



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES ENSEMBLES BORELIENS ET ANALYTIQUES II
Author(s)	Kunugui, Kinjiro
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 8(1), 001-024
Issue Date	1939
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55944
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_08_N1_001-024.pdf



CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES ENSEMBLES BORELIENS ET ANALYTIQUES, II

Par

Kinjiro KUNUGUI

§ 6. Généralisation du Théorème de sections fermées (suite).

Soit M un ensemble situé dans le plan OXY . Nous avons désigné par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble de tous les points x de l'axe OX jouissant de la propriété suivante : la section de M engendrée par le point $(x, 0)$ (c. à d. la partie commune à l'ensemble M et à la droite parallèle à l'axe OY passant par le point $(x, 0)$) est un ensemble $\mathfrak{F}_0$ non vide. A ce propos, nous avons montré (le théorème 6) que l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ est toujours un complémentaire analytique, si M appartient à la fois aux familles $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\sigma\sigma}$.

Nous allons généraliser encore ce théorème. Comme auparavant, désignons par $\mathfrak{F}_B$ la famille de tous les ensembles boreliens qui se trouvent sur l'axe OX et par $\mathfrak{G}$ celle de tous les ensembles ouverts situés sur l'axe OY . Notre généralisation s'exprime comme il suit : l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ est toujours un complémentaire analytique, si M appartient à la fois à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta\sigma}$ et à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{c\delta\sigma\sigma}$.

Nous allons démontrer d'abord un lemme sur les ensembles développables. Soit F une famille de sous-ensembles d'un ensemble K d'éléments quelconques. Un ensemble A sera dit *développable en série alternée d'ensembles d'une famille F (décroissants)*, si l'on peut poser :

$$A = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + A_\omega - A_{\omega+1} + \cdots + A_{2\lambda} - A_{2\lambda+1} + \cdots$$

$$1 \leq 2\lambda + 1 < \gamma < \Omega,$$

où A_α sont des ensembles de la famille F tels qu'on ait $A_\alpha \supseteq A_\beta$ pour tout α, β , $\alpha < \beta$, Ω désignant le premier des nombres ordinaux de la troisième classe.

Lemme. Désignons par Φ la famille de tous les intervalles de BAIRE. Alors tout ensemble E du plan $N \times N^{(1)}$ appartenant à

(1) N est l'ensemble de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1.

$(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}^{(1)}$ (le complémentaire étant pris par rapport à l'espace $N \times N$) est développable en série alternée des ensembles de la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$.

Démonstration. Nous allons voir que l'ensemble E peut être écrit comme il suit :

$$E = E_0 - E_1 + E_2 - E_3 + \dots + E_{2\lambda} - E_{2\lambda+1} + \dots, \quad 1 \leq 2\lambda + 1 < \gamma < \Omega,$$

$$E_\alpha \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}, \quad E_\alpha \supseteq E_\beta \quad \text{pour } \alpha < \beta.$$

M. W. SIERPIŃSKI⁽²⁾ a montré que si les ensembles E , E_n^m et H_n^m ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) sont des ensembles satisfaisant aux conditions :

$E_n^m \supseteq E_{n+1}^m$ pour m et n naturels, $H_n^m \subseteq H_{n+1}^m$ pour m et n naturels, $\sum_{n=1}^{\infty} H_n^m \supseteq \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{m+1}$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$ et $E = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} E_n^m = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^m$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \dots + E_n^n H_n^n) = E.$$

E étant un ensemble de $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma}$, nous pouvons poser d'abord

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} E_n^m, \quad E_n^m \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma}.$$

Or, le produit d'un nombre fini des ensembles de $\mathfrak{F}_B \times \Phi_{\sigma}$ appartient aussi à $\mathfrak{F}_B \times \Phi$. et par suite la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma}$ jouit de la même propriété. Donc, nous pouvons supposer que nous avons toujours

$$E_n^m \supseteq E_{n+1}^m \quad \text{pour } m \text{ et } n \text{ naturels.}$$

D'autre part, comme E appartient également à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$, E peut être écrit : $E = \prod_{m=1}^{\infty} H_n^m$, $H_n^m \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$. La famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$ étant δ -système, $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$ est multiplicative⁽³⁾. Donc, nous pouvons supposer que nous avons toujours

(1) F étant une famille d'ensembles quelconques, F_c désigne la famille de tous les ensembles complémentaires à ceux de F .

(2) W. SIERPIŃSKI; Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. HAUSDORFF et CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, Fund. Math. t. XIX (1932), p. 258.

(3) La famille F s'appelle δ -système, si tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de F appartient à F . F s'appelle multiplicative, si tout produit d'un nombre fini des ensembles de F appartient à F . Si F est multiplicative, F l'est également. Enfin, F s'appelle anneau, si elle jouit de la propriété suivante : toute somme et tout produit d'un nombre fini d'ensembles de F appartiennent à F . Voir p. ex. H. HAHN: Reelle Funktionen, Teil I, Leipzig. 1932, p. 10-17.

$$H^m \supseteq H^{m+1}, \text{ pour } m = 1, 2, 3, \dots$$

D'ailleurs, nous pouvons poser encore : $H^m = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^m$, $H_n^m \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$. Comme la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta c} = (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_o$ est multiplicative, il est permis de supposer que nous avons toujours $H_n^m \subseteq H_{n+1}^m$, pour m et n naturels. Par conséquent, d'après le théorème de M. W. SIERPIŃSKI, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \dots + E_n^n H_n^n) = E.$$

L'inclusion $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_c \subseteq (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_o$ ou $\mathfrak{F}_B \times \Phi \subseteq (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$ montre que la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{o\delta} (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta o}$ contient $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_o$ et $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$. Cette famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{o\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta o}$ est un anneau⁽³⁾ avec $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_o$. Par suite, l'ensemble $M_n = E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \dots + E_n^n H_n^n$ appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{o\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta o}$.

Or, l'ensemble M_n appartenant à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{o\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta o}$, nous pouvons poser :

$$M_n = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} M_{p,q}^{(n)}, \quad M_{p,q}^{(n)} = A_{p,q}^{(n)} \times B_{p,q}^{(n)};$$

$$CM_n = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} S_{p,q}^{(n)}, \quad S_{p,q}^{(n)} = C_{p,q}^{(n)} \times D_{p,q}^{(n)},$$

où $A_{p,q}^{(n)}$, $C_{p,q}^{(n)}$ sont des ensembles boreliens et $B_{p,q}^{(n)}$, $D_{p,q}^{(n)}$ désignent des intervalles de BAIRE. Nous pouvons supposer que $M_{p,q}^{(n)}$, $S_{p,q}^{(n)}$ et les intervalles de BAIRE $B_{p,r}^{(n)}$, $D_{p,q}^{(n)}$ satisfont aux conditions suivantes :

$$(1^\circ) \quad M_{p,q}^{(n)} \cdot M_{p,q'}^{(n)} = 0, \quad S_{p,q}^{(n)} \cdot S_{p,q'}^{(n)} = 0, \quad \text{pour tout } q \neq q'.$$

$$(2^\circ) \quad \text{Les ordres de } B_{p,q}^{(n)} \text{ et } D_{p,q}^{(n)} \text{ sont au moins } p.$$

Posons d'abord

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = M_{1, l_1}^{(n)} \cdot M_{2, l_2}^{(n)} \dots M_{k, l_k}^{(n)},$$

$$T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = S_{1, l_1}^{(n)} \cdot S_{2, l_2}^{(n)} \dots S_{k, l_k}^{(n)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Ces ensembles satisfont alors aux inclusions :

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \supseteq L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}}, \quad T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \supseteq T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}} \\ (l_{k+1} = 1, 2, 3, \dots),$$

et pour $l_k \neq l'_k$ on a

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \cdot L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l'_k} = 0; \quad T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \cdot T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l'_k} = 0.$$

Par suite, nous avons

$$M_n = \sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_k} L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k},$$

$$CM_n = \sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_k} T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k},$$

Comme produit d'un nombre fini des ensembles de la forme $\mathfrak{F}_B \times \Phi$, nous pouvons encore écrire

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = A_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \times B_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k},$$

$$T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = C_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \times D_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$$

où $A_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ et $C_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ sont des ensembles boreliens, et $B_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$, $D_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ désignent des intervalles de BAIRE. Il est évident que

$$(3^\circ) \text{ dès que } (l_1, l_2, \dots, l_k) \neq (l'_1, l'_2, \dots, l'_k), \text{ nous avons } \\ L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \cdot L_{(n)}^{l'_1, l'_2, \dots, l'_k} = 0, \quad T_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \cdot T_{(n)}^{l'_1, l'_2, \dots, l'_k} = 0,$$

(4°) les ordres de $B_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$, $D_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ sont au moins k . Les ensembles $A_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ et $C_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ étant boreliens, ils peuvent être posés comme il suit:

$$A_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \sum_{\nu \in N} \prod_{k'=1}^{\infty} E_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k; n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k},$$

$$C_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \sum_{\nu \in N} \prod_{k'=1}^{\infty} F_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k; n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k},$$

$$\nu = (n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k, \dots)$$

où les ensembles $E_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k; n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}$, $F_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k; n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}$ sont des intervalles de BAIRE, qui satisfont aux conditions:

(5°) les longueurs des intervalles

$$E_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k}, \quad F_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$$

sont plus petites que $1/(k+k')$.

$$(6^\circ) \quad E_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \supseteq E_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'+1}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k},$$

$$F_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \supseteq F_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'+1}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$$

$$(n_{k'+1}^k = 1, 2, 3, \dots).$$

(7°) pour deux nombres différents ν et $\bar{\nu}$, nous avons toujours

$$\prod_{k'=1}^{\infty} E_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \cdot E_{(n); \bar{n}_1^k, \bar{n}_2^k, \dots, \bar{n}_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = 0,$$

$$\prod_{k'=1}^{\infty} F_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \cdot F_{(n); \bar{n}_1^k, \bar{n}_2^k, \dots, \bar{n}_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = 0.$$

Définissons maintenant deux schèmes de SOUSLIN :

$$G_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)} = E_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \times B_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k};$$

$$H_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)} = F_{(n); n_1^k, n_2^k, \dots, n_{k'}^k}^{l_1, l_2, \dots, l_k} \times D_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$$

et posons enfin

$$G_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)*} = G_{p_1}^{(n)} \cdot G_{p_1, p_2}^{(n)} \dots G_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)},$$

$$H_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)*} = H_{p_1}^{(n)} \cdot H_{p_1, p_2}^{(n)} \dots H_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)},$$

où p_L ($L = 1, 2, 3, \dots$) et $l_k, n_{k'}^k$ se correspondent d'une manière que nous avons définie dans § 3⁽¹⁾.

Soit $Z^{(n)}$ l'ensemble des nombres irrationnels $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_L, \dots)$ tels que $G_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)*} \neq 0$, quelque soit L . L'ensemble $\prod_{L=1}^{\infty} G_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)*}$ se réduit à un point, que nous pouvons désigner par $g_n(\pi)$. $g_n(\pi)$

(1) Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques I, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, Vol. VII, 1939. p. 176.

est une fonction continue, qui fait correspondre $Z^{(n)}$ et M_n d'une manière biunivoque. De même, soit $T^{(n)}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels π tels que $H_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)*} \neq 0$ quelque soit L . L'ensemble $\prod_{L=1}^{\infty} H_{p_1, p_2, \dots, p_L}^{(n)*}$ se réduit à un point que nous pouvons désigner par $h_n(\pi)$. $h_n(\pi)$ est une fonction continue, qui fait correspondre $T^{(n)}$ et CM_n d'une manière biunivoque.

Etant donné un système d'indices $(l_1, l_2, \dots, l_k)$, appelons *noyau partiel* de M_n et désignons par $M_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ l'ensemble-noyau du système de SOUSLIN : $L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k, m_1, m_2, \dots, m_{k'}}$, c. à d.

$$M_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \sum_{\mu \in N} \prod_{k'=1}^{\infty} L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k, m_1, m_2, \dots, m_{k'}} \\ \mu = (m_1, m_2, m_3, \dots).$$

Il est évident que ces noyaux $M_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ appartiennent à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. Or, l'ensemble $M_n - M_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ est le noyau du système de SOUSLIN $L_n^{*l'_1, l'_2, \dots, l'_k}$ défini de la manière suivante :

$$L_{(n)}^{*l'_1, l'_2, \dots, l'_k} = L_{(n)}^{l'_1, l'_2, \dots, l'_k} \\ \text{pour } (l'_1, l'_2, \dots, l'_k) \neq (l_1, l_2, \dots, l_k). \\ L_{(n)}^{*l'_1, l'_2, \dots, l'_k} = 0 \quad \text{pour } (l'_1, l'_2, \dots, l'_k) = (l_1, l_2, \dots, l_k).$$

Donc, l'ensemble $M_n - M_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ appartient également à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. Comme CM_n appartient également à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$, et comme cette famille est un anneau, $M_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k}$ appartient à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$.

Les fonctions $\varphi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ possèdent la propriété suivante : lorsque t parcourt la portion de $Z^{(n)}$ ou $T^{(n)}$ contenus dans l'intervalle de BAIRE $\delta_{p_1, p_2, \dots, p_L}$ ($L = 2m-1$), les valeurs de $\varphi_n(t)$ ou de $\psi_n(t)$ forment justement l'ensemble

$$\sum_{\mu \in N} \prod_{k'} L_{(n)}^{l_1, l_2, \dots, l_k, m_1, m_2, \dots, m_{k'}}$$

ou

$$\sum_{\mu \in N} \prod_{k'} T^{l_1, l_2, \dots, l_k, m_1, m_2, \dots, m_{k'}}.$$

Et, ces ensembles appartiennent à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$,

Désignons par $U^{(n)}$ l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $1 < t < 2$ congruent à $T^{(n)}$, et par $E^{(n)}$ la somme $Z^{(n)} + U^{(n)}$. Les ensembles $E^{(n)}$ sont topologiquement complet, séparable, 0-dimensionnel, et $Z^{(n)}$, $U^{(n)}$ sont fermés et ouverts dans cet ensemble.

Les fonctions $\varphi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ nous donnent alors une fonction continue $f_n(t)$ définie sur $E^{(n)}$, qui fait correspondre $E^{(n)}$ et $M_n + CM_n = N \times N$ d'une façon biunivoque. Considérons dans l'espace E_ω de M. FRÉCHET l'ensemble $C = E^{(1)} \times E^{(2)} \times E^{(3)} \times \dots$. Ce produit cartésien C des $E^{(n)}$ est topologiquement complet séparable. Étant donné un point $\tau = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ de C , posons $h_n(\tau) = f_n(t_n)$ et désignons par T l'ensemble de tous les points de C tels qu'on ait

$$h_1(\tau) = h_2(\tau) = h_3(\tau) = \dots$$

Posons $h(\tau) = h_1(\tau)$ pour $\tau \in T$. Comme l'ensemble T est fermé relativement à C , T est lui-même topologiquement complet séparable. La fonction $h(\tau)$ fait correspondre l'ensemble T et l'espace $N \times N$ tout entier d'une façon continue et biunivoque.⁽¹⁾

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} M_{n+i} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M_{n+i}$$

et par suite

$$h^{-1}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h^{-1}(M_{n+i}) = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} h^{-1}(M_{n+i}).$$

D'autre part, nous avons

$$h^{-1}(M_{n+i}) = T \cdot (S^{(1)} \times S^{(2)} \times \dots \times S^{(n+i-1)} \times N^{(n+i)} \times S^{(n+i-1)} \times \dots)$$

où $S^{(n)}$ désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $0 < t < 2$ et $N^{(n)} = N$ (n étant un entier positif quelconque). Donc $h^{-1}(M_{n+i})$ est un ensemble fermé et ouvert relativement à T pour tout n et i naturels. Par conséquent l'ensemble $h^{-1}(E)$ est un F_σ et G_δ relativement à l'ensemble T .

Donc, l'ensemble $h^{-1}(E)$ est développable en série alternée des ensembles fermés relativement à T :

$$h^{-1}(E) = F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots + F_{2\lambda} - F_{2\lambda+1} + \dots,$$

$$1 \leq 2\lambda + 1 < \gamma < \mathfrak{Q},$$

(1) Voir N. LUSIN: Les ensembles analytiques, p. 120 ; C. KURATOWSKI, loc. cit., p. 230.

où les ensembles F_α sont décroissants. La fonction $h(\tau)$ étant biunivoque, nous pouvons poser

$$(1) \quad E = h(F_0) - h(F_1) + h(F_2) - h(F_3) + \dots + h(F_{2\lambda}) - h(F_{2\lambda+1}) + \dots$$

Considérons maintenant l'ensemble $N \times N - h(F_\alpha) = h(T - F_\alpha)$. L'ensemble $T - F_\alpha$ est ouvert relativement à T . Donc $T - F_\alpha$ est une somme d'une infinité dénombrable des ensembles de la forme:

$$\begin{aligned} & T(\delta_{l_1^1, l_2^1, \dots, l_k^1} \times \delta_{l_1^2, l_2^2, \dots, l_k^2} \times \dots \times \delta_{l_1^m, l_2^m, \dots, l_k^m} \\ & \quad \times S^{(m+1)} \times S^{(m+2)} \times \dots) \\ &= T(\delta_{l_1^1, l_2^1, \dots, l_k^1} \cdot E^{(1)} \times \delta_{l_1^2, l_2^2, \dots, l_k^2} \cdot E^{(2)} \times \dots \\ & \quad \times \delta_{l_1^m, l_2^m, \dots, l_k^m} \cdot E^{(m)} \times S^{(m+1)} \times S^{(m+2)} \times \dots) \end{aligned}$$

où $\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) sont ou bien des intervalles de BAIRE, ou bien leurs congruents contenus dans l'intervalle $1 < t < 2$. Or, cet ensemble coïncide avec

$$\begin{aligned} & T(\delta_{l_1^1, l_2^1, \dots, l_k^1} \cdot E^{(1)} \times S^{(2)} \times S^{(3)} \times \dots) \cdot (S^{(1)} \times \delta_{l_1^2, l_2^2, \dots, l_k^2} \cdot E^{(2)} \times S^{(3)} \dots) \\ & \quad \dots (S^{(1)} \times S^{(2)} \times \dots \times S^{(m-1)} \times \delta_{l_1^m, l_2^m, \dots, l_k^m} \cdot E^{(m)} \times S^{(m+1)} \times \dots). \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} & h \left\{ T(S^{(1)} \times S^{(2)} \times \dots \times S^{(i-1)} \times \delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot E^{(i)} \times S^{(i+1)} \times \dots) \right. \\ & \quad \left. = f_i(\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot E^{(i)}) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

En effet, pour tout point t_i de $\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot E^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$), il existe une suite de nombres irrationnels $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots$ telle que $f_i(t_i) = f_1(t_1) = f_2(t_2) = \dots$. Par suite,

$$\begin{aligned} & h \left\{ T(S^{(1)} \times S^{(2)} \times \dots \times S^{(i-1)} \times \delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot E^{(i)} \times S^{(i+1)} \times \dots) \right\} \\ & \quad \supseteq f_i(\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot E^{(i)}) \end{aligned}$$

d'où s'ensuit immédiatement l'identité de ces deux ensembles.

Enfin, l'égalité

$$f_i(\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot E^{(i)}) = \varphi_i(\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot Z^{(i)}) + \psi_i(\delta_{l_1^i, l_2^i, \dots, l_k^i} \cdot U^{(i)})$$

montre que cet ensemble appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$. Comme $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$ est multiplicative, l'ensemble

$$h\left\{T\left(\delta_{l_1^1, l_2^1, \dots, l_k^1} \times \delta_{l_1^2, l_2^2, \dots, l_k^2} \times \dots \times \delta_{l_1^m, l_2^m, \dots, l_k^m} \times S^{(m+1)} \times S^{(m+2)} \times \dots\right)\right\}$$

lui appartient également. Par conséquent, $h(T - F_\alpha)$ est un ensemble de $\{(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}\}_\sigma = (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$. Il s'ensuit que $h(F_\alpha)$ appartient à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. Ainsi, la série alternée (1) donne un développement que nous avons désiré.

Le lemme établi nous permet de généraliser le Théorème 7 comme il suit :

Théorème 8 (de sections F_σ). Soit M un ensemble plan qui appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{c\delta\sigma\delta}$. Alors, l'ensemble $\Delta(M)$ (Voir la définition du Théorème 6, ou le commencement de ce paragraphe) est un complémentaire analytique.

Démonstration. Rangeons, tout d'abord, tous les nombres rationnels en une suite simple : $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les points (x, y) de M , tels que la droite parallèle à l'axe OY, passant par le point (x, y) , coupe M en un ensemble F_σ non vide. Nous avons vu⁽¹⁾ que $\mathfrak{M}$ est un complémentaire analytique. La partie commune à la droite $y = r_n$ (parallèle à l'axe OX) et à l'ensemble $\mathfrak{M}$ est donc un complémentaire analytique. Désignons par A_n la projection de cet ensemble sur l'axe OX. Nous avons alors l'identité :

$$\Delta(M) = \Delta\{M \cdot (OX \times N)\} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

Ceci montre que nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que M est situé dans le plan $N \times N$ et appartient à la fois à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G}')_{\sigma\delta\sigma}$ et à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G}')_{\sigma\delta\sigma c}$ où $\mathfrak{G}'$ désigne la famille de tous les ensembles ouverts par rapport à N . Comme nous avons

(1) Corollaire du théorème 5. Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques, I, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series, I, Vol. VII, 1939, p. 161-189.

$(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_\sigma = (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$, M peut être supposé appartenant à la fois à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma}$ et à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$ (le complémentaire étant pris par rapport à $N \times N$).

M étant un ensemble de $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$, il est développable en série alternée dénombrable (transfinie) d'ensembles $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$.

$$(2) \quad M = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + A_{2\lambda} - A_{2\lambda+1} + \cdots, \\ 1 \leq 2\lambda + 1 < \gamma < \Omega$$

À tout point x de la projection de M sur l'axe OX , correspondent des nombres ordinaux α tels que la projection de $A_{2\alpha} - A_{2\alpha+1}$ sur l'axe OX contienne le point x . Soit $\alpha_0 = \alpha(x)$ le premier de ces nombres. Or, l'ensemble $CA_{2\lambda+1}$ appartenant à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$, nous pouvons poser :

$$CA_{2\lambda+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\lambda, n}; \quad A_{2\lambda} - A_{2\lambda+1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\lambda, n}, \quad B_{\lambda, n} = A_{2\lambda} \cdot F_{\lambda, n}$$

où $F_{\lambda, n}$ appartient à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{c\delta}$, et par suite $B_{\lambda, n} \in (\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta}$.

Si la section de M engendrée par $(x, 0)$ est un F_σ , la section de $B_{\alpha_0, n}$ ($\alpha_0 = \alpha(x)$) engendrée par $(x, 0)$ l'est également. En effet, nous avons d'abord

$$(x \times OY) \cdot M = (x \times OY) (A_{2\alpha_0} - A_{2\alpha_0+1} + A_{2\alpha_0+2} - A_{2\alpha_0+3} + \cdots)$$

et d'autre part A_α étant décroissants,

$$(3) \quad (x \times OY) \cdot M \cdot CA_{2\alpha_0+1} = (x \times OY) \cdot (A_{2\alpha_0} - A_{2\alpha_0+1})$$

Or, $(x \times OY) \cdot M$ est un F_σ d'après l'hypothèse, et d'autre part $(x \times OY) CA_{2\alpha_0+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x \times OY) F_{\alpha_0, n}$ est un F_σ également. Donc, le membre droit de (3) est un F_σ . Par suite, $(x \times OY) B_{\alpha_0, n} = (x \times OY) (A_{2\alpha_0} - A_{2\alpha_0+1}) F_{\alpha_0, n}$ est un F_σ . D'ailleurs, il existe au moins un indice n , tel que $(x \times OY) B_{\alpha_0, n}$ soit non vide. Cela revient à dire que $\Delta(M)$ est contenu dans $\sum_{1 \leq 2\lambda+1 < \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(B_{\lambda, n})$, d'où l'égalité

$$(4) \quad \Delta(M) = \Pi(M) \cdot \left\{ \sum_{1 \leq 2\lambda+1 < \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(B_{\lambda, n}) \right\}.$$

Or, d'après le Théorème 5 et le Théorème 6, les ensembles $\Pi(M)$ et $\Delta(B_{\alpha, n})$ sont des complémentaires analytiques. Ainsi, la formule (4) montre bien que $\Delta(M)$ est un complémentaire analytique.

c. q. f. d.

§ 7. Les ensembles atomiques des cribles.

Un ensemble plan C sera dit *crible plan* (d'après M. N. LUSIN), s'il est une somme d'une infinité dénombrable des ensembles boreliens situés sur les droites parallèles à l'axe OX (le plan étant OXY). Nous supposons de plus (ce qui n'altérera pas la généralité) que ces droites passent les points rationnels $(0, y)$. Étant donné un point $(x, 0)$ de l'axe OX , nous appellerons "section" de C engendrée par $(x, 0)$, la partie commune de C et de la droite parallèle à l'axe OY , passant par le point $(x, 0)$. α étant un type d'ordre dénombrable, nous désignerons par ε_α la somme de tous les points $(x, 0)$ qui engendrent les sections de C du type d'ordre α suivant la direction positive de l'axe OY . À chaque ensemble ϕ des types d'ordre dénombrables correspond alors un ensemble-somme $E(\phi)$ de tous les ensembles ε_α , la sommation s'étendant à tous les α de ϕ .

On sait qu'en particulier si ϕ se constitue de tous les nombres ordinaux α de première et de seconde classe: $0 \leq \alpha < \Omega$, l'ensemble $E(\phi)$ est un complémentaire analytique, et les ensembles ε_α ($0 \leq \alpha < \Omega$) sont des ensembles boreliens,—résultats dûs à M. N. LUSIN.

M. C. KURATOWSKI⁽¹⁾ a étudié systématiquement les ensembles $E(\phi)$ (en se bornant au crible de M. H. LEBESGUE), et a donné une des leurs classifications.⁽²⁾ Comme l'ensemble ε_α (α étant un type d'ordre dénombrable arbitraire) n'est pas divisible dès que le crible soit fixé, nous l'appellerons *ensemble atomique*. M. C. KURATOWSKI a démontré⁽³⁾ que tout ensemble atomique est analytique, et a posé un problème: si cet ensemble n'est pas nécessairement borelien? Tout de suite après, M. S. HARTMAN a repris ces études, et a montré⁽⁴⁾ que l'ensemble atomique ε_α est toujours borelien pour tout α tel que $m(\alpha) \leq \aleph_0$, en désignant par $m(\alpha)$ la puissance de l'ensemble de toutes les transformations biunivoques et semblables⁽⁵⁾ d'un ensemble ordonné du type α en lui-même. M. S. HARTMAN a remarqué d'ailleurs que cette condition: $m(\alpha) \leq \aleph_0$ n'est pas nécessaire pour

(1) C. KURATOWSKI: Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable. Fund. Math. t. XXVIII. p. 167-185.

(2) ibid. pp. 169.

(3) ibid. p. 173.

(4) S. HARTMAN: Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen, Fund. Math. t. XXIX. p. 209-214.

(5) Une transformation biunivoque et semblable est celle qui fait correspondre les éléments de deux ensembles biunivoquement et qui conserve les relations d'ordre.

que l'ensemble ε_α soit borelien⁽¹⁾, et il a laissé ouvert la question : quelle est la condition exacte pour que ε_α soit borelien? ou bien, n'est-il pas toujours borelien? Or, nous allons montrer que l'ensemble ε_α est toujours borelien.

Théorème 9. *Pour tout type d'ordre dénombrable α , l'ensemble atomique est toujours borelien.*

Démonstration. La méthode de M. N. LUSIN pour montrer que les constituantes ε_α ($0 \leq \alpha < \Omega$) des complémentaires analytiques sont boreliens est basée sur le principe d'induction transfinie⁽²⁾. Tandis que celle de MM. C. KURATOWSKI et S. HARTMAN fait appel au théorème de projection. Notre méthode n'est qu'une précision de celle de ces deux mathématiciens varsoviens.

Soit α le type d'ordre dénombrable donné. Rangeons tous les nombres rationnels en une suite déterminée :

$$(1) \quad r(1), r(2), r(3), \dots, r(n), \dots$$

On sait bien qu'il existe un ensemble E des nombres rationnels ayant le type α . Les nombres de E forment une suite partielle de (1) qu'on peut désigner par

$$(2) \quad r(n_1), r(n_2), r(n_3), \dots, r(n_k), \dots; \\ n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

Nous disons que deux indices k_1 et k_2 sont congruents s'il existe une transformation biunivoque et semblable de E sur lui-même, qui fait correspondre le nombre $r(n_{k_1})$ à $r(n_{k_2})$, et nous le désignons par $k_1 \sim k_2$. Nous pouvons dire immédiatement que 1) $k \sim k$; 2) si $k_1 \sim k_2$, alors $k_2 \sim k_1$; 3) si $k_1 \sim k_2$, $k_2 \sim k_3$, alors $k_1 \sim k_3$. Donc, les indices (2) se groupent en classes déterminées des indices congruents. Deux classes différentes n'ont aucun indice commun.

Nous disons encore qu'étant donné un nombre fini d'indices

$$(3) \quad k_1^0, k_2^0, k_3^0, \dots, k_m^0,$$

deux indices k' et k'' sont *congruents relativement aux systèmes* (3), s'il existe une transformation biunivoque et semblable de E en lui-

(1) Il suffit de considérer le cas où α est le type η de l'ensemble de tous les nombres rationnels.

(2) N. LUSIN: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930, p. 188.

même qui fait correspondre le point $r(n_{k'})$ à $r(n_{k''})$ et laisse les points $r(n_{k_i}^0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) invariables.

Considérons maintenant l'espace $OXYZ$ à trois dimensions, dont l'axe OX se constitue de l'intervalle $N: 0 < x < 1$ formé de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1. Nous allons construire, avec M. N. LUSIN⁽¹⁾, une suite de fonctions $z = f_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) définies et continues sur N , et dont les images $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ jouissent de deux propriétés suivantes:

1°) si $r(n_i) < r(n_j)$, $i \neq j$ la courbe L_i est entièrement au-dessous de la courbe L_j .

2°) Quelque soit un ensemble e formé de points rationnels et semblable à l'ensemble E , il existe un point irrationnel x_0 tel que les points-intersections des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ et de la droite $z = x_0$ forment précisément l'ensemble e .

La fonction $z = f_1(x)$ dont l'image est la première courbe L_1 sera définie de la manière suivante: $f_1(x) = r(m_1)$ pour tout x de δm_1 ($m_1 = 1, 2, 3, \dots$). Supposons que nous ayons déjà défini les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ définies et continues sur l'ensemble N tout entier. Nous supposons que la fonction f_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) est constante dans les intervalles de BAIRE d'ordre i et ne possède que des valeurs rationnelles, et que les courbes L_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k-1$) qui sont images des fonctions f_i jouissent de la propriété suivante: la position mutuelle des courbes $L_1, L_2, \dots, L_{k-1}$ est la même que celles des points rationnels $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_{k-1})$, supposés d'être situés sur l'axe OZ . Pour définir la fonction f_k , dont l'image est la courbe L_k , considérons la suite des intervalles de BAIRE d'ordre k : $\delta m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, 1, \delta m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, 2, \dots, \delta m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k, \dots$. Or, tous les nombres rationnels situés dans la même position par rapport aux $f_1(\delta m_1), f_2(\delta m_1, m_2), \dots, f_{k-1}(\delta m_1, m_2, \dots, m_{k-1})$ ⁽²⁾ que le point $r(n_k)$ par rapport aux points $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_{k-1})$ forment une suite partielle de (1), qu'on peut désigner par $r'_1, r'_2, \dots, r'_{m_k}, \dots$ ($m_k = 1, 2, 3, \dots$), en les numérotant d'après les ordres des termes qui se trouvent dans la suite (1). Nous poserons $f_k(x) = r'_{m_k}$ pour tout x de $\delta m_1, m_2, \dots, m_k$. La fonction f_k est ainsi complètement définie et continue dans N puisqu'elle est constante dans les inter-

(1) La construction des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ a été donnée par M. N. LUSIN. Voir N. LUSIN loc. cit. p. 211.

(2) $f_i(\delta m_1, m_2, \dots, m_i)$ désigne la valeur de la fonction $f_i(x)$ pour $x \in \delta m_1, m_2, \dots, m_i$ que nous avons supposée constante.

valles de BAIRE d'ordre k . La position mutuelle des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k$, est la même que celle des points $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_k)$. Étant donné un ensemble e formé des points rationnels, semblable à l'ensemble E , nous désignons par $M(e)$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels x_0 , tel que les points-intersections des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ et de la droite $z = x_0$ forment précisément l'ensemble e . Comme M. N. LUSIN l'a montré, l'ensemble $M(e)$ n'est pas vide. En effet, il existe une transformation biunivoque et semblable de E en e . Désignons par $\zeta(k)$ le nombre de e qui correspond à $r(n_k)$ de E . Il existe alors un et un seul intervalle de BAIRE $\delta m_1, m_2, \dots, m_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), tel que $f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k) = \zeta(k)$. Le point irrationnel $(m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ appartient à $M(e)$.

S'il existe deux points x_0 et x'_0 tels que les sections de la réunion des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ qu'on désignera par S , engendrées par le point x_0 et x'_0 donnent un ensemble précisément identique à e , nous avons deux correspondances biunivoques et semblables entre E et e . Supposons le point $\zeta(k)$ de e correspond à $r(n_k)$ et à $r(n_{k'})$ par ces correspondances. En faisant correspondre l'indice k à k' , nous obtenons une transformation biunivoque et semblable de E en lui-même.

Inversement, s'il existe une correspondance biunivoque et semblable de E en lui-même, nous avons deux points différents de $M(e)$.

Maintenant, passons à la construction d'une suite des surfaces situées dans l'espace $OXYZ$, que nous appellerons *ensemble de similitude*. Il dépend du crible donné. Soit C le crible donné que nous supposons situé dans le plan OYZ . C est formé d'une somme d'une infinité dénombrable des ensembles boreliens qui sont situés sur les droites parallèles à l'axe OY dont les hauteurs sont des nombres rationnels. Nous désignons ces ensembles boreliens par

$$(4) \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots$$

dont les hauteurs peuvent être supposées égales respectivement à $r(1), r(2), \dots, r(n), \dots$ (σ_n peut être un ensemble vide).

Notre ensemble de similitude se compose d'une infinité dénombrable des surfaces qu'on désignera par

$$(5) \quad F_1, F_1^*, F_2, F_2^*, \dots, F_n, F_n^*, \dots$$

Voici leur construction :

Désignons par R l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace $OXYZ$ dont les coordonnées z sont rationnelles (x désignant les nombres irrationnels entre 0 et 1, tandis que y sont des nombres réels).

1°) Premier procédé. La surface F_1 est définie par $F_1 = L_1 \times OY$. Désignons l'ensemble $S \times OY$ par G_0 et supprimons tous les points (x, y, z) de $G_0 - F_1$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, m_3, \dots, m_k, k > 1, y \in OY, z = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$, et satisfaisant aux conditions: 1) $k \sim 1$; 2) il existe un indice m'_1 tel que $z = f_1(\delta m'_1) = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$ et que $m'_1 < m_1$. Désignons le reste par G_1 .

2°) Deuxième procédé. Considérons ensuite l'ensemble $OX \times \sigma_1$ dans l'espace $OXYZ$. Cet ensemble sera des points communs avec $G_1^{(1)}$. La section de cette partie commune avec la droite $y = y_0, z = r(1)$ telle que le point (y_0, z) appartient à σ_1 ne dépend pas de y_0 . Cette section (ou la projection de cette partie commune sur le plan OXZ) se compose d'une infinité dénombrable des intervalles de BAIRE dans la droite $z = r(1)$ située dans le plan OXZ , qui constituent des segments des courbes considérées plus haut. Dans chaque intervalle d'ordre 1: δm_1 , supprimons tous les intervalles ainsi obtenus: $\delta m_1, m_2, m_3, \dots, m_k, k > 1$, s'ils possèdent un intervalle également ainsi obtenu d'ordre inférieur k' qui est congruent à k par rapport à 1. Désignons le reste par $T_1(1)$, et posons $F_1^* = T_1(1) \times (\text{Proj de } \sigma_1)$.

3°) Troisième procédé. Désignons par G_2 l'ensemble exprimé par $\{R - (OX \times \sigma_1)\} G_1 + F_1^*$. Définissons d'abord la surface F_2 par $F_2 = G_2 \cdot (L_2 \times OY)$. Supprimons ensuite tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_2 - F_2$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \dots, m_k, k > 2, y \in$ la projection de σ_1 (sur l'axe OY), $z = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$ et satisfaisant aux conditions: 1) il existe un indice $k' (k' > 2)$ tel que $\delta m_1, m_2, \dots, m_{k'}$ est un intervalle de l'ensemble T_1 ; 2) $k \sim 2$, par rapport à 1 et k' ; 3) il existe un indice m'_2 tel que $z = f_2(\delta m_1, m'_2) = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$ et que $m'_2 < m_2$.

Supprimons enfin tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_2 - F_2$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \dots, m_k, k > 2, y$ n'appartiennent pas à la projection de σ_1 (sur l'axe OY), et satisfaisant aux conditions: 1) $k \sim 2 (k > 2)$ par rapport à 1; 2) il existe un indice m'_2 tel que

(1) Nous supposons que σ_1 n'est pas vide. Si σ_1 est vide, nous pouvons omettre le deuxième procédé. Dans ce cas, la surface F_1^* est vide.

$z = f_2(\delta m_1, m'_2) = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$ et que $m'_2 < m_2$. Désignons le reste par G_3 .

Supposons que nous ayons défini les surfaces F_{n-1} , F_{n-1}^* et les ensembles G_{2n-3} .

4°) $2n-1$ -ième procédé. Désignons par G_{2n-2} l'ensemble exprimé par $\{R - (OX \times \sigma_{n-1})\} \cdot G_{2n-3} + F_{n-1}^*$. Définissons d'abord la surface F_n par $F_n = G_{2n-2}(L_n \times OY)$. Considérons ensuite les points (x, y, z) de l'ensemble $G_{2n-2} - F_n$. À la coordonnée y , correspond une suite finie d'indices :

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_l \quad (\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_l),$$

l'ensemble de tous les indices ν_m tels que le point $(z = r(\nu_m), y)$ du plan OYZ appartient à l'ensemble σ_{ν_m} et que $\nu_m < n$. Désignons par $E_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_l$, l'ensemble de tous les nombres y auxquels correspond la suite $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_l$. Désignons encore par $E_n(0)$ le complémentaire (par rapport à l'axe OY) de la somme des projections de σ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots, n-1$) (sur l'axe OY). Comme tout système $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_l$ est un sous-ensemble de l'ensemble des entiers positifs $1, 2, 3, \dots, n-1$, pour tout nombre n , il n'existe qu'un nombre limité des ensembles $E_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$ (il ne peut en effet surpasser le nombre 2^{n-1}). D'ailleurs, il est évident que les ensembles $E_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$ et $E_n(0)$ sont toujours boreliens.

Supprimons tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_{2n-2} - F_n$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \dots, m_k$, $k > n$, $y \in E_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$, $z = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$, et satisfaisant aux conditions : 1) il existe des indices $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'_l$ tel que $\delta m_1, m_2, \dots, m_{k'_m}$ est un intervalle de $T_{\nu_m}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ défini dans le 2^{ν_m} -ième procédé, $m = 1, 2, \dots, l$; 2) $k \sim n$ par rapport à $1, 2, 3, \dots, n-1$ et $k'_1, k'_2, \dots, k'_l$; 3) il existe un indice m'_n tel que $z = f_n(\delta m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m'_n) = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n, \dots, m_k)$ et que $m'_n < m_n$.

Supprimons enfin tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_{2n-2} - F_n$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \dots, m_k$ ($k > n$), $y \in E_n(0)$, $z = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k)$, et satisfaisant aux conditions : 1) $n \sim k$ par rapport à $1, 2, 3, \dots, n-1$; 2) il existe un indice m'_n tel que $z = f_n(\delta m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m'_n) = f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n, \dots, m_k)$ et que $m'_n < m_n$.

Désignons le reste par G_{2n-1} .

5°) 2n-ième procédé. Considérons l'ensemble $G_{2n-1}(OX \times \sigma_n)^{(1)}$. Cet ensemble se partage en un nombre limité des ensembles suivant que y appartienne à $E_{n+1}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$, $\nu_l = n$. La projection de cet ensemble sur le plan OXZ se compose d'une infinité dénombrable des intervalles de BAIRE dans la droite $z = r(n)$ située dans le plan OXZ . Supprimons dans chaque intervalle $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_n}$ tous les intervalles $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ($k > n$), satisfaisant aux conditions: 1) il existe des indices $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'_{l-1}$ tel que $\delta_{m_1, m_2, \dots, m_{k'_m}}$ soit un intervalle de $T_{\nu_m}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$, $m = 1, 2, \dots, l-1$, supposés déjà définis; 2) il existe un indice k' inférieur à k , qui est congruent à k par rapport à $1, 2, 3, \dots, n$ et $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'_{l-1}$. Désignons le reste par $T_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$, et posons

$$F_n^* = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{l-1}} T_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l) \times E_{n+1}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l), \quad \nu_l = n.$$

Continuons ainsi de suite.

Désignons par γ l'ensemble de similitude ainsi défini, et par γ' l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace dont les coordonnées z sont rationnelles et qui n'appartiennent pas à γ , et soit θ_1 la projection de $\gamma'(OX \times C)$ sur le plan OXY . Désignons par C' l'ensemble de tous les points (x, z) du plan OXZ , complémentaire au crible C , et soit θ_2 la projection de l'ensemble $\gamma \cdot (OX \times C')$ sur le plan OXY . Désignons enfin par θ le complémentaire de la somme $\theta_1 + \theta_2$ par rapport au plan OXY . L'ensemble θ jouit alors de la propriété suivante: pour qu'un point (x_0, y_0) appartienne à θ , il faut et il suffit que la section de γ engendrée par le point (x_0, y_0) soit identique à la section de C engendrée par le point y_0 (dans le plan OYZ). En effet, pour que le point (x_0, y_0) n'appartienne pas à θ_1 , il faut et il suffit que tous les points de la section de C engendrée par le point y_0 soient contenues dans celle de γ engendrée par le point (x_0, y_0) (lorsqu'on considère les projections de ces sections sur l'axe OZ). D'autre part, pour que (x_0, y_0) n'appartienne pas à θ_2 , il faut et il suffit que la section de γ engendrée par le point (x_0, y_0) soit contenue dans la section de C engendrée par le point y_0 .

Désignons d'autre part par S' l'ensemble de tous les points (x, z) du plan OXZ dont les coordonnées z sont rationnelles et qui n'appartiennent pas à S . Soient ϕ_1 la projection de l'ensemble $(S' \times OY)$.

(1) Nous supposons que σ_n n'est pas vide. Si σ_n est vide, nous pouvons omettre le 2n-ième procédé. Dans ce cas, la surface F_n^* est un ensemble vide.

$(OX \times C)$ sur le plan OXY , et Φ_2 la projection de $(S \times OY) \cdot (OX \times C')$ sur le plan OXY . Désignons enfin par Φ le complémentaire (par rapport au plan OXY) de la somme $\Phi_1 + \Phi_2$. La projection de Φ sur l'axe OY coïncide avec l'ensemble ε_α , et pour tout point y_0 de ε_α , si l'on désigne par e la section de C engendrée par le point y_0 , l'intersection Φ de avec la droite $y = y_0$ coïncide avec l'ensemble $M(e)$ (quand on le projète sur l'axe OX). En effet, pour que le point (x_0, y_0) appartienne à $C\Phi_1$ il faut et il suffit que tous les points de la section e de C engendrée par le point y_0 soient contenus dans celle de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) (lorsqu'on considère les projections sur l'axe OZ). D'autre part, pour que le point (x_0, y_0) appartienne à $C\Phi_2$, il faut et il suffit que la section de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) soit une partie de la section de C engendrée par le point y_0 . Par suite, d'abord la section de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) de Φ coïncide avec la section de C engendrée par le point y_0 .

Or, la section de $S \times OY$ étant toujours semblable à l'ensemble E , y_0 appartiendra à ε_α . Deuxièmement, si la section de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) , coïncide avec la section de C engendrée par y_0 , (x_0, y_0) appartient à Φ . Et d'autre part, si y_0 appartient à ε_α , il existe un point x_0 de l'ensemble $M(e)$, en désignant par e la section de C engendrée par le point y_0 . Donc il existe un point (x_0, y_0) de Φ . Ainsi, la projection de Φ sur l'axe OY et l'ensemble ε_α coïncident complètement.

Maintenant, considérons la partie commune à Θ et à Φ . Nous allons voir d'abord que la projection de l'ensemble $\Theta \cdot \Phi$ sur l'axe OY coïncide avec celle de Φ (c. à d. avec l'ensemble ε_α). Soit, en effet, y_0 un point quelconque de ε_α . La section e de C engendrée par le point y_0 est une suite partielle déterminée de (1) qu'on peut désigner par

$$(6) \quad r(m_1), r(m_2), \dots, r(m_\nu), \dots; m_1 < m_2 < \dots < m_\nu < \dots$$

(Nous pouvons supposer que l'indice ν parcourt tous les nombres naturels). Il existe alors une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6).

Soit l_1 le plus petit des m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation binnivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2) (une telle transformation existe toujours puisque y_0 appartient à ε_α). Soit deuxièmement l_2 le plus petit des m_ν satisfaisant à la condition: il existe une

transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_2)$ de (2). Soit troisièmement l_3 le plus petit des m_v satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_3)$ de (2). Continuons ainsi de suite jusqu'à l_{m_1} .

Soit maintenant p_1 le plus petit des indices n_k satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_{m_1})$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_{m_1})$ de (2), et en même temps $r(m_1)$ de (6) à $r(n_k)$ de (2). Soit ensuite l_{m_1+1} le plus petit des indices m_v satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6) qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_{m_1})$ et $r(m_1)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_{m_1})$ et $r(p_1)$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_{m_1+1})$ de (2)⁽¹⁾. Soit l_{m_1+2} le plus petit des indices m_v , satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6) qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_{m_1})$, $r(l_{m_1+1})$ et $r(m_1)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_{m_1})$, $r(n_{m_1+1})$, et $r(p_1)$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_{m_1+2})$ de (2). Continuons ainsi de suite jusqu'à l_{m_2} . Soit p_2 le plus petit des indices n_k satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_{m_2})$ et $r(m_1)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_{m_1})$ et $r(p_1)$ de (2), et en même temps $r(m_2)$ de (6) à $r(n_k)$ de (2). Soit ensuite l_{m_2+1} le plus petit des indices m_v satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6) qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_{m_2})$ et $r(m_1)$, $r(m_2)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_{m_2})$ et $r(p_1)$, $r(p_2)$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_{m_2+1})$ de (2). Continuons ainsi de suite.

Nous pouvons donc déterminer une suite d'indices

$$(7) \quad l_1, l_2, l_3, \dots, l_k, \dots$$

de telle sorte que, pour tout nombre entier positif k , il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6),

(1) Il faut remarquer que la condition que la transformation fait correspondre $r(m_1)$ de (6) à $r(p_1)$ de (2) est superflue dans le cas où p_1 se trouve parmi $n_1, n_2, \dots, n_{m_1}$.

qui fait correspondre $r(l_1), r(l_2), \dots, r(l_k)$ de (6) à $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_k)$ de (2). Donc la position mutuelle des nombres rationnels $r(l_1), r(l_2), \dots, r(l_2), \dots, r(l_k)$ est précisément égale à celle de $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_k)$. Considérons la transformation définie par la correspondance :

$$(8) \quad r(n_k) \text{ de la suite (2) correspond à } r(l_k) \text{ de la suite (6),} \\ k = 1, 2, 3, \dots$$

Cette transformation est biunivoque et semblable, puisque, comme nous avons vu plus haut, la transformation partielle entre $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_k)$ et $r(l_1), r(l_2), \dots, r(l_k)$ est biunivoque et semblable pour tout $k, k = 1, 2, 3, \dots$. Considérons d'autre part l'intervalle de BAIRE d'ordre $1: \delta_{l_1}$. Nous avons alors $f_1(\delta_{l_1}) = r(l_1)$. Comme $r(l_2)$ est situé dans la même position par rapport à $r(l_1)$ que le nombre $r(n_2)$ par rapport au nombre $r(n_1)$, il existe sûrement un intervalle unique d'ordre $2: \delta_{l_1}, l'_2$ tel que $r(l_2) = f_2(\delta_{l_1}, l'_2)$. En général, supposons que nous ayons déterminé les nombres $l'_2, l'_3, \dots, l'_{k-1}$ de sorte que $r(l_2) = f_2(\delta_{l_1}, l'_2), r(l_3) = f_3(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3), \dots, r(l_{k-1}) = f_{k-1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{k-1})$. Comme $r(l_k)$ est situé dans la même position par rapport à $r(l_1) = f_1(\delta_{l_1}), r(l_2) = f_2(\delta_{l_1}, l'_2), \dots, r(l_{k-1}) = f_{k-1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{k-1})$ que le nombre $r(n_k)$ par rapport aux nombres $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_{k-1})$, il existe sûrement un intervalle unique d'ordre k tel que $r(l_k) = f_k(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3, \dots, l'_k)$.

Ainsi, nous obtenons un point irrationnel déterminé

$$(9) \quad x_0 = (l_1, l'_2, l'_3, l'_4, \dots, l'_k, \dots)$$

tel que $r(l_k) = f_k(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3, \dots, l'_k)$. La section de l'ensemble S engendrée par le point $(x_0, 0)$ dans le plan OXZ est précisément l'ensemble de tous les nombres rationnels $r(l_k)$. Or, cet ensemble est précisément e . En effet, il est clair que $r(l_k)$ appartient à e quel que soit $k, k = 1, 2, 3, \dots$. D'autre part, pour tout nombre $r(m_v)$, il existe un indice k , tel que $r(l_k) = r(m_v)$. Pour cela, il nous suffit de considérer l'indice p_v qui se trouve parmi n_k . À p_k correspond un indice l_k , tel que $r(l_k) = r(m_v)$. Donc, l'ensemble de tous les $r(l_k)$ coïncide avec la suite (6). Donc le point (x_0, y_0) appartient à l'ensemble Φ .

Nous démontrons maintenant que le point (x_0, y_0) appartient encore à l'ensemble Θ . D'abord, le point $(x_0, y_0, f_1(\delta_{l_1}))$ appartient évidemment à F_1 . La section de γ engendrée par (x_0, y_0) est disjointe des surfaces $F_1^*, F_2^*, \dots, F_{m_1-1}^*$. Le point $(x_0, y_0, f_2(\delta_{l_1}, l'_2))$ est situé sur la surface F_2 . En effet, comme l_1 est le plus petit indice des m_v , tel que $r(m_v)$ de (6) correspond à $r(n_1)$ de (2) par une transformation biunivoque et semblable entre E et e , aucun $\delta_{m'_1}(m'_1 < l_1)$ ne contient le point de $M(e)$. Donc, les points $(x_0, f_k(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_k))$, ($k = 2, 3, 4, \dots$) appartiennent aux parties des courbes L_k ($k = 2, 3, 4, \dots$), qui ne sont pas supprimées par le premier procédé (voir p. 15). En particulier, le point $(x_0, y_0, f_2(\delta_{l_1}, l'_2))$ appartient donc à la surface F_2 . Comme l_2 est le plus petit des indices m_v satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre E et e , qui fait correspondre $r(l_1)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2), et, comme la suite des nombres rationnels $r'_1, r'_2, \dots, r'_n, \dots$ de la page 13 est rangée dans le même ordre que la suite (1), d'après la définition de la courbe L_2 , aucun $\delta_{l'_1, m'_2}(m'_2 < l_2)$ ne contient le point de $M(e)$. Donc, les points $(x_0, y_0, f_k(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_k))$ ($k = 3, 4, 5, \dots$) appartiennent aux parties des courbes L_k ($k = 3, 4, 5, \dots$), qui ne sont pas supprimées par le troisième procédé. En particulier, le point $(x_0, y_0, f_3(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3))$ appartient à la surface F_3 . Continuons ainsi de suite jusqu'à $r(l_{m_1}) = f_{m_1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{m_1})$. Le point $(x_0, y_0, f_{m_1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{m_1}))$ est situé sur la surface F_{m_1} . Ensuite, considérons le point $(x_0, y_0, r(m_1))$. Comme p_1 est l'indice le plus petit des n_k satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1), r(l_2), \dots, r(l_{m_1})$ de (6) à $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_{m_1})$, et en même temps $r(m_1)$ de (6) à $r(n_k)$ de (2). Donc le point $(x_0, y_0, f_{p_1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{p_1}))$ n'est pas supprimé par $2m_1$ -ième procédé. De plus, comme l_{m_1} est le plus petit des indices m_v satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1), r(l_2), \dots, r(l_{m_1-1})$ de (6) à $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_{m_1-1})$ de (2), et en même temps $r(m_v)$ de (6) à $r(n_{m_1})$ de (2). Donc, les points $(x_0, y_0, f_k(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3, \dots, l'_k))$, $k = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots$ ne sont pas supprimés pas le $2m_1 - 1$ procédé. En particulier, le point $(x_0, y_0, f_{p_1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{p_1}))$ (pour le cas où $p_1 \geq m_1 + 1$) n'est

pas supprimé par le procédé de ce numéro. La section de l'ensemble γ engendrée par le point (x_0, y_0) est disjointe des surfaces $F_{m_1+1}^*$, $F_{m_1+2}^*$, ..., $F_{m_2-1}^*$. Le point $(x_0, y_0, f_{m_1+1}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{m_1+1}))$ est situé sur la surface F_{m_1+1} .

Passons maintenant au point $(x_0, y_0, f_{m_1+2}(\delta_{l_1}, l'_2, \dots, l'_{m_1+2}))$, et continuons ainsi de suite. Pour tout nombre entier positif k , les points $(x_0, y_0, f_k(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3, \dots, l'_k))$ se trouvent dans l'ensemble γ . Cela montre que le point (x_0, y_0) n'appartient pas à Θ_1 . Comme d'autre part, l'ensemble γ est une partie de $S \times OY$, l'ensemble Θ_2 est une partie de Φ_2 . Nous avons déjà vu que (x_0, y_0) appartient à Φ . Il n'appartient donc pas à Φ_2 , à plus forte raison, ni à Θ_2 . Donc, il appartient à Θ . Ainsi, nous avons vu que le point (x_0, y_0) appartient à $\Theta \cdot \Phi$. Par conséquent, la projection de $\Theta \cdot \Phi$ sur l'axe OY coïncide avec l'ensemble ε_x .

Nous allons montrer maintenant que l'ensemble $\Theta \cdot \Phi$ satisfait encore à la condition suivante: *il possède au plus un point sur chaque droite parallèle à l'axe OX située sur le plan OXY .*

En effet, supposons que deux points (x_0, y_0) et (x'_0, y_0) ($x_0 \neq x'_0$) appartiennent à $\Theta \cdot \Phi$. Nous pouvons supposer que x_0 est le nombre irrationnel que nous avons considéré plus haut:

$$x_0 = (l_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_k, \dots).$$

Posons d'autre part,

$$x'_0 = (l''_1, l''_2, l''_3, \dots, l''_k, \dots).$$

Comme ces deux points appartiennent à Φ , il existe deux transformations, soient τ_1 et τ_2 , biunivoques et semblables entre les suites (2) et (6), définies par les points-intersections de la somme des courbes: $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k, \dots$.

En faisant correspondre le nombre rationnel $r(n_k)$ à $r(n_{k'})$ tel que $\tau_1(r(n_k)) = \tau_2(r(n_{k'}))$, nous avons une transformation de E sur lui-même, soit τ , qui est biunivoque et semblable.

Dans cette correspondance, examinons les nombres rationnels

$$(10) \quad r(n_1), r(n_2), r(n_3), \dots, r(n_{m_1}), r(p_1), r(n_{m_1+1}), \dots, \\ r(n_{m_2}), r(p_2), r(n_{m_2+1}), \dots,$$

et soit n_{k_0} ou p_{ν_0} le premier de ces nombres (dans l'ordre de cette série), qui satisfont à l'inégalité : $r(n_k) \neq r(n_{k'})$. Un tel n_{k_0} ou p_{ν_0} existe toujours, puisque la correspondance considérée n'est pas l'identité (cela résulte de l'inégalité $x_0 \neq x'_0$). Distinguons deux cas possibles.

Premier cas où n_{k_0} est le premier. Dans ce cas, nous avons d'après la définition $\tau_1(r(n_{k_0})) = \tau_2(r(n_{k_0}))$ et $r(n_{k_0}) \neq r(n_{k'})$. D'ailleurs, pour tout numéro précédent dans la suite (10), on a

$$\tau_1(r(n_k)) = \tau_2(r(n_k)) = r(l_k), \quad \tau_1(p_\nu) = \tau_2(p_\nu) = r(m_\nu).$$

Donc, d'après la définition de τ_1 , le numéro de $\tau_1(r(n_{k_0}))$ dans la suite (6) est plus petit que celui de $\tau_2(r(n_{k_0}))$. Par conséquent, le point $(x'_0, y_0, f_{k_0}(\delta'_{l'_1}, l'_2, \dots, l'_{k_0}))$ est supprimé par le $2k_0 - 1$ -ième procédé. Donc, le point (x'_0, y_0) ne peut être situé dans Θ .

Deuxième cas où p_{ν_0} est le premier. Dans ce cas, ce numéro $r(p_{\nu_0})$ n'est égale à aucun $r(n_k)$ qui précède $r(p_{\nu_0})$ dans la suite (10). Supposons qu'à ce $r(p_{\nu_0})$ correspond $r(n_k)$ par la transformation τ du plus haut. On a alors $\tau_1(r(p_{\nu_0})) = \tau_2(r(n_k)) = r(m_{\nu_0})$. Or, d'après la définition de p_{ν_0} , on a l'inégalité $p_{\nu_0} < n_k$. Et le point $(x'_0, y_0, f_k(\delta'_{l'_1}, l'_2, \dots, l'_k))$ est supprimé par le $2\nu_0$ -ième procédé. Donc, le point (x'_0, y_0) ne peut être situé dans l'ensemble Θ . Ainsi, dans tous les cas, nous sommes amenés à une contradiction. Toute droite dans le plan OXY , parallèle à l'axe OX , coupe par conséquent l'ensemble $\Theta \cdot \phi$ en un point au plus. M. N. LUSIN dit qu'un ensemble plan ϕ est uniformisé au moyen de l'ensemble $H(\subseteq \phi)$, si toute parallèle à l'axe OX qui rencontre ϕ , rencontre H en un et un seul point⁽¹⁾. Nous avons donc démontré que l'ensemble ϕ est uniformisé par l'ensemble $\Theta \cdot \phi$.

Enfin, nous allons démontrer que $\Theta \cdot H$ est un ensemble borelien. Pour cela, remarquons d'abord que six ensembles S, S', C, C', γ et γ' sont boreliens. Par suite, quatre ensembles $(S \times OY) \cdot (OX \times C'), (S' \times OY) \cdot (OX \times C), \gamma \cdot (OX \times C')$ et $\gamma' \cdot (OX \times C)$ sont des ensembles boreliens. De plus, les points de ces ensembles ont les coordonnées z rationnelles. Ils ne contiennent donc que des points situés sur une infinité dénombrable des plans parallèles au plan OXY . Les

(1) N. LUSIN, Sur le problème de M. JACQUES HADAMARD d'uniformisation des ensembles, *Mathematica* vol. IV (1930). p. 59.

ensembles ϕ_1 , ϕ_2 , θ_1 et θ_2 sont par suite boreliens. De là, s'ensuit que les ensembles ϕ et θ , comme complémentaires de $\phi_1 + \phi_2$ et de $\theta_1 + \theta_2$, sont boreliens. Ainsi, la partie commune $\theta \cdot \phi$ est borelienne.

L'ensemble ε_α coïncide, par conséquent, avec la projection, uniforme d'un ensemble borelien $\theta \cdot \phi$ sur l'axe OY . D'après un théorème classique de M. N. LUSIN⁽¹⁾, l'ensemble atomique ε_α est toujours un ensemble borelien. c. q. f. d.

(1) Voir p. ex. C. KURATOWSKI, Topologie I, p. 251.