



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	SUR LES ENSEMBLES ANALYTIQUES NULS
Author(s)	Inagaki, Takeshi
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 6(4), 175-216
Issue Date	1938
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55936
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_06_N4_175-216.pdf



SUR LES ENSEMBLES ANALYTIQUES NULS

Par

Takeshi INAGAKI

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
Introduction	175
I. Définitions ; Remarques préliminaires	177
1. Cribles de la relation " $\succ$ "	177
2. Les cribles dérivés	179
3. Les constituantes	180
4. Le système v	181
II. La classe des constituantes supérieures au sens de SIERPIŃSKI . . .	183
5. Évaluation de la classe des constituantes supérieures au sens de SIERPIŃSKI	183
6. Schèmes primaires	184
7. La somme et le produit d'une infinité dénombrable des constituantes supérieures des schèmes épuisables au sens de SIERPIŃSKI . . .	186
8. Détermination de la classe des constituantes supérieures au sens de SIERPIŃSKI	190
III. La classe des constituantes supérieures au sens de LUSIN	194
9. Évaluation de la classe des constituantes supérieures au sens de LUSIN	194
10. Schèmes normaux	197
11. Schèmes congruents	200
12. Normalisation des schèmes donnés et les inégalités qui s'y rattachent	202
13. Transformation des schèmes de SOUSLIN aux cribles de LUSIN . .	212
14. Détermination de la classe des constituantes supérieures au sens de LUSIN	216

INTRODUCTION

Introduction. Soient $\mathfrak{F}$ une famille d'ensembles linéaires dans l'espace à une dimension OX . Désignons par $\mathfrak{F}_B$ la famille borelienne composée de $\mathfrak{F}$. Posons $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}$, et pour tout nombre transfini (ou fini) α , ($1 \leq \alpha < \mathfrak{Q}$), désignons par $\mathfrak{F}^\alpha$ la famille $(\sum_{0 \leq \beta < \alpha} \mathfrak{F}^\beta)_\sigma$ ou la famille

$(\sum_{0 \leq \beta < \alpha} \mathfrak{F}^\beta)_\delta$ suivant que α est impair ou pair (les nombres limites étant considérés comme pairs). La famille borelienne $\mathfrak{F}_B$ est alors la somme d'une suite transfinie (de type Ω) des familles :

$$\mathfrak{F}_B = \mathfrak{F}^0 + \mathfrak{F}^1 + \dots + \mathfrak{F}^\omega + \dots + \mathfrak{F}^\alpha + \dots \mid \Omega.$$

Dans son article "Sur les ensembles analytiques nuls"⁽¹⁾, M. N. LUSIN a donné une très intéressante condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de $\mathfrak{F}_B$ soit de classe 2α ($0 \leq \alpha < \Omega$), en introduisant la notion de "constituante supérieure" de l'espace OX considéré comme complémentaire de l'ensemble vide criblé au moyen du crible bien ordonné. Mais, il semble que sa démonstration n'est pas claire⁽²⁾. Nous allons donc étudier de nouveau ces recherches de M. N. LUSIN.

En employant les constituantes introduites par MM. N. LUSIN et W. SIERPIŃSKI pour le complémentaire d'un ensemble-noyau d'un schème de SOUSLIN, nous allons considérer d'abord (dans le chapitre II) la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de $\mathfrak{F}_B$ soit de classe 2α ($0 \leq \alpha < \Omega$).

Pour ce cas, les constituantes du complémentaire de noyau sont définies comme il suit : Soient $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ un schème monotone de SOUSLIN et E l'ensemble-noyau de ce schème. Posons $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^0 = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\alpha+1} = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}^\alpha$ et pour λ limite, $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\lambda = \prod_{\xi < \lambda} \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\xi$. Posons en outre $E_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^\alpha$. Pour un point x qui n'appartient pas à E , on peut sans peine voir qu'il existe un nombre transfini de seconde classe (ou fini) α_x bien déterminé tel que

$$x \in E_\beta \text{ pour } \beta < \alpha_x \text{ et } x \notin E_\beta \text{ pour } \beta \geq \alpha_x.$$

Appelons partie constituante (α) de l'ensemble complémentaire de E ou simplement constituante $\mathfrak{E}_\alpha$, l'ensemble des points $OX-E$ pour lesquels nous avons l'identité $\alpha_x = \alpha$, α étant un nombre fixe, fini ou transfini de seconde classe, donné à l'avance. En particulier, nous disons qu'un schème de SOUSLIN est *épuisable*, si le noyau de ce schème de SOUSLIN est vide. Ces définitions posées, nous avons le théorème :

(1) Cf. Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 109-131.

(2) En effet, M. N. LUSIN dans la démonstration des lemmes I et III, (voir p. 118 et p. 120 de M. N. LUSIN, loc. cit.), en faisant appel à l'induction transfinie, a raisonné incomplètement le cas où γ (ou $\bar{\gamma}$) est de seconde espèce.

Tout ensemble $\mathfrak{F}^{2r}$ peut être considéré comme la constituante supérieure d'un schème monotone de SOUSLIN, qui est épuisable et de type⁽¹⁾ $\omega\gamma$. Inversement, toute constituante supérieure d'un schème monotone de SOUSLIN, qui est épuisable et de type $\omega\gamma$, est un ensemble $\mathfrak{F}^{2r}$.

En transformant un schème de SOUSLIN à un crible bien ordonné convenablement choisi, nous obtenons la condition analogue à celle de M. N. LUSIN, (Chap. III), comme il suit :

Tout ensemble $\mathfrak{F}^{2r}$ peut être considéré comme la constituante supérieure d'un crible bien ordonné de type⁽¹⁾ ω^r (d'ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$). Inversement, la constituante supérieure d'un crible (d'ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$) bien ordonné de type ω^r est un ensemble $\mathfrak{F}^{2r}$.

Dans le chapitre I, nous y ajoutons la définition d'un crible, (dont l'intersection par la droite parallèle à l'axe OY ne consiste pas nécessairement d'au plus d'une infinité dénombrable de points), qui donne, comme cas particulier, la notion du schème de SOUSLIN.

I. DÉFINITIONS; REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

1. **Cribles de la relation " $\succ$ ".** Étant donné un nombre irrationnel ξ entre 0 et 1, désignons par $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ son développement en fractions continues, et appelons ξ_n la n -ième coordonnée de ξ . Si, pour deux nombres irrationnels entre ξ et η , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$, il existe un indice k tel que $\xi_n > \eta_n$ pour $n \geq k$, nous disons que ξ est situé au-dessus de η au sens de LUSIN, et écrivons-le en symboles $\xi \succ \eta$. Si $\xi \succ \eta$, ou bien si $\eta \succ \xi$, ou bien si $\xi = \eta$, ces deux nombres ξ et η sont dits *comparables*, et sinon, ils sont *incomparables*.

Prenons un espace à deux dimensions $\mathfrak{S}_{xy}$ ⁽²⁾ et considérons, dans ce domaine, un ensemble des points quelconques M . Soient $p(x)$ un point de l'abscisse (qui se trouve dans l'axe $\mathfrak{S}_x$), et D_x la droite parallèle à l'axe OY menée par le point p . Cela posé, désignons par P_x l'ensemble des points de M qui appartient à D_x . Deux cas seulement sont possibles :

(1) Voir p. 183.

(2) Dans le chapitre I, avec M. N. LUSIN, nous désignons par $\mathfrak{S}$ ou bien par $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_t$ etc. l'ensemble de tous les points irrationnels dans un domaine linéaire, si l'on considère l'ensemble des points irrationnels comme appartenant aux axes OX , OY , OT etc. L'ensemble produit cartésien $\mathfrak{S}_x \times \mathfrak{S}_y$ ou bien $\mathfrak{S}_x \times \mathfrak{S}_y \times \mathfrak{S}_z$ sera désigné par $\mathfrak{S}_{xy}$ ou bien par $\mathfrak{S}_{xyz}$. Nous entendrons par OXY le produit cartésien $OX \times OY$.

Premier cas. Dans l'ensemble linéaire P_x , il existe une suite des points dont la coordonnée est $(x, y^{(n)})$ tels que

$$(1) \quad y^{(1)} \succ y^{(2)} \succ y^{(3)} \succ \dots \succ y^{(n)} \succ \dots$$

Deuxième cas. Dans l'ensemble linéaire P_x , il n'existe aucune suite des points qui remplissent la relation (1).

Désignons par $\mathfrak{E}$ la totalité des points p du domaine $\mathfrak{S}_x$ pour lesquels le deuxième cas se produit, et par E l'ensemble des points p de ce domaine pour lesquels le premier cas a lieu.

Nous disons que cet ensemble E est un ensemble criblé de l'ensemble $M^{(1)}$ au moyen du crible de la relation " $\succ$ ".

Le crible de la relation " $\succ$ " a des propriétés analogues à celles du crible bien ordonné de M. N. LUSIN. Pour le voir, nous allons indiquer d'abord :

Tout ensemble criblé E au moyen d'un crible analytique M est un ensemble analytique.

En effect, soient $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t = F(x, y)$ les formules qui définissent une transformation du domaine $\mathfrak{S}_{xy}$ en portion $(0, 1)$ du domaine linéaire $\mathfrak{S}_t$, où les fonctions φ , ψ et F sont continues dans $(0, 1)$. Considérons en même temps une suite illimitée de fonctions

$$t_1 = f_1(\tau), \quad t_2 = f_2(\tau), \quad \dots, \quad t_n = f_n(\tau), \quad \dots$$

continues sur la portion $(0, 1)$ du domaine $\mathfrak{S}_\tau$ et qui jouissent de la propriété suivante : quelle que soit la suite des nombres irrationnels $t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0, \dots$ compris entre 0 et 1, il existe un nombre irrationnel τ^0 , $0 < \tau^0 < 1$, tel que

$$t_n^0 = f_n(\tau^0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Posons $x_n = \varphi(f_n(\tau))$, $y_n = \psi(f_n(\tau))$. L'ensemble criblé E sera alors donné en symboles :

$$\begin{aligned} [x \in E] &\equiv \sum_{\tau} \left[\prod_n \{ (x_n, y_n) \in M \} \cdot \prod_m \{ x = \varphi(f_m(\tau)) \} \cdot \prod_{i>j} \{ y_i \prec y_j \} \right] \\ &\equiv \sum_{\tau} \left[\prod_n \{ (x_n, y_n) \in M \} \cdot \prod_{m, m'} \{ \varphi(f_m(\tau)) \right. \\ &\quad \left. = \varphi(f_{m'}(\tau)) \} \cdot \prod_{i>j} \{ \psi(f_i(\tau)) \prec \psi(f_j(\tau)) \} \right]. \end{aligned}$$

(1) Souvent nous appelons "crible" l'ensemble M lui-même.

Comme on peut vérifier immédiatement : $E\left[\prod_n \{(x_n, y_n) \in M\}\right]$ est un ensemble analytique, $E\left[\prod_{m, m'} \{\varphi(f_m(\tau)) = \varphi(f_{m'}(\tau))\}\right]$ est un ensemble fermé et $E\left[\prod_{i > j} \{\psi(f_i(\tau)) \prec \psi(f_j(\tau))\}\right]$ est un ensemble F_σ . L'ensemble E est donc un ensemble analytique comme projection d'un ensemble analytique, c. q. f. d.

2. Les cribles dérivés. Prenons l'espace à trois dimensions $\mathfrak{S}_{xyz}$ et considérons un ensemble $M^{(0)}$ dans l'espace à deux dimensions $\mathfrak{S}_{xy}$. Désignons par D_x la droite parallèle à l'axe OY menée par le point x dans l'espace linéaire $\mathfrak{S}_x$ et par $P_x^{(0)}$ la partie commune à D_x et à $M^{(0)}$. Soit $p(x, y)$ un point dans l'ensemble linéaire $P_x^{(0)}$. S'il n'existe aucun point $p^*(x, y^*)$ situé dans $P_x^{(0)}$ tel que $y \succ y^*$, on dit que p est le point minimum de $M^{(0)}$.

Cela posé, introduisons la notion de crible dérivé en suivant l'idée de M. N. LUSIN pour le crible bien ordonné ; C'est un ensemble déduit du crible donné $M^{(0)}$ en enlevant tous les points minima de l'ensemble $M^{(0)}$.

Tout d'abord, dans le domaine $\mathfrak{S}_{xz}$, nous considérons un ensemble M transformé de $M^{(0)}$ de la manière suivante : Prenons un point quelconque p de $M^{(0)}$. Soit (x, y) les coordonnées du point p . Dans l'espace $\mathfrak{S}_{xz}$, considérons le point q dont les coordonnées sont (x, y) . M est l'ensemble formé de tel point q . Puis, formons, dans le domaine $\mathfrak{S}_{yz}$, un ensemble N qui est un ensemble des points dont les coordonnées (y, z) remplissent la relation $y \succ z$. On peut immédiatement vérifier que cet ensemble N est un F_σ . Considérons l'ensemble $M^{(1)}$ défini par $M^{(1)} = \left[\text{Proj.}_{xy} \{ (\mathfrak{S}_x \times N) \cdot (M \times \mathfrak{S}_y) \} \right] \cdot M^{(0)}$ où Proj._A signifie la projection de l'ensemble A sur le domaine $\mathfrak{S}_{xy}$ et $A \times B$ est l'ensemble composé de tous les couples ordonnés de a, b où $a \in A$ et $b \in B$. Il est facile de voir que $M^{(1)}$ est justement le crible désiré. Si le crible $M^{(0)}$ est dénombrable⁽¹⁾ et mesurable B , $M^{(1)}$ est encore un crible dénombrable et mesurable B . En général, pour un nombre transfini α (ou fini), nous allons définir le crible dérivé $M^{(\alpha)}$ d'ordre α .

Premier cas où α est un nombre isolé : Posons $\alpha = \alpha' + 1$. Nous définissons $M^{(\alpha)}$ comme le crible dérivé de $M^{(\alpha')}$.

Deuxième cas où α est un nombre limite. Dans ce cas, définissons le crible dérivé $M^{(\alpha)}$ comme la partie commune aux cribles d'ordres inférieurs à α .

(1) Un crible M est dit dénombrable, lorsque la partie commune à M et à la droite parallèle à l'axe OY menée par chaque point x dans $\mathfrak{S}_x$ est au plus dénombrable.

$M^{(0)}$ étant un crible dénombrable et mesurable B , il est évident que le crible dérivé d'ordre quelconque l'est aussi.

3. **Les constituantes.** Soient $M^{(0)}$ un crible quelconque situé dans $\mathfrak{S}_{xy}$ et E l'ensemble criblé au moyen de $M^{(0)}$. Prenons un point quelconque x dans $\mathfrak{S}_x$. Désignons par D_x la droite parallèle à l'axe OY et menée par x , et considérons l'ensemble $P_x^{(0)}$ qui est la partie commune à $M^{(0)}$ et à D_x . Si $P_x^{(0)}$ contient au moins un point minimum, supprimons l'ensemble de tous les points minima de $P_x^{(0)}$ et désignons par $P_x^{(1)}$ l'ensemble restant. En général, nous définirons $P_x^{(\alpha)}$ pour un nombre transfini α (ou fini), de la manière suivante :

Pour le cas où α est un nombre isolé, soit $\alpha = \alpha' + 1$, $P_x^{(\alpha)}$ est l'ensemble déduit en supprimant tous les points minima de $P_x^{(\alpha')}$.

Pour le cas où α est un nombre limite, nous définirons $P_x^{(\alpha)}$ comme la partie commune à tous les ensembles $P_x^{(\xi)}$ où $\xi < \alpha$.

D'après cette définition, si le crible $M^{(0)}$ est un ensemble dénombrable, à chaque point x de $\mathfrak{S}_x$ correspond un nombre transfini (ou fini) α_x bien déterminé de seconde classe tel que

$$P_x^{(\alpha_x)} < P_x^{(\beta)} \text{ pour } \beta < \alpha_x \text{ et } P_x^{(\alpha_x)} = P_x^{(\beta)} \text{ pour } \beta \geq \alpha_x.$$

Cela posé, considérons un point quelconque situé dans $\mathfrak{S}_x$. Il existe alors deux cas possibles.

Premier cas. Si x est un point de $\mathfrak{E}$, il existe un nombre transfini (fini) α_x tel que

$$P_x^{(\xi)} \neq O \text{ pour } \xi < \alpha_x \text{ et } P_x^{(\xi)} = O \text{ pour } \xi \geq \alpha_x.$$

Deuxième cas. Si x est un point de E , il existe un nombre transfini (fini) α_x tel que

$$P_x^{(\xi)} > P_x^{(\alpha_x)} \text{ pour } \xi < \alpha_x \text{ et } P_x^{(\xi)} = P_x^{(\alpha_x)} \text{ pour } \xi \geq \alpha_x.$$

Ceci étant, nous posons les définitions suivantes :

Appelons partie constituante (α) de l'ensemble criblé E ou simplement constituante E_α , l'ensemble des points x de E qui correspondent à un nombre α donné, $\alpha = \alpha_x$.

Appelons aussi partie constituante (α) de complémentaire $\mathfrak{E}$ de l'ensemble criblé E ou simplement constituante $\mathfrak{E}_\alpha$, l'ensemble des points x de $\mathfrak{E}$ pour lesquels nous avons l'identité $\alpha = \alpha_x$, α étant un nombre fixe, fini ou transfini de seconde classe, donné à l'avance.

On voit bien que les constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ sont sans points communs deux à deux et, par suite, que les ensembles E et $\mathcal{E}$ sont décomposés complètement en leurs constituantes

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots + E_\alpha + \dots \mid \Omega$$

et
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_\alpha + \dots \mid \Omega .$$

Or, en suivant la marche de M. N. LUSIN, nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Si le crible donné est dénombrable et mesurable B , toutes les constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ sont mesurables B .

Considérons ensuite l'espace à trois dimensions $\mathfrak{J}_{xyz}$. Prenons, dans l'espace $\mathfrak{J}_{xy}$, un ensemble quelconque M . Nous transposons chaque point $p(x, y)$ de M au point $p^*(x, y)$ dans le domaine $\mathfrak{J}_{xz}$. Ainsi, désignons par M^* l'ensemble transformé de M . Puis, prenons dans le domaine $\mathfrak{J}_{yz}$ un ensemble N pour lequel chaque point $q(y, z)$ remplit la relation $z \succ y$. Enfin, considérons la projection sur le domaine $\mathfrak{J}_{xy}$ de la partie commune aux ensembles produits cartésiens $\mathfrak{J}_y \times M^*$ et $\mathfrak{J}_x \times N$, et désignons par M^{**} cet ensemble. Alors, M^{**} a la propriété suivante : $p(x, y)$ étant un point quelconque de M , M^{**} contient tous les points $p^{**}(x, y^{**})$, dans $\mathfrak{J}_{xy}$, tels que $y \succ y^{**}$. Nous disons que l'ensemble M^{**} est un ensemble situé au-dessous de M .

Selon cette remarque, nous avons la proposition :

Si un crible analytique dénombrable M n'est pas borné sur l'espace $\mathfrak{J}_x$, il existe alors, dans $\mathfrak{J}_x$, au moins un point criblé au moyen de M .

4. Le système ν . Prenons le nombre irrationnel $\nu = (2^2, 3^3, \dots, (n+1)^{n+1}, \dots)$. Arrangeons d'abord la suite illimitée $(1, 2, 3, \dots)$ à une suite double illimitée comme il suit :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots\dots\dots \\ 2 & 6 & 10 & 14 & \dots\dots\dots \\ 4 & 12 & 20 & 28 & \dots\dots\dots \\ 8 & 24 & 40 & 56 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Supposons que $(e_{n_1}^1, e_{n_1}^2, \dots, e_{n_1}^k, \dots)$ est le n_1 -ième rang dans la suite (1), c.-à-d. $e_{n_1}^k = 2^{n_1-1}(2k-1)$. Prenons, d'autre part, le

nombre irrationnel ν . Soustrayons le nombre k_1 de la $e_{n_1}^{k_1}$ -ième coordonnée de ν , et le nombre 1 de toutes les autres coordonnées de ν . Désignons par ν_{n_1} le nombre irrationnel ainsi défini. Ensuite, posons $k_1 = e_{n_2}^{k_2}$, et soustrayons le nombre k_2 de la $e_{n_1}^{k_1}$ -ième coordonnée de ν_{n_1} , et le nombre 1 de toutes les autres coordonnées de ν_{n_1} sauf la première. Appelons ν_{n_1, n_2} le nombre irrationnel ainsi défini. Posons maintenant $k_2 = e_{n_3}^{k_3}$ et soustrayons le nombre k_3 de la $e_{n_1}^{k_1}$ -ième coordonnée de ν_{n_1, n_2} , et le nombre 1 de toutes les autres coordonnées de ν_{n_1, n_2} sauf la première et la deuxième. Écrivons par ν_{n_1, n_2, n_3} le nombre irrationnel ainsi défini. Continuons ainsi de suite.

Nous avons donc un système $\{\nu_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ formé des nombres irrationnels définis comme il précède. Le système $\{\nu_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ sera dit *système ν* .

Soient $\nu_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et $\nu_{n'_1, n'_2, \dots, n'_{k'}}$ ($k \geq k'$), deux nombres irrationnels quelconques du système ν . D'après la construction du système ν ces deux nombres irrationnels sont comparables dans le cas et seulement dans le cas où $n_1 = n'_1, n_2 = n'_2, \dots, n_{k'} = n'_{k'}$.

Si nous appliquons le système ν et le crible de la relation " $\succ$ ", le crible rectangulaire⁽¹⁾ de M. N. LUSIN peut être considéré comme un crible rectiligne. En effet, comme les rectangles de Baire de rang 1 dans le domaine $\mathfrak{S}_{xy}$ sont au plus une infinité dénombrable, nous faisons correspondre entre tous les rectangles et tous les nombres irrationnels ν_{m_1} de rang 1 du système ν biunivoquement et transposons parallèlement la base du rectangle à la place dont l'ordonnée est le nombre irrationnel correspondant. Supposons que le rectangle R_{n_1} de rang 1 correspond au nombre irrationnel ν_{m_1} , comme il existe dans R_{n_1} au plus une infinité dénombrable des rectangles de rang 2, faisons correspondre biunivoquement entre tous les rectangles et tous nombres irrationnels ν_{m_1, m_2} qui sont au-dessous de ν_{m_1} et transposons parallèlement la base de R_{n_1, n_2} sur la droite dont l'ordonnée est ν_{m_1, m_2} . Ainsi, si le rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de rang k correspond au nombre irrationnel $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, faisons correspondre biunivoquement tous les rectangles de rang $k+1$ $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ enfermés dans $R_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ à tous les nombres irrationnels $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$ qui sont au-dessous

(1) Voir N. LUSIN: Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze Fisiche e Matematiche), Serie II, Vol. II (1933-XI), pp. 5-6.

de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et transposons la base de $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ sur la droite dont l'ordonnée coïncide avec ce nombre irrationnel correspondant.

Ainsi nous avons un crible de la relation " $\succ$ ", formé des rectilignes, qui est équivalent au crible rectangulaire de M. N. LUSIN. Donc, notre crible donne, *comme cas particulier*, la notion du schème de SOUSLIN, et des constituantes introduites par MM. W. SIERPIŃSKI et N. LUSIN⁽¹⁾. Dans la suite, les constituantes d'ensemble complémentaire à un ensemble criblé par le crible de la relation " $\succ$ " seront appelées *constituantes au sens de SIERPIŃSKI*, et celles qui sont criblées par le crible bien ordonné seront appelées *constituantes au sens de LUSIN*.

Nous considérons, avec M. N. LUSIN, le cas où l'ensemble criblé est un ensemble vide. Dans ce cas nous avons le développement de tout espace en une série transfinie des constituantes :

$$(-\infty, +\infty) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_\alpha + \dots | \beta.$$

Pour le crible de la relation " $\succ$ ", nous considérons seulement le cas où le crible correspond à un schème de SOUSLIN. Ce crible (ou le schème correspondant) est appelé *un crible (ou un schème) épuisable au sens de SIERPIŃSKI*.

Ainsi, pour les deux cas, on a $0 < \beta < \Omega$. Si β est de première espèce, nous pouvons poser $\beta = \beta^* + 1$. $\mathcal{E}_{\beta^*}$ sera nommée *la constituante supérieure au sens de SIERPIŃSKI* quand il s'agit du crible de la relation " $\succ$ " (ou du schème de SOUSLIN), et *la constituante supérieure au sens de LUSIN* quand il s'agit du crible bien ordonné.

Un crible (ou un schème de SOUSLIN) épuisable au sens de SIERPIŃSKI est dit *de type β* , s'il possède la constituante supérieure à l'ordre β . Quand il s'agit du crible bien ordonné, ce crible est dit d'après M. N. LUSIN *de type β* , si la projection orthogonale de ce crible sur l'axe OY est un ensemble bien ordonné de type β .

II. LA CLASSE DES CONSTITUANTES SUPÉRIEURES AU SENS DE SIERPIŃSKI.

5. Évaluation de la classe des constituantes supérieures au sens de SIERPIŃSKI. Soit $\mathfrak{F}$ une famille d'ensembles de l'axe OX multiplicative.

(1) Voir SIERPIŃSKI et LUSIN : Sur un ensemble non mesurable B, Journal de Mathématiques (9^e série), t. 2 (1923), pp. 53-72 ; HAUSDORFF : Mengenlehre, Leipzig u. Berlin, 1935, p. 187 ; SIERPIŃSKI : Sur une propriété des ensembles (A), Fund. Math., t. 8 (1926), pp. 362-369.

Posons d'abord $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}$. Désignons par $\mathfrak{F}_\sigma^1$ et $\mathfrak{F}_\sigma^2$ les familles $(\mathfrak{F}^0)_\sigma$ et $(\mathfrak{F}_\sigma^1)_\sigma$ respectivement. Supposons qu'on définit $\mathfrak{F}_\sigma^{2\beta}$ et $\mathfrak{F}_\sigma^{2\beta+1}$ pour tous les β inférieurs à α ($1 \leq \alpha < \Omega$). Nous définissons $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha}$ et $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}$ respectivement comme il suit :

Premier cas où α est un nombre de première espèce. Soit $\alpha = \alpha' + 1$. Posons dans ce cas

$$\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha} = (\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'+1})_\sigma \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1} = (\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha})_\sigma.$$

Deuxième cas où α est de deuxième espèce. Posons dans ce cas

$$\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha} = \left(\sum_{0 \leq \beta < \alpha} \mathfrak{F}_\sigma^{2\beta} \right)_\sigma \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1} = (\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha})_\sigma.$$

Dans cette définition, nous allons considérer un schème monotone de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, qui est épuisable et de type $\omega\gamma$ ($1 \leq \gamma < \Omega$), et dont tous les éléments sont d'ensembles de $\mathfrak{F}$. Posons $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^0 = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\alpha+1} = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}^\alpha$ et pour λ limite $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\lambda = \prod_{\xi < \lambda} \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\xi$. Posons en outre : $E_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^\alpha$. Il vient alors $E_\alpha = \sum_{\alpha < \beta \leq \omega\gamma} \mathfrak{E}_\beta$ puisque $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est monotone. Comme $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^0$ est un $\mathfrak{F}^{(1)}$ et $\mathfrak{F}$ est multiplicative, $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n$ est un $\mathfrak{F}_\sigma^1$ pour tout nombre naturel n . On peut sans peine voir que : $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\omega$ est un $\mathfrak{F}_\sigma^2$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\omega+n}$ est un $\mathfrak{F}_\sigma^3$. D'après l'induction transfinie, nous pouvons vérifier que : $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\omega\alpha}$ est un $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha}$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\omega\alpha+n}$ est un $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}$ pour tout nombre transfini α inférieur à γ et tout entier positif n . Par conséquent, il vient $E_n = \mathfrak{F}_\sigma^1$, $E_{\omega\alpha+n} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Nous avons par suite $\mathfrak{E}_{\omega\gamma} = \prod_{\xi < \omega\gamma} E_\xi = \mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma}$. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème 1. M étant un schème monotone de SOUSLIN qui est épuisable au sens de SIERPINSKI et de type $\omega\gamma$, sa constituante supérieure $\mathfrak{E}_{\omega\gamma}$ est un ensemble de $\mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma}$.

6. Schèmes primaires. Pour démontrer la proposition réciproque de celle du théorème 1, il faut considérer une notion auxiliaire.

Étant donné un schème monotone de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, où $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} = OX$ ou O , qui est épuisable au sens de SIERPINSKI et qui donne le développement de tout espace OX en une constituante telle

(1) Souvent nous désignons par $\mathfrak{F}$ ou bien par $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha}$, ou bien par $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}$ un ensemble appartenant à $\mathfrak{F}$, ou bien à $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha}$, ou bien à $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}$.

que $OX = \mathfrak{E}_\alpha (1 \leq \alpha < \Omega)$, nous disons alors que le schème ou le crible correspondant est *primaire* de type α .

Nous allons voir qu'il existe des schèmes primaires pour tout α ($1 \leq \alpha < \Omega$). Soit α un nombre transfini de seconde classe (ou fini). α peut être représenté sous une et une seule forme telle que

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \omega^{\gamma_2} n_2 + \dots + \omega^{\gamma_k} n_k ,$$

où $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k \geq 0$ et tous les nombres $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont des entiers positifs. Donc, il suffit de considérer deux cas suivants :

1° Former un schème primaire de type $\beta + \gamma$, lorsque deux schèmes primaires de type β et de type γ respectivement sont donnés.

2° Construire un schème primaire de type ω^β où β est un nombre transfini de seconde classe (ou fini).

Premier cas. Soient $\{\delta'_{n'_1, n'_2, \dots, n'_k}\}$ et $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ deux schèmes primaires de type β et de type γ respectivement. Prenons le schème $\{\delta^*_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ où $\delta^*_{[1, n_1], [1, n_2], \dots, [1, n_k]} = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $\delta^*_{[1, n], [1, n_2], \dots, [1, n_k], [2, n'_1], [2, n'_2], \dots, [2, n'_k]} = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \delta'_{n'_1, n'_2, \dots, n'_k}$, et tous les autres sont vides. Dans cette place ci, le symbole $[m, n]$ signifie le nombre $\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m^{(1)}$ et, comme nous pouvons sans peine voir, la correspondance entre (m, n) et $\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}$

+ m est biunivoque. Alors, il est manifeste que le schème obtenu plus haut est un schème primaire de type $\beta + \gamma$.

Deuxième cas. Nous considérons d'abord le cas où β est nombre 1. Considérons un schème formé de la totalité des $\{\delta_n, \delta_{n, n}, \dots, \delta_{\underbrace{n, n, \dots, n}_n}\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) où $\delta_{\underbrace{n, n, \dots, n}_k} = OX$ ($1 \leq k \leq n$) et tous les autres sont vides. Il est évident que ce schème est un schème primaire de type ω .

Nous définirons un schème primaire de type ω^β par l'induction transfinie. Supposons que le schème primaire de type $\omega^{\beta'}$ pour tout nombre β' inférieur à β est construit, et nous allons en former un de type ω^β .

Le cas où β est de première espèce : soit $\beta = \beta' + 1$. D'après le premier cas, on peut alors construire un schème primaire de type $\omega^{\beta'} k$,

(1) Dans la suite nous désignons toujours par $[m, n]$ le nombre

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m .$$

quel que soit l'entier positif k . Supposons que $\{\delta_{n_1^{(k)}}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}\}$ est le schème primaire de type $\omega^{\beta} k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Considérons le schème $\{\delta_{m_1}, m_2, \dots, m_k\}$ formé de la totalité des $\{\delta[k, n_1^{(k)}], [k, n_2^{(k)}], \dots, [k, n_l^{(k)}]\}$ où $\delta[k, n_1^{(k)}], [k, n_2^{(k)}], \dots, [k, n_l^{(k)}] = \delta_{n_1^{(k)}}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}$. Il est clair que le schème ainsi obtenu est primaire de type ω^{β} .

Le cas où β est de deuxième espèce, soit $\beta_1 < \dots < \beta_k < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \beta$. Soit $\{\delta_{n_1^{(k)}}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}\}$ un schème primaire de type ω^{β_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$). Considérons la totalité des $\delta[k, n_1^{(k)}], n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}$ où $\delta[k, n_1^{(k)}], n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \dots, n_l^{(k)} = \delta_{n_1^{(k)}}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}$. Nous pouvons sans peine vérifier que le schème obtenu est un schème primaire de type ω^{β} .

7. La somme et le produit d'une infinité dénombrable de constituantes supérieures de schèmes épuisables au sens de SIERPIŃSKI.

Soit $\{\delta_{n_1^{(k)}}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}\}$, ou A_k , pour tout nombre naturel k , un schème de type γ au sens de SIERPIŃSKI qui définit l'ensemble $E^{(k)}$ comme sa constituante supérieure, c.-à-d.

$$OX = \mathcal{E}_0^{(k)} + \mathcal{E}_1^{(k)} + \dots + \mathcal{E}_{\beta_k}^{(k)} + \dots + \mathcal{E}_{\tau}^{(k)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\tau}^{(k)} = E^{(k)}.$$

Définition. Un schème $\{\delta_{n_1}, n_2, \dots, n_l\}$ épuisable au sens de SIERPIŃSKI, qui est de type γ , est dit un schème de la somme (ou bien un schème du produit) des schèmes $A_1, A_2, A_3, \dots$, si le schème satisfait à la condition suivante :

$$OX = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_{\beta} + \dots + \mathcal{E}_{\tau} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} E^{(k)}$$

$$(\text{ou bien} \quad OX = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_{\beta} + \dots + \mathcal{E}_{\tau} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\tau} = \prod_{k=1}^{\infty} E^{(k)}).$$

Supposons d'abord que les nombres β_k sont limités par un nombre fixe inférieur à γ et nous allons construire un schème de la somme des $A_1, A_2, A_3, \dots$. Considérons un schème $\{\delta_{n_1}, n_2, \dots, n_l\}$ où $\delta[k, n_1^{(k)}], n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)} = \delta_{n_1^{(k)}}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}$. On peut voir sans peine que le schème est de type γ et qui satisfait à la condition :

$$OX = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_{\beta} + \dots + \mathcal{E}_{\tau}, \quad \text{où} \quad \beta \leq \max_k \beta_k,$$

et

$$\mathcal{E}_{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} E^{(k)},$$

ce qui nous montre qu'il y a toujours un schème de la somme des schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, si la borne supérieure des β_k est inférieure à γ .

Puis, supposons que chaque schème Δ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) est monotone décroissant, c.-à-d.

$$\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}} \supseteq \delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}, n_{l+1}^{(k)}} \quad (k, l = 1, 2, 3, \dots),$$

et posons les définitions suivantes :

Définition. Soient $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et $\delta_{n'_1, n'_2, \dots, n'_{k'}}$ ($k > k'$), deux éléments d'un schème de SOUSLIN. Si $n_1 = n'_1, n_2 = n'_2, \dots, n_{k'} = n'_{k'}$, nous disons que $\delta_{n'_1, n'_2, \dots, n'_{k'}}$ est prédécesseur de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, ou bien $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ est successeur de $\delta_{n'_1, n'_2, \dots, n'_{k'}}$ à un point x , lorsque le point x appartient à ces éléments.

Définition. Soit $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ un élément d'un schème de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Si $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ne contient pas un point x , il est dit de type 0 au point x . Si $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ contient un point x , nous disons que $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ est de type γ au point x , lorsque le système de l'indice $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et ceux des successeurs de cet élément au point x est de type γ .⁽¹⁾

Nous allons maintenant construire un schème du produit des schèmes monotones de type γ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, ceux-ci étant donnés.

Pour élément de rang 1 du schème cherché Δ , nous prenons les éléments de rang 1 de Δ_1 . Posons $\delta_{m_1}^* = \delta_{n_1^{(1)}}^{(1)}$, où $m_1 = n_1^{(1)}$, et adoptons $\delta_{m_1}^*$ comme un élément de rang 1 de Δ . Pour élément de rang 2 de Δ , nous prenons comme il suit : $\delta_{m_1, m_2}^* = \delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}}^{(1)} \cdot \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}}^{(2)}$, où $m_1 = n_1^{(1)}$ et $m_2 = [n_2^{(1)}, n_1^{(2)}], n_2^{(2)}$. En général, pour élément de rang k de Δ , nous prenons les éléments suivants :

$$\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* = \delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}}^{(1)} \cdot \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}}^{(2)} \cdot \dots \cdot \delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}}^{(k)}$$

(1) Soit $\{(n_1, n_2, \dots, n_k)\}$ un système des couples des nombres naturels. Nous disons que le système est de type γ , lorsque le crible $\Delta = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}} OX \times \nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}}$, où $(m_1, m_2, \dots, m_{k'}) \in \{(n_1, n_2, \dots, n_k)\}$ et $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}}$ est le nombre irrationnel du système ν (voir p. 181), est de type γ au sens de SIERPIŃSKI.

$$\begin{aligned} \text{où} \quad m_1 &= n_1^{(1)}, \quad m_2 = [n_2^{(1)}, n_1^{(2)}], \quad n_2^{(2)}, \\ m_3 &= [[n_3^{(1)}, n_2^{(2)}], n_1^{(3)}], \quad n_2^{(3)}, \dots, \\ m_k &= [\dots [\dots [n_k^{(1)}, n_k^{(2)}], n_k^{(3)}], \dots], \quad n_k^{(k-1)}, n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons sans peine voir, la correspondance entre le système $(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}, n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}, \dots, n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)})$ et le système $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ est biunivoque. Donc la condition nécessaire et suffisante pour que $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ soit successeur de $\delta_{m'_1, m'_2, \dots, m'_{k'}}^*$, où $k > k'$, est qu'en posant $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* = \delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}}^{(1)} \cdot \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}}^{(2)} \cdot \dots \cdot \delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}}^{(k)}$ et $\delta_{m'_1, m'_2, \dots, m'_{k'}}^* = \delta_{n'_1^{(1)}, n'_2^{(1)}, \dots, n'_{k'}^{(1)}}^{(1)} \cdot \delta_{n'_1^{(2)}, n'_2^{(2)}, \dots, n'_{k'}^{(2)}}^{(2)} \cdot \dots \cdot \delta_{n'_1^{(k')}, n'_2^{(k')}, \dots, n'_{k'}^{(k')}}^{(k')}$, $\delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}}^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}}^{(2)}, \dots, \delta_{n_1^{(k')}, n_2^{(k')}, \dots, n_k^{(k')}}^{(k')}$ soient des successeurs de $\delta_{n'_1^{(1)}, n'_2^{(1)}, \dots, n'_{k'}^{(1)}}^{(1)}, \delta_{n'_1^{(2)}, n'_2^{(2)}, \dots, n'_{k'}^{(2)}}^{(2)}, \dots, \delta_{n'_1^{(k')}, n'_2^{(k')}, \dots, n'_{k'}^{(k')}}^{(k')}$, $\dots, n'_{k'}^{(k')}$ respectivement, c.-à-d. que $n_j^{(i)} = n'_j^{(i)}$ pour tout $i, j = 1, 2, 3, \dots, k'$. Il est évident que l'élément de Δ est encore monotone décroissant, c.-à-d. $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* \geq \delta_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}^* (k=1, 2, 3, \dots)$.

Nous allons chercher à présent quelque propriété de Δ .

Lemme 1. Δ_k étant de type β au point $x^{(1)}$, Δ est au plus de type $[\beta - (k-1)] + (k-1)^{(2)}$ au point x .

Démonstration. Nous considérons d'abord la proposition suivante: Si l'élément $\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}^{(k)} (l \geq k)$ est au plus de type β au point x , l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_l}^*$ de Δ composé en appliquant $\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}^{(k)}$ est au plus de type β au point x . Nous démontrons la proposition par l'induction transfinie. En effet, elle est d'abord évidemment vraie pour $\beta = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour tout nombre transfini β' , $1 \leq \beta' < \beta$, et montrons-la pour β lui-même.

On peut poser $\beta = \beta' + 1$, puisque β est toujours un nombre de première espèce. Considérons tout élément $\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}^{(k)}$, $n (n=1,$

(1) Soit δ_{n_1} un élément de schème monotone de SOUSLIN et de type β_{n_1} au point x . Le schème est dit de type β au point x , si $\beta = \max_{n_1} \beta_{n_1}$.

(2) Nous adoptons ici les notations des nombres transfinis dues à M. N. LUSIN. Cf. N. LUSIN: Sur les ensembles analytiques nuls, Fund. Math., t. 25 (1935), p. 116.

2, 3, ...) de rang $l+1$ de Δ_k . Pour de tels éléments, l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_l, m}^*$ formé en appliquant l'élément $\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}, n}^{(k)}$ est, d'après l'hypothèse, au plus de type β' au point x . Donc, l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_l}^*$ est au plus de type β au point x , puisque les éléments $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_l, m}^*$ successeurs de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_l}^*$ sont formés nécessairement en employant les éléments $\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}, n}^{(k)}$.

Or, nous allons établir le lemme proposé. Considérons tous les éléments de rang k de Δ . D'après l'hypothèse, tout élément $\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}}^{(k)}$ est au plus de type $[\beta - (k-1)]$ au point x . Par suite, tout élément de rang k de Δ est au plus de type $[\beta - (k-1)]$ au point x . Donc, Δ est au plus de type $[\beta - (k-1)] + (k-1)$ au point x , c.q.f.d.

Lemme 2. Pour un point x dans le domaine OX , chaque schème Δ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant de type γ au point x , où γ est un nombre transfini de deuxième espèce, Δ est encore de type γ au point x .

Pour le voir, nous considérons une suite illimitée des éléments de rang k

$$(1) \quad \delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}}^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}}^{(2)}, \dots, \delta_{n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots, n_k^{(l)}}^{(l)}, \dots$$

Pour tout nombre naturel l , si tous les éléments $\delta_{n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots, n_k^{(l)}}^{(l)}$ dans la suite (1) sont au moins de type β au point x , l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$, composé des $\delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}}^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}}^{(2)}, \dots, \delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}}^{(k)}$, de rang k de schème Δ est au moins de type β au point x . Considérons d'abord le cas où $\beta = 1$. Dans ce cas, la chose est évidemment vraie. Ensuite, supposons que pour tout nombre transfini β' inférieur à β la proposition soit vraie et montrons qu'elle est vraie pour β . Supposons que $\delta_{n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots, n_k^{(l)}}^{(l)}$, où k fixe et $l = 1, 2, 3, \dots$, sont au moins de type β au point x . Considérons tous les éléments:

$$(2) \quad \delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}, n^{(1)}}^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}, n^{(2)}}^{(2)}, \dots,$$

$$\delta_{n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots, n_k^{(l)}, n^{(l)}}^{(l)}, \dots$$

qui sont successeurs au point x des éléments de la suite (1) respectivement.

On peut poser $\beta = \beta' + 1$, puisque β peut être considéré toujours un nombre de première espèce. Nous avons donc deux cas:

Premier cas où β' est de première espèce. Pour tout nombre naturel l , il existe dans la suite (2) au moins une suite illimitée des éléments

$$\delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}, n^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}, n^{(2)}, \dots, \delta_{n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots, n_k^{(l)}, n^{(l)}, \dots}$$

qui sont au moins de type β' au point x . Par l'hypothèse admise, l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k, m}^*$ composé de ces éléments de rang $k+1$ est au moins de type β' au point x , et par suite, l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ est au moins de type β au point x .

Deuxième cas où β' est de deuxième espèce, soit $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_j < \dots$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j = \beta$. Dans ce cas, pour un nombre naturel quelconque j il existe dans la suite (2) au moins une suite illimitée des éléments

$$\delta_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}, n^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots, n_k^{(2)}, n^{(2)}, \dots, \delta_{n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \dots, n_k^{(j)}, n^{(j)}, \dots}$$

qui sont au moins de type β_j au point x . Par l'hypothèse admise, l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k, m^{(j)}}^*$ composé de ces éléments est au moins de type β_j au point x . D'après la définition de type, l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ qui est prédécesseur de tous les éléments $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k, m^{(j)}}^*$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) est au moins de type β au point x .

Cela posé, nous allons démontrer le lemme proposé. D'après l'hypothèse, γ est deuxième, soit $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_j < \dots$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = \gamma$. Or, chacun des schèmes Δ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant de type γ au point x , il existe alors une suite des éléments $\delta_{n_1^{(1)}, \delta_{n_1^{(2)}, \dots, \delta_{n_1^{(j)}, \dots}$ de rang 1 tels que chacun de ces éléments est au moins de type γ_j au point x pour tout nombre naturel j .

Donc, d'après le fait démontré plus haut et le lemme 1, nous pouvons constater la vérité de notre lemme, c. q. f. d.

8. Détermination de la classe des constituantes supérieures au sens de SIERPIŃSKI. Nous considérons à présent la proposition inverse du théorème 1.

Il est clair d'abord qu'un ensemble quelconque $\mathfrak{F}$ peut être défini par un schème monotone de SOUSLIN qui est épuisable au sens de SIERPIŃSKI et de type γ donné à l'avance. Car, prenons d'abord un schème primaire du type γ , où γ est un nombre transfini (ou fini) quelconque de seconde classe. Désignons par $\{(m_1, m_2, \dots, m_k)\}$ le système des indices des éléments non vides de ce schème primaire et considérons le schème $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ où $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \text{ensemble } \mathfrak{F} \text{ donné}$ et tous les autres sont vides. Nous avons alors un schème épuisable de type γ et l'ensemble $\mathfrak{F}$ donné coïncide justement avec la constituante supérieure de ce schème. Prenons γ suffisamment grand et construisons un schème épuisable Δ tel que $OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_\tau$ et $\mathfrak{E}_\tau = \mathfrak{F}$. Puis, soit $\{\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}\}$, ou Δ_k , pour tout nombre naturel k , un schème qui définit l'ensemble $\mathfrak{F}^{(k)}$ donné à l'avance, tel que $OX = \mathfrak{E}_0^{(k)} + \mathfrak{E}_\tau^{(k)}$ et $\mathfrak{E}_\tau^{(k)} = \mathfrak{F}^{(k)}$. Considérons le schème $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_l}\}$, où $\delta_{[k, n_1^{(k)}], n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}} = \delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}$, formé de tous les schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$. Comme on peut facilement voir, le schème Δ ainsi défini remplit les conditions suivantes: $OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_\tau$ et $\mathfrak{E}_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{(k)} = \mathfrak{F}_\omega^1$. Ce qui montre qu'un ensemble quelconque $\mathfrak{F}_\omega^1$ peut être défini comme la constituante supérieure de schème monotone de SOUSLIN qui est épuisable au sens de SIERPIŃSKI et de type γ .

Soit $\{\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}\}$, ou Δ_k , schème de SOUSLIN qui est monotone et de type γ au sens de SIERPIŃSKI, et dont chaque élément est un ensemble de $\mathfrak{F}$. Supposons qu'il définit l'ensemble $(\mathfrak{F}_\omega^1)^{(k)}$ donné à l'avance comme sa constituante supérieure, de sorte que nous ayons les relations suivantes:

$$OX = \mathfrak{E}_0^{(k)} + \mathfrak{E}_\tau^{(k)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E}_\tau^{(k)} = (\mathfrak{F}_\omega^1)^{(k)}.$$

De la même manière que celle dans § 7, nous construisons un nouveau schème de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ qui est le schème du produit de tous les schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ et nous l'écrivons par Δ . Alors ce schème Δ est monotone et il a les propriétés suivantes:

$$OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_\beta + \dots + \mathfrak{E}_\tau \quad \text{où } \beta < \omega,$$

$$\text{et} \quad \mathfrak{E}_\tau = \prod_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{F}_\omega^1)^{(k)} = \mathfrak{F}_\omega^2,$$

ce qui peut être facilement vérifié, d'après les lemmes 1 et 2, si γ est de deuxième espèce.

En suite, soit $\{\delta_{n_1}^{(k)}, \delta_{n_2}^{(k)}, \dots, \delta_{n_l}^{(k)}\}$, ou $\Delta_k (k = 1, 2, 3, \dots)$, un schème monotone de SOUSLIN, qui est épuisable et de type γ , tel que

$$OX = \mathfrak{E}_0^{(k)} + \mathfrak{E}_1^{(k)} + \dots + \mathfrak{E}_{\beta_k}^{(k)} + \dots + \mathfrak{E}_\tau^{(k)}, \quad \text{où } \beta_k < \omega,$$

et
$$\mathfrak{E}_\tau^{(k)} = (\mathfrak{F}_\sigma^2)^{(k)},$$

où $(\mathfrak{F}_\sigma^2)^{(k)}$ est un ensemble donné à l'avance. Considérons un schème de la somme des schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ (voir § 7). Ce schème satisfait alors aux relations suivantes :

$$OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_\beta + \dots + \mathfrak{E}_\tau, \quad \text{où } \beta \leq \omega,$$

et
$$\mathfrak{E}_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{F}_\sigma^2)^{(k)} = \mathfrak{F}_\sigma^3,$$

ce qui montre qu'un ensemble quelconque $\mathfrak{F}_\sigma^3$ peut être défini comme la constituante supérieure de schème monotone de SOUSLIN qui est épuisable et de type γ où γ est de deuxième espèce et $> \omega$. En général, supposons que tout ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'}$ et $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'+1}$ pour tout nombre α' inférieur à α donné sont respectivement définis par les schèmes monotones de SOUSLIN $\{\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \dots, \delta_{n_k}\}$ et $\{\delta_{n'_1}, \delta_{n'_2}, \dots, \delta_{n'_k}\}$, qui sont épuisables et de type γ , de sorte que

$$(1) \quad OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_\beta + \dots + \mathfrak{E}_\tau, \quad \text{où } \beta < \omega\alpha',$$

et
$$\mathfrak{E}_\tau = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'},$$

$$(2) \quad OX = \mathfrak{E}'_0 + \mathfrak{E}'_1 + \dots + \mathfrak{E}'_\beta + \dots + \mathfrak{E}'_\tau, \quad \text{où } \beta \leq \omega\alpha',$$

et
$$\mathfrak{E}'_\tau = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'+1},$$

où γ est de deuxième espèce et $\omega\alpha' \leq \gamma$ ou $\omega\alpha' < \gamma$ suivant que le cas est (1) ou (2).

Cela posé, nous allons prouver que les formules (1) et (2) sont aussi vraies pour α lui-même.

Premier cas où α est de première espèce, soit $\alpha = \alpha' + 1$. Soit $\{\delta_{n_1}^{(k)}, \delta_{n_2}^{(k)}, \dots, \delta_{n_l}^{(k)}\}$ ou $\Delta_k (k = 1, 2, 3, \dots)$, un schème monotone de SOUSLIN, qui est épuisable et de type γ , et qui définit l'ensemble $(\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'+1})^{(k)}$ donné de manière que

$$OX = \mathfrak{E}_0^{(k)} + \mathfrak{E}_1^{(k)} + \dots + \mathfrak{E}_{\beta_k}^{(k)} + \dots + \mathfrak{E}_\tau^{(k)}, \quad \text{où } \beta_k \leq \omega\alpha',$$

et
$$\mathfrak{E}_\tau^{(k)} = (\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'+1})^{(k)}.$$

Comme nous avons fait dans § 7, construisons un nouveau schème de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_1, \dots, n_k}\}$ qui est un schème du produit des schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$. D'après les lemmes 1 et 2, il est évident que ce schème satisfait aux relations suivantes :

$$OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_\beta + \dots + \mathfrak{E}_\tau \quad \text{où} \quad \beta < \omega\alpha$$

et

$$\mathfrak{E}_\tau = \prod_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha'+1})^{(k)} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha}.$$

Nous pouvons, par suite, supposer que chaque ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha}$ donné est défini par un schème épuisable monotone de SOUSLIN, formé des ensembles $\mathfrak{F}$, et qui satisfait à la condition (1).

En suite, soit $\{\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) un schème épuisable monotone de SOUSLIN définissant l'ensemble $(\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha})^{(k)}$, de sorte que la condition (1) soit satisfaite. Nous considérons le schème de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ qui est le schème de la somme des schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ (voir § 7). Il est alors évident que ce schème satisfait aux relations suivantes :

$$OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_\beta + \dots + \mathfrak{E}_\tau \quad \text{où} \quad \beta \leq \omega\alpha$$

et

$$\mathfrak{E}_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha})^{(k)} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}.$$

Deuxième cas où α est de deuxième espèce, soit $a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \alpha$. Soit $\{\delta_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_l^{(k)}}\}$, ou Δ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), un schème monotone de SOUSLIN, qui est épuisable et de type γ , et qui définit l'ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha_k}$ donné, de sorte que

$$OX = \mathfrak{E}_0^{(k)} + \mathfrak{E}_1^{(k)} + \dots + \mathfrak{E}_{\beta_k}^{(k)} + \dots + \mathfrak{E}_\tau^{(k)}, \quad \text{où} \quad \beta_k < \omega a_k,$$

et

$$\mathfrak{E}_\tau^{(k)} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha_k}.$$

Comme nous avons fait dans § 7, construisons un schème $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ du produit des schèmes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$. D'après les lemmes 1 et 2, il est évident que ce schème satisfait aux relations suivantes :

$$OX = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_\beta + \dots + \mathfrak{E}_\tau, \quad \text{où} \quad \beta < \omega\alpha,$$

et

$$\mathfrak{E}_\tau = \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha_k} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha},$$

ce qui montre que la formule (1) est encore vraie pour un nombre transfini de deuxième espèce.

De la même manière que celle du premier cas, nous avons la vérité de la formule (2) pour un nombre transfini α de deuxième espèce.

Nous en pouvons conclure le

Théorème 2. Tout ensemble $\mathfrak{S}_\delta^{2^r}$ peut être considéré comme la constituante supérieure au sens de SIERPIŃSKI d'un schème épuisable monotone de SOUSLIN de type $\omega\gamma$.

En résumé, nous sommes amenés au résultat suivant :

Tout ensemble $\mathfrak{S}_\delta^{2^r}$ peut être considéré comme la constituante supérieure au sens de SIERPIŃSKI d'un schème monotone de SOUSLIN, qui est épuisable et de type $\omega\gamma$. Inversement, toute constituante supérieure au sens de SIERPIŃSKI d'un schème monotone de SOUSLIN qui est épuisable et de type $\omega\gamma$ est un ensemble $\mathfrak{S}_\delta^{2^r}$.

III. LA CLASSE DES CONSTITUANTES SUPÉRIEURES AU SENS DE LUSIN.

9. Évaluation de la classe des constituantes supérieures de LUSIN.

Définition. Soient M un ensemble dans l'espace OXY à deux dimensions, et P_x la droite parallèle à l'axe OY menée par le point x de l'axe OX . Nous appelons *point-borne supérieur de l'ensemble $M \cdot P_x$* le point sur la droite P_x dont l'ordonnée est la borne supérieure de celles des points de $M \cdot P_x$.

Nous allons ensuite étudier le crible bien ordonné au sens de M. N. LUSIN.

Tout d'abord, nous avons le

Lemme 3. N étant un ensemble bien ordonné de type ω^γ ($1 \leq \gamma < \mathfrak{Q}$) dans l'axe OY , sa fermeture $\bar{N}$ est un crible bien ordonné de type $\omega^\gamma + 1$.

Pour le voir, nous allons démontrer par l'induction transfinie. Dans le cas où γ est un, il est clair que la proposition est vraie. Supposons que la proposition est vraie pour tout nombre transfini γ' inférieur à γ donné, ($1 < \gamma < \mathfrak{Q}$), et montrons qu'elle est vraie pour γ .

Premier cas où γ est de première espèce : soit $\gamma = \gamma' + 1$. L'ensemble N bien ordonné de type ω^γ peut être décomposé en une infinité des ensembles bien ordonnés de type $\omega^{\gamma'}$. Posons $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$ et supposons que chaque ensemble N_k est de type $\omega^{\gamma'}$ et que N_{k+1} est situé au-dessus de N_k pour tout nombre naturel k . D'après la propriété d'ensemble bien ordonné, il peut être facilement vérifié que $\bar{N} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k + p$, où p est le point borné supérieur de l'ensemble $\bar{N}$, et chaque $\bar{N}_k$, par l'hypothèse, est un ensemble bien ordonné de type $\omega^{\gamma'} + 1$. Donc, $\bar{N}$ est un ensemble bien ordonné de type $\omega^{\gamma'} + 1$.

Deuxième cas où γ est de deuxième espèce : soient γ des nombres transfinis tels que $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \gamma$.

Il est évident que N peut être décomposé comme la réunion des ensembles N_k bien ordonnés de type ω^{γ_k} , c.-à-d. $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$ et N_{k+1} est situé au-dessus de N_k , quel que soit l'entier positif k . D'après la même raison que celle du premier cas, il vient $\bar{N} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k + p$, où p est le point-borne supérieur de $\bar{N}$. Donc le type de $\bar{N}$ est $\omega^{\gamma} + 1$, c. q. f. d.

Lemme 4. Soient N un ensemble bien ordonné de type ω^{γ} dans l'axe OY et p le point borné supérieur de $\bar{N}$. Alors le point p est un seul point limite d'ordre γ de $\bar{N}$.

En effet, dans le cas où $\gamma = 1$, notre lemme est évident. Supposons que d'abord pour tout nombre γ' inférieur à γ donné la proposition est vraie, et montrons sa vérité pour γ lui-même.

Premier cas. γ est de première espèce : soit $\gamma = \gamma' + 1$. En vertu du lemme 3, on peut supposer que $\bar{N} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{N}_k + p$, où p est le point-borne supérieur de $\bar{N}$ et chaque $\bar{N}_k$ est de type $\omega^{\gamma'} + 1$ et situé au-dessous de $\bar{N}_{k+1}$, quel que soit l'entier positif k . D'après l'hypothèse, $\bar{N}_k$ a un seul point limite d'ordre γ' et le point p est un seul point limite de p_k , où p_k est le point borné supérieur de $\bar{N}_k$. Par conséquent, le point p est un seul point limite d'ordre γ dans $\bar{N}$.

Deuxième cas : γ est de deuxième espèce : $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \gamma$. Suivant le même raisonnement que celui du premier cas, nous pouvons aisément voir la vérité de la proposition proposée, c. q. f. d.

En employant le lemme 4, nous allons prouver le

Théorème 3. M étant un crible de type ω^{γ} (au sens de LUSIN), la constituante supérieure $\mathcal{E}_{\omega^{\gamma}}$ au sens de LUSIN de M est un ensemble $\mathfrak{F}_{\omega^{\gamma}}^{\omega^{\gamma}}$.

Démonstration. Prenons un crible M dans le domaine OXY et désignons par N la projection orthogonale à l'axe OY de M . N étant un ensemble bien ordonné de type ω^{γ} , selon le lemme 4, le point-borne supérieur de $\bar{N}$, qui est la fermeture de N , est un seul point limite d'ordre γ dans $\bar{N}$.

Considérons la partie commune P_x au crible M et à la droite D_x parallèle à l'axe OY menée par un point quelconque x de l'axe OX . Comme N est bien ordonné, il est évident que P_x est aussi bien ordonné et de type $\leq \omega^{\gamma}$. Il existe donc seulement deux cas possibles :

Premier cas. Le type de P_x est ω^r . Considérons la fermeture $\bar{P}_x$ de P_x . Désignons par L la droite parallèle à l'axe OX menée par le point p borne supérieur de $\bar{N}$. Il est clair que le point-borne supérieur de $\bar{P}_x$ n'est jamais situé au-dessus de L . Si l'on fait remarquer que chaque voisinage $V(p)$ dans l'axe OY du point-borne supérieur de $\bar{N}$ contient un ensemble bien ordonné de type $\omega^r + 1$ et que la partie de $\bar{N}$ en dehors de $V(p)$ est de type $< \omega^r$, le point-borne supérieur de $\bar{P}_x$ est situé précisément sur L et il est un seul point limite d'ordre γ dans $\bar{P}_x$.

Deuxième cas. Le type de P_x est $< \omega^r$. Selon le lemme 4, il n'existe aucun point limite d'ordre γ dans $\bar{P}_x$.

Or, nous allons construire, dans l'espace OXY , l'ensemble de tous les points limites au moins d'ordre un dans $\bar{P}_x$, lorsque x parcourt dans l'axe OX . $\bar{N}$ étant un ensemble dénombrable, leurs points peuvent être arrangés en une suite, soit $r_1, r_2, \dots, r_m, \dots$. Prenons un point quelconque r_m de cette suite et menons une droite L_m parallèle à l'axe OX menée par le point r_m . Désignons par V_m^n , $n = 1, 2, 3, \dots$, un voisinage de r_m dans OY et par S_m et T_m respectivement les ensembles qui sont la partie d'ensemble produit cartésien $OX \times \bar{N}$ situé au-dessus de L_m et situé au-dessous de L_m . Écrivons par L_m^n la partie commune à L_m et à la projection orthogonale sur L_m du sous-ensemble de M contenu dans l'ensemble $OX \times V_m^n - L_m$. Posons $M^{(1)} = \bigcap_{m,n} (S_m + L_m^n + T_m)$. Alors cet ensemble $M^{(1)}$ est justement ce qu'il nous faut trouver. En effet, si le point commun, soit q , à L_m et à D_x est un point limite de P_x , alors, tous les ensembles L_m^n contiennent q . Donc le point q appartient à $M^{(1)}$. Si q n'est pas le point limite de P_x , il existe au moins un voisinage V_m^n tel que l'ensemble commun à P_x et à l'ensemble $OX \times V_m^n - L_m$ ne contient aucun point de P_x . Il existe, par suite, un ensemble L_m^n qui ne contient pas le point q . Il en résulte que le point q n'appartient pas à $M^{(1)}$. Ce qui montre que $M^{(1)}$ est l'ensemble désiré. M étant un ensemble formé d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires, qui appartient à la famille $\mathfrak{F}$, parallèles à l'axe OX , il est alors évident que $M^{(1)}$ est aussi formé d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires $\mathfrak{F}_2^2$ parallèles à l'axe OX . Désignons par $P_x^{(1)}$ la partie commune à $M^{(1)}$ et à la droite parallèle à l'axe OY menée par x et cherchons l'ensemble des points limites de $P_x^{(1)}$, lorsque le point x parcourt dans OX . Soit $N^{(1)}$ la projection orthogonale à l'axe OY de $M^{(1)}$. Si nous remplaçons dans le raisonnement précédent, N par $N^{(1)}$ et M par $M^{(1)}$, nous pouvons facilement obtenir l'ensemble à

trouver, soit $M^{(2)}$. Il est clair que $M^{(2)}$ est un ensemble $\mathfrak{F}_\delta^4$ composé d'une infinité dénombrable des ensembles linéaires $\mathfrak{F}_\delta^4$ parallèles à l'axe OX . De la même manière que nous avons faite plus haut, nous pouvons vérifier que l'ensemble $M^{(\alpha)}$ qui est l'ensemble pour lequel chaque point est un point limite au moins d'ordre α dans P_α , $1 \leq \alpha \leq \gamma$, est un $\mathfrak{F}_\delta^{2^\alpha}$. Par conséquent, en particulier, M étant un ensemble bien ordonné tel que sa projection orthogonale à l'axe OY est de type ω^τ , la constituante supérieure $\mathcal{E}_{\omega^\tau}$ de M coïncide avec la projection sur l'axe OX de $M^{(\tau)}$ qui est un ensemble $\mathfrak{F}_\delta^{2^{\tau}}$ situé sur la droite parallèle à l'axe OX menée par le point-borne supérieur de $\bar{N}$, c. q. f. d.

Du théorème 3, nous pouvons aisément déduire le

Corollaire. M étant un ensemble tel que sa projection orthogonale à l'axe OY soit un ensemble bien ordonné de type γ , $0 < \gamma < \Omega$, la constituante supérieure $\mathcal{E}_\tau$ de M est un ensemble $\mathfrak{F}_\delta^{2^{\log \tau}}$ (1).

Démonstration. On sait que tout nombre transfini γ peut être écrit sous la forme $\gamma = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \dots + \omega^{\gamma_k}$, où $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_k \geq 0$ et k est un entier positif.

Ceci étant, divisons la projection orthogonale N à l'axe OY de M en parties $N_1, N_2, \dots, N_k$ tels que

1° $N_1, N_2, \dots, N_k$ sont de type $\omega^{\gamma_1}, \omega^{\gamma_2}, \dots, \omega^{\gamma_k}$ respectivement.

2° N_i est situé au-dessous de N_{i+1} , $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$.

Désignons par M_i la partie commune à M et au produit cartésien $OX \times N_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), et par $\mathcal{E}^{(i)}$ la constituante supérieure de M_i . Il est clair que la constituante supérieure $\mathcal{E}_\tau$ du crible donné M est la partie commune aux ensembles $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \dots, \mathcal{E}^{(k)}$. D'après le théorème 3, $\mathcal{E}^{(i)}$ est $\mathfrak{F}_\delta^{2^{\gamma_i}}$ et il est donc manifeste que $\mathcal{E}_\tau$ est un $\mathfrak{F}_\delta^{2^{\log \tau}}$, c. q. f. d.

10. Schème normaux. Pour démontrer la proposition réciproque de celle du théorème 3, il faut considérer quelques notions auxiliaires.

Définition. Nous disons qu'un schème de SOUSLIN $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$, qui est épuisable, est *normal*, s'il satisfait aux conditions suivantes:

1° Pour tout $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$, $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ est ou bien l'espace OX tout entier, ou bien l'ensemble vide, et en particulier, pour tout $m_1 = 1, 2, 3, \dots$, ν_{m_1} est l'espace OX tout entier.

2° A propos des successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, il n'y a que trois cas possibles:

(1) Cf. N. LUSIN: Sur les ensembles analytiques nuls, Fund. Math., t. 25 (1935), p. 116.

- (1) $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ne possède aucun successeur ;
- (2) $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ possède un et un seul successeur de rang $k+1$;
- (3) tous les $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$ ($m_{k+1} = 1, 2, 3, \dots$) sont des successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$.

3° Si le troisième cas a lieu pour un $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, ce même cas n'a lieu pour aucun des $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$, $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}, m_{k+2}, \dots}$, $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+m_{k+1}-1}}$; le troisième cas n'a lieu pour aucun des ν_{m_1} , $\nu_{m_1, m_2}, \dots$, $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{m_1-1}}$.

4° Dans le troisième cas, le type de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$ croît avec m_{k+1} , le type de ν_{m_1} croît avec m_1 .

5° Faisons correspondre chaque élément $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ tel que $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$ à un nombre rationnel

$$y_{m_1, m_2, \dots, m_k} = 1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \dots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\dots+m_k}} \right).$$

Si le type du schème $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ est $\omega\alpha$ ($1 \leq \alpha < \Omega$), le type d'ensemble de tous les nombres rationnels $y_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ (ordonné selon la grandeur croissante) est ω^α .

Remarque. Le type de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ est toujours de première espèce.

Dans cette définition, nous obtenons le

Théorème 4. Pour tout α , $1 \leq \alpha < \Omega$, il existe un système normal de SOUSLIN de type $\omega\alpha$.

Démonstration. La proposition est vraie pour $\alpha = 1$. En effet, considérons le système $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ où $\underbrace{\nu_{m, m, \dots, m}}_l = OX$

($l = 1, 2, 3, \dots, m$, $m = 1, 2, 3, \dots$), et tous les autres sont vides.

1° $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$ ou O . En particulier $\nu_{m_1} = OX$.

2° Ici seulement le premier et le deuxième cas sont possibles.

3° et 4° Le type de ν_{m_1} croît avec m_1 .

5° Faisons correspondre un élément quelconque $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ tel que $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$ à un nombre rationnel $y_{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Il est évident que l'ensemble $\{y_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ est bien ordonné et de type ω .

Supposons donc la proposition vraie pour tous les nombres α' inférieurs à un nombre donné α , et démontrons sa vérité pour le nombre α lui-même. Nous avons deux cas à considérer.

Premier cas, α est de première espèce, soit $\alpha = \alpha' + 1$. Dans ce cas, il existe, d'après l'hypothèse, un système normal $\{\nu'_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$

de type $\omega\alpha'$. Considérons le système $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ où $\nu_{\underbrace{m, m, \dots, m}_l} = OX$; ($l = 1, 2, \dots, m$; $m = 1, 2, 3, \dots$); $\nu_{\underbrace{m, m, \dots, m}_m, n_1, n_2, \dots, n_k} = \nu'_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, et tous les autres sont vides.

Nous allons montrer que ce système est normal et de type $\omega\alpha$.

1° $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$ où O . Pour $m_1 = 1, 2, 3, \dots$, $\nu_{m_1} = OX$.

2° et 3° Considérons d'abord un élément $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ où $1 \leq k < m_1$. Dans ce cas, d'après la construction du système, il est évident que l'élément satisfait aux conditions 2° et 3°.

Si $k = m_1$ et si $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$, il existe une infinité des éléments $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$ où $m_{k+1} = 1, 2, 3, \dots$, et $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$ peut être considéré comme l'élément $\nu'_{m_{k+1}}$ du système normal de type $\omega\alpha'$. Donc $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$ satisfait à la condition 3°.

Dans le cas où $k > m_1$, $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ peut être considéré comme un élément du système normal de type $\omega\alpha'$ et par suite il satisfait aux conditions 2° et 3°.

4° S'il y a une infinité des éléments successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, qui est de rang $k+1$, nous avons à distinguer deux cas:

(1) Le cas où $k = m_1$. Il est clair que tous les éléments successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ sont $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) et, d'après la construction du système, le type de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m}$ coïncide avec celui de l'élément ν'_m du système normal de type $\omega\alpha'$. Donc le type de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m}$ est croissant avec m .

(2) Le cas où $k > m_1$. Dans ce cas, l'élément donné peut être considéré comme celui du système normal de type $\omega\alpha'$, donc il satisfait à la condition 4°.

D'ailleurs, comme nous pouvons facilement voir, le type de ν_{m_1} croît avec m_1 .

5° Il est évident que le système $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ est de type $\omega\alpha$. La correspondance établie entre $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $y_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ transforme le système $\{\nu_m, \nu_{\underbrace{m, m, \dots, m}_m}, \nu_{\underbrace{m, m, \dots, m}_m}, \nu_{\underbrace{m, m, \dots, m}_m}, n_1, n_2, \dots, n_k\}$ à l'ensemble M_m bien ordonné de type $\omega^{\alpha'} + m$ et de plus M_{m+1} est situé au-dessus de M_m pour tout nombre naturel m . Le système $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ se transforme donc à l'ensemble bien ordonné de type ω^{α} , puisque $\omega^{\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} (\omega^{\alpha'} + m)$.

Deuxième cas ; α est de deuxième espèce : soit $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_l < \dots$ et $\lim_{l \rightarrow \infty} \alpha_l = \alpha$. Soit $\{\nu_{m_1}^{(l)}, m_2^{(l)}, \dots, m_k^{(l)}\}$ ($l = 1, 2, \dots$) un système normal de type $\omega \alpha_l$. Considérons le système $\{\nu_{m_1}, m_2, \dots, m_k\}$ où $\underbrace{\nu_{l, 1}, \dots, \nu_{l, l}}_i = OX$ ($1 \leq i \leq l, l = 1, 2, 3, \dots$) ; $\underbrace{\nu_{l, 1}, \dots, \nu_{l, l}}_l, m_1^{(l)}, m_2^{(l)}, \dots, m_k^{(l)} = \nu_{m_1}^{(l)}, m_2^{(l)}, \dots, m_k^{(l)}$ et tous les autres sont vides.

La démonstration que ce système est normal et de type $\omega \alpha$ peut être obtenu par la même considération que nous avons faite dans le premier cas, c. q. f. d.

11. Schèmes congruents. Pour un nombre entier positif n , désignons par $\{n^*\}$ tous les nombres $n^{(l)}$ déterminés par la formule $n^{(l)} = 2^{l-1}(2n - 1)$, où l parcourt l'ensemble de tous les nombres naturels. On sait que, si $n \neq n'$, $n^{(l)}$ n'est jamais égal à $n'^{(l')}$, quels que soient l et l' . Pour deux nombres m^* et n^* , s'il existe trois nombres naturels l, m et n tels que $m^* = 2^{m-1}(2l - 1)$ et $n^* = 2^{n-1}(2l - 1)$, m^* et n^* seront dits *congruents* et désignés par $m^* \equiv n^*$.

Dans cette correspondance entre n et $\{n^*\}$, un nombre n correspond à une infinité des nombres $\{n^*\}$ qui sont congruents. Réciproquement, il est clair que, pour un nombre quelconque n^* dans $\{n^*\}$, il existe un et un seul nombre n tel que $n^* = 2^{l-1}(2n - 1)$ pour un nombre entier positif l convenablement choisi. Désignons par $\varphi(n^*)$ cette correspondance. Il est alors évident que $\varphi(m^*) \equiv \varphi(n^*)$ pour le cas et le seul cas où $m^* \equiv n^*$. Nous écrivons par $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*) \equiv (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*)$ si $m_1^* \equiv n_1^*, m_2^* \equiv n_2^*, \dots, m_k^* \equiv n_k^*$ et disons, dans ce cas, $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*)$ et $(n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*)$ sont *congruents* l'un l'autre.

Considérons maintenant un schème monotone de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Nous transformons ce système à un schème de SOUSLIN $\{\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}\}$, où n_k^* parcourt l'ensemble $\{n_k^*\}$ correspondant à n_k , et posons $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*} = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ si $\varphi(n_1^*) = n_1, \varphi(n_2^*) = n_2, \dots, \varphi(n_k^*) = n_k$. $\delta_{m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*}$ et $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ sont dits *congruents* l'un l'autre, si $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*) \equiv (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*)$.

Le schème $\{\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}\}$ ainsi obtenu est dit *congruent* à $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$.

Nous allons démontrer que $\{\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}\}$ satisfait aux conditions suivantes :

1° Il est monotone.

2° S'il existe au moins un élément successeur à un point x d'un élément donné, il existe alors une infinité des éléments successeurs au point x de l'élément donné.

3° Le type de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ à un point x est égal à celui de $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*)}$ au point x . Par suite, si $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*) \equiv (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*)$, le type de $\delta_{m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*}$ au point x coïncide avec celui de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ au point x .

Démonstration. 1° La proposition est évidente.

2° Considérons d'abord un élément successeur $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, n^*}$ au point x de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ donné, si celui-là a au moins un. D'après la propriété de la transformation exécutée, il existe deux éléments $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*), \varphi(n^*)}$ et $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*)}$ et celui-là est successeur au point x de celui-ci. Comme il existe une infinité des nombres qui sont transformés de $\varphi(n^*)$, il en résulte que la proposition 2° est vraie.

3° Pour le démontrer, nous montrons d'abord que $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ étant de type β au point x , alors $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*)}$ est aussi de type β au point x . Ceci est évident pour $\beta = 1$. Supposons donc que la proposition est vraie pour tous les nombres β' inférieurs à un nombre donné β , et démontrons sa vérité pour le nombre β .

Soit β le type de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ au point x . Considérons la totalité des éléments successeurs, qui sont de rang $k+1$, de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ au point x et désignons-les par $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, n^*}$. β_{n^*} étant le type de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, n^*}$ au point x , il est clair que $\beta = (\max_{n^*} \beta_{n^*}) + 1$. Puis, prenons l'élément $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*), \varphi(n^*)}$. Par l'hypothèse admise, le type de cet élément est β_{n^*} au point x . Donc, β est le type de $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*)}$ au point x , et, par suite, il en résulte que :

β étant le type de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ au point x , celui de $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*)}$ est encore β au point x .

De la même manière que nous avons faite plus haut, nous obtenons le résultat suivant :

β étant le type de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x , un élément $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ transformé de celui-là a aussi le type β au point x , c. q. f. d.

Nous avons, par suite, le

Théorème 5. Soit $\{\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}\}$ un schème congruent à un schème monotone de SOUSLIN $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Le type de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$

n_k^* et de $\delta_{\varphi(n_1^*), \varphi(n_2^*), \dots, \varphi(n_k^*)}$ sont égaux au point x , et, par suite, si $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*) \equiv (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*)$, le type de $\delta_{m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*}$ et de $\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}$ sont égaux au point x . Le type de $\{\delta_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*}\}$ et de $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ sont donc égaux au point x .

12. Normalisation des schèmes donnés et les inégalités qui s'y rattachent. *Théorème 6.* Soit $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ un schème monotone de SOUSLIN, qui est de type $\omega\alpha$ et qui satisfait à la condition suivante :

(0) $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \delta_{n'_1, n'_2, \dots, n'_k}$ pour toute paire des indices congruents $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $(n'_1, n'_2, \dots, n'_k)$.

Il existe alors un schème monotone de SOUSLIN $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ et un schème normal de SOUSLIN $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$, qui est de type $\omega\alpha$, tels que

1) $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* \neq 0$ entraîne $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$.

2) Désignons par $\beta_x^{n_1}$ et par $\gamma_x^{m_1}$ le type de δ_{n_1} et de $\delta_{m_1}^*$ au point x respectivement, et par ξ^{m_1} le type de ν_{m_1} . Posons $\beta_x^{n_1} = \omega\sigma_x^{n_1} + q_x^{n_1}$, $\xi^{m_1} = \omega\tau^{m_1} + p^{m_1}$. Alors nous pouvons faire correspondre tout n_1 et tout m_1 biunivoquement, de sorte que nous ayons les inégalités suivantes :

a) si $\sigma_x^{n_1} = 0$, nous avons toujours

$$(1) \quad \gamma_x^{m_1} \leq q_x^{n_1},$$

et il existe au moins un nombre entier positif n'_1 congruent à n_1 tel que

$$(2) \quad \gamma_x^{m'_1} = q_x^{n'_1}; \quad m'_1 = \varphi(n'_1), \quad n'_1 \equiv n_1,$$

β) si $\sigma_x^{n_1} \geq 1$, nous avons toujours

$$(3) \quad \gamma_x^{m_1} \leq \omega 2(\sigma_x^{n_1} + 1),$$

et il existe au moins un nombre entier positif n'_1 congruent à n_1 tel que

$$(4) \quad \gamma_x^{m'_1} \geq (\beta_x^{n_1} - p^{m_1}) + p^{m_1}; \quad m'_1 = \varphi(n'_1), \quad n'_1 \equiv n_1.$$

Remarque. Désignons par β_x et γ_x le type de $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ et de $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ au point x respectivement. Nous avons alors d'après la définition, $\beta_x = \max_{n_1} \beta_x^{n_1}$ et $\gamma_x = \max_{m_1} \gamma_x^{m_1}$.

Soit $\mu = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ un nombre irrationnel entre 0 et 1. Faisons correspondre un nombre rationnel $0.\lambda_1\lambda_2\lambda_3\dots$ à base 3 (c.-à-d. $\lambda_k = 0, 1$ ou 2 ; $\lambda_k = 0$ à partir d'un certain rang dépendant de μ), suivant la règle: Nous posons $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_k = 0, \lambda_k = 1$ ou $\lambda_k = 2$, ($k \geq 2$), suivant que, pour l'élément $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k-1}}$ ($k \geq 2$), le premier, le second ou le troisième cas dans la condition 2° de la normalité a lieu (voir p. 198). Désignons par α_n le numéro k tel que λ_{α_n} est le n -ième 2 et par α^* le numéro du premier 0, c.-à-d. $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} = \dots = \lambda_{\alpha_n} = 2$ et $\lambda_{\alpha^*} = 0$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha^*$). Pour tout n , le système $\{n_{\alpha_{n-1}+1}, n_{\alpha_{n-2}+2}, \dots, n_{\alpha_n}\}$ étant dénombrable, nous pouvons les faire correspondre à m_{α_n} biunivoquement. Remarquons que, d'après les conditions 2° et 3° de la normalité (voir p. 198), α_n dépend seulement des $m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}, \dots, m_{\alpha_{n-1}}$. Par suite, si $k = \alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ se correspondent biunivoquement. Nous pouvons désigner cette correspondance par $n_{\alpha_{n-1}+\nu} = \varphi_{\alpha_n}^\nu(m_{\alpha_n})$, $\nu = 1, 2, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1}$. Pour $\alpha_{n-1} \leq k < \alpha_n$ ou α^* ($n > 1$), nous posons

$$\delta m_1^*, m_2, \dots, m_k = \sum_{n_{\alpha_{n-1}+1}, n_{\alpha_{n-1}+2}, \dots, k} \delta \varphi_{\alpha_1(m_{\alpha_1})}, \varphi_{\alpha_2(m_{\alpha_2})},$$

$$\varphi_{\alpha_2}^2(m_{\alpha_2}), \dots, \varphi_{\alpha_2}^{\alpha_2-\alpha_1}(m_{\alpha_2}),$$

$$\varphi_{\alpha_3}^1(m_{\alpha_3}), \varphi_{\alpha_3}^2(m_{\alpha_3}), \dots, \varphi_{\alpha_3}^{\alpha_3-\alpha_2}(m_{\alpha_3}),$$

$$\dots$$

$$\varphi_{\alpha_{n-1}}^1(m_{\alpha_{n-1}}), \varphi_{\alpha_{n-1}}^2(m_{\alpha_{n-1}}), \dots,$$

$$\varphi_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}(m_{\alpha_{n-1}}), n_{\alpha_{n-1}+1},$$

$$n_{\alpha_{n-1}+2}, \dots, k$$

Désignons par $\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et par $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ le type de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ au point x respectivement, et par $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ celui de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Posons $\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \omega \tau^{m_1, m_2, \dots, m_k} + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Supposons que $k = \alpha_n (\lambda_k = 2)$. Donc $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ se correspondent biunivoquement.

Alors nous avons les inégalités suivantes :

a) si $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} = 0$, nous avons toujours

$$(1) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

et si de plus, $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, nous avons

$$(2) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

β) si $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} \geq 1$, nous avons toujours

$$(3) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega 2 (\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + 1)$$

et si de plus, $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, nous avons

$$(4) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

En posant $k = 1$, par suite, $m_{\alpha_1} = m_1$, nous avons notre théorème, d'après la condition (0) (voir p. 202). Il nous suffit donc d'établir ces inégalités.

Tout d'abord, selon la construction du système de SOUSLIN $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$, il est évident que $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* \neq 0$ entraîne $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k} = OX$. De plus, tout élément de rang k , quel que soit k , du système $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ correspond à un élément de rang k du système $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$, et chaque élément de rang k de celui-ci est composé des éléments de rang k de celui-là. D'après la propriété de la correspondance (00), comme nous pouvons sans peine voir, le système $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ est monotone.

Nous allons établir les inégalités données plus haut.

(*) : Considérons d'abord le cas où $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} = 0$. Prenons un point x dans OX . Alors, d'après l'hypothèse, le type de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x est $q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, x appartient donc précisément à un élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}-1}}$ et n'appartient à aucun élément de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k})$ successeur de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x . Donc, d'après la propriété de la correspondance entre $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ et $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$, il n'existe aucun élément de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k})$ successeur de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ et qui contient le point x . Nous avons donc

$$(1) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

(**): Si de plus $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \xi_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, il y a au moins un élément de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - 1)$ successeur de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et qui correspond à l'élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ contenant le point x . Donc, il y a au moins un élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ qui contient sûrement le point x . Nous avons ainsi l'égalité suivante

$$(2) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Nous considérons ensuite le cas où $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} = 1$. Nous distinguons deux cas:

Premier cas où $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Prenons tous les éléments de rang $(k + p^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, d'après la propriété 3° et le troisième cas de 2° de la normalité de $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ (voir p. 198) et d'après la propriété de la correspondance (00), $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}}$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}}$, où $m_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ et $n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ existe un nombre infini, se correspondent biunivoquement. Comme $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} = 1$ et $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, le type d'un élément quelconque $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}}$ est un nombre fini. Par conséquent, d'après le cas (*), il vient

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} \leq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}}.$$

D'après la définition de type, nous avons

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \left(\max_{\substack{m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} \right)$$

et par suite

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \left(\max_{\substack{n_{k+1}, n_{k+2}, \dots, n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}} q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} \right) \leq \omega 2.$$

Nous avons ainsi l'inégalité :

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega 2(\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + 1).$$

Deuxième cas où $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} < q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Considérons d'abord tous les éléments de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k})$ successeurs de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x . Le type d'un élément quelconque $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ est alors un nombre fini et leur borne supérieure est ω . Soit $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ un élément correspondant à $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ qui contient l'élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$. Prenons un élément quelconque $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$. Puis, considérons tous les éléments $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}})$ successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$. $\{\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ étant normal, il existe une infinité des éléments des

$\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}})$ successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ et chacun de ces éléments correspond biunivoquement à l'élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ qui coïncide avec l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$. D'après le cas (*), il vient

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} \leq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}.$$

Nous avons donc

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} \leq \omega$$

et par suite

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} \leq \omega + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}.$$

Il en résulte que $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ $\leq \omega 2$ et donc $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega 2 + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Nous avons ainsi l'inégalité suivante et par suite (3)

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega 2 (\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + 1).$$

Puis, nous allons considérer le cas où $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Nous distinguons deux cas :

Premier cas où $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. D'après les conditions 2°, 3° et 4° de la normalité, il existe une infinité des successeurs, qui sont de rang $(k + p^{m_1, m_2, \dots, m_k})$, de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et nous les désignons par $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$. Dans la correspondance (00) chaque élément de ces éléments correspond à un élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$, qui est un successeur de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x , et chaque type de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ est un nombre fini et leur borne supérieure est ω . D'après la propriété 4° du schème normal (voir p. 198), le type de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ croissant infiniment avec $m_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$, et leur borne supérieure est $\omega \tau^{m_1, m_2, \dots, m_k}$, où $\tau^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq 1$. D'ailleurs, d'après la propriété (0), il existe un nombre infini d'éléments qui sont congruents à $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$, et, par suite, il existe un élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}'^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ qui est congruent à celui-là et qui correspond à $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}'^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ dont le type est plus grand que celui de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}'^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$. Par suite, d'après les cas (**), $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}'^{m_1, m_2, \dots, m_k}} = q_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}'^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$. D'après la définition de type et d'après la condition 3° de la normalité, nous avons donc l'inégalité : $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k-1}} = \omega + 1$, il vient donc $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \omega + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et par suite

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

Deuxième cas où $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} < q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Il est évident que le type de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$, qui est un successeur de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x , est au plus $\omega + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ au point x , et il existe au moins un élément qui a

précisément le type $\omega + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. De plus, par la propriété (0), il existe un nombre infini des éléments de rang $(k + p^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ dont les types sont égaux à $\omega + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. D'ailleurs, d'après la propriété 4° de la normalité, il n'existe qu'un nombre fini de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ pour lequel $\xi_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} < \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ou bien $p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} < q_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Il existe donc deux éléments $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ tels que $\xi_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et qui se correspondent. Par la considération analogue au premier cas, nous avons $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Il en résulte immédiatement que

$$(4) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_k},$$

car, il existe des éléments $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ qui sont de type $\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$.

La proposition est vraie pour $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} = 1$. Supposons donc les inégalités vraies pour tous les nombres inférieurs à un nombre $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ donné, et montrons sa vérité pour le nombre $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ lui-même. Nous avons deux cas à distinguer :

Premier cas où $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Considérons tous les éléments de rang $(k + p^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$; de tels éléments existent en nombre infini. D'après la propriété de la correspondance (00), chacun de ces éléments correspond à un élément de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ de rang $(k + p^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ successeur de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ biunivoquement. Il est évident que le type de chacun de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ est inférieur à $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et leur borne supérieure est $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, c.-à-d. il est de la forme

$$\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k} + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p}}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$$

et $\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} < \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

D'après l'hypothèse, il vient toujours

$$\begin{aligned} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} &\leq \omega 2 (\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} + 1) \\ &\leq \omega 2 \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité

$$(3) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega 2 (\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + 1).$$

Considérons, en particulier, le cas $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Prenons tous les éléments de rang $(k+p)^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ successeurs de $\nu^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. D'après la propriété 4° de la normalité et par la correspondance (00), tous ces éléments et tous les éléments de rang $(k+p)^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ qui sont des successeurs de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x se correspondent biunivoquement. Il est évident que le type d'un élément quelconque $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ est inférieur à $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et leur borne supérieure est $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. D'après la propriété (0), il existe une infinité de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ qui sont congruents. Selon la propriété 4° de la normalité (voir p. 198), il n'existe qu'un nombre fini de $\nu^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ pour lesquels le type est inférieur à celui de l'élément quelconque fixe $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$. Il existe donc deux éléments $\nu^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ et le type de celui-là est plus grand que celui-ci, et ils se correspondent dans la correspondance (00). D'après l'hypothèse, il vient

$$\begin{aligned} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} &\geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} \\ &\quad - p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}. \end{aligned}$$

Comme $\max_{n_{k+1}, n_{k+2}, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} = \omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, il vient

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$$

ce qui donne l'inégalité (4).

Deuxième cas où $p^{m_1, m_2, \dots, m_k} < q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Considérons d'abord tous les éléments de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k})$ qui sont des successeurs de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x . Le type de chacun des éléments est inférieur à $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et leur borne supérieure est $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Soit $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ un élément correspondant à $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}^*$. Prenons un élément quelconque $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ et considérons tous les éléments $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$ qui sont des successeurs de l'élément donné. La correspondance entre ces éléments et ceux de rang $(k + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}})$ qui sont des successeurs de tous les éléments $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}$, qui composent l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}^*$, est biunivoque. Or, chaque type des éléments

$$\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} \quad \delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}}}}$$

au point x est inférieur à $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et leur borne supérieure est $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Par suite, selon l'hypothèse admise, nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} &\leq \omega 2(\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} + 1) \\ &\leq \omega 2\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} &\leq \omega 2\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} \\ + p^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}}} &\leq \omega 2\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + \omega. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(3) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega 2(\sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + 1).$$

Nous allons en particulier considérer le cas $\xi^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Considérons tous les éléments $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$

$m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ de rang $(k+p m_1, m_2, \dots, m_k)$. Dans cette place, $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ sont successeurs de $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ au point x respectivement, et ils se correspondent biunivoquement. D'après la propriété 4° de la normalité et la condition (0), (voir p. 202), pour un élément quelconque $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$, il existe deux éléments $\nu_{m_1, m_2, \dots, m'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $\delta_{n_1, n_2, \dots, n'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$, dont la deuxième est congruent à $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$, tels que

$$\xi_{m_1, m_2, \dots, m'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \beta_x^{n_1, n_2, \dots, n'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$$

$$\text{et } p^{m_1, m_2, \dots, m'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{n_1, n_2, \dots, n'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k}$$

et ces deux éléments se correspondent. Comme il existe un élément $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k+p} m_1, m_1, \dots, m_k}$ dont le type au point x est $\omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ précisément, il en résulte d'après le premier cas que

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m'_{k+p} m_1, m_2, \dots, m_k} \geq \omega \sigma_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} + q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

Or, comme nous avons $q_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} > p^{m_1, m_2, \dots, m_k}$, l'inégalité suivante est établie :

$$(4) \quad \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq (\beta_x^{n_1, n_2, \dots, n_k} - p^{m_1, m_2, \dots, m_k}) + p^{m_1, m_2, \dots, m_k}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

D'après le théorème 6, α étant un nombre limite, nous pouvons conclure le

Corollaire. Soient $\mathcal{E}_{\omega\alpha}$ et $\mathcal{E}_{\omega\alpha}^*$ les constituantes supérieures du schème $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ et du schème $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ ce dernier est le schème normalisé de $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Nous avons toujours $\mathcal{E}_{\omega\alpha} = \mathcal{E}_{\omega\alpha}^*$.

La remarque suivante sera utile dans la démonstration du théorème 7.

Remarque. D'après la propriété de la correspondance (00), nous pouvons vérifier que : à propos des successeurs, qui sont de rang $k+1$, de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ à un point x , il n'y a que trois cas possibles :

- 1) $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ ne possède aucun successeur au point x .
- 2) $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ possède un et un seul successeur, et ce cas a lieu dans le seul cas où $m_1 \neq 1$ ou $k \neq a_n - 1$ ($n \geq 2$).
- 3) $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ possède une infinité des successeurs, et ce cas se produit dans le seul cas où $m_1 = 1$ ou $k = a_n - 1$ ($n \geq 2$).

D'ailleurs, d'après la propriété du schème congruent et d'après celle de la correspondance (00), nous pouvons dire que, si $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ possède une infinité des successeurs de rang $k+1$, c. -à- d. $k = a_n - 1$, et si $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ possède au moins un successeur au point x , $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ en possède une infinité des successeurs de rang $k+1$. Par conséquent, comme on peut sans peine voir, si le type de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ au point x est $\omega\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ($\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq 1$), les successeurs, qui sont de rang $k+1, k+2, \dots, k+q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} - 1$ respectivement, de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ au point x se déterminent uniquement.

13. Transformation des schèmes de SOUSLIN aux cribles de LUSIN.

Théorème 7. Soit $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ un schème défini dans le théorème 6. Maintenant, faisons correspondre un élément quelconque $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* (\neq 0)$ de ce schème à un nombre rationnel $y_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ qui est donné par $1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \dots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\dots+m_k}} \right)$ et désignons par Δ le crible $\sum_{m_1, m_2, \dots, m_k} \Delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ où

$$\Delta_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^* \times y_{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

Désignons par γ_x^* et γ_x le type⁽¹⁾ de $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ et de Δ au point x respectivement. Posons $\gamma_x^* = \omega\sigma_x + q_x$ où $0 \leq q_x < \omega$. Nous avons alors les inégalités suivantes :

(1) Nous comprenons par le type de $\Delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ au point x dans l'axe OX celui de l'ensemble bien ordonné des nombres rationnels obtenus par la transformation donné plus haut des indices $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ de l'élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ et de tous les éléments successeurs au point x de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$. Soient $\gamma_x^{n_1}$ le type de Δ_{n_1} au point x . Le crible Δ est dit de type γ_x au point x , si $\gamma_x = \sum_{n_1=1}^{\infty} \gamma_x^{n_1}$.

$$\omega^{\sigma_x} \leq \gamma_x \leq \omega^{2(\sigma_x+1)+1}$$

et si de plus σ_x est de deuxième espèce et $q_x = 0$, nous avons l'égalité :

$$\omega^{\sigma_x} = \gamma_x,$$

où comprenons par ω^0 le nombre nul.

Démonstration. Désignons par $\gamma_x^{*m_1, m_2, \dots, m_k}$ et $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ le type de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ et de $\Delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ au point x respectivement et posons $\gamma_x^{*m_1, m_2, \dots, m_k} = \omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Alors, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} &\leq \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \\ &\leq \omega^{2(\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} + 1)}. \end{aligned}$$

En premier lieu, nous allons démontrer l'inégalité suivante

$$\omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

Nous le verrons par le raisonnement par recurrence.

Premier cas ; $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$. D'après le fait que $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ est de type $q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ au point x , il existe sûrement un élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} - 1}^*$ de rang $(k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} - 1)$ qui contient le point x . Il vient donc $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \geq q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ puisque le système $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ est monotone.

Supposons que pour tout nombre inférieur à $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ donné l'inégalité est vraie, et démontrons sa vérité pour $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$.

Considérons tous les éléments $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}^*$ de rang $(k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ successeurs au point x de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$. Alors, le type au point x de chacun de ces éléments est inférieur à $\omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ et leur borne supérieure est $\omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$. Désignons par $\omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ et par $\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ le type de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}^*$ et de $\Delta_{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}$ au point x respectivement. D'après l'hypothèse, nous avons toujours

$$\omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \\ \leq \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}.$$

D'après la remarque dans § 12 (voir p. 212), on peut sans peine vérifier que

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \left(\sum_{m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \right) \\ + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

Par suite,

$$\left(\sum_{m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}} \right. \\ \left. + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \right) \\ + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k},$$

il vient donc

$$\omega^{\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

La première partie de l'inégalité est ainsi établie. Nous en prouvons ensuite l'autre partie :

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega^{2(\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} + 1)}.$$

Considérons le cas où $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$. Dans ce cas, comme $\gamma_x^{*m_1, m_2, \dots, m_k}$ est égal à $q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$, il n'existe aucun élément de rang $(k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ qui est le successeur de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ au point x . D'après la propriété de la normalité et celle de la correspondance (00) et d'après la remarque dans § 12 (voir p. 212), nous pouvons vérifier l'inégalité suivante

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \sum_{n=1} \left\{ \omega(n-1) + \omega(n-2) \right. \\ \left. + \dots + \omega 2 + \omega + \omega \right\} < \omega^2 \leq \omega^{2(\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} + 1)}.$$

L'inégalité à établir est donc vraie pour $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$. Supposons donc l'inégalité vraie pour tout nombre inférieur à $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ donné, et établissons-la pour $\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ lui-même.

Considérons tous les éléments $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x}}^*$ de rang $(k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ qui sont des successeurs de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ au point x . Comme le type de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$ est $\omega \sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$, celui de chaque élément de rang $(k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k})$ est inférieur à $\omega \sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ et leur borne supérieure est $\omega \sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$. D'après l'hypothèse admise, comme

$\omega \sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x}} + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x}}$ est le type de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x}}^*$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x}} &\leq \omega^{2(\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_{k+q_x}} + 1)} \\ &\leq \omega^{2\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}}. \end{aligned}$$

Comme chaque élément $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_l}^*$ ($1 \leq l < k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}$) correspond à l'élément non vide $\nu_{m_1, m_2, \dots, m_l}$ de même rang du schème normal, le système des nombres rationnels qui correspondent aux indices de tous les éléments, qui sont des successeurs de rang $k+1, k+2, \dots, k + q_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} - 1$ de $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*$, forment l'ensemble bien ordonné de type $< \omega^2$.

Il vient donc

$$\gamma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq \omega^{2\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k}} \cdot \omega^2 = \omega^{2(\sigma_x^{m_1, m_2, \dots, m_k} + 1)}.$$

L'inégalité est ainsi établie, et en posant $k=1$, nous avons démontré pour tout nombre naturel m_1

$$(*) \quad \omega^{\sigma_x^{m_1}} + q_x^{m_1} \leq \gamma_x^{m_1} \leq \omega^{2(\sigma_x^{m_1} + 1)}.$$

Or, γ_x^* où $\gamma_x^* = \omega \sigma_x + q_x$ étant le type du système $\{\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}^*\}$ au point x , et γ_x étant celui de Δ au point x , il existe l'inégalité

$$\omega^{\sigma_x} \leq \gamma_x \leq \omega^{2(\sigma_x + 1)}.$$

En effet, par la définition de type $\gamma_x^* = \max_{m_1}^* \gamma_x^{m_1}$ et $\gamma_x = \sum_{m_1=1}^{\infty} \gamma_x^{m_1}$.

Ici, par les inégalités obtenues précédemment, $\omega^{\sigma_x^{m_1}} + q_x^{m_1} \leq \gamma_x^{m_1}$

$\leq \omega^{2(\sigma_x^{m_1}+1)}$, quel que soit l'entier positif m_1 . Nous avons donc immédiatement

$$\omega^{\sigma_x} \leq \gamma_x \leq \omega^{2(\sigma_x+1)+1}.$$

Si $\gamma_x^* = \omega\sigma_x$ où σ_x est de deuxième espèce, d'après l'inégalité (*) nous avons l'égalité suivante

$$\gamma_x = \omega^{\sigma_x}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ainsi, nous avons le

Théorème 8. $\mathfrak{E}_{\omega^\gamma}$ étant la constituante supérieure de schème monotone de SOUSLIN de type ω^γ , où γ est de deuxième espèce, il existe un crible bien ordonné de type ω^γ (d'ensembles $\mathfrak{F}_\alpha^1$) et pour lequel sa constituante supérieure est égale à celle de celui-là.

14. Détermination de la classe des constituantes supérieures au sens de LUSIN.

Théorème 9. Tout ensemble $\mathfrak{F}_\alpha^{2^\gamma}$ peut être considéré comme la constituante supérieure $\mathfrak{E}_{\omega^\gamma}$ d'un crible bien ordonné de type transfini ω^γ (d'ensembles $\mathfrak{F}_\alpha^1$).

Démonstration. Pour $\gamma = 1$, notre théorème est évidemment vrai. En supposons qu'il est vrai pour tout nombre γ' tel que $1 \leq \gamma' < \gamma$ ($1 < \gamma < \mathfrak{Q}$), et montrons sa vérité pour γ lui-même.

D'après le théorème 8, la proposition est vraie pour tout nombre limite. Il est suffisant de considérer le cas où γ est de première espèce, soit $\gamma = \gamma' + 1$. Dans ce cas l'ensemble donné $\mathfrak{F}_\alpha^{2^\gamma}$ peut être considéré comme l'ensemble limite complet d'une suite infinie d'ensembles $(\mathfrak{F}_\alpha^{2^{\gamma'}})^{(1)}$, $(\mathfrak{F}_\alpha^{2^{\gamma'}})^{(2)}$, ... de classe $2\gamma'$. Or, d'après l'hypothèse admise, chacun de ces ensembles $(\mathfrak{F}_\alpha^{2^{\gamma'}})^{(k)}$ est la constituante supérieure d'un crible Δ_k bien ordonné de type $\omega^{\gamma'}$. Nous pouvons supposer ces cribles Δ_k choisis de manière que le crible Δ_{k+1} soit situé au-dessus du crible Δ_k quel que soit l'entier positif k . Désignons par Δ la réunion des cribles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$. Il est clair que Δ est un crible bien ordonné de type $\omega^{\gamma'}$ et que l'ensemble donné est la constituante supérieure de Δ , c. q. f. d.

En résumé, nous sommes arrivés à la proposition finale :

Tout ensemble $\mathfrak{F}_\alpha^{2^\gamma}$ peut être considéré comme la constituante supérieure d'un crible bien ordonné de type ω^γ (d'ensembles $\mathfrak{F}_\alpha^1$). Inversement, la constituante supérieure d'un crible (d'ensembles $\mathfrak{F}_\alpha^1$) bien ordonné de type ω^γ est un ensemble $\mathfrak{F}_\alpha^{2^\gamma}$.