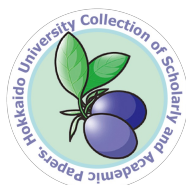




# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |                                                                                                     |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | DIE GEOMETRIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIAL GLEICHUNGEN DRITTER ORDNUNG                               |
| Author(s)        | Ohkubo, Takeo                                                                                       |
| Citation         | Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 6(2-3), 113-124 |
| Issue Date       | 1937                                                                                                |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/55933">https://hdl.handle.net/2115/55933</a>                   |
| Type             | departmental bulletin paper                                                                         |
| File Information | JFSHIU_06_N2-3_113-124.pdf                                                                          |



# DIE GEOMETRIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN DRITTER ORDNUNG

Von

Takeo OHKUBO

**Einleitung.** Die Geometrie der "paths" ist von der Schule von Princeton entwickelt und von J. DOUGLAS<sup>(1)</sup>, W. ŚLEBODZIŃSKI<sup>(2)</sup>, D. D. KOSAMBI<sup>(3)</sup> usw. in den Fällen der Systeme der Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + H^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right) = 0, \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i\left(t, x^j, \frac{dx^j}{dt}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{d^{\sigma+1} x^i}{dt^{\sigma+1}} + \alpha^i\left(t, x^j, \frac{dx^j}{dt}, \dots, \frac{d^\sigma x^j}{dt^\sigma}\right) = 0$$

erweitert worden.

Neuerdings hat E. BORTOLOTTI<sup>(4)</sup> die geometrische Theorie des Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = H_{\alpha\beta}^i(u^\gamma, x^j, p_\gamma^l), \quad p_\gamma^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\gamma},$$

$$(i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, K; K \leq n)$$

untersucht, die intrinsek genannt wird, indem man die Gruppen aller Koordinaten- und Parametertransformationen

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^1, u^2, \dots, u^K)$$

zugrundelegt.

(1) J. DOUGLAS, The general geometry of paths, *Annals of Math.*, 29 (1927), S. 143-168.

(2) W. ŚLEBODZIŃSKI, Sur deux connections affines généralisées, *Prace Matematyczne-Fizyczne*, 43 (1936), S. 167-205.

(3) D. D. KOSAMBI, Path-spaces of higher order, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford series, 7 (1936), S. 97-105.

(4) E. BORTOLOTTI, Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. I. Preliminari, *Rend. Lincei*, 23 (1936), S. 16-21; II. Le proprietà intrinseche del sistema, *ibid.*, S. 104-110; III. Altri operatori differenziali intrinseci. Le Proprietà descrittive del sistema, *ibid.*, S. 175-180.

Die Herren Prof. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU<sup>(1)</sup> haben auch die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen

$$p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^i + H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^i(u^\beta, x^j, p_\beta^j, \dots, p_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}}^j) = 0$$

gegenüber der Koordinatentransformationen entwickelt, wobei man setzt

$$p_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \dots, p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^i = \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \dots \partial u^{\alpha_m}}.$$

Diese Theorie ist aber meistens affin.

In der vorliegenden Abhandlung möchte ich die intrinsike Theorie des Systems der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$T_{\alpha\beta\gamma}^i \equiv p_{\alpha\beta\gamma}^i + B_{jk}^{i\gamma} p_{(\alpha\beta}^j p_{\gamma)}^k + C_{j\alpha\beta\gamma}^{i\lambda\mu} p_{\lambda\mu}^j + D_{\alpha\beta\gamma}^i = 0$$

entwickeln, indem man die Gruppe aller Koordinaten- und Parametertransformationen zugrundelegt. In §1 und §2 wird die Parallelübertragung in der allgemeinen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$  mit den Elementen  $(u^\alpha, x^i, p_\alpha^i, p_{\alpha\beta}^i)$  bestimmt, und dann werden die Grundübertragungen aufgestellt. In §3 werden die kovarianten Ableitungen, Krümmungs- und Torsionstensoren berechnet.

**1. Parallelübertragung.** Das System der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$(1.1) \quad T_{\alpha\beta\gamma}^i \equiv p_{\alpha\beta\gamma}^i + B_{jk}^{i\gamma}(u^\rho, x^l, p_\rho^l) p_{(\alpha\beta}^j p_{\gamma)}^k + C_{j\alpha\beta\gamma}^{i\lambda\mu}(u^\rho, x^l, p_\rho^l) p_{\lambda\mu}^j + D_{\alpha\beta\gamma}^i(u^\rho, x^l, p_\rho^l) = 0$$

$$(i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, K; K \leq n)$$

sei gegeben, und die Grössen  $B_{jk}^{i\gamma}(u^\rho, x^l, p_\rho^l)$ ,  $C_{j\alpha\beta\gamma}^{i\lambda\mu}(u^\rho, x^l, p_\rho^l)$  und  $D_{\alpha\beta\gamma}^i(u^\rho, x^l, p_\rho^l)$  die hinreichend vielmal kontinuierlich differenzierbaren Funktionen sind. Ausserdem setzen wir der Kürze halber voraus, dass  $B_{jk}^{i\gamma}$ ,  $C_{j\alpha\beta\gamma}^{i\lambda\mu}$  bzw.  $D_{\alpha\beta\gamma}^i$  bezüglich  $j, k$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\lambda, \mu$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  symmetrisch sind. Das System (1.1) ist eine unmittelbare Verallgemeinerung des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen der "paths":

---

(1) A. KAWAGUCHI und H. HOMBU, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, dieses Journal, 6 (1937), S. 21-62.

$$x'''^i + B_{jk}^i(t, x, x')x''^j x''^k + C_j^i(t, x, x')x''^j + D^i(t, x, x') = 0.$$

Die Grössen  $T_{\alpha\beta\tau}^i$  sollen Vektoreigenschaft in bezug auf die lateinischen Indizes unter der Koordinatentransformation haben, und bei der Parametertransformation transformieren die Grössen sich folgendermassen:

$$(1.2) \quad T_{\alpha\beta\tau}^i = T_{\lambda'\mu'\nu'}^i U_{\alpha}^{\lambda'} U_{\beta}^{\mu'} U_{\tau}^{\nu'},$$

wo

$$\begin{aligned} u^{\alpha'} &= u^{\alpha'}(u^1, u^2, \dots, u^K), & u^{\alpha} &= u^{\alpha}(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{K'}), \\ U_{\alpha}^{\lambda'} &= \frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^{\alpha}}, & U_{\alpha\beta}^{\lambda'} &= \frac{\partial^2 u^{\lambda'}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}}, & U_{\alpha\beta\tau}^{\lambda'} &= \frac{\partial^3 u^{\lambda'}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta} \partial u^{\tau}}, \\ U_{\lambda'}^{\alpha} &= \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\lambda'}}, & U_{\lambda'\mu'}^{\alpha} &= \frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial u^{\lambda'} \partial u^{\mu'}}, & U_{\lambda'\mu'\nu'}^{\alpha} &= \frac{\partial^3 u^{\alpha}}{\partial u^{\lambda'} \partial u^{\mu'} \partial u^{\nu'}}. \end{aligned}$$

Wir wenden den KAWAGUCHISchen Satz<sup>(1)</sup> auf das System (1.1) an und gewinnen damit einen Vektor:

$$\begin{aligned} (1.3) \quad & 3 T_{\alpha\beta\tau}^i (\lambda\mu\nu)_{,j} dp_{\nu}^j + T_{\alpha\beta\tau}^i (\lambda\mu)_{,j} dx^j \\ &= 3 \delta_{\alpha}^{(\lambda} \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu)} dp_{\nu}^i + \left\{ B_{jk}^{i\nu} \delta_{\alpha}^{(\lambda} \delta_{\beta}^{\mu)} p_{\tau\nu}^k + B_{jk}^{i\nu} p_{\alpha\beta}^k \delta_{\tau}^{(\lambda} \delta_{\nu}^{\mu)} + C_{j\alpha\beta\tau}^{i\lambda\mu} \right\} dx^j, \end{aligned}$$

wo man setzt

$$T_{\alpha\beta\tau}^i (\lambda\mu\nu)_{,j} = \frac{\partial T_{\alpha\beta\tau}^i}{\partial p_{\lambda\mu\nu}^j}, \quad \text{usw.}^{(2)}$$

Überschiebend nach  $\lambda$ ,  $\alpha$  und  $\mu$ ,  $\beta$  in dem Systeme der PFAFFschen Ausdrücke (1.3), stellen wir ein System der Differentialausdrücke heraus:

$$(1.4) \quad \delta p_{\tau}^i = dp_{\tau}^i + \left\{ \frac{K+3}{3(K+1)} B_{jk}^{i\nu} p_{\tau\nu}^k + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{j\tau}^{i\lambda\mu} \right\} dx^j,$$

wo

$$C_{j\tau}^{i\lambda\mu} = C_{j\lambda\mu\tau}^{i\lambda\mu}.$$

Offenbar transformieren sich die Ausdrücke (1.4) bei der Koordinatentransformation wie die Bestimmungszahlen eines Vektors.

(1) A. KAWAGUCHI und H. HOMBU, a.a. O., S. 28.

(2) A. KAWAGUCHI und H. HOMBU, a.a. O., S. 26.

Man betrachtet, dass in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$  mit den Elementen  $(u^\alpha, x^i, p_\tau^i, p_{\alpha\beta}^i)$  ein System (1.1) der Differentialgleichungen der verallgemeinerten "paths" gegeben sei. So können wir eine Übertragung von Vektor  $v^i$  in  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$  definieren. D.h. wir haben den

**Satz.** Ein Vektor  $v^i$  sei in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$  gegeben. So sind

$$(1.5) \quad \delta v^i = dv^i + \frac{K+3}{3K} B_{jk}^{i\nu} v^j dp_\nu^k + \frac{1}{K} \left\{ \frac{K+3}{3(K+1)} B_{jk}^{i\nu} p_{\nu\delta}^k \right. \\ \left. + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{j\nu}^{i, \gamma} \right\} v^j dx^h$$

die Bestimmungszahlen eines Vektors.

**Beweis.** Wegen (1.4) ändern sich die Grössen  $B_{jk}^{i\nu}$  und  $C_{j\alpha}^i$  bei der Koordinatentransformation  $x^i \rightarrow x^{i'}$  folgendermassen:

$$(1.6) \quad B_{jk}^{i\nu} X_{j'}^j X_{k'}^k = B_{j'm'}^{i'\nu} X_{j'}^{i'},$$

$$(1.7) \quad X_{j'h'}^i p_{\tau'}^{j'} + \frac{K+3}{3(K+1)} B_{jk}^{i\nu} X_{j'h'}^k p_{\tau'}^{j'} p_{\nu}^{k'} X_{h'}^j + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{j\tau}^i X_{h'}^j \\ = \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{h'\tau}^{i'} X_{k'}^{i'},$$

wo

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}),$$

$$X_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}, \quad X_{j'h'}^{i'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{h'}}, \quad X_{j'h'l'}^{i'} = \frac{\partial^3 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{h'} \partial x^{l'}},$$

$$X_h^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}, \quad X_{hk}^{i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^h \partial x^k}, \quad X_{hkl}^{i'} = \frac{\partial^3 x^{i'}}{\partial x^h \partial x^k \partial x^l}.$$

Man differenziert beide Seiten von (1.7) nach  $p_{\tau'}^{j'}$ , so ergibt sich

$$(1.8) \quad X_{l'h'}^i \delta_{\tau'}^j + \frac{K+3}{3(K+1)} B_{jk}^{i\nu} X_{l'h'}^j X_{j'h'}^k p_{\tau'}^{j'} p_{\nu}^{k'} X_{h'}^j \\ + \frac{2(K+3)}{3(K+1)} B_{jk}^{i\nu} X_{l'h'}^k p_{\nu}^{k'} \delta_{\tau'}^j X_{h'}^j + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{h'\tau}^{i'} X_{l'h'}^j X_{h'}^k \\ = \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{h'\tau}^{i'} X_{j'}^{i'}.$$

Aus den Gleichungen (1.8) ergibt sich durch Überschiebung nach  $\rho, \gamma$

$$(1.9) \quad KX_{l'h'}^i + \frac{K+3}{3(K+1)} B_{jk,l}^{i\nu} p_{\tau}^{j'} p_{\nu}^{k'} X_{l'}^j X_{j'k'}^k X_{h'}^j \\ + \frac{2(K+3)}{3} B_{jk}^{i\nu} X_{l'k'}^k X_{h'}^j p_{\nu}^{k'} + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{k\tau,l}^i X_{l'}^j X_{h'}^k \\ = \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{h'\tau,l'}^{j'} X_{j'}^i .$$

Da  $v^i$  und  $p_{\tau}^i$  die Bestimmungszahlen von Vektoren sind, erhält man

$$(1.10) \quad \begin{cases} dv^i = X_{h'}^i dv^{h'} + v^{h'} X_{h'k'}^i dx^{k'} , \\ dp_{\tau}^i = X_{h'}^i dp_{\tau}^{h'} + p_{\tau}^{h'} X_{h'k'}^i dx^{k'} . \end{cases}$$

Ersetzend die Beziehungen (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) und (1.10) in der rechten Seite von (1.5) unter Berücksichtigung von  $X_{j'}^i X_{k'}^j = \delta_{k'}^i$ ,  $X_{j'}^i X_{i'}^j = \delta_{j'}^{i'}$ , erhalten wir:

$$(1.11) \quad \delta v^i = X_{j'}^i \delta v^{j'} .$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Wenn wir die Beziehung (1.4) in der rechten Seite von (1.5) ersetzen, so folgt

$$(1.12) \quad \delta v^i = dv^i + \frac{K+3}{3K} B_{jh}^{i\nu} v^j \delta p_{\nu}^h + \mathfrak{M}_{jh}^i v^j dx^h ,$$

wobei wir setzen

$$(1.13) \quad \mathfrak{M}_{jh}^i = \frac{1}{K} \left\{ \frac{K+3}{3(K+1)} B_{jk,l}^{i\nu} p_{\nu}^{k'} + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{j\nu,l}^i \right\} \\ - \frac{K+3}{3K} B_{jk}^{i\nu} \left\{ \frac{K+3}{3(K+1)} B_{hm}^{k\tau} p_{\tau}^m + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{h\nu}^k \right\} .$$

Da die Grössen  $B_{jk}^{i\nu} v^j \delta p_{\nu}^k$  offenbar die Bestimmungszahlen eines Vektors sind, erhalten wir ein anderes kovariantes Differential

$$(1.14) \quad \delta^* v^i = dv^i + \mathfrak{M}_{jk}^i v^j dx^k .$$

Die Parameter  $\mathfrak{M}_{jk}^i$  sind bei der Parametertransformation  $u^{\alpha} \rightarrow u^{\alpha'}$  nicht invariant. In der Tat, ändern sich die Grössen  $B_{jk}^{i\nu}$  und  $C_{j\alpha\beta\tau}^{i\lambda\mu}$  wegen (1.1) und (1.2) bei der Parametertransformation folgendermassen:

$$(1.15) \quad B_{jk}^{i\nu} = B_{jk}^{i\nu'} U_{\nu'}^{\nu},$$

$$(1.16) \quad \delta_j^i (U_{\alpha\beta}^{\alpha'} U_{\tau}^{\beta'} + U_{\alpha\tau}^{\alpha'} U_{\beta}^{\beta'} + U_{\alpha}^{\alpha'} U_{\beta\tau}^{\beta'}) + B_{jk}^{i\nu} p_{\xi}^k U_{(\alpha}^{\alpha'} U_{\beta}^{\beta'} U_{\tau)}^{\nu'} + B_{jk}^{i\nu} p_{\xi}^k U_{(\alpha\beta}^{\alpha'} U_{\tau)}^{\nu'} + C_{j\alpha\beta\tau}^{i\lambda\mu} U_{\lambda}^{\alpha'} U_{\mu}^{\beta'} = C_{j\lambda'\mu'\nu'}^{i\alpha'\beta'} U_{\alpha}^{\lambda'} U_{\beta}^{\mu'} U_{\tau}^{\nu'}.$$

Man multipliziert beide Seiten von (1.16) mit  $U_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta}^{\mu}$  und überschiebt nach  $\lambda, \alpha$  und  $\mu, \beta$ , dann ergibt sich

$$(1.17) \quad \delta_j^i U_{\alpha\tau}^{\alpha'} U_{\alpha}^{\alpha'} (2K+1) + \frac{(K+2)(K+3)}{3!} B_{jk}^{i\nu} p_{\xi}^k U_{\tau\nu}^{\nu'} + C_{j\tau}^i = C_{j\nu'}^i U_{\tau}^{\nu'}.$$

Wenn wir (1.17) nach  $p_{\rho}^h$  differenzieren, so erhalten wir

$$(1.18) \quad \frac{(K+2)(K+1)}{3!} (B_{jk, h}^{i\nu} U_{\tau\nu}^{\nu'} p_{\xi}^k + B_{jh}^{i\nu} U_{\xi}^{\nu} U_{\tau\nu}^{\nu'}) + C_{j\tau, h}^i = C_{j\nu', h}^i U_{\tau}^{\nu'}.$$

Überschiebend nach  $\rho, \gamma$ , folgt daraus die Beziehung:

$$(1.19) \quad \frac{(K+2)(K+3)}{3!} (B_{jk, h}^{i\nu} U_{\tau\nu}^{\nu'} p_{\xi}^k + B_{jh}^{i\nu} U_{\xi}^{\nu} U_{\tau\nu}^{\nu'}) + C_{j\tau, h}^i = C_{j\tau', h}^i.$$

Andererseits ergibt sich aus (1.15) durch Differentiation nach  $p_{\tau}^h$ :

$$(1.20) \quad B_{jk, h}^{i\nu} = B_{jk, h}^{i\nu'} U_{\nu'}^{\nu} U_{\tau}^{\tau'}.$$

Aus (1.13), (1.15), (1.17), (1.18), (1.19) und (1.20) folgt, dass die Parameter  $\mathfrak{M}_{jk}^i$  sich bei der Parametertransformation folgendermassen transformieren:

$$(1.21) \quad \mathfrak{M}_{jk}^i(u^{\alpha}) = \mathfrak{M}_{jk}^i(u^{\alpha'}) + \frac{K+3}{(K+2)(K+1)} B_{jk}^{i\nu} U_{\xi}^{\nu} U_{\rho\nu}^{\nu'}.$$

Um eine intrinseke Übertragung zu finden, setzen wir

$$(1.22) \quad B_i^{\nu} = B_{ik}^{k\nu}.$$

Nun berechnet man das kovariante Differential des Vektors  $B_i^{\nu}$

$$(1.23) \quad \delta B_i^{\nu} = dB_i^{\nu} - \mathfrak{M}_{ij}^l B_l^{\nu} dx^j = B_{i/h}^{\nu} dx^h + B_{i, k}^{\nu} \delta p_{\tau}^k,$$

wo

$$(1.24) \quad B_{i/h}^{\nu} = \frac{\partial B_i^{\nu}}{\partial x^h} - B_{i, k}^{\nu} \left( \frac{K+3}{3(K+1)} B_{hl}^{k\sigma} p_{\tau\sigma}^l + \frac{2}{(K+2)(K+1)} C_{h\tau}^k \right) - \mathfrak{M}_{ih}^l B_l^{\nu}.$$

Da die Grössen  $B_{i,h}^{\gamma} \delta p_i^h$  die Bestimmungszahlen eines Vektors sind, so sind die Grössen  $B_{i/h}^{\gamma}$  auch die Bestimmungszahlen eines Tensors. Aber  $B_{i/h}^{\gamma}$  sind bei der Parametertransformation nicht invariant, sondern transformieren sich folgendermassen:

$$(1.25) \quad B_{i/h}^{\gamma} = B_{i/h}^{\gamma'} U_{\gamma'}^{\gamma} + \frac{K+3}{(K+2)(K+1)} \left\{ \frac{2(2K+1)}{K+3} B_{i,h}^{\gamma} - B_{ih}^{\gamma'} B_l^{\gamma} \right\} \times U_{\gamma'p}^{\alpha'} U_{\alpha'}^{\rho}.$$

Man setzt

$$(1.26) \quad H_{\tau\omega}^{\gamma} = \left\{ \frac{2(2K+1)}{K+3} B_{i,h}^{\gamma} - B_{ih}^{\gamma'} B_l^{\gamma} \right\} p_{\gamma}^i p_{\omega}^h \\ = -\frac{2(2K+1)}{K+3} B_{i,h}^{\gamma} p_{\omega}^i - B_{ih}^{\gamma'} B_l^{\gamma} p_{\gamma}^i p_{\omega}^h.$$

Wir multiplizieren (1.25) mit  $p_{\gamma}^i p_{\omega}^h H_{\sigma}^{\gamma\omega}$  und setzen die Beziehungen (1.26) ein, dann erhalten wir

$$(1.27) \quad H_{\sigma} = H_{\sigma'} U_{\sigma'}^{\sigma} + \frac{K+3}{(K+2)(K+1)} U_{\rho\sigma}^{\alpha'} U_{\alpha'}^{\rho},$$

wo

$$(1.28) \quad H_{\sigma} = H_{\sigma'}^{\omega} B_{i/h}^{\gamma} p_{\gamma}^i p_{\omega}^h, \quad H_{\tau\omega}^{\gamma} H_{\sigma}^{\gamma\omega} = \delta_{\sigma}^{\tau},$$

voraussetzend, dass die Determinante  $|H_{\tau\omega}^{\gamma}|$  nicht identisch verschwindet. Da  $H_{\sigma}$  bei der Koordinatentransformation  $x^i \rightarrow x^{i'}$  invariant sind, so ergibt sich

$$\mathfrak{M}_{jk}^i(u^{\alpha}) = \mathfrak{M}_{jk}^i(u^{\alpha'}) - B_{jk}^{i\alpha}(u^{\alpha}) \{ H_{\sigma}(u^{\alpha}) - H_{\sigma'}(u^{\alpha'}) U_{\sigma}^{\alpha'} \},$$

wenn man die Beziehung (1.28) in (1.21) ersetzt.

Daraus erhalten wir die Parameter, welche bei der Parametertransformation  $u^{\alpha} \rightarrow u^{\alpha'}$  invariant sind:

$$(1.29) \quad \mathfrak{Q}_{jk}^i = \mathfrak{M}_{jk}^i - B_{jk}^{i\alpha} H_{\sigma}.$$

Somit haben wir die folgende intrinsike Übertragung, d.h. lautet der

**Satz.**  $v^i$  seien die Bestimmungszahlen eines Vektors in  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$ , so sind die Ausdrücke

$$(1.30) \quad \Delta v^i = dv^i + \mathfrak{Q}_{jk}^i v^j dx^k$$

die Bestimmungszahlen eines Vektors, welche bei der Parametertransformation invariant sind.



2. Grundübertragungen. Die kovariante Ableitung von  $p_{\tau}^i$  ist gegeben durch

$$(2.1) \quad \eta_{\tau\nu}^i \equiv \frac{\Delta p_{\tau}^i}{\partial u^{\nu}} = p_{\tau\nu}^i + \mathfrak{L}_{jk}^i p_{\tau}^j p_{\nu}^k.$$

Offenbar sind  $\eta_{\tau\nu}^i$  die Bestimmungszahlen eines Vektors, aber bei der Parametertransformation  $u^{\alpha} \rightarrow u^{\alpha'}$  transformieren sie sich in der folgenden Weise:

$$(2.2) \quad \eta_{\tau\nu}^i = \eta_{\tau'\nu'}^i U_{\tau}^{\tau'} U_{\nu}^{\nu'} + p_{\tau'}^i U_{\tau\nu}^{\tau'}.$$

Multipliziert man (2.2) mit  $B_k^{\alpha'}$ , überschiebt nach  $i, k$  und setzt  $p_{\tau}^i B_i^{\alpha} = B_{\tau}^{\alpha}$ , so ergibt sich

$$(2.3) \quad \eta_{\tau\nu}^i B_i^{\alpha} U_{\alpha}^{\alpha'} = \eta_{\tau'\nu'}^i B_i^{\alpha'} U_{\tau}^{\tau'} U_{\nu}^{\nu'} + B_{\tau'}^{\alpha'} U_{\tau\nu}^{\tau'}.$$

Wenn die Determinante  $|B_{\tau}^{\alpha}|$  nicht identisch verschwindet, so erhalten wir

$$(2.4) \quad G_{\tau\nu}^{\alpha} U_{\alpha}^{\alpha'} = G_{\tau'\nu'}^{\alpha'} U_{\tau}^{\tau'} U_{\nu}^{\nu'} + U_{\tau\nu}^{\alpha'},$$

setzend  $B_{\tau}^{\alpha} B_{\alpha}^{\sigma} = \delta_{\tau}^{\sigma}$  und  $B_{\alpha}^{\sigma} \eta_{\tau\nu}^i B_i^{\alpha} = G_{\tau\nu}^{\sigma}$ .

Da die Grössen  $G_{\tau\nu}^{\sigma}$  bei der Koordinatentransformation invariant sind, können wir das kovariante Differential eines beliebigen Tensors definieren, welche bei der Parametertransformation invariant ist. Wir haben nämlich den

**Satz.** Die Grössen  $v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a}$  seien die Bestimmungszahlen des intrinseken Tensors in  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$ , d.h.

$$(2.5) \quad v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a} = X_{i_1' \dots i_r'}^{i_1 \dots i_r} X_{j_1' \dots j_s'}^{j_1 \dots j_s} U_{\alpha_1' \dots \alpha_a'}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} U_{\beta_1' \dots \beta_b'}^{\beta_1 \dots \beta_b} \\ \times v_{j_1' \dots j_s' \beta_1' \dots \beta_b'}^{i_1' \dots i_r' \alpha_1' \dots \alpha_a'},$$

so transformieren sich die PFAFFschen Ausdrücke

$$(2.6) \quad \Delta v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a} = dv_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a} \\ + \left\{ \sum_{p=1}^r \mathfrak{L}_{lk}^{i_p} v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_{p-1} l i_{p+1} \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a} \right. \\ \left. - \sum_{p=1}^s \mathfrak{L}_{jpk}^l v_{j_1 \dots j_{p-1} l j_{p+1} \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a} \right\} dx^k$$

$$+ \left\{ \sum_{p=1}^a G_{\xi\gamma}^{\alpha_p} v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_{p-1} \xi \alpha_{p+1} \dots \alpha_a}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \xi \alpha_{p+1} \dots \alpha_a} - \sum_{p=1}^b G_{\beta\gamma}^{\xi} v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_{p-1} \xi \beta_{p+1} \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \xi \beta_{p+1} \dots \beta_b} \right\} du^r$$

unter der Koordinaten- und Parametertransformation in derselben Weise wie  $v_{j_1 \dots j_s \beta_1 \dots \beta_b}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_a}$ , wo man einheitshalber setzt

$$X_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} = X_{i_1'}^{i_1} X_{i_2'}^{i_2} \dots X_{i_r'}^{i_r},$$

$$U_{\alpha_1' \alpha_2' \dots \alpha_a'}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_a} = U_{\alpha_1'}^{\alpha_1} U_{\alpha_2'}^{\alpha_2} \dots U_{\alpha_a'}^{\alpha_a}.$$

Wir setzen jetzt

$$(2.7) \quad \tau_{\tau\nu}^i = p_{\tau\nu}^i + \mathfrak{L}_{jk}^i p_\tau^j p_\nu^k - G_{\tau\nu}^p p_p^i,$$

$$(2.8) \quad \partial p_\tau^i = dp_\tau^i + \mathfrak{L}_{jk}^i p_\tau^j dx^k - G_{\tau\nu}^p p_p^i du^\nu$$

und

$$(2.9) \quad \partial \tau_{\tau\nu}^i = d\tau_{\tau\nu}^i + \mathfrak{L}_{jk}^i \tau_{\tau\nu}^j dx^k - (G_{\tau p}^\alpha \tau_{\alpha\nu}^i + G_{\nu p}^\alpha \tau_{\tau\alpha}^i) du^p.$$

Da die Ausdrücke  $\partial p_\tau^i$  und  $\partial \tau_{\tau\nu}^i$  unter der Koordinaten- und Parametertransformation invariant sind, so können wir die Grundübertragungen durch (2.8) und (2.9) definieren.

Man kann sehen, dass die Gleichungen (2.7) in bezug auf die Unbekannten  $p_{\tau\nu}^i$  linear sind. Wenn der Rang der Matrix der Koeffizienten von  $p_{\tau\nu}^i$  den Maximumwert hat, können wir somit  $p_{\tau\nu}^i$  in die Form lösen:

$$(2.10) \quad p_{\tau\nu}^i = \varphi_{\tau\nu}^i(u^\alpha, x^j, p_\alpha^j, \tau_{\alpha\beta}^j).$$

In der Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}_n^{(2)}$  sei das Vektorfeld  $v^i(u^\alpha, x^j, p_\tau^j, p_{\tau\nu}^j)$  gegeben. Wir ersetzen die Beziehung (2.10) in  $v^i(u^\alpha, x^j, p_\tau^j, p_{\tau\nu}^j)$  und setzen

$$(2.11) \quad v^i(u^\alpha, x^j, p_\tau^j, p_{\tau\nu}^j) = v^i(u^\alpha, x^j, p_\tau^j, \varphi_{\tau\nu}^j) = {}^*v^i(u^\alpha, x^j, p_\tau^j, \tau_{\tau\nu}^j).$$

Daraus ergibt sich wegen (1.30)

$$(2.12) \quad \Delta v^i = dv^i + \mathfrak{L}_{jk}^i v^j dx^k$$

$$= \Gamma_k^i v^i \cdot dx^k + \Gamma_k^\tau v^i \cdot \partial p_\tau^k + \Gamma_k^\nu v^i \cdot \partial \tau_{\tau\nu}^k + \Gamma_p^i v^i \cdot du^p,$$

wo

$$(2.13) \quad \Gamma_k^i v^i = \frac{\partial {}^*v^i}{\partial x^k} - \frac{\partial {}^*v^i}{\partial p_\tau^l} {}^*\mathfrak{L}_{jk}^l p_\tau^j - \frac{\partial {}^*v^i}{\partial \tau_{\alpha\beta}^l} {}^*\mathfrak{L}_{jk}^l \tau_{\alpha\beta}^j + {}^*\mathfrak{L}_{jk}^i v^j,$$

$$(2.14) \quad \nabla_k^\tau v^i = \frac{\partial^* v^i}{\partial p_\tau^k},$$

$$(2.15) \quad \nabla_k^{\tau\nu} v^i = \frac{\partial^* v^i}{\partial \tau_{\tau\nu}^k},$$

$$(2.16) \quad \nabla_\rho v^i = \frac{\partial^* v^i}{\partial u^\rho} + \frac{\partial^* v^i}{\partial p_\tau^l} G_{\tau\rho}^\alpha p_\alpha^l + \frac{\partial^* v^i}{\partial \tau_{\lambda\mu}^l} (G_{\lambda\rho}^\omega \tau_{\omega\mu}^l + G_{\mu\rho}^\omega \tau_{\lambda\omega}^l).$$

3. **Krümmungstensoren.** Da die kovarianten Ableitungen des Vektors durch (2.13), (2.14), (2.16) und (2.17) gegeben sind, können wir sogleich die Krümmungs- und Torsionstensoren verschiedener Arten berechnen.

Der Kürze halber schreiben wir (2.13) in die Form um

$$(3.1) \quad \nabla_k v^i = \frac{\partial^* v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial^* v^i}{\partial p_\tau^l} \alpha_{k\tau}^l + \frac{\partial^* v^i}{\partial \tau_{\alpha\beta}^l} \beta_{k\alpha\beta}^l + {}^* \mathfrak{L}_{jk}^i {}^* v^j,$$

wo

$$\alpha_{k\tau}^l = -{}^* \mathfrak{L}_{jk}^l p_\tau^j, \quad \beta_{k\alpha\beta}^l = -{}^* \mathfrak{L}_{jk}^l \tau_{\alpha\beta}^j.$$

Daraus ergibt sich erstens

$$(3.2) \quad \nabla_h \nabla_k v^i - \nabla_k \nabla_h v^i = R_{jkh}^i v^j - U_{kh}^m \nabla_m v^i + S_{kh\tau}^l \nabla_\tau^i v^i + T_{kh\alpha\beta}^l \nabla_{\tau}^{\alpha\beta} v^i,$$

wo

$$(3.3) \quad R_{jkh}^i = \frac{\partial {}^* \mathfrak{L}_{jk}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial {}^* \mathfrak{L}_{jh}^i}{\partial x^k} + \alpha_{h\nu}^m \frac{\partial {}^* \mathfrak{L}_{jk}^i}{\partial p_\nu^m} - \alpha_{k\nu}^m \frac{\partial {}^* \mathfrak{L}_{jh}^i}{\partial p_\nu^m} + \beta_{h\lambda\mu}^m \frac{\partial {}^* \mathfrak{L}_{jk}^i}{\partial \tau_{\lambda\mu}^m} - \beta_{k\lambda\mu}^m \frac{\partial {}^* \mathfrak{L}_{jh}^i}{\partial \tau_{\lambda\mu}^m} + {}^* \mathfrak{L}_{lh}^i {}^* \mathfrak{L}_{jk}^l - {}^* \mathfrak{L}_{lk}^i {}^* \mathfrak{L}_{jh}^l,$$

$$(3.4) \quad T_{kh\alpha\beta}^l = \frac{\partial \beta_{k\alpha\beta}^l}{\partial x^h} - \frac{\partial \beta_{h\alpha\beta}^l}{\partial x^k} + \alpha_{h\nu}^m \frac{\partial \beta_{k\alpha\beta}^l}{\partial p_\nu^m} - \alpha_{k\nu}^m \frac{\partial \beta_{h\alpha\beta}^l}{\partial p_\nu^m} + \beta_{h\lambda\mu}^m \frac{\partial \beta_{k\alpha\beta}^l}{\partial \tau_{\lambda\mu}^m} - \beta_{k\lambda\mu}^m \frac{\partial \beta_{h\alpha\beta}^l}{\partial \tau_{\lambda\mu}^m},$$

$$(3.5) \quad U_{kh}^m = {}^* \mathfrak{L}_{kh}^m - {}^* \mathfrak{L}_{hk}^m,$$

$$(3.6) \quad S_{kh\tau}^l = \frac{\partial \alpha_{k\tau}^l}{\partial x^h} - \frac{\partial \alpha_{h\tau}^l}{\partial x^k} + \alpha_{h\nu}^m \frac{\partial \alpha_{k\tau}^l}{\partial p_\nu^m} - \alpha_{k\nu}^m \frac{\partial \alpha_{h\tau}^l}{\partial p_\nu^m} + \beta_{h\lambda\mu}^m \frac{\partial \alpha_{k\tau}^l}{\partial \tau_{\lambda\mu}^m} - \beta_{k\lambda\mu}^m \frac{\partial \alpha_{h\tau}^l}{\partial \tau_{\lambda\mu}^m}.$$

Zweitens ergibt sich für  $\nabla_h^\tau \nabla_k v^i - \nabla_k \nabla_h^\tau v^i$

$$(3.7) \quad \nabla_h^\tau \nabla_k v^i - \nabla_k \nabla_h^\tau v^i = L^{\cdot i \cdot \cdot \cdot \tau}_{\cdot j k h} v^j - L^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \tau}_{\cdot j k h} p_\tau^j \nabla_l^\tau v^i \\ - L^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \tau}_{\cdot j k h} \tau_{\alpha\beta}^j \nabla_l^{\alpha\beta} v^i,$$

wo

$$(3.8) \quad L^{\cdot i \cdot \cdot \cdot \tau}_{\cdot j k h} = \frac{\partial^* \Omega_{jk}^i}{\partial p_\tau^h}.$$

Drittens berechnen wir  $\nabla_h^{\alpha\beta} \nabla_k v^i - \nabla_k \nabla_h^{\alpha\beta} v^i$ ;

$$(3.9) \quad \nabla_h^{\alpha\beta} \nabla_k v^i - \nabla_k \nabla_h^{\alpha\beta} v^i = M^{\cdot i \cdot \cdot \cdot \alpha\beta}_{\cdot j k h} v^j - M^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \alpha\beta}_{\cdot j k h} p_\tau^j \nabla_l^{\alpha\beta} v^i \\ - M^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \alpha\beta}_{\cdot j k h} \tau_{\lambda\mu}^j \nabla_l^{\lambda\mu} v^i,$$

wo

$$(3.10) \quad M^{\cdot i \cdot \cdot \cdot \alpha\beta}_{\cdot j k h} = \frac{\partial^* \Omega_{jk}^i}{\partial \tau_{\alpha\beta}^h}.$$

In der analogen Weise gewinnen wir für einen Skalar  $f(u^\alpha, x^j, p_\tau^j, p_{\alpha\beta}^j)$

$$(3.11) \quad df = \nabla_i f \cdot dx^i + \nabla_i^\tau f \cdot \partial p_\tau^i + \nabla_i^{\alpha\beta} f \cdot \partial \tau_{\alpha\beta}^i + \nabla_\tau f \cdot du^\tau,$$

wo

$$(3.12) \quad \nabla_i f = \frac{\partial^* f}{\partial x^i} - \frac{\partial^* f}{\partial p_\tau^j} p_\tau^{k*} \Omega_{ki}^j - \frac{\partial^* f}{\partial \tau_{\alpha\beta}^j} \tau_{\alpha\beta}^{k*} \Omega_{ki}^j,$$

$$(3.13) \quad \nabla_i^\tau f = \frac{\partial^* f}{\partial p_\tau^i}, \quad \nabla_i^{\alpha\beta} f = \frac{\partial^* f}{\partial \tau_{\alpha\beta}^i},$$

$$(3.14) \quad \nabla_\lambda f = \frac{\partial^* f}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial^* f}{\partial p_\tau^i} p_\tau^i G_{\tau\lambda}^\beta + \frac{\partial^* f}{\partial \tau_{\tau\nu}^i} \tau_{\tau\nu}^i G_{\tau\lambda}^\rho + \frac{\partial^* f}{\partial \tau_{\tau\nu}^i} \tau_{\tau\alpha}^i G_{\nu\lambda}^\alpha.$$

Somit bestehen erstens

$$(3.15) \quad \nabla_j \nabla_i f - \nabla_i \nabla_j f = -\nabla_l^\tau f \cdot p_\tau^k R_{kij}^l - \nabla_l^{\alpha\beta} f \cdot \tau_{\alpha\beta}^k R_{kij}^l \\ - U_{ij}^l \nabla_l f,$$

zweitens

$$(3.16) \quad \nabla_\lambda \nabla_\mu f - \nabla_\mu \nabla_\lambda f \\ = \nabla_j^\tau f \cdot p_\tau^j K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot \cdot \cdot \beta} + \nabla_j^{\tau\nu} f \cdot \tau_{\rho\nu}^j K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot \cdot \cdot \rho} + \nabla_j^{\tau\nu} f \cdot \tau_{\tau\rho}^j K_{\lambda\mu\nu}^{\cdot \cdot \cdot \rho},$$

wo

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad K_{\lambda\mu\tau}^{\beta} = & \frac{\partial G_{\tau\mu}^{\beta}}{\partial u^{\lambda}} - \frac{\partial G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial u^{\mu}} + G_{\sigma\lambda}^{\nu} p_{\nu}^{\lambda} \frac{\partial G_{\tau\mu}^{\beta}}{\partial p_{\sigma}^{\lambda}} - G_{\sigma\mu}^{\nu} p_{\nu}^{\lambda} \frac{\partial G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial p_{\sigma}^{\lambda}} \\
 & + G_{\sigma\lambda}^{\xi} \tau_{\xi\delta}^{\lambda} \frac{\partial G_{\tau\mu}^{\beta}}{\partial \tau_{\sigma\delta}^{\lambda}} - G_{\sigma\mu}^{\xi} \tau_{\xi\delta}^{\lambda} \frac{\partial G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial \tau_{\sigma\delta}^{\lambda}} + G_{\omega\lambda}^{\xi} \tau_{\delta\xi}^{\lambda} \frac{\partial G_{\tau\mu}^{\beta}}{\partial \tau_{\delta\omega}^{\lambda}} \\
 & - G_{\omega\mu}^{\xi} \tau_{\delta\xi}^{\lambda} \frac{\partial G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial \tau_{\delta\omega}^{\lambda}} + G_{\tau\mu}^{\sigma} G_{\sigma\lambda}^{\beta} - G_{\tau\lambda}^{\sigma} G_{\sigma\mu}^{\beta},
 \end{aligned}$$

drittens

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad \nabla_i^{\mu} \nabla_{\lambda} f - \nabla_{\lambda} \nabla_i^{\mu} f \\
 = \nabla_j^{\tau} f \cdot p_{\tau}^j C_{\tau}^{\beta \cdot \mu}{}_{\lambda \cdot i} + \nabla_j^{\nu} f \cdot \tau_{\rho\nu}^j C_{\tau}^{\beta \cdot \mu}{}_{\lambda \cdot i} + \nabla_j^{\nu} f \cdot \tau_{\tau\alpha}^j C_{\nu}^{\alpha \cdot \mu}{}_{\lambda \cdot i},
 \end{aligned}$$

wo

$$(3.19) \quad C_{\tau}^{\beta \cdot \mu}{}_{\lambda \cdot i} = \frac{\partial^* G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial p_{\mu}^i},$$

viertens

$$(3.20) \quad \nabla_i^{\xi} \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i^{\xi} f = -\nabla_l^{\tau} f \cdot p_{\tau}^k B_{k \cdot j i}^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \xi} - \nabla_l^{\nu} f \cdot \tau_{\tau\nu}^k B_{k \cdot j i}^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \xi},$$

wo

$$(3.21) \quad B_{k \cdot j i}^{\cdot l \cdot \cdot \cdot \xi} = \frac{\partial^* \mathfrak{L}_{kj}^l}{\partial p_{\xi}^i},$$

und letztens

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad \nabla_j \nabla_{\lambda} f - \nabla_{\lambda} \nabla_j f = \nabla_l^{\tau} f \cdot p_{\tau}^k N_{k \cdot j \lambda}^{\cdot l} + \nabla_l^{\tau} f \cdot p_{\tau}^k H_{\tau}^{\beta \cdot \lambda}{}_{j} \\
 + \nabla_l^{\nu} f \cdot \tau_{\tau\nu}^k N_{k \cdot j \lambda}^{\cdot l} + \nabla_l^{\nu} f \cdot \tau_{\rho\nu}^k H_{\tau}^{\beta \cdot \lambda}{}_{j} + \nabla_l^{\nu} f \cdot \tau_{\tau\beta}^k H_{\nu}^{\beta \cdot \lambda}{}_{j},
 \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
 (3.23) \quad N_{k \cdot j \lambda}^{\cdot l} = & \frac{\partial^* \mathfrak{L}_{kj}^l}{\partial u^{\lambda}} + p_{\rho}^{h*} G_{\omega\lambda}^{\rho} \frac{\partial^* \mathfrak{L}_{kj}^l}{\partial p_{\omega}^h} + \tau_{\xi\mu}^{h*} G_{\omega\lambda}^{\xi} \frac{\partial^* \mathfrak{L}_{kj}^l}{\partial \tau_{\omega\mu}^h} \\
 & + \tau_{\mu\xi}^{h*} G_{\rho\lambda}^{\xi} \frac{\partial^* \mathfrak{L}_{kj}^l}{\partial \tau_{\mu\rho}^h},
 \end{aligned}$$

$$(3.24) \quad H_{\tau}^{\beta \cdot \lambda}{}_{j} = \frac{\partial^* G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial x^j} - p_{\omega}^{m*} \mathfrak{L}_{mj}^h \frac{\partial^* G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial p_{\omega}^h} - \tau_{\xi\mu}^{m*} \mathfrak{L}_{mj}^h \frac{\partial^* G_{\tau\lambda}^{\beta}}{\partial \tau_{\xi\mu}^h}.$$

Diese Krümmungs- und Torsionstensoren sind nicht von einander unabhängig, sondern auch zwischen diesen Grössen finden sich viele Beziehungen. Die BIANCHISCHEN Identitäten können wir in der gewöhnlichen Weise berechnen, aber möchten hier nicht darauf eingehen.

März 1937.