



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE IN DER SPEZIELLEN KAWAGUCHISCHEN MANNIGFALTIGKEIT MIT DER MASSBESTIMMUNG VON EINER BESTIMMTEN GESTALT
Author(s)	Hokari, Shisanji
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 6(2-3), 125-157
Issue Date	1937
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55931
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_06_N2-3_125-157.pdf



DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE IN DER SPEZIELLEN KAWAGUCHISCHEN MANNIGFALTIGKEIT MIT DER MASSBESTIMMUNG VON EINER BESTIMMTEN GESTALT

Von

Shisanji HOKARI

In einer metrischen allgemeinen Mannigfaltigkeit, d.h. in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit, der durch das Grundintegral eine Massbestimmung aufgeprägt ist, lässt sich eine Differentialgeometrie erklären, die zum erstenmal bei Herrn Prof. A. KAWAGUCHI (VIII)⁽¹⁾ auftritt. Die Funktion, welche die Massbestimmung bestimmt, hängt im allgemeinen ausser vom Orte in der Mannigfaltigkeit auch noch von höherer Linienelemente ab. Die Mannigfaltigkeit, wo zu jedem Punkte in X_n jedes System von Werten $x'^i, x''^i, \dots, x^{(m)i}$ adjungiert wird, ist von H. V. CRAIG (IV) und J. L. SYNGE (XIV) die *KAWAGUCHI-sche Mannigfaltigkeit* genannt worden, da sie von A. KAWAGUCHI zuerst untersucht worden ist. Diese Mannigfaltigkeit ist von A. KAWAGUCHI einfach mit $K_n^{(m)}$ bezeichnet worden. Ein Beispiel können wir dadurch geben, dass $K_n^{(m)}$ für $m = 1$ die sogenannte FINSLERSche Mannigfaltigkeit (I, II) darstellt. An der Ausarbeitung der Geometrie in $K_n^{(1)}$ beteiligten sich zahlreiche Untersucher, aber für $m > 1$ ist bisher keine allgemeine Untersuchung gewesen, da die Grundlegung der Geometrie des Integrals $\int F(x, x', x'', \dots, x^{(m)}) dt$ verschiedener Bedingungen wegen sehr schwierig ist. E. CARTAN (III) hat neulich die Geometrie des Integrals $\int F(x, y, y', y'') dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene entwickelt; und diese Methode ist von H. HOMBU (VI, VII) zu dem Falle des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''') dx$ verallgemeinert worden. Aber eine solche Methode ist nicht auf die allgemeine n -dimensionale Mannigfaltigkeit $K_n^{(m)}$ anwendbar.

Seit einigen Jahren hat aber die Theorie der KAWAGUCHISchen Mannigfaltigkeiten mit der *Dimensionszahl* n durch die Untersuchungen

(1) Siehe die Literaturangaben am Schlusse dieser Arbeit.

von H. V. CRAIG (IV), J. L. SYNGE (XIV), A. KAWAGUCHI (IX, X, XI, XII), S. HOKARI (V) und T. OHKUBO (XIII) eine progressive Entwicklung gemacht. Die *Bogenlänge* s , welche durch das Integral $\int F(x, x', \dots, x^{(m)}) dt$ gegeben wird, soll unter der Gruppe aller Koordinaten- und Parametertransformationen:

$$(1) \quad \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \bar{t} = \bar{t}(t)$$

invariant bleiben; und dies gibt uns die von H. V. CRAIG (IV) gefundenen Bedingungen (1.8) bezüglich F . Wenn eine Grösse unter dieser Gruppe invariant bleiben, so wird sie *intrinsek* genannt. Es scheint uns, dass die Schwierigkeit der Grundlegung der intrinseken Geometrie in allgemeiner $K_n^{(m)}$ ihren Grund auf die merkwürdige Bedingung (1.8) hat.

In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich hauptsächlich mit Hilfe von skalarer Dichte mit der Theorie des x'^i enthaltenden Integrals

$$(2) \quad s = \int (A_{ij} x''^i x''^j + B_i x''^i + C)^{\frac{1}{p}} dt$$

befassen. In Kapitel I wird die einfache Erweiterung der Differentialinvarianten in bezug auf das Integral $\int F(x, x', \dots, x^{(m)}) dt$ entwickelt. Dieses Kapitel fängt mit der erweiterten Gruppe an, die die direkte Erweiterung der von A. L. UNDERHILL (XV) erst gegebenen Gruppe ist, und den Definitionen der Affinordichten sowie skalaren Dichten unter Zugrundelegung dieser erweiterten Gruppe. Es ergeben sich die m Vektordichten in bezug auf zugrundegelegte Integralfunktion F , welche die Verallgemeinerung der SYNGESchen Vektoren in der KAWAGUCHI-schen $K_n^{(m)}$ sind. Unter Zugrundelegung der Gruppe aller Koordinaten- und Parametertransformationen ist das Kapitel II der Theorie der intrinseken Übertragung in bezug auf das Integral (2) gewidmet. Es ist bemerkenswert, dass die Übertragungsparameter Γ_{jk}^{*i} nur von den x^i und x'^i abhängen; somit ist das kovariante Differential der von x''^i unabhängigen Grösse mit dem Gewicht h in bezug auf den Parameter t von den x''^i unabhängig. In Kapitel III lässt sich das in Kapitel II gegebene Verfahren zu den speziellen Fällen anwenden; insbesondere die Anwendung unseres Verfahrens kann die von OHKUBO (XIII) untersuchte Theorie so verallgemeinern, dass die Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung (3.16) hervorkommt.

Hier möchte ich mich besonders für die lehrreichen Anweisungen der Herren Prof. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU herzlichst bedanken.

KAPITEL I. Differentialinvarianten in bezug auf das Integral $\int F(x, x', \dots, x^{(m)}) dt$.

1. **Erweiterte Transformationen.** Wir betrachten n Variablen x^i ($i = 1, 2, \dots, n$), die alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen können. Die Gesamtheit der Systeme von n Werten x^i bildet eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit X_n . Wir führen in dieser n -dimensionalen Mannigfaltigkeit durch die n Gleichungen

$$(1.1) \quad \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^i), \quad \alpha, i = 1, 2, \dots, n, \quad \left| \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \right| \neq 0$$

n neue Variablen ein, und wir beschränken uns aber ausdrücklich auf solche Transformationen, deren Funktionen im geeigneten Gebiet eindeutig, kontinuierlich und hinreichend oft differenzierbar sind. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet eine unendliche kontinuierliche Gruppe G_0 . Die Mannigfaltigkeit X_n mit dieser Gruppe G_0 bezeichnen wir einfachheitshalber mit $K_n^{(0)}$.

Eine in $K_n^{(0)}$ enthaltene *Kurve* sei durch irgend einen zulässigen Parameter ausgedrückt in der Form

$$(1.2) \quad x^i = x^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wo die Funktionen $x^i(t)$ im betrachteten Gebiet kontinuierlich und hinreichend oft differenzierbar sind. Das Bild dieser Kurve durch (1.1) wird mit $\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^i(t))$ gegeben. Differenzieren wir diese Gleichungen nach t , so erhalten wir

$$(1.3) \quad \bar{x}'^\alpha = P_i^\alpha x'^i, \quad \bar{x}''^\alpha = P_i^\alpha x''^i + P_{ij}^\alpha x'^i x'^j, \quad \dots, \dots,$$

wobei

$$(1.4) \quad P_i^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}, \quad P_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \dots, \dots$$

Denken wir uns x'^i als neue Variablen, so erhalten wir erweiterte Transformationen, bei denen ein System (x^i, x'^i) nach $(\bar{x}^\alpha, \bar{x}'^\alpha)$ übergeht:

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^i), \quad \bar{x}'^\alpha = P_i^\alpha x'^i.$$

Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet offenbar eine andere unendliche kontinuierliche Gruppe G_1 . Denken wir uns wiederum x''^i und x'^i als neue Variablen, so erhalten wir noch andere erweiterte Transformationen, bei denen ein System (x^i, x'^i, x''^i) nach $(\bar{x}^\alpha, \bar{x}'^\alpha, \bar{x}''^\alpha)$

übergeht:

$$\bar{x}^i = \bar{x}(x^i), \quad \bar{x}'^i = P_i^\alpha x'^i, \quad \bar{x}''^i = P_i^\alpha x''^i + P_{ij}^\alpha x'^i x'^j.$$

Es ist klar, dass die Gesamtheit dieser Transformationen eine andere unendliche kontinuierliche Gruppe G_2 bildet. Wir wiederholen M -mal dieselbe Methode, differenzierend sukzessiv die Gleichungen der Koordinatentransformationen nach t , und erhalten im allgemeinen eine unendliche kontinuierliche Gruppe, die wir einfachheitshalber mit G_M bezeichnen. Deswegen haben wir hier eine Reihe der unendlichen Gruppen: $G_0, G_1, \dots, G_M, \dots$.

2. Affinordichte und skalare Dichte unter der Gruppe G_M . Wir können nun *Affinordichte* und *skalare Dichte* unter der Gruppe G_M definieren. Wenn die Grössen $v^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x^k, \dots, x^{(M)k})$ und $v^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\bar{x}^r, \dots, \bar{x}^{(M)r})$ in dem Koordinatensystem (x^i) bzw. $(\bar{x}^\alpha)$ bei jeder Transformation von G_M sich miteinander folgendermassen verbinden:

$$(1.5) \quad v^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \Delta^{-\Re} v^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} P_{i_1}^{\alpha_1} \dots P_{i_p}^{\alpha_p} Q_{\beta_1}^{j_1} \dots Q_{\beta_q}^{j_q},$$

$$Q_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}, \quad \Delta = |P_i^\alpha|,$$

so heissen wir $v^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ *Affinordichte von Valenz $\lambda = p + q$, Gewicht $\Re$ und Ordnung M* . Zwecks kürzerer Bezeichnung wollen wir die oben definierten $v^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ mit *Affinordichte mit der Charakteristik $(\lambda, \Re, M)$* bezeichnen.

Wenn I die Funktion von den $(M+1)n$ Argumente $x^i, x'^i, \dots, x^{(M)i}$ und bei jeder Transformation von G_M folgendermassen sich transformiert:

$$(1.6) \quad \bar{I}(\bar{x}^\alpha, \dots, \bar{x}^{(M)\alpha}) = \Delta^{-\Re} I(x^i, \dots, x^{(M)i}),$$

so heissen wir die I *skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, \Re, M)$* .

Eine Affinordichte mit der Charakteristik $(0, \Re, M)$ ist eine oben definierte skalare Dichte, und eine Affinordichte mit der Charakteristik $(0, 0, M)$ eine gewöhnliche absolute Invariante.

In der allgemeinen KAWAGUCHISchen $K_n^{(m)}$ wird das Integral

$$(1.7) \quad s = \int F(x, x', \dots, x^{(m)}) dt$$

auf jeder in ihr enthaltenen Kurve $x^i = x^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) als Bogenlänge erklärt. Da die Bogenlänge s bei der Parametertransformation $(1)_2$ sich nicht verändert, soll die Funktion F den von CRAIG gefundenen folgenden Bedingungen (IV) genügen:

$$(1.8) \quad \sum_{\sigma=\lambda}^m \binom{\sigma}{\lambda} x^{(\sigma-\lambda+1)i} F_{(\sigma)i} = \delta_{\lambda}^1 F \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots, m.$$

Setzen wir $\lambda = m$, so ergibt sich $F_{(m)i} x'^i = 0$. Durch Differentiation dieser Gleichung nach $x^{(m)j}$ für $m \geq 2$ erhalten wir

$$(1.9) \quad F_{(m)i(m)j} x'^i = 0.$$

Aus (1.9) folgt:

$$x'^1 : x'^2 : \dots : x'^n = A^{j1} : A^{j2} : \dots : A^{jn}, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

wenn der Rang der Matrix $(F_{(m)i(m)j})$ $n-1$ ist und A^{ij} das algebraische Komplement von $F_{(m)i(m)j}$ in der Determinante $|F_{(m)i(m)j}|$ bezeichnet. Es existiert also eine Funktion $f(x, x', \dots, x^{(m)})$, die den Gleichungen

$$(1.10) \quad x'^i x'^j f = A^{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n$$

genügt. Diese Funktion f ist eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, 2, m)$ in bezug auf das Integral (1.7).

3. Vektordichte in bezug auf das gegebene Integral. Da die Bogenlänge s bei der Koordinatentransformation unverändert bleiben soll, so ist die Funktion F eine Invariante. Diese Eigenschaft benutzend hat J. L. SYNGE (XIV) die $m+1$ kovarianten Vektoren, die mit den Namen SYNGE genannt werden und dessen Bestimmungszahlen in der Gestalt

$$(1.11) \quad E_i^{\lambda} = \sum_{\sigma=\lambda}^m (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\lambda} F_{(\sigma)i}^{(\sigma-\lambda)} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, m)^{(1)}$$

darstellbar sind, gegeben, darin bezeichnen wir die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x^{(\sigma)i}}$ bzw. $\frac{d^{\rho}}{dt^{\rho}} F_{(\sigma)i}$ mit $F_{(\sigma)i}$ bzw. $F_{(\sigma)i}^{(\rho)}$.

Der SYNGESche Vektor von nullter Art ist EULERScher Vektor, wie man wohl weiss. Diese Vektoren E_i^{λ} ($\lambda = 0, 1, \dots, m$) transformieren

(1) Die Vektoren E_i^{λ} spielen eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Parallelübertragung in den speziellen KAWAGUCHischen Mannigfaltigkeiten (V, XI, XII, XIII).

sich bei jeder Transformation von $G_{2m-\lambda}$ folgendermassen: $\overset{\lambda}{E}_j = \overset{\lambda}{E}_i Q_{\alpha}^i$, somit ist $\overset{\lambda}{E}_i$ ein Vektor mit der Charakteristik $(1, 0, 2m-\lambda)$. In diesem Abschnitte möchten wir uns in analoger Weise mit der Einführung einer Vektordichte in bezug auf die Funktion F beschäftigen. Wir können im allgemeinen folgenden Satz beweisen:

Ist f eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, \mathfrak{R}, M)$, so sind die Ausdrücke

$$(1.12) \quad \begin{cases} \overset{M}{\mathfrak{E}}_i = (-1)^M f_{(M)i}, \\ \overset{\lambda}{\mathfrak{E}}_i = \sum_{r=\lambda}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} f_{(r)i}^{(r-\lambda)} - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \overset{r}{\mathfrak{E}}_i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f, \end{cases} \quad \lambda = 1, 2, \dots, M-1$$

die Vektordichten mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{R}, 2M-\lambda)$.

Beweis. Da die $\overset{M}{\mathfrak{E}}_i = (-1)^M f_{(M)i}$ offenbar ein Vektordichte mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{R}, M)$ ist, so haben wir für $\lambda = M-1$

$$\begin{aligned} \overset{M-1}{\mathfrak{E}}_{\alpha} &= \sum_{r=M-1}^M (-1)^r \binom{r}{M-1} \bar{f}_{(r)\alpha}^{(r-M+1)} - M \overset{M}{\mathfrak{E}}_{\alpha} \frac{1}{f} \frac{d}{dt} \bar{f} \\ &= (-1)^{M-1} \Delta^{-\mathfrak{R}} (f_{(M-1)i} Q_{\alpha}^i + M f_{(M)i} Q_{\alpha}^{(1)i}) + (-1)^M M \frac{d}{dt} (\Delta^{-\mathfrak{R}} f_{(M)i} Q_{\alpha}^i) \\ &\quad - M \overset{M}{\mathfrak{E}}_i Q_{\alpha}^i \frac{1}{f} \frac{d}{dt} (\Delta^{-\mathfrak{R}} f) \\ &= \Delta^{-\mathfrak{R}} Q_{\alpha}^i \left\{ (-1)^{M-1} f_{(M-1)i} + (-1)^M M f_{(M)i}^{(1)} - M \overset{M}{\mathfrak{E}}_i \frac{1}{f} \frac{d}{dt} \bar{f} \right\} \\ &= \Delta^{-\mathfrak{R}} \overset{M-1}{\mathfrak{E}}_i Q_{\alpha}^i. \end{aligned}$$

Wir erhalten nach Induktion bezüglich λ

$$\begin{aligned} \overset{\lambda}{\mathfrak{E}}_{\alpha} &= \sum_{r=\lambda}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} \bar{f}_{(r)\alpha}^{(r-\lambda)} - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \overset{r}{\mathfrak{E}}_{\alpha} \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} \bar{f} \\ &= \Delta^{-\mathfrak{R}} \overset{\lambda}{X}_{\alpha} + \overset{\lambda}{Y}_{\alpha}, \end{aligned}$$

wobei

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \overset{\lambda}{X}_{\alpha} &= (-1)^{\lambda} \sum_{p=\lambda}^M \binom{p}{\lambda} f_{(p)i} Q_{\alpha}^{(p-\lambda)i} + \sum_{r=\lambda+1}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} \\ &\quad \times \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} \left\{ \sum_{p=r}^M \binom{p}{r} f_{(p)i} Q_{\alpha}^{(p-r)i} \right\} - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \overset{r}{\mathfrak{E}}_i Q_{\alpha}^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1.14) \quad Y_\alpha^\lambda &= \sum_{r=\lambda+1}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} \sum_{q=1}^{r-\lambda} \binom{r-\lambda}{q} \frac{d^q \Delta^{-\mathfrak{R}}}{dt^q} \\
&\quad \times \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} \left\{ \sum_{p=r}^M \binom{p}{r} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-r)i} \right\} \\
&\quad - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \sum_{q=1}^{r-\lambda} \binom{r-\lambda}{q} \frac{d^q \Delta^{-\mathfrak{R}}}{dt^q} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (1.13) wird in die einfachen Formen umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
X_\alpha^\lambda &= (-1)^\lambda f_{(\lambda)i} Q_\alpha^i + (-1)^\lambda \sum_{p=\lambda+1}^M \binom{p}{\lambda} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-\lambda)i} \\
&\quad + \sum_{r=\lambda+1}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} \sum_{p=r}^M \binom{p}{r} \sum_{s=0}^{r-\lambda} \binom{r-\lambda}{s} f_{(p)i}^{(s)} Q_\alpha^{(p-\lambda-s)i} \\
&\quad - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f \\
&= (-1)^\lambda f_{(\lambda)i} Q_\alpha^i + (-1)^\lambda \sum_{p=\lambda+1}^M \binom{p}{\lambda} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-\lambda)i} \\
&\quad + \sum_{r=\lambda+1}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} \sum_{p=r}^M \binom{p}{r} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-\lambda)i} \\
&\quad + \sum_{r=\lambda+1}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda} \sum_{p=r}^M \binom{p}{r} \sum_{s=1}^{r-\lambda} \binom{r-\lambda}{s} f_{(p)i}^{(s)} Q_\alpha^{(p-\lambda-s)i} \\
&\quad - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f \\
&= (-1)^\lambda f_{(\lambda)i} Q_\alpha^i + (-1)^\lambda \sum_{p=\lambda+1}^M \binom{p}{\lambda} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-\lambda)i} \\
&\quad + \sum_{p=\lambda+1}^M \binom{p}{\lambda} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-\lambda)i} \sum_{r=\lambda+1}^p (-1)^r \binom{p-\lambda}{r-\lambda} \\
&\quad + \sum_{p=\lambda+1}^M \binom{p}{\lambda} \sum_{r=\lambda+1}^p (-1)^r \binom{p-\lambda}{r-\lambda} \sum_{s=1}^{r-\lambda} \binom{r-\lambda}{s} f_{(p)i}^{(s)} Q_\alpha^{(p-\lambda-s)i} \\
&\quad - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^\lambda f_{(\lambda)i} Q_\alpha^i + (-1)^\lambda \sum_{p=\lambda+1}^M \binom{p}{\lambda} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-\lambda)i} \left\{ 1 + \sum_{r=\lambda+1}^p (-1)^{r-\lambda} \binom{p-\lambda}{r-\lambda} \right\} \\
&\quad + \sum_{s=1}^{M-\lambda} \binom{\lambda+s}{\lambda} \sum_{p=\lambda+s}^M \binom{p}{\lambda+s} (-1)^{\lambda+s} f_{(p)i}^{(s)} Q_\alpha^{(p-\lambda-s)i} \\
&\quad \times \sum_{r=\lambda+s}^p (-1)^{r-\lambda-s} \binom{p-\lambda-s}{r-\lambda-s} - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f.
\end{aligned}$$

Da $1 + \sum_{r=\lambda+1}^p (-1)^{r-\lambda} \binom{p-\lambda}{r-\lambda} = 0$ und $\sum_{r=\lambda+s}^p (-1)^{r-\lambda-s} \binom{p-\lambda-s}{r-\lambda-s} = 0$ für $p > \lambda+s$ sind, so verschwinden das zweite Glied und das dritte für $p > \lambda+s$ dieser rechten Seite identisch. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\hat{X}_\alpha &= \left\{ (-1)^\lambda f_{(\lambda)i} + \sum_{s=1}^{M-\lambda} (-1)^{\lambda+s} \binom{\lambda+s}{\lambda} f_{(\lambda+s)i}^{(s)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=\lambda+1}^M \binom{r}{\lambda} \mathfrak{E}_i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f \right\} Q_\alpha^i = \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i.
\end{aligned}$$

An zweiter Stelle wollen wir beweisen, dass die Beziehung $\hat{Y}_\alpha = 0$ richtig ist.

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_\alpha &= \sum_{q=1}^{M-\lambda} \binom{\lambda+q}{\lambda} \frac{d^q \mathcal{L}^{\mathfrak{E}}}{dt^q} \left\{ \sum_{r=\lambda+q}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda+q} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} \left[\sum_{p=r}^M \binom{p}{r} f_{(p)i} Q_\alpha^{(p-r)i} \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f \right\}.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in grosser Klammer ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=\lambda+q}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda+q} \sum_{p=r}^M \binom{p}{r} \sum_{s=0}^{r-\lambda-q} \binom{r-\lambda-q}{s} f_{(p)i}^{(s)} Q_\alpha^{(p-\lambda-q-s)i} \\
&\quad - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f \\
&= \sum_{p=\lambda+q}^M \binom{p}{\lambda+q} \sum_{r=\lambda+q}^p (-1)^r \binom{p-\lambda-q}{p-r} \sum_{s=0}^{r-\lambda-q} \binom{r-\lambda-q}{s} f_{(p)i}^{(s)} Q_\alpha^{(p-\lambda-q-s)i} \\
&\quad - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i Q_\alpha^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=\lambda+q}^M \binom{p}{\lambda+q} \sum_{s=0}^{p-\lambda-q} \binom{p-\lambda-q}{s} f_{(p)i}^{(s)} Q_{\alpha}^{(p-\lambda-q-s)i} \\
 &\quad \times \sum_{r=\lambda+q+s}^p (-1)^r \binom{p-\lambda-q-s}{r-\lambda-q-s} - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i^r Q_{\alpha}^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f \\
 &= \sum_{s=0}^{M-\lambda-q} (-1)^{\lambda+q+s} \binom{\lambda+q+s}{s} \sum_{p=\lambda+q+s}^M \binom{p}{\lambda+q+s} f_{(p)i}^{(s)} Q_{\alpha}^{(p-\lambda-q-s)i} \\
 &\quad \times \sum_{r=\lambda+q+s}^p (-1)^{r-\lambda-q-s} \binom{p-\lambda-q-s}{r-\lambda-q-s} - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i^r Q_{\alpha}^i \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f.
 \end{aligned}$$

Da $\sum_{r=\lambda+q+s}^p (-1)^{r-\lambda-q-s} \binom{p-\lambda-q-s}{r-\lambda-q-s} = 0$ für $p > \lambda+q+s$ ist, so verschwindet das erste Glied für $p > \lambda+q+s$ identisch. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 Y_{\alpha}^{\lambda} &= \sum_{q=1}^{M-\lambda} \binom{\lambda+q}{\lambda} \frac{d^q \Delta^{-\mathfrak{R}}}{dt^q} Q_{\alpha}^i \left\{ \sum_{s=0}^{M-\lambda-q} (-1)^{\lambda+q+s} \binom{\lambda+q+s}{s} f_{(\lambda+q+s)i}^{(s)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i^r \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f \right\} \\
 &= \sum_{q=1}^{M-\lambda} \binom{\lambda+q}{\lambda} \frac{d^q \Delta^{-\mathfrak{R}}}{dt^q} Q_{\alpha}^i \left\{ \sum_{r=\lambda+q}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda+q} f_{(r)i}^{(r-\lambda-q)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{r=\lambda+q}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i^r \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f \right\} \\
 &= \sum_{q=1}^{M-\lambda} \binom{\lambda+q}{\lambda} \frac{d^q \Delta^{-\mathfrak{R}}}{dt^q} Q_{\alpha}^i \left\{ \sum_{r=\lambda+q}^M (-1)^r \binom{r}{\lambda+q} f_{(r)i}^{(r-\lambda-q)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{r=\lambda+q+1}^M \binom{r}{\lambda+q} \mathfrak{E}_i^r \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda-q}}{dt^{r-\lambda-q}} f - \mathfrak{E}_i^{\lambda+q} \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Somit besteht $\mathfrak{E}_{\alpha}^{\lambda} = \Delta^{-\mathfrak{R}} \mathfrak{E}_i^{\lambda} Q_{\alpha}^i$ bei jeder Transformation von $G_{2M-\lambda}$. Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Z.B. in der allgemeinen KAWAGUCHISchen $K_n^{(m)}$ mit der Massbestimmung (1.7) existiert die in dem vorhergehenden Abschnitte gegebene skalare Dichte f mit der Charakteristik $(0, 2, m)$; infolgedessen haben wir die m kovarianten Vektordichten

$$(1.15) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_i^m = (-1)^m f_{(m)i}, \\ \mathfrak{G}_i^\lambda = \sum_{r=\lambda}^m (-1)^r \binom{r}{\lambda} f_{(r)i}^{(r-\lambda)} - \sum_{r=\lambda+1}^m \binom{r}{\lambda} \mathfrak{G}_i^r \frac{1}{f} \frac{d^{r-\lambda}}{dt^{r-\lambda}} f, \\ \lambda = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases}$$

4. Absolute Invarianten von der gegebenen skalaren Dichte. Es sei eine skalare Dichte I mit der Charakteristik $(0, \mathfrak{R}, M)$ gegeben. Differenzierend die Gleichung (1.6) nach $x^{(M)\alpha}$ und $x^{(M)\beta}$, erhalten wir dann

$$(1.16) \quad \bar{I}_{(M)\alpha(M)\beta} = \Delta^{-\mathfrak{R}} I_{(M)i(M)j} Q_\alpha^i Q_\beta^j,$$

so kennen wir, dass $I_{(M)i(M)j}$ eine symmetrische Affinordichte mit der Charakteristik $(2, \mathfrak{R}, M)$ unter G_M ist. Bezeichnen wir die Determinante $|I_{(M)i(M)j}|$ einfachheitshalber mit D , so folgt $\bar{D} = D \Delta^{-n\mathfrak{R}-2}$. Setzen wir nun voraus, dass D nicht identisch verschwindet, so ist D bzw. $ID^{-\frac{\mathfrak{R}}{n\mathfrak{R}+2}}$ für $\mathfrak{R} = -\frac{2}{n}$ bzw. $\mathfrak{R} \neq -\frac{2}{n}$ eine absolute Invariante unter G_M . Die sukzessive Ableitungen von φ nach t sind dann und nur dann absolute Invarianten, wenn die Funktion φ eine absolute Invariante ist. Infolgedessen erhalten wir das folgende Ergebnis:

Für jede Werte von $\mathfrak{R}$ ergibt sich eine Reihe von absoluten Invarianten aus einer gegebenen skalaren Dichte I mit der Charakteristik $(0, \mathfrak{R}, M)$, wenn die Determinante $|I_{(M)i(M)j}|$ nicht identisch verschwindet.

Wir behandeln jetzt einige Beispiele als Anwendungen dieses Satzes. Es ist eine spezielle KAWAGUCHISCHE Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung (2), deren Parallelübertragungstheorie in Kapitel II untersucht werden soll. In diesem Falle hat (1.9) die folgende Form

$$(1.17) \quad A_{ij} x'^j = 0;$$

infolgedessen existiert eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$, die den Beziehungen $x'^i x'^j f = A^{ij}$ genügt, wo A^{ij} das algebraische Komplement von A_{ij} in der Determinante $|A_{ij}|$ bezeichnet.⁽¹⁾ Diese Funktion f hängt nur von x^i und x'^i ab und ist in den x'^i positiv-homogen von $\{(p-4)(n-1)-2\}$ -ter Dimension. Deshalb verschwindet

(1) Ohne die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken, können wir voraussetzen, dass A_{ij} in bezug auf i und j symmetrisch ist.

die Determinante $|f_{(1)i(1)j}|$ im allgemeinen für $p \neq 4 + \frac{3}{n-1}$ nicht, da

$$f_{(1)i(1)j}x'^j = \{(p-4)(n-1)-3\}f_{(1)i}$$

bestehen, so liefert das Ergebnis eine Reihe von absoluten Invarianten: $f|f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}}$ und ihren sukzessive Ableitungen nach t .

Ein anderes Beispiel kommt leicht zustande. Unterwerfen wir in der Tat in der speziellen KAWAGUCHISCHEN Mannigfaltigkeit (XI, XII) die Funktion der Variablen x^i , x'^i und x''^i :

$$(1.18) \quad F^p = A_i(x, x')x''^i + B(x, x')$$

als die zugrundegelegte, so erhalten wir die Vektoren A_i ,

$$(1.19) \quad \overset{1}{E}_i = (2A_{i(1)j} - A_{j(1)i})x''^j + 2A_{i(0)j}x'^j - B_{(1)i}$$

und

$$(1.20) \quad \overset{0}{E}_i = (A_{i(1)k} - A_{k(1)i})x'''^k + (A_{i(1)k(1)j} - A_{k(1)i(1)j})x''^j x''^k + (A_{i(1)k(0)j}x'^j - A_{k(1)i(0)j}x'^j + A_{k(0)i} + A_{i(0)k} - B_{(1)i(1)k} + A_{i(0)j(1)k}x'^j)x''^k + A_{i(0)j(0)k}x'^j x'^k - B_{(1)i(0)j}x'^j - B_{(0)i}.$$

Schreiben wir g_{ij} statt $F^{p+1}(A_{i(1)j} + A_{j(1)i}) + \overset{1}{E}_i \overset{1}{E}_j$, so sind g_{ij} die Bestimmungszahlen einer symmetrischen Grösse und genügen den Identitäten:

$$g_{ij}x'^j = F^{p+1}(p-3)A_i - p\overset{1}{E}_i F^p \quad \text{und} \quad g_{ij}x'^i x'^j = p^2 F^{2p}.$$

Deshalb verschwindet im allgemeinen die Determinante $|g_{ij}|$ nicht identisch und ist eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, 2, 2)$. Um die Schreibweise kurz zu machen, wollen wir h_{ij} an Stelle von $A_{i(1)j} + A_{j(1)i}$ schreiben. Nun lehrt uns eine einfache Rechnung:

$$(1.21) \quad g(x, x', x'') = |g_{ij}| = h \left\{ F^{n(p+1)} + F^{(n-1)(p+1)} H^{ij} \overset{1}{E}_i \overset{1}{E}_j \right\},$$

wobei $h = |h_{ij}|$ und für $p \neq 3$ $H^{ij}h_{ik} = \delta_k^j$ gesetzt sind. Differenzierend die g nach x''^k und x''^l , ergibt sich eine symmetrische Grösse

$$\begin{aligned} g_{(2)k(2)l} = h \left\{ (F^{n(p+1)})_{(2)k(2)l} + (F^{(n-1)(p+1)})_{(2)k(2)l} H^{ij} \overset{1}{E}_i \overset{1}{E}_j \right. \\ \left. + 2(F^{(n-1)(p+1)})_{(2)k} H^{ij} \overset{1}{E}_j \overset{1}{E}_{i(2)l} + 2(F^{(n-1)(p+1)})_{(2)l} H^{ij} \overset{1}{E}_i \overset{1}{E}_{j(2)k} \right. \\ \left. + 2F^{(n-1)(p+1)} H^{ij} \overset{1}{E}_{i(2)k} \overset{1}{E}_{j(2)l} \right\}, \end{aligned}$$

deren Determinante $|g_{(2)k(2)l}|$ im allgemeinen für $p \neq 0, 3, \frac{3}{2}, -\frac{n}{n-1}$ unter Berücksichtigung von (1.19) und $H^{ij}A_i = \frac{x'^j}{p-3}$ nicht verschwindet, da

$$\begin{aligned} g_{(2)k(2)l} x'' &= 2h \left\{ (F^{(n-1)(p+1)})_{(2)k} H^{ij} \overset{1}{E}_{i(2)l} x'' \overset{1}{E}_j + F^{(n-1)(p+1)} H^{ij} \overset{1}{E}_{i(2)k} \overset{1}{E}_{j(2)l} x'' \right\} \\ &= 2(2p-3)h \left\{ (F^{(n-1)(p+1)})_{(2)k} H^{ij} A_i \overset{1}{E}_j + F^{(n-1)(p+1)} H^{ij} A_j \overset{1}{E}_{i(2)k} \right\} \\ &= \frac{2(2p-3)}{p-3} h \left\{ (F^{(n-1)(p+1)})_{(2)k} \overset{1}{E}_j x'^j + F^{(n-1)(p+1)} \overset{1}{E}_{i(2)k} x'^i \right\} \\ &= -\frac{2p(2p-3)}{p-3} h \left\{ (F^{(n-1)(p+1)})_{(2)k} F + F^{(n-1)(p+1)} A_k \right\} \\ &= -\frac{4p(2p-3)(np+n-p)}{p-3} h A_k F^{(n-1)(p+1)} \end{aligned}$$

bestehen. Somit liefert das Ergebnis eine Reihe von absoluten Invarianten: $g |g_{(2)k(2)l}|^{-\frac{1}{n+1}}$ und ihren sukzessive Ableitungen nach t . In derselben Weise erhalten wir eine andere Reihe von absoluten Invarianten mit Hilfe von (1.20), benutzend $g_{ij} = F^{p+3}(A_{i(1)j} + A_{j(1)i}) + \overset{0}{E}_i \overset{0}{E}_j$.

5. Skalare Dichte mit demselben Gewicht wie eine gegebene. Es sei die allgemeine KAWAGUCHISCHE $K_n^{(m)}$ mit der Massbestimmung (1.7) gegeben und eine skalare Dichte I mit der Charakteristik $(0, \mathfrak{R}, M)$. Da in $K_n^{(m)}$ die skalare Dichte f mit der Charakteristik $(0, 2, m)$ existiert, so ergibt sich eine skalare Dichte $I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f$ mit demselben Gewicht wie I . Wiederholen wir dieses Verfahren, so haben wir eine Reihe von skalaren Dichten mit demselben Gewicht

$$(1.22) \quad I, \quad I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f, \quad \left(I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f \right)^{(1)} \\ - \frac{\mathfrak{R}}{2} \left(I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f \right) \frac{d}{dt} \log f, \quad \dots$$

unter der erweiterten Gruppe

$$\begin{aligned} G_M, \quad G_{M+1}, \quad G_{M+2}, \quad \dots \quad &\text{für } M \geq m, \\ G_M, \quad G_{m+1}, \quad G_{m+2}, \quad \dots \quad &\text{für } M < m \end{aligned}$$

der Reihe nach. Wir haben also den Satz erhalten:

Wenn in der KAWAGUCHISchen $K_n^{(m)}$ eine skalare Dichte I mit der Charakteristik $(0, \mathfrak{R}, M)$ existiert, so ergibt sich eine Reihe von skalaren Dichten mit demselben Gewicht wie I .

Z.B. in der KAWAGUCHISchen $K_n^{(m)}$ mit der Massbestimmung (1.7) existiert eine symmetrische Grösse

$$(1.23) \quad g_{ij} = F^{2m-1} F_{(m)i(m)j} + \overset{1}{E}_i \overset{1}{E}_j,$$

deren Determinante $|g_{ij}|$ im allgemeinen nicht verschwindet, da

$$(1.24) \quad |g_{ij}| = f F^{(2m-1)(n-1)+2}$$

ist. Da $|g_{ij}|$ eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, 2, m)$ ist, so liefert der Satz eine Reihe von skalaren Dichten mit demselben Gewicht wie $|g_{ij}|$.

Wir können in der speziellen KAWAGUCHISchen Mannigfaltigkeit auf ähnliche Weise mit vielen Beispielen dienen.

Bemerkung. $I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f$, $\left(I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f \right)^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} \left(I^{(1)} - \frac{\mathfrak{R}}{2} I \frac{d}{dt} \log f \right) \frac{d}{dt} \log f$, werden die *erste, zweite, abgeleiteten skalaren Dichten* von I genannt und die Grösse I besonders die *skalare Dichte* oder die *nullte*. Richten wir die Aufmerksamkeit auf die Ordnungen der abgeleiteten skalaren Dichten, so erkennen wir, dass die Ordnungen der Reihe nach um eins höher sind. Benutzend diese skalare Dichte, ergeben sich viele kovariante Vektordichten wegen des Satzes in Nr. 3.

KAPITEL II. Die Geometrie des Integrals

$$\int (A_{ij} x''^i x''^j + B_i x'^i + C)^{\frac{1}{p}} dt.$$

6. **Skalare Dichte bezüglich des gegebenen Integrals.** In diesem Kapitel möchten wir die geometrische Theorie, die gegenüber der Gruppe G_2 und der Parametertransformation $(1)_2$ invariant ist, des gegebenen Integrals

$$(2.1) \quad s = \int (A_{ij} x''^i x''^j + B_i x'^i + C)^{\frac{1}{p}} dt$$

in der speziellen KAWAGUCHISchen Mannigfaltigkeit behandeln. Dabei nehmen wir an, dass die in dem Integral stehenden Funktionen A_{ij} , B_i und C hinreichend vielmal differenzierbar nach den in ihr enthaltenen Argumenten sind; aber diese Funktionen dürfen die Funktionen höch-

stens von x^i und x'^i sein. In dieser speziellen KAWAGUCHISCHEN Mannigfaltigkeit wird das Integral (2.1) auf jeder in ihr enthaltenen Kurve $x^i = x^i(t)$ als Bogenlänge erklärt und s als Invariante definiert.

Da die Bogenlänge s bei der Parametertransformation sich nicht verändert, müssen die A_{ij} , B_i und C den folgenden Bedingungen genügen:

$$(2.2) \quad (2A_{ij}x''^j + B_i)x'^i = 0,$$

$$(2.3) \quad 2(2A_{ij}x''^i + B_j)x''^j + (A_{ij(1)k}x''^i x''^j + B_{i(1)k}x''^i + C_{(1)k})x'^k = p(A_{ij}x''^i x''^j + B_i x''^i + C).$$

Aus (2.2) ergibt sich

$$(2.4) \quad A_{ij}x'^i = 0 \quad \text{und} \quad B_i x'^i = 0.$$

Weiterhin ergeben sich aus (2.3) die drei folgenden wichtigen Gleichungssysteme:

$$(2.5) \quad A_{ij(1)k}x'^k = (p-4)A_{ij}, \quad B_{i(1)k}x'^k = (p-2)B_i, \quad C_{(1)k}x'^k = pC,$$

d.h. die Funktionen A_{ij} , B_i bzw. C sind in den x'^i positiv-homogen von $(p-4)$ -ter, $(p-2)$ -ter bzw. p -ter Dimension.

Differenzierend (2.4) nach x'^k erhalten wir

$$(2.6) \quad A_{ij(1)k}x'^i = -A_{jk}, \quad B_{i(1)k}x'^i = -B_k.$$

Aus (2.4) folgt, dass eine skalare Dichte f mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$ existiert, die den Beziehungen

$$(2.7) \quad x'^i x'^j f = A^{ij}$$

genügt, wenn der Rang der Matrix (A_{ij}) $n-1$ ist und A^{ij} das algebraische Komplement von A_{ij} in der Determinante $|A_{ij}|$ bezeichnet. Sie kann ausdrücklich folgendermassen dargestellt werden (I):⁽¹⁾

(1) Z.B. für $n = 2$ können wir die Gleichungen (2.4) in die Form

$$x'A_{11} + y'A_{12} = 0, \quad x'A_{21} + y'A_{22} = 0$$

umschreiben, setzend $x^1 = x$, $x^2 = y$; da nun x' und y' längs jeder betrachteten Kurve nicht zugleich alle gleich Null sind, gibt es eine in den Grössen x , x' , y , y' stetige Funktion f , derart, dass

$$f = \frac{A_{11}}{y'^2} = \frac{A_{12}}{-x'y'} = \frac{A_{22}}{x'^2},$$

$$f(x, x') = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x'^i)^2 \sum_{j=1}^n a_j x'^j} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & x'^1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & x'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & x'^n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix},$$

wo $a_1, a_2, \dots, a_n$ n willkürliche reelle Zahlen bedeuten, die nicht zugleich verschwinden. f ist in den x'^i positiv-homogen von $\{(p-4) \times (n-1)-2\}$ -ter Dimension. Diese Funktion f spielt eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Parallelübertragung in unserer speziellen KAWAGUCHISCHEN Mannigfaltigkeit, von der wir von jetzt ab auch noch voraussetzen, dass $f(x, x')$ für alle Wertesysteme der x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) aus dem betrachteten Gebiet und für alle möglichen Wertesysteme der x'^i ($i = 1, 2, \dots, n$) ausser dem Wertesysteme $(0, 0, \dots, 0)$ von Null verschieden ist.

7. SYNGESche Vektoren bezüglich des gegebenen Integrals und der Funktion f . Bevor wir den SYNGESchen Vektoren ableiten, machen wir die Transformationsformeln von A_{ij} , B_i und C unter der Koordinatentransformationen klar. Eine einfache Rechnung lehrt uns, dass bei der Transformation von G_2 lautet:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \bar{A}_{\alpha\beta} = A_{ij} Q_\alpha^i Q_\beta^j, \\ \bar{B}_\alpha = B_i Q_\alpha^i + 2A_{ij} Q_\alpha^i Q_{\beta\tau}^j x'^\beta x'^\tau, \\ \bar{C} = C + B_i Q_{\alpha\beta}^i x'^\alpha x'^\beta + A_{ij} Q_{\tau\delta}^i Q_{\alpha\beta}^j x'^\alpha x'^\beta x'^\tau x'^\delta. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass die A_{ij} Bestimmungszahlen einer Grösse zweiten Grades sind, aber die B_i und ebenso die C keineswegs Bestimmungszahlen einer Grösse; es müsste dann ja der zweite und dritte Term rechts in beiden letzten Gleichungen Null sein.

Wir betrachten jetzt in unserer Mannigfaltigkeit sogenannte SYNGESche Vektoren bezüglich der skalaren Funktion $A_{ij} x''^i x''^j + B_i x''^i + C$,

im besonderen Falle $t = x, x' = 1$

$$f = \frac{\partial^2 K}{\partial \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2},$$

ist, setzend

$$A_{ij} x''^i x''^j + B_i x''^i + C = K\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right).$$

deren Bestimmungszahlen als Funktionen des Linienelementes von höherer als zweite Ordnung gegeben sind:

$$(2.9) \quad \overset{2}{E}_i = 2A_{ij}x''^j + B_i,$$

$$(2.10) \quad \overset{1}{E}_i = 4A_{ij}x'''^j + (4A_{ij(1)k} - A_{jk(1)i})x''^j x''^k + (2B_{i(0)j} + 4A_{ij(0)k}x'^k - B_{j(1)i})x''^j + 2B_{i(0)j}x'^j - C_{(1)i},$$

$$(2.11) \quad \overset{0}{E}_i = 2A_{ij}x^{(4)j} + (4A_{ij(0)k}x'^k + 4A_{ij(1)k}x''^k + 2A_{ik(1)j}x''^k - 2A_{jk(1)i}x''^k + B_{i(1)j} - B_{j(1)i})x'''^j + (2A_{ij(0)k(1)l}x'''^l + 2A_{ij(0)k} + 2A_{ij(1)k(0)l}x''^l + 2A_{ij(1)k(1)l}x'''^l - A_{jk(1)i(0)l}x''^l + A_{jk(1)i(1)l}x''^l + A_{jk(0)i} + B_{i(1)j(1)k} - B_{j(1)i(1)k})x''^j x''^k + (2A_{ij(0)k(0)l}x'^k x''^l + B_{i(0)j} + B_{i(0)k(1)j}x'^k + B_{i(1)j(0)k}x'^k - B_{j(1)i(0)k}x'^k - C_{(1)i(1)j} + B_{j(0)i})x''^j + B_{i(0)j(0)k}x'^j x'^k - C_{(1)i(0)j}x'^j + C_{(0)i}.$$

In der anderen speziellen KAWAGUCHISchen Mannigfaltigkeit spielten die in ihr erwähnten SYNGESchen Vektoren eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Parallelübertragung in sich. Aber sie scheint mir, in unserem Falle, als ob sie keine wichtige Rolle spiele, d.h. ich kann mit Hilfe von diesen Vektoren zu einer sogenannten Grundübertragung in dieser betrachteten Mannigfaltigkeit nicht gelangen, da die Determinante der höchsten Ordnung der Koeffizienten infolge (2.4) immer identisch verschwindet.

Wir betrachten also an zweiter Stelle die skalare Dichte $f(x, x')$ mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$. Wir können aus dem Satze in Nr. 4, nach in Kapitel I erklärter Methode, unter der Voraussetzung $|f_{(1)i(1)j}| \neq 0$,⁽¹⁾ eine nicht identisch verschwindende absolute Invariante $f|f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}}$ herleiten; sie ist in den x'^i positiv-homogen von $\frac{(p-2)(n-1)}{n+1}$ -ter Dimension. Zwecks kürzerer Bezeichnung setzen wir $\sigma = \frac{(p-2)(n-1)}{n+1}$. Infolgedessen ist die Grösse

$$(2.12) \quad \varphi = \left\{ f |f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}} \right\}^{\frac{2}{\sigma}}$$

(1) Da $f_{(1)i}$ in den x'^i positiv-homogen von $\{(p-4)(n-1)-3\}$ -ter Dimension ist, so ist $f_{(1)i(1)j}x'^j = \{(p-4)(n-1)-3\}f_{(1)i}$. Infolgedessen ist die Determinante $|f_{(1)i(1)j}|$ für $p \neq 4 + \frac{3}{n-1}$ im allgemeinen von Null verschieden.

in den x'^i positiv-homogen von zweiter Dimension. Durch die Benutzung dieser Invariante gibt es in unserer Mannigfaltigkeit ausser den $\hat{E}_i$ ($\lambda = 0, 1, 2$) den zwei Vektoren $\varphi_{(1)i}$ und

$$(2.13) \quad -\mathfrak{B}_i = A_i + \varphi_{(1)i(1)j} x''^j,$$

wobei

$$(2.14) \quad A_i(x, x') = \varphi_{(1)i(0)j} x'^j - \varphi_{(0)i}$$

gesetzt sind. Die Determinante $|\varphi_{(1)i(1)j}|$ der Koeffizienten der x''^j im linearen Gleichungssystem (2.13) ist im allgemeinen von Null verschieden, da $\varphi_{(1)i(1)j} x'^j = \varphi_{(1)i}$ bestehen, und wird somit bezüglich x''^i gelöst:

$$(2.15) \quad x''^i = -\mathfrak{B}^i - A^i,$$

wobei

$$(2.16) \quad \mathfrak{B}^i = \varphi^{ij} \mathfrak{B}_j, \quad A^i = \varphi^{ij} A_j, \quad \varphi^{ij} \varphi_{(1)i(1)k} = \delta_k^j.$$

8. Fundamentalgrössen. Durch Ersetzung des Wertes (2.15) in $F^p = A_{ij} x''^i x''^j + B_i x''^i + C$, geht die F unter Berücksichtigung vom Affinorcharakter von A_{ij} über in

$$(2.17) \quad F^p = M_i(x, x') x''^i + N(x, x') + A_{ij} \mathfrak{B}^i \mathfrak{B}^j,$$

wobei

$$(2.18) \quad M_i = -2A_{ij} A^j + B_i, \quad N = -A_{ij} A^i A^j + C$$

gesetzt sind. Da aber die Grösse $A_{ij} \mathfrak{B}^i \mathfrak{B}^j$, die von x^i , x'^i und x'' abhängt, offenbar eine Invariante ist, so wird es zu beachten sein, dass die $\psi = M_i x''^i + N$ eine Invariante ist und dass die M_i Bestimmungszahlen eines Vektors sind.

Benutzen wir noch einmal (2.15), so geht ψ über in

$$(2.19) \quad \psi = N^* - M_i \mathfrak{B}^i,$$

wobei

$$(2.20) \quad \begin{aligned} N^* &= N - M_i A^i \\ &= A_{ij} A^i A^j - B_i A^i + C \end{aligned}$$

gesetzt ist; es geht daraus hervor, dass die N^* mit Hilfe vom Affinorcharakter von M_i eine bestimmte Invariante ist. Daraus folgt:

In der speziellen KAWAGUCHIschen Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung (2.1) existieren die drei Fundamentalgrößen: die zwei absoluten Invarianten φ, N^* und der Vektor M_i . Benutzend diese Fundamentalgrößen, kann man diese Mannigfaltigkeit charakterisieren.

Die Fundamentalgrößen besitzen die merkwürdigen Eigenschaften, d.h. sie hängen alle nur von x^i und x'^i ab und besitzen in den x'^i die Homogenitätseigenschaft.

9. Einige Eigenschaften von den Fundamentalgrößen und eine Übertragung. Da die Funktion φ in den x'^i positiv-homogen von zweiter Dimension ist, folgt sogleich unter Berücksichtigung (2.13) bei der Parametertransformation

$$(2.21) \quad \bar{\mathfrak{B}}^i = \alpha \mathfrak{B}^i - x'^i \alpha', \quad \alpha = \frac{dt}{d\bar{t}}, \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{d\bar{t}}.$$

Da der Vektor $\mathfrak{B}^i$ bei der Parametertransformation sich in die Form (2.21) transformiert, so hat die Grösse $A_{ij} \mathfrak{B}^i \mathfrak{B}^j$ eine geometrische Bedeutung, d.h. sie lässt sich vermöge der Homogenitätseigenschaft (2.5) von A_{ij} und (2.4) in die Form $\bar{A}_{ij} \bar{\mathfrak{B}}^i \bar{\mathfrak{B}}^j = \alpha^p A_{ij} \mathfrak{B}^i \mathfrak{B}^j$ transformiert. Deswegen ist die Grösse ψ nicht nur eine Invariante bei der Koordinatentransformation, sondern auch solche mit dem Gewicht p bei der Parametertransformation.

Wir greifen jetzt eine wichtige Relation heraus:

$$(2.22) \quad M_i x'^i = 0;$$

diese folgt unmittelbar aus (2.4) und (2.18). Somit hat die Grösse $M_i \mathfrak{B}^i$ auch eine geometrische Bedeutung bei der Parametertransformation. Durch Differentiation dieser Gleichung (2.22) nach x'^j gewinnen wir

$$(2.23) \quad M_{i(1)j} x'^i + M_j = 0 \quad \text{oder} \quad M_{i(1)j} x'^i = -M_j.$$

Da M_i in den x'^j positiv-homogen von $(p-2)$ -ter Dimension sind, so ergibt sich

$$(2.24) \quad M_{i(1)j} x'^j = (p-2) M_i.$$

Formen wir zunächst die (2.15) in

$$(2.25) \quad -\mathfrak{B}^i = x''^i + 2G^i$$

um, wobei

$$(2.26) \quad 2G^i \equiv \Lambda^i = \varphi^{ij}(\varphi_{(1)j(1)k} x'^k - \varphi_{(0)j}),$$

so gibt dies uns eine Grundübertragung in der betrachteten Mannigfaltigkeit. Da G^i höchstens x^i und x'^i enthält und in den x'^i positiv-homogen von zweiter Dimension ist, so dürfen wir annehmen, dass *alle Grössen unserer Mannigfaltigkeit nur von x^i und x'^i abhängig sind.*

Die Übertragung längs der gegebenen Kurve und solche nach willkürlicher Richtung werden ganz analog wie KAWAGUCHI (XII, Kap. I) so gegeben, dass das kovariante Differential der gegebenen Grösse bei der Parametertransformation invariant ist; d.h. wenn v^i ein kontravarianter Vektor mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{R}, 1)$ und in den x'^i positiv-homogen von h -ter Dimension ist, so wird das kovariante Differential von v^i gegeben in der Form

$$\delta v^i = dv^i + G_{(1)j(1)k}^i v^j dx^k - \mathfrak{R} v^i G_j dx^j - \frac{h}{2} v^i d \log \varphi,$$

insbesondere solches des ausgezeichneten Linienelementes lässt sich in der Gestalt

$$\delta x'^i = dx'^i + G_{(1)j}^i dx^j - \frac{1}{2} x'^i d \log \varphi$$

geben, wo $G_j = G_{(1)i(1)j}^i$. Die Übertragung längs der gegebenen Kurve wird in der Form

$$\frac{\delta v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + G_{(1)j}^i v^j - \mathfrak{R} v^i G - \frac{h}{2} v^i \frac{d}{dt} \log \varphi^{(1)}$$

gegeben und dies ist bei der Parametertransformation invariant. Es gilt also das Ergebnis:

Es sei die spezielle Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung (2.1) gegeben. Wenn die Determinanten $|f_{(1)k(1)j}|$ und $|\varphi_{(1)k(1)j}|$ nicht gleich Null sind, so können wir unsere Übertragungstheorie bezüglich des gegebenen Integrals ganz analog wie die KAWAGUCHISCHE Übertragung in die spezielle Mannigfaltigkeit, in der die zugrundegelegte Funktion F^p in bezug auf x'^i linear ist, einführen.

Bezüglich dieser Tatsache mit allen seinen Einzelheiten kann man in den KAWAGUCHISCHEN Arbeiten (XI, XII) nachschlagen. Aber wir fassen in unserem Falle den symmetrischen Tensor A_{ij} und die von A_{ij} , B_i und C abgeleiteten Fundamentalgrössen φ , M_i und N^* .

10. Intrinsike Übertragung. Die in vorhergehendem Abschnitte definierte Übertragung betrifft die Ableitung der vierter Ordnung von

(1) $G = G_{(1)k(1)j}^i x'^j$

φ . Wir können aber, benutzend die Fundamentalgrößen φ , die Übertragung, die ganz analog wie E. CARTAN (II) ist, mit der Ableitung der dritten Ordnung von φ definieren, d.h. wenn man die Größen

$$(2.27) \quad C_{ijk} = \frac{1}{2} \varphi_{(1)i(1)j(1)k}, \quad A_{ijk} = \varphi^{\frac{1}{2}} C_{ijk},$$

$$G^i = \frac{1}{2} \varphi^{ij} (\varphi_{(1)j(0)k} x'^k - \varphi_{(0)j})$$

und

$$(2.28) \quad \Gamma_{jk}^i = \varphi^{ih} \left\{ \frac{1}{2} (\varphi_{(1)j(1)h(0)k} + \varphi_{(1)k(1)h(0)j} - \varphi_{(1)j(1)k(0)h}) \right. \\ \left. + C_{jkr} G_{(1)h}^r - C_{hkr} G_{(1)j}^r \right\},$$

$$(2.29) \quad \Gamma_{jk}^{*i} = \Gamma_{jk}^i - \varphi^{ih} C_{jhr} G_{(1)k}^r$$

bildet, so ergibt sich das kovariante Differential für einen willkürlichen Tensor, welcher in den x'^i positiv-homogen von nullter Dimension ist. Z.B. wenn v^i eine kontravariante Vektordichte mit der Charakteristik $(1, \Re, 1)$ ist, so wird ihr kovariantes Differential gegeben in der Form

$$(2.30) \quad \delta v^i = dv^i + (\Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j - \Re \Gamma_{ij}^{*l} v^i dx^j.$$

Da die Funktion φ in den x'^i positiv-homogen von zweiter Dimension ist, so ist die C_{ijk} in den Zeigern symmetrisch und es bestehen die Relationen

$$(2.31) \quad C_{ijk} x'^k = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{jk}^i x'^j = G_{(1)k}^i.$$

Da $\varphi^{-\frac{1}{2}} x'^i$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors und in den x'^i positiv-homogen von nullter Dimension sind, so folgt aus (2.30) als spezieller Fall

$$(2.32) \quad \omega^i = \delta(\varphi^{-\frac{1}{2}} x'^i) = \varphi^{-\frac{1}{2}} \left(dx'^i - \frac{1}{2} x'^i d \log \varphi + G_{(1)k}^i dx^k \right);$$

es ist also

$$(2.33) \quad dx'^i = \varphi^{\frac{1}{2}} \omega^i + \frac{1}{2} x'^i d \log \varphi - G_{(1)k}^i dx^k.$$

Es folgt also nach (2.30) und der letzten

$$\begin{aligned} \delta v^i &= v_{(0)k}^i dx^k + v_{(1)k}^i dx'^k + (\Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j \\ &\quad - \Re \Gamma_{ij}^{*l} v^i dx^j \\ &= dx^k \nabla_k v^i + \omega^k \nabla_k v^i, \end{aligned}$$

wobei $\nabla_k v^i$ und $\overset{1}{\nabla}_k v^i$ die sogenannten Ableitungen sind:

$$(2.34) \quad \begin{cases} \nabla_k v^i = v_{(0)k}^i - v_{(1)r}^i G_{(1)k}^r + \Gamma_{jk}^{*i} v^j - \Re \Gamma_{lk}^{*i} v^l, \\ \overset{1}{\nabla}_k v^i = \varphi^{\frac{1}{2}} (v_{(1)k}^i + C_{jk}^i v^j). \end{cases}$$

Bei der Parametertransformation ist die Grösse dx'^i keine Invariante, d.h. sie verändert sich in die Form

$$\delta x^i = \alpha dx'^i + x'^i d\alpha.$$

Aber das kovariante Differential und die kovariante Ableitung von v^i haben beide dadurch Invarianteneigenschaft, dass das alle $d\alpha$ enthaltende Glied identisch verschwindet, da die v^i in den x'^i positiv-homogen von nullter Dimension sind. Deswegen können wir nicht die oben erklärte Methode für die Grösse von nicht nullter Dimension anwenden. Wir können aber diese Unvollkommenheit verbessern, indem wir die folgende invariante Forderung annehmen:

Für die Fundamentalgrösse φ nehmen wir an, dass ihr kovariantes Differential immer identisch verschwindet:

$$(2.35) \quad \delta^* \varphi = 0.$$

Dann folgt für die andere skalare Dichte I bzw. kontravariante Vektordichte v^i mit dem Gewicht h bei der Parametertransformation

$$(2.36) \quad \delta^* I = dI - \Re \Gamma_{ij}^{*l} I dx^j - \frac{h}{2} I d \log \varphi$$

bzw.

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \delta^* v^i &= dv^i + (\Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j - \Re \Gamma_{lj}^{*i} v^l dx^j \\ &\quad - \frac{h}{2} v^i d \log \varphi. \end{aligned}$$

Die Übertragung längs der gegebenen Kurve wird in der Form

$$(2.38) \quad \begin{cases} \frac{\delta^* I}{dt} = \frac{dI}{dt} - \Re G_{(1)l}^l I - \frac{h}{2} I \frac{d}{dt} \log \varphi, \\ \frac{\delta^* v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + (\Gamma_{jk}^i x'^k + C_{jk}^i x''^k) v^j - \Re G_{(1)l}^l v^i - \frac{h}{2} v^i \frac{d}{dt} \log \varphi \end{cases}$$

gegeben, und dies ist bei der Parametertransformation invariant.

Die Fundamentalgrößen φ , M_i und N^* gehen bei der Übertragung über in

$$(2.39) \quad \nabla_k \varphi = \varphi_{(0)k} - \varphi_{(1)r} G_{(1)k}^r = 0, \quad \overset{1}{\nabla}_k \varphi = \varphi^{\frac{1}{2}} \varphi_{(1)k},$$

$$(2.40) \quad \nabla_k N^* = N_{(0)k}^* - N_{(1)r}^* G_{(1)k}^r, \quad \overset{1}{\nabla}_k N^* = \varphi^{\frac{1}{2}} N_{(1)k}^*,$$

$$(2.41) \quad \begin{cases} \nabla_k M_i = M_{i(0)k} - M_{i(1)r} G_{(1)k}^r - \Gamma_{ik}^{*j} M_j, \\ \overset{1}{\nabla}_k M_i = \varphi^{\frac{1}{2}} (M_{i(1)k} + C_{ik}^j M_j), \end{cases}$$

bei denen die folgenden einfachen Identitäten gelten:

$$(2.42) \quad x'^k \nabla_k \varphi = 0, \quad x'^k \overset{1}{\nabla}_k \varphi = 2\varphi^{\frac{3}{2}},$$

$$(2.43) \quad x'^k \nabla_k N^* = \frac{d}{dt} N^* + N_{(1)r}^* \mathfrak{B}^r, \quad x'^k \overset{1}{\nabla}_k N^* = p\varphi^{\frac{1}{2}} N^*,$$

$$(2.44) \quad \begin{cases} x'^k \nabla_k M_i = \frac{d}{dt} M_i + M_{i(1)r} \mathfrak{B}^r - G_{(1)i}^j M_j, \\ x'^i \nabla_k M_i = M_{i(0)k} x'^i, \\ x'^k \overset{1}{\nabla}_k M_i = (p-2)\varphi^{\frac{1}{2}} M_i, \quad x'^i \overset{1}{\nabla}_k M_i = -\varphi^{\frac{1}{2}} M_k. \end{cases}$$

Bemerkung 1. Handelt es sich um die kovariante Ableitung einer Grösse, so dürfen wir das Parameter t invariant bleiben lassen; mithin fällt die kovariante Ableitung einer Grösse mit jener mit dem Gewicht Null zusammen. Zwischen den beiden Differentialen bestehen die einfache Relation

$$(2.45) \quad \delta^* T = \delta T - \frac{h}{2} T d \log \varphi.$$

2. Für eine Grösse mit dem Gewicht $h (\neq 0)$ dürfen wir annehmen, dass die Grösse ausser den Argumenten x^i und x'^i auch noch den Parameter t ausdrücklich enthält.

11. **Krümmungsgrößen.** Die zweite kovariante Ableitung eines gewöhnlichen kontravarianten Vektors v^i lautet

$$(2.46) \quad \begin{aligned} \nabla_l \nabla_k v^i &= v_{(0)k(0)l}^i - v_{(1)r(0)l}^i G_{(1)k}^r - v_{(1)r}^i G_{(1)k(0)l}^r + \Gamma_{jk(0)l}^{*i} v^j \\ &+ \Gamma_{jk}^{*i} v_{(0)l}^j - G_{(1)l}^j (v_{(0)k(1)j}^i - v_{(1)r(1)j}^i G_{(1)k}^r - v_{(1)r}^i G_{(1)k(1)j}^r + \Gamma_{mk(1)j}^{*i} v^m \\ &+ \Gamma_{mk}^{*i} v_{(1)j}^m) + \Gamma_{jl}^{*i} (v_{(0)k}^j - v_{(1)r}^j G_{(1)k}^r + \Gamma_{mk}^{*j} v^m) - \Gamma_{kl}^{*j} (v_{(0)j}^i \\ &- v_{(1)r}^i G_{(1)j}^r + \Gamma_{mj}^{*i} v^m). \end{aligned}$$

Bei Vertauschung der Indizes in den zweiten kovarianten Ableitungen gelten also die Formeln

$$(2.47) \quad (\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) v^i = R^i_{jkl} v^j + S^r_{kl} \nabla_r v^i,$$

wo

$$(2.48) \quad R^i_{jkl} = (\Gamma^*_{jk(0)l} - \Gamma^*_{jk(1)m} G^m_{(1)l}) - (\Gamma^*_{jl(0)k} - \Gamma^*_{jl(1)m} G^m_{(1)k}) \\ + \Gamma^*_{pl} \Gamma^*_{jk} - \Gamma^*_{pk} \Gamma^*_{jl} - A^i_{jr} S^r_{kl},$$

$$(2.49) \quad \varphi^{\frac{1}{2}} S^r_{kl} = (G^r_{(1)l(0)k} - G^r_{(1)l(1)t} G^t_{(1)k}) - (G^r_{(1)k(0)l} - G^r_{(1)k(1)t} G^t_{(1)l}).$$

R^i_{jkl} sind die Bestimmungszahlen der Krümmungsgrösse der betreffenden Übertragung. Sie sind die gewöhnlichen und in den x'^i positiv-homogen von nullter Dimension.

Dieselbe Weise liefert uns

$$(2.50) \quad \begin{cases} (\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) v^i = T^i_{jkl} v^j + A^i_{lk} \nabla_j v^i + U^r_{kl} \nabla_r v^i, \\ (\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) v^i = V^i_{jkl} v^j + W^r_{kl} \nabla_r v^i, \end{cases}$$

wo

$$(2.51) \quad \begin{cases} T^i_{jkl} = \nabla_l A^i_{jk} - \varphi^{\frac{1}{2}} \Gamma^*_{jl(1)k} + A^i_{jr} (\Gamma^*_{kl} - G^r_{(1)l(1)k}), \\ U^r_{kl} = G^r_{(1)l(1)k} - \Gamma^*_{kl}{}^r, \\ V^i_{jkl} = \varphi^{\frac{1}{2}} (A^i_{jk(1)l} - A^i_{jl(1)k}) + A^i_{pl} A^p_{jk} - A^i_{pk} A^p_{jl}, \\ W^r_{kl} = \frac{1}{2} \varphi^{-\frac{1}{2}} (\varphi_{(1)l} \delta^r_k - \varphi_{(1)k} \delta^r_l). \end{cases}$$

Die Beziehungen zwischen diesen Grössen ergeben sich nach einiger Umrechnung; aber wir wollen uns hier nicht mehr damit befassen, da sie ganz analog wie CARTANSche Arbeit (II) sind.

Bei dieser Übertragung lautet der Reduktionssatz: *Die Differentialkomitanten sind die algebraischen Komitanten der Grössen $\varphi^{-\frac{1}{2}} x'^i$, φ , M_i , N^* , R^i_{jkl} , A^i_{jk} und deren δ^* -Ableitungen.*

KAPITEL III. Die verschiedenen speziellen Mannigfaltigkeiten.

12. Anwendung auf die speziellen KAWAGUCHIschen Mannigfaltigkeiten. Wir gehen jetzt zur Betrachtung von einigen besonderen Fällen über, die von einigen Autoren bisher schon einzeln untersucht worden sind.

Zuerst betrachten wir den Fall

$$(3.1) \quad s = \int \left\{ A_i(x, x') x''^i + B(x, x') \right\}^{\frac{1}{p}} dt,$$

d.h. die von Herrn Prof. A. KAWAGUCHI (XI, XII) untersuchte Mannigfaltigkeit. Da $A_{i(1)j} + A_{j(1)i}$ die symmetrische Grösse und A_i in den x'^i positiv-homogen von $(p-2)$ -ter Dimension ist, so ist die Determinante $f = |A_{i(1)j} + A_{j(1)i}|$ eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$. Es gibt also eine absolute Invariante

$$(3.2) \quad \varphi = \left\{ f |f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}} \right\}^{\frac{2(n+1)}{n(p-1)}}$$

unter der Voraussetzung $|f_{(1)i(1)j}| \neq 0$.⁽¹⁾ Benutzend diese skalare Dichte f , haben wir den Vektor $\mathfrak{B}_i$, der ganz analog wie (2.13) ist. Somit können wir für $p \neq 0, 1, 3 + \frac{1}{n}$ die Parallelübertragung in dieser Mannigfaltigkeit definieren. Schliesslich gibt die einfache Rechnung das gewünschte Ergebnis:

Die Fundamentalgrössen in dieser Mannigfaltigkeit sind die zwei absoluten Invarianten φ und $N = -A_i \Lambda^i + B$, welche beide nur von x^i und x'^i abhängen und in den x'^i die Homogenitätseigenschaft besitzen.

Die direkte Erweiterung dieser Massbestimmung ist vom Verfasser (V) untersucht worden, indem er die Bogenlänge mit

$$(3.3) \quad s = \int (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}} dt$$

definiert hat. Auf diese Mannigfaltigkeit können wir auch sogleich dieselbe Methode anwenden, denn die Grösse $f = |a_{i(1)j} + a_{j(1)i}|$ ist eine skalare Dichte mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$. Dabei gibt es die drei Fundamentalgrössen: die zwei absoluten Invarianten

$$(3.4) \quad \begin{cases} \varphi = \left\{ f |f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}} \right\}^{\frac{4(n+1)}{n(p-2)}}, \\ N = a_i a_j \Lambda^i \Lambda^j - 2b a_i \Lambda^i + c \end{cases}$$

und der Vektor

$$(3.5) \quad M_i = -a_i a_j \Lambda^j + b a_i.$$

Diese Grössen besitzen auch in den x'^i die Homogenitätseigenschaft.

(1) Diese Determinante $|f_{(1)i(1)j}|$ ist im allgemeinen für $p \neq 3 + \frac{1}{n}$ von Null verschieden.

Die behandelte Parallelübertragung braucht die Voraussetzung, dass die gegebenen Funktionen A_i , B , a_i , b und c die Ableitungen von höherer Ordnung in bezug auf die in ihr enthaltenen Argumenten als solche von Prof. A. KAWAGUCHI (XII) oder vom Verfasser (V) besitzen.

13. Eine Erweiterung. Der Verfasser hat in seiner Arbeit (V) bemerkt, dass er die Parallelübertragungstheorie auf die Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung

$$(3.6) \quad s = \int \left\{ \sum_{\lambda=0}^m a^{m-\lambda} b_{\lambda} \right\}^{\frac{1}{p}} dt$$

erweitern konnte, wobei $a = a_i(x, x')x''^i$ gesetzt ist. Wir wollen jetzt unsere Methode auf die Mannigfaltigkeit, in der die Bogenlänge s durch das Integral (3.6) gegeben wird, anwenden. Zwecks kürzerer Bezeichnung dürfen wir voraussetzen, ohne die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken, dass $m = 3$ ist. In diesem Falle wird das Integral ausdrücklich in der Form⁽¹⁾

$$(3.7) \quad s = \int (a_i a_j a_k x''^i x''^j x''^k + B_{ij} x''^i x''^j + C_i x''^i + D)^{\frac{1}{p}} dt$$

geschrieben, wo wir voraussetzen können, dass B_{ij} in bezug auf i und j symmetrisch ist.

Da die Bogenlänge s bei der Parametertransformation sich nicht verändern soll, müssen a_i , B_{ij} , C_i und D den folgenden Beziehungen genügen:

$$(3.8) \quad a_i x'^i = 0, \quad B_{ij} x'^i = 0, \quad C_i x'^i = 0,$$

$$(3.9) \quad \begin{cases} a_{i(1)j} x'^j = \left(\frac{p}{3} - 2\right) a_i, & B_{ij(1)k} x'^k = (p-4) B_{ij}, \\ C_{i(1)j} x'^j = (p-2) C_i, & D_{(1)j} x'^j = pD, \end{cases}$$

d.h. die Funktionen a_i , B_{ij} , C_i bzw. D sind in den x'^i positiv-homogen von $\left(\frac{p}{3} - 2\right)$ -ter, $(p-4)$ -ter, $(p-2)$ -ter bzw. p -ter Dimension. Nach dem vorhergehenden Abschnitte ergibt sich eine skalare Dichte $f = |a_{i(1)j} + a_{j(1)i}|$ mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$, welche in den x'^i positiv-homogen von $n\left(\frac{p}{3} - 3\right)$ -ter Dimension ist. Somit bekommen wir die absolute Invariante

(1) Sie ist allgemeiner als (3.6) für $m = 3$, denn B_{ij} , C_i und D sind die von a_i unabhängigen Funktionen.

$$(3.10) \quad \varphi = \left\{ f |f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}} \right\}^{\frac{6(n+1)}{n(p-3)}},$$

wenn die Determinante $|f_{(1)i(1)j}|$ nicht identisch verschwindet.⁽¹⁾ Damit haben wir ganz analog wie vorhergehend den Vektor $\mathfrak{B}^i$, die Funktion Λ^i und die Beziehung

$$(3.11) \quad x''^i = -\mathfrak{B}^i - \Lambda^i$$

zwischen den $\mathfrak{B}^i$ und Λ^i . Eine einfache Rechnung lehrt uns, benutzend die Beziehung (3.11), dass

$$(3.12) \quad K_{ij} = -3a_i a_j a_k \Lambda^k + B_{ij}$$

bzw.

$$(3.13) \quad M_i = 3a_i a_j a_k \Lambda^j \Lambda^k - 2B_{ij} \Lambda^j + C_i$$

die Bestimmungszahlen einer symmetrischen Grössen bzw. eines Vektors sind, und dass

$$(3.14) \quad N = -a_i a_j a_k \Lambda^i \Lambda^j \Lambda^k + B_{ij} \Lambda^i \Lambda^j - C_i \Lambda^i + D$$

eine absolute Invariante ist. Diese Grössen hängen nur von x^i und x'^i ab, und haben alle die Homogenitätseigenschaft in bezug auf x'^i , wie man leicht nach (3.9) erkennen kann. Zusammengefasst gibt dies das Ergebnis:

In der betrachteten Mannigfaltigkeit gibt es die vier Fundamentalgrössen φ , K_{ij} , M_i und N ; und mit diesen Grössen wird das Problem, in unserer Mannigfaltigkeit eine Parallelübertragung zu definieren, sogleich ganz analog wie vorhergehend gelöst.

Dieses Verfahren wird ohne Schwierigkeit zu dem allgemeinen Falle erweitert.

14. Verallgemeinerung von der OHKUBOschen Theorie. Im vorigen Jahre hat T. OHKUBO (XIII) die Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung

$$(3.15) \quad s = \int \left\{ A_i(x, x') x''^i + B(x, x', x'') \right\}^{\frac{1}{p}} dt$$

(1) Diese Determinante $|f_{(1)i(1)j}|$ ist im allgemeinen für $p \neq 3\left(3 + \frac{1}{n}\right)$ von Null verschieden.

untersucht. In diesem Falle hängen A_i nicht von x''^i ab. Wenn wir uns aber der affinen Differentialgeometrie in der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit erinnern, so wird es uns klar, dass die metrische Funktion in den x'''^i linear ist und die Koeffizienten von x'''^i allerdings von x'^i und x''^i abhängen. Der Zweck dieses Abschnittes ist diesen Rückstand einzuholen und dabei insbesondere die einfachste Anwendung der oben benutzten Methode zu erklären.

Wir betrachten jetzt eine Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung

$$(3.16) \quad s = \int \left\{ (a_{ij}x''^j + b_i)x'''^i + c \right\}^{\frac{1}{p}} dt ,$$

die aber gerade die Verallgemeinerung von (3.15) ist. Wir schränken uns ein, dass a_{ij} und b_i nur von x^i und x'^i abhängen und c von x^i , x'^i und x''^i . Da die Bogenlänge s bei Parametertransformation sich nicht verändert, müssen die Funktionen a_{ij} , b_i und c den folgenden Beziehungen genügen:

$$(3.17) \quad a_{ij}x'^i = 0, \quad b_i x'^i = 0,$$

$$(3.18) \quad \begin{cases} a_{ij(1)k}x''^k = (p-5)a_{ij}, & b_{i(1)k}x''^k = (p-3)b_i, \\ c_{(1)k}x''^k + 2c_{(2)k}x'''^k = pc, \end{cases}$$

d.h. die Funktionen a_{ij} bzw. b_i sind in den x'^i positiv-homogen von $(p-5)$ -ter bzw. $(p-3)$ -ter Dimension.

Da die Grössen $a_{ij}x''^j + b_i$ die Bestimmungszahlen eines Vektors sind und bei der Parametertransformation das Gewicht $p-3$ haben, so lautet

$$(3.19) \quad a_{ij}x''^j = 0.$$

Einfache Rechnung lehrt uns, dass die Transformationsformeln bei der Koordinatentransformation lautet:

$$(3.20) \quad \begin{cases} \bar{a}_{\alpha\beta} = a_{ij}Q_\alpha^i Q_\beta^j, \\ \bar{b}_\alpha = b_i Q_\alpha^i + a_{ij}Q_\alpha^i Q_{\beta\tau}^j x'^\beta x'^\tau, \\ \bar{c} = c + 3(a_{ij}x''^j + b_i)(3Q_{\alpha\beta}^i x''^\alpha x'^\beta + Q_{\alpha\beta\tau}^i x'^\alpha x'^\beta x'^\tau). \end{cases}$$

Es folgt also, dass a_{ij} und $c_{(2)(2)j(2)k}$ beide die Bestimmungszahlen eines Affinors sind.

a_{ij} besteht im allgemeinen aus den zwei Teilen:

$$(3.21) \quad a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}.$$

Es sind zwei Fälle hervorzuheben, erstens der Fall: der Rang r der Matrix (a_{ij}) ist gleich $n-1$; zweitens der Fall: $r < n-1$. Wir wollen jetzt mit dem ersten Falle beginnen.

Bezeichnet A^{ij} das algebraische Komplement von (a_{ij}) in der Determinante $|a_{ij}|$, so gibt es eine skalare Dichte f mit der Charakteristik $(0, 2, 1)$, da der Rang der Matrix (a_{ij}) $n-1$ ist. Diese f genügt den Beziehungen

$$(3.22) \quad x'^i x'^j f = A^{ij}$$

und hängt offenbar nur von x^i und x'^i ab und ist noch in den x'^i positiv-homogen von $\{(p-5)(n-1)-2\}$ -ter Dimension. Es gibt also eine absolute Invariante

$$(3.23) \quad \varphi = \left\{ f |f_{(1)i(1)j}|^{-\frac{1}{n+1}} \right\}^{\frac{2(n+1)}{(p-5)(n-1)}}$$

unter der Voraussetzung $|f_{(1)i(1)j}| \neq 0$.⁽¹⁾

Auf dieselbe Weise in Kap. II ergibt sich mittels φ ein Vektor

$$(3.24) \quad -\mathfrak{B}^i = x''^i + 2G^i$$

unter der Voraussetzung $|\varphi_{(1)i(1)j}| \neq 0$, wo

$$(3.25) \quad 2G^i = \varphi^{ij}(\varphi_{(1)j(0)k} x'^k - \varphi_{(0)j}), \quad \varphi^{ij} \varphi_{(1)j(1)k} = \delta_k^i.$$

Um das kovariante Differential von der gegebenen Grösse festzulegen, führt man die Grössen C_{ijk} , Γ_{jk}^i und Γ_{jk}^{*i} ganz analog wie in Kap. II ein.⁽²⁾ Somit ergibt sich das kovariante Differential für den willkürlichen Tensor mit dem Gewicht Null bei der Parametertransformation. Z.B. wenn v^i eine kontravariante Vektordichte mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{R}, 2)$ ist, so lässt sich ihr kovariante Differential angeben in der Form

$$(3.26) \quad \delta v^i = dv^i + (\Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j - \mathfrak{R} \Gamma_{ij}^{*l} v^i dx^j.$$

Von den C_{jk}^i und Γ_{jk}^i bestehen dieselben Beziehungen wie (2.31).

Unter der geometrischen Forderung: *das kovariante Differential von φ mit dem Gewicht 2 verschwindet identisch*, ergibt sich für die

(1) Diese Determinante $|f_{(1)i(1)j}|$ ist im allgemeinen für $p \neq 5 + \frac{3}{n-1}$ von Null verschieden.

(2) Siehe (2.27), (2.28) und (2.29).

Grösse mit dem Gewicht h bei der Parametertransformation ihr kovariantes Differential ganz analog wie in Nr. 10, wie folgt:

$$(3.27) \quad \delta^* v^i = dv^i + (\Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j - \Re I_{ij}^{*l} v^i dx^j - \frac{h}{2} v^i d \log \varphi.$$

Da x'^i die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors mit dem Gewicht 1 ist, so folgt aus (3.27) und (2.31) der spezielle Fall

$$(3.28) \quad \varphi^{\frac{1}{2}} \omega^i = \delta^* x'^i = dx'^i + G_{(1)k}^i dx^k - \frac{1}{2} x'^i d \log \varphi.$$

Dann folgt längs der gegebenen Kurve

$$(3.29) \quad \rho^i = \frac{\delta^* x'^i}{dt} = x''^i + 2G^i - \frac{1}{2} x'^i \frac{d}{dt} \log \varphi.$$

Da ρ^i ein kontravarianter Vektor mit dem Gewicht 2 ist, so folgt unter Berücksichtigung von (3.28)

$$(3.30) \quad \varphi \Omega^i = \delta^* \rho^i = dx''^i + \beta_k^i dx^k + \gamma_k^i \omega^k \varphi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x'^i \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log \varphi d \log \varphi - d \frac{d}{dt} \log \varphi \right\} - x''^i d \log \varphi,$$

wo

$$(3.31) \quad \begin{cases} \beta_k^i = 2G_{(0)k}^i + \Gamma_{jk}^i x''^j + 2\Gamma_{jk}^i G^j - 2G_{(1)j}^i G_{(1)k}^j - C_{jl}^i G_{(1)k}^l (x''^j + 2G^j), \\ \gamma_k^i = 2G_{(1)k}^i - \frac{1}{2} \delta_k^i \frac{d}{dt} \log \varphi + C_{jk}^i \rho^j - \rho^i (\log \varphi)_{(1)k}. \end{cases}$$

Es folgt also nach (3.28), (3.30) und (3.27)

$$\begin{aligned} \delta^* v^i &= v_{(0)k}^i dx^k + v_{(1)k}^i dx'^k + v_{(2)k}^i dx''^k + (\Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j \\ &\quad - \Re \Gamma_{lk}^{*l} v^i dx^k - \frac{h}{2} v^i d \log \varphi \\ &= dx^k \nabla_k v^i + \omega^k \overset{1}{\nabla}_k v^i + \Omega^k \overset{2}{\nabla}_k v^i, \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von

$$v_{(1)j}^i x'^j + 2v_{(2)j}^i x''^j = h v^i \quad \text{und} \quad v_{(2)j}^i x'^j = 0,$$

wo

$$(3.32) \quad \begin{cases} \nabla_k v^i = v_{(0)k}^i - v_{(1)j}^i G_{(1)k}^j - v_{(2)j}^i \beta_k^j + \Gamma_{jk}^{*i} v^j - \mathfrak{R} \Gamma_{lk}^{*i} v^l, \\ \nabla_k v^i = \varphi^{\frac{1}{2}} v_{(1)k}^i + A_{jk}^i v^j - \varphi^{\frac{1}{2}} v_{(2)j}^i \gamma_k^j, \\ \nabla_k v^i = \varphi v_{(2)k}^i. \end{cases}$$

Diese sind die sogenannten kovarianten Ableitungen von v^i . Wenn v^i nur von x^i und x'^i abhängt, so hängen auch die kovarianten Ableitungen von demselben ab, und ihre Gestalt fällt mit (2.34) zusammen.

Nach den Definitionsgleichungen (3.25) erhält man hier

$$(3.33) \quad \varphi_{(0)k} - \varphi_{(1)j} G_{(1)k}^j = 0.$$

Die Grösse $a_{ij} x''^j + b_i$ können wir mit Hilfe von (3.29) auf die Form $a_{ij} \rho^j + M_i$ bringen, wobei

$$(3.34) \quad M_i = b_i - 2a_{ij} G^j.$$

Diese M_i , welche nur von x^i und x'^i abhängen, sind die Bestimmungszahlen eines Vektors und in den x'^i positiv-homogen von $(p-3)$ -ter Dimension. Aus (3.30) ergibt sich nach einiger Umrechnung

$$(3.35) \quad x'''^i = \frac{\delta \rho^i}{dt} - \beta_k^i x'^k - \gamma_k^i \rho^k + x''^i \frac{d}{dt} \log \varphi - \frac{1}{2} x'^i \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \log \varphi \right)^2 - \frac{d^2}{dt^2} \log \varphi \right\}.$$

Somit ergibt sich weiter die wichtige Invariante

$$(3.36) \quad N = c - M_i \beta_j^i x'^j - M_i \gamma_j^i (x''^j + 2G^j),$$

ersetzend x'''^i in $(a_{ij} x''^j + b_i) x'''^i + c$. N ist die Funktion von x^i , x'^i und x''^i und hat das Gewicht p bei der Parametertransformation. Dann ist gezeigt:

In dieser Mannigfaltigkeit gibt es die drei Fundamentalgrössen: der Vektor M_i , die absoluten Invarianten φ und N . Benutzend diese Fundamentalgrössen, kann man diese Mannigfaltigkeit charakterisieren.

Bei der Bildung der Ableitung zweiter Ordnung:

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) v^i = \overset{0}{\mathfrak{R}}{}^i{}_{lkj} v^l + \mathfrak{S}^r{}_{kj} \nabla_r v^i + \mathfrak{T}^r{}_{kj} \nabla_r v^i, \\ (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) v^i = \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^i{}_{lkj} v^l - A^l{}_{kj} \nabla_l v^i + \mathfrak{U}^l{}_{kj} \nabla_l v^i + \mathfrak{B}^l{}_{kj} \nabla_l v^i, \\ (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) v^i = \mathfrak{W}^r{}_{kj} \nabla_r v^i, \\ (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) v^j = \mathfrak{R}^i{}_{lkj} v^l + \mathfrak{N}^r{}_{kj} \nabla_r v^i + \mathfrak{Y}^r{}_{kj} \nabla_r v^i, \\ (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) v^i = \mathfrak{Z}^r{}_{kj} \nabla_r v^i, \\ (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) v^i = 0 \end{array} \right.$$

stösst man auf die Krümmungs- und Torsionsgrössen:

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \overset{0}{\mathfrak{R}}{}^i{}_{lkj} &= (\Gamma_{lk(0)j}^{*i} - \Gamma_{lk(1)m}^{*i} G_{(1)j}^m) - (\Gamma_{lj(0)k}^{*i} - \Gamma_{lj(1)m}^{*i} G_{(1)k}^m) \\ &\quad + \Gamma_{mj}^{*i} \Gamma_{lk}^{*m} - \Gamma_{mk}^{*i} \Gamma_{lj}^{*m} - A_{lr}^i \mathfrak{S}^r{}_{kj}, \\ \varphi^{\frac{1}{2}} \mathfrak{S}^r{}_{kj} &= (G_{(1)j(0)k}^r - G_{(1)j(1)m}^r G_{(1)k}^m) - (G_{(1)k(0)j}^r - G_{(1)k(1)m}^r G_{(1)j}^m), \\ \varphi \mathfrak{T}^r{}_{kj} &= (\beta_{j(0)k}^r - \beta_{j(1)m}^r G_{(1)k}^m - \beta_{j(2)m}^r \beta_k^m) \\ &\quad - (\beta_{k(0)j}^r - \beta_{k(1)m}^r G_{(1)j}^m - \beta_{k(2)m}^r \beta_j^m) + \varphi^{\frac{1}{2}} \gamma_l^r \mathfrak{S}^l{}_{kj}, \\ \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^i{}_{lkj} &= \varphi^{\frac{1}{2}} \Gamma_{lk(1)j}^{*i} + A_{mj}^i \Gamma_{lk}^{*m} - \nabla_k A_{lj}^i, \\ \mathfrak{U}^l{}_{kj} &= \Gamma_{kj}^{*l} - G_{(1)k(1)j}^l, \\ \varphi^{\frac{1}{2}} \mathfrak{B}^l{}_{kj} &= \beta_{k(2)m}^l \gamma_j^m - \beta_{k(1)j}^l + \gamma_{j(0)k}^l - \gamma_{j(1)m}^l G_{(1)k}^m - \beta_k^m \gamma_{j(2)m}^l \\ &\quad - G_{(1)k(1)j}^l \gamma_m^l, \\ \mathfrak{W}^r{}_{kj} &= \Gamma_{kj}^{*r} - \beta_{k(2)j}^r, \\ \mathfrak{R}^i{}_{lkj} &= \varphi^{\frac{1}{2}} (A_{lk(1)j}^i - A_{lj(1)k}^i) + A_{mj}^i A_{lk}^m - A_{mk}^i A_{lj}^m, \\ \mathfrak{N}^r{}_{kj} &= (\varphi^{\frac{1}{2}})_{(1)j} \delta_k^r - (\varphi^{\frac{1}{2}})_{(1)k} \delta_j^r, \\ \mathfrak{Y}^r{}_{kj} &= \gamma_{j(1)k}^r - \gamma_{k(1)j}^r + \gamma_j^m \gamma_{k(2)m}^r - \gamma_k^m \gamma_{j(2)m}^r, \\ \mathfrak{Z}^r{}_{kj} &= A_{kj}^r - \varphi^{\frac{1}{2}} \gamma_{k(2)j}^r - 2(\varphi^{\frac{1}{2}})_{(1)k} \delta_j^r. \end{aligned}$$

Wir sind nunmehr in der Lage, den zu Anfang dieses Abschnittes aufgeworfenen zweiten Fall über die Eigenschaft von a_{ij} mit Hilfe der skalaren Dichte f zu untersuchen.

Da der Rang von der Matrix (a_{ij}) kleiner als $n-1$ ist, möchten wir den schief-symmetrischen Teil $a_{[ij]}$ von a_{ij} behandeln. Wir können

wegen der Eigenschaft der Determinante schliessen, dass die algebraischen Komplemente A^i in der Determinante $|a_{[ij]}|$ symmetrisch oder schief-symmetrisch sind, je nachdem n die ungerade Zahl oder die gerade ist. Im letzteren Falle können wir, wie man wegen der Eigenschaft der Determinante leicht ausrechnet, beweisen, dass *die alle A^i identisch verschwinden*. Dann schliessen wir den Fall aus, dass die Dimensionszahl n die gerade ist. Wir müssen auch in der Folge voraussetzen, dass der Rang von der Matrix $(a_{[ij]})$ $n-1$ ist. Demnach gibt es eine skalare Dichte f , ganz analog wie oben erklärt. In diesem Falle können wir in entsprechender Weise die Übertragung angeben.

Am 1. Mai 1937.

Bemerkung bei der Korrektur. 1. Herren J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES haben im vorigen Jahre die Übertragungen in bezug auf Vektordichten untersucht: Über die Festlegung von allgemeinen Massbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 43 (1936), S. 161–176. Wenn wir diese Methode zu unserem Falle in Kap. II und III anwenden, so können wir schliessen, dass wir die Ordnung der Ableitung von der skalare Dichte f etwas erniedern können.

2. Die letzte Zeit hat Herr Prof. A. KAWAGUCHI die intrinseke Übertragung in einer allgemeinen KAWAGUCHISchen Mannigfaltigkeit eingeführt: Theory of connections in a KAWAGUCHI space of order two, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo, Bd. 13 (1937), S. 183–186; Theory of connections in a KAWAGUCHI space of higher order, *ibid.*, S. 237–240. Es ist bemerkenswert, dass die Übertragungsparameter in unserem speziellen Falle vom Linienelemente niedriger als dasselbe in der Theorie der allgemeinen Mannigfaltigkeit abhängen.

Literaturverzeichnis.

- I. L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschrift, Bd. 25 (1926), S. 40–73.
- II. E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, Actualités scient. et industr. Nr. 79, Exposés de géométrie, Publiés de E. Cartan, II.
- III. ———, La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'') dx$, Journal de Mathématiques pures et appliquées, Bd. 15 (1936), S. 42–69.
- IV. H. V. CRAIG, On generalized tangent vectors, American Journal of Mathematics, Bd. 57 (1935), S. 457–462; II, Bd. 58 (1936), S. 833–846.
- V. S. HOKARI, Die Geometrie des Integrals $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c) \frac{1}{p} dt$, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo, Bd. 12 (1936), S. 209–212.
- VI. H. HOMBU, Invariantentheorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''') dx$, ibid, S. 156–158.
- VII. ———, Geometrie des Integrals $\int (Ly''' + M) dx$, ibid, S. 159–161.
- VIII. A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rendiconti di Palermo, Bd. 56 (1932), S. 245–276.
- IX. ———, Some intrinsic derivations in a generalized space. Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo, Bd. 12 (1936), S. 149–151.
- X. ———, Certain identities in a generalized space, ibid, S. 152–155.
- XI. ———, Die Geometrie des Integrals $\int (A_i x''^i + B) \frac{1}{p} dt$, ibid, S. 206–208.
- XII. ———, Geometry in an n -dimensional space with the arc length $s = \int (A_i x''^i + B) \frac{1}{p} dt$, die irgendwo publiziert wird.
- XIII. T. OHKUBO, Base connections in a special KAWAGUCHI space, dieses Journal, Bd. 5 (1937), S. 167–188.
- XIV. J. L. SYNGE, Some intrinsic and derived vectors in a KAWAGUCHI space, American Journal of Mathematics, Bd. 57 (1935), S. 679–691.
- XV. A. L. UNDERHILL, Invariants of the function $F(x, y, x', y')$ in the calculus of variations, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 9 (1908), S. 316–338.