



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ZUR NEUEN. BEHANDLUNG DER GEOMETRIE DES SYSTEMS DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG
Author(s)	Hokari, Shisanji
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 8(1), 047-062
Issue Date	1939
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55943
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_08_N1_047-062.pdf



ZUR NEUEN BEHANDLUNG DER GEOMETRIE DES SYSTEMS DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Von

Shisanji HOKARI

Die Geometrie des Systems der Differentialgleichungen, die von der Schule von Princeton entwickelt wurde, ist am Anfang von J. DOUGLAS im Falle eines Systems der Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + H^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

entwickelt worden⁽¹⁾. D.D. KOSAMBI⁽²⁾, E. CARTAN⁽³⁾ und W. ŚLEBODZIŃSKI⁽⁴⁾ haben die Abhängigkeit der Funktionen H^i auch vom Parameter t angenommen, indem sie die Gruppe der Koordinatentransformationen

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \text{oder} \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n; t)$$

und der identischen Parametertransformation $\bar{t} = t$ zugrundelegen. Von D.D. KOSAMBI⁽⁵⁾ ist danach der erste Schritt in die Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$(1) \quad \frac{d^m x^i}{dt^m} + H^i\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right) = 0$$

(1) J. DOUGLAS, The general geometry of paths, *Annals of Mathematics*, Ser. 2, Bd. 29 (1928), S. 143–168.

(2) D. D. KOSAMBI, Parallelism and path-space, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 37 (1933), S. 608–618.

(3) E. CARTAN, Observations sur le mémoire précédent, *ibid.*, S. 619–622.

(4) W. ŚLEBODZIŃSKI, Sur deux connexions affines généralisés, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, Bd. 43 (1935), S. 167–205.

(5) D. D. KOSAMBI, An affine calculus of variations, *Proceedings of the Indian Academy*, Bd. 2 (1935), S. 333–335; Path-space of higher order, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Ser., Bd. 7 (1936), S. 97–104.

gemacht worden, aber diese Theorien sind im Sinne von E. BORTOLOTTI nicht intrinsek.

Es ist zu beachten, dass Herren Prof. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU⁽¹⁾ in der *intrinseken Theorie* des obigen Systems Erfolg mittels der Differentialquotienten von H^i bis zur $(m+1)$ -ten Ordnung gehabt haben. Im speziellen Falle $m=3$ enthalten die affinen Übertragungsparameter in ihrer Theorie nur die dreimaligen Ableitungen von $H^i\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)$; und bald ist von T. OHKUBO⁽²⁾ die intrinseke Theorie durch die Eliminationsmethode mittels der Differentialquotienten von $H^i\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)$ bis zur zweiten Ordnung entwickelt.

In dieser Arbeit möchten wir eine neue Methode skizzieren zur Behandlung der Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Durch die Anwendung der Variationsmethode, die von D.D. KOSAMBI erst gegeben worden ist, lässt sich die intrinseke Theorie des Systems der Differentialgleichungen höherer Ordnung *systematisch* entwickeln, indem man die Gruppe aller Koordinaten- und Parametertransformationen zugrundelegt; und überdies können wir die Ordnung der Ableitungen von H^i für $m > 3$ um eins vermindern, d.h. in unserem Falle gibt es die zwei Systeme Γ_{jk}^i und $\wedge_{jk}^i$ der Übertragungsparameter, welche beide nur die m -malige Ableitungen von H^i enthalten. Im Falle $m=3$ gibt es die drei Systeme Γ_{jk}^i , $\wedge_{jk}^i$ und $'\wedge_{jk}^i$ der Übertragungsparameter. Es ist interessant, dass das System $'\wedge_{jk}^i$ von ihnen sich mit demselben von T. OHKUBO identifizieren.

1. Erste Variation. Wir ziehen jetzt das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen m -ter Ordnung

$$(2) \quad T^i \equiv x^{(m)i} + H^i(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in Betracht, wo $x^{(r)i} = \frac{d^r x^i}{dt^r}$ sind. Die sogenannte intrinseke Theorie

(1) A. KAWAGUCHI und H. HOMBU, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Ser. I, Bd. 6 (1937), S. 21-62; besonders siehe S. 55-61.

(2) T. OHKUBO, Die Geometrie der Differentialgleichungen dritter Ordnung, Japanese Journal of Mathematics, Bd. 14 (1938), S. 59-66.

besagt, dass sie unter der Gruppe der Koordinatentransformationen

$$(3) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und der Parametertransformationen

$$(4) \quad \bar{t} = \bar{t}(t)$$

invariant ist. Wir benutzen die Verkürzung

$$D_t f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{r=0}^{m-2} x^{(r+1)i} \frac{\partial f}{\partial x^{(r)i}} - H^i \frac{\partial f}{\partial x^{(m-1)i}}$$

für die Funktion $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)})$. Dies ist nichts anderes als die Ableitung von f längs der Integralkurve von (2).

Wenn die Grössen $\bar{f}(\bar{t}, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)})$ und $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)})$ bei der Parametertransformation (4) sich miteinander folgendermassen verbinden:

$$\bar{f}(\bar{t}, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) = \left(\frac{dt}{d\bar{t}} \right)^{\mathfrak{R}} f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}),$$

so heissen wir f Grösse mit dem Gewicht $\mathfrak{R}$, wobei $x^{(r)i}$ abkürzend gesetzt ist für $\frac{d^r x^i}{dt^r}$. Für einen Vektor v^i , dessen Bestimmungszahlen von $t, x^j, x^{(1)j}, \dots, x^{(m-1)j}$ abhängig sind, mit dem Gewicht $\mathfrak{R}$ werden die Ableitungen von v^i längs der Integralkurve von (2) durch die Beziehung

$$(5) \quad \delta_t v^i = D_t v^i + \Gamma_j^i v^j + \mathfrak{R} \mathfrak{A} v^i$$

definieren, wo Γ_j^i und $\mathfrak{A}$ auch von $t, x^j, x^{(1)j}, \dots, x^{(m-1)j}$ abhängen mögen und mittels der gegebenen Grösse H^i sich bestimmen sollen.

Ein kontravarianter Vektor λ^i mit dem Gewicht Null bei der Parametertransformation sei von $t, x^j, x^{(1)j}, \dots, x^{(m-1)j}$ abhängig. Wir betrachten dann eine infinitesimale Transformation der Koordinaten:

$$(6) \quad \bar{x}^i = x^i + \varepsilon \lambda^i,$$

wo ε eine infinitesimale Zahl bedeutet. Differenzierend nach t haben wir

$$(7) \quad \bar{x}^{(r)i} = x^{(r)i} + \varepsilon D_t^r \lambda^i, \quad r = 1, 2, \dots, m,$$

wo $D_t^r \lambda^i$ abkürzend für die r -malige Differenzierung $D_t D_t \dots D_t \lambda^i$ eingeführt ist. Im Koordinatensystem $\bar{x}^i$ wird das Bahnsystem (2) mit der Gestalt

$$\bar{T}^i \equiv \bar{x}^{(m)i} + \bar{H}^i(t, \bar{x}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(m-1)}) = 0$$

gegeben. Zwischen T^i und $\bar{T}^i$ bestehen die Beziehungen gemäss (6) und (7)

$$\bar{T}^i = T^i + \varepsilon U^i + [\varepsilon^2],$$

wobei $[\varepsilon^2]$ Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezug auf ε zusammen darstellt und

$$U^i = \sum_{r=0}^m T_{(r)j}^i D_t^r \lambda^j. \quad (1)$$

Für Invarianz von $T^i = 0$ erhalten wir also die Beziehung $U^i = 0$, indem wir die Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezug auf ε fortfallen lassen. Zusammenfassend können wir also erhalten den

Satz 1. *Dafür, dass in unserem Raume das Bahnsystem (2) bei der infinitesimalen Transformation (6) invariant bleibt, ist es notwendig, dass die Bestimmungszahlen des Vektors λ^i den Gleichungen*

$$(8) \quad U^i \equiv D_t^m \lambda^i + \sum_{r=0}^{m-1} H_{(r)j}^i D_t^r \lambda^j = 0$$

genügen.

Da das Gewicht von λ^i gleich Null ist, so folgt wegen (5)

$$\delta_t \lambda^i = D_t \lambda^i + \Gamma_j^i \lambda^j,$$

wo $\delta_t \lambda^i$ ein intrinseker kontravarianter Vektor mit dem Gewicht eins ist. In derselben Weise findet man für den Vektor $\delta_t \lambda^i$:

$$\begin{aligned} \delta_t^2 \lambda^i &= \delta_t \delta_t \lambda^i = D_t \delta_t \lambda^i + \Gamma_j^i \delta_t \lambda^j + \mathfrak{A} \delta_t \lambda^i \\ &= D_t^2 \lambda^i + (2\Gamma_j^i + \mathfrak{A} \delta_j^i) \delta_t \lambda^j + (\Gamma_j^i - \Gamma_k^i \Gamma_j^k) \lambda^j, \end{aligned}$$

wo $\delta_t^2 \lambda^i$ ein kontravarianter Vektor mit dem Gewicht zwei ist. Wir haben also im allgemeinen den intrinseken Vektor mit dem Gewicht r :

$$\delta_t^r \lambda^i = D_t^r \lambda^i + \left\{ r \Gamma_j^i + \frac{r(r-1)}{2} \mathfrak{A} \delta_j^i \right\} \delta_t^{r-1} \lambda^j + \dots$$

(1) Hierbei setzen wir $D_t^0 \lambda^i = \lambda^i$.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man (8) so umschreiben, dass

$$(9) \quad \delta_t^m \lambda^i + A_{j \frac{m-1}{m-1}}^i \delta_t^{m-1} \lambda^j + \dots + A_{j 0}^i \lambda^j = 0$$

ist, wobei gesetzt sind:

$$A_{j \frac{m-1}{m-1}}^i = H_{(m-1)j}^i - m \Gamma_j^i - \frac{m(m-1)}{2} \mathfrak{A} \delta_j^i, \quad \text{usw.}$$

Da $\delta_t^r \lambda^i$ ($r = 0, 1, \dots, m$) jedes intrinsek sind, so kann man schliessen, dass $A_{j \frac{m-1}{m-1}}^i, \dots, A_{j 0}^i$ mit dem Gewicht 1, 2, ..., m der Reihe nach auch intrinseke Affinoren sind. Setzen wir voraus, dass der Affinor $A_{j \frac{m-1}{m-1}}^i$ identisch verschwindet, so geht hervor, dass

$$(10) \quad \Gamma_j^i = \frac{1}{m} H_{(m-1)j}^i - \frac{m-1}{2} \mathfrak{A} \delta_j^i.$$

2. Zweite Variation. Setzen wir jetzt

$$\alpha = \frac{dt}{d\bar{t}}, \quad \alpha^{(r)} = \frac{d^r \alpha}{d\bar{t}^r} \quad \text{für } r = 1, 2, \dots,$$

so gilt der

Satz 2. Wenn $[*]^i$ Glieder, welche jeder das Produkt von $\alpha^{(p)}$ und $\alpha^{(q)}$ ($p, q \geq 1$) enthalten, zusammen darstellt, so bestehen die Formeln⁽¹⁾

$$(11) \quad x^{(\bar{r})i} = \alpha^r x^{(r)i} + \sum_{\beta=0}^{r-2} \binom{r}{\beta} \alpha^\beta \alpha^{(r-\beta-1)} x^{(\beta+1)i} + [*]^i, \quad r = 1, 2, \dots$$

Beweis. Es ist klar, dass die Formeln (11) für $r = 1, 2$ richtig sind. Demnach lassen sich die übrigbleibenden Beziehungen nach Induktion beweisen. Wenn (11) nämlich für r richtig ist, so ist es auch richtig in bezug auf das dem r unmittelbar Nachfolgende, d.h. wenn man (11) nach $\bar{t}$ differenziert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x^{(\bar{r}+1)i} &= \alpha^{r+1} x^{(r+1)i} + r \alpha^{r-1} \alpha^{(1)} x^{(r)i} \\ &+ \sum_{\beta=0}^{r-2} \binom{r}{\beta} \left\{ \alpha^\beta \alpha^{(r-\beta)} x^{(\beta+1)i} + \alpha^{\beta+1} \alpha^{(r-\beta-1)} x^{(\beta+2)i} \right\} + [*]^i \end{aligned}$$

(1) Unter einem Symbol $\sum_{\beta=a}^b$ für $a > b$ versteht man, dass die Summe nicht eintritt.

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{r+1} x^{(r+1)i} + \left\{ r + \binom{r}{r-2} \right\} \alpha^{r-1} \alpha^{(1)} x^{(r)i} + \alpha^{(r)} x^{(1)i} \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{r-2} \left\{ \binom{r}{\beta} + \binom{r}{\beta-1} \right\} \alpha^{\beta} \alpha^{(r-\beta)} x^{(\beta+1)i} + [*]^i.
\end{aligned}$$

Da $r + \binom{r}{r-2} = \binom{r+1}{r-1}$ und $\binom{r}{\beta} + \binom{r}{\beta-1} = \binom{r+1}{\beta}$ bestehen, so lautet :

$$\begin{aligned}
x^{(r+1)i} &= \alpha^{r+1} x^{(r+1)i} + \binom{r+1}{r-1} \alpha^{r-1} \alpha^{(1)} x^{(r)i} \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{r-2} \binom{r+1}{\beta} \alpha^{\beta} \alpha^{(r-\beta)} x^{(\beta+1)i} + \alpha^{(r)} x^{(1)i} + [*]^i \\
&= \alpha^{r+1} x^{(r+1)i} + \sum_{\beta=0}^{r-1} \binom{r+1}{\beta} \alpha^{\beta} \alpha^{(r-\beta)} x^{(\beta+1)i} + [*]^i,
\end{aligned}$$

daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Um die Grösse $\mathfrak{U}$ aus H^i und ihren Ableitungen nach $x^{(m-1)i}$ zu bestimmen, betrachten wir im Folgenden die zweite Variation. Wir denken uns nämlich eine infinitesimale Parametertransformation

$$(12) \quad \bar{t} = t + \varepsilon \mu(t),$$

wobei $\mu(t)$ eine Grösse mit dem Gewicht -1 ist. Da μ ein Skalar ist, so folgt die Ableitung von μ längs der Integralkurve von (2) vermöge (5)

$$\delta_t \mu = D_t \mu - \mathfrak{U} \mu;$$

und hierbei ist $\delta_t \mu$ ein intrinseker Skalar mit dem Gewicht Null. In derselben Weise ergeben sich leicht für den Skalar $\delta_t \mu$:

$$\begin{aligned}
(13) \quad \delta_t^2 \mu &= D_t^2 \mu - \delta_t \mu - (\mathfrak{U}^2 + D_t \mathfrak{U}) \mu, \\
\delta_t^3 \mu &= D_t^3 \mu - (2D_t \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^2) \delta_t \mu - (\mathfrak{U}^3 + 3\mathfrak{U} D_t \mathfrak{U} + D_t^2 \mathfrak{U}) \mu,
\end{aligned}$$

wo $\delta_t^2 \mu$ bzw. $\delta_t^3 \mu$ ein Skalar mit dem Gewicht 1 bzw. 2 ist. Eine einfache Rechnung lehrt uns, dass im allgemeinen die Formel

$$(14) \quad \delta_t^r \mu = D_t^r \mu + \frac{r(r-3)}{2} \mathfrak{U} \delta_t^{r-1} \mu + [r-2]$$

gilt, in welcher $[r-2]$ Glieder, die die Ableitungen von μ nach t höchstens bis zur $(r-2)$ -ter Ordnung enthalten, zusammen darstellt.

Aus (12) folgt

$$(15) \quad \alpha = \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^{-1} = (1 + \varepsilon D_t \mu)^{-1} = 1 - \varepsilon D_t \mu + [\varepsilon^2];$$

und in gleicher Weise findet man, differenzierend α nach $\bar{t}$,

$$(16) \quad \alpha^{(r)} = -\varepsilon D_t^{r+1} \mu + [\varepsilon^2] \quad \text{für } r = 1, 2, \dots$$

Ersetzen wir (15) und (16) in (11), ergibt sich unmittelbar

$$x^{(\bar{r})i} = x^{(r)i} - \varepsilon \left\{ r D_t \mu \cdot x^{(r)i} + \sum_{\beta=0}^{r-2} \binom{r}{\beta} D_t^{r-\beta} \mu \cdot x^{(\beta+1)i} \right\} + [\varepsilon^2]$$

für $r = 1, 2, \dots$

Unter Berücksichtigung dieser Formeln lässt sich ohne Schwierigkeit der folgende Satz beweisen.

Satz 3. *Damit das Bahnsystem (2) bei der infinitesimalen Parametertransformation (12) invariant bleibt, ist es notwendig, dass der Skalar $\mu(t)$ den Beziehungen*

$$(17) \quad x^{(1)i} D_t^m \mu + \{ m x^{(2)i} + H_{(m-1)j}^i x^{(1)j} \} D_t^{m-1} \mu + [m-2]^i = 0^{(1)}$$

genügen muss.

Mit Hilfe von (14) kann man (17) sogleich in die Gestalt umschreiben:

$$x^{(1)i} \delta_t^m \mu + B_{m-1}^i \delta_t^{m-1} \mu + \dots + B_1^i \delta_t \mu + B_0^i \mu = 0,$$

wobei man Kürze halber setzt

$$(18) \quad B_{m-1}^i = m x^{(2)i} + H_{(m-1)j}^i x^{(1)j} - \frac{m(m-3)}{2} \mathfrak{A} x^{(1)i}, \quad \text{usw.}$$

Es ist bemerkenswert, dass $\delta_t^r \mu$ ($r = 0, 1, \dots, m$) jedes intrinsek ist und das Gewicht bei der Parametertransformation $r-1$ hat; demzufolge erkennen wir, dass $B_{m-1}^i, \dots, B_0^i$ alle intrinseken kontravarianten Vektoren mit dem Gewicht $2, 3, \dots, m+1$ der Reihe nach ist. In

(1) Hier stellt $[m-2]^i$ Glieder, welche höchstens die Ableitungen $D_t^r \mu$ für $r = 0, 1, \dots, m-2$ enthalten, zusammen dar.

unserem Raume spielen die Vektoren B^i ($r=0, 1, \dots, m-1$), insbesondere B^i für $m > 3$, eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Parallelübertragung in sich. Wir wollen diese Tatsache im Folgenden klar machen.

3. Bestimmung der Übertragungsparameter. Unter den betreffenden Transformationen (3) und (4) haben wir

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{x}^{(1)i} &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^{(1)j}, & \bar{x}^{(2)i} &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^{(2)j} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} x^{(1)j} x^{(1)k}, \dots \\ x^{(r)i} &= \alpha^r x^{(r)i} + \frac{r(r-1)}{2} \alpha^{r-2} \alpha^{(1)} x^{(r-1)i} + \dots \quad (r \geq 1) \end{aligned}$$

und

$$-\bar{H}^i = \alpha^m \left(-H^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} + R_{(m)}^i \right) + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^{m-2} \alpha^{(1)} \bar{x}^{(m-1)i} + \dots$$

Aus der letzten Transformationsformel von H^i führen wir nach den wiederholten Differentiationen in bezug auf die höchsten Ableitungen $x^{(m-1)j}$ für $m \geq 3$

$$(20) \quad \begin{aligned} -\alpha \bar{H}_{(m-1)h}^i \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^j} &= \alpha^2 \left(-H_{(m-1)j}^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} + m \frac{\partial \bar{x}^{(1)i}}{\partial x^j} \right) + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^{(1)} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \\ \alpha^{m-2} \bar{H}_{(m-1)h(m-1)j}^i \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} &= H_{(m-1)p(m-1)q}^h \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h}, \end{aligned}$$

daraus geht hervor, dass $H_{(m-1)j(m-1)k}^i$ ein intrinseker Affinor mit dem Gewicht $2-m$ ist.

Da der Vektor B_{m-1}^i das Gewicht 2 hat, so ist⁽¹⁾

$$(21) \quad \mathfrak{S}_0 = H_{(m-1)i(m-1)j}^i B_{m-1}^j \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{S} = H_{(m-1)i(m-1)j}^i x^{(1)j}$$

ein intrinseker Skalar mit dem Gewicht $4-m$ bzw. $3-m$. Nun setzen wir voraus, dass

(1) Der Fall, wo H^i in bezug auf die enthaltenen höchsten Ableitungen $x^{(m-1)j}$ linear ist, d.h.

$H^i = A_j^i(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) x^{(m-1)j} + B^i(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(s)}), \quad (r, s \leq m-2),$
soll man an Stelle von $H_{(m-1)j(m-1)k}^i$ den Affinor $A_{j(r)k}^i$ benutzen.

$$(22) \quad \mathfrak{S}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} \neq 0$$

sind, so lautet wegen (18) für $m \neq 3$

$$(23) \quad \mathfrak{A} = \frac{2}{m(m-3)} \mathfrak{S}^{-1} H_{(m-1)i(m-1)j}^i (m x^{(2)j} + H_{(m-1)k}^j x^{(1)k}).$$

Wir schliessen hier den Fall $m = 3$ aus, aber der Fall wird im nächsten Paragraphen untersucht.

Ersetzen wir $\mathfrak{A}$ in (10), so folgt

$$(24) \quad \Gamma_j^i = \frac{1}{m} H_{(m-1)j}^i - \frac{m-1}{m(m-3)} \mathfrak{S}^{-1} \delta_j^i H_{(m-1)k(m-1)l}^k (m x^{(2)l} + H_{(m-1)h}^l x^{(1)h}).$$

Es ist zu beachten, dass die aus H^i abgeleiteten Grössen $\mathfrak{A}$ und Γ_j^i jede nur die ein- und zweimalige Ableitung von H^i nach den höchsten Ableitungen $x^{(m-1)j}$ enthalten; daher wird die Übertragung längs der Integralkurve von (2) für beliebigen Vektor v^i mit dem Gewicht $\mathfrak{R}$ durch (5) vollständig bestimmt.

Wir wollen jetzt die Transformationsformeln von $\mathfrak{A}$ und Γ_j^i bei den simultanen Transformationen (3) und (4) klar machen.

Satz 4. Bei den simultanen Transformationen (3) und (4) lässt sich $\mathfrak{A}$ bzw. Γ_j^i nach die Formel transformieren:

$$(25) \quad \alpha \bar{\mathfrak{A}} = \alpha^2 \mathfrak{A} - \alpha^{(1)}$$

bzw.

$$(26) \quad \bar{\Gamma}_j^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \alpha \Gamma_k^h \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^h} x^{(1)h}.$$

Beweis. Setzen wir $E^i = m x^{(2)i} + H_{(m-1)j}^i x^{(1)j}$, so ist gemäss (19) und (20)

$$\bar{E}^i = \left\{ \alpha^2 E^i - \frac{m(m-3)}{2} \alpha^{(1)} x^{(1)i} \right\} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}.$$

Da $\mathfrak{S}^{-1} H_{(m-1)i(m-1)j}^i$ ein kovarianter Vektor mit dem Gewicht -1 ist, so ergibt sich aus (21)

$$\alpha \mathfrak{S}^{-1} \bar{H}_{(m-1)i(m-1)j}^i \bar{E}^j = \alpha^2 \mathfrak{S}^{-1} H_{(m-1)i(m-1)j}^i E^j - \frac{m(m-3)}{2} \alpha^{(1)},$$

daraus geht unter Berücksichtigung von (21) und (23) hervor, dass (25) richtig ist.

Aus den ersten Beziehungen von (20) treten auf

$$(27) \quad \frac{1}{m} \bar{H}_{(m-1)j}^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \alpha \left(\frac{1}{m} H_{(m-1)k}^h \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial \bar{x}^{(1)i}}{\partial x^k} \right) - \frac{m-1}{2} \frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};$$

infolgedessen haben wir (26) mit Hilfe von (10) und (25).

Wenn man unsere Grösse $\mathfrak{U}$ bzw. Γ_j^i mit der KAWAGUCHI-HOMBUSCHEN $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}_j^i$ vergleicht, so sieht man, dass sich ihre Transformationsformeln vollständig identifizieren⁽¹⁾.

Fassen wir nun einen Vektor v^i mit dem Gewicht $\mathfrak{R}$ ins Auge, so ist die Ableitung $\delta_t v^i$ längs der Integralkurve von (2) kovariant und von dem Gewicht $\mathfrak{R}+1$, da nach (25), (26) bei den simultanen Transformationen (3) und (4)

$$\delta_t \bar{v}^i = \left(\frac{dt}{d\bar{t}} \right)^{\mathfrak{R}+1} \delta_t v^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

ist; $\delta_t v^i$ ist demnach die intrinseke Ableitung.

Das System der intrinseken Grundübertragungen in unserem Raume ist von Herren Prof. A. KAWAGUCHI und H. HOMBÜ in den ausgezeichneten Ausdrücke

$$(28) \quad \delta x^{(r)i} = dx^{(r)i} + \sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{S}_{(r)j}^{i(s)} dx^{(s)j} \quad (r = 1, 2, \dots, m-1)$$

gegeben worden, wobei die rekurrenten Formeln von den Koeffizienten $\mathfrak{S}_{(r)j}^{i(s)}$ sind:

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_{(s+1)j}^{i(s)} &= (s_i + 1) \Gamma_j^i + \frac{s(s+1)}{2} \mathfrak{U} \delta_j^i & (0 \leq s \leq m-2), \\ \mathfrak{S}_{(s+1)j}^{i(r+1)} &= \mathfrak{S}_{(s)j}^{i(r)} + D_t \mathfrak{S}_{(s)j}^{i(r+1)} + \Gamma_k^i \mathfrak{S}_{(s)j}^{k(r+1)} + s \mathfrak{U} \mathfrak{S}_{(s)j}^{i(r+1)} & (0 \leq r, r+2 \leq s \leq m-2), \\ \mathfrak{S}_{(s+1)j}^{i(0)} &= D_t \mathfrak{S}_{(s)j}^{i(0)} + \Gamma_k^i \mathfrak{S}_{(s)j}^{k(0)} + s \mathfrak{U} \mathfrak{S}_{(s)j}^{i(0)} & (1 \leq s \leq m-2). \end{aligned}$$

Wenn f ein Skalar mit dem Gewicht $\mathfrak{R}$ ist, so sind ihre intrinseken kovarianten Ableitungen durch den Ausdrücke

(1) Siehe A. KAWAGUCHI und H. HOMBÜ, a. a. O., S. 56.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \Re \mathcal{U} f,$$

$$\nabla_k^{(r)} f = f_{(r)k} - \sum_{s=r+1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(r)} \nabla_j^{(s)} f \quad (r = 0, 1, \dots, m-1)$$

gegeben, da

$$df + \Re \mathcal{U} f dt = \nabla f \cdot dt + \sum_{r=0}^{m-1} \nabla_k^{(r)} f \cdot \delta x^{(r)k}$$

ist.

Wenden wir rein formelhaft die Operation $\nabla_k^{(1)}$ auf Γ_j^i an, indem wir sie in bezug auf ihre oberen bzw. unteren Indizes als kontra- bzw. kovariant ansehen, und setzen

$$(30) \quad \Gamma_{jk}^i = \nabla_k^{(1)} \Gamma_j^i,$$

so können wir leicht bestätigen, dass sich Γ_{jk}^i wie affine Übertragungsparameter transformiert, während $\nabla_k^{(r)} \Gamma_j^i$ für $r = 2, 3, \dots, m-1$ in bezug auf i, j, k Affinoren sind.

Ausser Γ_{jk}^i gibt es ein anderes System der Übertragungsparameter, d.h. da $H_{(m-1)j}^i$ bei den simultanen Transformationen (3) und (4) die Transformationsformeln (27) haben, so gilt der

Satz 5. Bei den simultanen Transformationen (3) und (4) sind $\nabla_k^{(r)} H_{(m-1)j}^i$ für $r = 2, 3, \dots, m-1$ in bezug auf i, j, k Affinoren, während aus $\nabla_k^{(1)} H_{(m-1)j}^i$ ein System der Übertragungsparameter entsteht:

$$(31) \quad \bigwedge_{jk}^i = \frac{1}{m} \nabla_k^{(1)} H_{(m-1)j}^i,$$

deren Transformationsformeln mit denen des Systems der affinen Übertragungsparameter vollständig übereinstimmen, d.h.

$$\bar{\bigwedge}_{jk}^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} = \bigwedge_{pq}^h \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^p \partial x^q}.$$

Aus (27), (30) und (31) ergeben sich für beliebigen Vektor v^i mit dem Gewicht $\Re$ die intrinseken kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} \Gamma v^i &= \frac{\partial v^i}{\partial t} + \mathfrak{A} \mathfrak{A} v^i, \\ \Gamma_k^{(r)} v^i &= v_{(r)k}^i - \sum_{s=r+1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(r)} \Gamma_j^{(s)} v^i \quad (r = m-1, m-2, \dots, 1), \\ (32) \quad \Gamma_k^{(1)} v^i &= v_{(1)k}^i - \sum_{s=1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(0)} \Gamma_j^{(s)} v^i + \Gamma_{jk}^i v^j \end{aligned}$$

oder

$$\Gamma_k^{(2)} v^i = v_{(2)k}^i - \sum_{s=1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(0)} \Gamma_j^{(s)} v^i + \bigwedge_{jk}^i v^j;$$

hierbei die Ableitung $\Gamma^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, m-1$) erniedrigt das Gewicht einer Grösse um r , dagegen erhöht die Ableitung Γ das Gewicht um eins. Die so-angegebenen Ableitungen sind von H^i und deren Differentialquotienten bis zur m -ter Ordnung abhängig.

4. Der Fall $m = 3$. In diesem Falle ist das System Π_{jk}^i der Übertragungsparameter von Herren Prof. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU ausgeführt worden, welche aus den zwei- und dreimaligen Ableitungen von H^i bestehen:

$$\begin{aligned} \Pi_{jk}^i &= \frac{1}{3} H_{(2)k}^i - \frac{1}{3} H_{(2)j(2)l}^i G^{lh} H_{(2)p(2)h(1)k}^p,^{(1)} \\ G_{jk} &= H_{(2)i(2)j(2)k}^i, \quad G_{jk} G^{ij} = \delta_k^i; \end{aligned}$$

und danach hat T. OHKUBO durch die Eliminationsmethode gezeigt, dass das andere System $^*\Pi_{jk}^i$ der affinen Übertragungsparameter aus den ein- und zweimaligen Ableitungen von H^i eingeführt wird, d.h.

$$(33) \quad ^*\Pi_{jk}^i = \frac{1}{3} \left\{ H_{(2)j(1)k}^i - \frac{2}{3} H_{(2)j(2)h}^i H_{(2)k}^h - H_{(2)j(2)k}^i \mathfrak{A} \right\} .^{(2)}$$

Nun wollen wir durch die Variationsmethode die drei Systeme Γ_{jk}^i , $\bigwedge_{jk}^i$ und $^*\bigwedge_{jk}^i$ der Übertragungsparameter ableiten und mit Π_{jk}^i oder $^*\Pi_{jk}^i$ vergleichen.

(1) Mittels Π_{jk}^i lässt sich das kovariante Differential eines Vektors v^i definieren, das von H^i bis zur dritten Ordnung abhängt, aber scheint es uns, dass die Aufstellung der Grundübertragung und somit der kovarianten Ableitungen der Differentialquotienten vierter Ordnung bedarf.

(2) Die Beziehung (1.14) in der OHKUBOschen Arbeit ist Druckfehler, und sie muss wie (33) verbessert werden.

Aus (13) erhalten wir

$$x^{(1)i} \delta_t^3 \mu + B_2^i \delta_t^2 \mu + B_1^i \delta_t \mu + B_0^i \mu = 0,$$

wobei gesetzt sind:

$$\begin{aligned} B_2^i &= 3x^{(2)i} + H_{(2)j}^i x^{(1)j}, \\ (34) \quad B_1^i &= (2D_t \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2) x^{(1)i} + \mathfrak{A} B_2^i + 2H_{(2)j}^i x^{(2)j} \\ &\quad + H_{(1)j}^i x^{(1)j} - 3H^i, \\ B_0^i &= (D_t^2 \mathfrak{A} + \mathfrak{A} D_t \mathfrak{A}) x^{(1)i} + B_2^i D_t \mathfrak{A} - D_t H^i - H_{(0)j}^i x^{(1)j}. \end{aligned}$$

Da B_2^i das aufzusuchende Skalar $\mathfrak{A}$ nicht enthält, sollen wir hier den Vektor B_2^i mit dem Gewicht 3 benutzen. $2D_t \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2$ bzw. $\mathfrak{A}$ ist nicht intrinsek, dagegen $(2D_t \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2)_{(2)j}$ bzw. $\mathfrak{A}_{(2)j}$ jeder ist ein intrinseker kovarianter Vektor mit dem Gewicht Null bzw. -1 ; damit erkennen wir, dass die Grösse

$$\begin{aligned} C_j^i &\equiv B_{(2)j}^i - (2D_t \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2)_{(2)j} x^{(1)i} - \mathfrak{A}_{(2)j} B_2^i \\ &= B_{(2)j}^i \mathfrak{A} + 2H_{(2)k(2)j}^i x^{(2)k} + H_{(1)k(2)j}^i x^{(1)k} - H_{(2)j}^i \end{aligned}$$

ein intrinseker Affinor mit dem Gewicht eins ist.

Wenn man dann voraussetzt, dass

$$(35) \quad B_{(2)i}^i \neq 0 \quad \text{und} \quad C_i^i = 0$$

sind, so lautet

$$(36) \quad \mathfrak{A} = (B_{(2)i}^i)^{-1} \{ H_{(2)k}^k - 2H_{(2)j(2)k}^k x^{(2)j} - H_{(1)j(2)k}^k x^{(1)j} \};$$

und somit folgt aus (10)

$$\begin{aligned} (37) \quad \Gamma_j^i &= \frac{1}{3} H_{(2)j}^i - \mathfrak{A} \delta_j^i \\ &= \frac{1}{3} H_{(2)j}^i - \delta_j^i (B_{(2)h}^h)^{-1} \{ H_{(2)k}^k - 2H_{(2)l(2)k}^k x^{(2)l} - H_{(1)l(2)k}^k x^{(1)l} \}. \end{aligned}$$

Die erste Bedingung von (35) wird nach (34) so geschrieben, dass

$$B_{(2)i}^i = 3n + H_{(2)j(2)i}^i x^{(1)j} \neq 0$$

ist; dies ist nichts anderes als die OHKUBOSche Bedingung.

Aus der ersten Beziehung von (34) erhalten wir

$$x^{(2)i} = \frac{1}{3} \left(B^i_{(2)j} - H^i_{(2)j} x^{(1)j} \right).$$

Wenn wir diese Grösse in (36) ersetzen und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \frac{2}{3} \left(B^i_{(2)i} \right)^{-1} H^k_{(2)j(2)k} B^j_2$$

setzen, so lautet

$$(38) \quad \mathfrak{B} = \left(B^i_{(2)i} \right)^{-1} \left\{ H^k_{(2)k} + \frac{2}{3} H^k_{(2)j(2)k} H^j_{(2)h} x^{(1)h} - H^k_{(1)j(2)k} x^{(1)j} \right\}.$$

Da $\frac{2}{3} \left(B^i_{(2)i} \right)^{-1} H^k_{(2)j(2)k} B^j_2$ ein intrinseker Skalar mit dem Gewicht eins ist, lässt sich das Skalar $\mathfrak{B}$ bei der Parametertransformation (4) ganz analog wie $\mathfrak{A}$ transformieren; somit können wir das Skalar $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$ benutzen.

Aus (28) haben wir für $m = 3$ die sogenannten Grundübertragungen

$$\begin{aligned} \delta x^{(1)i} &= dx^{(1)i} + \mathfrak{S}^{i(0)}_{(1)j} dx^j, \\ \delta x^{(2)i} &= dx^{(2)i} + \mathfrak{S}^{i(1)}_{(2)j} dx^{(1)j} + \mathfrak{S}^{i(0)}_{(2)j} dx^j, \end{aligned}$$

wobei

$$(39) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}^{i(0)}_{(1)j} &= \Gamma^i_j, & \mathfrak{S}^{i(1)}_{(2)j} &= 2\Gamma^i_j + \mathfrak{A}\delta^i_j, \\ \mathfrak{S}^{i(0)}_{(2)j} &= D_t \Gamma^i_j + \Gamma^i_k \Gamma^k_j + \mathfrak{A}\Gamma^i_j. \end{aligned}$$

Wir haben auch wie (30) ein System der Übertragungsparameter

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{(1)}_k \Gamma^i_j = \Gamma^i_{j(1)k} - \mathfrak{S}^{h(1)}_{(2)k} \Gamma^i_{j(2)h},$$

und dies wird aus (37) so umgeschrieben, dass

$$(40) \quad \Gamma^i_{jk} = \left(\frac{1}{3} H^i_{(2)j} - \mathfrak{A}\delta^i_j \right)_{(1)k} - \left(\frac{1}{3} H^i_{(2)j} - \mathfrak{A}\delta^i_j \right)_{(2)h} \mathfrak{S}^{h(1)}_{(2)k}$$

ist. Dieses System Γ^i_{jk} ist von dem KAWAGUCHI-HOMBUSCHEN Π^i_{jk} und dem OHKUBOSCHEN $^*\Pi^i_{jk}$ ganz verschieden.

Da nach Satz 5 sich die Funktionen $\frac{1}{3} \Gamma^{(1)}_k H^i_{(2)j}$ bei den simultanen Transformationen (3) und (4) wie die Parameter einer affinen Über-

tragung transformieren, so ergibt sich das zweite System der Übertragungsparameter, d.h.

$$(41) \quad \bigwedge_{jk}^i = \frac{1}{3} \Gamma_k^{(1)} H_{(2)j}^i.$$

Nach (39) und der Definition (32) von $\Gamma^{(1)}$ wird auch das System gegeben mit der Gestalt

$$(42) \quad \bigwedge_{jk}^i = \frac{1}{3} \left\{ H_{(2)j(1)k}^i - (2 \Gamma_k^h + \mathfrak{A} \delta_k^h) H_{(2)j(2)h}^i \right\}.$$

Aus den ersten Beziehungen von (37) folgt

$$2 \Gamma_j^i + \mathfrak{A} \delta_j^i = \frac{2}{3} H_{(2)j}^i - \mathfrak{A} \delta_j^i;$$

und wenn man diese Grösse in (42) ersetzt, so haben wir die Darstellungen

$$(43) \quad \bigwedge_{jk}^i = \frac{1}{3} \left\{ H_{(2)j(1)k}^i - \frac{2}{3} H_{(2)j(2)h}^i H_{(2)k}^h + H_{(2)j(2)k}^i \mathfrak{A} \right\}.$$

Benutzen wir $\mathfrak{B}$ statt $\mathfrak{A}$, so tritt ein anderes System der Übertragungsparameter auf:

$$(44) \quad {}' \bigwedge_{jk}^i = \frac{1}{3} \left\{ H_{(2)j(1)k}^i - \frac{2}{3} H_{(2)j(2)h}^i H_{(2)k}^h + H_{(2)j(2)k}^i \mathfrak{B} \right\}.$$

Mittels der oben erhaltenen Systeme Γ_{jk}^i , $\bigwedge_{jk}^i$ und ${}' \bigwedge_{jk}^i$ können wir für beliebigen Vektor v^i mit dem Gewicht $\mathfrak{K}$ die intrinseken Ableitungen ganz analog wie (32) definieren, die von H^i und deren Differentialquotienten bis zur 3-ten Ordnung abhängig sind.

Das System $\bigwedge_{jk}^i$ oder ${}' \bigwedge_{jk}^i$ ist von dem KAWAGUCHI-HOMBUSCHEN Π_{jk}^i verschieden, aber wir erkennen unter Berücksichtigung von (33) und (44), dass sich die so sich ergebenden Übertragungsparameter ${}' \bigwedge_{jk}^i$ mit denselben von T. OHKUBO ganz übereinstimmen, wenn man seine Aufmerksamkeit auf $\mathfrak{B} = -\mathfrak{A}$ richtet. Im Falle $m = 3$ finden sich also ausser KAWAGUCHI-HOMBUSCHEN Π_{jk}^i die drei so-angegebenen Übertragungsparameter Γ_{jk}^i , $\bigwedge_{jk}^i$ und ${}' \bigwedge_{jk}^i$, welche jedes von H^i und deren Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung abhängig sind.

Bemerkung. Die Berechnung der Strukturgrößen sowie die Aufstellung der BIANCHISchen Identitäten für $m \geq 3$ lassen wir ausfallen, da sie ganz dieselben wie in der KAWAGUCHISchen Arbeit sind⁽¹⁾.

August 1939.

(1) A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rendiconti di Palermo, Bd. 56 (1932), S. 245-276.