HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	DIE PROJEKTIVE THEORIE EINES SYSTEMS DER ``PATHS'' HÖHERER ORDNUNG II
Author(s)	Hombu, Hitoshi
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 7(1-2), 035-094
Issue Date	1938
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55938
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_07_N1-2_035-094.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

DIE PROJEKTIVE THEORIE EINES SYSTEMS DER "PATHS" HÖHERER ORDNUNG, II

Von

Hitoshi HOMBU

ÜBERSICHT.

In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, welche auf die Koordinaten x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bezogen ist, werden die parametrisierten Lösungskurven des Differentialgleichungssystems

$$x^{(m)i} + H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) = 0$$

$(x^{(\nu)i} = d^\nu x^i/dt^\nu)$ "paths" m-ter Ordnung genannt. Eine Kurve heisst Integralkurve dieses Gleichungssystems, wenn sie durch passende Wahl eines Parameters ein "path" wird. Wir zeigen in §2: dafür, dass durch jedes Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung eine einzige Integralkurve des Systems der "paths" läuft, was als Eigenschaft Γ bezeichnet wird, soll H^i die Gestalt

$$H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) = {}^*H^i(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) + {}^*H(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)})x^{(1)i}$$

annehmen und weiter die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\sum_{r=1}^{m-1} r H^i_{(r)j} x^{(r)j} = mH^i + P_1 x^{(1)i},$$

$$\sum_{r=s}^{m-1} \binom{r}{s} H^i_{(r)j} x^{(r-s+1)j} = -\binom{m}{s} x^{(m-s+1)i} + P_s x^{(1)i} \quad (2 \leqq s \leqq m-1)$$

$(f_{(\nu)j} = \partial f/\partial x^{(\nu)j})$, wo die Skalare $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ Funktionen von t, x^i, $x^{(1)i}, \ldots, x^{(m-1)i}$ sind. Und die Integralkurven des Systems genügen dann alle einem System der Differentialgleichungen

$$\frac{d^m x^\alpha}{dz^m} + f^\alpha\left(x^\beta, z; \frac{dx^\beta}{dz}, \ldots, \frac{d^{m-1}x^\beta}{dz^{m-1}}\right) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$(z \equiv x^n)$, und umgekehrt. Das letzte System heisst dem ursprünglichen System der "paths" assoziiert. Wenn alle Integralkurven des Systems

der "paths" (H^i) mit denjenigen eines neuen Systems der "paths" m-ter Ordnung $(\tilde{H}^i)$ völlig übereinstimmen, so heissen zwei Systeme miteinander projektiv verwandt, und besteht

$$\tilde{H}^i = H^i + \rho x^{(1)i} \quad (\rho: \text{ von } t, x^j, x^{(1)j}, \ldots, x^{(m-1)j} \text{ abhängig}).$$

Umgekehrt, wenn das System (H^i) die Eigenschaft Γ besitzt und ρ eine beliebige Funktion ist, so ist das System $(\tilde{H}^i)$ mit dem System (H^i) projektiv verwandt. Solche Transformation der Systeme sowie eine Klasse der Systeme der "paths", von denen jede zwei Systeme miteinander projektiv verwandt sind, heissen projektiv. Unter der projektiven Theorie der "paths", mit der wir uns in dieser Arbeit beschäftigen möchten, verstehen wir die Theorie (das Equivalenzproblem, das Problem der Differentialkomitanten) eines Systems der "paths" gegenüber den projektiven Transformationen sowie den Koordinaten- (oder Punkt-) transformationen. Da jedes System einer projektiven Klasse dasselbe assoziierte System besitzt und die Zuordnung einer projektiven Klasse und des assoziierten Systems eineindeutig ist, ist die projektive Theorie nichts anderes als die Theorie eines Differentialgleichungssystems $d^m x^\alpha/dz^m + f^\alpha = 0$ gegenüber den Koordinaten- (oder Punkt-) transformationen.

In §1 leiten wir aus den Grundübertragungen in der affinen Theorie[1] der "paths" eine Reihe der Skalare $S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(m-1)}$ her. Im Fall des Systems mit der Eigenschaft Γ stehen die Skalare $S^*_{(u)}$ $(u = 2, 3, \ldots, m-1)$, welche wir aus $S_{(u)}$ durch Modifizierung mit $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ gewinnen, mit den Torsionsgrössen in der affinen Theorie in enger Beziehung, und weiter bestehen zwischen ihnen einfache Relationen (2. 30, 31). Unter einer projektiven Transformation sind die Skalare $S^*_{(2)}, S^*_{(3)}, \ldots, S^*_{(m-2)}$ invariant, während der Skalar $S^*_{(m-1)}$ sich in der Weise

$$\tilde{S}^*_{(m-1)} = S^*_{(m-1)} - \frac{(n-1)(m+1)}{m(m-1)}\rho$$

transformiert und somit die Grösse

$$\mathfrak{H}^i = H^i + \frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)} S^*_{(m-1)} x^{(1)i}$$

(1) Das bedeutet die Betrachtung unter den Koordinatentransformationen sowie den linearen Parametertransformationen.

invariant ist. Das System der "paths"

$$x^{(m)i}+\mathfrak{H}^i=0\,,$$

das projektiv invariant ist, gehört der projektiven Klasse an, da es mit dem System (H^i) projektiv verwandt ist, und wird durch $\mathfrak{S}^*_{(m-1)}=0$ gekennzeichnet. Aus diesem Grund nennen wir es das ausgezeichnete System einer projektiven Klasse. Die projektiven Invarianten $S^*_{(u)}$ $(u=2, 3, \ldots, m-2)$ stehen mit den Skalaren $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_{m-2}$ des ausgezeichneten Systems in den Beziehungen

$$\mathfrak{P}_s=\frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)}\binom{m-2}{s}S^*_{(m-s)} \quad (2\leqq s\leqq m-2)\,.$$

Da das ausgezeichnete System von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, so schliessen wir, dass die Differentialkomitanten einer projektiven Klasse der Systeme der "paths" diejenigen ihres ausgezeichneten Systems sind und das Equivalenzproblem zweier projektiven Klassen in zwei Mannigfaltigkeiten sich auf dasjenige ihrer ausgezeichneten Systeme unter der Gruppe der Punkttransformationen reduziert. Der projektiven Theorie ist so prinzipiell eine Grundlage angegeben, da die affine Theorie der "paths" schon von Herrn Prof. A. KAWAGUCHI und dem Verfasser ([7](1)) gegründet worden ist.

In §4 finden wir eine Anwendung auf die Theorie des KAWAGUCHIschen Raumes, der durch Angabe einer verallgemeinerten Massbestimmung

$$s=\int F(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})\,dt$$

entsteht; es wird vorausgesetzt, dass das Integral unter jeder Parametertransformation invariant ist. Da nämlich durch ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}F_{(m)i}-\frac{1}{m}F_{(m-1)i}+\frac{1}{2}(m-1)F^{-1}F_{(m)i}\frac{d}{dt}F=0$$

eine projektive Klasse der Systeme der "paths" $(m+1)$-ter Ordnung gegeben wird, so ziehen wir das ausgezeichnete System der Klasse heraus und leiten aus diesem System ein Übertragungsschema in der Mannigfaltigkeit des Linienelementes m-ter Ordnung her. Mit Hilfe

(1) Vgl. Literaturverzeichnis am Schluss dieser Arbeit.

des Übertragungsschemas kann man offenbar das Equivalenzproblem des KAWAGUCHIschen Raumes behandeln.

§1. DAS SYSTEM DER SKALARE $S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(m-1)}$.

1. Formeln aus der affinen Theorie der "paths". Sei ein System der "paths" m-ter Ordnung

$$x^{(m)i} + H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) = 0 \tag{1.1}$$

gegeben. Wir setzen voraus, dass H^i bezüglich ihrer Argumente hinreichend vielmal differenzierbar ist. Wir wollen die grundlegenden Formeln der allgemeinen Theorie der "paths" unter Koordinatentransformationen aus den Arbeiten [4, 7] vergleichen.

Herr Prof. A. KAWAGUCHI hat in der Arbeit [4] den folgenden Satz bewiesen:

Ein Affinor T (mit einem Gewicht oder nicht) sei vom Linienelement $s(\geqq 1)$-ter Ordnung abhängig. Ist ein Vektor v^i von t abhängig, so sind

$$\overset{s,p}{D}_j(T)v^j = \sum_{r=p}^{s} \binom{r}{p} T_{(r)j} v^{(r-p)j} \quad (1 \leqq p \leqq s) \tag{1.2}$$

$(v^{(\nu)j} = d^\nu v^j/dt^\nu)$ die Bestimmungszahlen eines Affinors von derselben Art wie T;

und durch Anwendung dieses Satzes auf den Vektor[1] $T^i \equiv x^{(m)i} + H^i$ hat er verschiedene Ableitungen längs jeder mit t parametrisierten Kurve

$$\overset{m-p}{\Delta} v^i = v^{(m-p)i} + \binom{m}{p}^{-1} \sum_{r=p}^{m-1} \binom{r}{p} H^i_{(r)j} v^{(r-p)j} \quad (1 \leqq p \leqq m-1) \tag{1.3}$$

definiert. Insbesondere ist die Ableitung

$$\overset{1}{\Delta} v^i = v^{(1)i} + G^i_j v^j \quad \left(G^i_j = \frac{1}{m} H^i_{(m-1)j}\right) \tag{1.4}$$

von früher her nach D. D. KOSAMBI bekannt ([8, 9]).

Zweitens erklären wir in der Mannigfaltigkeit $^*K^{(m-1)}_n$ des Linienelementes $(m-1)$-ter Ordnung $x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(m-1)i}$ und des Parameters t durch die folgenden Formeln das kovariante Differential Dv^i eines

(1) Da bei $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$ $x^{(m)\lambda} = A^\lambda_i x^{(m)i} + \varphi^\lambda(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)})$ ist, so hat man $H^\lambda = A^\lambda_i H^i - \varphi^\lambda$, somit $T^\lambda = A^\lambda_i T^i$ $(A^\lambda_i = \partial x^\lambda / \partial x^i)$.

Vektorfelds v^i und die Grundübertragungen $\delta x^{(1)i}, \ldots, \delta x^{(m-1)i}$ (das System der Pfaffschen Ausdrücke):

$$(1.5) \qquad Dv^i = dv^i + \sum_{u=0}^{m-2} \underset{u}{\Gamma}{}^i_{jk} v^j dx^{(u)k} ,$$

$$(1.6) \qquad \delta x^{(q)i} = dx^{(q)i} + \sum_{r=0}^{q-1} Q^{i(r)}_{(q)j} dx^{(r)j} \quad (1 \leqq q \leqq m-1) ,$$

wobei

$$(1.7) \qquad \underset{u}{\Gamma}{}^i_{jk} = \frac{u+1}{m} H^i_{(m-1)j\,(u+1)k} \quad (0 \leqq u \leqq m-2) ,$$

$$(1.8) \qquad Q^{i(r)}_{(q)j} = \frac{q!\,(m-q+r)!}{m!\;r!} H^i_{(m-q+r)j} \quad (0 \leqq r < q \leqq m-1)$$

sind. Und durch

$$Dv^i = \nabla v^i \cdot dt + \sum_{q=0}^{m-1} \nabla^{(q)}_k v^i \,.\, \delta x^{(q)k}$$

definieren wir die kovarianten Ableitungen ∇v^i, $\nabla^{(q)}_k v^i$. Setzen wir nach (1.6)

$$(1.9) \qquad dx^{(q)i} = \delta x^{(q)i} - \sum_{r=0}^{q-1} Q^{i(r)}_{(q)j}\, dx^{(r)j} = \delta x^{(q)i} - \sum_{r=0}^{q-1} R^{i(r)}_{(q)j}\, \delta x^{(r)j} ,$$

wobei $R^{i(r)}_{(q)j}$ durch die rekurrenten Formeln

$$(1.10a) \qquad R^{i(q-1)}_{(q)j} = Q^{i(q-1)}_{(q)j}, \quad R^{i(r)}_{(q)j} = Q^{i(r)}_{(q)j} - \sum_{s=r+1}^{q-1} R^{i(s)}_{(q)k} Q^{k(r)}_{(s)j}$$

oder

$$(1.10b) \qquad R^{i(q-1)}_{(q)j} = Q^{i(q-1)}_{(q)j}, \quad R^{i(r)}_{(q)j} = Q^{i(r)}_{(q)j} - \sum_{s=r+1}^{q-1} Q^{i(s)}_{(q)k} R^{k(r)}_{(s)j}$$

gegeben wird, so lassen sich die kovarianten Ableitungen in die Form

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \nabla v^i = \partial_t v^i , \quad \nabla^{(m-1)}_k v^i = v^i_{(m-1)k} , \\ \nabla^{(q)}_k v^i = v^i_{(q)k} - \sum_{s=q+1}^{m-1} R^{l(q)}_{(s)k} v^i_{(s)l} + \underset{q}{\Gamma}{}^{*i}_{jk} v^j \\ \qquad\qquad \equiv \bar{\nabla}^{(q)}_k v^i + \underset{q}{\Gamma}{}^{*i}_{jk} v^j \quad (0 \leqq q \leqq m-2) \end{cases}$$

schreiben, wo

$$(1.12) \qquad \underset{q}{\Gamma}{}^{*i}_{jk} = \underset{q}{\Gamma}{}^i_{jk} - \sum_{s=q+1}^{m-2} R^{l(q)}_{(s)k} \underset{s}{\Gamma}{}^i_{jl}$$

ist. In der affinen Theorie der "paths" sind dann die Strukturgrössen dieser Übertragung sowie der Vektor

$$K^i = H^i - \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m-1} r H^i_{(r)j} x^{(r)j} \tag{1.13}$$

fundamental.

Nebenbei fügen wir einige Bemerkungen über die Koeffizienten $Q^{i(r)}_{(q)j}$ und $R^{i(r)}_{(q)j}$ in $\delta x^{(q)i}$ und $dx^{(q)i}$ hinzu. Aus (1.8) sehen wir gleich

$$Q^{i(r)}_{(q)j} = \frac{q!\,(r-u)!}{(q-u)!\,r!} Q^{i(r-u)}_{(q-u)j} . \tag{1.14a}$$

und aus (1.10a oder b)

$$R^{i(r)}_{(q)j} = \frac{q!\,(r-u)!}{(q-u)!\,r!} R^{i(r-u)}_{(q-u)j} . \tag{1.14b}$$

Aus der Formel (1.10a) erhält man durch Ersetzung von $R^{i(s)}_{(q)k}$

$$R^{i(r)}_{(q)j} = Q^{i(r)}_{(q)j} - \sum_{s=r+1}^{q-1} Q^{i(s)}_{(q)k} Q^{k(r)}_{(s)j} + \sum_{s=r+1}^{q-1}\sum_{u=s+1}^{q-1} R^{i(u)}_{(q)l} Q^{l(s)}_{(u)k} Q^{k(r)}_{(s)j} ,$$

und durch wiederholte Ersetzung aus (1.10a) drückt $R^{i(r)}_{(q)j}$ sich in der Summe aller Glieder von der Gestalt aus:

$$(-1)^s Q^{i(q_1)}_{(q)h_1} Q^{h_1(q_2)}_{(q_1)h_2} \dots Q^{h_s(r)}_{(q_s)j} \quad (h_1, h_2, \dots, h_s : \text{summiert})^{(1)} ;$$

wo $0 \leqq s \leqq q-r-1$, $q > q_1 > q_2 \dots > q_s > r$ sind. Somit haben wir

$$R^{i(r)}_{(q)j} = \sum_{\substack{q>q_1>\cdots>q_s>r \\ s\geq 0}} (-1)^s Q^{i(q_1)}_{(q)h_1} Q^{h_1(q_2)}_{(q_1)h_2} \dots Q^{h_s(r)}_{(q_s)j} . \tag{1.10c}$$

Versteht man nun unter $\mathfrak{D}$ einen Differentialoperator[2] (z.B. Differentiation), der auf $Q^{k(s)}_{(r)l}$ angewendet wird, so hat man aus (1.10c)

$$\mathfrak{D}R^{i(r)}_{(q)j} = \sum_{\substack{q>q_1>\cdots>q_s>r \\ s\geq 0}} \sum_{a=0}^{s} (-1)^s Q^{i(q_1)}_{(q)h_1} \dots \mathfrak{D}Q^{h_a(q_{a+1})}_{(q_a)h_{a+1}} \dots Q^{h_s(r)}_{(q_s)j} \quad (q_0=q\,,\ q_{s+1}=r)$$

$$= \sum_{q\geq q_a > q_{a+1}\geq r,\ q>q_1>\cdots>q_a,\ q_{a+1}>\cdots>r} (-1)^{a-1} Q^{i(q_1)}_{(q)h_1} \dots Q^{h_{a-1}(q_a)}_{(q_{a-1})h_a}$$

$$\times \mathfrak{D}Q^{h_a(q_{a+1})}_{(q_a)h_{a+1}} (-1)^{s-a-1} Q^{h_{a+1}(q_{a+2})}_{(q_{a+1})h_{a+2}} \dots Q^{h_s(r)}_{(q_s)j} ,$$

---

(1) Für $s=0$ bedeutet dieses Glied $Q^{i(r)}_{(q)j}$.

(2) $\mathfrak{D}(U+V) = \mathfrak{D}U + \mathfrak{D}V$, $\mathfrak{D}(UV) = U\mathfrak{D}V + V\mathfrak{D}U$.

wo im Fall $q_a = q$ bzw. $q_{a+1} = r$ das zweite bzw. dritte Summationssymbol beseitigt werden muss. Daraus leitet man unter Berücksichtigung von (1.10c)

$$\mathfrak{D}R^{i(r)}_{(q)j} = \sum_{q \geq q' > q'' \geq r} R^{i(q')}_{(q)h'}\, \mathfrak{D}Q^{h'(q'')}_{(q')h''}\, R^{h''(r)}_{(q'')j} \tag{1.15}$$

her, setzend

$$R^{k(u)}_{(u)l} = -\delta^k_l \quad (u: \text{nicht summiert}). \tag{1.10d}$$

2. Die Torsionsgrössen. In üblicher Weise können wir leicht die Krümmungs- und Torsionsgrössen unserer Übertragung (1.5—12) berechnen. Zum späteren Zweck betrachten wir besonders die Torsionsgrössen ([7], (2.31a–f));

$$\text{(a)}\quad 2S^{(q)j}_{k(s)} = \partial_t Q^{j(q)}_{(s)k} - \sum_{u=q+1}^{s-1} R^{l(q)}_{(u)k}\partial_t Q^{j(u)}_{(s)l} \quad (q+1 \leqq s),$$

$$\text{(b)}\quad 2S^{(q)(q)j}_{k\,l\,(q)} = \underset{q}{\Gamma^{*j}_{kl}} - \underset{q}{\Gamma^{*j}_{lk}}, \quad \text{(c)}\quad 2S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(q)} = \underset{r}{\Gamma^{*j}_{kl}} \quad (q < r),$$

$$\text{(d)}\quad 2S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(s)} = \bar\nabla^{(r)}_l Q^{j(q)}_{(s)k} - \sum_{u=q+1}^{s-1} R^{h(q)}_{(u)k}\bar\nabla^{(r)}_l Q^{j(u)}_{(s)h} \quad (q < s < r), \tag{1.16}$$

$$\text{(e)}\quad 2S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(r)} = -\underset{q}{\Gamma^{*j}_{lk}} + \bar\nabla^{(r)}_l Q^{j(q)}_{(r)k} - \sum_{u=q+1}^{r-1} R^{h(q)}_{(u)k}\bar\nabla^{(r)}_l Q^{j(u)}_{(r)h} \quad (q < r),$$

$$\text{(f)}\quad 2S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(s)} = \bar\nabla^{(r)}_l Q^{j(q)}_{(s)k} - \bar\nabla^{(q)}_k Q^{j(r)}_{(s)l} - \sum_{u=q+1}^{s-1} R^{h(q)}_{(u)k}\bar\nabla^{(r)}_l Q^{j(u)}_{(s)h} + \sum_{u=r+1}^{s-1} R^{h(r)}_{(u)l}\bar\nabla^{(q)}_k Q^{j(u)}_{(s)h} \quad (q \leqq r < s),$$

wobei

$$\bar\nabla^{(q)}_k f = f_{(q)k} - \sum_{s=q+1}^{m-1} R^{l(q)}_{(s)k} f_{(s)l} = -\sum_{s=q}^{m-1} R^{l(q)}_{(s)k} f_{(s)l} \tag{1.17}$$

gesetzt ist. Nach (1.7, 8; 10a, b; 12; 14a, b) kann man leicht die folgenden Beziehungen beweisen:

$$S^{(q)j}_{k(s)} = \binom{s}{q} S^{(0)\,j}_{k(s-q)} \quad (q+1 \leqq s), \qquad S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(q)} = S^{(0)(r)j}_{k\,l\,(0)} \quad (q < r),$$

$$S^{(q)(q)j}_{k\,l\,(q)} = 2S^{(0)(q)j}_{[kl]\,(0)} \quad (q > 0), \qquad S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(s)} = \binom{s}{q} S^{(0)(r)\,j}_{k\,l\,(s-q)} \quad (q < s < r),$$

$$S^{(0)(r)j}_{k\,l\,(1)} = \frac{1}{r} S^{(0)(r-1)j}_{k\,l\,(0)} \quad (r > 1), \qquad S^{(0)(m-1)j}_{k\,l\,(s)} = \binom{m-1}{s}^{-1} S^{(0)(m-s-1)j}_{k\,l\,(0)} \quad (m-1 > s),$$

$$S^{(0)(m-1)j}_{k\,l\,(m-1)} = 0, \qquad S^{(0)(1)\,j}_{k\,l\,(1)} = S^{(0)(0)\,j}_{k\,l\,(0)},$$

$$S^{(q)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(r)} = -S^{(0)}_{l}{}^{(q)}_{k}{}^{j}_{(0)} + \binom{r}{q} S^{(0)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(r-q)} \quad (r > q > 0)\,,$$

$$S^{(q)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(s)} = \frac{s!\,(q+r-s)!}{q!\ r!}\left[S^{(q+r-s)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(r)} - S^{(q+r-s)}_{k}{}^{(q)}_{l}{}^{j}_{(q)} - S^{(q+r-s)}_{k}{}^{(q+r-s)}_{l}{}^{j}_{(q+r-s)}\right]$$

$$(q \leqq r < s \leqq q+r)\,.$$

Somit erhalten wir die folgenden Torsionsgrössen, welche voneinander linear unabhängig sein mögen:

$S^{(0)j}_{k(s)}$ $(1 \leqq s)$ aus (a); $S^{(0)}_{k}{}^{(0)}_{l}{}^{j}_{(0)}$ aus (b);

$S^{(0)}_{k}{}^{(q)}_{l}{}^{j}_{(0)}$ $(m-2 \geqq q > 0)$ aus (c); $S^{(0)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(s)}$ $(1 < s < r < m-1)$ aus (d);

$S^{(0)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(r)}$ $(1 < r < m-1)$ aus (e); $S^{(q)}_{k}{}^{(r)}_{l}{}^{j}_{(s)}$ $(q \leqq r,\ q+r < s)$ aus (f).

3. Die Skalare $S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(m-1)}$. In der projektiven Theorie der "paths" dritter bzw. vierter Ordnung haben wir mit Hilfe eines Skalars S bzw. T aus jeder projektiven Klasse ein ausgezeichnetes System herausgezogen. Im Fall der Systeme höherer Ordnung möchten wir aus den Grundübertragungen eine Reihe der Skalare herleiten, die die Verallgemeinerung von S und T sind. Wir haben aus der Arbeit [7] den folgenden Satz:

Ist $\Delta v^i = v^{(1)i} + G^i_j v^j$ ein kovariantes Ableitungsverfahren, wo G^i_j von dem Linienelement s-ter Ordnung und t abhängt, so transformieren sich die PFAFF*schen Ausdrücke*

$$\Delta P^i(d) \equiv \sum_{r=0}^{s} \overset{r}{P}{}^i_k dx^{(r+1)k} + \sum_{r=0}^{s}\left[\frac{d}{dt}\overset{r}{P}{}^i_k + G^i_j \overset{r}{P}{}^j_k\right] dx^{(r)k}$$

bei Koordinatentransformation wie ein Vektor, wenn Gleiches für die Ausdrücke

$$P^i(d) = \sum_{r=0}^{s} \overset{r}{P}{}^i_k\, dx^{(r)k}$$

gilt, die auch von dem Linienelement s-ter Ordnung und t abhängig sind.

Wendet man diesen Satz auf $P^i(d) = \delta x^{(q-1)i}$ $(q = 1, 2, \ldots,$ oder $m-1)$ an, wo $\Delta = \overset{1}{\Delta}$, $s = m$ sind, so erhält man

$$\overset{1}{\Delta}(\delta x^{(q-1)i}) = dx^{(q)i} + (G^i_j + Q_{(q-1)j}^{i(q-2)})dx^{(q-1)j}$$

$$+\sum_{r=1}^{q-1}\left[\frac{d}{dt}Q_{(q-1)j}^{i\ (r)} + G^i_l Q_{(q-1)j}^{l\ (r)} + Q_{(q-1)\ j}^{i\ (r-1)}\right]dx^{(r)j}$$

$$+\left[\frac{d}{dt}Q_{(q-1)j}^{i\ (0)} + G^i_l Q_{(q-1)j}^{l\ (0)}\right]dx^j$$

$$= \delta x^{(q)i} - \sum_{r=0}^{q-2}\left[\frac{q-r}{q}Q^{i(r)}_{(q)j} - \frac{d}{dt}Q_{(q-1)j}^{i\ (r)} - G^i_l Q_{(q-1)j}^{l\ (r)}\right]dx^{(r)j},$$

da nach (1.4, 8) $G^i_j + Q_{(q-1)j}^{i(q-2)} = Q^{i(q-1)}_{(q)\ j}$, $Q_{(q-1)j}^{i(r-1)} = \frac{r}{q}Q^{i(r)}_{(q)j}$ sind. ($\delta x^{(1)i} = \overset{1}{\Delta}(dx^i)$). Drückt man nach (1.9) die rechte Seite in $\delta x^{(s)k}$ aus, so hat man

$$\delta x^{(q)i} - \overset{1}{\Delta}(\delta x^{(q-1)i}) = \sum_{s=0}^{q-2} S^{i(s)}_{(q)k}\,\delta x^{(s)k},$$

wo

$$S^{i(s)}_{(q)k} = \frac{q-s}{q}Q^{i(s)}_{(q)k} - \frac{d}{dt}Q_{(q-1)k}^{i\ (s)} - G^i_l Q_{(q-1)k}^{l\ (s)}$$

$$-\sum_{r=s+1}^{q-2}\left(\frac{q-r}{q}Q^{i(r)}_{(q)j} - \frac{d}{dt}Q_{(q-1)j}^{i\ (r)} - G^i_l Q_{(q-1)j}^{l\ (r)}\right)R^{j(s)}_{(r)k}$$

gesetzt ist. Da nach (1.14a, b) $S^{i(s)}_{(q)k} = \binom{q-1}{s}S_{(q-s)k}^{i\ (0)}$ ist, so haben wir schliesslich

$$\text{(1.18)}\qquad \delta x^{(q)i} - \overset{1}{\Delta}(\delta x^{(q-1)i}) = \sum_{s=0}^{q-2}\binom{q-1}{s}S_{(q-s)k}^{i\ (0)}\delta x^{(s)k} \qquad (2 \leqq q \leqq m-1)$$

und, berücksichtigend $G^i_l = \frac{1}{u}Q_{(u)\ l}^{i(u-1)}$,

$$\text{(1.19)}\qquad S^{i(0)}_{(u)k} = Q_{(u)k}^{i\ (0)} - \sum_{r=1}^{u-1}\frac{u-r}{u}Q^{i\ (r)}_{(u)j}R^{j(0)}_{(r)k} - \frac{d}{dt}Q_{(u-1)k}^{i\ (0)} + \sum_{r=1}^{u-2}R^{j(0)}_{(r)k}\frac{d}{dt}Q_{(u-1)j}^{i\ (r)}$$

($u = 2, 3, \ldots, m-1$). Aus (1.18) sieht man, dass $S^{i(0)}_{(u)k}$ wegen der Vektoreigenschaft von den Ausdrücken $\delta x^{(s)k}$ ein Affinor ist, der in i bzw. k kontra- bzw. kovariant ist. Durch Überschiebung nach i und k ergibt sich ein System der Skalare $S_{(u)}$ ($u = 2, 3, \ldots, m-1$):

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} S_{(u)} &= Q^{i(0)}_{(u)i} - \sum_{r=1}^{u-1} \frac{u-r}{u} Q^{i(r)}_{(u)j} R^{j(0)}_{(r)i} - \frac{d}{dt} Q^{i\ (0)}_{(u-1)i} + \sum_{r=1}^{u-2} R^{j(0)}_{(r)i} \frac{d}{dt} Q^{i\ (r)}_{(u-1)j} \\ &= -\sum_{r=0}^{u-1} \frac{u-r}{u} Q^{i(r)}_{(u)j} R^{j(0)}_{(r)i} + \sum_{r=0}^{u-2} R^{j(0)}_{(r)i} \frac{d}{dt} Q^{i\ (r)}_{(u-1)j} \ . \end{aligned}$$

Bisher bedeutete df/dt die Ableitung längs einer beliebigen parametrisierten Kurve

$$\frac{d}{dt} f = \partial_t f + f_{(0)j} x^{(1)j} + \cdots + f_{(m-2)j} x^{(m-1)j} + f_{(m-1)j} x^{(m)j} \ ,$$

aber wir wollen jetzt unter df/dt in $S_{(u)}$ die Ableitung *längs eines "path"* verstehen:

$$(1.21)\qquad \frac{d}{dt} f = \partial_t f + f_{(0)j} x^{(1)j} + \cdots + f_{(m-2)j} x^{(m-1)j} - f_{(m-1)j} H^j \ .$$

$S_{(u)}$ $(u = 2, 3, \ldots, m-1)$, die von $x^{(m)i}$ nicht abhängen, sind je wieder ein Skalar, da unter Koordinatentransformation zwei Wertesysteme $(x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(m)i})$ und $(x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(m-1)i}, -H^i)$ sich in ganz derselben Weise transformieren.

Im Fall $m = 3$ bzw. 4 berechnet man leicht

$$S_{(2)} = \frac{1}{3} H^i_{(1)} - \frac{1}{9} H^i_{(2)j} H^j_{(2)i} - \frac{1}{3} \frac{d}{dt} H^i_{(2)i}$$

($S_{(2)} = 2S$; [3], (3.24)) bzw.

$$S_{(2)} = \frac{1}{6} H^i_{(2)i} - \frac{1}{16} H^i_{(3)j} H^j_{(3)i} - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} H^i_{(3)i}$$

$$S_{(3)} = \frac{1}{4} H^i_{(1)i} - \frac{1}{8} H^i_{(2)j} H^j_{(3)i} + \frac{1}{32} H^i_{(3)j} H^j_{(3)k} H^k_{(5)i}$$

$$- \frac{1}{6} \frac{d}{dt} H^i_{(2)i} + \frac{1}{8} H^j_{(3)i} \frac{d}{dt} H^i_{(3)j}$$

($S_{(2)} = 2U$, $S_{(3)} = 2T$; [3], (4.21, 30a)).

4. Die Operatoren Δ_1, Δ_2 .... f sei eine von t und dem Linienelement N-ter Ordnung abhängige Funktion. Wir definieren die Operatoren Δ_1, Δ_2, ... durch

$$(1.22) \qquad \Delta_s f = \sum_{r=s}^{N} \binom{r}{s} f_{(r)j} x^{(r-s+1)j} \quad (s = 1, 2, \ldots, N) .$$

Da nach (1.2) $\Delta_s f$ in die Form $\Delta_s f = \overset{N,s}{D}_j(f) x^{(1)j}$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ geschrieben wird, ersehen wir, dass, wenn f ein Affinor (mit einem Gewicht oder nicht) ist, $\Delta_s f$ ein Affinor derselben Art wie f ist.

Man kann leicht die folgenden Formeln bestätigen

$$(1.23) \quad \Delta_s f_{(0)k} = (\Delta_s f)_{(0)k} , \quad \Delta_s f_{(u)k} = (\Delta_s f)_{(u)k} - \binom{u+s-1}{s} f_{(u+s-1)k} \quad (u \geqq 1) .$$

Mit deren Hilfe berechnet man

$$[\Delta_s \Delta_t] f \equiv \Delta_s \Delta_t f - \Delta_t \Delta_s f = \sum_{r \geq t} \binom{r}{t} f_{(r)j} \Delta_s x^{(r-t+1)j} - \sum_{r \geq s} \binom{r}{s} f_{(r)j} \Delta_t x^{(r-s+1)j}$$

oder

$$(1.24) \qquad [\Delta_s \Delta_t] f = \frac{(s-t).(s+t-1)!}{s!\, t!} \Delta_{s+t-1} f .$$

§ 2. DIE EIGENSCHAFT Γ DES SYSTEMS DER "PATHS".

5. KAWAGUCHIsche Formel bei Parametertransformation. f sei eine Funktion von t. Bei einer allgemeinen Parametertransformation

$$(2.1) \qquad \bar{t} = \bar{t}(t)$$

drückt sich die r-malige Ableitung $f^{(r)}$ nach t durch die Ableitungen $f^{(\bar{r})}$ nach $\bar{t}$ von der transformierten Funktion in der Form aus:

$$(2.2) \qquad f^{(r)} = \sum_{s=1}^{r} a_s^r f^{(\bar{s})} ,$$

wobei a_s^r ein Polynom der Ableitungen von $\bar{t}$ nach t ist und von den rekurrenten Formeln

$$(2.3) \qquad \begin{cases} a_s^r = \bar{t}'^r & \text{für} \quad r = s , \\ = a_{s-1}^{r-1} \bar{t}' + \dfrac{d}{dt} a_s^{r-1} & \text{für} \quad r > s > 1 , \\ = \bar{t}^{(r)} & \text{für} \quad s = 1 \end{cases}$$

bestimmt wird. Betreffs der Gestalt vom Polynom a_s^r ist nach Herrn Prof. A. KAWAGUCHI die folgende Formel bekannt:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(q)}} a_s^r = \binom{r}{q} a_{s-1}^{r-q} \quad (1 \leqq q \leqq r) , \tag{2.4}$$

wo aber $a_v^u (u < v) = 0$, $a_0^0 = 1$, $a_0^u (u > 0) = 0$. Aus (2.2,4) haben wir

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(q)}} f^{(r)} = \binom{r}{q} (f^{(\bar{1})})^{(r-q)} \quad (1 \leqq q \leqq r) , \tag{2.5a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(q)}} f^{(r)}\right] = \binom{r}{q} f^{(r-q+1)} , \tag{2.5b}$$

wobei das Zeichen $[G]$ den Wert von G für $\bar{t}^{(1)} = 1$, $\bar{t}^{(s)} = 0$ $(s \geqq 2)$ bedeutet. (Vgl. [7], (1.34)).

6. Die Eigenschaft Γ. Nach der Arbeit [3] wollen wir sagen, dass ein System der Werte $x^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$, $z \equiv x^n$ (eine Urvariable), dx^α/dz, d^2x^α/dz^2, $\ldots$, $d^\nu x^\alpha/dz^\nu$ ein Kurvenelement ν-ter Ordnung bestimmt. Längs jeder Kurve werden die Bestimmungszahlen des Kurvenelementes ν-ter Ordnung durch diejenigen des Linienelementes ν-ter Ordnung bestimmt, und jede zwei Linienelemente mit demselben Kurvenelement entsprechen zwei verschiedenen Parametrisierungen auf jeder Kurve, die das Kurvenelement durchläuft. Nach (2.1, 2) $(f = x^i)$ sieht man, dass das Linienelement x^i, $x^{(r)i}$ $(r = 1, 2, \ldots, \nu)$ und dasjenige von nur der Gestalt

$$x^i, \quad \sum_{s=1}^{r} a_s^r(a) x^{(s)i} \quad (r = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{2.6}$$

dasselbe Kurvenelement bestimmen, wo $a_s^r(a)$ das aus a_s^r durch Ersetzung von $\bar{t}^{(q)} = a_q$ erhaltene Polynom bedeutet und $a_1 \neq 0$, a_2, $\ldots$, a_ν ganz beliebige Konstanten sind.

Wir fragen nun: Unter welcher Bedingung läuft durch jedes Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung eine einzige Integralkurve des Systems der "paths" (1.1) ? Diese Eigenschaft wollen wir einfachheitshalber mit Γ bezeichnen. Dafür ist es notwendig, dass alle "paths" des Systems, die durch ein Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung hindurchgehen, ein dieses letztere enthaltendes Kurvenelement m-ter Ordnung gemeinsam haben. Zunächst gehen wir aus dieser Voraussetzung fort. Unter der Anfangsbedingung

$$x^i = x_0^i, \quad x^{(1)i} = x_0^{(1)i}, \quad \ldots, \quad x^{(m-1)i} = x_0^{(m-1)i} \quad \text{für} \quad t = t_0$$

bzw. $$x^i = x_0^i, \quad x^{(1)i} = y_0^{(1)i}, \quad \ldots, \quad x^{(m-1)i} = y_0^{(m-1)i} \quad \text{für} \quad t = t_0'$$

besitzt das System (1.1) einen "path" (eine Lösung) K bzw. K', dessen Linienelement m-ter Ordnung am Anfangspunkt

$$x_0^i,\quad x_0^{(1)i},\ \ldots,\ x_0^{(m-1)i},\quad -H^i(t_0, x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(m-1)})$$

bzw. $$x_0^i,\quad y_0^{(1)i},\ \ldots,\ y_0^{(m-1)i},\quad -H^i(t_0', x_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(m-1)})$$

ist. Setzt man

$$y_0^{(r)i} = \sum_{s=1}^{r} a_s^r(a) x_0^{(s)i} \quad (r = 1, 2, \ldots, m-1)$$

($a_1 \neq 0$, $a_2, \ldots, a_{m-1}$: beliebige Konstanten), so haben K und K' nach (2.6) ein Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung am Anfangspunkt gemeinsam. Dafür, dass die Linienelemente m-ter Ordnung von K und K' dasselbe Kurvenelement m-ter Ordnung bestimmen, soll nach (2.6) eine passende Funktion a_m von $t_0, t_0', x_0^i, x_0^{(1)i}, \ldots, x_0^{(m-1)i}, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ existieren, so dass

$$-H^i(t_0', x_0, \textstyle\sum a_u^r x_0^{(u)}) = -a_1^m H^i(t_0, x_0, x_0^{(r)}) + \sum_{s=2}^{m-1} a_s^m(a) x_0^{(s)i} + a_m x_0^{(1)i}$$

besteht, oder

$$(2.7)\quad H^i(t', x, y^{(r)}) - a_1^m H^i(t, x, x^{(r)}) + \sum_{s=2}^{m-1} a_s^m(a) x^{(s)i} + a_m x^{(1)i} = 0,$$

wo $y^{(r)i} = \sum_{s=1}^{r} a_s^r x^{(s)i}$ ist. Setzt man erstens $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{m-1} = 0$ und $t' =$ Konst., so erkennt man, dass H^i von der Gestalt

$$(2.8)\quad \boxed{\begin{aligned} H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) &= {}^*H^i(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) \\ &\quad + {}^*H(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) x^{(1)i} \end{aligned}}$$

sein soll, woraus die gleichbedeutende Beziehung

$$(2.8')\quad \boxed{\partial_t H^i = P_0 x^{(1)i}}$$

mit einer Funktion P_0 von $t, x^j, x^{(1)j}, \ldots, x^{(m-1)j}$ folgt. Differenziert man zweitens (2.7) nach a_s und setzt dann $t' = t$, $a_1 = 1$, $a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.5a oder b)

$$(2.9)\quad \begin{aligned} &(a) \quad \Delta_1 H^i = mH^i + P_1 x^{(1)i}\,, \\ &(b) \quad \Delta_s H^i = -\binom{m}{s} x^{(m-s+1)i} + P_s x^{(1)i} \quad (2 \leqq s \leqq m-1)\,, \end{aligned}$$

wo $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ Funktionen von $t, x^j, x^{(1)j}, \ldots, x^{(m-1)j}$ sind. Von ${}^*H^i$ in (2.8) gelten auch

$$\Delta_1^* H^i = m\,{}^*H^i + {}^*P_1 x^{(1)i}, \quad \Delta_s^* H^i = -\binom{m}{s} x^{(m-s+1)i} + {}^*P_s x^{(1)i}$$

$$({}^*P_1 = P_1 - \Delta_1^* H + (m-1)^*H\,, \quad {}^*P_s = P_s - \Delta_s^* H)\,.$$

Umgekehrt, wenn (2.8) und (2.9a, b) erfüllt sind, so besteht (2.7) für eine passend gewählte Funktion a_m, wie im Folgenden bewiesen wird. Da nach (2.8)

$$H^i(t', x, y^{(r)}) - a_1^m H^i(t, x, x^{(r)}) + \sum_{u=2}^{m-1} a_u^m(a) x^{(u)i}$$

$$= ({}^*H(t', x, y^{(r)}) - {}^*H(t, x, y^{(r)}))\, y^{(1)i} + K^i$$

ist, wo

$$(2.10)\quad K^i = H^i(t, x, y^{(r)}) - a_1^m H^i(t, x, x^{(r)}) + \sum_{u=2}^{m-1} a_u^m(a) x^{(u)i}$$

gesetzt ist, so ist zu zeigen, dass K^i zu $x^{(1)i}$ proportional ist. Berücksichtigend (2.5a), haben wir aus (2.10)

$$(2.11)\quad \frac{\partial K^i}{\partial a_s} = \sum_{r=s}^{m-1} \binom{r}{s} H^i_{(r\,j)}(y)\, z^{(r-s+1)j} + \binom{m}{s} z^{(m-s+1)i} \quad (2 \leqq s \leqq m-1)\,,$$

wo

$$z^{(r+1)i} = \sum_{u=1}^{r+1} a_{u-1}^r(a) x^{(u)i}$$

gesetzt ist. Differenziert man $x^{(1)i} = \bar{t}' x^{(\bar{1})i}$ r-mal, so erhält man

$$(2.12)\quad \bar{t}^{(1)} (x^{(\bar{1})i})^{(r)} = x^{(r+1)i} - \sum_{u=1}^{r} \binom{r}{u} \bar{t}^{(u+1)} (x^{(\bar{1})i})^{(r-u)}\,.$$

Ersetzt man $(x^{(\bar{1})i})^{(r)}$, $(x^{(\bar{1})i})^{(r-u)}$, $x^{(r+1)i}$ durch die Ausdrücke in $x^{(\bar{\nu})i}$, so wandelt (2.12) sich in eine Identität in $x^{(\bar{1})i}, x^{(\bar{2})i}, \ldots, x^{(\overline{r+1})i}, \bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \ldots, \bar{t}^{(r+1)}$ um. Wenn wir also a_q, $x^{(\nu)i}$ statt $\bar{t}^{(q)}$, $x^{(\bar{\nu})i}$ schreiben, so folgt die Beziehung

$$a_1 z^{(r+1)i} = y^{(r+1)i} - \sum_{u=1}^{r} \binom{r}{u} a_{u+1} z^{(r-u+1)i} .$$

Aus (2.11) haben wir somit nach (2.9b)

$$a_1 \frac{\partial K^i}{\partial a_s} = \Delta_s H^i(y) + \binom{m}{s} y^{(m-s+1)i} - \sum_{r=s+1}^{m-1} \sum_{u=1}^{r-s} \binom{r}{s}\binom{r-s}{u} a_{u+1} H^i_{(r)j}(y) z^{(r-s-u+1)j}$$

$$- \sum_{u=1}^{m-s} \binom{m}{s}\binom{m-s}{u} a_{u+1} z^{(m-s-u+1)i}$$

$$= \left(a_1 P_s(y) - \binom{m}{s} a_{m-s+1}\right) x^{(1)i}$$

$$- \sum_{u=1}^{m-s-1} \binom{s}{u} a_{u+1} \left[\sum_{r=s+u}^{m-1} \binom{r}{s+u} H^i_{(r)j}(y) z^{(r-s-u+1)j} + \binom{m}{s+u} z^{(m-s-u+1)i} \right]$$

oder nach (2.11)

$$(2.13) \quad a_1 \frac{\partial K^i}{\partial a_s} = \left(a_1 P_s(y) - \binom{m}{s} a_{m-s+1}\right) x^{(1)i} - \sum_{u=1}^{m-s-1} \binom{s}{u} a_{u+1} \frac{\partial K^i}{\partial a_{s+u}}$$

$$(2 \leqq s \leqq m-1) .$$

Somit folgt

$$a_1 \frac{\partial K^i}{\partial a_{m-1}} = (a_1 P_{m-1}(y) - m a_2) x^{(1)i} ,$$

und nach Induktion hat man $\partial K^i / \partial a_s$ aus (2.13) in der Form

$$\frac{\partial K^i}{\partial a_s} = M_s x^{(1)i} \quad 2 \leqq s \leqq m-1 ;$$

daraus schliesst man $K^i = M x^{(1)i} + N^i$, wo N^i von $a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ unabhängig ist. Wir setzen

$$K_0^i = M_0 x^{(1)i} + N^i \equiv K^i \quad \text{für} \quad a_2 = a_3 = \ldots = a_{m-1} = 0$$

$$= H^i(t, x, a_1 x^{(1)}, \ldots, a_1^{m-1} x^{(m-1)}) - a_1^m H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)})$$

($K^i = (M - M_0) x^{(1)i} + K_0^i$) und erhalten wegen (2.9a)

$$a_1 \frac{\partial K_0^i}{\partial a_1} = m K_0^i + a_1 P_1(t, x, a_1 x^{(1)}, \ldots, a_1^{m-1} x^{(m-1)}) x^{(1)i}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial a_1} [a_1^{-m} K_0^i] = a_1^{-m} P_1(t, x, a_1 x^{(1)}, \ldots, a_1^{m-1} x^{(m-1)}) x^{(1)i} .$$

Da K_0^i für $a_1 = 1$ verschwindet, so folgt

$$K_0^i = a_1^m x^{(1)i} \int_1^{a_1} a_1^{-m} P_1(t,\ x,\ a_1 x^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ a_1^{m-1} x^{(m-1)}) da_1\ .$$

Die Behauptung ist jetzt klar. $M - M_0$ wird aus (2.13) nach Integration erhalten.

Die Funktionen $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ in (2.8′; 9a, b) sind nicht unabhängig. Wenn sie nämlich vorgegeben sind, sollen (2.8′) und (2.9a, b) eine Lösung $\{H^i\}$ besitzen. Nach (1.24) ($f = H^i$) erhalten wir wegen (2.9a, b)

$$\text{(2.14a)} \qquad \boxed{\Delta_1 P_s - \Delta_s P_1 = (m-s) P_s} \quad (2 \leqq s)$$

und für $2 \leqq s,\ t \leqq m-1$

$$\text{(2.14b)} \quad \begin{cases} \Delta_s P_t - \Delta_t P_s = \dfrac{(s-t).(s+t-1)!}{s!\ t!} P_{s+t-1} & \text{für } s+t \leqq m\ , \\ \qquad = \dfrac{(s-t).(s+t-1)!}{s!\ t!} & \text{für } s+t = m+1\ , \\ \qquad = 0 & \text{für } s+t \geqq m+2\ ; \end{cases}$$

die letzte Beziehung (2.14b) drückt sich einfacher in der Form aus:

$$\text{(2.14c)} \qquad \boxed{\Delta_s P_t - \Delta_t P_s = \frac{(s-t).(s+t-1)!}{s!\ t!} P_{s+t-1}} \quad (2 \leqq s,\ t \leqq m-1)\ ,$$

wo aber $P_m = 1$, $P_u (u \geqq m+1) = 0$. Weiter, da ∂_t und Δ_s $(1 \leqq s \leqq m-1)$ vertauschbar sind, erhalten wir

$$\text{(2.14d)} \qquad \boxed{\Delta_1 P_0 = \partial_t P_1 + (m-1) P_0\ ,\ \ \Delta_s P_0 = \partial_t P_s} \quad (2 \leqq s)\ .$$

Da die Beziehungen (2.8′; 9a, b) in die Form

$$\partial_t T^i = P_0 x^{(1)i},\ \ \Delta_1 T^i - m T^i = P_1 x^{(1)i},\ \ \Delta_s T^i = P_s x^{(1)i} \quad (T^i \equiv x^{(m)i} + H^i)$$

umgeschrieben werden können und T^i ein kontravarianter Vektor ist, so erkennt man nach Nr. 4, dass $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ unter Koordinatentransformation je ein Skalar sind.

7. **Das assoziierte Differentialgleichungssystem.** Nun möchten wir beweisen, dass, wenn (2.8) und (2.9a, b) erfüllt sind, das System der "paths" die Eigenschaft Γ besitzt. Wählt man auf einer Kurve eine Urvariable (etwa $x^n \equiv z$) als ein Parameter, so besteht zwischen den Bestimmungszahlen des Linienelementes und denjenigen des Kurvenelementes nach (2.2)

$$(2.15) \qquad x^{(r)\alpha} = \sum_{s=1}^{r} a_s^r(z)\frac{d^s x^\alpha}{dz^s} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1),$$

wobei $a_s^r(z)$ den aus a_s^r durch Ersetzung von $\bar{t}^{(u)} = z^{(u)}$ erhaltenen Ausdruck bedeutet. Somit erhält man längs jedes "path" von (1.1)

$$(2.16) \qquad -\frac{d^m x^\alpha}{dz^m} = f^\alpha \equiv z^{(1)-m}\left[H^\alpha - H^n\frac{dx^\alpha}{dz} + \sum_{u=2}^{m-1} a_u^m(z)\frac{d^u x^\alpha}{dz^u}\right].$$

Ersetzt man $x^{(r)\beta}$ durch (2.15), so hängt f^α vom Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung $x^\alpha, z, dx^\alpha/dz, \ldots, d^{m-1}x^\alpha/dz^{m-1}$ und im allgemeinen von $t, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m-1)}$ ab. Wir behaupten, dass, wenn (2.8) und (2.9a, b) gültig sind, f^α nicht von $t, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m-1)}$ abhängig ist. Erstens, da nach (2.8)

$$H^\alpha - H^n\frac{dx^\alpha}{dz} = {}^*H^\alpha - {}^*H^n\frac{dx^\alpha}{dz}$$

ist, so hängt f^α von t nicht ab. Zweitens haben wir aus (2.16) wegen (2.4, 5a)

$$(2.17) \quad z^{(1)m}\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^{(s)}} = \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(s)n}} + \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(s)\beta}}\frac{dx^\beta}{dz} + \sum_{r=s+1}^{m-1}\binom{r}{s}\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(r)\beta}}\left(\frac{dx^\beta}{dz}\right)^{(r-s)}$$

$$-\left[\frac{\partial H^n}{\partial x^{(s)n}} + \frac{\partial H^n}{\partial x^{(s)\beta}}\frac{dx^\beta}{dz} + \sum_{r=s+1}^{m-1}\binom{r}{s}\frac{\partial H^n}{\partial x^{(r)\beta}}\left(\frac{dx^\beta}{dz}\right)^{(r-s)}\right]\frac{dx^\alpha}{dz} + \binom{m}{s}\left(\frac{dx^\alpha}{dz}\right)^{(m-s)},$$

wo die griechischen Indizes α, β, γ die Werte $1, 2, \ldots, n-1$ durchlaufen. Da nach (2.9b, 12)

$$z^{(1)}\left[\frac{\partial H^i}{\partial x^{(s)n}} + \frac{\partial H^i}{\partial x^{(s)\beta}}\frac{dx^\beta}{dz}\right] = -\sum_{r=s+1}^{m-1}\binom{r}{s}\frac{\partial H^i}{\partial x^{(r)j}}x^{(r-s+1)j} - \binom{m}{s}x^{(m-s+1)i} + P_s x^{(1)i},$$

$$x^{(r+1)\beta} - \left(\frac{dx^\beta}{dz}\right)^{(r)} z^{(1)} = \sum_{u=1}^{r}\binom{r}{u}\left(\frac{dx^\beta}{dz}\right)^{(r-u)} z^{(u+1)}$$

ist, so lautet

$$z^{(1)m+1}\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^{(s)}}=-\sum_{r-s+1}^{m-1}\binom{r}{s}\Big\{\Big[\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(r)n}}-\frac{\partial H^n}{\partial x^{(r)n}}\frac{dx^\alpha}{dz}\Big]z^{(r-s+1)}+\Big[\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(r)\beta}}-\frac{\partial H^n}{\partial x^{(r)\beta}}\frac{dx^\alpha}{dz}\Big]$$

$$\times\Big[x^{(r-s+1)\beta}-\Big(\frac{dx^\beta}{dz}\Big)^{(r-s)}z^{(1)}\Big]\Big\}-\binom{m}{s}\Big[x^{(m-s+1)\alpha}-\Big(\frac{dx^\alpha}{dz}\Big)^{(m-s)}z^{(1)}\Big]$$

$$=-\sum_{u-s+1}^{m-1}\binom{u}{s}z^{(u-s+1)}\Big\{\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(u)n}}-\frac{\partial H^n}{\partial x^{(u)n}}\frac{dx^\alpha}{dz}$$

$$+\sum_{r-u}^{m-1}\binom{r}{u}\Big[\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(r)\beta}}-\frac{\partial H^n}{\partial x^{(r)\beta}}\frac{dx^\alpha}{dz}\Big]\Big(\frac{dx^\beta}{dz}\Big)^{(r-u)}+\binom{m}{u}\Big(\frac{dx^\alpha}{dz}\Big)^{(m-u)}\Big\},$$

woraus nach (2.17) folgt

$$z^{(1)}\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^{(s)}}=-\sum_{u-s+1}^{m-s}\binom{u}{s}z^{(u-s+1)}\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^{(u)}}.$$

Das besagt, dass $\partial f^\alpha/\partial z^{(m-1)}=0$ und induktiv

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^{(s)}}=0 \quad \text{für} \quad 2\leqq s\leqq m-1;$$

f^α hängt nicht von $z^{(2)}, z^{(3)}, \ldots, z^{(m-1)}$ ab. Wir haben also aus (2.16), setzend $z^{(2)}=z^{(3)}=\ldots=z^{(m-1)}=0$,

$$f^\alpha=z^{(1)-m}\Big(H^\alpha-H^n\frac{dx^\alpha}{dz}\Big), \quad x^{(r)\beta}=z^{(1)r}\frac{d^rx^\beta}{dz^r}.$$

Drittens differenzieren wir f^α nach $z^{(1)}$:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^{(1)}}=-mz^{(1)-1}f^\alpha+\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{(1)n}}+z^{(1)-1}\sum_{r-1}^{m-1}rH^\alpha_{(r)\beta}x^{(r)\beta}$$

$$-\Big[\frac{\partial H^n}{\partial x^{(1)n}}+z^{(1)-1}\sum_{r-1}^{m-1}rH^n_{(r)\beta}x^{(r)\beta}\Big]\frac{dx^\alpha}{dz}$$

$$=0 \qquad \text{nach (2.9a)};$$

f^α hängt auch von $z^{(1)}$ nicht ab. Aus (2.16) erhalten wir

(2.18) $$\boxed{\frac{d^mx^\alpha}{dz^m}+f^\alpha\Big(x^\beta, z; \frac{dx^\beta}{dz}, \ldots, \frac{d^{m-1}x^\beta}{dz^{m-1}}\Big)=0.}$$

Wir erkennen also, dass jeder "path" von (1.1) eine Integralkurve eines Systems der Differentialgleichungen (2.18) ist. Dieses System besitzt unter jeder Anfangsbedingung

$$x^\alpha = a^\alpha, \quad \frac{dx^\alpha}{dz} = b^\alpha, \quad \frac{d^2x^\alpha}{dz^2} = c^\alpha, \ \ldots, \ \frac{d^{m-1}x^\alpha}{dz^{m-1}} = l^\alpha \quad \text{für} \quad z = c$$

eine einzige Lösung, anders gesagt, durch jedes Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung läuft eine einzige Integralkurve des Systems. $x^\alpha = x^\alpha(z)$ sei eine Integralkurve und $z = z(t)$ eine Lösung der Differentialgleichungen

$$z^{(m)} + \varphi(t, z, z^{(1)}, \ldots, z^{(m-1)}) = 0 ,$$

welche aus der letzten Gleichung von (1.1) $(i = n)$ durch Ersetzung von $x^\alpha = x^\alpha(z)$ erhalten wird. $\{x^\alpha = x^\alpha(z(t)), \ z = z(t)\}$ ist dann eine Lösung von (1.1), da aus (2.15, 16) $x^{(m)\alpha} + H^\alpha = 0$ folgt. Somit ist die Eigenschaft Γ des Systems (1.1) bewiesen.

Aus dieser Überlegung erkennen wir weiter, dass jedem System m-ter Ordnung, für welches (2.8′) und (2.9a, b) erfüllt sind, ein Differentialgleichungssystem (2.18) zugeordnet wird und dass die Integralkurven beider Systeme völlig übereinstimmen. Wir wollen (2.18) das *assoziierte System* von (1.1) nennen. Wenn aber ein System von der Gestalt (2.18) vorgegeben ist, so gibt es nicht ein einziges sondern unendlich viele Systeme der "paths" m-ter Ordnung, deren assoziiertes System das gegebene ist und welche natürlich miteinander projektiv verwandt[1] sind, da wir in (2.16) z.B. die Funktion H^n ganz willkürlich wählen können und

$$H^\alpha = z^{(1)m} f^\alpha + H^n \frac{dx^\alpha}{dz} - \sum_{s=2}^{m-1} a_s^m(z) \frac{d^s x^\alpha}{dz^s} .$$

Da die Integralkurven zweier verschiedenen Systeme von der Gestalt (2.18) niemals alle übereinstimmen, ist die Zuordnung einer projektiven Klasse[2] der Systeme m-ter Ordnung (mit der Eigenschaft Γ) und des assoziierten Systems eineindeutig.

8. Geometrische Übersetzung. Wir haben in [3] solche Systeme untersucht, welche eine Gruppe von Parametertransformationen zulas-

(1) Siehe [3], Nr. 9.

(2) Eine Klasse aller Systeme der "paths", die miteinander projektiv verwandt sind.

sen. Daraus erkennt man, dass das System der "paths" (1.1) unter jeder linearen bzw. linear gebrochenen Parametertransformation unverändert bleibt, wenn die Beziehungen gelten:

$$\partial_t H^i = 0\,, \quad \Delta_1 H^i = mH^i,$$

bzw. $$\partial_t H^i = 0\,, \quad \Delta_1 H^i = mH^i, \quad \Delta_2 H^i = -\binom{m}{2} x^{(m-1)i}\,.$$

Der Parameter heisst dann affin bzw. projektiv. Im Fall des Systems zweiter bzw. dritter Ordnung, das den affinen bzw. projektiven Parameter trägt, besitzt das System wegen (2.8; 9a, b) die Eigenschaft Γ ($P_0 = P_1 = P_2 = 0$).

Im Fall der Systeme höherer Ordnung geben wir mittels der kovarianten Ableitungen $\overset{q}{\Delta}$ in (1.3) den Beziehungen (2.8'; 9a, b) eine geometrische Deutung. Da nach (1.3)

$$\overset{m-p}{\Delta} x^{(1)i} = x^{(m-p+1)i} + \binom{m}{p}^{-1} \Delta_p H^i$$

ist, so wird (2.9a, b) in die Form geschrieben:

$$(2.19) \qquad \begin{cases} \overset{m-p}{\Delta} x^{(1)i} = \binom{m}{p}^{-1} P_p x^{(1)i} \quad (2 \leqq p \leqq m-1)\,, \\ \overset{m-1}{\Delta} x^{(1)i} = x^{(m)i} + H^i + \dfrac{1}{m} P_1 x^{(1)i}\,. \end{cases}$$

Wenn auf einer Kurve die kovariante $\overset{q}{\Delta}$-Ableitung eines Vektors v^i verschwindet oder solche Funktion $\lambda(t)$ gibt, dass $\overset{q}{\Delta}(\lambda v^i)$ verschwindet, so wollen wir sagen, dass der Vektor v^i oder seine Richtung $\overset{q}{\Delta}$-parallel ist. Dann gilt der Satz:

Satz. *Wenn von einem System der "paths" m-ter Ordnung (1.1) durch jedes Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung eine einzige Integralkurve läuft, so ist längs jeder Kurve bzw. längs jedes "path" die Richtung ihres Tangentenvektors $\overset{1}{\Delta}$-, $\overset{2}{\Delta}$-, ..., $\overset{m-2}{\Delta}$-parallel bzw. $\overset{m-1}{\Delta}$-parallel, und hat der Vektor $\partial_t H^i$ dieselbe Richtung wie der Tangentenvektor; und umgekehrt.*

Da nämlich

$$\overset{m-p}{\Delta}(\lambda v^i) = \sum_{u=0}^{m-p} \binom{m-p}{u} \lambda^{(u)} v^{(m-p-u)i} + \binom{m}{p}^{-1} \sum_{r=p}^{m-p} \sum_{u=0}^{r-p} \binom{r}{p} \binom{r-p}{u} \lambda^{(u)} H^i_{(r)j} v^{(r-p-u)j}$$

$$= \lambda^{(m-p)} v^i + \sum_{u=0}^{m-p-1} \binom{m-p}{u} \lambda^{(u)} \left[v^{(m-p-u)i} + \sum_{r=p+u}^{m-1} \binom{r}{p+u} H^i_{(r)j} v^{(r-p-u)j} \right]$$

oder

$$\overset{m-p}{\Delta}(\lambda v^i) = \sum_{u=0}^{m-p}\binom{m-p}{u}\lambda^{(u)}\overset{m-p-u}{\Delta} v^i \quad (\overset{0}{\Delta} v^i = v^i)$$

ist, haben wir nach (2.19)

$$\overset{m-p}{\Delta}(\lambda x^{(1)i}) = \binom{m}{p}^{-1}\sum_{u=0}^{m-p}\binom{p+u}{u} P_{p+u}\lambda^{(u)} x^{(1)i} .$$

Wählt man also längs der Kurve die Funktion $\lambda(t)$ so, dass

$$\sum_{u=0}^{m-p}\binom{p+u}{u} P_{p+u}\lambda^{(u)} = 0 ,$$

so verschwindet die kovariante Ableitung $\overset{m-p}{\Delta}(\lambda x^{(1)i})$.

Man kann auch die Beziehung (2.9a) nach (1.13) in der Gestalt schreiben:

$$K^i = -\frac{1}{m} P_1 x^{(1)i} . \tag{2.20}$$

Der Vektor K^i hat auch dieselbe Richtung wie $x^{(1)i}$.

Bemerkung. Da nach (1.3, 6, 8) $\delta x^{(q)i}/dt = \overset{q}{\Delta} x^{(1)i}$ ist, so kann man (2.9a, b) mittels der Grundübertragungen umschreiben.

9. Die Torsionsgrössen und die Skalare $S_{(u)}$. Um einige Beziehungen zwischen den Torsionsgrössen und den Skalaren $S_{(u)}$ ($u = 2, 3, \ldots, m-1$) herzuleiten, beweisen wir zunächst die Hilfsformeln

$$\begin{aligned} (2.21)\quad R^{i(0)}_{(q)j} x^{(1)j} &= -x^{(q+1)i} + \sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}\frac{q!}{(q-s)!} K_s x^{(q-s+1)i} \\ &= \sum_{s=0}^{q}(-1)^{s-1}\frac{q!}{(q-s)!} K_s x^{(q-s+1)i} \quad (q=1, 2, \ldots, m-1) , \end{aligned}$$

wobei $K_0 = 1$ und die Koeffizienten K_s die von q unabhängigen Polynome von $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ sind. Im Fall $q = m-1$ muss man $x^{(m)i}$ in der rechten Seite von (2.21) durch $-H^i$ ersetzen.

Da nach (1.8, 10a)

$$R^{i(0)}_{(1)j} x^{(1)j} = Q^{i(0)}_{(1)j} x^{(1)j} = \frac{1}{m}\Delta_{m-1} H^i = -x^{(2)i} + \frac{1}{m} P_{m-1} x^{(1)i}$$

ist, so gilt (2.21) für $q = 1$, wo $K_1 = \frac{1}{m} P_{m-1}$. Wenn (2.21) für $q = 1, 2, \ldots, u\,(<m-1)$ gültig ist, so haben wir nach (1.10b)

$$R_{(u+1)j}^{i\,(0)}x^{(1)j} = Q_{(u+1)j}^{i\,(0)}x^{(1)j} - \sum_{r=1}^{u} Q_{(u+1)h}^{i\,(r)} R_{(r)j}^{h\,(0)} x^{(1)j}$$

$$= -\sum_{s=0}^{u}\sum_{r=s}^{u}(-1)^{s-1}\frac{r!}{(r-s)!}K_s Q_{(u+1)h}^{i\,(r)}x^{(r-s+1)h}.$$

Da nun nach (1.8), (2.9a, b)

$$\sum_{r=s}^{u}\frac{r!}{(r-s)!}Q_{(u+1)h}^{i\,(r)}x^{(r-s+1)h} = \frac{(m-u+s-1)!\,(u+1)!}{m!}\Delta_{m-u+s-1}H^i$$

$$= -\frac{(u+1)!}{(u-s+1)!}x^{(u-s+2)i} + \frac{(m-u+s-1)!\,(u+1)!}{m!}P_{m-u+s-1}x^{(1)i}$$

ist, wo $x^{(m)i}$ durch $-H^i$ ersetzt wird, so erhalten wir

$$R_{(u+1)j}^{i\,(0)}x^{(1)j} = \sum_{s=0}^{u}(-1)^{s-1}\frac{(u+1)!}{(u-s+1)!}K_s x^{(u-s+2)i}$$

$$-\sum_{s=0}^{u}(-1)^{s-1}\frac{(m-u+s-1)!\,(u+1)!}{m!}P_{m-u+s-1}K_s x^{(1)i}.$$

Setzen wir also

$$(2.22)\qquad \boxed{K_0=1,\quad K_{q+1}=\frac{(-1)^{q+1}}{m!}\sum_{s=0}^{q}(-1)^{s-1}(m-q+s-1)!\,P_{m-q+s-1}K_s}$$

$(q = 0, 1, \ldots, m-2)$, so folgt (2.21) $(q = u+1)$. Somit schliesst man nach Induktion die Richtigkeit von (2.21). Wir bemerken, dass (2.21) für $q = 0$ wegen (1.10d) trivialerweise richtig ist.

Die Polynome K_s $(0 \leqq s \leqq m-1)$ von $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ lassen sich durch die rekurrenten Formeln (2.22) bestimmen. Man kann (2.22) unter der Voraussetzung $P_m = 1$ so umschreiben:

$$(2.22')\qquad \sum_{s=0}^{u}(-1)^s(m-u+s)!\,P_{m-u+s}K_s = 0 \quad (u=1, 2, \ldots, m-1).$$

Bildet man aus den Operatoren $\bar{\nabla}_k^{(q)}$ in (1.17) neue Operatoren $x^{(1)k}\bar{\nabla}_k^{(q)}$, so hat man nach (1.14b, 22), (2.21)

$$x^{(1)k}\bar{\nabla}_k^{(q)}f = -\sum_{u=q}^{m-1}\binom{u}{q}f_{(u)l}\sum_{s=0}^{u-q}(-1)^{s-1}\frac{(u-q)!}{(u-q-s)!}K_s x^{(u-q-s+1)l}$$

$$= \sum_{s=0}^{m-q-1}(-1)^s\frac{(q+s)!}{q!}K_s\Delta_{q+s}f$$

oder

$$\boxed{x^{(1)k}\bar{\nabla}^{(q)}_k f = \sum_{s=0}^{m-q-1}(-1)^s \frac{(q+s)!}{q!} K_s \Delta_{q+s} f} \quad (q=0, 1, \ldots, m-1),$$

wo

$$\Delta_0 f = f_{(0)j}\, x^{(1)j} + f_{(1)j}\, x^{(2)j} + \cdots + f_{(m-2)j}\, x^{(m-1)j} - f_{(m-1)j}\, H^j$$

gesetzt ist. Wenn f von t unabhängig ist, so ist $\Delta_0 f = df/dt$ und aus (2.23) folgt insbesondere

$$x^{(1)k}\bar{\nabla}^{(0)}_k f = \frac{df}{dt} + \sum_{s=1}^{m-1}(-1)^s s!\, K_s \Delta_s f. \tag{2.23'}$$

Weiter kann man leicht nach (1.8, 23), (2.9a, b) die folgende Beziehung herleiten:

$$\begin{aligned}\Delta_s Q^{i\,(0)}_{(v)j} = {} & \frac{v!\,(m-v)!}{m!} P_{s(m-v)j}\, x^{(1)i} \\ & - \frac{(m-v).\, v!\,(m-v+s-1)!}{m!\, s!} H^i_{(m-v+s-1)j} \\ & + \frac{1}{m} P_s \delta^{m-1}_v \delta^i_j + \begin{cases} -\dfrac{m-s+1}{s}\delta^{s-1}_v \delta^i_j & \text{für } s \geqq 2, \\ +m Q^{i\,(0)}_{(v)j} & \text{für } s = 1. \end{cases}\end{aligned} \tag{2.24}$$

Wenn wir aus einer Torsionsgrösse $S^{(q)(r)j}_{k\,l\,(s)}$ $(0 \leqq q, r, s \leqq m-1)$ in (1.16b—f) durch Multiplikation mit $x^{(1)h}$ und durch Überschiebungen einen Skalar $S^{(q)(r)j}_{j\,k\,(s)}\, x^{(1)k}$ oder $S^{(q)(r)j}_{k\,j\,(s)}\, x^{(1)k}$ bilden, so wird dieser Skalar durch einen der Skalare $S_{(u)}$ und die Skalare $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ ausgedrückt (Ausnahmefall: $q = r = 0$, $s = m-1$). Wir möchten im Fall der Torsionsgrössen aus (1.16f)

$$2S^{(q)(0)j}_{k\,l\,(s)} = \sum_{u=0}^{s-1} R^{h\,(0)}_{(u)l}\, \bar{\nabla}^{(0)}_k Q^{j(u)}_{(s)h} - \sum_{u=0}^{s-1} R^{h\,(0)}_{(u)k}\, \bar{\nabla}^{(0)}_l Q^{j(u)}_{(s)h} \quad (s < m-1)$$

diese Umstände klarmachen. Wir setzen hier voraus, dass H^i nicht von t abhängt (vgl. Nr. 11, Bemerkung). Man berechnet nach (2.21, 23'):

$$\begin{aligned} 2S^{(0)(0)j}_{k\,j\,(s)} x^{(1)k} = {} & \sum_{u=0}^{s-1} R^{h\,(0)}_{(u)j} \frac{d}{dt} Q^{j(u)}_{(s)h} + \sum_{v=1}^{m-1}\sum_{u=1}^{s-1}(-1)^v v!\, K_v R^{h\,(0)}_{(u)j} \Delta_v Q^{j(u)}_{(s)h} \\ & + \sum_{v=0}^{s-1}\sum_{u=v}^{s-1}(-1)^v \frac{u!}{(u-v)!} K_v \bar{\nabla}^{(0)}_j Q^{j(u)}_{(s)h}.\, x^{(u-v+1)h} \\ = {} & I + A_1 + A_2 \quad \text{(gesetzt)}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (1.8), (2.24) erhalten wir

$$A_1 = \sum_{u=0}^{s-1}\sum_{v=1}^{m-1}(-1)^v \frac{s!\,(m-s+u)!\,v!}{m!\,u!} K_v P_{v(m-s+u)h} R^{h(0)}_{(u)j} x^{(1)j}$$

$$- \sum_{u=0}^{s-1}(-1)^{s-u+1}\frac{(m-s+u).\,s!}{u!} K_{s-u+1} R^{j(0)}_{(u)j} - mK_1 \sum_{u=0}^{s-1} Q^{j(u)}_{(s)h} R^{h(0)}_{(u)j}$$

$$-\sum_{u=0}^{s-1}\sum_{v=1}^{s-u}(-1)^v \frac{(m-s-u).\,s!(m-s+u+v-1)!}{m!\,u!} K_v H^{j}_{(m-s+u+v-1)h} R^{h(0)}_{(u)j}$$

$$= \sum_{u=0}^{s-1}\sum_{v=1}^{m-1}(-1)^v \frac{s!\,(m-s+u)!\,v!}{m!\,u!} K_v P_{v(m-s+u)h} R^{h(0)}_{(u)j} x^{(1)j}$$

$$- \sum_{v=2}^{s+1}(-1)^v \frac{(m-v+1).\,s!}{(s-v+1)!} K_v R^{j\ (0)}_{(s-v+1)j}$$

$$+ mK_1 R^{j(0)}_{(s)j} - \sum_{v=1}^{s}\sum_{u=0}^{s-v}(-1)^v \frac{(m-s+u).\,s!}{(s-v+1)!} K_v Q^{j\ (u)}_{(s-v+1)h} R^{h(0)}_{(u)j}$$

$$= B_1 + A_3 + A_4 + A_5 \quad \text{(gesetzt)}$$

und

$$A_2 = \sum_{v=0}^{s}(-1)^v \frac{s!}{(s-v)!} K_v R^{j\ (0)}_{(s-v+1)j} + \sum_{v=0}^{s-1}(-1)^v \frac{s!\,(m-s+v)!}{m!} K_v x^{(1)j} \bar{\nabla}^{(0)}_j P_{m-s+v}$$

$$+ \sum_{v=0}^{s-1}\sum_{u-1}^{s-1}(-1)^v \frac{u.\,s!}{(s-v+1)!} K_v Q^{j\ (u)}_{(s-v+1)h} R^{h(0)}_{(u)j}$$

$$= A_6 + B_2 + A_7 \quad \text{(gesetzt)},$$

da

$$\sum_{u=v}^{s-1}\frac{u!}{(u-v)!}\bar{\nabla}^{(0)}_j Q^{j(u)}_{(s)h} x^{(u-v+1)h} = \bar{\nabla}^{(0)}_j\left[\sum_{u=v}^{s-1}\frac{u!}{(u-v)!} Q^{j(u)}_{(s)h} x^{(u-v+1)h}\right]$$

$$+ \sum_{u=v}^{s-1}\frac{u!}{(u-v)!} Q^{j(u)}_{(s)h} R^{h\ (0)}_{(u-v+1)j}$$

$$= \frac{s!}{(s-v)!} R^{j\ (0)}_{(s-v+1)j} + \frac{s!\,(m-s+v)!}{m!} x^{(1)j}\bar{\nabla}^{(0)}_j P_{m-s+v}$$

$$- \frac{s!\,(m-s+v)!}{m!} P_{m-s+v} R^{j(0)}_{(1)j} + \sum_{u-1}^{s-v}\frac{u.\,s!}{(s-v+1)!} Q^{j\ (u)}_{(s-v+1)h} R^{h(0)}_{(u)j}$$

ist. Und wir berechnen

$$A_5+A_7=\sum_{v=1}^{s}(-1)^v\frac{(m-s).\,s!}{(s-v+1)!}K_vR^{j\ (0)}_{(s-v+1)j}+\sum_{u=1}^{s}\frac{u}{s+1}Q^{j\ (u)}_{(s+1)h}R^{h(0)}_{(u)j}$$

$$=A_8+II\quad\text{(gesetzt)},$$

$$A_3+A_4+A_6+A_8=R^{j\ (0)}_{(s+1)j}-(-1)^s n(m-s).\,s!\,K_{s+1}\,.$$

Somit erhalten wir wegen (1.10b, 20)

$$2S^{(0)(0)j}_{k\,j\,(s)}x^{(1)k}=R^{j\ (0)}_{(s+1)j}+\sum_{u=1}^{s}\frac{u}{s+1}Q^{j\ (u)}_{(s+1)h}R^{h(0)}_{(u)j}+\sum_{u=0}^{s-1}R^{h(0)}_{(u)j}\frac{d}{dt}Q^{j(u)}_{(s)h}$$

$$-(-1)^s n(m-s).\,s!\,K_{s+1}+B_1+B_2$$

$$=S_{(s+1)}-(-1)^s n(m-s).\,s!\,K_{s+1}+B_1+B_2\,.$$

Ferner berechnet man unter Berücksichtigung von (2.14a, c; 21, 23′)

$$B_1+B_2=\sum_{v=1}^{m-1}\sum_{u=0}^{s-1}\sum_{w=0}^{u}(-1)^{v+w-1}\frac{s!\,(m-s+u)!\,v!}{m!\,(u-w)!}K_vK_wP_{v(m-s+u)h}x^{(u-w+1)h}$$

$$+\sum_{v=0}^{s-1}\sum_{w=1}^{m-1}(-1)^{v+w}\frac{s!\,(m-s+v)!\,w!}{m!}K_vK_w\Delta_wP_{m-s+v}$$

$$+\sum_{v=0}^{s-1}(-1)^v\frac{s!\,(m-s+v)!}{m!}K_v\frac{d}{dt}P_{m-s+v}$$

$$=\sum_{v=0}^{s-1}\sum_{w=1}^{m-1}(-1)^{v+w}\frac{s!\,w!\,(m-s+v)!}{m!}K_vK_w2\Delta_{[w}P_{m-s+v]}$$

$$+\sum_{v=0}^{s-1}(-1)^v\frac{s!\,(m-s+v)!}{m!}K_v\frac{d}{dt}P_{m-s+v}$$

$$=-\sum_{v=0}^{s-1}(-1)^v\frac{(s-v).\,s!\,(m-s+v)!}{m!}P_{m-s+v}K_vK_1$$

$$-\sum_{v=0}^{s-1}\sum_{w=2}^{m-1}(-1)^{v+w}\frac{(m-s+v-w).\,s!\,(m-s+v+w-1)!}{m!}$$

$$\times P_{m-s+v+w-1}K_vK_w+\sum_{v=0}^{s-1}(-1)^v\frac{s!\,(m-s+v)!}{m!}K_v\frac{d}{dt}P_{m-s+v}$$

$$=C_1+C_2+III\quad\text{(gesetzt)}.$$

Wegen $P_u(u>m)=0$ und (2.22′) hat man

$$C_2 = -\frac{s!}{m!}\sum_{w=2}^{s+1}\sum_{v=0}^{s-w+1}(-1)^{v+w}(m-s+v-w).\,(m-s+v+w-1)!$$
$$\times P_{m-s+v+w-1}K_vK_w$$
$$= -\frac{s!}{m!}\sum_{w=2}^{s+1}\sum_{v=0}^{s-w+1}(-1)^{v+w}(v-w).\,(m-s+v+w-1)!\,P_{m-s+v+w-1}K_vK_w$$
$$-(-1)^{s+1}(m-s).\,s!\,K_{s+1}$$
$$= \frac{s!}{m!}\sum_{w=2}^{s+1}(-1)^w w.\,(m-s+w-1)!\,P_{m-s+w-1}K_w+(-1)^s(m-s).\,s!\,K_{s+1}$$
$$+\frac{s!}{m!}\sum_{w=2}^{s}(-1)^w(1-w).\,(m-s+w)!\,P_{m-s+w}K_wK_1$$
$$= IV+V+C_3 \quad \text{(gesetzt)}$$

und

$$C_1+C_3 = -\frac{s!\,(m-s)!}{m!}P_{m-s}K_1\,.$$

Zusammenfassend erreichen wir die Beziehung

$$2S^{(0)(0)j}_{k\,j\,(s)}x^{(1)k} = S^*_{(s+1)}-(-1)^s(n-1)\,(m-s).\,s!\,K_{s+1} \qquad (s=1,2,\ldots,m-2), \tag{2.25}$$

wobei

$$S^*_{(s+1)} = S_{(s+1)}+\frac{s!}{m!}\sum_{w=1}^{s+1}(-1)^w w.\,(m-s+w-1)!\,P_{m-s+w-1}K_w$$
$$+\frac{s!}{m!}\sum_{v=0}^{s-1}(-1)^v(m-s+v)!\,K_v\frac{d}{dt}P_{m-s+v} \tag{2.26}$$

ist. Nebenbei beachten wir, dass das zweite Glied in der rechten Seite von (2.26) in die Gestalt

$$-\frac{s!}{m!}\sum_{w=0}^{s}(-1)^w(s-w+1).\,(m-s+w-1)!\,P_{m-s+w-1}K_w$$

geschrieben werden kann.

Die neu definierten Skalare $S^*_{(u)}$ spielen in unserer projektiven Theorie eine wichtige Rolle (vgl. Nr. 13, 14).

10. Einige Hilfsformeln. Erstens, wenn f eine von t unabhängige Funktion ist, gelten die Formeln

$$\text{(a)} \qquad \Delta_s \frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt} \Delta_s f + \Delta_{s-1} f - P_s \Delta_{m-1} f \quad (2 \leqq s)\,,$$

(2.27)

$$\text{(b)} \qquad \Delta_1 \frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt} \Delta_1 f + \frac{d}{dt} f - P_1 \Delta_{m-1} f\,;$$

z.B.

$$\begin{aligned}
\Delta_s \frac{d}{dt} f &= \Delta_s \Big(\sum_{r=0}^{m-2} f_{(r)j} x^{(r+1)j} - f_{(m-1)j} H^j \Big) \\
&= (\Delta_s f)_{(0)j} x^{(1)j} + \sum_{r=1}^{m-2} \Big[(\Delta_s f)_{(r)j} - \binom{r+s-1}{s} f_{(r+s-1)j} \Big] x^{(r+1)j} \\
&\quad + \sum_{r=s-1}^{m+2} \binom{r+1}{s} f_{(r)j} x^{(r-s+2)j} - f_{(m-1)j} \Delta_s H^j \\
&= \frac{d}{dt} \Delta_s f + \sum_{r=s-1}^{m-1} \binom{r}{s-1} f_{(r)j} x^{(r-s+2)j} - P_s f_{(m-1)j} x^{(1)j} \quad (2 \leqq s)\,.
\end{aligned}$$

Zweitens, wenn ein Differentialoperator $\mathfrak{D}$ für die Funktionen $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ definiert ist, so drückt $\mathfrak{D}K_r$ sich in der Form

$$\text{(2.28)} \qquad \mathfrak{D}K_r = (-1)^{r+1} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{r-s-1} (-1)^{s+t} \frac{(m+s+t-r)!}{m!} K_s K_t \mathfrak{D} P_{m+s+t-r}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m-1)$$

aus. Da $\mathfrak{D}K_1 = \frac{1}{m} \mathfrak{D} P_{m-1}$ ist, so gilt (2.28) offenbar für $r = 1$. Sei nun die Formel für $r \leqq q$ gültig, so haben wir nach (2.22), (2.28) $(r \leqq q)$

$$\begin{aligned}
(-1)^{q+1} m!\, \mathfrak{D}K_{q+1} &= \sum_{r=0}^{q} (-1)^{r-1} (m-q+r-1)!\, K_r \mathfrak{D} P_{m-q+r-1} \\
&\quad + \sum_{r=1}^{q} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{r-s-1} (-1)^{s+t} \frac{(m-q+r-1)!\,(m+s+t-r)!}{m!} \\
&\qquad \times P_{m-q+r-1} K_s K_t \mathfrak{D} P_{m+s+t-r}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{v=0}^{q} (-1)^{q-v-1}(m-v-1)!\, K_{q-v}\mathfrak{D}P_{m-v-1}$$
$$+ \sum_{r=1}^{q}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v=0}^{r-s-1}(-1)^{r-v-1}\frac{(m-q+r-1)!\,(m-v-1)!}{m!}$$
$$\times P_{m-q+r-1}K_sK_{r-s-v-1}\mathfrak{D}P_{m-v-1}\,.$$

Da $\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v=0}^{r-s-1} = \sum_{v=0}^{q-1}\sum_{s=0}^{q-v-1}\sum_{r=s+v+1}^{q}$ ist und nach (2.22)

$$\sum_{r=s+v+1}^{q}(-1)^{r-v-1}(m-q+r-1)!\,P_{m-q+r-1}K_{r-s-v-1} = (-1)^{q-v-1}m!\,K_{q-s-v}$$

ist, so folgt

$$(-1)^{q+1}m!\,\mathfrak{D}K_{q+1} = \sum_{v=0}^{q}\sum_{s=0}^{q-v}(-1)^{q-v-1}(m-v-1)!\,K_sK_{q-s-v}\mathfrak{D}P_{m-v-1}$$
$$= \sum_{s=0}^{q}\sum_{t=0}^{q-s}(-1)^{s+t-1}(m+s+t-q-1)!\,K_sK_t\mathfrak{D}P_{m+s+t-q-1}\,.$$

Drittens wenden wir Δ_s $(m-1 \geqq s \geqq 1)$ auf $R^{i(0)}_{(q)j}$ $(q < m-1)$ an. Es gelten

(2.29a)
$$\Delta_1 R^{i(0)}_{(q)j} = qR^{i(0)}_{(q)j} + \sum_{q\geq q'>q''\geq 0}\sum_{v=0}^{q-q'}(-1)^{v-1}\frac{q!\,(m-q'+q'')!}{m!\,(q-q'-v)!\,q''!}$$
$$\times K_v x^{(q-q'-v+1)i}P_{1(m-q'+q'')h}R^{h(0)}_{(q'')j}\,,$$

2.29b)
$$\Delta_s R^{i(0)}_{(q)j} = \frac{q!}{s!\,(q-s+1)!}(m-s+1+\overline{q-s+1})\,R^{i(0)}_{(q-s+1)j}$$
$$+ \sum_{q\geq q'>q''\geq 0}\sum_{v=0}^{q-q'}(-1)^{v-1}\frac{q!\,(m-q'+q'')!}{m!\,(q-q'-v)!\,q''!}$$
$$\times K_v x^{(q-q'-v+1)i}P_{s(m-q'+q'')h}R^{h(0)}_{(q'')j} \quad (s \geqq 2)\,,$$

wo $R^{i(0)}_{(u)j}$ $(u<0) = 0$ ist. Hier wollen wir (2.29b) beweisen. Nach (1.14a, 15), (2.24) $(q'-q'' < m-1)$ hat man

$$\Delta_s R^{i(0)}_{(q)j} = -\sum_{q\geq q'>q''\geq 0}\frac{(m-q'+q'').\,q'!\,(m-q'+q''+s-1)!}{m!\,s!\,q''!}$$
$$\times R^{i(q')}_{(q)h'}H^{h'}_{(m-q'+q''+s-1)h''}R^{h''(0)}_{(q'')j}$$
$$- \frac{m-s+1}{s}\sum_{q\geq q'>q''\geq 0}\frac{q'!}{q''!\,(q'-q'')!}\delta^{s-1}_{q'-q''}R^{i(q')}_{(q)h'}R^{h'(0)}_{(q'')j}$$
$$+ \sum_{q\geq q'>q''\geq 0}\frac{q'!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!}(R^{i(q')}_{(q)h'}x^{(1)h'})P_{s(m-q'+q'')h''}R^{h''(0)}_{(q'')j}\,.$$

Das dritte Glied in der rechten Seite geht nach (1.14b), (2.21) sogleich in das zweite Glied von (2.29b) über, und, da $H^{h'}_{(m-q'+q''+s-1)h''}$ für $q'-q''<s$ verschwindet, erhält man nach (1.8, 14b)

das erste Glied

$$= -\sum_{q-s\geq q'-s\geq q''\geq 0} \frac{(m-q'+q'').\,q'!}{s!\,(q'-s+1)!} R^{i(q')}_{(q)h'} Q^{h'}_{(q'-s+1)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j}$$

$$= -\frac{q!}{(q-s+1)!\,s!} \sum_{q-s\geq q'-s\geq q''\geq 0} (m-q'+q'') R^{i(q'-s+1)}_{(q-s+1)h'} Q^{h'}_{(q'-s+1)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j}$$

$$= -\frac{q!}{(q-s+1)!\,s!} \sum_{q-s+1\geq r>q''\geq 0} (m-s+1-r+q'') R^{i}_{(q-s+1)h'} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j},$$

das zweite Glied

$$= -\frac{q!}{s!\,(q-s+1)!} \sum_{q-s+1\geq r\geq 0} (m-s+1) R^{i}_{(q-s+1)h'} R^{h'(0)}_{(r)j};$$

daraus folgt unter der Voraussetzung $Q^{i(u)}_{(u)j} = \delta^i_j$

die Summe dieser Glieder

$$= -\frac{q!}{s!\,(q-s+1)!} \sum_{q-s+1\geq r\geq q''\geq 0} (m-s+1-r+q'') R^{i}_{(q-s+1)h'} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j}.$$

Da nach (1.10a, b)

$$\sum_{q''=0}^{r} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j} = 0 \quad \text{für} \quad r>0,$$

$$\sum_{r=q''}^{q-s+1} R^{i}_{(q-s+1)h'} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} = 0 \quad \text{für} \quad q-s+1>q''$$

sind, so hat man

$$\sum_{q-s+1\geq r\geq q''\geq 0} (m-s+1-r+q'')\, R^{i}_{(q-s+1)h'} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j}$$

$$= \sum_{r=0}^{q-s+1} \sum_{q''=0}^{r} (m-s+1-r)\, R^{i}_{(q-s+1)h'} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j}$$

$$+ \sum_{q''=0}^{q-s+1} \sum_{r=q''}^{q-s+1} q''\, R^{i}_{(q-s+1)h'} Q^{h'(q'')}_{(r)h''} R^{h''(0)}_{(q'')j}$$

$$= (m-s+1)R^{i}_{(q-s+1)h'}{}^{(0)}\, Q^{h'}_{(0)h''}{}^{(0)}\, R^{h''}_{(0)j}{}^{(0)}$$
$$+ (q-s+1)\, R^{i}_{(q-s+1)h'}{}^{(q-s+1)}\, Q^{h'}_{(q-s+1)h''}{}^{(q-s+1)}\, R^{h''}_{(q-s+1)j}{}^{(0)}$$
$$= -(m-s+1+\overline{q-s+1})\, R^{i}_{(q-s+1)j}{}^{(0)} .$$

Somit ist (2.29b) bewiesen. Ganz analog können wir (2.29a) beweisen.

11. **Beziehungen zwischen den Skalaren $S^*_{(u)}$.** Die Skalare $S_{(2)}, \ldots, S_{(m-1)}$, welche in Nr. 3 aus den Grundübertragungen hergeleitet werden, beziehen sich eng mit den Torsionsgrössen in der affinen Theorie, wie man in Nr. 9 sieht. Im Folgenden möchten wir die Beziehungen zwischen den modifizierten Skalaren $S^*_{(u)}$ klarmachen, welche in unserer projektiven Theorie zu wichtigem Resultat führen werden (Nr. 14). Es bestehen

(2.30)

Für $2 \leqq u < m-1$, $2 \leqq s \leqq m-1$:

$$\Delta_1 S^*_{(u)} = u\, S^*_{(u)} ,$$
$$\Delta_s S^*_{(u)} = \binom{u-1}{s} S^*_{(u-s+1)} \quad \text{für} \quad u \geqq s+1 ,$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad u = s ,$$
$$= \frac{(n-1)(m+1)}{u(u+1)} \quad \text{für} \quad u = s-1 ,$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad u \leqq s-2 ;$$

(2.31)

$$\Delta_1 S^*_{(m-1)} = (m-1) S^*_{(m-1)} - \frac{(n-1)(m+1)}{m(m-1)} P_1 ,$$
$$\Delta_s S^*_{(m-1)} = \binom{m-2}{s} S^*_{(m-s)} - \frac{(n-1)(m+1)}{m(m-1)} P_s \quad \text{für} \quad 2 \leqq s \leqq m-2 ,$$
$$= -\frac{(n-1)(m+1)}{m(m-1)} P_{m-1} \quad \text{für} \quad s = m-1 .$$

Im Fall $m = 3$ bzw. 4 gehen diese Formeln über in

$$\Delta_1 S^*_{(2)} = 2S^*_{(2)} - \frac{2}{3}(n-1)P_1 , \quad \Delta_2 S^*_{(2)} = -\frac{2}{3}(n-1)P_2 , \tag{2.32}$$

bzw.

$$(2.33)\quad \begin{cases} \Delta_1 S^*_{(3)} = 3S^*_{(3)} - \dfrac{5}{12}(n-1)P_1\,, & \Delta_1 S^*_{(2)} = 2S^*_{(2)}\,, \\ \Delta_2 S^*_{(3)} = S^*_{(2)} - \dfrac{5}{12}(n-1)P_2\,, & \Delta_2 S^*_{(2)} = 0\,, \\ \Delta_3 S^*_{(3)} = -\dfrac{5}{12}(n-1)P_3\,, & \Delta_3 S^*_{(2)} = \dfrac{5}{6}(n-1)\,; \end{cases}$$

([3], (3.30b) und (4.30a, b)).

Beweis. Unter der Voraussetzung, dass H^i nicht von t abhängt (vgl. Bemerkung), wollen wir hier den Beweis im Fall $2 \leqq s \leqq m-1$ vorausschicken. Aus (1.20) haben wir, berücksichtigend (2.27a),

$$(2.34)\quad \begin{aligned} \Delta_s S_{(u)} = &-\sum_{r=0}^{u-1} \frac{u-r}{u} \Delta_s Q^{i\,(r)}_{(u)j} R^{j(0)}_{(r)i} - \sum_{r=1}^{u-1} \frac{u-r}{u} Q^{i\,(r)}_{(u)j} \Delta_s R^{j(0)}_{(r)i} \\ &+ \sum_{r=1}^{u-2} \Delta_s R^{j(0)}_{(r)i} \frac{d}{dt} Q^{i\,(r)}_{(u-1)j} + \sum_{r=0}^{u-2} R^{j(0)}_{(r)i} \Big[\frac{d}{dt} \Delta_s Q^{i\,(r)}_{(u-1)j} \\ &+ \Delta_{s-1} Q^{i\,(r)}_{(u-1)j} - P_s \Delta_{m-1} Q^{i\,(r)}_{(u-1)j} \Big]\,, \end{aligned}$$

wobei nach (2.24, 29b)

$$\begin{aligned} \Delta_s Q^{i\,(r)}_{(u)j} = &\frac{u!\,(m-u+r)!}{m!\,r!} P_{s(m-u+r)j} x^{(1)i} + \frac{1}{m}\binom{u}{m-1} P_s \delta^{m-1}_{u-r} \delta^i_j \\ &- \frac{(m-u+r).u!\,(m-u+r+s-1)!}{m!\,r!\,s!} H^i_{(m-u+r+s-1)j} \\ &- \frac{m-s+1}{s}\binom{u}{s-1} \delta^{s-1}_{u-r} \delta^i_j \\ = &\underset{1}{A^i_j} + \underset{2}{A^i_j} + \underset{1}{B^i_j} + \underset{2}{B^i_j} \qquad \text{(gesetzt)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_s R^{j(0)}_{(r)i} = &\sum_{r \geqq q' > q'' \geqq 0} \sum_{v=0}^{r-q'} (-1)^{v-1} \frac{r!\,(m-q'+q'')!}{m!\,(r-q'-v)!\,q''!} K_v x^{(r-q'+v+1)j} \\ &\times P_{s(m-q'+q'')h''} R^{h''(0)}_{(q'')i} \\ &+ \frac{r!}{s!\,(r-s+1)!} (m-s+1+\overline{r-s+1}) R^{j(0)}_{(r-s+1)i} \\ = &\underset{3}{A^j_i} + \underset{3}{B^j_i} \qquad \text{(gesetzt)}, \end{aligned}$$

$$\Delta_s Q^{i\ (r)}_{(u-1)j} = \frac{(u-1)!\,(m-u+r+1)!}{m!\,r!} P_{s(m-u+r+1)j} x^{(1)i}$$

$$- \frac{(m-u+r+1).\,(u-1)!\,(m-u+r+s)!}{m!\,r!\,s!} H^i_{(m-u+r+s)j}$$

$$+ \text{Konst.} = \underset{4}{A^i_j} + \underset{4}{B^i_j} + \text{Konst.} \qquad \text{(gesetzt)},$$

$$\Delta_{s-1} Q^{i\ (r)}_{(u-1)j} = \frac{(u-1)!\,(m-u+r+1)!}{m!\,r!} P_{s-1(m-u+r+1)j} x^{(1)i}$$

$$- \frac{(m-u+r+1).\,(u-1)!\,(m-u+r+s-1)!}{m!\,r!\,(s-1)!} H^i_{(m-u+r+s-1)j}$$

$$+ \binom{u-1}{r} \times \begin{cases} -\dfrac{m-s+2}{s-1} \delta^{s-2}_{u-r-1} \delta^i_j & \text{für} \quad s \geqq 3 \\ m Q^{i\ (0)}_{(u-r-1)j} & \text{für} \quad s = 2 \end{cases}$$

$$= \underset{5}{A^i_j} + \underset{5}{B^i_j} + \underset{6}{B^i_j} \qquad \text{(gesetzt)},$$

$$\Delta_{m-1} Q^{i\ (r)}_{(u-1)j} = \frac{(u-1)!\,(m-u+r+1)!}{m!\,r!} P_{m-1(m-u+r+1)j} x^{(1)i}$$

$$- \frac{2}{m-1} \binom{u-1}{m-2} \delta^{m-2}_{u-r-1} \delta^i_j$$

$$= \underset{6}{A^i_j} + \underset{7}{A^i_j} \qquad \text{(gesetzt)}$$

sind. Wegen (1.8, 14a) haben wir dann

$$I \equiv - \sum_{r=0}^{u-1} \frac{u-r}{u} (\underset{1}{B^i_j} + \underset{2}{B^i_j}) R^{j(0)}_{(r)i} - \sum_{r=0}^{u-1} \frac{u-r}{u} Q^{i\ (r)}_{(u)j} \underset{3}{B^j_i} + \sum_{r=0}^{u-2} R^{j(0)}_{(r)i} (\underset{5}{B^i_j} + \underset{6}{B^i_j})$$

$$= \frac{(u-1)!}{s!\,(u-s+1)!} \sum_{r=0}^{u-s+1} \big[(u-r)(m-u+r) - (u-r-s+1)$$

$$\times (m+r-s+1) - s(m-u+r+1) \big] Q^{i\ (r)}_{(u-s+1)j} R^{j(0)}_{(r)i} .$$

Die Zahl in grosser Klammer ist $-(u-s)(u-s+1-r)-(m+1)$; somit erhalten wir wegen (1.10b)

$$(2.35)\qquad I=\begin{cases} -\binom{u-1}{s}\sum_{r=0}^{u-s}\frac{\overline{u-s+1}-r}{u-s+1}Q^{i}_{(u-s+1)j}{}^{(r)}R^{j(0)}_{(r)i} & \text{für } u\geqq s+1,\\ 0 & \text{für } u=s,\\ \frac{n(m+1)}{u(u+1)} & \text{für } u=s-1,\\ 0 & \text{für } u\leqq s-2. \end{cases}$$

Setzt man

$$II\equiv\sum_{r=1}^{u-2}B^{j}_{i}\frac{d}{dt}Q^{i}_{(u-1)j}{}^{(r)}+\sum_{r=0}^{u-2}R^{j(0)}_{(r)i}\frac{d}{dt}B^{i}_{j},$$

$$III\equiv-\sum_{r=0}^{u-1}\frac{u-r}{u}A^{i}_{j}R^{j(0)}_{(r)i}-P_{s}\sum_{r=0}^{u-2}R^{j(0)}_{(r)i}A^{i}_{j},$$

so haben wir ganz analog

$$(2.36)\qquad II=\begin{cases}\binom{u-1}{s}\sum_{r=0}^{u-s-1}R^{j(0)}_{(r)i}\frac{d}{dt}Q^{i}_{(u-s)j}{}^{(r)} & \text{für } u\geqq s+1,\\ 0 & \text{für } u\leqq s,\end{cases}$$

$$(2.37)\qquad III=-\frac{n(m+1)}{m(m-1)}\delta_{u}^{m-1}P_{s}.$$

Da nach (2.21)

$$(2.38)\qquad \sum_{r=0}^{p-1}\frac{(m-p+r)!}{r!}P_{(m-p+r)j}R^{j(0)}_{(r)i}x^{(1)i}=\sum_{v=0}^{p-1}(-1)^{v-1}(m-p+v)!\,\Delta_{m-p+v}P.K_{v}$$

ist, gewinnen wir

$$C_{1}\equiv-\sum_{r=0}^{u-1}\frac{u-r}{u}A^{i}_{j}R^{j(0)}_{(r)i}$$

$$=-\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{v=0}^{u-1}\sum_{r=v}^{u-1}(-1)^{v-1}\frac{(u-r).(m-u+r)!}{(r-v)!}P_{s(m-u+r)j}x^{(r-v+1)j}K_{v},$$

$$C_{2}\equiv-\sum_{r=1}^{u-1}\frac{u-r}{u}Q^{i}_{(u)j}{}^{(r)}A^{j}_{i}$$

$$=-\sum_{r=0}^{u-2}\sum_{r+1\geq q'>q''\geq 0}\sum_{v=0}^{r-q'+1}(-1)^{v-1}\frac{(u-r-1).r!\,(m-q'+q'')!}{m!\,(r-q'-v+1)!\,q''!}P_{s(m-q'+q'')h''}$$

$$\times R^{h''(0)}_{(q'')i}Q^{i}_{(u-1)j}{}^{(r)}x^{(r-q'-v+2)j}K_{v},$$

$$C_3 \equiv \sum_{r=0}^{u-2} A_3^j \frac{d}{dt} Q_{(u-1)_i^j}^{i\ (r)}$$

$$= \frac{(u-1)!}{m!} \sum_{q'=1}^{u-2} \sum_{q''=0}^{q'-1} \sum_{v=0}^{u-q'-2} (-1)^{v-1} \frac{(m-q'+q'')!\,(m-u+q'+v+1)!}{m!\,q''!}$$

$$\times P_{s(m-q'+q'')h''} R_{(q'')_i^{h''}}^{(0)} \frac{d}{dt} \Delta_{m-u+q'+v+1} H^i . K_v$$

$$- \sum_{r=1}^{u-2} \sum_{q'=1}^{r} \sum_{q''=0}^{q'-1} \sum_{v=0}^{r-q'} (-1)^{v-1} \frac{r!\,(m-q'+q'')!}{m!\,(r-q'-v)!\,q''!} P_{s(m-q'+q'')h''} R_{(q'')_i^{h''}}^{(0)}$$

$$\times Q_{(u-1)_j^i}^{(r)} x^{(r-q'-v+2)j} K_v ,$$

$$C_4 \equiv \sum_{r=0}^{u-2} R_{(r)_i^j}^{(0)} \frac{d}{dt} A_4^i{}_j$$

$$= \frac{(u-1)!}{m!} \Big[\sum_{v=0}^{u-2} (-1)^{v-1} (m-u+v+1)! \frac{d}{dt} \Delta_{m-u+v+1} P_s . K_v$$

$$+ \sum_{v=0}^{u-2} \sum_{r=v}^{u-2} (-1)^v \frac{(m-u+r+1)!}{(r-v)!} P_{s(m-u+r+1)j} x^{(r-v+2)j} K_v$$

$$+ \sum_{r=0}^{u-2} \frac{(m-u+r+1)!}{r!} P_{s(m-u+r+1)j} R_{(r)_i^j}^{(0)} x^{(2)i} \Big] ,$$

$$C_5 \equiv \sum_{r=0}^{u-2} R_{(r)_i^j}^{(0)} A_5^i{}_j = \frac{(u-1)!}{m!} \sum_{v=0}^{u-2} (-1)^{v-1} (m-u+v+1)!\, \Delta_{m-u+v+1} P_{s-1} . K_v ,$$

$$C_6 \equiv -P_s \sum_{r=0}^{u-2} R_{(r)_i^j}^{(0)} A_6^i{}_j = -\frac{(u-1)!}{m!} P_s \sum_{v=0}^{u-2} (-1)^{v-1} (m-u+v+1)!$$

$$\times \Delta_{m-u+v+1} P_{m-1} . K_v .$$

Wenn wir berücksichtigen, dass

$$\sum_{r=0}^{u-2} \sum_{q'=1}^{r+1} \sum_{q''=0}^{q'-1} \sum_{v=0}^{r-q'+1} \Phi = \sum_{r=1}^{u-2} \sum_{q'=1}^{r} \sum_{q''=0}^{q'-1} \sum_{v=0}^{r-q'} \Phi + \sum_{r=0}^{u-2} \sum_{v=0}^{r} \sum_{q''=0}^{r-v} \Phi_{q'-r-v+1} ,$$

so können wir nach (2.9b, 38) ohne Schwierigkeit berechnen:

$$C_2 + C_3 = -\frac{(u-1)!}{m!} \sum_{q'=1}^{u-2} \sum_{v=0}^{u-q'-2} \sum_{w=0}^{q'-1} (-1)^{v+w}$$

$$\times \frac{(u-q'-v).\,(m-u+q'+v)!\,(m-q'+w)!}{m!} P_{m-u+q'+v} \Delta_{m-q'+w} P_s . K_v K_w$$

$$-\frac{(u-1)!}{m.\,m!}P_{m-1}\sum_{v=0}^{u-2}\sum_{w=0}^{u-v-2}(-1)^{v+w}(m-u+v+w+1)!$$

$$\times \Delta_{m-u+v+w+1}P_s \,.\, K_vK_w$$

$$+\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{q'=1}^{u-2}\sum_{v=0}^{u-q'-2}\sum_{w=0}^{q'-1}(-1)^{v+w}\frac{(m-u+q'+v+1)!\,(m-q'+w)!}{m!}$$

$$\times \frac{d}{dt}P_{m-u+q'+v+1}\cdot \Delta_{m-q'+w}P_s \,.\, K_vK_w$$

$$-\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{q''=0}^{u-2}\frac{(m-u+q''+1)!}{q''!}P_{s(m-u+q''+1)h''}R^{h''(0)}_{(q'')_i}x^{(2)i}\,.$$

Daraus folgt durch die Transformation $q = q'+v$ im ersten und dritten Glied:

$$C_1+C_2+C_3+C_4 = \frac{(u-1)!}{m!}\Big\{\sum_{v=0}^{u-2}(-1)^{v-1}(m-u+v+1)!\frac{d}{dt}\Delta_{m-u+v+1}P_s \,.\, K_v$$

$$+\sum_{q=1}^{u-2}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{w=0}^{q-v-1}(-1)^{v+w}\frac{(m-u+q+1)!\,(m-q+v+w)!}{m!}$$

$$\times \frac{d}{dt}P_{m-u+q+1}\cdot \Delta_{m-q+v+w}P_s \,.\, K_vK_w\Big\}$$

$$+\frac{(u-1)!}{m!}\Big\{\sum_{v=0}^{u-1}(-1)^v(u-v).\,(m-u+v)!\,K_v\Delta_{m-u+v}P_s$$

$$-\sum_{q=1}^{u-1}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{w=0}^{q-v-1}(-1)^{v+w}\frac{(u-q).(m-u+q)!\,(m-q+v+w)!}{m!}$$

$$\times P_{m-u+q}\,\Delta_{m-q+v+w}P_s \,.\, K_vK_w\Big\}$$

$$= \frac{(u-1)!}{m!}D_1+\frac{(u-1)!}{m!}E_1 \quad \text{(gesetzt)}\,;$$

($\Delta_s S_{(u)} = I+II+III+C_5+C_6+(u-1)!/m!\,.\,(D_1+E_1)$ nach (2.34)). Aus (2.26) hat man nun nach (2.27a)

$$\Delta_s(S^*_{(u)}-S_{(u)}) = \frac{(u-1)!}{m!}\Big\{\sum_{q=0}^{u-2}(-1)^q(m-u+q+1)!\frac{d}{dt}P_{m-u+q+1}\,\Delta_sK_q$$

$$+\sum_{v=0}^{u-2}(-1)^v(m-u+v+1)!\,\frac{d}{dt}\Delta_sP_{m-u+v+1}\,.\,K_v\Big\}$$

$$-\frac{(u-1)!}{m!}P_s\sum_{v=0}^{u-2}(-1)^v(m-u+v+1)!\,K_v\Delta_{m-1}P_{m-u+v+1}$$

$$+\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{v=0}^{u-2}(-1)^v(m-u+v+1)!\,K_v\,\Delta_{s-1}P_{m-u+v+1}$$

$$+\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{v=1}^{u}(-1)^v v.\,(m-u+v)!\,(K_v\Delta_s P_{m-u+v}+P_{m-u+v}\Delta_s K_v)$$

$$=\frac{(u-1)!}{m!}(D_2+D_3+E_2+E_3)\quad\text{(gesetzt).}$$

Wegen (2.14c), (2.28) ($\mathfrak{D}=\Delta_s$) und $P_w(w>m)=0$ erhält man

$$D_1+D_2=-\sum_{v=0}^{u-s-1}(-1)^v\frac{(m-u+v-s+1).\,(m-u+v+s)!}{s!}\frac{d}{dt}P_{m-u+v+s}.K_v$$

$$+\sum_{q=s-1}^{u-2}\sum_{v=0}^{q-s+1}\sum_{w=0}^{q-s-v+1}(-1)^{v+w}$$

$$\times\frac{(m-q+v+w-s).\,(m-u+q+1)!\,(m-q+v+w+s-1)!}{m!\,s!}$$

$$\times P_{m-q+v+w+s-1}K_vK_w\frac{d}{dt}P_{m-u+q+1}\,;$$

da $\sum_{v=0}^{q-s+1}\sum_{w=0}^{q-v-s+1}=\sum_{w=0}^{q-s+1}\sum_{v=0}^{q-w-s+1}$ ist, so lautet nach (2.22′)

$$\sum_{v=0}^{q-s+1}\sum_{w=0}^{q-s-v+1}(-1)^{v+w}(m-q+v+w-s).\,(m-q+v+w+s-1)!$$

$$\times P_{m-q+v+w+s-1}K_vK_w=(-1)^{q-s+1}(m+q-3s+2).\,m!\,K_{q-s+1}\,.$$

Folglich gewinnen wir

$$\text{(2.39)}\qquad IV\equiv\frac{(u-1)!}{m!}(D_1+D_2)=\frac{(u-s).\,(u-1)!}{s!\,m!}\sum_{v=0}^{u-s-1}(-1)^v$$

$$\times\,(m-u+s+v)!\,K_v\frac{d}{dt}P_{m-u+v+s}\,.$$

Setzt man nun $V\equiv C_6+(u-1)!/m!.\,D_3$, so folgt gleich nach (2.14c)

$$\text{(2.40)}\qquad V=-\frac{m-3}{m-1}\delta_u^{m-1}P_s\,.$$

Da wir leicht nach (2.22′, 28)

$$E_3 - \sum_{q=1}^{u-1}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{w=0}^{q-v-1}(-1)^{v+w}\frac{(u-q).(m-u+q)!\,(m-q+v+w)!}{m!}P_{m-u+q}\cdot$$
$$\times \Delta_s P_{m-q+v+w}K_vK_w + \sum_{v=0}^{u-1}(-1)^v(u-v).(m-u+v)!\,K_v\Delta_s P_{m-u+v} = 0$$

beweisen können, so ergibt sich

$$VI \equiv C_5 + \frac{(u-1)!}{m!}(E_1+E_2+E_3)$$
$$= \frac{(u-1)!}{m!}\Big\{\sum_{v=0}^{u-2}(-1)^{v-1}(m-u+v+1)!\,2\Delta_{[m-u+v+1}P_{s-1]}$$
$$+ \sum_{v=0}^{u-1}(-1)^v(u-v).(m-u+v)!\,2\Delta_{[m-u+v}P_{s]}$$
$$- \sum_{q=1}^{u-1}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{w=0}^{q-v-1}(-1)^{v+w}\frac{(u-q).(m-u+q)!\,(m-q+v+w)!}{m!}$$
$$\times P_{m-u+q}\,.\,2\Delta_{[m-q+v+w}P_{s]}K_vK_w\Big\};$$

daraus folgt nach leichter Rechnung wegen (2.14a, c; 22′)

$$(2.41)\quad VI = \begin{cases} \dfrac{(u-s).(u-1)!}{s!\,m!}\displaystyle\sum_{v=1}^{u-s+1}(-1)^v v.(m-u+s+v-1)!\,P_{m-u+s+v-1}K_v & \\ \qquad + \dfrac{m-1}{m}\delta_u^{m-1}P_s & \text{für } u \geqq s, \\ -\dfrac{m+1}{u(u+1)} & \text{für } u = s-1, \\ 0 & \text{für } u \leqq s-2. \end{cases}$$

Da $\Delta_s S^*_{(u)} = I + II + III + IV + V + VI$ ist, so folgen die Beziehungen (2.30, 31) für $s \geqq 2$ sofort nach (2.35, 36, 37, 39, 40, 41).

Mittels (2.14a, 22′, 28, 29a) können wir analog die Beziehungen (2.30, 31) für $s = 1$ beweisen. Wir werden aber später aus anderer Betrachtung die Beziehungen für $\Delta_1 S^*_{(u)}$ erkennen (vgl. Nr. 14, Bemerkung).

Bemerkung. Die Beziehungen (2.25, 26) zwischen den Torsionsgrössen und den Skalaren $S^*_{(u)}$ sowie die gegenseitigen Beziehungen dieser Skalare (2.30, 31) haben wir unter der Voraussetzung, dass H^i nicht

von t abhängt, hergeleitet. Diese Beziehungen sind aber dann auch gültig, wenn H^i von t abhängt, also von der Gestalt (2.8) ist. Man kann nämlich leicht sehen, dass (2.23′) und (2.27a, b) auch für die Funktion f, die von t abhängen mag, bestehen, indem man $\frac{d}{dt}$ durch Δ_0 ersetzt; und dass die Beziehungen (2.25, 26) sowie (2.30, 31), deren Beweis sich auf (2.23′), (2.27a, b) stützt, deshalb gültig sind, wobei man $\frac{d}{dt}$ in $S^*_{(u)}$ durch Δ_0 ersetzen muss. Andererseits, wenn wir die Grösse, welche aus $S^*_{(u)}$ durch diese Ersetzung entsteht, mit $'S^*_{(u)}$ bezeichnen, so ist nach (1.20), (2.26)

$$S^*_{(u)}-{}'S^*_{(u)}=\sum_{r=0}^{u-2}R^{j(0)}_{(r)i}\partial_t Q^{i\ (r)}_{(u-1)j}+\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{r=0}^{u-2}(-1)^r(m-u+r+1)!\times\partial_t P_{m-u+r+1}\cdot K_r,$$

da $df/dt=\Delta_0 f+\partial_t f$ ist. Da nach (1.8), (2.8, 9b)

$$\partial_t Q^{i\ (r)}_{(u-1)j}=\frac{(u-1)!\,(m-u+r+1)!}{m!\,r!}(\partial_t{}^*H)_{(m-u+r+1)j}x^{(1)i},$$

$$\partial_t P_v=\partial_t\Delta_v{}^*H\quad(v\geqq 2)$$

sind, so hat man unter Berücksichtigung von (2.38)

$$S^*_{(u)}-{}'S^*_{(u)}=\frac{(u-1)!}{m!}\sum_{r=0}^{u-2}(-1)^r(m-u+r+1)!\,(\Delta_v\partial_t{}^*H-\partial_t\Delta_v{}^*H)K_r;$$

da Δ_v, ∂_t vertauschbar sind, folgt $'S^*_{(u)}=S^*_{(u)}$. Somit ist die Behauptung klar. Neben (2.30, 31) bestehen noch die Beziehungen

$$\text{(2.42)}\qquad \boxed{\partial_t S^*_{(u)}=0\ \ (2\leqq u\leqq m-2),\quad \partial_t S^*_{(m-1)}=-\frac{(n-1)\,(m+1)}{m(m-1)}P_0}$$

(vgl. Nr. 14, Bemerkung).

§ 3. PROJEKTIVE TRANSFORMATION. DAS AUSGEZEICHNETE SYSTEM EINER PROJEKTIVEN KLASSE.

12. Projektive Transformation. Nun seien zwei Systeme der "paths" m-ter Ordnung (1.1) und

$$x^{(\overline{m})i}+\tilde{H}^i(\bar{t}, x, x^{(\overline{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}) = 0 \tag{3.1}$$

vorgelegt. Wenn jede Integralkurve eines der beiden Systeme auch diejenige des anderen ist, d.h. die beiden Systeme der "paths" völlig übereinanderliegen, so wollen wir, wie im Fall der Systeme zweiter Ordnung, sagen, dass sie miteinander projektiv verwandt sind. Zwei Systeme unterscheiden sich dann voneinander nur durch ihre Parametrisierung auf gemeinsamen Integralkurven. In der Arbeit [3] haben wir im allgemeinen die Beziehung zweier projektiv verwandten Systeme studiert. Wir zeigen im Folgenden, wie die Beziehung, falls die Systeme die Eigenschaft Γ besitzen, sich gestaltet.

Zunächst setzen wir voraus, dass jede Integralkurve von (3.1) eine von (1.1) ist. Wir betrachten eine Lösung des Systems (3.1) $x^i = x^i(\bar{t})$ (die Integralkurve C) mit der Anfangsbedingung

$$x^i = x_0^i, \; x^{(\overline{1})i} = x_0^{(\overline{1})i}, \ldots, x^{(\overline{m-1})i} = x_0^{(\overline{m-1})i} \quad \text{für} \quad \bar{t} = \bar{t}_0 .$$

Durch passende Wahl des Parameters t wird die Kurve C eine Lösung von (1.1). $\bar{t}$ und t beziehen sich auf C mit einer Funktion $\bar{t} = \bar{t}(t)$, welche sich durch die Anfangsbedingung oder durch $\bar{t}_0, x_0^i, x_0^{(\overline{1})i}, \ldots, x_0^{(\overline{m-1})i}$ bestimmt. Längs C bestehen dann nach (2.2)

$$x^{(r)i} = \sum_{s=1}^{r} a_s^r x^{(\overline{s})i} \quad r = 1, 2, \ldots, m . \tag{3.2}$$

Setzt man $x^{(m)i} = -H^i$, $x^{(\overline{m})i} = -\tilde{H}^i$, so erhält man nach (2.3)

$$H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) - \bar{t}'^m \tilde{H}^i(\bar{t}, x, x^{(\overline{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}) + \sum_{s=1}^{m-1} a_s^m x^{(\overline{s})i} = 0 . \tag{3.3}$$

Andererseits erhält man aus (2.7)

$$H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) = \bar{t}'^m H^i(\bar{t}, x, x^{(\overline{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}) - \sum_{s=2}^{m-s} a_s^m x^{(\overline{s})i} - a_m x^{(\overline{1})i} ,$$

wo $x^{(r)i}$ die Gestalt (3.2) annimmt, indem man bzw. $t, t', x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(m-1)i}, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ durch bzw. $\bar{t}, t, x^i, x^{(\overline{1})i}, \ldots, x^{(\overline{m-1})i}, \bar{t}', \bar{t}'', \ldots, \bar{t}^{(m-1)}$ ersetzt. Somit geht (3.3) nach (2.3) über in

$$(3.4)\quad H^i(\bar{t}, x, x^{(\bar{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}) - \tilde{H}^i(\bar{t}, x, x^{(\bar{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}) + \left[\bar{t}^{(m)} - a_m(\bar{t}, t, x, x^{(\bar{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}; \bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \ldots, \bar{t}^{(m-1)})\right] x^{(\bar{1})i} = 0 .$$

Die zu $\bar{t}$ inverse Funktion $t = t(\bar{t})$ hängt wie $\bar{t}$ von $\bar{t}_0, x_0, x_0^{(\bar{1})i}, \ldots, x_0^{(\overline{m-1})i}$ ab. Setzt man also $\bar{t} = \bar{t}_0$, sind dann $t, \bar{t}', \bar{t}^{(2)}, \ldots, \bar{t}^{(m)}$ von $\bar{t}_0, x_0^i, \ldots, x_0^{(\overline{m-1})i}$ abhängig, somit schliessen wir aus (3.4) durch diese Ersetzung und dann durch Beseitigung von 0 und −, dass eine Funktion ρ von $t, x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(m-1)i}$ vorhanden sein soll, so dass

$$(3.5)\quad \boxed{\tilde{H}^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) = H^i(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) + \rho(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}) x^{(1)i} .}$$

Besteht umgekehrt diese Beziehung, so haben die zwei Systeme (H^i) und $(\tilde{H}^i)$ nach (2.16) das assoziierte System gemeinsam, da

$$\tilde{H}^\alpha - \tilde{H}^n \frac{dx^\alpha}{dz} = H^\alpha - H^n \frac{dx^\alpha}{dz} ;$$

sie sind also miteinander projektiv verwandt.

Die Bedingung (3.5) ist daher notwendig und hinreichend dafür, dass zwei Systeme mit der Eigenschaft Γ projektiv verwandt sind. Auf einer gemeinsamen Integralkurve der Systeme beziehen sich ihre Parameter $\bar{t}$ und t nach (3.4, 5) mit der Differentialgleichung

$$\bar{t}^{(m)} - a_m(\bar{t}, t, x, x^{(\bar{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}; \bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \ldots, \bar{t}^{(m-1)}) = \rho(\bar{t}, x, x^{(\bar{1})}, \ldots, x^{(\overline{m-1})}) .$$

Wir wollen (3.5) die *projektive* (oder *bahntreue*) *Transformation* der Systeme der "paths" nennen, wo ρ beliebig sein darf. Z.B. ist jedes System (1.1) mit der Eigenschaft Γ nach (2.8), (3.5) mit dem System $x^{(m)i} + {}^*H^i = 0$, das die Gruppe der Verschiebungen zulässt, projektiv verwandt. Andererseits, da $T^i = x^{(m)i} + H^i$ und $\tilde{T}^i = x^{(m)i} + \tilde{H}^i$ Vektoren sind und nach (3.5) $\tilde{T}^i - T^i = \rho x^{(1)i}$ ist, so ist ρ ein Skalar.

Besitzt das System (H^i) die Eigenschaft Γ, so ist auch das transformierte System $(\tilde{H}^i)$ in (3.5), somit gelten nach Nr. 6

$$\partial_t \tilde{H}^i = \tilde{P}_0 x^{(1)i}, \quad \Delta_1 \tilde{H}^i = m\tilde{H}^i + \tilde{P}_1 x^{(1)i}, \quad \Delta_s \tilde{H}^i = -\binom{m}{s} x^{(m-s+1)i} + \tilde{P}_s x^{(1)i} .$$

Setzt man darin (3.5), so erhält man nach (2.8′; 9a, b)

$$(3.6)\quad \begin{aligned} &(a) && \partial_t \rho = \tilde{P}_0 - P_0 , \\ &(b) && \Delta_1 \rho = (m-1)\rho + \tilde{P}_1 - P_1 , \\ &(c) && \Delta_s \rho = \tilde{P}_s - P_s \quad \text{für} \quad 2 \leqq s \leqq m-1 . \end{aligned}$$

Betrachten wir die Differentialgleichungen

$$\partial_t \rho = -P_0 , \quad \Delta_1 \rho = (m-1)\rho - P_1 , \quad \Delta_2 \rho = -P_2 ,$$

so sehen wir leicht $[\Delta_1 \Delta_2]\rho = -\Delta_2 \rho$ und die Vertauschbarkeit von ∂_t, Δ_s $(s = 1, 2)$ wegen (2.14a, d). Eine Lösung sei ρ, so verschwinden $\tilde{P}_0$, $\tilde{P}_1$ und $\tilde{P}_2$ für das System $\tilde{H}^i = H^i + \rho x^{(1)i}$ nach (3.6). Nach [3] oder Nr. 8 bleibt dann das Gleichungssystem (3.1) unter jeder linear gebrochenen Parametertransformation unverändert. Somit erkennen wir, dass in jeder projektiven Klasse der Systeme $m(\geqq 3)$-ter Ordnung, die die Eigenschaft Γ besitzen, solche Systeme sich ergeben, welche den Parameter t als projektiv tragen.

Das Hauptproblem der projektiven Theorie besteht darin, zu entscheiden, ob zwei Systeme der "paths" in zwei Mannigfaltigkeiten unter geeigneter Punkttransformation sowie geeigneter projektiven Transformation equivalent sind, und alle Differentialkomitanten einer projektiven Klasse zu suchen.

13. Die projektiv invarianten Grössen. Neben (3.5) wollen wir die Transformation

$$(3.7a)\quad \begin{aligned} H^i(t, x, \ldots, x^{(m-1)}; \epsilon) = H_0^i(t, x, \ldots, x^{(m-1)}) \\ + \epsilon \rho(t, x, \ldots, x^{(m-1)}) x^{(1)i} \end{aligned}$$

betrachten, wo man H_0^i statt H^i schreibt und ϵ reelle Zahl im Intervall [0, 1] ist. Das System $H^i(\epsilon) = H^i(t, x, \ldots, x^{(m-1)}; \epsilon)$ ist für jedes ϵ mit dem System $(H^i(0) = H_0^i)$ projektiv verwandt, und $H^i(1) = \tilde{H}^i$. Aus (3.7a) haben wir

$$(3.7b)\quad \frac{\partial}{\partial \epsilon} H^i(\epsilon) = \rho x^{(1)i} ;$$

$\partial/\partial\epsilon$ ist nichts anderes als der *Operator der infinitesimalen projektiven Transformation*. Bezeichnen wir die dem System $(H^i(\epsilon))$ gehörigen Skalare P_s mit $P_s(\epsilon)$, so ergeben sich nach (3.6b, c)

$$(3.8)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \dfrac{\partial}{\partial\epsilon}P_1(\epsilon)+(m-1)\rho = \Delta_1\rho\ , \\ \text{(b)} & \dfrac{\partial}{\partial\epsilon}P_s(\epsilon) = \Delta_s\rho \quad (2\leqq s\leqq m-1)\ . \end{cases}$$

Nach (1.8), (3.7b) hat man gleich

$$(3.9a)\quad \frac{\partial}{\partial\epsilon}Q^{i(v)}_{(u)j} = \frac{u!\,(m-u+v)}{m!\,v!}\rho_{(m-u+v)j}x^{(1)i}+\frac{1}{m}\delta^{m-1}_u\delta^v_0\delta^i_j\rho$$

$(0\leqq v<u\leqq m-1)$. Somit erhält man nach (1.15) ($\mathfrak{D}=\partial/\partial\epsilon$) für $0\leqq r<m-1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\epsilon}R^{i(0)}_{(r)j} &= \sum_{r\geq q'>q''\geq 0}R^{i(q')}_{(r)h'}\frac{\partial}{\partial\epsilon}Q^{h'(q'')}_{(q')h''}R^{h''(0)}_{(q'')j} \\ &= \sum_{r\geq q'>q''\geq 0}\sum_{v=0}^{q'-q''}(-1)^{v-1}\frac{r!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!}\rho_{(m-q'+q'')h''} \\ &\quad\times \dot{R}^{h''(0)}_{(q'')j}x^{(r-q'-v+1)i}K_v\end{aligned}$$

oder

$$(3.9b)\quad \frac{\partial}{\partial\epsilon}R^{i(0)}_{(r)j} = \sum_{v=0}^{r-1}\sum_{q'=1}^{r-v}\sum_{q''=0}^{q'-1}(-1)^{v-1}\frac{r!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!}\rho_{(m-q'+q'')h''}\times R^{h''(0)}_{(q'')j}x^{(r-q'-v+1)i}K_v\ .$$

Wir haben nach (1.21) den Operator

$$\frac{d}{dt}f = \partial_t f+f_{(0)j}x^{(1)j}+\ldots+f_{(m-2)j}x^{(m-1)j}-f_{(m-1)j}H^j$$

definiert; wegen (3.7b) erhalten wir leicht

$$(3.10)\quad \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{d}{dt}f\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\epsilon}\right)-\rho\Delta_{m-1}f\ .$$

Nun untersuchen wir das Verhalten der Skalare $S^*_{(u)}$ ($u=2,3,\ldots,m-1$) bei einer projektiven Transformation (3.5) oder (3.7a). Da nach (1.20)

$$S_{(m-1)} = -\sum_{r=0}^{m-1}\frac{m-r-1}{m-1}Q^{i\ (r)}_{(m-1)j}R^{j(0)}_{(r)i}+\sum_{r=0}^{m-3}R^{j(0)}_{(r)i}\frac{d}{dt}Q^{i\ (r)}_{(m-2)j}$$

ist, setzen wir unter Berücksichtigung von (3.10)

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} S_{(m-1)} = I + II + III + IV + V \,, \tag{3.11}$$

wo

$$I = -\sum_{r=0}^{m-2} \frac{m-r-1}{m-1} \frac{\partial}{\partial \epsilon} Q^{i}_{(m-1)j}{}^{(r)} R^{j(0)}_{(r)i} \,, \quad II = -\sum_{r=1}^{m-2} \frac{m-r-1}{m-1} Q^{i}_{(m-1)j}{}^{(r)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} R^{j(0)}_{(r)i} \,,$$

$$III = \sum_{r=0}^{m-3} R^{j(0)}_{(r)i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} Q^{i}_{(m-2)j}{}^{(r)} \right) \,, \quad IV = -\rho \sum_{r=0}^{m-3} R^{j(0)}_{(r)i} \Delta_{m-1} Q^{i}_{(m-2)j}{}^{(r)} \,,$$

$$V = \sum_{r=1}^{m-3} \frac{\partial}{\partial \epsilon} R^{j(0)}_{(r)i} \frac{d}{dt} Q^{i}_{(m-2)j}{}^{(r)}$$

gesetzt sind, welche wir im Folgenden nacheinander berechnen. (i): Nach (3.9a) lautet

$$I = -\frac{1}{m} R^{i(0)}_{(0)i} \rho - \frac{1}{m(m-1)} \sum_{r=0}^{m-1} (m-r-1)(r+1) \rho_{(r+1)h} R^{h(0)}_{(r)j} x^{(1)j}$$

oder nach (1.10d), (2.21)

$$I = \frac{n}{m} \rho - \frac{1}{m(m-1)} \sum_{v=0}^{m-2} \sum_{r=v}^{m-2} (-1)^{v-1} \frac{(m-r-1).(r+1)!}{(r-v)!} \times \rho_{(r+1)h} x^{(r-v+1)h} K_v \,. \tag{3.12}$$

(ii): Nach (1.8), (3.9b) erhält man gleich

$$II = -\frac{1}{m(m-1)} \sum_{v=0}^{m-3} \sum_{q'=1}^{m-v-2} \sum_{q''=0}^{q'-1} \sum_{r=v+q'}^{m-2} (-1)^{v-1} \times \frac{(m-r-1).(r+1)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!} H^{j}_{(r+1)h} x^{(r-q'-v+1)h} \times \rho_{(m-q'+q'')k} R^{k}_{(q'')j}{}^{(0)} K_v \,. \tag{3.13}$$

(iii): Nach (2.21), (3.9a) hat man

$$III = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{r=0}^{m-3} (r+1)(r+2) \rho_{(r+2)h} R^{h(0)}_{(r)j} x^{(2)j} + \frac{1}{m(m-1)} \sum_{r=0}^{m-3} \sum_{v=0}^{r} (-1)^{v-1} \frac{(r+2)!}{(r-v)!} \frac{d}{dt} \rho_{(r+2)h} x^{(r-v+1)h} K_v \,;$$

das geht ohne weiteres über in

$$(3.14)\quad III = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=0}^{m-3}(r+1)(r+2)\,\rho_{(r+2)h}R^{h(0)}_{(r)j}\,x^{(2)j}$$
$$+\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-3}(-1)^{v-1}(v+2)!\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}P_{v+2}\right)K_v$$
$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{r=v+1}^{m-2}(-1)^{v-1}\frac{(r+1)!}{(r-v-1)!}\rho_{(r+1)h}\,x^{(r-v+1)h}K_v\,.$$

(iv): Da nach (2.24)

$$\Delta_{m-1}Q^{i}_{(m-2)j}{}^{(r)} = \frac{(r+1)(r+2)}{m(m-1)}P_{m-1(r+2)j}\,x^{(1)i} - \frac{2}{m-1}\,\delta^r_0\delta^i_j$$

ist, so ist wegen (2.38)

$$IV = -\frac{2n}{m-1}\rho - \frac{1}{m(m-1)}\rho\sum_{v=0}^{m-3}(-1)^{v-1}(v+2)!\;\Delta_{v+2}P_{m-1}K_v\,.$$

Ersetzt man nach (2.14c)

$$\Delta_{v+2}P_{m-1} = \Delta_{m-1}P_{v+2} - \frac{m(m-3)}{2}\delta^0_v\,,$$

so erhält man

$$(3.15)\quad IV = -\left(\frac{2n}{m-1}+\frac{m-3}{m-1}\right)\rho + \frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-3}(-1)^v(v+2)!$$
$$\times\rho\Delta_{m-1}P_{v+2}K_v\,.$$

(v): Nach (3.9b) ist

$$V = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=1}^{m-3}\sum_{v=0}^{r-1}\sum_{q'=1}^{r-v}\sum_{q''=0}^{q'-1}(-1)^{v-1}\frac{(r+2)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!}$$
$$\times\rho_{(m-q'+q'')k}R^{k(0)}_{(q'')j}\frac{d}{dt}H^j_{(r+2)h}\,x^{(r-q'-v+1)h}K_v$$
$$= \frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\sum_{q''=0}^{q'-1}(-1)^{v-1}\frac{(q'+v+2)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!}$$
$$\times\rho_{(m-q'+q'')k}R^{k(0)}_{(q'')j}\frac{d}{dt}\Delta_{q'+v+2}H^j\cdot K_v$$

$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\sum_{q''=0}^{q'-1}\sum_{r=v+q'}^{m-3}(-1)^{v-1}\frac{(r+2)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!}$$
$$\times H^j_{(r+2)h}\,x^{(r-q'-v+2)h}\,\rho_{(m-q'+q'')k}\,R^{k\ (0)}_{(q'')j}K_v\ .$$

Da wegen (2.9b)

$$\frac{d}{dt}\Delta_{q'+v+2}H^j=-\binom{m}{q'+v+2}x^{(m-q'-v)j}+\frac{d}{dt}P_{q'+v+2}\,.\,x^{(1)j}+P_{q'+v+2}x^{(2)j}\,,$$

$\sum_{q'=1}^{m-4}\sum_{v=0}^{m-v-3}=\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{q'=1}^{m-q'-3}$ und wegen (2.22)

$$\sum_{q'=1}^{m-3}\sum_{q''=0}^{q'-1}\sum_{v=0}^{m-q'-3}(-1)^{v-1}\frac{(q'+v+2)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!}\rho_{(m-q'+q'')k}R^{k\ (0)}_{(q'')j}P_{q'+v+2}K_v$$
$$=\sum_{q'=1}^{m-3}\sum_{q''=0}^{q'-1}(-1)^{m-q'}\frac{(m-q'+q'')!}{q''!}\rho_{(m-q'+q'')k}R^{k\ (0)}_{(q'')j}K_{m-q'-2}$$
$$=\sum_{v=1}^{m-3}\sum_{q''=0}^{m-v-3}(-1)^{v}\frac{(q''+v+2)!}{q''!}\rho_{(q''+v+2)k}R^{k\ (0)}_{(q'')j}K_v$$

sind, gewinnen wir

$$V=-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\sum_{q''=0}^{q'-1}(-1)^{v-1}\frac{(m-q'+q'')!}{q''!\,(m-q'-v-2)!}$$
$$\times\rho_{(m-q'+q'')k}\,R^{k\ (0)}_{(q'')j}\,x^{(m-q'-v)j}K_v$$
$$(3.16)\qquad+\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\sum_{w=0}^{q'-1}(-1)^{v+w}\frac{(q'+v+2)!\,(m-q'+w)!}{m!}$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\epsilon}P_{m-q'+w}\,.\,K_vK_w\frac{d}{dt}P_{q'+v+2}$$
$$+\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=1}^{m-3}\sum_{q''=0}^{m-v-3}(-1)^{v}\frac{(q''+v+2)!}{q''!}\rho_{(q''+v+2)k}R^{k\ (0)}_{(q'')j}x^{(2)j}K_v$$
$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\sum_{q''=0}^{q'-1}\sum_{r=v+q'}^{m-3}(-1)^{v-1}\frac{(r+2)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!}$$
$$\times H^j_{(r+2)h}\,x^{(r-q'-v+2)h}\,\rho_{(m-q'+q'')k}\,R^{k\ (0)}_{(q'')j}K_v\ ;$$

das zweite Glied in der rechten Seite geht durch die Transformation $q'=r-v$ und nach (2.28) über in

$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=1}^{m-3}(-1)^r(r+2)!\frac{\partial}{\partial\epsilon}K_r(\epsilon)\,.\,\frac{d}{dt}P_{r+2}\ .$$

Mit Rücksicht auf $\sum_{v=0}^{m-2}\sum_{r=v}^{m-2}\Phi = \sum_{v=0}^{m-3}\sum_{r=v+1}^{m-2}\Phi + \sum_{v=0}^{m-2}\Phi_{r-v}$ berechnet man leicht aus (3.12, 14)

$VI \equiv$ das zweite Glied von I + das letzte Glied von III

$$= \frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-2}\sum_{r=v}^{m-2}(-1)^v\frac{(m-v-1).(r+1)!}{(r-v)!}\rho_{(r+1)h}\,x^{(r-v+1)h}K_v$$

$$= \frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-2}(-1)^v(m-v-1).(v+1)!\,\Delta_{v+1}\rho.K_v\,,$$

d.h. wegen (3.8b)

$$VI = \frac{m-1}{m}\rho + \frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r(m-r-1).(r+1)! \times \frac{\partial}{\partial\epsilon}P_{r+1}.K_r\,. \tag{3.17}$$

Setzt man im letzten Glied von (3.16) r an Stelle von $r+1$ und berücksichtigt

$$\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{q'=1}^{m-v-2}\sum_{r=q'+v}^{m-2}\Phi = \sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\sum_{r=q'+v+1}^{m-2}\Phi + \sum_{v=0}^{m-3}\sum_{r=v+1}^{m-2}\Phi_{q'=r-v}\,,$$

so erhält man aus (3.13, 16)

II + das letzte Glied von V

$$= \frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{q'=1}^{m-v-2}\sum_{q''=0}^{q'-1}\sum_{r=q'+v}^{m-2}(-1)^v\frac{(m-q'-v-1).(r+1)!\,(m-q'+q'')!}{m!\,q''!\,(r-q'-v)!\cdot} \times H^j_{(r+1)h}\,x^{(r-q'-v+1)h}\,\rho_{(m-q'+q'')k}R^{k}_{(q'')^{(0)}_j}K_v\,;$$

da

$$\sum_{r=q'+v}^{m-2}\frac{(r+1)!}{(r-q'-v)!}H^j_{(r+1)h}x^{(r-q'-v+1)h.} = (q'+v+1)!\,\Delta_{q'+v+1}H^j$$

ist, so ist wegen (2.9b, 38), (3.8b)

II + das letzte Glied von V

$$= -\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{q'=1}^{m-v-2}\sum_{q''=0}^{q'-1}(-1)^v\frac{(m-q'+q'')!}{q''!\,(m-q'-v-2)!} \times \rho_{(m-q'+q'')k}R^{k}_{(q'')^{(0)}_j}x^{(m-q'-v)j}K_v$$

$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{q'=1}^{m-v-2}\sum_{w=0}^{q'-1}(-1)^{v+w}$$
$$\times\frac{(m-q'-v-1).\,(q'+v+1)!\,(m-q'+w)!}{m!}P_{q'+v+1}\frac{\partial}{\partial\epsilon}P_{m-q'+w}K_vK_w.$$

Das zweite Glied in der rechten Seite wandelt sich durch Ersetzung von $q'=r-v$ und wegen (2.28) in

$$\frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=1}^{m-2}(-1)^r(m-r-1).\,(r+1)!\,P_{r+1}\frac{\partial}{\partial\epsilon}K_r$$

um. Da $\sum_{v=0}^{m-3}\sum_{q'=1}^{m-v-2}\Phi=\sum_{v=0}^{m-4}\sum_{q'=1}^{m-v-3}\Phi+\sum_{v=0}^{m-3}\Phi_{q'=m-v-2}$ ist, erhält man somit aus (3.13, 16)

$$\text{(3.18)}\quad II+V=\frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=1}^{m-2}(-1)^r(m-r-1).(r+1)!\,P_{r+1}\frac{\partial}{\partial\epsilon}K_r$$
$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=1}^{m-3}(-1)^r.\,(r+2)!\frac{\partial}{\partial\epsilon}K_r.\,\frac{d}{dt}P_{r+2}$$
$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{q''=0}^{m-3}(q''+1)(q''+2)\,\rho_{(q''+2)k}R^{k}_{(q'')j}{}^{(0)}x^{(2)j}.$$

Aus (3.11, 12, 14, 15, 17, 18) haben wir wegen (3.10) und $K_0=1$

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}S_{(m-1)}=-\frac{(n-1)\,(m+1)}{m(m-1)}\rho$$
$$+\frac{1}{m(m-1)}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r(m-r-1).\,(r+1)!\,P_{r+1}K_r\right]$$
$$-\frac{1}{m(m-1)}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[\sum_{r=0}^{m-3}(-1)^r(r+2)!\,K_r\frac{d}{dt}P_{r+2}\right].$$

Deshalb erreichen wir nach (2.26)

$$\text{(3.19a)}\qquad\frac{\partial}{\partial\epsilon}S^*_{(m-1)}=-\frac{(n-1)\,(m+1)}{m(m-1)}\rho\,.$$

Daraus erhalten wir auch durch Integration die Transformationsformel von $S^*_{(m-1)}$ bei (3.5)

$$\text{(3.19b)}\qquad\tilde{S}^*_{(m-1)}=S^*_{(m-1)}-\frac{(n-1)\,(m+1)}{m(m-1)}\rho\,.$$

Wir sehen also, dass der Skalar $S^*_{(m-1)}$ nicht projektiv invariant ist. Andererseits, wie wir im Folgenden beweisen, sind die anderen Skalare $S^*_{(u)}$ $(u = 2, 3, \ldots, m-2)$ projektiv invariant, d.h. bei (3.5)

$$\tilde{S}^*_{(u)} = S^*_{(u)} \quad (2 \leqq u \leqq m-2)\,. \tag{3.20}$$

Setzt man nämlich

$$\mathfrak{H}^i = H^i + \frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)} S^*_{(m-1)} x^{(1)i}, \tag{3.21}$$

so ist $\mathfrak{H}^i$ projektiv invariant, da nach (3.7b, 19a) oder nach (3.5, 19b)

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}\mathfrak{H}^i = 0 \quad \text{oder} \quad \tilde{\mathfrak{H}}^i = \mathfrak{H}^i$$

ist. Andererseits leitet man nach (2.9b, 31)

$$\Delta_s \mathfrak{H}^i = -\binom{m}{s} x^{(m-s+1)i} + \frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)}\binom{m-2}{s} S^*_{(m-s)} x^{(1)i} \tag{3.22}$$

$$(2 \leqq s \leqq m-2)$$

(analog für $\Delta_s \tilde{\mathfrak{H}}^i$ mit $\tilde{S}^*_{(m-s)}$) her. Aus $\Delta_s \tilde{\mathfrak{H}}^i = \Delta_s \mathfrak{H}^i$ folgt somit $\tilde{S}^*_{(m-s)} = S^*_{(m-s)}$ $(2 \leqq s \leqq m-2)$.

Wir haben nun $m-2$ projektiv invariante Grössen, d.h. die Grösse $\mathfrak{H}^i$ und die Skalare $S^*_{(u)}$ $(u = 2, 3, \ldots, m-2)$. Wir wollen $S^*_{(u)}$ die fundamentalen projektiven Skalare nennen. Im Fall $m = 3$ gibt es keine fundamentalen Skalare, im Fall $m = 4$ einen einzigen fundamentalen Skalar $S^*_{(2)} = 2U^*$ (vgl. Nr. 3; [3], (4.30a)).

14. Das ausgezeichnete System einer projektiven Klasse. Ziehen wir nun ein neues System der "paths" m-ter Ordnung

$$x^{(m)i} + \mathfrak{H}^i \equiv x^{(m)i} + H^i + \frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)} S^*_{(m-1)} x^{(1)i} = 0 \tag{3.23}$$

in Betracht, so ist das System nach voriger Nr. von der Wahl des der projektiven Klasse gehörigen Systems und weiter von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, da $T^i = x^{(m)i} + H^i$ bzw. $S^*_{(m-1)}$ ein Vektor bzw. ein Skalar ist und infolgedessen $\mathfrak{T}^i \equiv x^{(m)i} + \mathfrak{H}^i$ ein

Vektor ist. Vergleichend (3.21) mit (3.5), sieht man, dass dieses System mit dem System (1.1) projektiv verwandt ist. Das besagt, dass aus jeder projektiven Klasse der Systeme der "paths" m-ter Ordnung (mit der Eigenschaft Γ) ein einziges System invarianterweise herausgezogen werden kann, das durch Verschwinden des Skalars $\mathfrak{S}^*_{(m-1)}$ ($S^*_{(m-1)}$ von (3.23)) gekennzeichnet wird:

$$\mathfrak{S}^*_{(m-1)} = 0\,. \tag{3.24}$$

In der Tat, da $\mathfrak{H}^i$ projektiv invariant ist, so ist nach (3.21)

$$\mathfrak{H}^i = \mathfrak{H}^i + \frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)}\mathfrak{S}^*_{(m-1)}x^{(1)i} \quad \text{folglich} \quad \mathfrak{S}^*_{(m-1)} = 0$$

und umgekehrt. Das System heisst *ausgezeichnet*, welches mit H^i und deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung aufgebaut ist. Wir haben somit den

Fundamentalsatz. *In jeder projektiven Klasse der Systeme m-ter Ordnung, von denen durch jedes Kurvenelement $(m-1)$-ter Ordnung eine einzige Integralkurve läuft, gibt es ein ausgezeichnetes System, das durch Verschwinden des affinen Skalars $\mathfrak{S}^*_{(m-1)}$ gekennzeichnet wird. Die Equivalenz zweier projektiven Klasse in zwei Mannigfaltigkeiten reduziert sich auf diejenige ihrer ausgezeichneten Systeme unter Punkttransformationen. Und alle Differentialkomitanten des ausgezeichneten Systems einer projektiven Klasse bilden Differentialkomitaten der Klasse.*

Denn das ausgezeichnete System transformiert sich bei einer Punkttransformation in dasjenige der transformierten projektiven Klasse und alle Differentialkomitanten der projektiven Klasse sollen durch jedes Systems der Klasse ausgedrückt werden.

Nach (2.8′; 9a, b; 42), (3.21) lauten

$$\begin{aligned}
&\partial_t\mathfrak{H}^i = 0\,;\\
&\Delta_1\mathfrak{H}^i = m\mathfrak{H}^i, \quad \Delta_{m-1}\mathfrak{H}^i = -mx^{(2)i},\\
&\Delta_s\mathfrak{H}^i = -\binom{m}{s}x^{(m-s+1)i} + \mathfrak{P}_s x^{(1)i} \quad (2 \leqq s \leqq m-2)\,,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

wobei

$$(3.26)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{m-1} = 0\,, \\ &\mathfrak{P}_s = \frac{m(m-1)}{(n-1)(m+1)}\binom{m-2}{s} S^*_{(m-s)} \quad (2 \leqq s \leqq m-2) \end{aligned}$$

sind. Aus (3.26) sieht man, dass die projektiven Skalare $S^*_{(u)}$ bis auf konstante Faktoren den Skalaren $\mathfrak{P}_u$[1] des ausgezeichneten Systems gleich sind. Weiter lassen sich die gegenseitigen Beziehungen der Skalare $\mathfrak{P}_u$ nach (2.30, 42), (3.26) herleiten:

$$(3.27)\qquad \begin{aligned} &\text{Für } 2 \leqq u \leqq m-2\,, \quad 2 \leqq s \leqq m-1: \\ &\quad \partial_t \mathfrak{P}_u = 0\,, \\ &\quad \Delta_1 \mathfrak{P}_u = (m-u)\mathfrak{P}_u\,, \\ &\quad \Delta_s \mathfrak{P}_u = \frac{(m-u-1).\,(u+s-1)!}{s!\,u!}\mathfrak{P}_{u+s-1} \quad \text{für } u+s \leqq m-1\,, \\ &\qquad = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } u+s = m\,, \\ &\qquad = \frac{(m-u-1).\,m!}{s!\,u!} \qquad\quad \text{für } u+s = m+1\,, \\ &\qquad = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } u+s \geqq m+2\,; \end{aligned}$$

insbesondere sind (2.14a, c, d) notwendig erfüllt, und die projektiven Skalare $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_{m-2}$ *sind nicht konstant*, da $\Delta_{m-u+1}\mathfrak{P}_u$ von Null verschiedene Konstante ist. Es ist bemerkenswert, dass im Fall $m \geqq 5$ $\mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_{m-2}$ aus dem einzigen Skalar $\mathfrak{P}_2$ durch Anwendung der Operatoren $\Delta_2, \ldots, \Delta_{m-3}$ abgeleitet werden:

$$\mathfrak{P}_s = \frac{2}{(m-3)s}\Delta_{s-1}\mathfrak{P}_2 \quad (s = 3, 4, \ldots, m-2)\,.$$

Bemerkung. Man setze voraus, dass das System (H^i) den affinen Parameter trägt: $\partial_t H^i = 0$, $\Delta_1 H^i = mH^i$ $(P_0 = P_1 = 0)$. Wenn für eine Funktion f $\partial_t f = 0$, $\Delta_1 f = kf$ sind, so bestehen für $f_{(r)\lambda}$ und df/dt nach (1.23), (2.27b)

(1) Diese Skalare sind nach dem Fundamentalsatz projektiv.

$$\partial_t f_{(r)i}=0\,,\quad \Delta_1 f_{(r)i}=(k-r)f_{(r)i}\,;\quad \partial_t\Big(\frac{d}{dt}f\Big)=0\,,\quad \Delta_1\Big(\frac{d}{dt}f\Big)=(k+1)\frac{d}{dt}f\,.$$

Wegen dieser Tatsache ergeben sich gleich aus (1.8, 10a), (2.14a, d)

$$\partial_t P_s=0\,,\qquad \partial_t Q^{i(r)}_{(q)j}=0\,,\qquad \partial_t R^{i(r)}_{(q)j}=0\,,$$
$$\Delta_1 P_s=(m-s)P_s\,,\quad \Delta_1 Q^{i(r)}_{(q)j}=(q-r)Q^{i(r)}_{(q)j}\,,\quad \Delta_1 R^{i(r)}_{(q)j}=(q-r)R^{i(r)}_{(q)j}\,;$$

somit haben wir nach (1.20), (2.26), (3.21)

$$\partial_t S^*_{(u)}=0\,,\quad \Delta_1 S^*_{(u)}=uS^*_{(u)}\quad (2\leqq u\leqq m-1)\,,$$
$$\partial_t \mathfrak{H}^i=0\,,\qquad \Delta_1\mathfrak{H}^i=m\mathfrak{H}^i\,.$$

Da $S^*_{(u)}$ $(u=2,3,\ldots,m-2)$ und $\mathfrak{H}^i$ projektiv invariant sind und in jeder projektiven Klasse ein System sich ergibt, das den affinen Parameter trägt, so sind die letzten Beziehungen für jede Klasse gültig; hieraus folgen (2.30, 31) für $\Delta_1 S^*_{(u)}$ $(u=2,3,\ldots,m-1)$ und (2.42) durch Ersetzung von (3.21).

Wie wir gesehen haben, ist die Zuordnung einer projektiven Klasse und eines Differentialgleichungssystems von der Gestalt (2.18) eineindeutig. Die projektive Klasse ist die Gesamtheit solcher Systeme der "paths", deren Integralkurven diesem Differentialgleichnungssystem genügen. Also nach dem Fundamentalsatz wird jedem Differentialgleichungssystem von der Gestalt (2.18) ein System der "paths", das (3.24, 25) erfüllt und in der projektiven Klasse ausgezeichnet ist, von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig eineindeutig zugeordnet. Um aus (2.18) das ausgezeichnete System herzuleiten, darf man von einem beliebigen System der "paths" ausgehen, das (2.16) genügt, z.B.

$$H^n=0\,,\quad H^\alpha=z^{(1)m}f^\alpha-\sum_{s=2}^{m-1}a^m_s(z)\frac{d^sx^\alpha}{dz^s}\,;$$

nach (2.9a, b) $(i=n)$ sind dabei

$$P_1=0\,,\quad P_s=\binom{m}{s}z^{(m-s+1)}/z^{(1)}\quad (2\leqq s\leqq m-1)\,.$$

Somit drückt $\mathfrak{H}^i$ sich nach (1.20), (2.26), (3.21) in den Funktionen f^α und deren partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung aus. Für den Fall $m=3$ vgl. [3], Nr. 17. Wir erreichen den

Satz. *Jedem Differentialgleichungssystem m-ter Ordnung*

$$\frac{d^m x^\alpha}{dz^m} + f^\alpha\left(x^\beta, z; \frac{dx^\beta}{dz}, \ldots, \frac{d^{m-1}x^\beta}{dz^{m-1}}\right) = 0$$

lässt sich ein System der "paths" m-ter Ordnung, das die Eigenschaft Γ besitzt und durch $\mathfrak{S}^*_{(m-1)} = 0$ gekennzeichnet wird, eineindeutig zuordnen. Das Equivalenzproblem (unter Punkttransformationen) und das Problem der Differentialkomitanten reduzieren sich auf diejenigen des zugeordneten Systems der "paths".

15. Die projektiv invarianten Übertragung in der Elementmannigfaltigkeit $K_n^{(m-1)}$. Aus dem ausgezeichneten System können wir nun nach (1.5–12) ein Übertragungsschema, das offenbar projektiv invariant ist, in der Mannigfaltigkeit des Linienelementes $(m-1)$-ter Ordnung $K_n^{(m-1)}$ konstruieren: Wir haben

$$(3.28)\quad \begin{cases} Dv^i = dv^i + \sum_{u=0}^{m-2} \underset{u}{\Pi}{}^i_{jk} v^j dx^{(u)k}, \\ \delta x^{(q)i} = dx^{(q)i} + \sum_{r=0}^{q-1} \mathfrak{Q}^{i(r)}_{(q)j}\, dx^{(r)j} \quad (q = 1, 2, \ldots, m-1), \end{cases}$$

wobei

$$(3.29)\quad \begin{cases} \underset{u}{\Pi}{}^i_{jk} = \dfrac{u+1}{m} \mathfrak{H}^i_{(m-1)j(u+1)k} \quad (0 \leqq u \leqq m-2), \\ \mathfrak{Q}^{i(r)}_{(q)j} = \dfrac{q!\,(m-q+r)!}{m!\,r!} \mathfrak{H}^i_{(m-q+r)j} \quad (0 \leqq r < q \leqq m-1) \end{cases}$$

gesetzt sind. Die kovarianten Ableitungen $\nabla^{(q)}_k v^i$ verschiedener Arten werden durch

$$Dv^i = \sum_{q=0}^{m-1} \nabla^{(q)}_k v^i .\, \delta x^{(q)k} \quad (\delta x^{(0)k} = dx^k)$$

definiert. Setzt man

$$(3.30)\quad \begin{cases} dx^{(q)i} = \delta x^{(q)i} - \sum_{r=0}^{q-1} \mathfrak{R}^{i(r)}_{(q)j} \delta x^{(r)j}, \\ \mathfrak{R}^{i(q-1)}_{(q)j} = \mathfrak{Q}^{i(q-1)}_{(q)j}, \quad \mathfrak{R}^{i(r)}_{(q)j} = \mathfrak{Q}^{i(r)}_{(q)j} - \sum_{s=r+1}^{q-1} \mathfrak{R}^{i(s)}_{(q)k} \mathfrak{Q}^{k(r)}_{(s)j}, \end{cases}$$

so gewinnen wir die Ableitungen in der Gestalt

$$(3.31)\quad \begin{cases} \nabla^{(q)}_k v^i = v^i_{(q)k} - \sum_{s=q+1}^{m-1} \mathfrak{R}^{l(q)}_{(s)k} v^i_{(s)l} + \underset{q}{\Pi}{}^{*i}_{jk} v^j \quad (0 \leqq q \leqq m-2), \\ \nabla^{(m-1)}_k v^i = v^i_{(m-1)k}, \end{cases}$$

wo

$$(3.32)\qquad \underset{q}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = \underset{q}{\Pi}{}^{i}_{jk} - \sum_{s=q+1}^{m-2} \mathfrak{R}^{l(q)}_{(s)k} \underset{s}{\Pi}{}^{i}_{jl} .$$

Der Vektor $\mathfrak{R}^i$ verschwindet nach $\mathfrak{P}_1 = 0$. Man kann in üblicher Weise die Krümmungs- und Torsionsgrössen unserer Übertragung berechnen (vgl. [7], (2.31, 32)).

Letztens bemerken wir besonders, dass unsere Übertragung *nicht* in der Mannigfaltigkeit des *Kurvenelementes* $(m-1)$-ter Ordnung definiert ist, aber in der Mannigfaltigkeit des *Linienelementes* $(m-1)$-ter Ordnung.

§ 4. ANWENDUNG AUF DIE THEORIE DES KAWAGUCHISCHEN RAUMES.

16. Vorbemerkung. Wenn in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Bogenlänge jeder parametrisierten Kurve oder die allgemeine Massbestimmung durch ein Integral

$$s = \int F(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})dt$$

gegeben wird, so nennen wir nach H. V. CRAIG und J. L. SYNGE diese Mannigfaltigkeit den KAWAGUCHIschen Raum von der Dimension n und der Ordnung m. Dafür, dass die Bogenlänge s bei jeder Parametertransformation invariant bleibt d.h. von Parametrisierung auf der Kurve unabhängig ist, ist es notwendig und hinreichend, dass F nicht von t abhängt:

$$(4.1)\qquad s = \int F(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})dt$$

und dass die bekannten Beziehungen

$$(4.2)\qquad \Delta_1 F = F, \quad \Delta_s F = 0 \quad \text{für} \quad 2 \leqq s \leqq m$$

gelten[1]. Als Beispiel dienen die Bogenlängen von allen Geometrien im KLEINschen Sinne. Von vielen Untersuchungen[2] über den KAWA-

(1) Dafür, dass eine Funktion T vom Linienelement N-ter Ordnung sich bei $\bar{t} = \bar{t}(t)$ in der Weise $T = \bar{t}'^k \bar{T}$ transformiert, wo man $T(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)})$ mit $\bar{T}$ bezeichnet, sollen

$$(4.3)\qquad \Delta_1 T = kT, \quad \Delta_s T = 0 \ (2 \leqq s \leqq N)$$

bestehen (vgl. [2], I).

(2) Nach A. KAWAGUCHI, J. L. SYNGE, H. V. CRAIG, E. CARTAN, S. HOKARI, T. OHKUBO und dem Verfasser.

GUCHIschen Raum sind diejenigen der Herren Prof. E. CARTAN ([1]) und A. KAWAGUCHI wichtig. In [5, 6] war es Herrn Prof. A. KAWAGUCHI gelungen, aus (4.1) in der Mannigfaltigkeit des Kurvenelementes $(2m-1)$-ter Ordnung ein Übertragungsschema herzuleiten und dadurch zur Theorie des KAWAGUCHIschen Raumes eine Grundlage anzugeben. Wir möchten hier mittels unserer projektiven Theorie in $K_n^{(m)}$ ein neues Übertragungsschema einführen.

Im KAWAGUCHIschen Raum sind schon nach den Untersuchungen von H. V. CRAIG, J. L. SYNGE usw. verschiedene kovarianten Vektoren von der folgenden Gestalt bekannt:

$$T_i \equiv f_{ij}\, x^{(N)j} + h_i \,, \tag{4.4}$$

wo f_{ij}, h_i vom Linienelement höchstens $(N-1)$-ter Ordnung abhängig sind. Wir wollen einen solchen Vektor T_i in Betracht ziehen; bei einer Koordinatentransformation $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$ und deren Erweiterung

$$x^\lambda = x^\lambda(x^i)\,, \quad x^{(r)\lambda} = x^{(r)\lambda}(x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(r)i}) \quad (r > 1) \tag{4.5}$$

transformiert sich T_i in der Weise

$$T_i = A_i^\lambda T_\lambda \quad (A_i^\lambda = \partial x^\lambda / \partial x^i)\,.$$

Unter Berücksichtigung der nach H. V. CRAIG ([2], I) bekannten Formel

$$A_{(s)i}^{(r)\lambda} \equiv \partial x^{(r)\lambda} / \partial x^{(s)i}, \quad A_{(s)i}^{(r)\lambda} = \binom{r}{s} A_i^{(r-s)\lambda} = \binom{r}{s} (A_i^\lambda)^{(r-s)}\,, \tag{4.6}$$

ergibt sich daraus durch Differentiation nach $x^{(N)j}$

$$f_{ij} = A_i^\lambda A_j^\mu f_{\lambda\mu}\,;$$

f_{ij} ist ein kovarianter Tensor zweiter Stufe.

Wir setzen nun voraus, dass T_i sich bei jeder Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ in $T_i = \bar{t}'^k \bar{T}_i$ transformiert; nach (4.3) gelten

$$\Delta_1 T_i = k T_i\,, \quad \Delta_s T_i = 0 \quad (2 \leqq s \leqq N)\,. \tag{4.7}$$

Ersetzt man (4.4), so ergeben sich aus den Koeffizienten von $x^{(N)j}$

$$\Delta_1 f_{ij} = (k-N) f_{ij}\,, \quad \Delta_s f_{ij} = 0 \quad (2 \leqq s \leqq N-1)\,, \tag{4.8a}$$

$$f_{ij} x^{(1)j} = 0\,. \tag{4.8b}$$

Daraus sieht man, dass bei $\bar{t} = \bar{t}(t)$ $f_{ij} = \bar{t}'^{k-N}\bar{f}_{ij}$ ist und dass der Rang der Matrix (f_{ij}) höchstens $n-1$ ist. Im Folgenden setzen wir weiter voraus, dass die Ränge von zwei Matrizen

$$(4.9a) \qquad (f_{ij}), \quad (f_{ij}\,h_i) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

beide $n-1$ sind. Wenn der Tensor f_{ij} symmetrisch ist $(f_{ij} = f_{ji})$, so wird diese Voraussetzung ausgedrückt, wie folgt: Der Rang von (f_{ij}) ist $n-1$ und es besteht

$$(4.9b) \qquad h_i x^{(1)i} = 0 \quad \text{d.h.} \quad T_i x^{(1)i} = 0\,.$$

Mittels T_i betrachten wir das System der Differentialgleichungen

$$(4.10) \qquad T_i \equiv f_{ij}\,x^{(N)j} + h_i = 0\,,$$

welches wegen $|f_{ij}| = 0$ nicht ein System der "paths" ist, aber, wie wir im Folgenden klarmachen, sich mit einer projektiven Klasse der Systeme der "paths" eng bezieht. Sieht man (4.10) als die simultanen Gleichungen mit den Unbekannten $x^{(N)j}$ an, so besitzt das System wegen der Voraussetzung betreffs der Matrizen (4.9a) eine Lösung $x^{(N)i} = -H^i$, wo H^i von $x^j, x^{(1)j}, \ldots, x^{(N-1)j}$ abhängt. Das System

$$(4.11) \qquad x^{(N)i} + H^i = 0$$

ist nichts anderes als ein System der "paths" N-ter Ordnung, und jede seiner Lösungen ist auch die des Systems (4.10). T_i wird mittels H^i in der Form

$$T_i = f_{ij}\,(x^{(N)j} + H^j)$$

geschrieben. Ersetzt man das in (4.7), so ergeben sich gleich

$$f_{ij}(\Delta_1 H^j - N H^j) = 0\,, \quad f_{ij}\left(\Delta_s H^j + \binom{N}{s} x^{(N-s+1)j}\right) = 0 \quad (2 \leqq s \leqq N-1)\,.$$

Da der Rang von (f_{ij}) $n-1$ ist, so ist v^i, das $f_{ij}v^j = 0$ genügt, nach (4.8b) zu $x^{(1)i}$ proportional. Somit haben wir

$$\Delta_1 H^i - N H^i = P_1 x^{(1)i}\,, \quad \Delta_s H^i + \binom{N}{s} x^{(N-s+1)i} = P_s x^{(1)i} \quad (2 \leqq s \leqq N-1)\,,$$

wo $P_1, P_2, \ldots, P_{N-1}$ gewisse Funktionen von $x^j, x^{(1)j}, \ldots, x^{(N-1)j}$ sind. Das System der "paths" (4.11) hat daher nach (2.9a, b) die Eigenschaft Γ.

$x^i = x^i(t)$ sei eine Lösung von (4.10). Aus $T_i = f_{ij}(x^{(N)j} + H^j) = 0$ hat man gleich $x^{(N)i} + H^i = -\rho x^{(1)i}$ längs der Lösungskurve, wo ρ eine Funktion von t. Also gehört die Lösung $x^i = x^i(t)$ einem System der "paths"

$$x^{(N)i} + H^i + \rho(t)x^{(1)i} = 0$$

an, das wegen der Eigenschaft Γ nach (3.5) mit dem System (4.11) projektiv verwandt ist. Wenn ein System $(\tilde{H}^i)$ umgekehrt mit (4.11) projektiv verwandt ist, d.h. $(\tilde{H}^i)$ von der Gestalt (3.5) ist, so ist jede Lösung des Systems $x^{(N)i} + \tilde{H}^i = 0$ auch eine Lösung von (4.10), da wegen (4.8b) $x^{(N)i} = -\tilde{H}^i$ (4.10) erfüllt. Somit erkennen wir, dass jede Lösung des Differentialgleichungssystems (4.10) eine Lösung eines geeigneten Systems der "paths" ist, welches einer bestimmten projektiven Klasse der Systeme mit der Eigenschaft Γ angehört, und umgekehrt; oder dass durch (4.10) eine projektive Klasse der Systeme der "paths" gegeben wird. Man kann auch ohne Schwierigkeit unmittelbar aus (4.10) das assoziierte System der Klasse erreichen.

17. Herleitung eines Übertragungsschemas in $K_n^{(m)}$. Da F in (4.1) ein Skalar ist, ergeben sich nach (4.5, 6) durch Differentiation

$$F_{(m)i} = A_i^\lambda F_{(m)\lambda}\,, \quad F_{(m-1)i} = A_i^\lambda F_{(m-1)\lambda} + mA_i^{(1)\lambda} F_{(m)\lambda}\,,$$

somit auch

$$m\frac{d}{dt}F_{(m)i} - F_{(m-1)i} = A_i^\lambda\left(m\frac{d}{dt}F_{(m)\lambda} - F_{(m-1)\lambda}\right),$$

wo man unter $\frac{d}{dt}$ für eine Funktion vom Linienelement N-ter Ordnung $df/dt = \sum_{r=0}^{N} f_{(r)j}x^{(r+1)j}$ versteht. $F_{(m)i}$ und $m\frac{d}{dt}F_{(m)i} - F_{(m-1)i}$ sind je ein kovarianter Vektor. Sie sind bis auf den Faktor $(-1)^m$ nichts anderes als der m- und $(m-1)$-te der nach J. L. SYNGE bekannten Vektoren (vgl. [10]):

$$(4.12) \qquad \overset{s}{E}_i = \sum_{r=s}^{m}(-1)^r\binom{r}{s}(F_{(r)i})^{(r-s)} \quad (0 \leqq s \leqq m)\,.$$

$\overset{0}{E}_i$ ist der wohlbekannte EULERsche Vektor.

Wie man leicht sieht, besteht

$$\Delta_s\frac{d}{dt}f = \frac{d}{dt}\Delta_s f + \Delta_{s-1}f \quad (s \geqq 2)\,.$$

Berücksichtigt man dies und (1.23), (4.2), erhält man

$$\Delta_s \frac{d}{dt} F = \delta_s^2 F\,, \quad \Delta_s F_{(m)i} = 0$$

und

$$\Delta_s\left(m \frac{d}{dt} F_{(m)i} - F_{(m-1)i}\right) = -\frac{m(m-1)}{2} \delta_s^2 F_{(m)i}\,.$$

Setzen wir daher

$$T_i = \frac{d}{dt} F_{(m)i} - \frac{1}{m} F_{(m-1)i} + \frac{1}{2}(m-1) F^{-1} F_{(m)i} \frac{d}{dt} F\,, \tag{4.13}$$

so ist $\Delta_s T_i = 0$. Da

$$\Delta_1 \frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt} \Delta_1 f + \frac{d}{dt} f$$

ist, so hat man leicht nach (1.23), (4.2) $\Delta_1 T_i = (2-m) T_i$. Also bei einer Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ transformiert sich T_i in der Weise $T_i = \bar{t}'^{2-m} \bar{T}_i$. T_i ist von der Gestalt (4.4), wo $N = m+1$ ist und

$$\begin{cases} f_{ij} = F_{(m)i(m)j} + \dfrac{1}{2}(m-1) F^{-1} F_{(m)i} F_{(m)j}\,, \\ h_i = \sum\limits_{r=0}^{m-1} F_{(m)i(r)j} x^{(r+1)j} - \dfrac{1}{m} F_{(m-1)i} + \dfrac{1}{2}(m-1) F^{-1} F_{(m)i} \sum\limits_{r=0}^{m-1} F_{(r)j} x^{(r+1)j}\,. \end{cases} \tag{4.14}$$

Andererseits, da nach (4.2) $\Delta_m F = F_{(m)i} x^{(1)i} = 0$ ist, so ist

$$T_i x^{(1)i} = -\frac{1}{m} \Delta_{m-1} F = \begin{cases} -\dfrac{1}{m} F & \text{für} \quad m = 2\,, \\ 0 & \text{für} \quad m \geqq 3\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

Setzt man letztens den Rang der symmetrischen Matrix (f_{ij}) gleich $n-1$ voraus, so genügt T_i (4.13) für $m \geqq 3$ nach (4.9b, 15) allen Voraussetzungen in voriger Nummer, wo $N = m+1$, $k = 2-m$ sind.

Betrachten wir nun das System der Differentialgleichungen $T_i = 0$, so lässt sich nach der Überlegung in Nr. 16 eine projektive Klasse der Systeme $(m+1)$-ter Ordnung (mit der Eigenschaft Γ) geben. Aus dieser Klasse können wir nach dem Fundamentalsatz in § 3 von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig das ausgezeichnete System herausziehen:

$$x^{(m+1)i}+\mathfrak{H}^i=0\,, \tag{4.16}$$

das mit F und dessen Ableitungen bis zur vierten Ordnung aufgebaut ist. $x^{(m+1)i}=-\mathfrak{H}^i$ genügt ohne Zweifel $T_i=0$. Somit erkennen wir, dass $T_i=0$ nicht ein System der "paths" ist, aber wir ein solches (4.16) als das ausgezeichnete System derjenigen projektiven Klasse gewinnen können, welches durch $T_i=0$ definiert ist. Das System (4.16) ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig dem KAWAGUCHIschen Raum adjungiert. Folglich wird nach Nr. 15 eine Übertragung in $K_n^{(m)}$ hergeleitet, welche von F und dessen Ableitungen bis zur sechsten Ordnung abhängt.

Fundamentalsatz. *Im* KAWAGUCHI*schen Raum von der Ordnung* $m(\geqq 3)$ *wird durch*

$$T_i\equiv\frac{d}{dt}F_{(m)i}-\frac{1}{m}F_{(m-1)i}+\frac{1}{2}(m-1)F^{-1}F_{(m)i}\frac{d}{dt}F=0$$

eine projektive Klasse der Systeme der "paths" $(m+1)$*-ter Ordnung gegeben und aus ihrem ausgezeichneten System wird ein Übertragungsschema in der Mannigfaltigkeit* $K_n^{(m)}$ *definiert, unter Zugrundelegung von welchem das Equivalenzproblem des* KAWAGUCHI*schen Raumes vollständig diskutiert werden kann.*

Bemerkung 1. Nach Nr. 15 kann man unter Zugrundelegung irgendeines Koordinatensystems aus einem speziellen System (4.11) ($N=m+1$) das ausgezeichnete System berechnen. Um eine Lösung von den Gleichungen

$$f_{ij}H^j=h_i$$

zu gewinnen, bezeichnen wir mit $D^{i,k}$ bzw. $D^{ij,kl}$ diejenige Unterdeterminante $(n-1)$- bzw. $(n-2)$-ter Ordnung, welche aus $|f_{ij}|$ durch Streichung der i-ten Zeile bzw. der i- und j-ten Zeilen und der k-ten Spalte bzw. der k- und l-ten Spalten entsteht, und setzen

$$f^{i,k}=(-1)^{i+k}D^{i,k}\,,\quad f^{ij,kl}=(-1)^{i+j+k+l}\ \mathrm{sign}\ \{(i-j)(k-l)\}\,D^{ij,kl}\,.$$

Da man leicht

$$f_{pl}(B_kf^{ij,kl}h_j)=h_pB_kf^{i,k}\quad(p\neq i)$$

beweisen kann, wo $f^{ij,kl}$ für $i=j$ bzw. $k=l$ verschwindet und B_k beliebige Konstante ist und da wegen der Voraussetzung betreffs des Rangs von (f_{ij}) die binäre Form

$$A_iB_kf^{i,k}=\sum_{i,k}(-1)^{i+k}D^{i,k}A_iB_k$$

nicht identisch verschwindet, haben wir eine spezielle Lösung

$$H_l = \frac{A_i B_k f^{ij,kl} h_j}{A_i B_k f^{i,k}}, \tag{4.17}$$

wo A_i, B_k beliebige Konstanten sind.

2. Nimmt man im Fall $m = 2$ an Stelle von T_i (4.13) den EULERschen Vektor aus (4.12)

$$\overset{0}{E}_i = F_{(0)i} - \frac{d}{dt} F_{(1)i} + \frac{d^2}{dt^2} F_{(2)i}$$

auf, so kann man leicht ersehen, dass durch $\overset{0}{E}_i = 0$ — die EULER-LAGRANGEschen Gleichungen der Variationsrechung $\delta \int ds = 0$ — eine projektive Klasse der Systeme der "paths" vierter Ordnung gegeben wird. In ähnlicher Weise wie in T_i gewinnen wir sogleich eine Übertragung in $K_n^{(3)}$.

3. Es scheint uns möglich, dass wir in speziellen KAWAGUCHIschen Räumen andere Anwendungen unserer Theorie finden. Als ein Beispiel betrachten wir die spezielle Massbestimmung

$$s = \int (A_i x^{(m)i} + B)^{\frac{2}{m+1}} dt \quad (m \geqq 3), \tag{4.18}$$

wo A_i, B Funktionen vom Linienelement $(m-1)$-ter Ordnung sind. Setzt man $G = A_i x^{(m)i} + B$, so bestehen nach (4.2)

$$\Delta_1 G = \frac{m+1}{2} G, \quad \Delta_s G = 0 \quad (2 \leqq s \leqq m), \tag{4.19}$$

da bei $\bar{t} = \bar{t}(t)$ $G = (\bar{t}')^{\frac{m+1}{2}} \bar{G}$ ist. Da G ein Skalar ist, so ist

$$\begin{aligned} U_i \equiv\ & m \frac{d}{dt} G_{(m)i} - G_{(m-1)i} \\ =\ & (m A_{i(m-1)j} - A_{j(m-1)i}) x^{(m)j} + m \sum_{r=0}^{m-2} A_{i(r)j} x^{(r+1)j} - B_{(m-1)i} \end{aligned} \tag{4.20}$$

ein kovarianter Vektor (vgl. T_i (4.13)). Auf Grund von (4.19) erzeugt man leicht

$$\Delta_1 U_i = -\frac{m-3}{2} U_i, \quad \Delta_s U_i = 0 \quad (2 \leqq s)$$

und

$$U_i x^{(1)i} = 0 .$$

Somit wird durch $U_i = 0$ wieder eine projektive Klasse der Systeme der "paths" m-ter Ordnung angegeben, womit wir ein Übertragungsschema in $K_n^{(m-1)}$ definieren können, unter der Voraussetzung, dass der Rang von der Matrix $(mA_{i(m-1)j} - A_{j(m-1)i})$ $n-1$ ist.

Zum Schluss möchte ich Herrn Prof. A. KAWAGUCHI für seine Anregungen und sein Interesse, das es meiner Arbeit gegönnt hat, herzlich danken.

Literaturverzeichnis.

[1] E. CARTAN, La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')dx$, Journ. de Math., (9) 15 (1936), S. 42-61.

[2] H. V. CRAIG, On a generalized tangent vector, Amer. Journ. of Math., 57 (1935), S. 457-462; II, 58 (1936), S. 833-846.

[3] H. HOMBU, Die projektive Theorie eines Systems der "paths" höherer Ordnung, I, Jap. Journ. of Math., 15 (1938), S. 139-196.

[4] A. KAWAGUCHI, Some intrinsic derivations in a generalized space, Proc. of Imp. Acad., Tokyo, 12 (1936), S. 149 151.

[5] ———, Theory of connections in a KAWAGUCHI space of order 2, ibid., 13 (1937), S. 183-186.

[6] ———, Theory of connections in a KAWAGUCHI space of higher order, ibid., S. 237-240.

[7] A. KAWAGUCHI und H. HOMBU, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journ. of Fac. of Sci., Hokk. Imp. Univ., Ser. I, 6 (1937), S. 21-62.

[8] D. D. KOSAMBI, An affine calculus of variations, Proc. of Ind. Acad., 2 (1935), S. 333-335.

[9] ———, Path-spaces of higher order, Quart. Journ. of Math., (Oxford) 7 (1936), S. 97-104.

[10] J. L. SYNGE, Some intrinsic and derived vectors in a KAWAGUCHI space, Amer. Journ. of Math., 57 (1935), S. 679-691.