären aber $\varphi(a_{n-1}), \ldots . , \varphi(a_1)$ alle positiv, so wäre $f(x)$ nicht mehr primitiv in k. Also muss eines von $\varphi(a_0)$, $\varphi(a_n)$ Null sein.

Wenn aber $\varphi(a_0) = 0$ und $\varphi(a_n) > 0$ ist, so genügt $\frac{1}{\gamma}$ einer irreduziblen Gleichung

$$g(x) = x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \ldots . + \frac{a^n}{a_0} = 0$$

in k. Diese Gleichung besitzt offenbar die ganzen Koeffizienten aus k. Da aber $g(x)$ in k irreduzibel und $\varphi\left(\frac{a_n}{a_0}\right) > 0$ ist, so müssen nach Hilfssatz 3 in § 1

$$\varphi\left(\frac{a_1}{a_0}\right), \ldots . , \varphi\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}\right) > 0$$

sein. Hieraus folgt wie in der ersten Hälfte dieses Beweises, dass $\varphi\left(\frac{1}{\gamma}\right) > 0$, also $-\varphi(\gamma) > 0$ ist. Aber dies ist Widerspruch, weil $\varphi(\gamma) \geqq 0$ ist. Also muss $\varphi(a_n) = 0$ sein, falls γ ganzes Element ist. Aus $f(x)$ kann man ein Polynom

$$h(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots . + \frac{a_0}{a_n}$$

bilden. Dabei besitzt $h(x)$ ganze Koeffizienten und sogar sein höchster Koeffizient ist gleich 1. Es ist auch klar, dass γ der Gleichung $h(x) = 0$ genügt. Damit ist der Beweis beendet.

Aus dem obigen Beweis folgt

Zusatz. Ein Element aus K ist dann und nur dann Einheit, wenn

(1) Ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus k heisst „primitiv in k“, wenn seine Koeffizienten bis auf die Einheiten keine gemeinsamen Teiler besitzen.

es einer irreduziblen Gleichung mit ganzen Koeffizienten aus k

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 ,$$

deren letzter Koeffizient Einheit ist, genügt.

Jetzt wollen wir annehmen, dass K über k *normal* ist. Dann gilt

Satz 2. *Ein Element α aus K genüge einer irreduziblen Gleichung*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten aus k. Dann sind die Bewertungen aller Konjugierten zu α (einschliesslich α) gleich $\frac{1}{n}\varphi(a_0)$.

Beweis. Es sei $\alpha^{(i)}$ eine beliebige konjugierte Wurzel zu α. Dann wollen wir zeigen, dass $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha^{(i)})$ ist. Dafür betrachten wir den Körper $K' = k(\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)})$. Dann ist K' bekanntlich normal über k. Setzt man ein ganzes Element aus $\frac{\alpha^{(i)}}{\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\alpha^{(i)}}$ gleich β, so erhält man aus β durch Anwendung aller Automorphismen von K' über k die Elemente $\beta, \beta', \ldots, \beta^{(m-1)} (m \geqq n)$. Bildet man dann ein Polynom

$$F(x) = (x-\beta)(x-\beta') \ldots (x-\beta^{(m-1)}) ,$$

so ist $F(x)$ offenbar ein Polynom in k und daher ist $F(x)$ eine bestimmte Potenz eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ in k, welches β als seine Nullstelle und den höchsten Koeffizienten 1 besitzt. Da β ein ganzes Element ist, so muss nach Satz 1 $f(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus k sein. Weil aber $\beta \cdot \beta' \cdot \ldots \cdot \beta^{(m-1)}$ eine bestimmte Potenz von $\frac{\alpha \ldots \alpha^{(n-1)}}{\alpha \ldots \alpha^{(n-1)}} = 1$ ist, so besitzt in $f(x)$ das von x freie Glied den Koeffizienten 1, muss also nach Zusatz des Satzes 1 β eine Einheit sein, d. h. $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha^{(i)})$. Es ist also $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha') = \ldots = \varphi(\alpha^{(n-1)})$. Da aber $(-1)^n \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n-1)} = a_0$ ist, so ist $\varphi(\alpha) = \frac{1}{n}\varphi(a_0)$.

Wenn man umgekehrt einem Element α aus K, welches einer irreduziblen Gleichung in k

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

genügt, $\frac{1}{n}\varphi(a_0)$ als seine Bewertung angibt, dann genügt $\frac{1}{n}\varphi(a_0)$ den Bewertungsvorschriften. Für den Beweis weise ich aber auf die Arbeit von Herrn OSTROWSKI[1] hin. Damit hat man mit Satz 2 zusammen bewiesen, dass die oben bestimmte Bewertung in K eine einzige erweiterte Bewertung von k ist.

Wir sind jetzt im Stande, einen beliebigen algebraischen Erweiterungskörper 1. Art über einem bewerteten (aber nicht notwendig perfekten) Körper zu bewerten. Es sei k ein bewerteter Körper, und K sein algebraischer Erweiterungskörper 1. Art. Dann sind die Elemente aus K alle Nullstellen der bestimmten Polynome 1. Art in k. Wir wollen mit M die Menge aller solchen irreduziblen Polynome in k bezeichnen. Bildet man zunächst einen perfekten Körper (etwa den derivierten Körper) $\mathfrak{k}$ von k, und dann über $\mathfrak{k}$ einen Normalkörper 1. Art $\mathfrak{N}$, derart dass sich die Polynome aus M alle in $\mathfrak{N}$ in lauter verschiedene Linearfaktoren zerlegen, so enthält $\mathfrak{N}$ einen Körper K', welcher k enthält und zu K isomorph ist. Dabei soll beim Isomorphismus von K zu K' jedes Element aus k sich selbst zugeordnet werden. Da $\mathfrak{N}$ normal über $\mathfrak{k}$ ist, so kann man $\mathfrak{N}$ so bewerten, dass dabei die Bewertung von $\mathfrak{k}$ (folglich auch die von k) beibehalten ist. Gibt man also einem Element α aus K die Bewertung eines α zugeordneten Elementes α' aus K', so wird sicher der Körper K bewertet, und sogar ist die Bewertung von k beibehalten.

Es gilt also:

Ein algebraischer Körper K von der ersten Art über einem bewerteten Körper k lässt sich immer bewerten, derart dass die Bewertung von k dabei beibehalten ist.

Es sei K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über einem perfekten Körper k und K sei bewertet wie oben. Dann kann man über k einen Normalkörper N von endlichem Grade bilden, der von der ersten Art über k ist und K enthält. Ferner kann man N so bewerten, dass die Bewertung von K beibehalten ist. Diese erweiterte Bewertung von k bezeichne ich mit φ.

(1) O. II. S. 297.

Da K von der ersten Art über k ist, so gibt es in K ein primitives Element ϑ, so dass $K = k(\vartheta)$ wird. Dabei kann man ϑ als ein ganzes (in bezug auf φ) Element aus K annehmen[1]. Dann besitzt jedes Element aus K die Gestalt

$$\gamma = a_0 + a_1\vartheta + \ldots . + a_{n-1}\vartheta^{n-1} ,$$

wobei n den Grad von K nach k, und $a_0, a_1 \ldots . , a_{n-1}$ Elemente aus k bedeuten. Bildet man in N die sämtlichen Konjugierten zu γ, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_0 + a_1\vartheta_1 + \ldots . + a_{n-1}\vartheta_1^{n-1} \\ &\vdots \\ \gamma_{n-1} &= a_0 + a_1\vartheta_{n-1} + \ldots . + a_{n-1}\vartheta_{n-1}^{n-1} , \end{aligned}$$

worin $\vartheta_1, \ldots . , \vartheta_{n-1}$ die konjugierten Elemente zu ϑ sind.

Wenn γ ein ganzes Element aus K ist, dann ist es in N auch ganz, und folglich sind alle seiner Konjugierten ganz in N (nach Satz 2). Bezeichnet man die Diskriminante von ϑ, d. h.

$$\begin{vmatrix} 1 & \vartheta & \ldots\ldots\ldots & \vartheta^{n-1} \\ 1 & \vartheta_1 & \ldots\ldots\ldots & \vartheta_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \vartheta_{n-1} & \ldots\ldots\ldots & \vartheta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

durch $\Delta(1, \vartheta, \ldots . , \vartheta^{n-1})$, dann ist bekanntlich diese ein Element aus k, und da jedes ϑ_i in N ganz ist, so ist $\Delta(1, \vartheta, \ldots . , \vartheta^{n-1})$ auch ganz in k. Offenbar erhält man

$$a_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & \vartheta^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots\ldots & \vartheta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots . & \gamma & \ldots . & \vartheta^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots . & \gamma_{n-1} & \ldots . & \vartheta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}}{\Delta(1, \ldots . , \vartheta^{n-1})} \quad (i = 0, 1, \ldots . , n-1),$$

wo $\begin{vmatrix} 1 & \ldots & \gamma & \ldots . & \vartheta^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & \gamma_{n-1} & \ldots . & \vartheta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$ aus der Determinante $\begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & \vartheta^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots\ldots & \vartheta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$

(1) Denn sonst wird durch Multiplikation eines passenden ganzen Elementes a aus k $a\vartheta$ ganz. Es ist aber $k(\vartheta) = k(a\vartheta)$.

durch Ersetzung der $(i+1)$-ten Spalte durch $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ entsteht. Also ist der Zähler von a_i ganz in N, und weil $\Delta(1, \ldots, \vartheta^{n-1})$ ganzes Element aus k ist, so ist der Nenner von a_i auch ganz. Daher ist jedes ganze Element γ aus k von der Form

$$\frac{1}{\Delta(1, \ldots, \vartheta^{n-1})}(b_0+b_1\vartheta+\ldots+b_{n-1}\vartheta^{n-1}),$$

wo $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ alle ganze Elemente aus k sind.

Satz 3. *Es sei K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über einem perfekten Körper k. Ferner sei ϑ ein ganzes primitives Element von K über k. Dann ist jedes ganze Element aus K von der Form*

$$a_0+a_1\vartheta+\ldots+a_{n-1}\vartheta^{n-1},$$

worin $a_0, \ldots, a_{n-1}$ Elemente aus k und die Bewertungen von $a_0, \ldots, a_{n-1}$ immer nach unten beschränkt sind.

Aus Satz 3 folgt

Zusatz. Es habe ein ganzes Element γ aus K die Gestalt wie in Satz 3:

$$\gamma = a_0+a_1\vartheta+\ldots+a_{n-1}\vartheta^{n-1}.$$

Dann müssen $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n-1})$ hinreichend gross werden, wenn $\varphi(\gamma)$ hinreichend gross wird.

Beweis. Nach Satz 3 ist ϑ ganz in K, und $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{n-1})$ sind nach unten beschränkt. Ferner kann man γ als keine Einheit annehmen. Dann gibt es in k ein ganzes Element a, derart dass

$$\varphi(a^m) \leqq \varphi(\gamma) < \varphi(a^{m+1})$$

wird. Bildet man nun $\frac{\gamma}{a^m}$, so ist $\frac{\gamma}{a^m}$ ganz in K, weil $\varphi(\gamma)-\varphi(a^m) \geqq 0$ ist. Also ist

$$\frac{\gamma}{a^m} = b_0+b_1\vartheta+\ldots+b_{n-1}\vartheta^{n-1},$$

wobei $\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1})$ auch nach unten beschränkt sind. Da

$$(a_0-b_0a^m)+(a_1-b_1a^m)\vartheta+\ldots.+(a_{n-1}-b_{n-1}a^m)\vartheta^{n-1}=0$$

ist, so müssen

$$a_0-b_0a^m=0\,,\ \ldots.\,,\ a_{n-1}-b_{n-1}a^m=0$$

sein. Hieraus folgen

$$\varphi(a_0)=\varphi(b_0)+m\varphi(a)\,,\ \ldots.\,,\ \varphi(a_{n-1})=\varphi(b_{n-1})+m\varphi(a)\,.$$

Weil aber $\varphi(b_0),\ldots.,\varphi(b_{n-1})$ nach unten beschränkt sind, so werden $\varphi(a_0),\ldots.,\varphi(a_{n-1})$ hinreichend gross, wenn $\varphi(\gamma)$ und folglich $\varphi(a^m)$ hinreichend gross wird.

Es sei nun K besonders diskret bewertet. Dann stellen wir nach Satz 3 alle ganzen Elemente aus K in der Form

$$\frac{1}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}(a_0+a_1\vartheta+\ldots.+a_{n-1}\vartheta^{n-1})$$

dar, wobei ϑ ein ganzes primitives Element von K über k, und $a_0, a_1, \ldots., a_{n-1}$ ganze Elemente aus k bedeuten. Wir betrachten nun in dieser Darstellung die Koeffizienten von ϑ^{n-1}. Da $\dfrac{a_{n-1}}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}$ nach unten beschränkt und die Bewertung φ von K diskret ist, so muss es unter allen $\varphi\left(\dfrac{a_{n-1}}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}\right)$ ein kleinstes geben. Bezeichnet man mit ω_1 ein beliebiges ganzes Element aus K, dessen Koeffizient von ϑ^{n-1} unter allen $\varphi\left(\dfrac{a_{n-1}}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}\right)$ die kleinste Bewertung besitzt, so kann man ein beliebiges ganzes Element γ in der Form

$$\gamma=\frac{1}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}(b_0+b_1\vartheta+\ldots.+b_{n-2}\vartheta^{n-2})+b_{n-1}\omega_1$$

darstellen, wobei $b_0, \ldots., b_{n-1}$ ganze Elemente aus k sind. Nun betrachten wir weiter die sämtlichen ganzen Elemente von der Gestalt

$$\frac{1}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}(b_0+b_1\vartheta+\ldots.+b_{n-2}\vartheta^{n-2})\,.$$

Dann gibt es unter ihnen ein Element ω_2, dessen Koeffizient von ϑ^{n-2} unter allen $\varphi\left(\dfrac{b_{n-2}}{\Delta(1,\ldots,\vartheta^{n-1})}\right)$ die kleinste Bewertung besitzt.

Dann kann man ein beliebiges ganzes Element γ aus K in der Form

$$\frac{1}{\Delta(1, \ldots, \vartheta^{n-1})}(c_0 + c_1\vartheta + \ldots + c_{n-3}\vartheta^{n-3}) + c_{n-2}\omega_2 + b_{n-1}\omega_1$$

darstellen. Wir können dieses Verfahren weiter fortsetzen. Endlich erhalten wir ein System der ganzen Elemente

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

derart dass jedes ganze Element aus K als eine lineare Form von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ mit ganzen Koeffizienten aus k eindeutig darstellbar ist. Wir nennen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Minimalbasis von K nach k in bezug auf φ.

Satz 4. *Unter der Voraussetzung in Satz 3 sei K noch diskret bewertet. Dann existieren in K Minimalbasen von K nach k in bezug auf φ.*

Wir haben schon gezeigt, dass man einem algebraischen Erweiterungskörper K 1. Art über einem perfekten Körper k eine Bewertung angeben kann, welche gerade eine Erweiterung der Bewertung von k ist. Wenn K insbesondere über k endlich ist, dann kann man noch folgenden Satz beweisen.

Satz 5. *Wenn K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über einem perfekten Körper k, dann ist K auch perfekt in bezug auf eine erweiterte Bewertung von k.*[1]

Beweis. Da K über k von der ersten Art ist, so gibt es in K ein primitives Element ϑ, derart dass

$$K = k(\vartheta)$$

wird. Dabei kann man ϑ als ein ganzes Element aus K annehmen. Wir bezeichnen mit φ die Bewertung von K, die eine Erweiterung der Bewertung von k ist. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ eine Fundamentalreihe aus K ist, welche nicht zur Null konvergiert, dann müssen von einem passenden Index N an alle $\varphi(a_i)$ für $i \geqq N$ gleich sein.

(1) O. I. S. 275.

Wenn also $\varphi(a_i) < 0$ $(i \geqq N)$ sind, dann existiert sicher in k ein ganzes Element a, derart dass $\varphi(a\,a_j) \geqq 0$ sind $(j = 1, \ldots, m, \ldots)$. Beweist man daher, dass die Fundamentalreihe $a\,a_1, a\,a_2, \ldots, a\,a_m, \ldots$ ihr Grenzelement in K besitzt, dann besitzt die ursprüngliche Fundamentalreihe auch ihr Grenzelement in K.

Angenommen, es bestehe also die Fundamentalreihe $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ aus ganzen Elementen in K. Dann kann man nach Satz 3

$$a_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}\vartheta + \ldots + a_{n-1}^{(i)}\vartheta^{n-1} \quad (i = 1, \ldots m, \ldots)$$

setzen, wobei n den Grad von K nach k, und $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_{n-1}^{(i)}$ die Elemente aus k bedeuten, deren Bewertungen alle nach unten beschränkt sind. Also folgt aus Zusatz des Satzes 3, dass in k $a_0^{(1)}, a_0^{(2)} \ldots, a_0^{(m)}, \ldots; a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \cdot, a_1^{(m)}, \ldots; \ldots; a_{n-1}^{(1)}, a_{n-1}^{(2)}, \ldots,$ $a_{n-1}^{(m)}, \ldots$ Fundamentalreihen bilden, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ Fundamentalreihe ist. Da der Körper k perfekt ist, so besitzt jede Fundamentalreihe

$$a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \ldots, a_j^{(m)}, \ldots \qquad (0 \leqq j \leqq n-1)$$

ihr Grenzelement in k. Bezeichnet man dieses Grenzelement mit a_j, so ist $\alpha = a_0 + a_1\vartheta + \ldots + a_{n-1}\vartheta^{n-1}$ sicher das Grenzelement von $a_1, \ldots, a_m, \ldots$, und dieses gehört zum Körper K. Also ist K perfekt.

Um die unendlichen algebraischen Erweiterungskörper 1. Art über einem perfekten Körper k zu untersuchen, betrachten wir zuerst einen Normalkörper 1. Art N über k. Dann kann man nach Satz 2 in N eine erweiterte Bewertung von k finden. Diese erweiterte Bewertung will ich mit φ bezeichnen.

Dann gilt folgender Hilfssatz.

Hilfssatz. Es sei α das Grenzelement (in bezug auf φ) einer Elementfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ aus N, und α genüge einer irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ in k. Dann konvergiert $a_1', a_2' \ldots, a_n', \ldots$ zu einer konjugierten Wurzel α' zu α, wobei $a_1', \ldots, a_n', \ldots$ bzw. α' durch Anwendung eines Automorphismus von N über k aus $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ bzw. α entsteht.

Beweis. Dass α' eine konjugierte Wurzel zu α ist, ist wohl bekannt. Da $\alpha'-\alpha'_n$ eine konjugierte Wurzel zu $\alpha-\alpha_n$ ist, so ist nach Satz 2

$$\varphi(\alpha'-\alpha'_n) = \varphi(\alpha-\alpha_n) .$$

Weil $\varphi(\alpha-\alpha_n)$ mit dem Index n zusammen über alle Grenzen wächst, so tut es auch $\varphi(\alpha'-\alpha'_n)$, d.h. $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n, \ldots$ konvergiert zu α'.

Satz 6. *Es sei* $K_1 < K_2 < \ldots < K_n < \ldots$ *eine Körperfolge, deren jeder von endlichem Grade und von der ersten Art über einem perfekten Körper* k *ist. Dann ist der Vereinigungskörper* K *von* $K_1, \ldots, K_n, \ldots$ *nimmer perfekt in bezug auf eine erweiterte Bewertung* φ *von* k.[1]

Beweis. Da $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ von der ersten Art über k sind, so besitzen sie primitive Elemente über k. Es seien $K_1 = k(\vartheta_1)$, $K_2 = k(\vartheta_2), \ldots, K_n = k(\vartheta_n), \ldots$, wobei ϑ_n $(n \geqq 1)$ ein *ganzes* primitives Element von K_n über k bedeutet. Dann kann man über k einen K enthaltenden Normalkörper $\mathfrak{N}$ 1. Art bilden, derart dass $\mathfrak{N}$ als der Vereinigungskörper von $N_1 < N_2 < \ldots < N_n < \ldots$, deren jeder über k von endlichem Grade und normal ist, definiert ist. Nun kann man $\mathfrak{N}$ so bewerten, dass die ursprüngliche Bewertung φ von K beibehalten ist. Man bestimme in jedem K_n ein ganzes Element δ_n, derart dass

$$\varphi(\delta_n) > \mathrm{Max}\left(\varphi(\vartheta_n^{(i)} - \vartheta_n^{(j)}),\ \varphi(\vartheta_n^{(i)})\right) \qquad (i \neq j)$$

ist, wobei $\vartheta_n^{(i)}$, $\vartheta_n^{(j)}$ alle verschiedenen konjugierten Wurzeln zu ϑ_n durchlaufen können. Da in k nach den Bewertungsvorschriften ein ganzes Element a mit $\varphi(a) > 0$ existiert, so bilden wir für noch zu bestimmende natürliche Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ eine Elementfolge

$$\alpha_1 = a^{e_1}\vartheta_1,\ \alpha_2 = a^{e_1}\vartheta_1 + a^{e_2}\vartheta_2,\ \ldots,\ \alpha_n = a^{e_1}\vartheta_1 + \ldots + a^{e_n}\vartheta_n,\ \ldots$$

aus K. Hier soll man die natürlichen Zahlen e_n $(n = 1, 2, \ldots)$ so bestimmen, dass

(1) O. I. S. 276.

$$\varphi(a^{e_n}) > \varphi(a^{e_{n-1}}) + \delta_{n-1}$$

ist. Also ist $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ eine monoton wachsende Zahlfolge.

Wir behaupten zunächst, dass $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ eine Fundamentalreihe aus K ist. Denn es ist

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_{n+j}-\alpha_n) &= \varphi(a^{e_{n+1}}\vartheta_{n+1}+\ldots+a^{e_{n+j}}\vartheta_{n+j}) \\ &\geqq \mathrm{Min}\left(\varphi(a^{e_{n+1}})+\varphi(\vartheta_{n+1}), \ldots, \varphi(a^{e_{n+j}})+\varphi(\vartheta_{n+j})\right) \\ &= \varphi(a^{e_{n+1}}\vartheta_{n+1}),\end{aligned}$$

weil $\varphi(a^{e_{n+1}})+\varphi(\vartheta_{n+1}) < \varphi(a^{e_{n+2}})+\varphi(\vartheta_{n+2}) < \ldots < \varphi(a^{e_{n+j}})+\varphi(\vartheta_{n+j})$ ist. Da $\varphi(a^{e_{n+1}}\vartheta_{n+1}) \geqq e_{n+1}\varphi(a)$ ist, und e_{n+1} mit n zusammen über alle Grenzen gross wird, so folgt die Behauptung.

Wendet man jetzt auf die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ zwei verschiedene Automorphismen P', P'' von $\mathfrak{N}$ über k an, welche irgendein ϑ_i aus $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ zu zwei verschiedenen konjugierten Wurzeln ϑ_i' und ϑ_i'' überführen, so erhält man in $\mathfrak{N}$ zwei verschiedene Fundamentalreihen

$$\alpha_1' = a^{e_1}\vartheta_1', \ \alpha_2' = a^{e_1}\vartheta_1' + a^{e_2}\vartheta_2', \ \ldots, \ \alpha_n' = a^{e_1}\vartheta_1' + \ldots + a^{e_n}\vartheta_n', \ \ldots,$$

und

$$\alpha_1'' = a^{e_1}\vartheta_2'', \ \alpha_2'' = a^{e_1}\vartheta_1'' + a^{e_2}\vartheta_2'', \ \ldots, \ \alpha_n'' = a^{e_1}\vartheta_1'' + \ldots + a^{e_n}\vartheta_n', \ \ldots,$$

wobei $\vartheta_1', \vartheta_2', \ldots, \vartheta_n', \ldots$ bzw. $\vartheta_1'', \vartheta_2'', \ldots, \vartheta_n'', \ldots$ aus $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ durch Anwendung von P' bzw. P'' entsteht.

Nämlich $\alpha_{n+j}'-\alpha_n'$ ist offenbar eine konjugierte Wurzel von $\alpha_{n+j}-\alpha_n$, ist also $\varphi(\alpha_{n+j}-\alpha_n) = \varphi(\alpha_{n+j}'-\alpha_n')$ $(j \geqq 1)$. Daher wächst $\varphi(\alpha_{n+j}'-\alpha_n')$ mit n zusammen über alle Grenzen, weil $\varphi(\alpha_{n+j}-\alpha_n)$ so ist. Also ist $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', \ldots$ eine Fundamentalreihe in $\mathfrak{N}$. Ebenso bildet $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n'', \ldots$ eine Fundamentalreihe in $\mathfrak{N}$.

Für jedes $m \geqq i$ ist

$$\varphi(\alpha_m'-\alpha_m'') \leqq \varphi(a^{e_i}) + \varphi(\vartheta_i'-\vartheta_i''),$$

weil für $\vartheta_i' \neq \vartheta_i''$ $\varphi(a^{e_i}) + \varphi(\vartheta_i' - \vartheta_i'') < \varphi(a^{e_j}) + \varphi(\vartheta_j' - \vartheta_j'')$ $(j > i)$ ist. Wären die beiden obigen Fundamentalreihen gleich, dann müsste $\varphi(a_m' - a_m'')$ mit m über alle Grenzen wachsen, was aber unmöglich ist.

Nun will ich zeigen, dass in $\mathfrak{N}$ die Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kein Grenzelement besitzt, umsomehr in K. Denn ist α aus $\mathfrak{N}$ das Grenzelement von $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, so muss α eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung vom endlichen Grade f in k sein. Es habe nun ein Teilkörper K_n von K den Grad $t > f$ über k. Dann ist K_n in einem geeigneten Normalkörper N_m enthalten, welcher ein Teilkörper von $\mathfrak{N}$ ist. Dann gibt es in N_m und infolgedessen in $\mathfrak{N}$ t verschiedene Automorphismen $P, P', \ldots, P^{(t-1)}$, welche ϑ_n aus K_n zu seinen Konjugierten $\vartheta_n, \vartheta_n', \ldots, \vartheta_n^{(t-1)}$ überführen[1]. Daher entstehen nach dem oben gezeigten aus der Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ durch Anwendung von $P, P', \ldots, P^{(t-1)}$ t verschiedene Fundamentalreihen in $\mathfrak{N}$. Diese t verschiedenen Fundamentalreihen müssen nach Hilfssatz t verschiedene Wurzeln einer irreduziblen Gleichung f-ten Grades in k definieren. Dies ist aber Widerspruch, weil $t > f$ ist.

Also besitzt der Körper K eine Fundamentalreihe, welche kein Grenzelement in K besitzt. K ist daher nicht perfekt.

§ 3. PERFEKTE KÖRPER IN BEZUG AUF EINE DISKRETE BEWERTUNG.

Es sei k ein perfekter Körper in bezug auf eine diskrete Bewertung φ. Ferner sei K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über k. Dann kann man nach § 2 K so bewerten, dass die Bewertung von k beibehalten ist. Diese Bewertung von K kann man ohne Missverständnis mit φ bezeichnen. Dann ist der Körper K nach Satz 5 ein perfekter Körper in bezug auf φ. Wie diese Bewertung φ von K durch den Körper k bestimmt wird, hat man in S. 126–127 gesehen. Dadurch sieht man sofort ein, dass die Bewertung φ von K auch diskret ist.

(1) O. HAUPT, Einführung in die Algebra, **2.** Bd., Anhang von W. Krull. S. 613.

In § 1 haben wir gesehen, dass die bezüglich φ ganzen Elemente aus K eine Maximalordnung bilden und die Gesamtheit aller ganzen Elemente mit positiver Bewertungen darin ein Primideal bildet. Wir verstehen im folgenden unter den ganzen Elementen aus K immer die ganzen Elemente in bezug auf φ. Bezeichnet man das Primideal mit $\mathfrak{P}$, so ist der Durchschnit von $\mathfrak{P}$ mit k auch ein Primideal in allen ganzen Elementen aus k, d.h. das zu φ gehörige Primideal in k. Wir wollen dieses Primideal in k mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen.

Wenn der Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k endlich viele verschiedene Elemente—etwa q verschiedene Elemente—besitzt, und $\mathfrak{p}$ in K genau durch $\mathfrak{P}^e$ teilbar ist[1], so ist der Grad n von K nach k gleich ef[2]. Dabei ist f der Relativgrad des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{P}$ in K über dem Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k. Wir nennen e die *Verzweigungsordnung* und f den *Restklassengrad* von K über k. Wenn K' ein Teilkörper von K über k ist, und der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von K' über k resp. f', e' sind, dann folgt aus Definition, dass *f durch f' und e durch e' teilbar ist, und* $\frac{f}{f'}$, $\frac{e}{e'}$ *resp. der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von K über K' sind.*

Da der Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k ein endlicher Körper ist, so besitzt er die Primzahlcharakteristik. Wir wollen diese Charakteristik mit p bezeichnen. Wenn e genau durch p^m teilbar ist, so nennt man $e_0 = \frac{e}{p^m}$ die *reduzierte Verzweigungsordnung* von K über k. Ferner gelten nach Herrn HASSE zwei folgende Sätze[3].

Satz 7. *K enthält einen Körper $W = k(\omega)$, wo ω eine primitive (q^f-1)-te Einheitswurzel[4] ist. Dabei ist ω zugleich eine primitive Wurzel mod $\mathfrak{P}$. W hat über k den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung 1. K hat über W den Restklassengrad 1 und die*

(1) Dies bedeutet, dass $\mathfrak{p}$, betrachtet als ein Ideal aus der Maximalordnung in K, dem Ideal $\mathfrak{P}^e$ gleich ist. Dass in K solche Verzweigung stattfindet, sieht man dadurch ein, dass die Bewertung von K diskret ist. K. II, S. 538.

(2) Ha. S. 506.

(3) Ha. S. 507–508.

(4) q ist eine bestimmte Potenz der Charakteristik des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{p}$ in k.

Verzweigungsordnung e. Es ist ferner

$$K = W(\Pi) = k(\omega, \Pi)$$

Dabei bedeutet Π ein genau durch $\mathfrak{P}$ teilbares Element aus K[1].

Satz 8. *W ist zyklisch über k, und $\omega \to \omega^q$ liefert einen primitiven Automorphismus von W über k.*

Wir nennen den Körper W den *Trägheitskörper* von K über k. Für den Trägheitskörper W beweisen wir

Satz 9. *Der Trägheitskörper W ist der maximale Teilkörper von K über k, derart dass alle Teilkörper W' von K über k mit der Verzweigungsordnung 1 in W enthalten sind.*

Beweis. Der Grad n' von W' über k, ist Produkt des Restklassengrades f' mit der Verzweigungsordnung 1 von W' über k. Also ist $n' = f'$. Da aber f' ein Teiler von f ist, so folgt, dass W' ein Teilkörper von W ist. Denn nach Satz 7 entsteht W' aus k durch Adjunktion einer primitiven $(q^{f'}-1)$-ten Einheitswurzel ω'. Da aber $(q^{f'}-1)$-ten Einheitswurzeln alle durch bestimmte Potenzen einer beliebigen primitiven (q^f-1)-ten Einheitswurzel ω darstellbar sind (weil f durch f' teilbar ist!), so ist W' ein Teilkörper von W.

Nun betrachten wir den Fall, dass K über k normal ist. Wir bezeichnen dabei mit $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von K nach k. Wie in der gewöhnlichen galoisschen Theorie definieren wir hier die Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppe in bezug auf das Primideal $\mathfrak{P}$ aus K. Im folgenden verstehen wir unter den oben genannten Gruppen immer die Gruppen in bezug auf das Primideal $\mathfrak{P}$. Da aber in K nur ein Primideal in bezug auf φ existiert, so kann man ohne Missverständnis das Wort „in bezug auf $\mathfrak{P}$" fortlassen.

Zerlegungsgruppe. Diejenigen Automorphismen, welche $\mathfrak{P}$ invariant lassen, bilden die sogenannte *Zerlegungsgruppe* $\mathfrak{G}_Z$. Hier ist aber $\mathfrak{G}_Z$ gleich der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$. Denn jedes Element γ aus $\mathfrak{P}$ besitzt eine positive Bewertung. Durch Anwendung eines Automorphismus aus $\mathfrak{G}$ ist γ zu einem Konjugierten übergeführt. Da nach

(1) Dabei versteht man unter einem genau durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Element ein Primelement aus K.

Satz 2 dieses konjugierte Element zu γ die gleiche Bewertung mit γ besitzt, so gehört es auch zu $\mathfrak{P}$. Also lassen alle Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ das Primideal invariant.

Trägheitsgruppe. Diejenigen Automorphismen aus $\mathfrak{G}$, welche jede Restklasse mod $\mathfrak{P}$ invariant lassen, bilden offenbar eine Gruppe $\mathfrak{G}_T$. Diese Gruppe $\mathfrak{G}_T$ heisst die *Trägheitsgruppe*.

Es sei ω_0 eine primitive Wurzel modulo $\mathfrak{P}$ in K. Dann genügt ω_0 modulo $\mathfrak{P}$ einer irreduziblen Kongruenz vom Grade f

$$g(x) \equiv 0 \mod \mathfrak{p}$$

mit Koeffizienten aus k, wenn K über k den Restklassengrad f besitzt.

Da jede von der Nullklasse verschiedene Restklasse mod $\mathfrak{P}$ durch eine bestimmte Potenz von ω_0 repräsentiert wird, so besteht $\mathfrak{G}_T$ aus allen derjenigen Automorphismen τ aus $\mathfrak{G}$, für welche

$$\tau\omega_0 \equiv \omega_0 \mod \mathfrak{P}$$

ist. Nun sei σ ein beliebiger Automorphismus aus $\mathfrak{G}$. Dann ist offenbar

$$\sigma^{-1}\tau\sigma\omega_0 \equiv \omega_0 \mod \mathfrak{P}.$$

Also ist $\mathfrak{G}_T$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir wollen jetzt die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_T$ untersuchen. Da die Automorphismen aus $\mathfrak{G}_T$ jede Restklasse mod $\mathfrak{P}$ unverändert lassen, so entsteht durch Anwendung der Automorphismen aus einer Nebengruppe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_T$ eine und dieselbe Permutation der Restklassen mod $\mathfrak{P}$, und aus verschiedenen Nebengruppen entstehen verschiedene Permutationen der Restklassen. Aber eine solche Permutation ist dadurch charakterisiert, dass dabei die durch ω_0 repräsentierte Restklasse mod $\mathfrak{P}$ einer bestimmten Restklasse mod $\mathfrak{P}$ zugeordnet wird.

Wendet man also einen Automorphismus σ aus $\mathfrak{G}$ auf die Kongruenz $g(\omega_0) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}$ an, dann erhält man

$$\sigma g(\omega_0) \equiv g(\sigma\omega_0) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}.$$

Daher ist $\sigma\omega_0$ eine Wurzel von $g(x) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}$. Da aber $g(x)$ vom

Grade f und $\omega_0, \omega_0^q, \ldots, \omega_0^{q^{f-1}}$ alle Wurzeln von $g(x) \equiv 0 \mod \mathfrak{p}$ sind (nach Satz 8), so ist $\sigma\omega_0$ kongruent einem von $\omega_0, \omega_0^q, \ldots, \omega_0^{q^{f-1}}$. Es gibt also höchstens f verschiedene Nebengruppen d. h. der Index von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_T$ ist höchstens f.

Es sei nun $h(x) = 0$ eine irreduzible Gleichung mit ganzen Koeffizienten aus k, welcher ω_0 genügt. Dann ist der Grad von $h(x)$ nicht kleiner als der von $g(x)$, weil $g(x)$ modulo $\mathfrak{p}$ irreduzibel ist und $h(\omega_0) \equiv 0$, $g(\omega_0) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}$ sind. Hieraus folgt sofort, dass $g(x)$, modulo $\mathfrak{p}$ betrachtet, ein Faktor von $h(x)$ ist. Nach dem Hauptsatz der galoisschen Theorie weiss man aber, dass es in $\mathfrak{G}$ denjenigen Automorphismus gibt, der eine Wurzel ω_0 von $h(x) = 0$ zu einer beliebigen anderen Wurzel von $h(x) = 0$ überführt. Hiernach sieht man sofort, dass es in $\mathfrak{G}$ einen Automorphismus σ gibt, derart dass

$$\sigma\omega_0 \equiv \omega_0^q \mod \mathfrak{P}$$

wird. Also existieren genau f verschiedene Nebengruppen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_T$, und es folgt auch leicht

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_T + \sigma\mathfrak{G}_T + \ldots + \sigma^{f-1}\mathfrak{G}_T ,$$

d. h. die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_T$ ist zyklisch und von der Ordnung f.

Daher erhält man

Satz 10. *Die Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_T$ ist zyklisch und von der Ordnung f. Dabei ist f der Restklassengrad von K über k.*

Satz 11. *Der Trägheitskörper W von K über k ist der Invariantenkörper der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$.*

Beweis. Nach Satz 7 entsteht der Körper W aus k durch Adjunktion einer primitiven (q^f-1)-ten Einheitswurzel ω, welche auch als eine primitive Wurzel modulo $\mathfrak{P}$ angenommen werden kann. Die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}_W$ von K nach W ist sicher eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_T$, weil ω bei Anwendung jedes Automorphismus aus $\mathfrak{G}_W$ invariant ist. Da aber

$$[\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_W]^{(1)} = [W : k]^{(2)} = f = [\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_T]$$

ist, so folgt

$$\mathfrak{G}_W = \mathfrak{G}_T .$$

Verzweigungsgruppe.

Unter allen Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ bildet die Gesamtheit derjenigen Automorphismen v, die für jedes ganze Element α aus K

$$v\alpha \equiv \alpha \mod \mathfrak{P}^2$$

gelten lassen, die sogenannte *Verzweigungsgruppe* $\mathfrak{G}_V$.

Dass $\mathfrak{G}_V$ eine Untergruppe und sogar eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, kann man leicht beweisen. Es gilt nun

Satz 12. *Es sei p die Charakteristik des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{P}$ in K, und $e = e_0 p^m$ mit $(p, e_0) = 1$. Dann ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_T$ nach $\mathfrak{G}_V$ zyklisch und von der Ordnung e_0.*

Beweis. Es sei Π ein primitives Element von K über W: $K = W(\Pi)$, und Π sei genau durch $\mathfrak{P}$ teilbar (nach Satz 7). Wendet man auf Π einen Automorphismus τ aus $\mathfrak{G}_T$ an, so erhält man für die in Satz 7 bestimmte primitive (q^f-1)-te Einheitswurzel ω

$$\tau\Pi \equiv \omega^b \Pi \mod \mathfrak{P}^2 .$$

Dann und nur dann gehört τ zu $\mathfrak{G}_V$, wenn $\omega^b \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}$ ist, also b durch q^f-1 teilbar ist, weil ω eine primitive Wurzel mod $\mathfrak{P}$ ist. Wir beweisen nun, dass die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ zyklisch ist. Nämlich τ sei ein Automorphismus aus $\mathfrak{G}_T$, für welchen der Exponent b von ω in der Kongruenz

$$\tau\Pi \equiv \omega^b \Pi \mod \mathfrak{P}^2$$

die kleinste positive Zahl ist. (Bekanntlich können wir alle Exponenten b von ω^b immer positiv annehmen.) Ferner sei für einen anderen Automorphismus τ' aus $\mathfrak{G}_T$

$$\tau'\Pi \equiv \omega^{b'} \Pi \mod \mathfrak{P}^2 ,$$

(1) $[\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_W]$ bezeichnet den Index von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_W$.
(2) $[W : k]$ bedeutet den Relativgrad von W nach k.

wobei $b' \not\equiv 0 \mod q^f-1$ ist. Dann kann man sicher zwei ganze rationale Zahlen t, r so finden, dass

$$b' = tb+r$$

ist, wobei $0 \leqq r < b$ ist. Also ist

$$\tau^{-t}\tau' \Pi \equiv \omega^r \Pi \mod \mathfrak{P}^2 .$$

Wäre $r \neq 0$, so führte dies zu Widerspruch. Also muss $r = 0$ sein. Daher gehört τ' zur Nebengruppe $\tau^t \mathfrak{G}_V$. Es findet also die folgende Zerlegung statt:

$$\mathfrak{G}_T = \mathfrak{G}_V + \tau\mathfrak{G}_V + \ldots . + \tau^{i-1}\mathfrak{G}_V .$$

Da $\mathfrak{G}_V$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_T$ ist, so ist $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ zyklisch.

Nun behaupte ich, dass die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$ eine Potenz von p ist. Dafür genügt zu zeigen, dass die Ordnung jedes Elementes aus $\mathfrak{G}_V$ eine bestimmte Potenz von p ist. Für einen Automorphismus v aus $\mathfrak{G}_V$ sei

$$v\Pi \equiv \Pi + \Gamma_0 \Pi^2 \mod \mathfrak{P}^3 ,$$

worin Γ_0 ein ganzes Element aus K bedeutet. Durch p-malige Anwendung von v entsteht

$$v^p \Pi \equiv \Pi + p\Gamma_0 \Pi^2 \mod \mathfrak{P}^3 .$$

Da p die Charakteristik des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{P}$ und Γ_0 ein ganzes Element aus K ist, so gehört $p\Gamma_0$ zu $\mathfrak{P}$. Also ist

$$v^p \Pi \equiv \Pi \mod \mathfrak{P}^3 ,$$

d. h.

$$v^p \Pi \equiv \Pi + \Gamma_1 \Pi^3 \mod \mathfrak{P}^4 .$$

Allgemein erhält man für eine natürliche Zahl n

$$v^{p^n} \Pi \equiv \Pi + \Gamma_n \Pi^{n+2} \mod \mathfrak{P}^{n+3} .$$

Hieraus folgt, dass die Bewertung

$$\varphi(v^{p^n} \Pi - \Pi)$$

für $n = 0, 1, \ldots$ über alle Grenzen wachsen kann. Da aber in $\mathfrak{G}_V$ endlich viele verschiedene Potenzen von v existieren können, so gibt es endlich viele verschiedene

$$\varphi(v^{p^n} \Pi - \Pi) .$$

Es ist also für ein passendes n_0

$$v^{p^{n_0}} \Pi - \Pi = 0 .$$

Da v ein Automorphismus aus $\mathfrak{G}_T$ ist, so ist für ein beliebiges Element a aus W

$$v a = a .$$

Also ist jedes Element aus $K = W(\Pi)$ durch Anwendung eines Automorphismus $v^{p^{n_0}}$ invariant, d. h. $v^{p^{n_0}}$ ist der identische Automorphismus. Daher ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$ eine Potenz von p[1]. Wir wollen noch zeigen, dass die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$ genau p^m ist. Dafür beweise ich zunächst, dass ein beliebiges Element τ aus $\mathfrak{G}_T$, dessen Ordnung eine bestimmte Potenz von p ist, zu $\mathfrak{G}_V$ gehört. Ist $\tau \Pi \equiv \omega^b \Pi \mod \mathfrak{P}^2$, so ist sicher $\tau^{q^f-1} \Pi \equiv \omega^{b(q^f-1)} \Pi \equiv \Pi \mod \mathfrak{P}^2$. Also gehört τ^{q^f-1} zu $\mathfrak{G}_V$. Da $(q^f-1, p) = 1$ ist, so gibt es bekanntlich zwei ganze rationale Zahlen x, y, derart dass

$$(q^f-1)x + p^s y = 1$$

wird. Dabei bedeutet p^s die Ordnung von τ. Dies zeigt aber, dass

$$\tau = \tau^{(q^f-1)x+p^s y} = \tau^{(q^f-1)x}$$

schon ein Element aus $\mathfrak{G}_V$ ist.

Nach dem Satz von SYLOW gibt es in $\mathfrak{G}_T$ sicher eine Untergruppe von der Ordnung p^m. Aber diese Untergruppe muss mit $\mathfrak{G}_V$ übereinstimmen. Denn zunächst ist die SYLOWsche Gruppe nach dem eben Bewiesenen eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_V$. Da die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$

(1) Die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$ ist also höchstens p^m.

höchstens p^m ist, so wird die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$ auch p^m[1]. Also ist die Ordung von $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ gleich e_0.

Der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_V$ heisst der *Verzweigungskörper*. Wir bezeichnen ihn mit V. Offenbar ist der Grad $[V : W]$ von V nach W gleich e_0 und dieser Grad e_0 ist Produkt des Restklassengrades mit der Verzweigungsordnung von V über W. Da der Restklassengrad von K über k gleich f und der von W über k auch f ist, so ist der Restklassengrad von V über k gleich f, d. h. der Restklassengrad von V über W ist gleich 1. Hieraus folgt also, dass die Verzweigungsordnung von V über W gleich e_0 ist. Weil aber der Körper W die Verzweigungsordnung 1 über k besitzt, so ist die Verzweigungsordnung von V über k auch e_0.

Nun betrachten wir einen Zwischenkörper K' zwischen K und k. Bezeichnet man die galoissche Gruppe von K nach K' mit $\mathfrak{H}$, so ist

1. $\mathfrak{H}$ die Zerlegungspruppe von $\mathfrak{P}$ über K',
2. $\mathfrak{H} \frown \mathfrak{G}_T$[2] die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ über K',
3. $\mathfrak{H} \frown \mathfrak{G}_V$ die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ über K'.

Es sei nun V' ein Teilkörper von K, dessen Verzweigungsordnung über k zu p prim ist. Dann ist offenbar die Verzweigungsordnung von K über V' durch p^m teilbar. Da nach 3 die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$ von K über k die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_{V'}$ von K über V' enthalten muss, und die Ordnung von $\mathfrak{G}_V$ p^m ist, so ist $\mathfrak{G}_V$ identisch mit $\mathfrak{G}_{V'}$. Also ist die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$ eine Untergruppe der galoisschen Gruppe von K nach V'. Es ist also V' ein Teilkörper von V.

Hieraus folgt

Satz 13. *Der Verzweigungskörper V ist der maximale Teilkörper von K mit der Verzweigungdordnung e_0 über k, derart dass alle Teilkörper von K mit der zu p primen Verzweigungsordnung über k in V enthalten sind. Dabei ist e_0 die reduzierte Verzweigungsordnung von K über k.*

(1) Die SYLOWsche Gruppe von $\mathfrak{G}_T$ hinsichtlich der Primzah p ist gerade die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$.

(2) $\mathfrak{H} \frown \mathfrak{G}_T$ bedeutet den Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}_T$.

Für einen beliebigen galoisschen Teilkörper K_1 zwischen K und k gilt folgender Satz

Satz 14. *Bezeichnet man mit* $\mathfrak{P}_1$ *das Primideal in* K_1 (*auf die Bewertung* φ *von* K *bezogen*), *so ist*

1.) *die Zerlegungsgruppe von* $\mathfrak{P}_1$ *nach* k *isomorph zu* $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$,

2.) *die Trägheitsgruppe von* $\mathfrak{P}_1$ *nach* k *isomorph zu* $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T/\mathfrak{H}$,

3.) *die Verzweigungsgruppe von* $\mathfrak{P}_1$ *nach* k *isomorph zu* $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_V/\mathfrak{H}$.

Beweis. Die Behauptung 1.) folgt aus Definition der Zerlegungsgruppe. Um die Behauptung 2.) zu beweisen, benutzen wir Satz 9 und 11. Der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}_1$ besitzt die Verzweigungsordnung 1 über k, ist also nach Satz 9 ein Teilkörper von W, und er ist auch ein Teilkörper von K_1. Daher ist der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}_1$ über k invariant bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$. Betrachtet man den Invariantenkörper von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$, so ist er offenbar ein Teilkörper von K_1 und W, besitzt also die Verzweigungsordnung 1 über k. Nach Satz 9 muss also der Invariantenkörper von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ ein Teilkörper des Trägheitskörpers von $\mathfrak{P}_1$ über k sein. Damit ist es gezeigt, dass der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}_1$ über k der Invariantenkörper von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ ist. Daraus folgt sofort die Behauptung 2.).

Die Behauptung 3.) beweist man ebenso wie für 2.). Dabei soll man statt des Satzes 9 und 11 den Satz 13 benutzen.

Nun sei k wieder ein perfekter Körper in bezug auf eine diskrete Bewertung φ, und $\mathfrak{p}$ das φ zugehörige Primideal aus k. Ferner sei L ein endlicher Erweiterungskörper 1. Art über k. Dann kann man in L immer eine erweiterte diskrete Bewertung von φ finden. Diese erweiterte Bewertung von L kann ich ohne Missverständnis mit φ bezeichnen. Sind K und K' zwei verschiedene Zwischenkörper zwischen k und L, so gibt es in K, K' und in dem Kompositum KK' von K und K' resp. das φ zugehörige Primideal $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\overline{\mathfrak{P}}$. Ferner nehmen wir an, dass der Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k nur endlich viele verschiedene Elemente besitzt. Dann ist der Restklassengrad von L über k auch endlich, ist also der Restklassengrad eines Teilkörpers von L über k auch endlich. Wir bezeichnen die Charakteristik des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{p}$ mit p.

f, e_0, $e = e_0 p^m$ seien bzw. der Restklassengrad, die reduzierte Verzweigungsordnung, die Verzweigungsordnung von K über k; f', e_0', $e' = e_0' p^{m'}$ seien bzw. der Restklassengrad, die reduzierte Verzweigungsordnung, die Verzweigungsordnung von K' über k; F, E_0, $E = E_0 p^M$ seien bzw. der Restklassengrad, die reduzierte Verzweigungsordnung, die Verzweigungsordnung von KK' über K'.

Dann gilt folgender Satz.

Satz 15.

1. *e ist durch E teilbar.*
2. $F = \dfrac{f}{(f, f')}$ [(1)].
3. $E_0 = \dfrac{e_0}{(e, e_0')}$.

Beweis. Bekanntlich kann man über dem Körper k einen L enthaltenden kleinsten normalen Körper L^* bilden. Nach Satz 2 kann man L^* so bewerten, dass die Bewertung φ von L beibehalten ist. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}^*$ das φ zugehörige Primideal aus L^*. Dann sind offenbar die Primideale $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\overline{\mathfrak{P}}$ in $\mathfrak{P}^*$ enthalten.

Unter Benutzung von Satz 14 und des Körpers L^* kann man diesen Satz genau so wie in der Arbeit von HERBRAND[(2)] beweisen. Für ausführlichen Beweis weise ich aber auf die Arbeit von HERBRAND hin.

§ 4. UNENDLICHE ALGEBRAISCHE ERWEITERUNG 1. ART ÜBER EINEM PERFEKTEN KÖRPER.

Im folgenden betrachten wir einen Körper k_0, welcher in bezug auf eine diskrete Bewertung φ perfekt ist. Ferner nehmen wir an, dass in k_0 der Restklassenkörper des φ zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_0$ endlich viele verschiedene Elemente besitzt.

Es seien $k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_n \subset \ldots$ algebraische Erweiterungskörper 1. Art und von endlichem Grade über k_0. Dann definiert die

(1) (f, f') bedeutet den grössten gemeinsamen Teiler von f und f'.
(2) He. S. 489.

Vereinigungsmenge der Körper $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ einen Körper k. Der Körper k ist von der ersten Art über k_0. Deshalb können wir nach § 2 k so bewerten, dass die Bewertung von k die Bewertung φ von k_0 beibehält. Wir können daher ohne Missverständnis die Bewertung von k auch mit φ bezeichnen.

Da jeder Körper k_i von endlichem Grade über k_0, und k_0 perfekt ist, so ist k_i nach Satz 5 auch perfekt in bezug auf φ, und in k_i besitzt der Restklassenkörper des φ zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_i$ endlich viele verschiedene Elemente. Aber wie wir schon in Satz 6 bewiesen haben, ist der Körper k nicht mehr perfekt in bezug auf φ.

Nun betrachten wir einen endlichen algebraischen Erweiterungskörper 1. Art K über dem Körper k. Nach § 2 kann man den Körper K so bewerten, dass die Bewertung φ von k dabei beibehalten ist. Wir bezeichnen daher die Bewertung von K auch mit φ. Da K endlich und von der ersten Art über k ist, so existiert in K ein primitives Element ϑ, derart dass $K = k(\vartheta)$ ist. Dieses Element ϑ genügt einer irreduziblen Gleichung von endlichem Grade mit Koeffizienten aus k. Da diese Koeffizienten alle schon in einem passenden Teilkörper k_i von k enthalten sind, so besitzt ϑ immer denselben Grad über jedem Körper k_j $(j \geqq i)$. Bezeichnet man $k_j(\vartheta)$ durch K_j, so ist K offenbar ein Vereinigungskörper von $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_m, \ldots$. Nach Satz 5 ist der Körper K_j ein perfekter Körper in bezug auf φ. Nach Definition von $K_i, K_{i+1}, \ldots$ sieht man sofort, dass der Grad von K nach k gleich dem von K_j nach k_j $(j \geqq i)$ ist. Den Grad von K nach k will ich im folgenden mit n bezeichnen.

Betrachtet man die Körper k_j, K_j, k_{j+1}, K_{j+1} $(j \geqq i)$, so folgt leicht aus Satz 15

$$e_{j+1} \mid e_j \quad \text{und} \quad f_{j+1} \mid f_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)^{(1)},$$

wo $e_\varkappa$, $f_\varkappa$ bzw. der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von $K_\varkappa$ über $k_\varkappa$ sind $(\varkappa = j, j+1)$. Da aber

(1) Da ϑ ein algebraisches Element vom Grade n über k_j und k_{j+1} ist, so ist $K_{j+1} = k_{j+1}(\vartheta) = k_{j+1} K_j$. Also kann man auf den Körper K_{j+1} über k_j Satz 15 anwenden.

$$e_j f_j = n = e_{j+1} f_{j+1}$$

ist, so folgt aus (1)

$$e_j = e_{j+1}\,, \qquad \text{und} \qquad f_j = f_{j+1}\,.$$

Dies bedeutet aber, dass in jedem Körper K_j $(j \geqq i)$ der Restklassengrad bzw. die Verzweigungsordnung über k_j immer einer bestimmten natürlichen Zahl gleich ist. Diesen Restklassengrad bzw. die Verzweigungsordnung wollen wir also mit f bzw. e bezeichnen, und wir nennen ferner f den *Restklassengrad* und e die *Verzweigungsordnung* von K über k. Dass diese Definition des Restklassengrades und der Verzweigungsordnung von der Wahl der Körperreihen $k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots$ und $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_m, \ldots$ unabhängig ist, kann man leicht beweisen.

Es sei K' ein Teilkörper von K über k, und f', e' seien resp. der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von K' über k. *Dann ist* f *bzw.* e *durch* f' *bzw.* e' *teilbar, und* $\frac{f}{f'}$, $\frac{e}{e'}$ *sind resp. der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von* K *über* K' [1].

Wir haben schon in Satz 7 gesehen, dass es im Körper K_j den sogenannten Trägheitskörper W_j über k_j gibt, welcher aus k_j durch Adjunktion eines Elementes ω vom Grade f über k_j entsteht: $W_j = k_j(\omega)$. Wir wollen nun zeigen, dass der Trägheitskörper W_{j+1} von K_{j+1} über k_{j+1} mit dem Körper $k_{j+1}(\omega)$ identisch ist.

Dafür betrachten wir die Restklassengrade von K_{j+1} und K_j über k_j. Bezeichnet man den Restklassengrad von k_{j+1} über k_j mit m_j, so ist bekanntlich

$$f_j \mid m_j f_{j+1}\,,$$

(1) Offenbar können wir einen Index i finden, derart dass K bzw. K' der Vereinigungskörper von $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_m, \ldots$ bzw. $K'_i, K'_{i+1}, \ldots, K'_m, \ldots$ ist, wobei K_j ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über k_j und K'_j ein Teilkörper von K_j über k_j ist, und $[K_j : k_j] = [K : k]$, $[K'_j : k_j] = [K' : k]$ sind $(j \geqq i)$. Nach Definition des Restklassengrades und der Verzweigungsordnung sind f, e resp. der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von K_j über k_j, und f', e' resp. der Restklassengrad, die Verzweigungsordnung von K'_j über k_j. Da K_j über k_j von endlichem Grade ist, so folgt die Behauptung aus § 3.

weil K_j ein Teilkörper von K_{j+1} über k_j ist, und $m_j f_{j+1}$ der Restklassengrad von K_{j+1} über k_j ist. Da aber nach Satz 15

$$f_{j+1} = \frac{f_j}{(m_j, f_j)}$$

ist, so ist $(m_j, f_j) = 1$, weil $f_j = f_{j+1} = f$ ist. Also haben der Trägheitskörper von k_{j+1} über k_j und W_j ausser k_j keine Oberkörper von k_j gemeinsam. Wir können weiter zeigen, dass der Durchschnitt von W_j mit k_{j+1} k_j ist. Denn der Durchschnitt muss als ein Teilkörper von W_j von der Verzweigungsordnung 1 sein, ist also nach Satz 9 ein Teilkörper des Trägheitskörpers von k_{j+1} über k_j, d. h. k_j. Das Kompositum $k_{j+1}W_j$ von k_{j+1} und W_j besitzt also den Grad f über k_{j+1}. Offenbar enthält der Trägheitskörper von K_{j+1} über k_j den Trägheitskörper von k_{j+1} über k_j und W_j. Da W_{j+1} den Trägheitskörper von K_{j+1} über k_j enthält[1], so enthält W_{j+1} den Körper W_j. Also ist $k_{j+1}W_j$ in W_{j+1} enthalten. Da aber $k_{j+1}W_j$ und W_{j+1} über k_{j+1} vom Grade f sind, so folgt ohne weiteres

$$W_{j+1} = k_{j+1}(\omega)$$

Wenn man also den Vereinigungskörper W von W_i, W_{i+1}, ..., W_m, ... bildet, dann ist $W = k(\omega)$, und $W = k(\omega)$ ist ein algebraischer Körper 1. Art vom Grade f über k. Denn wäre der Grad von ω über k kleiner als f, so müsste ω einer irreduziblen Gleichung in k mit dem kleineren Grade als f genügen. Da die Koeffizienten dieser irreduziblen Gleichung schon in einem Teilkörper k_m $(m \geqq i)$ enthalten wären, so führte dies zu Widerspruch, weil ω über k_m den Grad f besitzt.

Da jeder Körper W_j $(j \geqq i)$ den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung 1 über k_j besitzt, so ist nach Definition der Restklassengrad bzw. die Verzweigungsordnung von W über k f bzw. 1.

---

(1) W_{j+1} ist ein Teilkörper von K_{j+1} und sein Restklassengrad über k_j ist gleich $m_j f$, weil W_{j+1} den Körper k_{j+1} enthält und über k_{j+1} den Restklassengrad f besitzt. Also ist der Trägheitskörper von W_{j+1} über k_j vom Grade $m_j f$. Nach Satz 9 muss der Trägheitskörper von W_{j+1} über k_j mit dem von K_{j+1} über k_j übereinstimmen, weil der Grad des Trägheitskörpers von K_{j+1} über k_j gleich $m_j f$ ist.

Den Körper W wollen wir den *Trägheitskörper* von K über k nennen.

Satz 16. *Der Trägheitskörper W ist der maximale Teilkörper von K über k, derart dass jeder Teilkörper W' von K über k mit der Verzweigungsordnung 1 in W enthalten ist.*

Beweis. Da W' ein Teilkörper von K ist, so gibt es in W' ein primitives Element ϑ' über k, derart dass von einem Index I an $W_l' = k_l(\vartheta')$ $(l \geqq I)$ ist und die Verzweigungsordnung von W_l' über k gleich 1 ist. Wenn man also den Index I hinreichend gross nimmt, dann muss jeder Körper W_l' nach Satz 9 in W_l enthalten sein. Hieraus folgt der Satz, weil W' der Vereinigungskörper von $W_I', \ldots W_l', \ldots$ ist.

Betrachtet man nun K als einen Erweiterungskörper von W, dann muss ϑ (ein primitives Element von K über k) einer irreduziblen Gleichung vom Grade e in k genügen. Die Koeffizienten dieser irreduziblen Gleichung gehören aber schon zum Körper W_i, weil ϑ den Grad e über W_i besitzt. Daher ist K_j vom Grade e über W_j $(j \geqq i)$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{P}_j$ das φ zugehörige Primideal aus K_j und durch Π_j ein genau durch $\mathfrak{P}_j$ teilbares Element aus K_j, dann genügt Π_j einer irreduziblen Gleichung vom Grade e in W_j. Denn nach Satz 7 erzeugen Π_j und ω den Körper K_j über k_j, d. h. $K_j = k_j(\omega, \Pi_j) = W_j(\Pi_j)$. Da K_j den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung e über k_j besitzt, und W_j den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung 1 über k_j besitzt, so ist der Restklassengrad bzw. die Verzweigungsordnung von K_j über W_j 1 bzw. e. Dies gilt aber für alle $j \geqq i$. Damit ist der folgende Satz bewiessen:

Satz 17. *Der Körper K ist durch zwei geeignete Elemente ω und Π über k erzeugt: $K = k(\omega, \Pi)$. Der Grad n von K nach k ist Produkt aus dem Restklassengrad f und der Verzweigungsordnung e von K über k. Ferner besitzt der Trägheitskörper $W = k(\omega)$ von K über k den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung 1 über k und es ist noch $[W : k] = f$. Der Körper $K = W(\Pi)$ besitzt den Restklassengrad 1 und die Verzweigungsordnung e über W.*

Wir benutzen weiter die obigen Bezeichnungen. Wie wir schon gesehen haben, besitzt im Körper K_j der Restklassenkörper R_j nach

dem φ zugehörigen Primideal $\mathfrak{P}_j$ endlich viele verschiedene Elemente. Aber in jedem Teilkörper K_t von K_j kann man den Restklassenkörper R_t nach dem φ zugehörigen Primideal $\mathfrak{P}_t$ als einen Teilkörper von R_j annehmen. Dabei versteht man unter den Elementen aus R_t diejenigen Restklassen mod $\mathfrak{P}_j$ — Elemente aus R_j —, die durch die Elemente aus K_t repräsentiert sind. Also definieren die Körper $R_i < R_{i+1} \ldots . < R_j < \ldots .$ den Vereinigungskörper R. Der Körper R ist aber der Restklassenkörper mod $\mathfrak{P}$ in K. Denn, dass in K die Restklassen mod $\mathfrak{P}$ einen Körper bilden, hat man schon in § 1 gezeigt. Es sei A ein Element aus R. Dann ist A durch ein Körperelement a_j aus einem passendem Teilkörper K_j von K repräsentiert, d. h. A ist ein Element aus R_j. Umgekehrt ist jedes Element aus R_j ersichtlich ein Element aus R.

Ebenso definieren wir die Restklassenkörper $r_1, r_2, \ldots . , r_j, \ldots .$ in k. Dabei bedeutet r_j den Restklassenkörper in k_j nach dem φ zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}_j$. Dann ist der Vereinigungskörper von $r_1, r_2, \ldots . , r_j, \ldots .$ der Restklassenkörper r mod $\mathfrak{p}$ in k. Wie wir früher gesehen haben, ist für eine geeignete natürliche Zahl i der Relativgrad von R_j nach r_j immer gleich f, wenn $j \geqq i$ ist, weil der Relativgrad f den Restklassengrad von K_j über k_j bedeutet. Hiernach behaupte ich, dass der Restklassenkörper R ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über r ist. Denn jedes R_j ist ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über r_j, weil R_j und r_j endlich viele verschiede Elemente besitzen[1]. Also ist R ein algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über r. Da jedes Element aus R höchstens vom Grade f über r ist, so besitzt R ein primitives Element über r, dessen Grad nach r höchstens f ist. Wir können aber zeigen, dass gerade $[R : r] = f$ ist. Denn wir haben schon bewiesen, dass der Relativgrad m_i von r_{i+1} nach r_i prim zu f ist. Also besitzt das Kompositum $r_{i+1}R_i$[2] von r_{i+1} und R_i den Relativgrad fm_i über r_i, weil

(1) Offenbar ist r_j ein vollkommener Körper und R_j algebraisch über r_j. Hieraus folgt ohne weiteres, dass R_j über r_j algebraisch und von der ersten Art ist. Siehe Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Jour. f. Math., 137 (1910). § 12 und 13.

(2) Wir können dieses Kompositum bilden, weil R_i und r_{i+1} in R_{i+1} enthalten sind.

$[r_{i+1}R_i : r_i]$ ($\leqq [R_{i+1} : r_i] = m_i f$) durch f und m_i, also durch $m_i f$ teilbar sein muss. Daher ist $R_{i+1} = r_{i+1}R_i$. Ist ρ ein primitives Element von R_i über r_i, so ist ρ eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung f-ten Grades in r_i. Also folgt aus $R_{i+1} = r_{i+1}R_i = r_{i+1}(\rho)$, dass ρ vom Grade f über r_{i+1} ist. Wir können durch vollständige Induktion leicht beweisen, dass allgemein

$$R_{j+1} = R_j r_{j+1} = r_{j+1}(\rho) \qquad (j \geqq i)$$

ist, und ρ vom Grade f über r_{j+1} ist ($j \geqq i$). Daher ist ρ ein primitives Element von R und vom Grade f über r.

Damit haben wir bewiesen:

Der Restklassenkörper modulo $\mathfrak{P}$ *in* K *ist vom Grade* f *über dem Restklassenkörper modulo* $\mathfrak{p}$ *in* k, *und dieser Grad* f *ist gleich dem Restklassengrad von* K *über* k.

Durch diesen Satz ist die Definition des Restklassengrades von K über k berechtigt.

Wie ich schon gezeigt habe, ist der Körper K und k nicht mehr perfekt in bezug auf φ. Deshalb kann man über K den φ zugehörigen derivierten Körper $\overline{K}$ bilden. Dann enthält $\overline{K}$ auch den φ zugehörigen derivierten Körper $\overline{k}$ von k. Es sei ϑ ein primitives Element von K über k, und ϑ genüge einer irreduziblen Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

mit ganzen Koeffizienten aus k. Dann ist nach Satz 5 $\overline{k}(\vartheta)$ ein perfekter Körper über K. Da $\overline{K}$ der derivierte Körper von K ist und $\overline{k}(\vartheta)$ in $\overline{K}$ enthalten ist, so muss offenbar

$$\overline{k}(\vartheta) = \overline{K}$$

sein, d. h. $\overline{K} = \overline{k}K$.

Wir wollen nun beweisen, dass das Polynom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ in $\overline{k}$ auch irreduzibel ist. Dafür genügt zu zeigen, dass das Polynom $a_n^{n-1} f(x) = (a_n x)^n + a_{n-1}(a_n x)^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1} a_0$ in $\overline{k}$ irreduzibel ist. Wir betrachten also ein irreduzibles Polynom mit ganzen Koeffizienten aus k

$$f^*(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1}a_0$$

und beweisen, dass $f^*(x)$ in $\bar{k}$ irreduzibel ist.

Ist für nicht triviale Polynome $\bar{g}(x)$, $\bar{h}(x)$ in $\bar{k}$

$$f^*(x) = \bar{g}(x)\bar{h}(x) ,$$

so kann man annehmen, dass $\bar{g}(x)$, $\bar{h}(x)$ ganze Koeffizienten aus $\bar{k}$ und sogar die höchsten Koeffizienten 1 besitzen. Da die Koeffizienten von $\bar{g}(x)$ und $\bar{h}(x)$ alle als Grenzelemente von Fundamentalreihen aus k definiert sind, so kann man in k zwei Polynome $g_0(x)$, $h_0(x)$ mit folgender Eigenschaft finden:

1. $g_0(x)$, $h_0(x)$ besitzen ganze Koeffizienten aus k und sogar sind ihre höchsten Koeffizienten gleich 1.

2. Der Grad von $g_0(x)$ bzw. $h_0(x)$ ist gleich dem von $\bar{g}(x)$ bzw. $\bar{h}(x)$.

3. $\varphi(\bar{g}(x)-g_0(x)) > M$, $\varphi(\bar{h}(x)-h_0(x)) > M$,

wobei M eine noch nachher zu bestimmende positive Zahl ist.

Aus 3 folgt sofort

$$\begin{aligned} f^*(x)-g_0(x)h_0(x) &= \bar{g}(x)\bar{h}(x)-g_0(x)h_0(x) \\ &= \bar{h}(x)(\bar{g}(x)-g_0(x)) + g_0(x)(\bar{h}(x)-h_0(x)) . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \varphi(f^*(x)-g_0(x)h_0(x)) \geqq \operatorname{Min}\big(&\varphi(\bar{h}(x)) + \varphi(\bar{g}(x)-g_0(x)) , \varphi(g_0(x)) \\ &+ \varphi(\bar{h}(x)-h_0(x))\big) > M . \end{aligned}$$

Da K von der ersten Art über k ist, so ist $f(x)$ ein Polynom 1. Art in k, d. h. $f(x)$ besitzt lauter verschiedene Nullstellen. Also besitzt $f^*(x)$ auch keine mehrfachen Nullstellen. Daher ist die Resultante $R(\bar{g}, \bar{h})$ von $\bar{g}(x)$ und $\bar{h}(x)$ nicht gleich Null. Da $R(\bar{g}, \bar{h})$ ein ganzes Element aus $\bar{k}$ ist, so ist die Bewertung von $R(\bar{g}, \bar{h})$ gleich einer nicht negativen Zahl ρ. Wählt man als M eine beliebige positive Zahl, welche grösser ist als 2ρ, so ist die Bewertung der Resultante $R(g_0, h_0)$ von $g_0(x)$ und $h_0(x)$ nach 3 gleich ρ. Für die Polynome $g_0(x)$ und $h_0(x)$

gilt also folgende Tatsache:

I. Der Grad von $g_0(x)h_0(x)$ ist gleich dem von $f^*(x)$.

II. Der höchste Koeffizient von $g_0(x)h_0(x)$ ist gleich dem von $f^*(x)$.

III. $\varphi(R(g_0, h_0)) = \rho$.

IV. $\varphi(f^*(x) - g_0(x)h_0(x)) > 2\rho$.

Da die Koeffizienten von $f^*(x)$, $g_0(x)$ und $h_0(x)$ schon in einem passenden Teilkörper k_l von k enthalten sind, und k_l in bezug auf φ perfekt ist, so kann man nach Voraussetzungen I—IV Hilfssatz 2 in § 1 auf diesen Fall anwenden. Also gibt es in k_l zwei Polynome $g(x)$, $h(x)$, derart dass

$$f^*(x) = g(x)h(x)$$

mit $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x)$ (φ) ist. Daher ist $f^*(x)$ reduzibel in k_l, umsomehr in k. Dies ist aber Widerspruch, weil $f^*(x)$ in k irreduzibel ist. Also muss $f(x)$ in k irreduzibel sein.

Da $\overline{K} = \overline{k}(\vartheta)$ ist, so ist $\overline{K}$ ein algebraischer Erweiterungskörper 1. Art vom Grade n über $\overline{k}$.

Betrachtet man nun einen Zwischenkörper K' zwischen k und K, so ist K' ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über k. Ferner ist K' ein Vereinigungskörper von unendlich vielen perfekten Körpern von endlichem Grade über k_0. Offenbar ist K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper 1. Art über K'. Wir bezeichnen den Grad von K nach K' mit n'. Dann kann man leicht bestätigen, dass $\overline{K}'(\vartheta) = \overline{K}$ ist, wobei $\overline{K}'$ den φ zugehörigen derivierten Körper von K' bedeutet. Ferner kann man genau so wie für den Fall von $\overline{k}$ beweisen, dass $\overline{K}$ über dem derivierten Körper $\overline{K}'$ von K' vom Grade n' ist.

Also erhält man

Satz 18. *Der derivierte Körper $\overline{K}$ von K ist vom Grade n über dem derivierten Körper $\overline{k}$ von k. Dabei ist n der Grad von K nach k. Es ist noch $\overline{K} = \overline{k}K$. Ferner sei K' ein Zwischenkörper zwischen k und K, und $\overline{K}'$ sein derivierter Körper. Dann ist $\overline{K}'K = \overline{K}$ und* $[K : K'] = [\overline{K} : \overline{K}']$.

§ 5. ENDLICHE NORMALE ERWEITERUNGSKÖRPER 1. ART ÜBER EINEM BEWERTETEN KÖRPER.

In diesem Paragraphen bedeutet k einen bewerteten Körper, welcher als ein Vereinigungskörper von unendlich (abzählbar) vielen algebraischen Erweiterungskörpern 1. Art $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$, deren jeder über k_0 von endlichem Grad ist, definiert ist. Dabei ist noch jeder Körper k_m $(m \geqq 0)$ ein perfekter Körper in bezug auf die Bewertung φ von k. Wir bezeichnen in k_m $(m \geqq 0)$ bzw. k das φ zugehörige Primideal mit $\mathfrak{p}_m$ bzw. $\mathfrak{p}$. Ferner nehmen wir an, dass in jedem Körper k_m der Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}_m$ ein endlicher Körper ist.

Es sei K ein Normalkörper 1. Art, welcher über k vom endlichen Grade n ist. Dann besitzt K ein primitives Element ϑ über k:

$$K = k(\vartheta) .$$

Bezeichnet man mit $\vartheta, \vartheta', \ldots, \vartheta^{(n-1)}$ die konjugierten Wurzeln zu ϑ, so sind bekanntlich alle Automorphismen von K über k durch diejenigen Operationen realisiert, die ϑ durch seine Konjugierten ersetzen. Ferner haben wir im vorigen Paragraphen gesehen, dass K ein Vereinigungskörper von $K_i < K_{i+1} < \ldots < K_m < \ldots$ ist. Dabei ist K_j $(j \geqq i)$ ein algebraischer Erweiterungskörper 1. Art vom Grade n über k_j und $K_j = k_j(\vartheta)$. Man kann noch ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass K_j über k_j normal ist $(j \geqq i)$. Dann sind alle Automorphismen von K_j über k_j durch diejenigen Operationen realisiert, die ϑ zu seinen n Konjugierten überführen. Da aber K_j ein Teilkörper von K ist, so kann man auf die Elemente aus K_j die Automorphismen aus der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K nach k anwenden. Dabei bleibt offenbar jedes Element aus k_j invariant, und der Körper K_j wird dadurch auf sich selbst abgebildet. Also kann man einfach sagen, dass die Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ auch die Automorphismen von K_j über k_j sind. Da n verschiedene Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ — n ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ —, angewandt auf K_j, auch n verschiedene Automorphismen von K_j über k_j ergeben, so kann man ohne Missverständnis annehmen, dass $\mathfrak{G}$ auch die galoissche Gruppe von K_j nach k_j ist.

Nun will ich nach § 2 den Körper K so bewerten, dass die Bewertung φ von k beibehalten ist.

Für das φ zugehörige Primideal aus K bzw. K_j bedienen wir uns der Bezeichnung $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}_j$.

Zuerst definiere ich wie in § 3 die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach k.

Zerlegungsgruppe. Alle Automorphismen aus $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{P}$ invariant lassen, bilden die sogenannte *Zerlegungsgruppe* von $\mathfrak{P}$ nach k. Wir sprechen aber im folgenden schlechthin von der Zerlegungsgruppe. Da nach Definition $\mathfrak{P}$ alle Primideale $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{P}_j$, ... enthält und umgekehrt der Durchschnitt von $\mathfrak{P}$ mit K_j das Primideal $\mathfrak{P}_j$ ist, so ist $\mathfrak{P}$ offenbar ein Vereinigungsideal von $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{P}_j$, ...

Da das Primideal $\mathfrak{P}_j$ nach § 3 bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ invariant bleibt, so ist $\mathfrak{P}$ auch invariant bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}$. Die Zerlegungsgruppe ist daher die galoissche Gruppe von K nach k.

Trägheitsgruppe. Die Gesamtheit derjenigen Automorphismen τ aus $\mathfrak{G}$, die für jedes in bezug auf φ ganze Element α aus K die Kongruenz

$$\tau\alpha \equiv \alpha \mod \mathfrak{P}$$

gelten lassen, bildet die sogenannte *Trägheitsgruppe* $\mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{P}$ nach k. Wir nennen $\mathfrak{G}_T$ auch kurz die Trägheitsgruppe. Nach dieser Definition gilt für eine beliebige natürliche Zahl $j \geqq i$

$$\tau\alpha_j \equiv \alpha_j \mod \mathfrak{P}_j,$$

wobei α_j ein beliebiges ganzes Element aus K_j ist und τ alle Automorphismen aus $\mathfrak{G}_T$ durchlaufen kann.

Bezeichnet man durch $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j, so ist $\mathfrak{G}_T^{(j)} \geqq \mathfrak{G}_T$ und $\mathfrak{G}_T^{(j+1)} \leqq \mathfrak{G}_T^{(j)}$ $(j \geqq i)$. In § 3 haben wir bewiesen, dass $[\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_T^{(j)}]$ dem Restklassengrad f_j und $[\mathfrak{G}_T^{(j)} : E]$ der Verzweigungsordnung e_j von K_j über k_j gleich ist, und überdies $e_j f_j = n$ ist. Ferner haben wir in § 4 auch gezeigt, dass $f_i = f_{i+1} = ... = f$ und $e_i = e_{i+1} = ... = e$ ist. Dies bedeutet aber, dass $\mathfrak{G}_T^{(i)} = \mathfrak{G}_T^{(i+1)} = ... = \mathfrak{G}_T^{(m)} = ...$ ist. Wir behaupten nun, dass $\mathfrak{G}_T^{(j)} = \mathfrak{G}_T$ ist $(j \geqq i)$. Ist

nämlich τ ein beliebiger Automorphismus aus $\mathfrak{G}_T^{(j)}$, so ist für jedes ganze Element β aus K

$$\tau\beta \equiv \beta \mod \mathfrak{P} .$$

Denn β gehört schon zu einem Körper K_j $(j \geqq i)$, und da τ auch ein Automorphismus aus $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ ist, so gilt in K_j

$$\tau\beta \equiv \beta \mod \mathfrak{P}_j ,$$

ist also

$$\tau\beta \equiv \beta \mod \mathfrak{P} ,$$

und τ gehört zu $\mathfrak{G}_T$. Hieraus folgt

$$\mathfrak{G}_T^{(j)} = \mathfrak{G}_T \qquad (j \geqq i) .$$

Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_T^{(j)}$ zyklisch ist, so kann man ohne weiteres schliessen, dass $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_T$ auch zyklisch ist. Es ist sogar

$$[\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_T] = f \qquad \text{und} \qquad [\mathfrak{G}_T : E] = e .$$

Also erhält man folgenden Satz:

Satz 19. *Die Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ von K nach k ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und es ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_T$ zyklisch. Die Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_T$ ist gleich dem Restklassengrad von K über k, und die von $\mathfrak{G}_T$ ist gleich der Verzweigungsordnung von K über k.*

Wir betrachten nun einen Teilkörper W' von K über k, welcher der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_T$ ist. Da nach Satz 11 $\mathfrak{G}_T$ als die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j alle Elemente aus W_j (Trägheitskörper von K_j über k_j) invariant lässt, so ist W_j in W' enthalten. Da W der Vereinigungskörper von $W_i, W_{i+1}, \ldots, W_m, \ldots$ ist, so ist W in W' enthalten. Umgekehrt ist ein beliebiges Element aus W' schon in einem passenden Teilkörper W_j' von W', welcher der Durchschnitt von W' mit K_j ist, enthalten. Da die Elemente aus W_j' bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}_T$ invariant sind, so ist $W_j' \subseteqq W_j$. Also ist W' in W enthalten. Wir können daher schliessen, dass $W = W'$ ist.

Also erhält man

Satz 20. *Der Trägheitskörper W von K über k ist der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_T$ in K.*

Verzweigungsgruppe. Die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach k kann man in diesem Fall nicht mehr allgemein wie in § 3 durch Kongruenz definieren. Denn wir können nicht immer behaupten, dass

$$\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^2$$

ist. Vielmehr kann der Fall eintreten, dass $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^2$ ist. Deshalb wollen wir die Verzweigungsgruppe auf andere Weise definieren[1]. Im folgenden bezeichnet p die Charakteristik des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{P}$ in K, ist also p eine Primzahl, weil der Restklassenkörper nach § 4 einen endlichen Körper als seinen Teilkörper enthält. Wenn die Verzweigungsordnung e von K über k genau durch p^m teilbar ist, dann setze ich

$$e = e_0 p^m .$$

Hier nenne ich e_0 die *reduzierte Verzweigungsordnung*[2] von K über k. Da nach Satz 19 die Ordnung von $\mathfrak{G}_T$ gleich e ist, so gibt es nach dem Satz von SYLOW in der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ eine Untergruppe $\mathfrak{G}_V$ mit der Ordnung p^m, und alle anderen Untergruppen von der Ordnung p^m sind konjugierte Gruppen zu $\mathfrak{G}_V$.

Nun betrachten wir $\mathfrak{G}_V$ als eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_T^{(i)}$. Da die Ordnung von $\mathfrak{G}_T^{(i)}$ gleich $e = e_0 p^m$ und $(e_0, p) = 1$ ist, so ist bekanntlich $\mathfrak{G}_V$ die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}_i$ nach k_i. $\mathfrak{G}_V$ ist also eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_T^{(i)}$. Ferner ist nach Satz 12 $\mathfrak{G}_T^{(i)}/\mathfrak{G}_V$ zyklisch, und $[\mathfrak{G}_V : E] = p^m$.

Hieraus folgt ohne weiteres, dass $\mathfrak{G}_V$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_T$, und $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ zyklisch ist, wenn man $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_T$, $\mathfrak{G}_V$ die

(1) Diese Definition ist anscheinend etwas künstlich, wenn man sie mit der gewöhnlichen Definition der Verzweigungsgruppe vergleicht. Aber wie ich nachher zeigen kann, besitzt der Invariantenkörper der so definierten Verzweigungsgruppe zu den gewöhnlichen Verzweigungskörpern ähnliche Eigenschaft.

(2) Diese Definition der reduzierten Verzweigungsordnung betrifft nicht nur normale Erweiterungskörper über k, sondern allgemein endliche algebraische Erweiterungskörper 1. Art über k.

Automorphismengruppen von K nach k betrachtet. Nach Definition ist $\mathfrak{G}_V$ von der Ordnung p^m, und es gibt in $\mathfrak{G}_T$ nur eine einzige Untergruppe von der Ordnung p^m, weil $\mathfrak{G}_V$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_T$ ist. Diese Gruppe $\mathfrak{G}_V$ will ich die *Verzweigungsgruppe* von $\mathfrak{P}$ nach k nennen[1]. Es gilt also folgender Satz:

Satz 21. *Die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_T$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ von $\mathfrak{G}_T$ nach $\mathfrak{G}_V$ ist eine zyklische Gruppe und ihre Ordnung ist gleich der reduzierten Verzweigungsordnung von K über k.*

Verzweigungskörper. Der Invariantenkörper V von $\mathfrak{G}_V$ heisst der *Verzweigungskörper* von K über k. Wir wollen zunächst zeigen, dass der Verzweigungskörper V über k den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung e_0 besitzt. Betrachtet man nämlich in K_j $(j \geqq i)$ den Verzweigungskörper V_j über k, so ist V_j der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_V$ in K_j über k_j. Also ist V_j in V enthalten. Umgekehrt ist ein beliebiges Element α aus V schon ein Element aus K_j, wenn j hinreichend gross ist. Da α bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}_V$ invariant ist, so gehört es zu V_j. Also ist V der Vereinigungskörper von $V_i, V_{i+1}, \ldots, V_j \ldots$. Nach Satz 13 weiss man, dass V_j $(j \geqq i)$ über k_j den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung e_0 besitzt. Hieraus folgt nach Definition, dass V über k den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung e_0 besitzt.

Es sei nun V' ein Zwischenkörper zwischen K und k, dessen Verzweigungsordnung über k prim zu p ist. Dann ist V' ein Teilkörper von V. Denn V' ist ein Vereinigungskörper von $V'_i, V'_{i+1}, \ldots, V'_j, \ldots$[2], wobei V'_j $(j \geqq i)$ den Durchschnitt von V' mit K_j bedeutet. Dann gibt es nach Definition der Verzweigungsordnung einen Index l, derart dass jeder Körper V'_j $(j \geqq l \geqq i)$ eine zu p prime Verzweigungsordnung besitzt. Daher ist nach Satz 13 V'_j im Verzweigungskörper V_j von K_j über k_j enthalten. Also ist $V' \leqq V$, weil V der Vereinigungskörper von $V_i, V_{i+1}, \ldots, V_j, \ldots$ ist.

(1) Offenbar stimmt die hier definierte Verzweigungsgruppe mit der in § 3 definierten Verzweigungsgruppe überein, wenn k, K beide über k_0 endliche Grade besitzen.

(2) Für den Beweis weise ich auf den Hilfssatz im übernächsten Parapraphen hin.

Satz 22. *Der Verzweigungskörper V von K über k besitzt den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung e_0 über k. Er ist der maximale Teilkörper von K über k, derart dass alle Teilkörper von K mit der zu p primen Verzweigungsordnung in ihm enthalten sind.*

Nun betrachten wir einen beliebigen Teilkörper K' von K über k, welcher der Invariantenkörper einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ist. Dann gilt

Satz 23.

1.) $\mathfrak{H}$ ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach K',

2.) der Durchschnitt $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}_T$ ist die Trägheitsgruppe $\mathfrak{H}_T$ von $\mathfrak{P}$ nach K',

3.) $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_V$ ist die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{H}_V$ von $\mathfrak{P}$ nach K'.

Beweis. *1.)* und *2.)* folgen sofort aus der Definition. *3.)* beweist man folgendermassen. Nach Definition und dem Satz von SYLOW ist die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{H}_V$ von $\mathfrak{P}$ nach K' die maximale p-Gruppe in $\mathfrak{H}_T$ mit der Eigenschaft, dass alle anderen p-Gruppen aus $\mathfrak{H}_T$ zu $\mathfrak{H}_V$ gehören. Also muss $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_V$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}_V$ sein, weil $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_V$ eine p-Gruppe aus $\mathfrak{H}_T$ ist. Umgekehrt, da $\mathfrak{H}_V$ eine p-Gruppe in $\mathfrak{H}_T$ und infolgedessen in $\mathfrak{G}_T$ ist, so ist nach dem Satz von SYLOW und der Definition von $\mathfrak{G}_V$ die Gruppe $\mathfrak{H}_V$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_V$, ist also $\mathfrak{H}_V$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_V$. Hieraus folgt

$$\mathfrak{H}_V = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_V .$$

Nach der Eigenschaft des Trägheits- und Verzweigungskörpers beweist man folgenden Satz.

Satz 24. *Es sei K' ein normaler Zwischenkörper zwischen K und k, und $\mathfrak{H}$ die K' zugeordnete Untergruppe der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K nach k. Bezeichnet man dann die Trägheits- und Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach k resp. mit $\mathfrak{G}_T$ und $\mathfrak{G}_V$, so ist*

1.) $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ isomorph zur Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}'$ nach k,

2.) $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_I/\mathfrak{H}$ isomorph zur Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}'$ nach k,

3.) $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_V/\mathfrak{H}$ isomorph zur Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}'$ nach k.

Dabei bedeutet $\mathfrak{P}'$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus K' [1].

(1) $\mathfrak{P}'$ ist also das φ (der Bewertung von K) zugehörige Primideal aus K'.

Beweis. Da die galoissche Gruppe von $\mathfrak{P}'$ nach k isomorph zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ist, so ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}'$ nach k isomorph zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (nach Eigenschaft der Zerlegungsgruppe).

Der Trägheitskörper T' von K' über k besitzt die Verzweigungsordnung 1, ist also T' ein Teilkörper des Trägheitskörpers von K über k (nach Satz 16). Also ist der Trägheitskörper von K' über k bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ elementweise invariant. Bezeichnet man mit $\mathfrak{G}_{T'}$ die T' zugeordnete Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_{T'}$. Ferner ist der Invariantenkörper von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ ein Teilkörper von K' und des Trägheitskörpers von K über k. Dieser Trägheitskörper besitzt aber die Verzweigungsordnung 1 über k. Daher muss der Invariantenköper von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ die Verzweigungsordnung 1 über k besitzen. Also ist der Invariantenkörper von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$ ein Teilkörper von T' (nach Satz 16), d.h. $\mathfrak{G}_{T'}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T$. Daraus folgt:

$$\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T = \mathfrak{G}_{T'} .$$

Hieraus folgt sofort *2.*) .

Man kann *3.*) ebenso wie *2.*) beweisen, indem man im Beweis von *2.*) die Trägheitsgruppe durch die Verzweigungsgruppe, den Trägheitskörper durch den Verzweigungskörper, und die Verzweigungsordnung 1 durch die zu p prime Verzweigungsordnung ersetzt.

Hier will ich noch bemerken, dass Satz 15 auch richtig bleibt, wenn man im genannten Satz den in diesem Paragraphen definierten Körper k als den Grundkörper nimmt.

Nun betrachten wir den derivierten Körper $\overline{K}$ von K und $\overline{k}$ von k. Dann ist $\overline{K}$ normal über $\overline{k}$. Denn ist ϑ ein primitives Element von K über k, welches einer normalen Gleichung 1. Art $f(x) = 0$ vom Grade n in k genügt, so ist diese Gleichung in $\overline{k}$ auch irreduzibel und normal (nach Satz 18). Es ist $\overline{K} = \overline{k}(\vartheta) = K\overline{k}$. Also ist die galoissche Gruppe von $\overline{K}$ nach $\overline{k}$ isomorph zu $\mathfrak{G}$, weil $f(x) = 0$ auch eine definierende Gleichung von $\overline{K}$ über $\overline{k}$ ist. Zur Vereinfachung kann ich ohne Missverständnis die galoissche Gruppe von $\overline{K}$ nach $\overline{k}$ mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen.

Da die Bewertung von $\overline{K}$ eine Erweiterung von φ ist, so will ich die Bewertung von $\overline{K}$ schlechthin mit φ bezeichnen. Nach § 1 kann man in $\overline{K}$ das φ zugehörige Primideal $\overline{\mathfrak{P}}$ finden. Offenbar enthält $\overline{\mathfrak{P}}$ das Primideal $\mathfrak{P}$ aus K.

Nun definieren wir drei folgende Gruppen:

Zerlegungsgruppe. Die Gesamtheit derjenigen Automorphismen aus $\mathfrak{G}$, welche $\overline{\mathfrak{P}}$ invariant lassen, heisse die *Zerlegungsgruppe* von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $\overline{k}$.

Dann behaupte ich, dass $\mathfrak{G}$ die Zerlegungsgruppe von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $\overline{k}$ ist. Denn ist σ ein beliebiger Automorphismus aus $\mathfrak{G}$, so ist nach Satz 2 für ein beliebiges Element α aus $\overline{\mathfrak{P}}$

$$\varphi(\sigma\bar{\alpha}) = \varphi(\bar{\alpha}) > 0 .$$

Also gehört $\sigma\bar{\alpha}$ zu $\overline{\mathfrak{P}}$, w. z. b. w.

Trägheitsgruppe. Die Gesamtheit derjenigen Automorphismen τ aus $\mathfrak{G}$, für welche die Kongruenz

$$\tau\bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha} \mod \overline{\mathfrak{P}}$$

für alle ganzen Elemente aus $\overline{K}$ gilt, heisse die *Trägheitsgruppe* von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $\overline{k}$.

Wenn also α ein ganzes Element aus K ist, dann ist

$$\tau\alpha \equiv \alpha \mod \mathfrak{P} ,$$

d. h. τ ist ein Automorphismus aus der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{P}$ nach k. Ist umgekehrt τ' ein beliebiger Automorphismus aus $\mathfrak{G}_T$ und $\bar{\alpha}$ ein ganzes Element aus $\overline{K}$, so gibt es in K ein ganzes Element α, derart dass

$$\varphi(\bar{\alpha}-\alpha) > 0 ,$$

d. h.

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha \mod \overline{\mathfrak{P}}$$

ist, weil $\bar{\alpha}$ als das Grenzelement einer Fundamentalreihe aus K definiert ist. Es ist also

$$\tau'\bar{\alpha} \equiv \tau'\alpha \mod \tau'\overline{\mathfrak{P}} .$$

Da aber $\tau'\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}$, und $\tau'\alpha \equiv \alpha \mod \mathfrak{P}$ ist, so ist

$$\tau'\bar{\alpha} \equiv \alpha \equiv \bar{\alpha} \mod \overline{\mathfrak{P}}.$$

τ' ist daher ein Automorphismus aus der Trägheitsgruppe von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $\bar{k}$. Damit ist es bewiesen, dass $\mathfrak{G}_T$ gerade die Trägheitsgruppe von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $\bar{k}$ ist.

Bildet man nun den derivierten Körper $\overline{W}$ von W, so ist die galoissche Gruppe von $\overline{K}$ nach $\overline{W}$ isomorph der von K nach W (nach Satz 18). Also ist $\overline{W}$ der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_T$ über k. Diesen Körper $\overline{W}$ will ich auch den *Trägheitskörper* von $\overline{K}$ über $\bar{k}$.

Bildet man den derivierten Körper V von $\overline{V}$, so ist die $\overline{V}$ zugeordnete Untergruppe von $\mathfrak{G}$ die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$ von $\mathfrak{P}$ nach k (nach Satz 18). Die Gruppe $\mathfrak{G}_V$ ist nach Definition eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_T$, und ihre Ordnung eine bestimmte Potenz von p, aber der Index von $\mathfrak{G}_T$ nach $\mathfrak{G}_V$ ist prim zu p. Ich will $\mathfrak{G}_V$ die *Verzweigungsgruppe* von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $\bar{k}$, und dementsprechend den Körper $\overline{V}$ den *Verzweigungskörper* von $\overline{K}$ über $\bar{k}$ nennen.

§ 6. BEWERTUNG VON ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN UNENDLICHEN GRADES.

Im folgenden bedeutet k einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von unendlich (abzählbar) vielen algebraischen Zahlkörpern $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$ definiert ist, deren jeder über dem Körper der rationalen Zahlen von endlichem Grade ist[1]. Wir wollen k kurz einen unendlichen Zahlkörper nennen, und die Bezeichnung $k = \{k_i\}$ gebrauchen. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus k und mit $\mathfrak{o}_i$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus k_i. Dann ist $\mathfrak{o} = \{\mathfrak{o}_i\}$ — $\mathfrak{o}$ ist die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_i, \ldots$, — und der Durchschnitt von $\mathfrak{o}$ mit k_i ist gleich $\mathfrak{o}_i$. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k und mit

(1) Diese Körper wollen wir schlechthin die Körper von endlichem Grade oder die endlichen Zahlkörper nennen.

$\mathfrak{p}_i$ den Durchschnitt von $\mathfrak{p}$ mit k_i, so ist $\mathfrak{p}$ das Vereinigungsideal von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots$ — in Bezeichnung ist $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_i\}$ [1].

Nun wollen wir noch annehmen, dass der Körper k bewertet sei, und wir bezeichnen mit φ diese Bewertung von k. Da $\varphi(1) = 0$ ist, so kann man durch vollständige Induktion beweisen, dass für eine beliebige ganze rationale Zahl a $\varphi(a) \geqq 0$ ist. Es sei $\mu (\neq 0)$ eine ganze algebraische Zahl aus k. Dann ist μ eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 = 0$$

im Körper der rationalen Zahlen, wo $a_{m-1}, \ldots, a_0$ sämtlich ganze rationale Zahlen sind. Es gilt also

$$\mu^m + a_{m-1}\mu^{m-1} + \ldots + a_0 = 0 ,$$

und hieraus folgt

$$\begin{aligned} \infty &= \varphi(\mu^m + a_{m-1}\mu^{m-1} + \ldots + a_0) \\ &\geqq \operatorname{Min}\left(m\varphi(\mu) , (m-1)\varphi(\mu) + \varphi(a_{m-1}) , \ldots , \varphi(a_0)\right) . \end{aligned}$$

Da $\varphi(a_{m-1}) \ldots , \varphi(a_0)$ nicht negativ sind, so muss $\varphi(\mu) \geqq 0$ sein, weil sonst $\infty = m\varphi(\mu) < 0$ sein würde. Also gilt:

Die Bewertung jeder ganzen algebraischen Zahl ist nicht negativ.

Nach § 1 bildet die Menge aller Zahlen aus k, deren Bewertungen nicht negativ sind, eine Maximalordnung P in k. Wir zeigen jetzt, dass es in k eine ganze algebraische Zahl gibt, deren Bewertung positiv ist. Denn nach der Bewertungsvorschrift gibt es in k eine Zahl γ mit $\varphi(\gamma) \neq 0$. Diese Zahl γ kann man als einen Quotienten zweier ganzen Zahlen α, β aus k darstellen. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > 0$ — sonst $\varphi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) > 0$ — ist. Also ist $\varphi(\alpha) - \varphi(\beta) > 0$. Da $\varphi(\alpha) \geqq 0$, $\varphi(\beta) \geqq 0$ sind, so folgt

$$\varphi(\alpha) > 0 , \qquad \text{w.z.b.w.}$$

---

(1) K. I. S. 44.

Betrachtet man die Menge $\mathfrak{M}$ von allen Zahlen, deren Bewertungen positiv sind, so ist $\mathfrak{M}$ ein Primideal aus P. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen.

Satz 25. *Der Durchschnitt von* $\mathfrak{o}$ *mit* $\mathfrak{M}$ *ist ein Primideal in* k (*oder in* $\mathfrak{o}$).

Beweis. Es sei für zwei Zahlen α, β aus $\mathfrak{o}$ $\alpha\beta < \mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ (der Durchschnitt von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{M}$). Dann ist $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) > 0$, weil $\alpha\beta$ eine Zahl aus $\mathfrak{M}$ ist. Weil aber α, β beide ganze Zahlen sind, so ist $\varphi(\alpha) \geqq 0$ und $\varphi(\beta) \geqq 0$. Hieraus folgt $\varphi(\alpha) > 0$ oder $\varphi(\beta) > 0$, d. h. $\varphi(\alpha)$ oder $\varphi(\beta)$ gehört zu $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$.

Es seien μ, ν zwei beliebige ganze Zahlen aus k. Dann sind $\varphi(\mu) \geqq 0$, $\varphi(\nu) \geqq 0$, und für zwei beliebige Zahlen α, β aus $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ ist

$$\varphi(\mu\alpha + \nu\beta) \geqq \text{Min}\left(\varphi(\alpha\mu), \varphi(\nu\beta)\right) > 0 .$$

Offenbar ist $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ weder das Einsideal noch das Nullideal, weil $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ eine von Null verschiedene Zahl enthält, deren Bewertung positiv ist. Also ist $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ ein Primideal aus k.

Nach Struktur von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ ist die Bewertung jeder zu $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{M}$ primen ganzen Zahl aus k gleich Null. Hieraus folgt ohne weiteres

Zusatz. Eine Bewertung φ von k bestimmt eindeutig ein Primideal in k. Es ist die Menge aller ganzen Zahlen aus k, deren Bewertungen bezüglich φ positiv sind.

Wir wollen im folgenden von einer *Bewertung bezüglich eines Primideals* sprechen, wenn unter allen ganzen Zahlen aus k die Zahlen aus diesem Primideal und nur diese positive Bewertungen besitzen.

Dann gilt die Umkehrung des obigen Zusatzes.

Satz 26. *Ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* k *bestimmt eine Bewertung in bezug auf* $\mathfrak{p}$.

Beweis. Ich will in k wirklich eine Bewertung in bezug auf $\mathfrak{p}$ herstellen. Bezeichnet man $\mathfrak{p} \frown k_i$ mit $\mathfrak{p}_i$, so ist $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_i\}$. Es gehe nun das Primideal $\mathfrak{p}_i$ in die $\mathfrak{p}$ zugehörige Primzahl p mit dem genauen Exponenten u_i auf. Dann definieren wir

$$\varphi(\alpha) = \frac{a_i}{u_i}$$

als die Bewertung von α, wenn eine Zahl α aus k_i genau durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar ist[1]. Wir wollen zunächst zeigen, dass die Zahlen $\frac{a_i}{u_i}$ in allen Körpern von endlichem Grade, welche α enthalten, gleich sind.

Es seien $k_l < k_m$ zwei Teilkörper[2] von endlichem Grade über k, die α enthalten. Dann ist

$$\frac{a_l}{u_l} = \frac{a_m}{u_m}.$$

Denn in k_l ist α genau durch $\mathfrak{p}_l^{a_l}$ teilbar, ist also in k_m genau durch $\mathfrak{p}_m^{a_l e_m}$ teilbar, wenn $\mathfrak{p}_l$ in k_m genau durch $\mathfrak{p}_m^{e_m}$ teilbar ist. Da aber bekanntlich $e_m = \frac{u_m}{u_l}$ ist, so ist

$$\frac{a_m}{u_m} = \frac{a_l e_m}{u_m} = \frac{a_l}{u_m} \cdot \frac{u_m}{u_l} = \frac{a_l}{u_l}.$$

Wenn nun k_l und k_m in k zwei beliebige Teilkörper von endlichem Grade, welche α enthalten, sind, dann enthält der Durchschnitt $k_l \frown k_m$ von k_l mit k_m wirklich α, und k_m, k_l sind Erweiterungskörper von $k_l \frown k_m$. Die Bewertungen von α in k_m und k_l sind nach dem oben gezeigten gleich der Bewertung von α in $k_l \frown k_m$. Damit ist die Zahl $\varphi(\alpha)$ durch eine Zahl α und ein Primideal $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt.

Für eine Zahl aus k, welche zu $\mathfrak{p}$ prim ist, ist offenbar $\varphi(\gamma) = 0$.

Dass die so definierten Zahlen $\varphi(\alpha)$ wirklich den Bewertungspostulaten genügen, verifiziert man auf folgende Weise:

1. Nach Definition gibt es in k sicher eine Zahl α, deren Bewertung nicht Null ist. Der Zahl Null kann man das Symbol ∞ als ihre Bewertung zuordnen, weil Null in k_1 enthalten und durch beliebige hohe Potenzen von $\mathfrak{p}_1$ teilbar ist.

2. Es seien α und β zwei Zahlen aus k. Dann gehören α und β zu einem Teilkörper k_i von endlichem Grade, wenn man den Index i

(1) Ein Hauptideal (α) aus k_i kann sich als ein Potenzprodukt (mit positiven und negativen Exponenten) der verschiedenen Primideale aus k_i darstellen lassen. Wenn $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ ein Faktor ist, welcher in diesem Potenzprodukt den grössten Exponenten in bezug auf $\mathfrak{p}_i$ besitzt, so heisse α genau durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar.

(2) Ersichtlich brauchen k_l, k_m nicht notwendig die Körper aus $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ zu sein.

hinreichend gross nimmt. Es seien $\varphi(\alpha) = \frac{a_i}{u_i}$ und $\varphi(\beta) = \frac{b_i}{u_i}$, wobei u_i den genauen Exponenten von $\mathfrak{p}_i$ in p, und a_i bzw. b_i den genauen Exponenten von $\mathfrak{p}_i$ in α bzw. β bedeutet.

Dann ist $\alpha+\beta$ mindestens durch $\mathfrak{p}_i^{\mathrm{Min}(a_i, b_i)}$ teilbar. Also kann man schliessen

$$\varphi(\alpha+\beta) \geqq \mathrm{Min}\left(\frac{a_i}{u_i}, \frac{b_i}{u_i}\right) = \mathrm{Min}\left(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\right).$$

3. Wenn man den Körper k_i wie in 2 nimmt, dann ist für zwei ganze Zahlen α, β aus k

$$\varphi(\alpha\beta) = \frac{a_i+b_i}{u_i} = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta).$$

Also gibt die Funktion φ für alle Zahlen aus k wirklich eine Bewertung an.

Zwei Bewertungen φ und φ' von k heissen *ähnlich*, wenn für jede Zahl α aus k $\varphi(\alpha) = \rho\varphi'(\alpha)$ ist, wobei ρ eine bestimmte positive Zahl bedeutet.

Nun wollen wir für die Bewertungen in bezug auf ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k folgenden Satz beweisen.

Satz 27. *Die Bewertungen in bezug auf ein Primideal $\mathfrak{p}$ sind alle ähnlich.*

Beweis. Es seien φ und φ' zwei Bewertungen in bezug auf $\mathfrak{p}$. Dann ist $\frac{\varphi(p)}{\varphi'(p)} = \rho$ eine bestimmte positive Zahl, wenn p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl ist. Wir wollen nun beweisen, dass für eine beliebige Zahl α aus k auch $\varphi(\alpha) = \rho\varphi'(\alpha)$ ist, d. h. die beiden Bewertungen ähnlich sind.

Es sei α eine Zahl aus k_i und $\mathfrak{p}_i$ das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal aus k_i. Dann gibt es in k_i eine genau durch $\mathfrak{p}_i$ teilbare Zahl π_i. Wenn p in k_i genau durch $\mathfrak{p}_i^{u_i}$ teilbar ist, dann ist sicher

$$\varphi\left(\frac{\pi_i^{u_i}}{p}\right) = 0, \quad \varphi'\left(\frac{\pi_i^{u_i}}{p}\right) = 0$$

weil $\frac{\pi_i^{u_i}}{p}$ zu $\mathfrak{p}$ prim ist. Also ist $\varphi(\pi_i^{u_i}) = \varphi(p)$, und $\varphi'(\pi_i^{u_i}) = \varphi'(p)$.

Hieraus folgt

$$\rho = \frac{\varphi(p)}{\varphi'(p)} = \frac{\varphi(\pi^{u_i})}{\varphi'(\pi^{u_i})} = \frac{\varphi(\pi_i)}{\varphi'(\pi_i)} .$$

Da es für eine Zahl α aus k_i eine ganze rationale Zahl a_i gibt, derart dass die Zahl $\frac{\alpha}{\pi_i^{a_i}}$ zu $\mathfrak{p}$ prim wird, so ist also $\varphi\left(\frac{\alpha}{\pi_i^{a_i}}\right) = 0$ und $\varphi'\left(\frac{\alpha}{\pi_i^{a_i}}\right) = 0$. Daraus folgen ohne weiteres

$$\varphi(\alpha) = a_i\varphi(\pi_i), \quad \varphi'(\alpha) = a_i\varphi'(\pi_i) \text{ d.h. } \varphi(\alpha) = \rho\varphi'(\alpha) .$$

Nach dem obigen Satz erhält man alle Bewertungen in bezug auf ein Primideal $\mathfrak{p}$, indem man eine Bewertung φ mit allen positiven Zahlen multipliziert.

Unter allen zu φ ähnlichen Bewertungen gibt es sicher die eine, welche für die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl p (also für alle genau durch p teilbaren rationalen Zahlen) Bewertung 1 angibt. Solche Bewertung nenne ich die *normierte Bewertung* in bezug auf $\mathfrak{p}$ oder von $\mathfrak{p}$. Die im Beweis von Satz 26 konstruierte Bewertung ist eine solche. Es gibt offenbar nach Satz 27 nur eine einzige normierte Bewertung in bezug auf ein Primideal.

Wert eines Ideals.

Wir legen im folgenden die normierte Bewertung φ eines beliebigen Primideals $\mathfrak{p}$ aus k fest. Dann heisst die untere Grenze der Menge von Bewertungen aller Zahlen aus einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ der *Wert* von $\mathfrak{a}$ in bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$[1]. Wir bezeichnen den Wert von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ mit $w_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$. Weil ich im folgenden immer Werte in bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$ betrachte, so will ich schlechthin vom Wert eines Ideals $\mathfrak{a}$ sprechen, und die Bezeichnung $w(\mathfrak{a})$ gebrauchen. Nach Definition ist der Wert eines Hauptideals (α) in k gleich der Bewertung $\varphi(\alpha)$. Die vom Nullideal verschiedenen ganzen Ideale aus k besitzen nicht negative endliche Werte in bezug auf alle Primideale aus k, weil sie nur ganze Zahlen enthalten und die Bewertungen der ganzen Zahlen nicht negativ, also nach unten beschränkt sind. Die gebrochenen Ideale

(1) Herr KRULL hat für die Primärideale den Begriff der Werte eingeführt. Ich will aber hier Wert eines beliebigen Ideals definieren.

können negative Werte besitzen, aber sie sind immer endliche Zahl. Denn sei $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideals aus k, so kann man immer eine ganze Zahl β finden, so dass $\beta\mathfrak{b}$ ganzes Ideal wird. Der Wert von $\beta\mathfrak{b}$ ist die untere Grenze von $\varphi(\beta\rho) = \varphi(\beta)+\varphi(\rho)$, wobei ρ eine Zahl aus $\mathfrak{b}$ bedeutet, und diese untere Grenze ist eine nicht negative endliche Zahl. Also ist der Wert $w(\mathfrak{b})$ von $\mathfrak{b}$ gleich $w(\mathfrak{b}\beta)-\varphi(\beta)$. Daher besitzt ein vom Nullideal verschiedenes Ideal jedenfalls einen bestimmten Wert.

Satz 28. *Der Wert des Produktes zweier Ideale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *ist die Summe der Werte der beiden Ideale.*

Beweis. Eine Zahl aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist von der Gestalt $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_i$, wobei α_i bzw. β_i die Zahlen aus $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sind. Da

$$\varphi(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_i) \geqq \mathrm{Min}\,(\varphi(\alpha_1\beta_1), \ldots, \varphi(\alpha_r\beta_r))$$
$$\geqq \mathrm{Min}\,(\varphi(\alpha_1)+\varphi(\beta_1), \ldots, \varphi(\alpha_r)+\varphi(\beta_r)) \geqq w(\mathfrak{a})+w(\mathfrak{b})$$

ist, so sind die Bewertungen der Zahlen aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nicht kleiner als $w(\mathfrak{a})+w(\mathfrak{b})$.

Nun sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann kann man in $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ eine Zahl α bzw. β finden, derart dass

$$\varphi(\alpha)-w(\mathfrak{a}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varphi(\beta)-w(\mathfrak{b}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Hieraus folgt

$$\varphi(\alpha\beta)-(w(\mathfrak{a})+w(\mathfrak{b})) < \varepsilon$$

Dies zeigt aber, dass $w(\mathfrak{a})+w(\mathfrak{b})$ die untere Grenze der Zahlen aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges (ganzes oder gebrochenes) Ideal aus k. Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap k_i$ von $\mathfrak{a}$ mit k_i ein Ideal aus k_i. Denn seien λ und μ zwei ganze Zahlen aus k_i, so ist für zwei beliebige Zahlen α_i und β_i aus $\mathfrak{a}_i$

$$\lambda\alpha_i+\mu\beta_i$$

eine Zahl aus $\mathfrak{a}$ und k_i, ist also $\lambda\alpha_i+\mu\beta_i$ eine Zahl aus $\mathfrak{a}_i$.

Wenn für eine ganze Zahl β $\mathfrak{a}\beta$ ein ganzes Ideal aus k wird, dann kann man eine ganze rationale Zahl b, welche durch β teilbar ist,

finden, derart dass $b\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus k wird. Dann ist $b\mathfrak{a}_i$ auch ein ganzes Ideal aus k_i. Also ist $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal aus k_i.

Offenbar ist das Ideal $\mathfrak{a}$ ein Vereinigungsideal von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \ldots$. Betrachtet man die Zahlfolge $w(\mathfrak{a}_1), w(\mathfrak{a}_2), \ldots, w(\mathfrak{a}_n), \ldots$, so ist ihre untere Grenze gleich dem Wert von $\mathfrak{a}$. Denn es sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann gibt es in $\mathfrak{a}$ eine Zahl α, derart dass

$$\varphi(\alpha) - w(\mathfrak{a}) < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist, weil $w(\mathfrak{a})$ die untere Grenze der Bewertungen aller Zahlen aus $\mathfrak{a}$ ist. Da α schon in einem Ideal von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \ldots$ enthalten sein muss, so sei α eine Zahl aus $\mathfrak{a}_i$. Dann ist $\varphi(\alpha) \geqq w(\mathfrak{a}_i)$. Da $\mathfrak{a}_i < \mathfrak{a}$ ist, so ist

$$\varphi(\alpha) \geqq w(\mathfrak{a}_i) \geqq w(\mathfrak{a}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hieraus folgt nach (1)

$$w(\mathfrak{a}_i) - w(\mathfrak{a}) < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Also ist nach (2) und (3) $w(\mathfrak{a})$ die untere Grenze von $w(\mathfrak{a}_1), w(\mathfrak{a}_1), \ldots, w(\mathfrak{a}_n), \ldots$.

Nun wollen wir untersuchen, welchen Wert jedes $w(\mathfrak{a}_i)$ besitzt. Es sei $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_i\}$, und $\mathfrak{a}_i$ sei genau durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ [(1)] teilbar. Dann sind alle Zahlen aus $\mathfrak{a}_i$ durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar und sogar gibt es in $\mathfrak{a}_i$ eine Zahl, die genau durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar ist. Wenn p in k_i genau durch $\mathfrak{p}_i^{u_i}$ teilbar ist, dann ist $w(\mathfrak{a}_i)$ sicher gleich $\frac{a_i}{u_i}$. Da alle Zahlen aus $\mathfrak{a}_i$ in $\mathfrak{a}_{i+1}$ enthalten ist, so ist

$$w(\mathfrak{a}_i) \geqq w(\mathfrak{a}_{i+1}), \text{ d. h. } \frac{a_i}{u_i} \geqq \frac{a_{i+1}}{u_{i+1}}.$$

Daher ist die Zahlfolge $\frac{a_1}{u_1}, \frac{a_2}{u_2}, \ldots, \frac{a_n}{u_n}, \ldots$ abnehmend, aber jedes Glied dieser Zahlfolge ist nicht kleiner als $w(\mathfrak{a})$, und sogar besitzt diese Zahlfolge $w(\mathfrak{a})$ als ihre untere Grenze. Also gilt folgender Satz.

(1) In k_i kann man $\mathfrak{a}_i$ als ein Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen eindeutig darstellen. Wenn das Primideal $\mathfrak{p}_i$ mit dem genauen Exponenten e_i in diesem Potenzprodukt auftritt, dann sagt man, dass $\mathfrak{a}_i$ genau durch $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ teilbar. Sonst sagt man, dass $\mathfrak{a}_i$ zu $\mathfrak{p}_i$ prim, oder $\mathfrak{a}_i$ durch $\mathfrak{p}_i^0$ teilbar ist.

Satz 29. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* k *und* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \frown k_i$. *Wenn man mit* $w(\mathfrak{a})$ *bzw.* $w(\mathfrak{a}_i)$ *den Wert von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{a}_i$ *bezeichnet, dann ist*

$$w(\mathfrak{a}_1),\ w(\mathfrak{a}_2),\ \ldots\ldots,\ w(\mathfrak{a}_n),\ \ldots\ldots$$

eine abnchmende Zahlfolge und ihr Grenzwert ist gleich $w(\mathfrak{a})$.

Endliche und unendliche Ideale.

Wir wollen hier wieder die normierte Bewertung φ eines Primideals $\mathfrak{p}$ aus k festlegen, und den dadurch bestimmten Wert eines Ideals betrachten. Wenn der Wert eines Ideals der Bewertung einer Zahl aus diesem Ideal gleich ist, dann heisst dieses Ideal *endlich*, sonst *unendlich*. Es sei $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_i\}$ ein endliches Ideal und für eine Zahl α aus $\mathfrak{a}$ sei $\varphi(\alpha) = w(\mathfrak{a})$. Weil α eine Zahl aus einem geeigneten Ideal $\mathfrak{a}_i$ ist, so ist nach Satz 29

$$w(\mathfrak{a}_i) = w(\mathfrak{a}_{i+1}) = \ldots\ldots = w(\mathfrak{a}_n) = \ldots\ldots = w(\mathfrak{a})\ ,$$

d. h. von einem geeigneten Index an sind alle Ideale von gleichem Wert.

Umgekehrt, wenn $w(\mathfrak{a}_i) = w(\mathfrak{a}_{i+1}) = \ldots\ldots = w(\mathfrak{a}_n) = \ldots\ldots = w(\mathfrak{a})$ ist, dann gibt es in $\mathfrak{a}_i$ eine Zahl α mit $\varphi(\alpha) = w(\mathfrak{a})$.

Diese Definition trifft auch für das Primideal $\mathfrak{p}$ zu. Nämlich heisse ein Primideal $\mathfrak{p}$ *endlich in bezug auf die durch* $\mathfrak{p}$ *definierte normierte Bewertung*, wenn von einem hinreichend grossen Index i an immer

$$w(\mathfrak{p}_i) = w(\mathfrak{p}_{i+1}) = \ldots\ldots = w(\mathfrak{p})$$

ist, und sonst heisse es *unendlich*.

Zur Vereinfachung spreche ich im folgenden immer ohne Erwähnung von endlichem oder unendlichem Primideal. Dabei meine ich immer endliches oder unendliches Primideal in bezug auf die durch das Primideal selber definierte normierte Bewertung.

Wenn ein Primideal $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_i\}$ endlich ist, dann ist nach dem oben gezeigten

$$w(\mathfrak{p}_i) = w(\mathfrak{p}_{i+1}) = \ldots\ldots = w(\mathfrak{p})\ ,$$

wenn i hinreichend gross ist. Ist die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl p in

k_j genau durch $\mathfrak{p}_j^{u_j}$ teilbar, so ist $w(\mathfrak{p}_j) = \frac{1}{u_j}$. Also ist

$$\frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_{i+1}} = \ldots = w(\mathfrak{p}) ,$$

d. h. von einem geeigneten Index i an ist jedes $\mathfrak{p}_j$ genau durch $\mathfrak{p}_{j+1}$ teilbar $(j \geqq i)$.

Wenn aber $\mathfrak{p}$ unendliches Primideal ist, dann muss u_j über alle Grenzen wachsen, d. h. $w(\mathfrak{p}) = 0$. Es gilt also:

Dann und nur dann ist ein Primideal unendlich, wenn sein Wert 0 ist.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{p}$ ein Primideal und mit φ die normierte Bewertung von $\mathfrak{p}$. Dann besitzen die Zahlen aus $\mathfrak{p}$ positive Bewertungen in bezug auf φ. Wenn $\mathfrak{p}$ endliches Primideal ist, dann gibt es nach dem oben gezeigten einen Index i, derart dass

$$w(\mathfrak{p}_i) = w(\mathfrak{p}_{i+1}) = \ldots = w(\mathfrak{p}) .$$

Dies bedeutet aber, dass es in $\mathfrak{p}_i$ eine Zahl α gibt, deren Bewertung gleich dem Wert $w(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ ist: $\varphi(\alpha) = w(\mathfrak{p})$. Wir behaupten nun, dass $\varphi(\alpha)$ eine kleinste positive Bewertung unter allen positiven Bewertungen der Zahlen aus k ist. Denn ist β eine Zahl aus k, deren Bewertung positiv und nicht grösser ist als $\varphi(\alpha)$: $0 < \varphi(\beta) \leqq \varphi(\alpha)$, so ist β eine Zahl aus einem Teilkörper k_i von k, und in k_i gibt es sicher eine ganze Zahl γ, derart dass $\frac{\beta}{\gamma}$ zu $\mathfrak{p}$ prim wird. Also ist $\varphi(\beta) = \varphi(\gamma) \leqq \varphi(\alpha)$. Da γ eine ganze Zahl aus k ist, und positive Bewertung besitzt, so ist γ eine Zahl aus $\mathfrak{p}$. Also muss $\varphi(\gamma) \geqq w(\mathfrak{p}) = \varphi(\alpha)$ sein. Hieraus folgt

$$\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha) ,$$

d. h. $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$, w. z. b. w.

Da die Bewertung φ für eine Zahl α die kleinste positive Bewertung angibt, so ist die Bewertung φ diskret.

Umgekehrt, wenn eine Bewertung φ diskret ist, dann kann man leicht zeigen, dass das φ zugehörige Primideal endlich ist. Denn wenn

φ eine diskrete Bewertung ist, dann gibt es nach dem oben Bewiesenen eine ganze Zahl aus k, deren Bewertung unter allen positiven Bewertungen der Zahlen aus k am kleinsten ist. Diese ganze Zahl ist eine Zahl aus dem φ zugehörigen Primideal aus k, w. z. b. w.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein ganzes Primärideal aus k und $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q} \frown k_i$ sei der Durchschnitt von $\mathfrak{q}$ mit k_i. Dann ist $\mathfrak{q}_i$ ein Ideal aus k_i, und $\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}_i\}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{q}_i$ ein ganzes Primärideal aus k_i ist. Denn es seien α_i, β_i zwei ganze Zahlen aus k_i, für welche

$$\alpha_i\beta_i \equiv 0 \mod \mathfrak{q}_i, \quad \text{und} \quad \alpha_i \not\equiv 0 \mod \mathfrak{q}_i$$

gelten. Dann ist

$$\alpha_i\beta_i \equiv 0 \mod \mathfrak{q}, \quad \text{und} \quad \alpha_i \not\equiv 0 \mod \mathfrak{q}.$$

Hieraus folgt für eine natürliche Zahl ρ

$$\beta_i^{\rho} \equiv 0 \mod \mathfrak{q}.$$

Da β_i^{ρ} eine Zahl aus k_i ist, so ist

$$\beta_i^{\rho} \equiv 0 \mod \mathfrak{q}_i,$$

d. h. $\mathfrak{q}_i$ ein Primärideal aus k_i.

Weil k_i ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade ist, so ist $\mathfrak{q}_i$ eine bestimmte Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}_i$: $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Da $\mathfrak{q}_i < \mathfrak{q}_{i+1}$ und $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{a_i}$, $\mathfrak{q}_{i+1} = \mathfrak{p}_{i+1}^{a_{i+1}}$ sind, so muss $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{p}_{i+1}$ teilbar sein. Es folgt also

$$\mathfrak{q} = \{\mathfrak{p}_i^{a_i}\},$$

und $\mathfrak{q}$ ist nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_i\}$ teilbar.

Umgekehrt können wir auch leicht beweisen:

Wenn ein ganzes Ideal $\mathfrak{q}$ aus k nur durch ein einziges Primideal teilbar ist, dann ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal.

Wir nennen $\mathfrak{q}$ ein dem Primideal $\mathfrak{p}$ *zugehöriges Primärideal* aus k, wenn $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist.

Satz 30. *Es sei $\mathfrak{q}$ ein ganzes Primärideal in k, welches zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehört, und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal aus k. Ferner*

sei φ die normierte Bewertung von $\mathfrak{p}$, und $w(\mathfrak{q})$ bzw. $w(\mathfrak{a})$ der Wert von $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar[1], *wenn $w(\mathfrak{q}) < w(\mathfrak{a})$ ist.*

Beweis. Wir bezeichnen wie früher $\mathfrak{p} \cap k_i$, $\mathfrak{q} \cap k_i$ und $\mathfrak{a} \cap k_i$ resp. mit $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{a}_i$. Dann wollen wir zeigen, dass nach $w(\mathfrak{q}) < w(\mathfrak{a})$ jede Zahl α aus $\mathfrak{a}$ zugleich zu $\mathfrak{q}$ gehört. Nämlich aus Definition folgt

$$\varphi(\alpha) \geqq w(\mathfrak{a}) ,$$

und hieraus $\varphi(\alpha) > w(\mathfrak{q})$.

Da für eine geeignete natürliche Zahl a_i $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{a_i}$, und $w(\mathfrak{q})$ der Grenzwert der Zahlfolge $w(\mathfrak{p}_1^{a_1})$, ..., $w(\mathfrak{p}_n^{a_n})$, ... ist, so wird nach $\varphi(\mathfrak{a}) > w(\mathfrak{q})$ von einem passenden Index i an immer

$$\varphi(\alpha) > w(\mathfrak{p}_j^{a_j}) \geqq w(\mathfrak{q}) \qquad (j \geqq i) .$$

Wenn man ferner j genügend gross wählt, dann wird α eine Zahl aus k_j. Wenn man den genauen Exponenten von $\mathfrak{p}_j$ in p mit u_j bezeichnet, dann ist $w(\mathfrak{p}_j^{a_j}) = \frac{a_j}{u_j}$. Wir setzen hier $\varphi(\alpha) = \frac{a}{u_j}$. Dann folgt aus $\varphi(\alpha) > w(\mathfrak{p}_j^{a_j})$

$$\frac{a}{u_j} > \frac{a_j}{u_j} ,$$

d. h. a ist grösser als a_j. Daher ist α durch $\mathfrak{p}_j^{a_j}$ teilbar. Also gehört jede Zahl aus $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{q}$, ist also $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar.

Wir können diesen Satz noch präzisieren.

Zusatz. Unter den Voraussetzungen von Satz 30 ist:

1.) $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar, wenn $w(\mathfrak{q}) \leqq w(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ beide unendliche Ideale sind.

2.) $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar, wenn $w(\mathfrak{q}) \leqq w(\mathfrak{a})$, und $\mathfrak{q}$ endliches Ideal ist.

Beweis. Wir haben schon in Satz 30 gezeigt, dass $\mathfrak{a}$ immer durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, wenn $w(\mathfrak{q}) < w(\mathfrak{a})$ ist. Deshalb bleibt noch der Satz im Fall zu beweisen, dass $w(\mathfrak{q}) = w(\mathfrak{a})$ ist.

(1) Hier meine ich unter dem Ausdruck, dass $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, wie üblich, dass $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{q}$ enthalten ist.

1.) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ sind beide unendliche Ideale.

In diesem Fall gibt es in $\mathfrak{a}$ nur diejenigen ganzen Zahlen, deren Bewertungen grösser sind als $w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{q})$. Dann können wir aus dem Beweis von Satz 30 schliessen, dass jede Zahl α aus $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{q}$ gehört. Also ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar.

2.) $\mathfrak{q}$ ist endliches Ideal.

a.) $\mathfrak{a}$ ist unendliches Ideal. Dann kann man nach dem Beweis von 1.) schliessen, dass $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, weil jede Zahl aus $\mathfrak{a}$ grössere Bewertung als $w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{q})$ besitzt.

b.) $\mathfrak{a}$ ist endliches Ideal. In diesem Fall gibt es in $\mathfrak{a}$ wirklich eine Zahl α, deren Bewertung $\varphi(\alpha)$ gleich $w(\mathfrak{a})$ ist. Da $\mathfrak{q}$ auch endliches Ideal ist, so kann man einen Index i finden, derart dass für jede natürliche Zahl $j \geqq i$

$$w(\mathfrak{p}_j^{a_j}) = w(\mathfrak{q}) = w(\mathfrak{a}) = \varphi(\alpha) ,$$

und α eine ganze Zahl aus k_j ist.

Bezeichnet man mit u_j den genauen Exponenten von $\mathfrak{p}_j$ in p, so ist $\varphi(\alpha) = \frac{a_j}{u_j}$, weil $w(\mathfrak{p}_j^{a_j}) = \frac{a_j}{u_j}$ ist. Dies bedeutet aber nach Definition der Bewertung $\varphi(\alpha)$, dass eine ganze Zahl α genau durch $\mathfrak{p}_j^{a_j}$ teilbar ist. Also ist α eine Zahl aus $\mathfrak{q}$. Dies trifft aber für alle Zahlen aus $\mathfrak{a}$ zu, deren Bewertungen gleich $w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{q})$ sind.

Die Zahlen aus $\mathfrak{a}$, deren Bewertungen grösser sind als $w(\mathfrak{q})$, gehören wie in a.) zu $\mathfrak{q}$. Also ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar.

Satz 31. *Es seien* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *zugehörige ganze Primärideale aus* k, *und* $w(\mathfrak{q})$, $w(\mathfrak{q}')$ *resp. die Werte von* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$. *Dann und nur dann ist* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$, *wenn* $w(\mathfrak{q}) = w(\mathfrak{q}')$ *und die beiden Ideale zugleich endlich oder unendlich sind.*

Beweis. Nach dem vorigen Zusatz kann man beweisen, dass $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{q}'$, und $\mathfrak{q}'$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, wenn $w(\mathfrak{q}) = w(\mathfrak{q}')$ ist und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ zugleich endlich oder unendlich sind. Also ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Umgekehrt, wenn $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ ist, dann folgt ohne weiteres die Behauptung.

Zusatz. Ein ganzes Primärideal ist durch seinen Wert und die Angabe, ob endlich oder unendlich, eindeutig bestimmt.

Nach Herrn KRULL ist jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ in k als das kleinste gemeinschaftliche Vielfach seiner sämtlichen Primärkomponenten darstellbar[1]. Dabei ist eine Primärkomponente folgenderweise definiert: Wir betrachten zuerst ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k und bezeichnen mit P die Menge aller Zahlen aus k, welche, als Quotienten zweier ganzen Zahlen dargestellt, keine durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Nenner besitzen. Der Durchschnitt von $\mathfrak{a}P$ (Produkt eines Ideals $\mathfrak{a}$ mit P) mit der Menge aller ganzen Zahlen aus k ist die Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. Nach Struktur sieht man sofort ein, dass die nicht triviale Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{p}$ zugehöriges Primärideal aus k ist.

Wir bezeichnen nun mit φ die normierte Bewertung von $\mathfrak{p}$. Für eine Zahl ρ aus P ist $\varphi(\rho) \geqq 0$, weil der Nenner von Hauptideal (ρ) in k nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Jede Zahl aus $\mathfrak{a}P$ ist von der Form

$$\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \ldots + \alpha_r\rho_r ,$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ bzw. $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ die Zahlen aus $\mathfrak{a}$ bzw. P bedeuten. Da

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1\rho_1 + \ldots + \alpha_r\rho_r) &\geqq \text{Min}\,(\varphi(\alpha_1\rho_1), \ldots \varphi(\alpha_r\rho_r)) \\ &\geqq \text{Min}\,(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_r))\end{aligned}$$

ist, so ist die untere Grenze der Bewertungen der Zahlen aus $\mathfrak{a}P$ nicht kleiner als der Wert $w(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. Dies trifft auch für die Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ zu. Da aber $\mathfrak{q}$ auch alle Zahlen aus $\mathfrak{a}$ enthält, so ist der Wert $w(\mathfrak{q})$ von $\mathfrak{q}$ gleich $w(\mathfrak{a})$.

Ferner kann man noch beweisen, dass $\mathfrak{a}$ endlich ist, falls $\mathfrak{q}$ endlich ist, und umgekehrt. Denn wir wissen schon, dass $w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist. Wenn aber $\mathfrak{a}$ endlich ist, dann gibt es in $\mathfrak{a}$ eine Zahl α, deren Bewertung $\varphi(\alpha)$ gleich $w(\mathfrak{a})$ ist. Da aber α zu $\mathfrak{q}$ gehört, so ist $\varphi(\alpha) = w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{q})$. Daher ist $\mathfrak{q}$ endlich.

(1) K. I. S. 47.

Umgekehrt, wenn $\mathfrak{q}$ endlich ist, dann gibt es in $\mathfrak{q}$ eine ganze Zahl β mit $\varphi(\beta) = w(\mathfrak{q}) = w(\mathfrak{a})$. Da nach dem oben gezeigten $\varphi(\beta)$ nicht kleiner ist als die Bewertung einer passenden Zahl α aus $\mathfrak{a}$, so existiert in $\mathfrak{a}$ eine Zahl α mit $\varphi(\alpha) = w(\mathfrak{a})$.

Es ist also bewiesen:

Satz 32. *Der Wert einer Primärkomponente eines ganzen Ideals* $\mathfrak{a}$ *ist gleich dem Wert von* $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ *und seine Primärkomponente sind beide zugleich endlich oder unendlich.*

Nach der Primärkomponentendarstellung eines ganzen Ideals, dem Zusatz von Satz 31, und Satz 32 kann man behaupten:

Satz 33. *Ein ganzes Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* k *ist eindeutig bestimmt durch seinen Wert in bezug auf jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* k *und durch die Angabe, ob* $\mathfrak{a}$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$ *endlich oder unendlich ist.*

§ 7. GALOISSCHE ZAHLKÖRPER VON ENDLICHEM GRADE ÜBER EINEM UNENDLICHEN ZAHLKÖRPER.

Im folgenden bedeutet k wie im vorigen Paragraphen einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_m \subset \ldots$ definiert ist, deren jeder über dem rationalen Zahlenkörper endlichen Grad besitzt.

Wir betrachten nun über k einen algebraischen Zahlkörper K von endlichem Grade[1]. Also gibt es eine algebraische Zahl ϑ, welche ein primitives Element von K über k ist: $K = k(\vartheta)$.

Genügt ϑ einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ in k, so gehören die Koeffizienten der Gleichung schon zu einem Teilkörper k_i, wenn man einen hinreichend grossen Index i nimmt. Also ist $f(x)$ irreduzibel in jedem Körper k_j $(j \geqq i)$.

Wir bilden nun die Körper $k_i(\vartheta) = K_i$, $k_{i+1}(\vartheta) = K_{i+1}$, $\ldots$, $k_m(\vartheta) = K_m$, $\ldots$, dann erhält man folgende Körperfolge K_i, K_{i+1},

(1) Ich setze dabei die Existenz von K voraus. Wenn k algebraisch abgeschlossen ist, dann existiert kein algebraischer Erweiterungskörper über k.

$\ldots\ldots, K_m, \ldots\ldots$. Um die folgenden Auseinandersetzungen einfach zu machen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass alle Koeffizienten von $f(x)$ schon die Zahlen aus k_1 sind. Also ist $k_1(\vartheta) = K_1$, $k_2(\vartheta) = K_2$, $\ldots\ldots : K = \{K_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots)$.

Es gilt allgemein folgender Hilfssatz.

Hilfssatz. Bezeichnet man mit K_j' den Durchschnitt von K_j mit K', so is $K' = \{K_j'\}$, wobei K' ein Zwischenkörper zwischen K und k ist.

Beweis. Nach Definition sind $K_j' < K'$ und $K_j' < K_{j+1}'$ $(j = 1, \ldots\ldots, m \ldots\ldots)$. Also ist $\{K_j'\} \leqq K'$. Es sei umgekehrt γ' eine Zahl aus K'. Dann ist γ' für einen geeigneten Index j eine Zahl aus K_j, ist also γ' eine Zahl aus $K' \frown K_j = K_j'$. Daher ist $K' = \{K_j'\}$.

Nun sei K insbesondere galoissch über k, und $\mathfrak{G}$ sei die galoissche Gruppe von K nach k. Dann sind die Elemente von $\mathfrak{G}$ die Automorphismen von K über k, und diese Automorphismen sind durch diejenigen Operationen realisiert, welche ϑ zu seinen konjugierten Wurzeln $\vartheta, \vartheta', \ldots\ldots, \vartheta^{(n-1)}$ von $f(x) = 0$ überführen. Wir können dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Körper K_1 schon galoissch über k_1 ist. Selbstverständlich folgt hieraus, dass K_j $(j \geqq 1)$ galoissch über k_j ist. Wie in § 5 können wir auch ohne Missverständnis annehmen, dass $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von K_j nach k_j ist $(j \geqq 1)$.

Wir betrachten in K ein Primideal $\mathfrak{P}$. Dann ist $\mathfrak{P}$ als ein Vereinigungsideal von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{P}_m \ldots\ldots$ definiert, wobei $\mathfrak{P}_j$ $(j \geqq 1)$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus K_j ist: $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}_j\}$. Entsprechend dem Primideal $\mathfrak{P}$ sei $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus k. Dann ist $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_j\}$, wobei $\mathfrak{p}_j$ das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal aus k_j bedeutet.

Es gilt in K folgende Primidealzerlegung[1]:

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}^{(1)}\mathfrak{P}^{(2)}\ldots\ldots\mathfrak{P}^{(g)})^e .$$

Dabei bedeutet e den Exponenten jedes Primteilers $\mathfrak{P}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq g)$ und

(1) He. S. 481.

jeder Primteiler $\mathfrak{P}^{(i)}$ besitzt den Relativgrad f nach k. Es ist

$$n = efg^{(1)} .$$

Zerlegungsgruppe.

Die Gesamtheit derjenigen Automorphismen von K über k, die das Primideal $\mathfrak{P}$ invariant lassen, bildet eine Untergruppe $\mathfrak{G}_Z$ von $\mathfrak{G}$, und die Gruppe $\mathfrak{G}_Z$ heisst die *Zerlegungsgruppe* von $\mathfrak{P}$ nach k.

Wendet man auf ein Primideal $\mathfrak{P}_j$ $(j \geqq 1)^{(2)}$ einen Automorphismus σ aus $\mathfrak{G}_Z$ an, so ist $\sigma\mathfrak{P}_j$ ein Primideal aus K_j, weil durch Anwendung von σ auf die Zahlen aus K_j wieder die Zahlen aus K_j entstehen. Da aber $\sigma\mathfrak{P}_j$ zum Ideal $\mathfrak{P}$ gehören muss, so muss $\sigma\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j$ sein. Dies zeigt aber, dass $\mathfrak{G}_Z$ eine Untergruppe der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$ von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j ist. Ebenso kann man auch leicht beweisen, dass $\mathfrak{G}_Z^{(j+1)}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$ ist. Dadurch erhält man ohne weiteres

$$\mathfrak{G}_Z^{(1)} \geqq \mathfrak{G}_Z^{(2)} \geqq \ldots . \geqq \mathfrak{G}_Z^{(j)} \geqq \ldots . \geqq \mathfrak{G}_Z .$$

Hieraus kann man sofort schliessen, dass von einem Index I an immer

$$\mathfrak{G}_Z^{(I)} = \mathfrak{G}_Z^{(I+1)} = \ldots . = \mathfrak{G}_Z$$

ist.

Zerlegungskörper.

Wir nennen denjenigen Zwischenkörper K_Z zwischen K und k, welcher der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_Z$ ist, den *Zerlegungskörper* von $\mathfrak{P}$ nach k.

Betrachtet man den Durchschnitt $K_Z^{(j)}$ von K_j mit K_Z $(j \geqq I)$, so ist jede Zahl aus $K_Z^{(j)}$ invariant bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}_Z$, ist also $K_Z^{(j)}$ ein Teilkörper des Zerlegungskörpers von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j. Da umgekehrt jede Zahl aus dem Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$ und folglich aus $\mathfrak{G}_Z$ invariant ist, so gehört sie nach Definition zum Körper K_Z und danach zum Körper $K_Z^{(j)}$. Also ist $K_Z^{(j)}$ der Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j $(j \geqq I)$. Nach Hilfssatz folgt sofort:

(1) He. S. 484.

(2) Dabei ist $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}_j\}$.

Der Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}$ nach k ist der Vereinigungskörper von $K_Z^{(1)}, \ldots, K_Z^{(j)}, \ldots$. Dabei bedeutet $K_Z^{(j)}$ den Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j.

Für den Zerlegungskörper gilt folgender Satz.

Satz 34. *Es sei $\mathfrak{P}_Z$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus K_Z. Dann besitzt $\mathfrak{P}_Z$ den Exponenten* 1 *und den Grad* 1 *nach k.*

Beweis. Betrachtet man in $K_Z^{(j)}$ $(j \geqq 1)$ die Primidealzerlegung von $\mathfrak{p}_j$, so ist

$$\mathfrak{p}_j = \mathfrak{P}_Z^{(j)} \mathfrak{a}_j ,$$

und

$$N_{K_Z^{(j)} k_j}(\mathfrak{P}_Z^{(j)}) = \mathfrak{p}_j .$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{P}_Z^{(j)}$ das durch $\mathfrak{P}_Z$ teilbare Primideal aus $K_Z^{(j)}$, und $\mathfrak{a}_j$ ist prim zu $\mathfrak{P}_Z^{(j)}$ $(j \geqq 1)$. Dies zeigt aber nach HERBRAND, dass das Primideal $\mathfrak{P}_Z$ aus K_Z den Exponenten 1 und den Grad 1 nach k besitzt[1].

Es sei nun K' ein Zwischenkörper zwischen K und k mit der Eigenschaft, dass das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal $\mathfrak{P}'$ aus K' den Exponenten 1 und den Grad 1 nach k besitzt. Dann muss nach Definition des Exponenten und Grades das Primideal $\mathfrak{P}_j'$ aus K_j' den Exponenten 1 und den Grad 1 nach k_j, wenn j hinreichend gross ist. Dabei bedeutet K_j' den Durchschnitt von K' mit K_j und $\mathfrak{P}_j'$ das durch $\mathfrak{P}'$ teilbare Primideal aus K_j'. Nach der Maximaleigenschaft der Zerlegungskörper von endlichem Grade ist der Körper K_j' im Zerlegungskörper $K_Z^{(j)}$ von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j enthalten. Daher erhält man folgenden Satz:

Satz 35. *Der Zerlegungskörper K_Z von $\mathfrak{P}$ nach k ist der maximale Teilkörper von K über k, derart dass er jeden Teilkörper von K über k, in dem das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal den Exponenten* 1 *und den Grad* 1 *nach k besitzt, enthält.*

---

(1) He. S. 484. Der von HERBRAND definierte Exponent und Grad scheinen etwas anders zu sein. Aber man kann leicht einsehen, dass unsere Behauptung sofort aus der Definition von HERBRAND folgt.

Trägheitsgruppe.

Die Gesamtheit derjenigen Automorphismen τ aus $\mathfrak{G}$, für welche die Kongruenz

$$\tau\Gamma \equiv \Gamma \mod \mathfrak{P}$$

für alle für $\mathfrak{P}$ ganzen Zahlen Γ aus K gilt, bildet offenbar eine invariante Untergruppe $\mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{G}_Z$, und sie heisst die *Trägheitsgruppe* von $\mathfrak{P}$ nach k.

Es sei $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$ die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j und $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j $(j \geqq I)$. Dann ist bekanntlich $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$ und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_Z^{(j)}/\mathfrak{G}_T^{(j)}$ ist zyklisch. Ferner ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_Z^{(j)}/\mathfrak{G}_T^{(j)}$ gleich dem Relativgrad f_j von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j, und die Ordnung von $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ gleich dem genauen Exponenten e_j von $\mathfrak{P}_j$ in $\mathfrak{p}_j$. $e_j f_j$ ist also die Ordnung der Zerlegungsgrupppe von $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$.

Da

$$\mathfrak{G}_Z^{(I)} = \mathfrak{G}_Z^{(I+1)} = \cdots = \mathfrak{G}_Z^{(m)} = \cdots$$

ist, so ist $e_I f_I = e_{I+1} f_{I+1} = \cdots = e_m f_m = \cdots$. Es gilt aber

$$e_{j+1} \mid e_j \quad \text{und} \quad f_{j+1} \mid f_j \qquad (j = I,\ I+1,\ \ldots).^{(1)}$$

Also muss

$$e_I = e_{I+1} = \cdots = e_m = \cdots = e$$

und (1)

$$f_I = f_{I+1} = \cdots = f_m = \cdots = f$$

sein.

Anderseits können wir beweisen, dass $\mathfrak{G}_T$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ ist. Denn ist τ ein beliebiger Automorphismus aus $\mathfrak{G}_T$, so ist für eine beliebige für $\mathfrak{P}_j$ ganze Zahl Γ_j aus k_j

$$\tau\Gamma_j \equiv \Gamma_j \mod \mathfrak{P},$$

und hieraus folgt

(1) He. S. 489.

$$\tau\Gamma_j \equiv \Gamma_j \mod \mathfrak{P}_j ,$$

d.h. τ gehört zur Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T^{(j)}$.

Also ist $\mathfrak{G}_T^{(j)} \geqq \mathfrak{G}_T$. Ebenso kann man beweisen:

$$\mathfrak{G}_T^{(j)} \geqq \mathfrak{G}_T^{(j+1)} .$$

Hieraus schliesst man nach (1)

$$\mathfrak{G}_T^{(I)} = \mathfrak{G}_T^{(I+1)} = \ldots . = \mathfrak{G}_T^{(j)} = \ldots . = \mathfrak{G}_T .$$

Da $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$ und $\mathfrak{G}_Z^{(j)}/\mathfrak{G}_T^{(j)}$ zyklisch ist, so ist $\mathfrak{G}_T$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z$ und $\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$ zyklisch.

Die Ordnung e von $\mathfrak{G}_T$ bzw. den Index f von $\mathfrak{G}_Z$ nach $\mathfrak{G}_T$ hat HERBRAND als den *Exponenten* bzw. den *Grad* von $\mathfrak{P}$ nach k definiert[1].

Wir können auch leicht bestätigen, dass der Exponent und der Grad von der Wahl der Körperreihen k_1, k_2, ..., k_m, ... und K_1, K_2, ..., K_m, ... ganz unabhängig sind.

Satz 36. *Die Ordnung der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$ von $\mathfrak{P}$ nach k ist gleich dem Produkt des Grades mit dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ nach k, und die Ordnung der Trägheitsgruppe ist gleich dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ nach k .*

Trägheitskörper.

Der Teilkörper K_T von K über k, welcher der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_T$ ist, heisst der *Trägheitskörper* von $\mathfrak{P}$ nach k. Es sei $\mathfrak{P}_T$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus K_T. Dann gilt

Satz 37. *Der Trägheitskörper K_T ist ein zyklischer Körper über K_Z. Ferner geht in K_T das Primideal $\mathfrak{P}_T$ in $\mathfrak{p}$ mit dem Exponenten* 1 *und dem Grad f auf .*

Beweis. Da K_T der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_T$ und $\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$ zyklisch ist, so ist K_T zyklisch über K_Z. Wir können ebenso wie für den Fall des Zerlegungskörpers beweisen, dass K_T der Vereinigungskörper

(1) He . S. 483. In der Arbeit von HERBRAND kommt zuerst die Definition des Exponenten und Grades eines Primideals für galoissche Körper vor, und dann später für allgemeine algebraische Zahlkörper.

der Trägheitskörper $K_T^{(j)}$ von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j $(j \geqq I)$ ist. Da aber das Primideal $\mathfrak{P}_T^{(j)}$ in $\mathfrak{p}_j$ mit dem Exponenten 1 und dem Grade f aufgeht, so folgt nach Definition, dass der Exponent bzw. der Grad von $\mathfrak{P}_T$ nach k 1 bzw. f ist.

Satz 38. *Es sei K' ein Teilkörper von K über k, derart dass in K' das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal $\mathfrak{P}'$ den Exponenten* 1 *nach k besitzt. Dann ist K' ein Teilkörper von K_T.*

Beweis. Wir können den Beweis ebenso für Satz 35 ausführen, indem man die Maximaleigenschaft der Trägheitskörper von endlichem Grade benutzt.

Verzweigungsgruppe.

Es sei p die durch das Primideal $\mathfrak{P}$ teilbare Primzahl, und die Ordnung der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{P}$ nach k sei genau durch p^m teilbar. Dann beweisen wir

Satz 39. *Es gibt in $\mathfrak{G}_T$ nur eine einzige Untergruppe $\mathfrak{G}_V$ von der Ordnung p^m, und $\mathfrak{G}_V$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_T$ mit der zyklischen Faktorgruppe $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$. Jede p-Gruppe von $\mathfrak{G}_T$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_V$.*

Beweis. Nach dem Satz von SYLOW gibt es in $\mathfrak{G}_T$ eine Untergruppe $\mathfrak{G}_V$ von der Ordnung p^m. Dann ist $\mathfrak{G}_V$ auch eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ $(j \geqq I)$ mit der Ordnung p^m. Da aber die Ordnung von $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ genau durch p^m teilbar ist, so ist die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j auch von der Ordnung p^m. Weil diese Verzweigungsgruppe eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ ist, so gibt es in $\mathfrak{G}_T^{(j)}$ nur eine einzige Untergruppe von der Ordnung p^m. Also muss $\mathfrak{G}_V$ die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j sein. Da $\mathfrak{G}_T = \mathfrak{G}_T^{(j)}$ $(j \geqq I)$ ist, so ist $\mathfrak{G}_V$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_T$.

Ferner ist $\mathfrak{G}_T^{(j)}/\mathfrak{G}_V$ zyklisch, weil $\mathfrak{G}_V$ die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j ist. Da $\mathfrak{G}_T = \mathfrak{G}_T^{(j)}$ $(j \geqq I)$ ist, so ist $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ auch zyklisch.

Nach dem Satz von SYLOW und der Eigenschaft von $\mathfrak{G}_V$ ist jede p-Gruppe von $\mathfrak{G}_T$ in $\mathfrak{G}_V$ enthalten. Damit ist der Beweis fertig.

Wir können noch beweisen, dass $\mathfrak{G}_V$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z$ ist, weil $\mathfrak{G}_V^{(j)}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z^{(j)}$, und $\mathfrak{G}_Z^{(j)} = \mathfrak{G}_Z$, $\mathfrak{G}_V^{(j)} = \mathfrak{G}_V (j \geqq I)$ sind.

Zusatz. $\mathfrak{G}_V$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_Z$.

Die in Satz 39 definierte Untergruppe $\mathfrak{G}_V$ definiere ich hier als die *Verzweigungsgruppe* von $\mathfrak{P}$ nach k[1].

Verzweigungskörper.

Derjenige Zwischenkörper K_V zwischen K und k, welcher der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_V$ ist, heisst der *Verzweigungskörper* von $\mathfrak{P}$ nach k.

Bildet man nun den Durchschnitt $K_V^{(j)}$ von K_V mit K_j, so ist wie für den Zerlegungskörper K_Z der Körper $K_V^{(j)}$ der Verzweigungskörper von $\mathfrak{P}_j$ nach k_j $(j \geqq I)$. Der Vereinigungskörper von $K_V^{(I)}$, $K_V^{(I+1)}$, ... ist nach Hilfssatz der Verzweigungskörper K_V.

Aus Struktur des Verzweigungskörpers K_V folgt

Satz 40. *Der Verzweigungskörper K_V ist zyklisch über dem Trägheitskörper K_T. Das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal $\mathfrak{P}_V$ aus K_V geht in $\mathfrak{p}$ mit dem Exponenten $e_0 = \frac{e}{p^m}$*[2] *und dem Grade f auf. Dabei bedeutet e den Exponenten und f den Grad von $\mathfrak{P}$ nach k.*

---

(1) Die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{P}_V$, welche ich hier definiert habe, wird von manchen Autoren auch die erste Verzweigungsgruppe genannt. Hier benutze ich aber die originale Benennung von Herrn HILBERT.

Wenn k von endlichem Grade ist, dann ist $\mathfrak{G}_V$ bekanntlich die Gesamtheit derjenigen Automorphismen von K über k, für welche die Kongruenz

$$v\Gamma \equiv \Gamma \mod \mathfrak{P}^2$$

für alle für $\mathfrak{P}$ ganzen Zahlen aus K gilt. Wenn aber k von unendlichem Grade ist, dann tritt der Fall ein, dass $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^2$ (wenn $\mathfrak{P}$ unendliches Ideal ist) wird. In diesem Fall kann man die Verzweigungsgruppe nicht mehr einfach durch Kongruenz definieren.

Wenn aber das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal $\mathfrak{p}$ aus k *vollverzweigt* (*complètement ramifié*. Siehe, DEURING, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann., **105** (1931), S. 296, oder He. S. 493.) ist, dann gibt es in K ein Primärideal $\mathfrak{Q}$ derart, dass die Gesamtheit derjenigen Automorphismen v aus $\mathfrak{G}$, für welche die Kongruenz

$$v\Gamma \equiv \Gamma \mod \mathfrak{Q}$$

für alle für $\mathfrak{P}$ ganzen Zahlen aus K gilt, die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$ wird. Besonders, wenn $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^2$ ($\mathfrak{P}$ ist endliches Ideal) ist, dann kann man $\mathfrak{P}^2$ als $\mathfrak{Q}$ nehmen.

Für die weitere Untersuchung über die Verzweigungsgruppe will ich hier auf die Arbeit von HERBRAND (He. S. 494–496) hinweisen.

(2) e_0 nennt man nach HERBRAND den *reduzierten Exponenten* von $\mathfrak{P}$ nach k.

Beweis. Die erste Hälfte dieses Satzes folgt leicht daraus, dass K_V der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}_V$ und $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_V$ zyklisch ist.

Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{P}_V^{(j)}$ das durch $\mathfrak{P}_V$ teilbare Primideal aus $K_V^{(j)}$, so ist $\mathfrak{p}_j$ genau durch $(\mathfrak{P}_V^{(j)})^{e_0}$ teilbar und $\mathfrak{P}_V^{(j)}$ ist vom Grade f nach k_j $(j \geqq 1)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 41. *Es sei K' ein Zwischenkörper zwischen K und k, derart dass in K' das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal $\mathfrak{P}'$ in $\mathfrak{p}$ mit dem zu p primen Exponenten aufgeht. Dann ist K' in K_V enthalten.*

Beweis. Wir können den Beweis ebenso wie für den Satz 35 ausführen, indem wir die Maximaleigenschaft der Verzweigungskörper von endlichem Grade benutzt.

Satz 42. *Es sei K' ein Körper zwischen K und k, und $\mathfrak{H}$ sei die K' zugeordnete Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Dann ist*

1.) $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_Z$ *die Zerlegungsgruppe,*

2.) $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_T$ *die Trägheitsgruppe,*

3.) $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_V$ *die Verzweigungsgruppe*

von $\mathfrak{P}$ nach K'.

Beweis. *1.)* und *2.)* folgen leicht aus Definition der beiden Gruppen. Die Behauptung *3.)* beweist man genau so wie für Satz 23.

Satz 43. *Es sei K' ein galoisscher Körper zwischen K und k, und $\mathfrak{H}$ sei die K' zugeordnete Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ferner sei $\mathfrak{P}'$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus K', und $\mathfrak{G}'_Z$, $\mathfrak{G}'_T$, $\mathfrak{G}'_V$ seien resp. die Zerlegungs-, Trägheits-, und Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}'$ nach k. Dann ist*

1.) $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{H}$ *isomorph zur Zerlegungsgruppe* $\mathfrak{G}'_Z$,

2.) $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_T/\mathfrak{H}$ *isomorph zur Trägheitsgruppe* $\mathfrak{G}'_T$,

3.) $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_V/\mathfrak{H}$ *isomorph zur Verzweigungsgruppe* $\mathfrak{G}'_V$.

Die drei Behauptungen kann man genau so wie für Satz 24 beweisen.

Wir betrachten nun über einem unendlichen Zahlkörper zwei verschiedene algebraische Zahlkörper von endlichem Grade K_1 und K_2, und bilden das Kompositum $K_1K_2 = K$ von K_1 und K_2. Wir nehmen aus K ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}$ heraus und bezeichnen mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$,

$\mathfrak{p}$ resp. die durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideale aus K_1, K_2, k. Ferner bezeichnen wir mit $f^{(\varkappa)}$, $e_0^{(\varkappa)}$, $e^{(\varkappa)}$ resp. den Grad, reduzierten Exponenten, Exponenten von $\mathfrak{P}_\varkappa$ nach k, und mit $F^{(\varkappa)}$, $E_0^{(\varkappa)}$, $E^{(\varkappa)}$ resp. den Grad, reduzierten Exponenten, Exponenten von $\mathfrak{P}$ nach $K_\varkappa$ ($\varkappa = 1$, 2). Dann gilt

Satz 44. *Es ist*

$$a.\quad E^{(2)} \mid e^{(1)}\,, \qquad\qquad a.\quad E^{(1)} \mid e^{(2)}\,,$$

$$b.\quad F^{(2)} = \frac{f^{(1)}}{(f^{(1)}, f^{(2)})}\,, \quad \text{und} \quad b.\quad F^{(1)} = \frac{f^{(2)}}{(f^{(1)}, f^{(2)})}\,,$$

$$c.\quad E_0^{(2)} = \frac{e_0^{(1)}}{(e_0^{(1)}, e_0^{(2)})}\,, \qquad c.\quad E_0^{(1)} = \frac{e_0^{(2)}}{(e_0^{(1)}, e_0^{(2)})}\,.$$

Beweis. Unter Benutzung von Satz 43 kann man den Beweis genau so ausführen wie im Falle, dass k von endlichem Grade ist[1].

§ 8. $\mathfrak{p}$-ADISCHE ZAHLKÖRPER DER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER UNENDLICHEN GRADES.

In diesem Paragraphen bedeutet k wie im vorigen Paragraphen einen unendlichen Zahlkörper, welcher als ein Vereinigungskörper von unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern von endlichem Grade $k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_i \subset \ldots$ definiert ist: $k = \{k_i\}$. Ferner sei K ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade n über k, und ϑ ein primitives Element von K über k: $K = k(\vartheta)$. Dann kann man wie in § 7 annehmen, dass $K_1 = k_1(\vartheta), \ldots, K_i = k_i(\vartheta), \ldots$, und $K = \{K_i\}$ ist.

Wir betrachten im Körper K ein Primideal $\mathfrak{P}$ und eine Bewertung φ in bezug auf $\mathfrak{P}$. Dann kann man nach § 1 über K den derivierten Körper $\overline{K}$ bezüglich φ bilden. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{P}}$ das φ zugehörige Primideal aus $\overline{K}$. Dann enthält $\overline{\mathfrak{P}}$ das Primideal $\mathfrak{P}$, weil jede Zahl aus $\mathfrak{P}$ in bezug auf φ positive Bewertung besitzt. Bildet man den Durchschnitt von $\overline{\mathfrak{P}}$ mit der Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus K, so ist er ein Primideal aus K. Denn sind α, β zwei beliebige

(1) He. S. 489.

Zahlen aus dem Durchschnitt, so ist für zwei beliebige ganze algebraische Zahlen λ, μ aus K

$$\lambda\alpha + \mu\beta$$

eine Zahl aus $\overline{\mathfrak{P}}$, weil nach § 6 λ, μ nicht negative Bewertungen besitzen und folglich $\lambda\alpha+\mu\beta$ eine Zahl aus $\overline{\mathfrak{P}}$ ist. Anderseits ist $\lambda\alpha+\mu\beta$ eine ganze algebraische Zahl, ist also eine Zahl aus dem Durchschnitt. Daher ist der Durchschnitt ein ganzes Ideal aus K. Offenbar ist die Zahl 1 im Durchschnitt nicht enthalten, weil die Bewertung von 1 Null ist. Da $\mathfrak{P}$ in diesem Durchschnitt enthalten ist, so ist der Durchschnitt gerade das Primideal $\mathfrak{P}$ aus K.

Wie wir schon oft gesehen haben, induziert im Körper k_i bzw. K_i die Bewertung φ auch eine Bewertung in bezug auf $\mathfrak{p}_i$ bzw. $\mathfrak{P}_i$. Dabei bedeutet $\mathfrak{p}_i$ bzw. $\mathfrak{P}_i$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus k_i bzw. K_i. Dann enthält $\overline{K}$ den derivierten Körper $\overline{k}_i$ bzw. $\overline{K}_i$ von k_i bzw. K_i in bezug auf φ. Dieser Körper $\overline{k}_i$ bzw. $\overline{K}_i$ ist bekanntlich der HENSELsche $\mathfrak{p}_i$-adische Zahlkörper von k_i bzw. $\mathfrak{P}_i$-adische Zahlkörper von K_i. Wir nennen im folgenden den Körper $\overline{K}$ bzw. $\overline{k}$ den $\mathfrak{P}$-*adischen* bzw. $\mathfrak{p}$-*adischen Zahlkörper* und bezeichnen ihn auch mit $K_{\mathfrak{P}}$ bzw. $k_{\mathfrak{p}}$ [1]. Dabei ist $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus k.

Ist der Relativgrad von $\mathfrak{P}_i$ nach k_i f_i und der genaue Exponent von $\mathfrak{P}_i$ in $\mathfrak{p}_i$ e_i, so ist e_if_i gleich dem Grade von $\overline{K}_i$ nach $\overline{k}_i$[2], und $\overline{K}_i$ ist das Kompositum von K_i und $\overline{k}_i$ (nach Satz 5). Ferner ist f_i der Restklassengrad und e_i die Verzweigungsordnung von $\overline{K}_i$ über $\overline{k}_i$[3]. Wir wissen noch nach der algebraischen Zahlentheorie, dass f_i der Relativgrad des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{P}_i$ in K_i nach dem Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}_i$ in k_i ist. Wenn das primitive Element ϑ eine Wurzel

(1) Man kann für eine andere zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung φ' auch einen anderen $\mathfrak{P}$-adischen bzw. $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper in unserem Sinne bilden. Da aber φ und φ' ähnliche Bewertungen sind, so kann man leicht bestätigen, dass der eben erhaltene $\mathfrak{P}$-adische bzw. $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper zu $K_{\mathfrak{P}}$ bzw. $k_{\mathfrak{p}}$ isomorph ist. Also sind alle $\mathfrak{P}$-adischen bzw. $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In der folgenden Untersuchung lassen wir diese Isomorphie ausser Betracht, und wir sprechen schlechthin vom $\mathfrak{P}$-adischen bzw. $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper.

(2), (3) Siehe etwa CHEVALLEY, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. Fac. Science, Tokyo, Vol. **II** (1933). S. 418–420.

einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$, deren Koeffizienten Zahlen aus k sind, ist, dann genügt ϑ einer irreduziblen Gleichung $e_i f_i$-ten Grades in $\bar{k}_i$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{K}$ den Vereinigungskörper von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_i, \ldots$ bzw. $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \ldots, \bar{K}_i, \ldots$, so ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}(\vartheta)$, d. h. $\mathfrak{K}$ ist ein algebraischer Erweiterungskörper 1. Art vom Grade ef über $\mathfrak{k}$. Dabei bedeutet f den Restklassengrad und e die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ (nach § 4).

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{P}$ das φ zugehörige Primideal aus $\mathfrak{K}$. Dann wollen wir zeigen, dass jede Restklasse modulo $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{K}$ sicher eine Zahl aus K enthält. Denn nach § 4 enthält jede Restklasse modulo $\mathfrak{P}$ ein Element aus $\bar{K}_i$, wenn man den Index i passend wählt. Dieses Element aus $\bar{K}_i$ ist modulo $\mathfrak{P}$ kongruent einer Zahl aus K_i, weil es als ein Grenzelement einer Fundamentalreihe aus K_i definiert ist. Offenbar sind zwei Zahlen α, β aus K dann und nur dann kongruent modulo $\mathfrak{P}$, wenn α, β modulo $\mathfrak{P}$ kongruent sind. Dies bedeutet aber, dass der Restklassenkörper mod $\mathfrak{P}$ in K isomorph zum Restklassenkörper mod $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{K}$ ist.

Da der Restklassengrad bzw. die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ f bzw. e ist, so besitzt nach § 4 jeder Körper $\bar{K}_j$ $(j \geqq i)$ von einem geeigneten Index i an den Restklassengrad f und die Verzweigungsordnung e über $\bar{k}_j$. Also besitzt das Primideal $\mathfrak{P}_j$ immer den Relativgrad f nach k_j und den genauen Exponenten e in $\mathfrak{p}_j$, wenn j grösser ist als ein bestimmter Index i. Nach HERBRAND ist also der Relativgrad bzw. Exponent von $\mathfrak{P}$ nach k f bzw. e. Hieraus folgt nach dem in S. 151 Bewiesenen folgender Satz.

Satz 45. *Der Restklassenkörper mod $\mathfrak{P}$ in K besitzt den Relativgrad f über dem Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k. Dabei bedeutet f den Grad von $\mathfrak{P}$ nach k.*

Da $K_{\mathfrak{P}}$ bzw. $k_{\mathfrak{p}}$ der derivierte Körper von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{k}$ ist,[1] so ist nach Satz 18 der Grad ef von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ gleich dem von $K_{\mathfrak{P}}$ über $k_{\mathfrak{p}}$, und $K_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{p}}(\vartheta)$. Damit ist bewiesen

(1) Der derivierte Körper von $\mathfrak{K}$ muss sicher in $K_{\mathfrak{P}}$ enthalten sein. Da aber $\mathfrak{K}$ den Körper K enthält, so ist $K_{\mathfrak{P}}$ gerade der derivierte Körper von $\mathfrak{K}$. Ebenso ist $k_{\mathfrak{p}}$ der derivierte Körper von $\mathfrak{k}$.

Satz 46. *Es sei k ein algebraischer Zahlkörper unendlichen Grades und K ein endlicher Erweiterungskörper über k. Ferner sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal aus K und $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus k. Dann ist der Grad des $\mathfrak{P}$-adischen Zahlkörpers $K_{\mathfrak{P}}$ nach dem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $k_{\mathfrak{p}}$ gleich dem Produkt des Relativgrades des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{P}$ in K nach dem Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k mit dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ nach k.*

Dieser Satz ist, wie schon erwähnt, ein bekannter Satz, wenn k von endlichem Grade ist.

Nun wollen wir den Fall betrachten, dass K über k normal ist. Wir nehmen dabei ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}$ aus K heraus und bilden den $\mathfrak{P}$-adischen Zahlkörper $K_{\mathfrak{P}}$ und den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $k_{\mathfrak{p}}$. Dabei ist $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus k.

Es sei nun $f(x) = 0$ eine definierende Gleichung von K über k und ϑ eine Wurzel von $f(x) = 0$: $K = k(\vartheta)$. Dann genügt ϑ einer irreduziblen Gleichung $\bar{f}(x) = 0$ vom Grade ef in $k_{\mathfrak{p}}$ (nach Satz 46), wobei f, e resp. den Grad, Exponenten von $\mathfrak{P}$ nach k bedeuten. Dann besteht die galoissche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $K_{\mathfrak{P}}$ nach $k_{\mathfrak{p}}$ aus denjenigen Automorphismen, die ϑ zu ef zu ϑ konjugierten Wurzeln überführen. Wir können aber leicht bestätigen, dass die Automorphismen aus $\overline{\mathfrak{G}}$, angewandt auf die Zahlen aus K, die Automorphismen aus der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K nach k induzieren, weil jeder Automorphismus aus $\overline{\mathfrak{G}}$ durch eine Operation, welche ϑ zu einer konjugierten Wurzel von $\bar{f}(x) = 0$ — also auch einer konjugierten Wurzel von $f(x) = 0$ — überführt, realisiert ist. Also induziert $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ und die Ordnung von $\mathfrak{H}$ ist ef.

Wir behaupten nun, dass $\mathfrak{H}$ die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach k ist. Denn wie wir schon in § 5 gezeigt haben, ist $\overline{\mathfrak{G}}$ die Zerlegungsgruppe von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $k_{\mathfrak{p}}$. Wendet man auf $\mathfrak{P}$ die Automorphismen aus $\overline{\mathfrak{G}}$ (also aus $\mathfrak{H}$) an, so bleibt $\mathfrak{P}$ invariant, weil $\mathfrak{P}$ der Durchschnitt von $\overline{\mathfrak{P}}$ mit der Menge aller ganzen Zahlen aus K ist, und $\overline{\mathfrak{P}}$ bzw. die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus K bei Anwendung der Automorphismen aus $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant ist. Also ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$ von $\mathfrak{P}$ nach k. Die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{H}$

ist gleich dem Grade ef von $K_{\mathfrak{P}}$ nach $k_{\mathfrak{p}}$. Da aber die Ordnung von $\mathfrak{G}_Z$ nach Satz 36 auch gleich ef ist, so stimmt $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}_Z$ überein.

Wir wissen aber, dass der Körper $K_{\mathfrak{P}}$ den Körper K enthält. Also sind alle Zahlen aus K, welche bei Anwendung der Automorphismen aus $\overline{\mathfrak{G}}$ (also aus $\mathfrak{H}$) invariant sind, im Körper $k_{\mathfrak{p}}$ enthalten. Daher enthält $k_{\mathfrak{p}}$ den Zerlegungskörper K_Z von $\mathfrak{P}$ nach k. Bildet man den Durchschnitt $K \frown k_{\mathfrak{p}}$ von $k_{\mathfrak{p}}$ mit K, so ist dieser der Zerlegungskörper K_Z. Ist nämlich $K \frown k_{\mathfrak{p}}$ ein echter Erweiterungskörper von K_Z, so ist der Grad von K nach $K \frown k_{\mathfrak{p}}$ kleiner als ef. Also ist $[\vartheta : k_{\mathfrak{p}} \frown K] < ef$. Weil aber $k_{\mathfrak{p}}(\vartheta) = K_{\mathfrak{P}}$ ist, so wird

$$ef = [K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}] \leqq [\vartheta : K \frown k_{\mathfrak{p}}] < ef ,$$

was Widerspruch ist. Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen gilt also folgender Satz.

Satz 47. *Der Durchschnitt von K mit $k_{\mathfrak{p}}$ ist der Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}$ nach k.*

Wir haben in § 5 den Trägheitskörper $\overline{W}$ von $K_{\mathfrak{P}}$ über $k_{\mathfrak{p}}$ definiert. Nun bilden wir den Durchschnitt $\overline{W} \frown K$ von $\overline{W}$ mit K. Dann behaupte ich, dass $\overline{W} \frown K$ der Trägheitskörper K_T von $\mathfrak{P}$ nach k ist. Der Trägheitskörper $\overline{W}$ von $K_{\mathfrak{P}}$ über $k_{\mathfrak{p}}$ ist nämlich der Invariantenkörper der Trägheitsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_T$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $k_{\mathfrak{p}}$. Wenn $\overline{\tau}$ ein beliebiger Automorphismus aus $\overline{\mathfrak{G}}_T$ und α eine beliebige für $\mathfrak{P}$ ganze Zahl aus K ist, so ist offenbar

$$\overline{\tau}\alpha \equiv \alpha \mod \mathfrak{P} .$$

Also induziert $\overline{\mathfrak{G}}_T$ eine Untergruppe der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{P}$ nach k. Da die Ordnung von $\overline{\mathfrak{G}}_T$ und die von $\mathfrak{G}_T$ beide dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ nach k gleich sind, so induziert $\overline{\mathfrak{G}}_T$ die ganze Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ nach k (nach § 5 und § 7). Da $K_{\mathfrak{P}}$ den Körper K enthält, so enthält $\overline{W}$ alle Zahlen aus K, welche bei Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{G}_T$ invariant sind, d. h. der Trägheitskörper K_T von $\mathfrak{P}$ nach k ist in $\overline{W}$ enthalten. Ist $\overline{W} \frown K$ ein echter Erweiterungskörper von K_T, so wird der Grad von $K_{\mathfrak{P}}$ nach $\overline{W}$ kleiner als e, wobei

e die Ordnung von $\mathfrak{G}_T$ — also der Grad von K nach K_T — bedeutet. Dies ist aber Widerspruch, weil die Ordnung $\overline{\mathfrak{G}}_T$ — also der Grad von $K_{\mathfrak{P}}$ nach $\overline{W}$ — nach § 5 gleich e ist.

Satz 48. *Der Durchschnitt von K mit dem Trägheitskörper von $K_{\mathfrak{P}}$ über $k_{\mathfrak{p}}$ ist der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}$ nach k.*

Wir wollen zuletzt folgenden Satz beweisen.

Satz 49. *Der Durchschnitt $\overline{V} \frown K$ von K mit dem Verzweigungskörper $\overline{V}$ von $K_{\mathfrak{P}}$ über $k_{\mathfrak{p}}$ ist der Verzweigungskörper von $\mathfrak{P}$ nach k.*

Beweis. Die Verzweigungsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_V$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach $k_{\mathfrak{p}}$ induziert die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_V$ von $\mathfrak{P}$ nach k (nach § 5 und § 7). Also enthält $\overline{V}$ den Verzweigungskörper K_V von $\mathfrak{P}$ nach k. Dass der Durchschnitt $\overline{V} \frown K$ gleich K_V sein muss, beweist man genau so wie für den Fall des Zerlegungskörpers oder Trägheitskörpers.