HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	LE PROBLÈME DE SOUSLIN ET LES ESPACES ABSTRAITS
Author(s)	Inagaki, Takeshi
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 7(3-4), 191-201
Issue Date	1939
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55939
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_07_N3-4_191-201.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

LE PROBLÈME DE SOUSLIN ET LES ESPACES ABSTRAITS

Par

Takeshi INAGAKI

Introduction. SOUSLIN et M. SIERPIŃSKI ont posés les problèmes suivants (Fund. Math., t. 1 (1920), p. 223–224) :

Un ensemble ordonné (linéairement), sans sauts et sans lacunes, possèdant cette propriété que tout ensemble d'intervalles (contenant plus d'un point) n'impiétant pas les uns sur les autres est toujours au plus dénombrable, est-il nécessairement un continu linéaire (ordinaire)? (Problème de SOUSLIN).

Peut-on démontrer sans l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) *qu'une somme de* $\aleph_1$*-ensembles de première catégorie n'est pas nécessairement de première catégorie?* (Problème de M. SIERPIŃSKI).

Marglé des efforts d'un grand nombre de mathématiciens, jusqu'à présent ces deux problèmes n'ont encore aucune solution. M. KUREPA a étudié profondément le problème de SOUSLIN et a donné un grand nombre des résultats importants.(1)

Or, le problème de M. SIERPIŃSKI s'agit des ensembles des nombres réels. Cependent, nous ne connaissons aucun espace abstrait vérifiant affirmativement le problème de M. SIERPIŃSKI—un tel espace abstrait sera dit satisfait à la condition de SIERPIŃSKI. Il sera donc intéressant à chercher un espace abstrait vérifiant la condition de SIERPIŃSKI.

Au premier abord, il semble que ces deux problèmes sont indépendents l'un l'autre, mais, il existe réellement une relation suivante :

Si le problème de SOUSLIN a la réponse négative, alors il y a un espace abstrait vérifiant la condition de SIERPIŃSKI affirmativement.

Dans le § 2 de cette Note, nous allons étudier d'abord quelques propriétés des espaces (v). Dans le § 3, nous montrerons une relation entre le problème de SOUSLIN et celui de M. SIERPIŃSKI.

---

(1) G. KUREPA, Ensembles ordonnés et ramifiés. Publ. Math. Belgrade, 4 (1935), p. 1–138. G. KUREPA, Le problème de SOUSLIN et les espaces abstraits. C. R. t. 204 (1937), p. 325–327.

§1. **Généralités.** Un ensemble M est dit ordonné par rapport à la relation R, si, pour toute couple d'éléments x et y distincts et appartenant à M, les deux relations suivantes soient remplies :

(1) Asymétrie : Il existe une et une seule des deux relations xRy ou yRx.

(2) Transitivité : Si xRy et si yRz, alors xRz.

Pour abréger, désignons dans ce qui suit par $x \prec y$ la relation xRy.

Nous adoptons la terminologie suivante : Si $x \prec y$, nous dirons que x précède y ou y suit x. Si x précède y et y précède z, alors nous dirons que y est entre x et z.

Soient M un ensemble ordonné et x un élément de M. S'il n'existe aucun élément de M qui précède (ou suit) x, l'élément x est dit le premier (ou le dernier) élément de M.

Soient M un ensemble ordonné par rapport à la relation $\prec$ et M^* un ensemble ordonné par rapport à la relation $\overset{*}{\prec}$. Nous dirons que les ensembles M et M^* sont sembrables l'un l'autre, lorsqu'il existe une correspondance biunivoque entre tout élément de M et celuieux de M^*, telle que, pour deux éléments m_1, m_2 quelconques de M et pour les deux éléments m_1^*, m_2^* correspondant à m_1, m_2 respectivement, de $m_1 \prec m_2$ résulte toujours $m_1^* \overset{*}{\prec} m_2^*$.

Considérons deux ensembles non vides A et Z tels qu'ils possèdent les propriétés suivantes :

1) Si l'ensemble A contient un élément x_0 de M, il contient aussi tout élément x de M tel que $x \prec x_0$.

2) Si l'ensemble Z contient un élément y_0 de M, il contient aussi tout élément y de M tel que $y_0 \prec y$.

3) Soient x et y deux éléments appartenants à l'ensembles A et Z respectivement. Alors, il existe toujours la relation $x \prec y$.

4) Chaque élément de M appartient à l'un des deux ensembles A et Z.

Dans cette condition, nous dirons que les deux ensembles A et Z constituent une coupe de M. Pour une coupe de M, $M = A + Z$, un et un seul des trois cas suivants est possible :

1° L'ensemble A possède le dernier élément et l'ensemble Z possède le premier.

2° L'ensemble A possède le dernier élément et l'ensemble Z ne possède pas le premier ou bien l'ensemble A ne possède pas le dernier et l'ensemble Z possède le premier.

3° L'ensemble A ne possède pas le dernier et l'ensemble Z ne possède pas le premier.

Cela posé, nous dirons que la coupe $A+Z$ de M est un *saut*, un *continu* une *lacune* suivant que le premier, le deuxième ou le troisième cas a lieu.

Soient x, y deux éléments appartenants à un ensemble ordonné M tels que $x \prec y$. Alors nous appelons *un intervalle* l'ensemble de tout élément de M tel qu'il est entre x et y.

Si l'on prend tout intervalle contenant un élément x comme un voisinage de x, l'ensemble ordonné M peut être considéré comme un espace (v) introduit par M. FRÉCHET. De plus, comme on sait, l'espace ainsi défini est réellement un espace régulier.

Soit M un sous-ensemble d'un espace (v). Lorsque nous considérerons l'ensemble M comme un espace (v), nous définirons un voisinage d'un élément x de M comme la partie commune à M et au voisinage de x dans l'espace (v). Ainsi nous pouvons considérer l'ensemble M comme un espace (v), et dans ce cas nous appelerons *sous-espace* de l'espace (v) l'espace M ainsi défini.

SOUSLIN a considéré un ensemble ordonné (S) possédant les quatre propriétés suivantes :

(α) *Dans l'ensemble* (S) *il n'y a qu'au plus une infinité dénombrable des intervalles n'impiétant pas l'uns sur les autres.*
(β) *L'ensemble* (S) *ne possède aucun saut.*
(γ) *L'ensemble* (S) *ne possède aucune lacune.*
(δ) *L'ensemble* (S) *possède ni le premier élément ni le dernier élément.*

Dans ce qui suit, nous considérons l'ensemble (S) comme un espace (v) et l'appelons l'espace de SOUSLIN.

§ 2. **Quelques théorèmes dans les espaces abstraits.** Dans ce §, nous allons chercher quelques propriétés de l'espace (v). Tout d'abord, nous citons un théorème bien connu sur l'espace (v).

Théorème 1. *Dans l'espace* (v) *les quatre propriétés suivantes des ensembles sont équivalentes :*

(A) *Soit* M *un sous-ensemble quelconque dans l'espace* (v). *Une famille* $\{V\}$ *d'ensembles couvrant* M *telle que, pour un élément* x

quelconque de M, il existe un ensemble V contenant l'élément x à son intérieur, contient une sous-famille $\{V\}^*$ couvrant M telle que la puissance de $\{V\}^*$ est au plus dénombrable.

(B) *Tout sous-ensemble non dénombrable de l'espace (v) contient au moins un élément de condensation au sens de M. LINDELÖF.*

(C) *Tout ensemble clairsème dans l'espace (v) est au plus dénombrable.*

(D) *Chaque famille $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ bien ordonnée d'ensembles monotones décroissants telle que F_α ne sont pas contenus dans la fermeture de $F_{\alpha+1}$, est au plus dénombrable.*

Ensuite nous allons démontrer que l'équivalence suivante, que M. SIERPIŃSKI a démontré dans l'espace $(\mathfrak{L})$[1], est réellement vraie dans l'espace (v).

Théorème 2. *Dans l'espace (v) les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(E) *Tout sous-espace de l'espace (v) est séparable.*

(F) *Chaque famille $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ bien ordonnée d'ensembles monotones croissants telle que la fermeture de F_α ne contient pas l'ensemble $F_{\alpha+1}$, est au plus dénombrable.*

Démonstration. (E) $\rightarrow$ (F). Considérons l'espace (v) jouissant de la propriété (E) et soit $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ une famille bien ordonnée d'ensembles monotones croissants telle que la fermeture de F_α ne contient pas $F_{\alpha+1}$ tout entier. On peut alors démontrer que la famille $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ est au plus dénombrable. Par impossible, supposons que la famille $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ n'est pas dénombrable. Alors, d'après l'hypothèse admise, pour tout nombre ordinal α de seconde classe ou fini, l'ensemble $F_{\alpha+1}$ contient au moins un élément p_α tel que $p_\alpha \in \overline{F}_\alpha$. Désignons par M l'ensemble de tous les éléments p_α. Or, je dis que l'ensemble M comme un sous-espace n'est pas séparable. En effet, supposons que M est séparable et soit N un sous-ensemble dénombrable de M tel qu'il soit dense dans M. Comme N est dénombrable, tout élément de N peut être rangé comme il suit :

$$p_{\alpha_1}, \quad p_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad p_{\alpha_n}, \quad \ldots (\alpha_n < \Omega).$$

Tout α_n est un nombre ordinal de seconde classe (ou fini), et par suite il existe un nombre ordinal α de seconde classe supérieur à

(1) W. SIERPIŃSKI, Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits. Fund. Math., t. 2 (1921), p. 179-180.

tout a_n. Selons les propriétés de F_β et de p_β, il est évident que $N \leqq F_\alpha$. Comme N est dense dans M, nous en concluons à plus forte raisons que F_α est dense dans M, c.-à-d. $M \leqq \overline{F}_\alpha$. Ce qui contient cependent une contradiction, car il y a dans l'ensemble M un élément p_α tel qu'il n'appartient pas à la fermeture de F_α.

(F) → (E). Supposons que toute famille $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ bien ordonnée d'ensembles monotones croissants telle que la fermeture de F_α ne contient pas l'ensemble suivant $F_{\alpha+1}$ est au plus dénombrable, et soit M un sous-ensemble non dénombrable de l'espace considéré. Nous allons démontrer que M est séparable. En effet, par contre supposons que M n'est pas séparable. Soit

$$(1) \qquad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_\alpha \ldots,$$

une suite bien ordonnée formée de tout élément de M. Cette suite sera un ensemble du type $\geqq \Omega$, puisque d'après l'hypothèse posée, la puissance de M est non dénombrable. Nous définirons une suite transfinie d'élément du type Ω:

$$(2) \qquad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_\alpha, \quad \ldots \mid \Omega$$

d'élément de M comme il suit: Posons $q_1 = p_1$. Soit α un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments q_ξ pour tout ξ inférieur à α. Posons $F_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} q_\xi$. F_α étant au plus dénombrable et M n'étant pas séparable, F_α n'est pas dense dans M. Il existe donc des éléments dans la suite (1) qui n'appartient pas à la fermeture de F_α. Nous définirons q_α comme le premier d'entre eux. La suite (2) est ainsi défini par induction transfini. La famille $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ est évidemment monotone croissante, et d'après la définition de F_α, la fermeture de F_α ne contient pas l'ensemble suivant $F_{\alpha+1}$. Ce qui est contraire à la propriété (E) de l'espace (v) considéré. C. Q. F. D.

Pour simplicité, dans ce qui suit, je dis que l'espace (v) jouit de la propriété (G*), lorsque tout sous-espace M de l'espace considéré possède cette propriété que chaque famille d'ensembles disjoints dont chaque ensemble contient au moins un élément intérieur par rapport au sous-espace M est au plus dénombrable.

Cela étant posé, nous allons démontrer le

Théorème 3. *Dans l'espace* (v) *les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(G) *L'espace possède la propriété* (G*).

(H) *Tout ensemble isolé dans tout sous-espace de l'espace est au plus dénombrable.*

Démonstration. (G) → (H). Considérons l'espace (v) jouissant de la propriété (G) et soit M un sous-espace. Soit N un ensemble isolé dans l'espace M. Alors, par l'hypothèse, comme N est un ensemble isolé dans M, pour chaque élément p de N, il existe un voisinage $V_M(p)$ dans l'espace M tel que $p = V_M(p) \cdot M$. Par conséquent, chaque élément de N peut être considéré comme un ensemble contenant un élément intérieur dans N. D'après l'hypothèse que l'espace (v) jouit de la propriéte (G), le sous-espace formé de tout élément de N est au plus dénombrable. Il en résulte que tout ensemble isolé dans tout sous-espace est au plus dénombrable.

(H) → (G). Supposons que l'espace considéré possède la propriété (H) et qu'il ne possède pas la propriété (G). Il existe alors un sous-espace M dans l'espace (v) tel qu'il existe dans M une famille $\{V_M\}$ non dénombrable d'ensembles disjoints et dont chaque ensemble contient au moins un élément intérieur dans M. Extrayons maintenant un et un seul élément intérieur de chaque ensemble V_M. Désignons par N l'ensemble de tous tels éléments. Soit p un élément quelconque appartenant à N. Selon la définition de N, il existe un ensemble $V_M(p)$ contenant p à son intérieur (l'intérieur étant pris par rapport à M) et qui appartient à la famille $\{V_M\}$. D'après la propriété de la famille $\{V_M\}$, $V_M(p)$ est disjoint de tous les autres de la famille. Il existe donc un voisinage $V(p)$ dans l'espace (v) tel que $V_M(p) \geqq V(p) \cdot M$ et $V_M(p) \cdot V_M \cdot M = 0$. Par conséquent, N est un ensemble isolé et non dénombrable, ce qui est impossible, puisque l'espace considéré jouit de la propriété (H). C. Q. F. D.

Comme on sait, dans l'espace (v) le théorème suivant est vrai.

Théorème 4. *L'espace (v) jouissant d'au moins l'une des deux propriétés (B) et (E) possède la propriété (G).*

Il est bien connu que la propriété (G) entraîne ni la propriété (B) ni la propriété (E). *Quelle condition est suffisante pour que la propriété (G) entraîne au moins l'une des deux propriétés (B) et (E)?* Il me semble que c'est assez dificile à donner une telle condition pour l'espace (v) général. Mais, si le système des voisinages dans l'espace (v) satisfait à la condition de M. HAUSDORFF :

A deux voisinages $U(p)$, $V(p)$ quelconques de même élément p, il existe toujours au moins un voisinage $W(p)$ de l'élément p tel que $W(p) \leqq U(p) \cdot V(p)$,

nous avons alors une proposition suivante qui peut être considéré comme un réciproque du théorème 4.

Théorème 5. *Dans l'espace (v) satisfaisant à la condition de M.* HAUSDORFF, *les deux propriétés sont équivalentes :*

(1) *L'espace jouit de la propriété (G).*

(2) *Tout sous-ensemble non dénombrable de l'espace ou bien est séparable, ou bien contient au moins un élément de condensation au sens de M.* LINDELÖF.

Démonstration. (1) $\rightarrow$ (2). Supposons que l'espace considéré jouit de la propriété (G) et soit M un sous-ensemble non dénombrable de l'espace (v). Supposons que M n'est pas séparable et montrons que M contient au moins un élément de condensation. En effet, par contre, supposons que M ne possède aucun élément de condensation de lui-même. Prenons un élément p_1 quelconque de M. D'après l'hypothèse admise, il existe donc un voisinage $V(p_1)$ tel que $M \cdot V(p_1)$ est au plus dénombrable. Soit maintenant α un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini pour tout $\xi (< \alpha)$ les éléments p_ξ et la famille $\{V(p_\xi)\}$ des voisinages tell que $M \cdot V(p_\xi)$ est au plus dénombrable et que $M \cdot V(p_\xi) \cdot V(p_{\xi'}) = 0$. Nous définirons à présent un élément p_α et un voisinage $V(p_\alpha)$ comme il suit: Posons $Q_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} M \cdot V(p_\xi)$. L'ensemble Q_α est au plus dénombrable, puisque $\alpha < \Omega$, et d'après l'hypothèse que M n'est pas séparable, il existe des éléments de M qui n'appartiennent pas à la fermetrue de Q_α. Désignons par p_α un élément appartenant à l'ensemble $M - \overline{Q}_\alpha$. Or, d'après l'hypothèse posée, M ne contient aucun élément de condensation, il existe donc un voisinage $U(p_\alpha)$ tel que $M \cdot U(p_\alpha)$ est au plus dénombrable. En outre, l'élément p_α n'appartient pas à la fermeture de Q_α, il existe donc un voisinage $W(p_\alpha)$ disjoint de Q_α. Par l'hypothèse que l'espace considéré satisfait à la condition de M. HAUSDORFF, il existe un voisinage $V(p_\alpha)$ appartenant à la partie commune à $U(p_\alpha)$ et à $W(p_\alpha)$. Par conséquent, il est évident que l'ensmble $M \cdot V(p_\alpha)$ est au plus dénombrable et que $Q_\alpha \cdot V(p_\alpha)$ est vide, c. -à-d. pour tout $\xi (< \alpha) M \cdot V(p_\alpha) \cdot V(p_\xi)$ est vide. Par suite dans le sous-ensemble M, il y a une famille $\{M \cdot V(p_\lambda)\}$ d'ensembles disjoints deux à deux contenant un

élément intérieur dans l'ensemble M. Mais ce qui est contraire à l'hypothèse que l'espace considéré jouit de la propriété (G).

(2) $\rightarrow$ (1). Supposons que l'espace considéré jouit de la propriété (2) et soit M un ensemble non dénombrable ne jouissant pas de la propriété (1). D'après l'hypothèse par rapport à M, il existe une famille $\{V_\alpha\}$ non dénombrable des voisinages tels que pour tout α et α', $\alpha \neq \alpha'$, $M \cdot V_\alpha$ n'est pas vide et que $M \cdot V_\alpha \cdot V_{\alpha'}$ est vide. Désignons par p_α un élément intérieur de V_α dans le sous-espace M et considérons l'ensemble N formé de tous les éléments p_α. Selon la raison que $M \cdot V_\alpha \cdot V_{\alpha'}$ est vide, il résulte que $(N-p.) \cdot V_\alpha$ est vide, c. -à-d. l'ensemble N non dénombrable n'a aucun élément de accumulation. Par conséquent, N n'est pas séparable et qui ne contient aucun élément de condensation. Par suite, l'espace considéré ne jouit pas de la propriété (2). Ce qui contredit l'hypothèse que l'espace considéré jouit de la propriété (2). C. Q. F. D.

§ 3. **Le problème de SOUSLIN et celui de M. SIERPIŃSKI.** Dans ce §, nous chercherons une relation entre le problème de SOUSLIN et celui de M. SIERPIŃSKI.

Tout d'abord, voici quelques propriétés trouvées par M. KUREPA dans l'espace (S) :

1) L'espace (S) possède la propriété (B) dans le théorème 1.
2) Dans l'espace (S), la propriété (B) et la propriété que l'ensemble ouvert est un ensemble F_σ sont équivalentes.
3) Un ensemble ouvert se compose d'une somme des intervalles au plus dénombrable n'impiétant pas l'un sur l'autre.
4) Le premier axiome de séparabilité (erstes Abzählbarkeitsaxiom) de M. HAUSDORFF est vérifié dans l'espace (S).

Ensuite, nous insérons quelques lemmes qui sont nécessaires dans ce qui suit.

D'après la propriété que l'espace (S) ne possède aucun saut et aucune lacune, nous avons le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit M un ensemble infini contenu dans un intervalle fermé $[a, b]$ dans l'espace (S). Alors, il y a au moins un élément d'accumulation de M.*

Selon le lemme 1, nous avons aisément le

Corollaire 1. *Soit $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ une suite d'ensembles fermés décroissants telle que F_1 est contenu dans un intervalle*

fermé $[a, b]$. *Il existe alors au moins un élément appartient à tout ensemble* $F_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Comme on sait, dans l'espace accesible—donc aussi l'espace (S) —les lemmes suivants sont vérifiés :

Lemme 2. *Pour qu'un ensemble M soit non dense, il faut et il suffit que, pour un ensemble ouvert quelconque G, il existe un ensemble ouvert H appartenant à G tel que la partie commune à H et à M soit vide.*

Lemme 3. *Tout ensemble frontière* F_σ *est de première catégorie.*

Par la même raisonnement que dans l'espace complet, nous pouvons vérifier le

Lemme 4. *Dans l'espace (S), chaque ensemble de première catégorie est un ensemble frontière.*

Ces préliminaires étant posés, nous allons chercher une relation entre le problème de SOUSLIN et celui de M. SIERPIŃSKI. Si le problème de SOUSLIN ne possède pas la réponse affirmative, il est clair que l'espace (S) n'est pas séparable. En vertu de la propriété 1) et le théorème 3, nous pouvons donc supposer qu'il existe un intervalle fermé $[a, b]$ dans l'espace (S) tel qu'il n'est pas séparable. Dans cette condition, il résulte du théorème 2 qu'il existe une suite transfinie d'ensembles fermés $\{F_\alpha\}$ contenus dans l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que

$$(*) \qquad F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\alpha \subset \ldots \mid \Omega .$$

Pour l'ensemble F_1, s'il existe d'ensembles F_α tels que $F_\alpha - F_1$ contient un intervalle, désignons par F_{α_1} le premier de tels ensembles F_α. Ensuite, s'il existe d'ensembles F_α tels que $F_\alpha - F_{\alpha_1}$ contient un intervalle, désignons par F_{α_2} le premier de tels ensembles. γ étant un nombre ordinal de seconde classe ou fini, et supposons que, pour tout nombre β inférieur à γ, nous avons déjà défini l'ensemble F_{α_β} tel que $F_{\alpha_\beta} - F_{\alpha_{\beta'}}$, où $\beta' < \beta < \gamma$, contient un intervalle. Cela posé, nous allons définir l'ensemble F_{α_γ} comme il suit : Considérons un ensemble F_α ($\alpha > \alpha_\beta$ pour tout β inférieur à γ) pour lequel tous les ensembles $F_\alpha - F_{\alpha_\beta}$ contiennent un intervalle et désignons par F_{α_γ} le premier de tels ensembles F_α. Ainsi, nous avons une suite transfinie des ensembles $F_{\alpha_\beta} (\beta < \Omega)$ tels que $F_{\alpha_\beta} - F_{\alpha_{\beta'}} (\beta' < \beta)$ contiennent un intervalle pour tout nombre ordinal de seconde classe ou fini. Mais ce qui est contraire à la premier propriété (α) de

SOUSLIN, et, par suite, nous pouvons supposer que la suite (*) satisfait à la condition que, pour tout ensemble F_α, il existe un ensemble $F_\beta\,(\beta<\alpha)$ tel que l'ensemble-différence $F_\alpha - F_\beta$ ne contient aucun intervalle.

Dans cette condition, si l'ensemble $F_\alpha - F_\beta\,(\beta<\alpha)$ ne contient aucun intervalle. il est évident que, selon le lemme 3, l'ensemble $F_\alpha - F_\beta$ est de première catégorie, puisque $F_\alpha - F_\beta$ est un ensemble frontière et qui est un ensemble F_σ d'après la propriété 2).

Ceci étant posé, nous pouvons démontrer la

Proposition. *Si l'espace (S) n'est pas sembrable à l'espace des nombres réels, la proposition de M. SIERPIŃSKI possède la réponse affirmative dans l'espace de SOUSLIN.*

Démonstration. D'après le fait énoncé plus haut, dans un intervalle fermé $[a, b]$ de l'espace (S), il existe une suite transfinie :

$$F_1 < F_2 < \ldots < F_\alpha < \ldots \mid \Omega$$

telle que, pour chaque ensemble F_α, il existe un ensemble précédent $F_\beta\,(1 \leq \beta < \alpha)$ et que $F_\alpha - F_\beta$ est frontière. c. -à-d. $F_\alpha - F_\beta$ est de première catégorie. Désignons par F la somme de tous les ensembles F_α, $F = \sum_{1\leq\alpha<\Omega} F_\alpha$, et nous allons montrer que l'ensemble F est fermé. Pour le voir, prenons un élément x quelconque de $\overline{F}$. Selon la prepriété 4), comme l'espace (S) satisfait au premier axiome de séparabilité (erstes Abzählbarkeitsaxiom), on peut supposer qu'il existe au plus dénombrable des voisinages $V_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'élément x. Or, x étant un élément appartenant à $\overline{F}$, il existe pour tout voisinage $V_n(x)$ un ensemble F_{α_n} tel que la partie commune à $V_n(x)$ et à F_{α_n} n'est pas vide. Pour tout nombre naturel n, α_n étant un nombre ordinal de seconde classe ou fini, il existe donc un nombre ordinal α de seconde classe supérieur à tout $\alpha_n\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Si l'on prend l'ensemble F_α, il est clair que, pour tout voisinage $V_n(x)$ de x, la partie commune à $V_n(x)$ et à F_α n'est pas vide, et, par suite, l'élément x appartient à la fermeture de F_α. Or, comme l'ensemble F_α est fermé, il résulte que F_α coïncide avec sa fermeture, et par suite l'élément x est contenu dans F_α. A plus forte raison, l'élément x appartient à F, et donc l'ensemble F est fermé.

Or, d'après la propriété 2), nous pouvons donc poser que $CF = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ où $a_n \in F$ et $b_n \in F\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$. F étant une somme de $\aleph_1$-ensembles des ensembles fermés F_α, pour tout a_n et b_n, il existe un ensemble F_α tel qu'il contient tous les éléments a_n

et b_n. Posons maintenant $CF_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\alpha)}, b_n^{(\alpha)})$, ce qui est possible d'après la propriété 2). Selon le fait que $a_n \in F_\alpha$ et $b_n \in F_\alpha$ pour tout nombre naturel n, il existe un intervalle $(a_{\varphi(n)}^{(\alpha)}\, b_{\varphi(n)}^{(\alpha)})$ tel que $(a_{\varphi(n)}^{(\alpha)}, b_{\varphi(n)}^{(\alpha)}) = (a_n, b_n)$. D'après le fait que $F_\alpha < F$, il existe un intervalle non vide $(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)})$ et qui est disjoint de tout intervalle $(a_n, b_n)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Par conséquent, il résulte que $(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)}) < F$ et $(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)}) \cdot F_\alpha = 0$. Il en résulte que l'intervalle $(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)})$ est contenu dans la somme $\sum_{\alpha \leq \beta < \Omega} (F_{\beta+1} - F_\beta)$. D'après la propriété de la suite $\{F_\alpha\}$, l'ensemble $F_{\beta+1} - F_\beta$ est de première catégorie. Par le lemme 4, l'intervalle $(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)})$ est de deuxième catégorie. Il en résulte que la somme de $\aleph_1$-ensembles de première catégorie peut être de deuxième catégorie. C. Q. F. D.