



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	DIVISIONSALGEBREN ÜBER UNENDLICHEN PERFEKTEN KÖRPERN
Author(s)	Schillieg, Otto; Moriya, Mikao
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 6(2-3), 103-111
Issue Date	1937
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55932
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_06_N2-3_103-111.pdf



DIVISIONSALGEBREN ÜBER UNENDLICHEN PERFEKTEN KÖRPERN

Von

Otto SCHILLING, z. Z. in Princeton
und
Mikao MORIYA, in Sapporo

Die vorliegende Note teilt sich in zwei Paragraphen. Im ersten Paragraphen untersuchen wir die Bewertungen einer normalen Divisionsalgebra, deren Koeffizientenkörper ein relativ-perfekter Körper ist. Im zweiten Paragraphen betrachten wir eine perfekte Hülle $\bar{k}$ eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers k und geben die notwendige und hinreichende Bedingung, unter der über $\bar{k}$ normale Divisionsalgebren existieren.

§ 1. Es sei k ein relativ-perfekter Körper⁽¹⁾ und D eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über k ⁽²⁾. Dann heisse eine reelle Funktion ϕ mit folgenden Eigenschaften eine (*Exponenten-*) *Bewertung* von D :

1) Für ein Element $\alpha \neq 0$ aus D ist $\phi(\alpha)$ eine eindeutige reelle Funktion von α . Für 0 setzen wir fest: $\phi(0) = \infty$. Es existiert in D mindestens ein Element α mit $\phi(\alpha) \neq 0, \infty$.

2) Sind α, β Elemente aus D , so gilt

$$\phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) = \phi(\beta\alpha).$$

3) Für zwei Elemente α, β aus D gilt

$$\phi(\alpha + \beta) \geq \text{Min}(\phi(\alpha), \phi(\beta)).$$

Aus 1), 2) und 3) folgen bekannterweise:

i) $\phi(1) = \phi(-1) = 0,$

ii) $\phi(\alpha + \beta) = \text{Min}(\phi(\alpha), \phi(\beta)),$

(1) A. OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Teil I, Math. Zeitschr., Bd. 39 (1935), S. 267–320. Wir benutzen in der vorliegenden Note durchweg Exponentenbewertungen. Man kann aber durch geringe Modifikation alle Sätze in der oben angegebenen OSTROWSKISchen Arbeit auf unseren Fall übertragen.

(2) k ist also das Zentrum von D .

falls $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ ist.

Wenn insbesondere φ die Bewertung φ von k , in bezug auf welche k relativ-perfekt ist, induziert, so heiße φ eine Fortsetzung von φ oder eine fortgesetzte Bewertung von φ .

Wir nehmen jetzt an, dass eine Bewertung φ von D eine Fortsetzung von φ sei, und untersuchen, wie sich φ dabei verhalten soll.

Ein Element α aus D ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

in k . Die Bewertung φ von D induziert offenbar im Körper $k(\alpha)$ eine fortgesetzte Bewertung φ' von φ . Da der Körper k bezüglich φ relativ-perfekt ist, so ist φ' durch φ eindeutig bestimmt⁽¹⁾. Es ist also

$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \frac{1}{m} \varphi(a_m).$$

Bezeichnet man nun mit $F(x)$ das charakteristische Polynom von α , so besteht

$$F(x) = (f(x))^{\frac{n^2}{m}}.$$

Die Norm $N(\alpha)$ von α — das von x freie Glied von $F(x)$ — ist gleich $(-1)^{\frac{n^2}{m}} a_m^{\frac{n^2}{m}}$. Also ist

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{m} \varphi(a_m) = \frac{\varphi(N(\alpha))}{n^2}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Fortsetzung φ von φ durch φ eindeutig bestimmt wird.

Wir ordnen nun umgekehrt einem Element α aus D eine reelle Funktion $\varphi(\alpha) = \frac{\varphi(N(\alpha))}{n^2}$ zu. Dann zeigt sich, dass φ eine Bewertung von D und sogar eine Fortsetzung von φ ist. Nämlich es gilt:

1) Nach Definition ist φ eine eindeutige reelle Funktion von α . Ist besonders α ein Element aus k , so ist

$$N(\alpha) = \alpha^{n^2},$$

woraus $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ folgt. Ferner gibt es in k ein Element α , für welches $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) \neq 0, \infty$ wird.

(1) Vgl. Anm. (1) auf S. 103.

2) Da bekanntlich $N(a\beta) = N(a)N(\beta)$ ist, so gilt

$$\begin{aligned}\varphi(a\beta) &= \frac{1}{n^2} \varphi(N(a\beta)) = \frac{1}{n^2} (N(a)) + \frac{1}{n^2} \varphi(N(\beta)) \\ &= \varphi(a) + \varphi(\beta) = \varphi(\beta a).\end{aligned}$$

3) $\varphi(a + \beta) \geq \min(\varphi(a), \varphi(\beta))$.

Wenn mindestens eines von a und β Null ist, so gilt offenbar diese Ungleichung. Wir nehmen also jetzt an, dass $a\beta \neq 0$ und $\varphi(a) \geq \varphi(\beta)$ ist. Aus Voraussetzung folgt $\varphi(a\beta^{-1}) \geq 0$; $a\beta^{-1}$ ist daher eine Nullstelle des Minimalpolynoms $f(x) = x^m + \dots + a_m$ in k . Dabei sind die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_m$ sämtlich ganze Elemente aus k . Setzt man nun $x = y - 1$ in $f(x)$ ein, so erhält man ein irreduzibles Polynom von y in k , welches das Minimalpolynom von $a\beta^{-1} + 1$ ist. Also ist

$$\varphi(a\beta^{-1} + 1) = \frac{1}{m} \varphi(a_m - a_{m-1} + \dots + (-1)^m) \geq 0,$$

weil $\varphi(a_m), \varphi(a_{m-1}), \dots, \varphi((-1)^m) \geq 0$ sind. Da offenbar

$$\varphi(a + \beta) = \varphi(a\beta^{-1} + 1) + \varphi(\beta) \geq \varphi(\beta)$$

ist, so gilt

$$\varphi(a + \beta) \geq \min(\varphi(a), \varphi(\beta)), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Damit ist gezeigt, dass φ eine fortgesetzte Bewertung von φ ist.

Satz 1. *Es sei k ein relativ-perfekter Körper in bezug auf eine Bewertung φ und D eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über k . Dann existiert in D stets eine einzige fortgesetzte Bewertung Φ von φ derart, dass für ein beliebiges Element a aus D*

$$\Phi(a) = \frac{1}{n^2} \varphi(N(a))$$

wird, wobei $N(a)$ die Norm von a bedeutet.

Ebenso wie in einem bewerteten (kommutativen) Körper können wir in D konvergente Folgen, Fundamentalfolgen, u.s.w. (in bezug auf die fortgesetzte Bewertung Φ von φ) einführen. Die bezüglich Φ perfekte Hülle von D nennen wir die *derivierte Divisionsalgebra* von D .⁽¹⁾ Offenbar enthält die derivierte Divisionsalgebra von D stets den derivierten Körper $\bar{k}$ von k (in bezug auf φ) und D selbst.

(1) Diese perfekte Hülle von D erhält man dadurch, dass man zu D Grenzelemente aller Fundamentalfolgen aus D adjungiert.

Nun beweisen wir folgenden

Satz 2. *Es sei $\bar{k}$ ein (absolut-) perfekter Körper in bezug auf eine Bewertung φ . Dann ist eine Divisionsalgebra $\bar{D}$ von endlichem Grade über $\bar{k}$ hinsichtlich einer fortgesetzten Bewertung von φ perfekt.*

Beweis. Da $\bar{k}$ perfekt ist, so ist es natürlich relativ-perfekt in bezug auf φ . Nach Satz 1 existiert in $\bar{D}$ eine einzige Fortsetzung Φ von φ . Wir nennen im folgenden die Elemente α mit $\Phi(\alpha) \geq 0$ kurz „ganz in $\bar{D}$ “. Die Spur $S(\alpha)$ eines ganzen Elementes α aus $\bar{D}$ besitzt stets nicht-negative Bewertung, weil das Minimalpolynom von α in $\bar{k}$ ganze Koeffizienten besitzt: $\varphi(S(\alpha)) \geq 0$.

Im Körper $\bar{k}$ gibt es stets ein Element α mit $\varphi(\alpha) \neq 0, \infty$. Wir können also ohne Beschädigung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varphi(\alpha) > 0$ ist. Multipliziert man nun eine Basis von $\bar{D}$ über $\bar{k}$ mit einer geeigneten Potenz von α , so erhält man eine Basis $\omega_1, \dots, \omega_{n^2}$ von $\bar{D}$ über $\bar{k}$, welche aus lauter ganzen Elementen aus $\bar{D}$ besteht. Ist $\alpha = c_1 \omega_1 + \dots + c_{n^2} \omega_{n^2}$ die Darstellung eines ganzen Elementes α durch $\omega_1, \dots, \omega_{n^2}$, so erhält man ohne weiteres

$$S(\alpha \omega_i) = c_1 S(\omega_1 \omega_i) + \dots + c_{n^2} S(\omega_{n^2} \omega_i) \\ (i = 1, \dots, n^2),$$

worin die c_j Elemente aus $\bar{k}$ bedeuten. Da $\bar{D}$ eine einfache Algebra ist, so ist bekanntlich $|S(\omega_k \omega_l)| \neq 0$. Es folgt also

$$c_i = \frac{\Delta_i}{|S(\omega_k \omega_l)|} \quad (i = 1, \dots, n^2),$$

wobei Δ_i diejenige Determinante bezeichnet, welche aus $|S(\omega_k \omega_l)|$ durch Ersetzung der i -ten Spalte durch $S(\alpha \omega_1), \dots, S(\alpha \omega_{n^2})$ entsteht. Weil die Δ_i ganze Elemente aus $\bar{k}$ sind, so sind die Bewertungen von den c_i nach unten beschränkt. Hieraus schliesst man ohne Schwierigkeit, dass für $\varphi(\alpha) \rightarrow \infty$ die Bewertungen von $\varphi(c_1), \varphi(c_2), \dots, \varphi(c_{n^2})$ über alle Grenzen hinaus wachsen müssen. Weiter schliesst man, dass eine Fundamentalfolge aus $\bar{D}$ stets in $\bar{D}$ ihr Grenzelement besitzt. Also ist $\bar{D}$ perfekt in bezug auf Φ , w.z.b.w.

Es sei D wieder eine normale Divisionsalgebra von endlichem Grade über einem relativ-perfekten Körper k und Φ die Fortsetzung der Bewertung φ von k . Ferner bedeute $\bar{D}$ die derivierte Divisionsalgebra von D in bezug auf Φ . Dann gilt, wie schon bemerkt,

$$D \times \bar{k} \subseteq \bar{D},$$

wobei $\bar{k}$ den derivierten Körper von k (in bezug auf φ) bedeutet. Offenbar ist $D \times \bar{k}$ als eine Teilalgebra der Divisionsalgebra $\bar{D}$ auch eine Divisionsalgebra, deren Koeffizientenkörper $\bar{k}$ ist. Nach Satz 2 ist aber $D \times \bar{k}$ perfekt in bezug auf φ , weil φ die einzige fortgesetzte Bewertung von φ in $D \times \bar{k}$ ist. Da aber $\bar{D}$ die derivierte Divisionsalgebra in bezug auf φ ist, so gilt

$$\bar{D} \subseteq D \times \bar{k}.$$

Aus dem vorher Bemerkten folgt also

$$\bar{D} = D \times \bar{k}.$$

Satz 3. *Es sei D eine normale Divisionsalgebra von endlichem Grade über einem relativ-perfekten Körper k und φ die fortgesetzte Bewertung der Bewertung φ von k . Ferner sei $\bar{k}$ der derivierte Körper von k in bezug auf φ . Dann erhält man die derivierte Divisionsalgebra $\bar{D}$ von D in bezug auf φ , indem man den Koeffizientenkörper von D zu $\bar{k}$ erweitert: $\bar{D} = D \times \bar{k}$.*

Aus Satz 3 folgt ohne weiteres

Zusatz. Der Grad von $\bar{D} = D \times \bar{k}$ über $\bar{k}$ ist gleich dem von D über k .

§ 2. Es sei $k_0 < k_1 < \dots < k_i < \dots$ eine Folge von algebraischen Zahlkörpern endlichen Grades, worin k_0 den rationalen Zahlkörper bedeutet. Dann definiert diese Folge einen einzigen Vereinigungskörper k von unendlichem Grade. Wir greifen jetzt aus k ein Primideal $\mathfrak{p}$ heraus und bilden die Durchschnitte $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{p}$ mit den Körpern k_i : $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \cap k_i$. Bekanntlich wird dabei $\mathfrak{p}_i$ das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal in k_i . Wir bezeichnen ferner mit φ eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung⁽¹⁾ und bilden die bezüglich φ perfekte Hülle $\bar{k}$ von k — den derivierten Körper von k in bezug auf φ —. Dann enthält $\bar{k}$ den Körper $\mathfrak{f}$, welcher als der Vereinigungskörper von $\bar{k}_0, \dots, \bar{k}_i, \dots$ definiert ist, wobei $\bar{k}_i$ den $\mathfrak{p}_i$ -adischen Zahlkörper von k_i bedeutet. Den Körper $\mathfrak{f}$, welcher durch $\bar{k}$ eindeutig bestimmt wird⁽²⁾, nennen wir kurz den Hilfskörper von $\bar{k}$. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{f}$ in bezug auf φ relativ-perfekt ist. Nämlich $\mathfrak{f}$ ist offenbar nach φ bewertet. Ist nun in einem Polynom

(1) M. MORIYA, Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, Journ. Fac. Science, Hokkaido Imp. Univ., Bd. III (1935), S. 107–169. Wir zitieren diese Arbeit mit M. 1.

(2) M. MORIYA, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, Journ. Fac. Science, Hokkaido Imp. Univ., Bd. V (1936), S. 9–66. Wir zitieren diese Arbeit mit M. 2.

$$f(x) = a_0x^n + \dots + a_ix^{n-i} + \dots + a_n$$

mit ganzen Koeffizienten aus $\mathfrak{f}$ ein Koeffizient a_i ($n > i > 0$) eine Einheit, aber mindestens eines von a_0 und a_n keine Einheit, so ist $f(x)$ in $\bar{k}$ reduzibel⁽¹⁾. Da aber $f(x)$ in $\bar{k}$ reduzibel ist, so muss $f(x)$ bereits in $\mathfrak{f}$ reduzibel sein⁽²⁾. Also ist $\mathfrak{f}$ relativ-perfekt in bezug auf φ .

Ist nun $\bar{K}$ ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über $\bar{k}$, so ist $\bar{K}$ perfekt in bezug auf die fortgesetzte Bewertung von φ , welche wir auch schlechthin mit φ bezeichnen wollen. Ferner gilt folgender

Satz 4.⁽³⁾ *In $\bar{K}$ existiert der Hilfskörper $\mathfrak{R}$ von $\bar{K}$ derart, dass $\bar{K} = \mathfrak{R} \bar{k}$ ist, und es besteht die Gradrelation*

$$[\bar{K} : \bar{k}] = [\mathfrak{R} : \mathfrak{f}].$$

Ist besonders $\bar{K}$ über $\bar{k}$ galoissch, so ist $\mathfrak{R}$ auch über $\mathfrak{f}$ galoissch, und die galoissche Gruppe von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{f}$ ist isomorph zu der von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$.

Wie wir schon in Satz 3 gesehen haben, erhalten wir aus einer normalen Divisionsalgebra D vom Grade n über $\mathfrak{f}$ stets eine normale Divisionsalgebra $\bar{D}$ vom Grade n über $\bar{k}$, indem man die Algebra $D \times \bar{k}$ bildet. Im folgenden Satz 5 beweisen wir aber die Umkehrung von Satz 3:

Satz 5. *Es sei $\bar{D}$ eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über $\bar{k}$. Dann entsteht $\bar{D}$ aus einer normalen Divisionsalgebra D vom Grade n über $\mathfrak{f}$ durch Erweiterung des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{f}$ zu $\bar{k}$.*

Beweis. Es existiert bekanntlich ein galoisscher Zerfällungskörper $\bar{K}$ (über $\bar{k}$) von $\bar{D}$. Es wird also $\bar{D}$ ähnlich zu einem verschränkten Produkte $(\bar{\alpha}, \bar{K})$. Nach einem Satz von R. BRAUER und SHODA⁽⁴⁾ gibt es eine über $\bar{k}$ galoissche Erweiterung $\bar{K}'$ von $\bar{K}$, so dass

$$(\bar{\alpha}, \bar{K}) \sim (\bar{\alpha}'_{S,T}, \bar{K}')$$

wird, wobei das Faktorensystem $\bar{\alpha}'_{S,T}$ aus Einheitswurzeln besteht (S, T sind Elemente der galoisschen Gruppe von $\bar{K}'$ nach $\bar{k}$). Dann wird

$$\bar{D} \sim (\bar{\alpha}'_{S,T}, \bar{K}').$$

Die Einheitswurzeln $\bar{\alpha}'_{S,T}$ aus $\bar{K}'$ gehören aber zum Hilfskörper $\mathfrak{R}'$ von $\bar{K}'$, weil sie über $\bar{k}_0$ algebraisch sind⁽⁵⁾. Ferner können wir die S, T

(1) Siehe etwa M. 1, S. 123.

(2) Siehe etwa M. 1, S. 151-153.

(3) M. 2, S. 20.

(4) Siehe etwa DEURING, Algebren, Berlin (1935), S. 67.

(5) M. 2, S. 13.

als Elemente der galoisschen Gruppe von $\mathfrak{R}'$ nach $\mathfrak{f}$ annehmen.⁽¹⁾ Wir können also das verschränkte Produkt

$$(\bar{\alpha}'_{S,T}, \mathfrak{R}') = A$$

bilden. Da aber nach Satz 4 $\mathfrak{R}'\bar{k} = \bar{K}'$ und $[\mathfrak{R}' : \mathfrak{f}] = [\bar{K}' : \bar{k}]$ ist, so ist die Erweiterungsalgebra $A \times \bar{k}$ über $\bar{k}$ einfach und vom Grade $[A : \mathfrak{f}]$. Es ist also

$$A \times \bar{k} \times (\bar{\alpha}'_{S,T}, \bar{K}')^{-1} \sim (1, \bar{K}');$$

nach der Theorie der R. BRAUERSchen Algebrenklassengruppe ist

$$A \times \bar{k} \sim (\bar{\alpha}'_{S,T}, \bar{K}') \sim \bar{D}.$$

Bezeichnet man jetzt mit D eine zu A ähnliche Divisionsalgebra über $\mathfrak{f}$, so ist $D \times \bar{k}$ nach Satz 3 eine normale Divisionsalgebra über $\bar{k}$, und es gilt

$$D \times \bar{k} \sim A \times \bar{k} \sim \bar{D}.$$

Hieraus folgt ohne weiteres (bis auf Transformation)

$$D \times \bar{k} = \bar{D}.$$

Offenbar ist dabei D über $\mathfrak{f}$ vom Grade n .

Satz 6. Jede normale Divisionsalgebra $\bar{D}$ über $\bar{k}$ ist eine zyklische Algebra über $\bar{k}$.

Beweis. Wir bestimmen für $\bar{D}$ eine normale Divisionsalgebra D über $\mathfrak{f}$ derart, dass

$$D \times \bar{k} = \bar{D}$$

wird. Dabei wird D eine zyklische Algebra über $\mathfrak{f}^{(2)} : D = (\alpha, \mathfrak{Z}, S)$, wobei $\mathfrak{Z}$ ein zyklischer Körper über $\mathfrak{f}$ ist und S ein erzeugendes Element der galoisschen Gruppe von $\mathfrak{Z}$ nach $\mathfrak{f}$ bezeichnet. Bildet man nun $D \times \bar{k}$, so wird

$$\bar{D} = D \times \bar{k} \sim (\alpha, \mathfrak{Z}\bar{k}, S),$$

(1) Genauer gesagt, induziert jeder Automorphismus von $\bar{K}'$ über $\bar{k}$ einen einzigen Automorphismus von $\mathfrak{R}'$ über $\mathfrak{f}$. Da aber nach Satz 4 die galoissehe Gruppe von $\bar{K}'$ nach $\bar{k}$ zu der von $\mathfrak{R}'$ nach $\mathfrak{f}$ isomorph ist, so bezeichnen wir der Kürze wegen mit S, T auch diejenigen Elemente der galoisschen Gruppe von $\mathfrak{R}'$ nach $\mathfrak{f}$, die durch S, T induziert werden.

(2) M. MORIYA und O. SCHILLING, Zur Klassenkörpertheorie über unendlichen perfekten Körpern, Journ. Fac. Science, Hokkaido Imp. Univ., Bd. V (1937), S. 199. Wir zitieren diese Arbeit mit M—O.

wobei $\mathfrak{Z}\bar{k} = \bar{Z}$ nach Satz 4 über $\bar{k}$ zyklisch und $[\bar{Z}:\bar{k}] = [\mathfrak{Z}:\mathfrak{f}]$ ist. Da aber

$$[\bar{D}:\bar{k}] = [D:\mathfrak{f}] = [(\alpha, \mathfrak{Z}, S):\mathfrak{f}] = [(\alpha, \bar{Z}, S):\bar{k}]$$

ist, so folgt ohne weiteres

$$\bar{D} = (\alpha, \bar{Z}, S).$$

Satz 7. Die Algebrenklassengruppe über $\bar{k}$ ist isomorph zu der über $\mathfrak{f}$.

Beweis. Ist eine normale Divisionsalgebra $\bar{D}$ der (bis auf Transformation eindeutig bestimmte) Repräsentant einer Algebrenklasse $\bar{A}$ über $\bar{k}$, so existiert nach Satz 5 über $\mathfrak{f}$ eine normale Divisionsalgebra D , so dass

$$\bar{D} = D \times \bar{k}$$

wird. Die durch D repräsentierte Algebrenklasse über $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir mit A , und ordnen $\bar{A}$ die oben bestimmte Algebrenklasse A zu: $\bar{A} \rightarrow A$.

Ist nun $\bar{A} \vdash \bar{k}$, so ist auch $\bar{D} \vdash \bar{k}$, wobei $\bar{D}$ eine normale Divisionsalgebra bedeutet, welche der Repräsentant von $\bar{A}$ ist. Ist D eine normale Divisionsalgebra über $\mathfrak{f}$ derart, dass $\bar{D} = D \times \bar{k}$ wird, so ist offenbar

$$D \vdash \mathfrak{f},$$

weil sonst $\bar{D} \sim \bar{k}$ sein müsste. Es folgt also aus $\bar{A} \rightarrow A$ und $\bar{A} \vdash \bar{k}$, dass auch

$$A \vdash \mathfrak{f}$$

ist. Man kann aber umgekehrt leicht zeigen, dass aus $\bar{A} \rightarrow A$ und $A \vdash \mathfrak{f}$

$$\bar{A} \vdash \bar{k}$$

folgt. Damit ist gezeigt, dass die Zuordnung $\bar{A} \rightarrow A$ eineindeutig ist. Ferner kann man auch ohne Schwierigkeit zeigen, dass aus $\bar{A}_1 \rightarrow A_1$ und $\bar{A}_2 \rightarrow A_2$

$$\bar{A}_1 \bar{A}_2 \rightarrow A_1 A_2$$

folgt, w.z.b.w.

Nach Satz 7 beweist man folgenden Satz⁽¹⁾:

Satz 8. Die Algebrenklassengruppe über $\bar{k}$ ist isomorph zur Additionsgruppe aller Brüche mod 1, deren Nenner zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{f}$ prim sind.

(1) M—O, Satz 9.

Wir beweisen noch

Satz 9. *Zu einer natürlichen Zahl n existieren dann und nur dann Divisionsalgebren vom Index (Grade) n über $\bar{k}$, wenn n zum unendlichen Bestandteile N^* von $\mathfrak{f}$ prim ist.*

Beweis. Ist $\bar{D}$ eine normale Divisionsalgebra vom Index n über $\bar{k}$, so existiert nach Satz 5 über $\mathfrak{f}$ eine normale Divisionsalgebra vom Index n derart, dass

$$\bar{D} = D \times \bar{k}$$

wird. Dabei muss der Index n von D unbedingt zu N^* prim sein.⁽¹⁾

Ist aber umgekehrt eine natürliche Zahl n zu N^* prim, so existiert stets eine normale Divisionsalgebra D vom Index n über $\mathfrak{f}$ ⁽²⁾. Nach Satz 3 ist $\bar{D} = D \times \bar{k}$ eine normale Divisionsalgebra vom Index n über $\bar{k}$.

Da zu einer zu N^* primen natürlichen Zahl n genau $\varphi(n)$ Typen von Divisionsalgebren vom Index n über $\mathfrak{f}$ existieren⁽³⁾, so folgt aus den Sätzen 4 und 7

Zusatz. Ist n zu N^* prim, so existieren genau $\varphi(n)$ Typen von Divisionsalgebren $\bar{D}$ vom Index n über $\bar{k}$. Die Klassengruppe der Algebren vom Index $\tilde{n} | n$ ist zyklisch von der Ordnung n .

Satz 10. *Die Normenklassengruppe eines zyklischen Körpers $\bar{Z}$ vom Grade n über $\bar{k}$ ist dann und nur dann zyklisch von der Ordnung n , wenn n zu N^* prim ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}$ den Hilfskörper von $\bar{Z}$. Dann ist nach Satz 4 $[\bar{Z} : \bar{k}] = [\mathfrak{Z} : \mathfrak{f}]$ und $\mathfrak{Z}$ über $\mathfrak{f}$ zyklisch. Nach Satz 7 kann man einer von $\bar{Z}$ zerfallten Algebra über $\bar{k}$ eindeutig eine von $\mathfrak{Z}$ zerfallte Algebra über $\mathfrak{f}$ zuordnen und umgekehrt. Da die von $\mathfrak{Z}$ zerfallte Algebrenklassengruppe dann und nur dann zyklisch von der Ordnung n ist, wenn n zu N^* prim ist, so ist es auch die von $\bar{Z}$ zerfallte Algebrenklassengruppe. Man kann also dann und nur dann für eine natürliche Zahl n eine zyklische Algebra vom Exponenten⁽⁴⁾ n über $\bar{k}$ bilden, wenn n zu N^* prim ist. Aus Existenz einer zyklischen Algebra vom Exponenten n schliesst man leicht, dass die Normenklassengruppe von $\bar{Z}$ nach $\bar{k}$ zyklisch von der Ordnung n ist.

(1) M—O, Satz 2.

(2) M—O, Satz 3.

(3) M—O, Satz 4.

(4) Der *Exponent* einer normalen einfachen Algebra über $\bar{k}$ ist gleich ihrem *Index*, weil dies bei allen normalen einfachen Algebren über $\mathfrak{f}$ zutrifft. Vgl. M—O, Satz 4.