



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜEERTRAGUNGEN IN DEM METRISCHEN RAUME DER "K-SPREADS"
Author(s)	Ohkubo, Takdo
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 6(4), 159-174
Issue Date	1938
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55935
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_06_N4_159-174.pdf



ÜBERTRAGUNGEN IN DEM METRISCHEN RAUME DER "K-SPREADS"

Von

Takeo OHKUBO

Einleitung. Die Geometrie der verallgemeinerten "paths" wurde von J. DOUGLAS untersucht⁽¹⁾. Er hat sie bezüglich der Transformationen des Parameters $t: \tau = at + \beta$, $\tau = \tau(t)$, $\tau = t + \beta$ in dreien Arten: affin, deskriptiv, metrisch unterschieden. In der metrischen Theorie der "paths" wird die FINSLERSche Metrik eingeführt. Neuerdings hat er auch die Geometrie der "K-spreads"⁽²⁾ entwickelt, wobei die drei Theorien der "K-spreads", die affin, voluminär, bzw. deskriptiv genannt werden, untersucht werden. Man versteht unter den "K-spreads" ein System der K -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in einem n -dimensionalen Raume X_n , die ein solches Gesetz erfüllt, dass durch $K+1$ Punkte in allgemeiner Lage eine und nur eine K -dimensionale Mannigfaltigkeit hindurchgeht. Dann existiert ein einziges "K-spread", welches ein willkürlich gegebenes K -Element (x, p) enthält. Die Theorie der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n , deren Bogenelement vom Flächenelemente von m -ter Dimension abhängig ist, wurde zuerst von Herrn Prof. A. KAWAGUCHI⁽³⁾ untersucht. In diesem Falle definiert sich Flächenelement eindeutig durch ein System von einem Punkte und einer diesen Punkt enthaltenden m -Richtung.

In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich mit der Theorie des Raumes beschäftigen, deren Bogenelement durch die in dem Raume enthaltenen "K-spreads", welche bei der Parametertransformation $u^\alpha \rightarrow u^\alpha + \beta^\alpha$ invariant sind, bestimmt wird. Da die "K-spreads" durch jeden Punkt und eine in diesem Punkte tangierende K -Richtung bestimmt werden, ist unsere Massmessung von dem Punkte und dem Flächenelemente (d.h. K -Element) abhängig. Zuerst werden die Dif-

(1) J. DOUGLAS, 3.

(2) J. DOUGLAS, 5.

(3) A. KAWAGUCHI, 8, 9, 10.

ferentialgleichungen der "K-spreads" $\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = H_{\alpha\beta}^i(x, p)$ und Grundfunktionen $F_\alpha^\beta(x, p)$ ⁽¹⁾ gegeben. Die Affinübertragungsparameter werden eingeführt, dann wird der Fundamentaltensor $g_{ij}(x, p)$ in unserem Raume durch zweimalige kovariante Differentiationen der Funktion $F(x, p)$ ⁽²⁾ definiert (Kapitel I). Danach werden die Längen- und Winkelmessung in unserem Raume besprochen. Die in dem ersten Kapitel eingeführten affinen Parameter $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ definieren die affine Übertragung⁽³⁾ in unserem Raume. In analoger Methode wie die von L. BERWALD werden der Krümmungstensor, der Grundtensor der Krümmung, usw. berechnet. Da die affinen Übertragungen nicht metrisch sind, d.h. die kovariante Ableitung des Fundamentaltensors nicht verschwindet, ergibt sich der Tensor der Streckenkrümmung. Es ist auch gezeigt, dass in unserem Raume der Krümmungstensor durch Differentiation sich aus dem Grundtensor der Krümmung ergibt und die BIANCHISCHE Identität für den Grundtensor aufgestellt wird (Kapitel II).

Zum Schlusse wird noch eine metrische Übertragung⁽⁴⁾ in allgemeinen Räumen besprochen, benützend den KAWAGUCHISCHEN Satz⁽⁵⁾. Es ist bemerkenswert, dass in einem allgemeinen metrischen Raume eine metrische Übertragung bestimmt werden kann, wenn die Grundübertragung gegeben ist. In unserem Raume wird die metrische Übertragung aus der affinen abgeleitet, benützend den oben-geannten Satz (Kapitel III).

Ich möchte Herrn Prof. A. KAWAGUCHI und Herrn H. HOMBU für ihre freundlichen Anweisungen herzlich danken.

Kapitel I. Allgemeines.

1. "K-spreads". Es sei ein System der "K-spreads" in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n gegeben, und auch

(A₁) ein System von den Koordinaten $x^i (i = 1, 2, \dots, n)$ in X_n ,

(A₂) ein System von den Parametern $u^\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, K)$ in jedem "K-spread",

(1) Siehe (2.7) und (2.8).

(2) Siehe (3.9) und (3.10).

(3) L. BERWALD, 1, 2, 4.

(4) E. CARTAN, 6, 7.

(5) A. KAWAGUCHI, 11.

(A₃) ein System von den Parametern $\alpha^L (L = 1, 2, \dots, R)$, welche die verschiedenen "K-spreads" kennzeichnen. Die Zahl R der Bedingungen dafür, dass ein "K-spread", das durch beliebige $K+1$ Punkte in allgemeiner Lage hindurchgeht, einzig ist, ist $(n-K)(K+1)$.

Dann wird ein "K-spread" durch das System der Gleichungen

$$(1.1) \quad x^i = f^i(u, a)$$

dargestellt, wobei die Funktionen f^i analytisch sind. Der Raum der "K-spreads" bleibt durch die Vereinigung der folgenden Transformationen als die geometrische Konfiguration ungeändert:

(T₁) Transformation der Koordinaten in X_n :

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(T₂) simultane Transformation der Parameter auf allen "K-spreads":

$$v^a = u^a + \beta^a(a), \quad a = 1, 2, \dots, K,$$

(T₃) Transformation von den Parametern α^L :

$$\alpha^L = \alpha^L(b), \quad L = 1, 2, \dots, R.$$

Da die Transformation (T₃) den partiellen Differentialgleichungen der "K-spreads" keinen Einfluss gibt, brauchen wir sie nicht zu berücksichtigen. In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns mit der Geometrie der "K-spreads" unter den Transformationen (T₁) und (T₂). Die Geometrie, in welcher die "K-spreads" die Transformationsgruppe (T₂) gestatten, heisst die metrische Geometrie der "K-spreads".

2. Die partiellen Differentialgleichungen des metrischen Raumes der "K-spreads". Die Gleichungen des metrischen Raumes der "K-spreads" werden durch

$$(2.1) \quad x^i = f^i(u + \beta, a)$$

gegeben, wo β^a willkürliche Funktionen der Parameter α^L sind. Durch die zweimaligen Differentiationen nach u^a und u^b erhalten wir

$$(2.2) \quad p_a^i = f_a^i(u + \beta, a) \quad \left(p_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^a} \right),$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} = f_{ab}^i(u + \beta, a).$$

Die $n+nK$ Gleichungen (2.1) und (2.2) enthalten $(n-K)(K+1)+K = nK+n-K^2$ Unbekannte $u^a + \beta^a$, a^L . Im allgemeinen können wir diese Relationen für $u^a + \beta^a$, a^L als Funktionen x^i , p_a^i lösen und ausserdem höchstens K^2 Beziehungen in x^i , p_a^i gewinnen. Sie werden folgendermassen ausgedrückt

$$(2.4) \quad \begin{cases} u^a + \beta^a = \varphi^a(x, p), & a = 1, 2, \dots, K, \\ a^L = \phi^L(x, p), & L = 1, 2, \dots, R, \end{cases}$$

$$(2.5) \quad \theta_a^b(x, p) = \delta_a^b.$$

Wir betrachten nur den Fall, wo die K^2 Beziehungen (2.5) alle voneinander unabhängig sind.

Wir ersetzen (2.4) in (2.3), so erhalten wir ein System der Differentialgleichungen mit der Gestalt

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} = G_{ab}^i(x, p).$$

Es ist möglich, die Systeme (2.5) und (2.6) in den Normalformen eindeutig umzuschreiben:

$$(2.7) \quad F_a^b(x, p) = \delta_a^b,$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} = H_{ab}^i(x, p),$$

wo $F_a^b(x, p)$ und $H_{ab}^i(x, p)$ (i : fest) homogen (in verallgemeinertem Sinne) von zweiter Dimension in bezug auf p_a^i sind.

Wir ersehen, dass für die eindeutig bestimmten Funktionen $F_a^b(x, p)$, $H_{ab}^i(x, p)$ die Beziehungen

$$F_a^b(x, p) = \theta_a^b(x, p), \quad H_{ab}^i(x, p) = G_{ab}^i(x, p)$$

bestehen, wenn x^i und p_a^i den Beziehungen $\theta_a^b(x, p) = \delta_a^b$ genügen.

Beweis. Man nimmt x^i willkürliche feste Werte an und sieht p_a^i als rechtwinklige Koordinaten im euklidischen Raume an. Dann zeigt (2.5) die $(nK-K^2)$ -dimensionale Hyperfläche Σ in dem nK -dimensionalen euklidischen Raume (x^i : Parameter). Die p_a^i sollen nicht sämtlich verschwinden, und die Hyperfläche Σ geht nicht durch den Anfangspunkt hindurch. Da K unabhängige Richtungen in jedem Punkte ein einziges "K-spread" bestimmen, ist die Hyperfläche Σ kein Hyperkegel.

Auf der Hyperfläche Σ sei ein Punkt P mit den Koordinaten p_α^i gegeben, so entspricht dem Punkte ein Punkt Q mit den Koordinaten

$$(2.9) \quad q_\alpha^i = p_\beta^i \tau_\alpha^\beta, \quad (\theta_\alpha^\beta(x, p) = \delta_\alpha^\beta)$$

für jedes Wertesystem $\tau_\alpha^\beta(x, p)$.

Umgekehrt, in dem nK -dimensionalen euklidischen Raume, sei ein Punkt Q mit den Koordinaten q_α^i gegeben, dann entspricht dem Q ein Punkt P in der Hyperfläche Σ mit den Koordinaten p_α^i , welche durch (2.9) gegeben sind.

Dann enthalten $nK + K^2$ Gleichungen (2.9) die Unbekannten $p_\alpha^i, \tau_\alpha^\beta$. Setzen wir voraus, dass die Lösung der Gleichungen (2.9) ($p_\alpha^i, \tau_\alpha^\beta$: Unbekannte) eindeutig ist, dann entspricht einem willkürlichen Punkte Q ein Punkt P in der Hyperfläche Σ eindeutig. Somit können wir Funktionen des Punktes Q bezüglich des Punktes P folgendermassen definieren:

$$(2.10) \quad H_{\alpha\beta}^i(Q) = \tau_\alpha^\lambda \tau_\beta^\mu G_{\lambda\mu}^i(P), \quad F_\alpha^\beta(Q) = \tau_\alpha^\lambda \tau_\gamma^\beta \theta_\lambda^\gamma(P) = \tau_\alpha^\lambda \tau_\lambda^\beta,$$

d.h.

$$(2.11) \quad H_{\alpha\beta}^i(x, p) = \tau_\alpha^\lambda \tau_\beta^\mu G_{\lambda\mu}^i(x, p), \quad F_\alpha^\beta(x, p) = \tau_\alpha^\lambda \tau_\lambda^\beta.$$

Offenbar sind $H_{\alpha\beta}^i(x, p)$ (i : fest), $F_\alpha^\beta(x, p)$ in p_α^i homogen von zweiter Dimension und $H_{\alpha\beta}^i(x, p) = G_{\alpha\beta}^i(x, p)$, $F_\alpha^\beta(x, p) = \delta_\alpha^\beta$, wenn der Punkt P auf der Hyperfläche Σ liegt, d.h. $\theta_\alpha^\beta(x, p) = \delta_\alpha^\beta$. Deshalb besteht die Behauptung.

3. *Affine Übertragung und Fundamentaltensor.* In unserem metrischen Raume $\mathfrak{F}_n^{(1)}$ sind die affinen Übertragungsparameter durch

$$(3.1) \quad \Gamma_{jk}^i(x, p) = \frac{1}{K(K+1)} \frac{\partial^2 H_{\alpha\beta}^i(x, p)}{\partial p_\alpha^j \partial p_\beta^k}$$

gegeben. $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ sind symmetrisch in bezug auf j und k , denn $H_{\alpha\beta}^i(x, p)$ sind genau so in bezug auf α und β .

Da $H_{\alpha\beta}^i(x, p)$ (i : fest) in p_α^i homogen von zweiter Dimension sind, so bestehen die Identitäten

$$(3.2) \quad p_\alpha^j p_\beta^k \frac{\partial^2 H_{\alpha\beta}^i(x, p)}{\partial p_\alpha^j \partial p_\beta^k} = \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\nu H_{\rho\nu}^i + \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\nu H_{\rho\nu}^i.$$

Überschiebend nach α, ρ und β, ν , ergibt sich

$$(3.3) \quad p_\alpha^j p_\beta^k \Gamma_{jk}^i(x, p) = H_{\alpha\beta}^i(x, p).$$

Wegen (3.3) können wir die partiellen Differentialgleichungen der "K-spreads" in die Form umschreiben:

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma_{jk}^i(x, p) p_\alpha^j p_\beta^k.$$

Aus der Definitionsgleichung der Funktion $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ (alle Indizes fest) lesen wir heraus, dass sie bezüglich p_α^i homogen von nullter Dimension ist, d.h. dass $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ unter der linearen Transformation $q_\tau^i = \tau_\tau^\beta p_\beta^i$ invariant ist,

Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen der "K-spreads" (3.4) sind

$$(3.5) \quad K_{jkl}(x, p) p_\alpha^j p_\beta^k p_\gamma^l = 0,$$

wo

$$(3.6) \quad K_{jkl}(x, p) = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + p_\beta^b \Gamma_{bi}^a \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial p_\beta^a} - p_\beta^b \Gamma_{bk}^a \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial p_\beta^a} + \Gamma_{ak}^i \Gamma_l^a - \Gamma_{al}^i \Gamma_{jk}^a.$$

Wir können eine kovariante Ableitung⁽¹⁾ des Skalars bzw. Vektors definieren durch

$$(3.7) \quad A(x, p)_{/i} = \frac{\partial A(x, p)}{\partial x^i} - \frac{\partial A(x, p)}{\partial p_\alpha^l} \Gamma_{ji}^l p_\alpha^j \\ = \frac{\partial A(x, p)}{\partial x^i} - \frac{1}{K+1} \frac{\partial A(x, p)}{\partial p_\alpha^l} \frac{\partial H_{\alpha\sigma}^l}{\partial p_\sigma^i},$$

bzw.

$$(3.8) \quad v^i(x, p)_{/k} = \frac{\partial v^i(x, p)}{\partial x^k} - \frac{1}{K+1} \frac{\partial v^i(x, p)}{\partial p_\alpha^l} \frac{\partial H_{\alpha\sigma}^l}{\partial p_\sigma^k} + \Gamma_{jk}^i v^j(x, p).$$

Aus (2.7) erhalten wir ein absolutes Skalar $F(x, p)$ durch die Faltung:

$$(3.9) \quad F(x, p) = \frac{1}{K} F_\alpha^\alpha(x, p),$$

Aus dem symmetrischen Teil der zweimaligen kovarianten Ableitungen des Skalars $F(x, p)$ ergibt sich ein neuer Tensor

(1) Siehe Kapitel II.

$$(3.10) \quad g_{ij}(x, p) = \frac{1}{2}(F(x, p)_{/i/j} + F(x, p)_{/j/i}).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Determinante $|g_{ij}(x, p)|$ von Null verschieden ist, nehmen wir $g_{ij}(x, p)$ als den Fundamentaltensor in unserem Raume $\mathfrak{F}_n^{(1)}$ an.

Kapitel II. Die affine Übertragung.

4. *Parallelübertragung und Krümmungstensor.* Wir erklären als parallele Übertragung des kontravarianten Vektors (v) im Punkte (x) von (x) nach dem unendlich benachbarten Punkte ($x+dx$) den Übergang von Vektor (v) im Punkte (x) zum Vektor ($v+dv$) im Punkte ($x+dx$), wenn (dv) die Bestimmungszahlen

$$(4.1) \quad dv^i = -\Gamma_{jk}^i(x, p)v^j dx^k$$

hat. Die parallele Übertragung eines kovarianten Vektors (w) im Punkte (x) von (x) nach dem unendlich benachbarten Punkte ($x+dx$) ist eindeutig durch die Forderung erklärt, dass durch simultane Parallelverschiebung dieses Vektors (w) und eines beliebigen kontravarianten Vektors (v) die Invariante $v^i w_i$ ungeändert bleibt. Analog für irgendwelche Tensoren.

Da die Grössen $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ x^i sowie p_a^i enthalten, hängt die Parallelübertragung in unserem Raume $\mathfrak{F}_n^{(1)}$ nach dem Vorhergehenden im allgemeinen ausser vom Lage in der Mannigfaltigkeit auch noch von der Wahl des Feldes des *ausgezeichneten Flächenelementes* p_a^i ab.

Durch den Prozess der parallelen Herumführung eines willkürlichen Vektors (v) im Punkte (x) um ein infinitesimales Parallelogramm gelangt man in üblicher Weise zum Krümmungstensor des Raumes, wenn dabei das ausgezeichnete Flächenelement (p) im Punkte (x) gleichfalls zu sich selbst parallel mitgeführt wird. Man erhält zunächst

$$(4.2) \quad \delta_1 v^i = d_1 v^i + \Gamma_{jk}^i v^j d_1 x^k,$$

$$(4.3) \quad \delta_2 \delta_1 v^i = d_2 d_1 v^i + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} v^j d_1 x^k d_2 x^l + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial p_a^l} v^j d_1 x^k d_2 p_a^l \\ + \Gamma_{jk}^i d_2 v^j d_1 x^k + \Gamma_{jk}^i v^j d_2 d_1 x^k + \Gamma_{jk}^i d_1 v^j d_2 x^k + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{lm}^i v^j d_1 x^k d_2 x^m.$$

Wenn das ausgezeichnete Flächenelement p_a^i zu sich selbst parallel übertragen wird, d.h. $dp_a^i = -\Gamma_{jk}^i p_a^j dx^k$, erhält man

$$(4.4) \quad \delta_2 \delta_1 v^i - \delta_1 \delta_2 v^i = \frac{1}{2} K_j^i{}_{kl}(x, p) (d_1 x^k d_2 x^l - d_2 x^k d_1 x^l),$$

wo

$$(4.5) \quad K_j^i{}_{kl}(x, p) = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial p_a^h} \Gamma_{ml}^h - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial p_a^h} \Gamma_{mk}^h \right) p_a^m \\ + \Gamma_{ml}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jl}^m,$$

die Bestimmungszahlen des Krümmungstensors sind. Sie sind, wie die $\Gamma_{jk}^i(x, p)$, in p_a^i homogen von nullter Dimension und in den unteren beiden letzten Zeigern schiefsymmetrisch.

Wenn man insbesondere anstatt eines beliebigen Vektors (v) das ausgezeichnete Flächenelement p_a^i im Punkte (x) eines infinitesimalen Parallelogramms entlang parallel zu sich selbst herumführt, so gelangt man zu einem Tensor, den wir den Grundtensor der Krümmung des Raumes nennen. Man erhält

$$(4.6) \quad \delta_2 \delta_1 p_a^i - \delta_1 \delta_2 p_a^i = \frac{1}{2} K^i{}_{kl\alpha}(x, p) (d_1 x^k d_2 x^l - d_2 x^k d_1 x^l),$$

wo

$$(4.7) \quad K^i{}_{kl\alpha}(x, p) = \frac{1}{K+1} \left\{ \frac{\partial^2 H_{\alpha\rho}^i}{\partial p_p^k \partial x^l} - \frac{\partial_2 H_{\alpha\rho}^i}{\partial p_p^l \partial x^k} \right. \\ \left. - \frac{1}{K+1} \left(\frac{\partial^2 H_{\rho\alpha}^i}{\partial p_p^k \partial p_e^h} \frac{\partial H_{\epsilon\sigma}^h}{\partial p_l^e} - \frac{\partial^2 H_{\rho\alpha}^i}{\partial p_p^l \partial p_e^h} \frac{\partial H_{\epsilon\sigma}^h}{\partial p_k^e} \right) \right\}$$

die Bestimmungszahlen des Grundtensors der Krümmung sind. Sie sind in den unteren lateinischen Zeigern schiefsymmetrisch und in p_a^i homogen von erster Dimension.

Durch die Definition des Krümmungstensors besteht die Beziehung

$$(4.8) \quad K_j^i{}_{kl}(x, p) + K_k^i{}_{lj}(x, p) + K_l^i{}_{jk}(x, p) = 0.$$

Zwischen den Bestimmungszahlen des Krümmungstensors und Grundtensors der Krümmung bestehen die folgenden Beziehungen

$$(4.9) \quad K^i{}_{kl\alpha} = K_j^i{}_{kl} p_a^j, \quad \frac{1}{K} \frac{\partial K^i{}_{kl\alpha}}{\partial p_a^j} = K_j^i{}_{kl}.$$

Für den Krümmungstensor gilt noch die Identität

$$(4.10) \quad \frac{\partial K_j^i{}_{kl}}{\partial p_a^h} p_a^j = 0.$$

5. *Absoluter Differentialkalkül.* Im folgenden bilden wir aus gegebenen Tensoren, die von x^i und p_α^i abhängen, neue Tensoren durch den Prozess der kovarianten Ableitung.

Das kovariante Differential eines gegebenen kontravarianten Vektors $v^i(x, p)$ wird durch

$$(5.1) \quad \delta v^i(x, p) = dv^i(x, p) + \Gamma_{jk}^i(x, p) v^j(x, p) dx^k$$

gegeben. Insbesondere für das ausgezeichnete Flächenelement p_α^i erhält man

$$(5.2) \quad \delta p_\alpha^i = dp_\alpha^i + \Gamma_{jk}^i(x, p) p_\alpha^j dx^k = dp_\alpha^i + \frac{1}{K+1} \frac{\partial H_{\alpha\sigma}^i}{\partial p_\sigma^k} dx^k.$$

In (5.2) sind x^i und p_α^i als Argumente umzufassen. Ersetzend (5.2) in (5.1), erhält man

$$(5.3) \quad \delta v^i(x, p) = v_{/k}^i dx^k + v_{//k}^{\alpha} \delta p_\alpha^k,$$

wo

$$(5.4) \quad v^i(x, p)_{/k} = \frac{\partial v^i(x, p)}{\partial x^k} - \frac{1}{K+1} \frac{\partial v^i(x, p)}{\partial p_\alpha^j} \frac{\partial H_{\alpha\sigma}^j}{\partial p_\sigma^k} + \Gamma_{jk}^i(x, p) v^j(x, p),$$

$$(5.5) \quad v^i(x, p)_{//k}^{\alpha} = \frac{\partial v^i(x, p)}{\partial p_\alpha^k},$$

die Bestimmungszahlen der ersten kovarianten Ableitungen erster und zweiter Art von dem Vektor sind.

Da die $v^i(x, p)$ in p_α^i homogen von nullter Dimension sind, gilt das Gleiche auch für die $v_{/k}^i$, aber $v_{//k}^{\alpha}$ sind in p_α^i homogen von erster Dimension. Analog für einen kovarianten Vektor und irgendwelche Tensoren. Insbesondere sind für p_α^i die kovarianten Ableitungen erster Art Null:

$$(5.6) \quad p_{\alpha/k}^i = 0,$$

wie aus den Homogenitätseigenschaften der $H_{\alpha\beta}^i(x, p)$ und der Definition der $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ folgt.

Die kovariante Ableitung der ersten kovarianten Ableitung eines Vektors $v^i(x, p)$ nennen wir seine zweite kovariante Ableitung, usw. Für die kovarianten Ableitungen bestehen dieselben Rechenregeln wie für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen.

Bei Vertauschung der Zeiger in den zweiten kovarianten Ableitungen gelten die Formeln

$$(5.7) \quad v_{/h/k}^i - v_{/k/h}^i = K_{j\ h\ k}^i v^j + K_{k\ h\ \alpha}^i v_{//j}^\alpha.$$

Für die Vertauschung der kovarianten Differentiation erster und zweiter Art, gelten die Formeln

$$(5.8) \quad v_{/k//h}^i - v_{//h/k}^i = R_{j\ k\ h}^i v^j + S_{h\ k\ p}^{l\ \alpha} v_{//l}^p,$$

wo

$$(5.9) \quad R_{j\ k\ h}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial p_h^\alpha},$$

$$(5.10) \quad S_{h\ k\ p}^{l\ \alpha} = \Gamma_{kh}^l \delta_p^\alpha - \frac{1}{K+1} \frac{\partial^2 H_{p\sigma}^l}{\partial p_\sigma^k \partial p_h^\alpha} = -p_p^i \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial p_h^\alpha},$$

die die Bestimmungszahlen der Torsionstensoren sind.

Im folgenden berechnen wir die BIANCHISchen Identitäten in gewöhnlicher Weise. Zunächst bei Vertauschung der Zeiger in den zweiten kovarianten Ableitungen eines Skalars $f(x, p)$ erhalten wir

$$(5.11) \quad f_{/h/k} - f_{/k/h} = K_{k\ h\ \alpha}^p f_{//p}^\alpha.$$

Durch die nochmalige kovariante Differentiation erhalten wir

$$(5.12) \quad f_{/h/k/l} - f_{/k/h/l} = K_{k\ h\ \alpha/l}^p f_{//p}^\alpha + K_{k\ h\ \alpha}^p f_{//p/l}^\alpha.$$

Andererseits haben wir die Identität (vgl. (5.7))

$$(5.13) \quad f_{/k/h/l} - f_{/k/l/h} = -K_{k\ h\ l}^j f_{/j} + K_{l\ h\ \alpha}^j f_{/k//j}^\alpha,$$

so ergibt sich

$$(5.14) \quad f_{/h/k/l} - f_{/k/l/h} = K_{j\ k\ h\ \alpha/l}^p f_{//p}^\alpha - K_{k\ h\ l}^j f_{/j} + K_{j\ k\ h\ \alpha}^p f_{//j/l}^\alpha + K_{j\ l\ h\ \alpha}^p f_{/k//j}^\alpha.$$

Zyklische Vertauschung von h, k, l und Addition der entstehenden Gleichungen zu (5.14) gibt

$$\begin{aligned} & f_{//p}^\alpha (K_{k\ h\ \alpha/l}^p + K_{l\ k\ \alpha/h}^p + K_{h\ l\ \alpha/k}^p) - f_{/j} (K_{k\ h\ l}^j + K_{l\ k\ h}^j + K_{h\ l\ k}^j) \\ & - K_{j\ k\ h\ \alpha}^p S_{j\ i\ p}^\alpha f_{//p}^\alpha - K_{j\ h\ l\ \alpha}^p S_{j\ k\ p}^\alpha f_{//p}^\alpha - K_{j\ l\ k\ \alpha}^p S_{j\ h\ p}^\alpha f_{//p}^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Da $K_k^j{}_{hl}(x, p) + K_l^j{}_{kh}(x, p) + K_h^j{}_{lk}(x, p) = 0$ und $f(x, p)$ willkürlich sind, folgt hieraus

$$(5.15) \quad K^p{}_{kh\dot{p}/l} + K^p{}_{lk\dot{p}/h} + K^p{}_{hl\dot{p}/k} - K^j{}_{kh\alpha} S_j^p{}_{i\dot{p}}{}^\alpha - K^j{}_{hl\alpha} S_j^p{}_{k\dot{p}}{}^\alpha - K^j{}_{lk\alpha} S_j^p{}_{h\dot{p}}{}^\alpha = 0.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir auch

$$(5.16) \quad K_j^i{}_{hk/l} + K_j^i{}_{kl/h} + K_j^i{}_{lh/k} + K^p{}_{hk\alpha} R_j^i{}_{i\dot{p}}{}^\alpha + K^p{}_{kl\alpha} R_j^i{}_{h\dot{p}}{}^\alpha + K^p{}_{lh\alpha} R_j^i{}_{k\dot{p}}{}^\alpha = 0.$$

Diese sind die BIANCHISCHEN Identitäten in unserem Räume $\mathfrak{F}_n^{(1)}$.

6. *Längen- und Winkelmessung. Streckenkrümmung.* Als der Fundamentaltensor in unserem Räume $\mathfrak{F}_n^{(1)}$ wird der kovariante Tensor 2. Stufe mit den Bestimmungszahlen $g_{ij}(x, p)$ erklärt, welche durch (3.10) definiert werden und in p_α^i homogen von nullter Dimension sind.

Ausser den in § 3 ausgesprochenen Voraussetzungen machen wir jetzt noch die weitere, dass in dem dort betrachteten Bereiche der (x, p) die quadratische Form der Variablen y^i

$$(6.1) \quad g_{ij}(x, p) y^i y^j$$

positiv-definit ist. Die Masszahl eines Vektors (v) im Punkte (x) in bezug auf ein Flächenelement (p) in diesem Punkte erklären wir durch

$$(6.2) \quad l^2 = g_{ij}(x, p) v^i v^j$$

und unter der Länge des Vektors (v) im Punkte (x) in bezug auf das Flächenelement (p) erklären wir die positive Wurzel l aus der Masszahl von (v) . Den Winkel ω zweier Vektoren (v) und (w) im Punkte (x) in bezug auf ein Flächenelement (p) in diesem Punkte definieren wir durch

$$(6.3) \quad \cos \omega = \frac{g_{rs}(x, p) v^r w^s}{\sqrt{g_{ij}(x, p) v^i v^j} \sqrt{g_{kl}(x, p) w^k w^l}},$$

wobei die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Die Änderung, welche eine von den Koordinaten (x, p) des ausgezeichneten Flächenelementes im Punkte (x) abhängige Grösse erleidet, wird bezeichnet durch d , wenn sie samt dem ausgezeichneten Flächen-

elemente vom Punkte (x) nach dem Punkte $(x+dx)$ übertragen wird. Für die Masszahl eines Vektors (v) gilt die Formel

$$(6.4) \quad d(l^2) = d(g_{ij}(x, p)v^i v^j) = g_{ij,l}(x, p)v^i v^j dx^l,$$

wo

$$(6.5) \quad g_{ij,l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{1}{K+1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_a^h} \frac{\partial H_{ab}^h}{\partial p_b^l} - \Gamma_{il}^h g_{hj} - \Gamma_{jl}^h g_{ih},$$

die im allgemeinen nicht identisch verschwindet. Somit ist die affine Übertragung nicht metrisch (vgl. J. A. SCHOUTEN: Der RICCI-Kalkül, besonders S. 75). Eine analoge Formel besteht auch für die Änderung des Kosinus des Winkels zweier Vektoren im Punkte (x) in bezug auf das ausgezeichnete Flächenelement dieses Punktes bei simultaner Parallelübertragung dieser Vektoren und des ausgezeichneten Flächenelementes (p) nach dem willkürlichen Nachbarpunkte $(x+dx)$.

Bei der Parallelübertragung der Figur, die aus einem Vektor im Punkte (x) und dem ausgezeichneten Flächenelemente dieses Punktes gebildet wird, ändert sich also längs eines willkürlichen Flächenelementes im allgemeinen die Länge des Vektors in bezug auf das ausgezeichnete Flächenelement. Analoges gilt auch für den Winkel zweier Vektoren in bezug auf das ausgezeichnete Flächenelement.

Durch den Prozess der parallelen Herumführung eines willkürlichen Vektors (v) im Punkte (x) ein infinitesimales Parallelogramm entlang gelangt man zum Begriffe des Tensors der Streckenkrümmung des Raumes, wenn dabei das ausgezeichnete Flächenelement (p) des Punktes (x) gleichfalls parallel zu sich selbst mitgeführt wird. Man erhält

$$(6.6) \quad \delta_1 \delta_2(l^2) - \delta_2 \delta_1(l^2) = (g_{ij/k,l} - g_{ij/l,k})v^i v^j d_1 x^l d_2 x^k \\ = -\frac{1}{2} S_{ijkl} v^i v^j (d_1 x^l d_2 x^k - d_2 x^l d_1 x^k),$$

$$(6.7) \quad S_{ijkl}(x, p) = g_{ij/k,l} - g_{ij/l,k} = -K_{kla}^p \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_a^p} - K_{jilk} - K_{ijkl},$$

setzend

$$(6.8) \quad K_{ijkl}(x, p) = g_{jp} K_{ikl}^p(x, p).$$

$S_{ijkl}(x, p)$ sind die Bestimmungszahlen des Tensors der Streckenkrümmung. Sie sind in den ersten zwei Zeigern symmetrisch, in den letzten zwei schief-symmetrisch, und in p_a^p homogen von nullter Dimension.

Kapitel III. Metrische Übertragungen.

7. *KAWAGUCHIScher Satz.* Da die im Kapitel II erwähnte affine Übertragung nicht metrisch ist, wenden wir den KAWAGUCHISchen Satz⁽¹⁾ an, um eine metrische Übertragung abzuleiten.

Satz. Sei eine affine Übertragung eines Vektors $v^i(x, p)$ in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_n^{(1)}$ durch

$$\delta v^i = dv^i + \Gamma_{ik}^i v^j dx^k$$

gegeben. So ist die Übertragung eines Vektors $v^i(x, p)$, welche durch

$$(7.1) \quad Dv^i = dv^i + \left(\Gamma_{jk}^i dx^k + \frac{1}{2} g^{ih} \delta g_{jh} \right) v^j$$

gegeben ist, metrisch, wobei g_{ij} bzw. g^{ij} die Bestimmungszahlen des kovarianten bzw. kontravarianten Fundamentaltensors sind.

Somit ist die metrische Übertragung eines willkürlichen Tensors in $\mathfrak{F}_n^{(1)}$ durch

$$(7.2) \quad Dv_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = dv_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} + \sum_{p=1}^r \left(C_{lk}^{i_p \alpha} dp_{\alpha}^k + \Pi_{lk}^{i_p} dx^k \right) v_{j_1 \dots j_{p-1} l i_{p+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{p-1} l i_{p+1} \dots i_r} \\ - \sum_{p=1}^s \left(C_{j_p k}^{l \alpha} dp_{\alpha}^k + \Pi_{j_p k}^l dx^k \right) v_{j_1 \dots j_{p-1} l j_{p+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} l i_{p+1} \dots i_s}$$

gegeben, wobei man setzt

$$(7.3) \quad C_{jk}^{i \alpha} = \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{jh}}{\partial p_{\alpha}^k},$$

$$(7.4) \quad \Pi_{jk}^i = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^i + g^{ih} \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} - g^{ih} g_{jl} \Gamma_{hk}^l \right).$$

Es ist selbstverständlich, dass

$$(7.5) \quad Dg_{ij} = dg_{ij} - g_{il} (C_{jk}^{l \alpha} dp_{\alpha}^k + \Pi_{jk}^l dx^k) \\ - g_{lj} (C_{ik}^{l \alpha} dp_{\alpha}^k + \Pi_{ik}^l dx^k) \equiv 0.$$

8. *Andere metrische Übertragung.* Nach E. CARTAN⁽²⁾ besprechen wir die Methode, durch welche eine andere metrische Übertragung bestimmt wird. D.h. wir haben den folgenden Satz:

(1) A. KAWAGUCHI, 11.

(2) E. CARTAN, 6, 7.

Satz. Im allgemeinen metrischen Raume mit den Bestimmungszahlen des Fundamentaltensors $g_{ij}(x, p)$ sei die Grundübertragung durch (5.2) gegeben. So können wir eine metrische Übertragung mit Hilfe der drei folgenden Forderungen definieren:

$$(8.1) \quad Dv^i = dv^i + C_{jk}^{i\alpha} v^j dp_\alpha^k + \Lambda_{jk}^i v^j dx^k,$$

wobei

$$(8.2) \quad \Lambda_{jk}^i = \gamma_{jk}^i + \frac{1}{K+1} \left(g^{il} C_{jkh}^\alpha \frac{\partial H_{\alpha\beta}^h}{\partial p_\beta^l} - C_{kh}^{i\alpha} \frac{\partial H_{\alpha\beta}^h}{\partial p_\beta^j} \right),$$

$$(8.3) \quad \gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\}, \quad (8.4) \quad C_{jk}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jl}}{\partial p_\alpha^k},$$

Forderung I. Das kovariante Differential des Fundamentaltensors $g_{ij}(x, p)$ verschwindet.

Forderung II. Seien X^i und Y^i zwei Vektoren mit demselben ausgezeichneten Elemente (x, p) ; seien $\bar{D}X^i$ und $\bar{D}Y^i$ ihre kovarianten Differentials, während das ausgezeichnete Element sich um das Zentrum umdreht. Man erhält das Symmetriengesetz:

$$X_i \bar{D}Y^i = Y_i \bar{D}X^i,$$

wenn ihre Bestimmungszahlen X^i , Y^i dabei ungeändert bleiben.

Forderung III. Wenn die PFAFFschen Ausdrücke (5.2) gleich Null, sind die Komponenten Λ_{jk}^{*i} , welche in dem Ausdrücke des kovarianten Differentials eines Vektors erscheinen, in den zwei unteren Zeigern symmetrisch.

Der Beweis des Satzes ist ganz analog wie in CARTANScher Theorie des FINSLERSchen Raumes.

In dem Falle $K=1$ fallen (8.2), (8.3) und (8.4) mit den CARTANSchen Übertragungsparametern formelhaft zusammen, aber sind wesentlich ganz andere. Im allgemeinen fällt natürlich das kovariante Differential des ausgezeichneten Flächenelementes p_α^i

$$Dp_\alpha^i = dp_\alpha^i + C_{jk}^{i\beta} p_\alpha^j dp_\beta^k + \Lambda_{jk}^i p_\alpha^j dx^k$$

nicht mit dem System der PFAFFschen Ausdrücke (5.2) zusammen.

Bemerkung. Es ist klar, dass die Differenzen der in § 7 erhaltenen PFAFFschen Ausdrücke $\Gamma_{jk}^i dx^k + \frac{1}{2} g^{ih} \delta g_{jh}$ und der in § 8 erhaltenen PFAFFschen Ausdrücke $C_{jk}^{i\alpha} dp_\alpha^k + \Lambda_{jk}^i dx^k$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{jk}^i - g^{ih} g_{jl} \Gamma_{hk}^l + g^{ih} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{K+1} \left(C_{kh}^{i\alpha} \frac{\partial H_{\alpha\beta}^h}{\partial p_\beta^j} - g^{il} C_{jkh}^\alpha \frac{\partial H_{\alpha\beta}^h}{\partial p_\beta^l} \right) \right\} dx^k \end{aligned}$$

die Bestimmungszahlen eines Tensors sind. Wir sehen auch nach dem KAWAGUCHIschen Satz, dass die Bestimmungszahlen des Tensors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{jk}^i - g^{ih} g_{jl} \Gamma_{hk}^l + g^{ih} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{K+1} \left(C_{kh}^{i\alpha} \frac{\partial H_{\alpha\beta}^h}{\partial p_\beta^j} - g^{il} C_{jkh}^\alpha \frac{\partial H_{\alpha\beta}^h}{\partial p_\beta^l} \right) \right\} g_{ip} dx^k \end{aligned}$$

bezüglich j und p schiefsymmetrisch sind.

Literaturverzeichnis.

1. L. BERWALD, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, Jahresb. d. Deutschen Math. Ver., Bd. 34 (1925), S. 213–220.
2. L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschrift, Bd. 25 (1926) S. 40–73.
3. J. DOUGLAS, The general geometry of paths, Annals of Math. Bd. 29 (1927), S. 143–168.
4. L. BERWALD, Parallelübertragung in allgemeinen Räumen, Atti Congresso intern. Matem, Bologna, Bd. 24 (1928), S. 263–270.
5. J. DOUGLAS, Systems of K -dimensional manifolds in an N -dimensional space, Mathematische Annalen, Bd. 105 (1931), S. 707–733.
6. E. CARTAN, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actualités scientifiques et industrielles, Bd. 72.
7. E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, *ibid.* Bd. 79.
8. A. KAWAGUCHI, Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des FINSLERSchen Raumes ist, Monatshefte für Math. und Phys., Bd. 43 (1936), S. 289–297.
9. A. KAWAGUCHI, Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang, der von Matrizen abhängig ist, *ibid.*, Bd. 44 (1936), S. 131–152.
10. A. KAWAGUCHI, Ein n -dimensionaler metrischer Raum mit dem Zusammenhang, der von m -dimensionalen Flächenelementen abhängig ist, welche bald irgendwo publiziert wird.
11. A. KAWAGUCHI, Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume, Proceedings of Amsterdam, Bd. 40 (1937), S. 596–601.