



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	BEWERTUNGSTHEORETISCHER AUFBAU DER MULTIPLIKATIVEN IDEALTHEORIE
Author(s)	Moriya, Mikao
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 8(2-3), 109-144
Issue Date	1940
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55947
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_08_N2-3_109-144.pdf



BEWERTUNGSTHEORETISCHER AUFBAU DER MULTIPLIKATIVEN IDEALTHEORIE

Von

Mikao MORIYA

EINLEITUNG.

Die Bewertungstheorie, die zum erstenmal von HENSEL [1]⁽¹⁾ als die Theorie der p -adischen Zahlen in die Zahlentheorie eingeführt und dann später von KÜRSCHÁK [1] axiomatisch begründet worden ist, spielt heute in der Arithmetik eine große Rolle. Man weiß wohl, daß die Klassenkörpertheorie in algebraischen Zahlkörpern mit Hilfe der Bewertungstheorie vereinfacht worden ist (HASSE [1], CHEVALLEY [1]). Es ist aber bisher immer so gewesen, daß man zunächst die DEDEKINDsche Idealtheorie entwickelt und danach die Bewertungstheorie eingeführt hat. Man kann auch die Bewertungstheorie mit großem Erfolge auf die arithmetische Untersuchung der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen anwenden. Um die Punkte auf einer RIEMANNSchen Fläche arithmetisch als die Primdivisoren der Funktionenkörper aufzufassen, mußte man früher wie bei DEDEKIND-WEBER [1] und F. K. SCHMIDT [1], [2] in algebraischen Funktionenkörpern ein Analogon zur Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern entwickeln. Heute ist dieser umständliche Weg ganz entbehrlich, und man kann durch die Bewertungen der Funktionenkörper direkt zum Punktbegriff gelangen (F. K. SCHMIDT [3]).

Andererseits zeigt uns noch die eingehende Untersuchung der Bewertungstheorie, daß zwischen der Arithmetik der Ideal- und Bewertungstheorie an manchen Stellen Parallelismus existiert; z.B. zwischen der Zerlegung eines Primideals und der Fortsetzung einer Bewertung in einer algebraischen Erweiterung, und in der DEDEKIND-HILBERTschen Theorie für die Primideale und Bewertungen in galoisschen Erweiterungskörpern (KRULL [1], DEURING [1]). Außerdem kann man manche idealtheoretische Sätze aus denen der Bewertungstheorie ablesen.

(1) Die Zahlen zwischen eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

Daher scheint es mir nicht unwichtig, die Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern auf Grund der Bewertungstheorie mit möglichst wenigen idealtheoretischen Vorkenntnissen aufzubauen. Dieses Problem ist schon einmal von KRULL ([2], §§ 5, 6) in Angriff genommen worden, aber sein Beweisgang ist doch, meiner Ansicht nach, mehr idealtheoretisch eingestellt und erfordert noch ziemlich viele idealtheoretische Vorkenntnisse. Deswegen will ich in der vorliegenden Arbeit zu zeigen versuchen, wie man, von den bewertungstheoretischen Axiomen ausgehend, das genannte Problem erledigen kann.

In § 1 stellen wir drei Axiome auf und führen den Begriff der Werte der Ideale ein. Daß diese Axiome voneinander unabhängig sind, erfahren wir später in § 5. In § 2 definieren wir die Quasigleichheit der Ideale und entwickeln die ARTIN-VAN DER WAERDENsche Idealtheorie (VAN DER WAERDEN [2], § 103). Wie schon KRULL ([1], § 5) bemerkt, ist unsere Theorie über die von ARTIN-VAN DER WAERDEN hinaus auf gewisse Ringe, in denen der Teilerkettensatz nicht mehr gilt, anwendbar. In § 3 fügen wir außer den obigen drei Axiomen noch ein neues Axiom hinzu, und leiten ohne besondere Schwierigkeit die DEDEKIND-E. NOETHERsche Idealtheorie her (E. NOETHER [1], VAN DER WAERDEN [2], § 100–§ 102). In § 4 beweisen wir das Erfülltsein dieser vier Axiome in einer beliebigen (separablen oder inseparablen) endlichen algebraischen Erweiterung, wenn sie bereits im Grundkörper erfüllt sind. Dabei benutzen wir die von KRULL [1] und DEURING [1] entwickelte galoissche Theorie der bewerteten Normalkörper. Im letzten Paragraphen zeigen wir ohne große Mühe das Erfülltsein unserer Axiome bei einigen bekannten, arithmetisch wichtigen Beispielen. Schließlich beweisen wir, daß die vier Axiome voneinander unabhängig sind, und sie umgekehrt aus einigen gewonnenen Resultaten hergeleitet werden können.

§ 1. Werte der Ideale.

Im folgenden versteht man unter einer Bewertung w eines Körpers k stets eine *nicht-triviale, diskrete Exponentenbewertung*; d.h. w genügt den Exponentenbewertungspostulaten (VAN DER WAERDEN [1], § 73–76) und besitzt daneben noch folgende Beschaffenheiten:

- 1) Es existiert in k ein Element $\gamma \neq 0$ mit $w(\gamma) \neq 0$,
- 2) es gibt ein Primelement π von w ; d.h. $w(\pi)$ ist positiv, aber am kleinsten unter allen positiven Bewertungen.

Der Einfachheit halber wollen wir $w(a)$ den Wert von a in bezug auf w nennen.

Zwei Bewertungen w, w' heißen bekanntlich einander äquivalent, wenn es eine solche positive Zahl κ gibt, daß für jedes Element ξ aus k stets $w'(\xi) = \kappa w(\xi)$ ist. Aus der Definition sieht man sofort ein, daß die zu w und w' gehörigen Bewertungsringe zusammenfallen.

Es bezeichnet W eine Menge⁽¹⁾ von endlich oder unendlich vielen Bewertungen von k , und $\mathfrak{o}$ ist ein Ring mit k als Quotientenkörper, in dem folgende drei Axiome erfüllt sind⁽²⁾:

I. $\mathfrak{o}$ ist der Durchschnitt aller Bewertungsringe, welche den Bewertungen aus W zugehören.

II. Jedes Element aus $\mathfrak{o}$ besitzt für höchstens endlich viele verschiedene Bewertungen aus W einen von Null verschiedenen Wert.

III. Zu zwei beliebigen verschiedenen Bewertungen w_1, w_2 aus W existieren in $\mathfrak{o}$ Elemente γ_1, γ_2 , für welche $w_1(\gamma_1) > 0$, $w_2(\gamma_1) = 0$ und $w_1(\gamma_2) = 0$, $w_2(\gamma_2) > 0$ gelten.

Da wir in diesem Paragraphen durchweg die Bewertungen aus W in Betracht ziehen, so sprechen wir oft schlechthin von einer Bewertung. Ferner wollen wir der Kürze wegen jede Bewertung aus W als *normiert* annehmen; d.h. der Wert jedes Primelementes ist stets gleich 1. Nach I ist $\mathfrak{o}$ offenbar ein Integritätsbereich. Ferner schließt man leicht aus I, daß jedes Element aus $\mathfrak{o}$ für alle Bewertungen (aus W) einen nicht negativen Wert besitzt und umgekehrt ein Element, welches für alle Bewertungen einen nicht negativen Wert besitzt, zu $\mathfrak{o}$ gehört. Das Axiom III besagt, daß je zwei verschiedene Bewertungen aus W nicht äquivalent sind. Aus III folgt nun

Hilfssatz 1. Wenn $w_1, w_2, \dots, w_r$ voneinander verschiedene Bewertungen aus W sind, so gibt es in $\mathfrak{o}$ ein τ und ein ρ derart, daß

$$w_i(\tau) > 0, \quad w_j(\tau) = 0 \quad \text{für jedes } j \neq i \quad (1 \leq j \leq r),$$

(1) W ist keine Nullmenge.

(2) Der Ring $\mathfrak{o}$ ist eine *endliche diskrete Hauptordnung* und umgekehrt erfüllt eine endliche diskrete Hauptordnung diese drei Axiome (KRULL [2], § 5).

und

$$w_i(\rho) = 0, \quad w_j(\rho) > 0 \quad \text{für jedes } j \neq i \quad (1 \leq j \leq r)$$

sind.

Beweis. Für jeden Index j kann man nach Axiom III ein Element ρ_j aus $\mathfrak{o}$ so bestimmen, daß $w_i(\rho_j) = 0$ und $w_j(\rho_j) > 0$ ist, wo i ein festgelegter Index und $i \neq j$ ist. Für das Produkt $\rho = \rho_1 \dots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \dots \rho_r$ gilt offenbar:

$$w_i(\rho) = 0, \quad w_j(\rho) > 0 \quad (j \neq i, 1 \leq j \leq r).$$

Nun bestimmt man nach dem eben Gezeigten für jeden Index l ($1 \leq l \leq r$) ein Element τ_l aus $\mathfrak{o}$ so, daß $w_l(\tau_l) = 0$ und $w_j(\tau_l) > 0$ ($l \neq j, 1 \leq j \leq r$) ist. Dann ist $\tau = \tau_1 + \dots + \tau_{i-1} + \tau_{i+1} + \dots + \tau_r$ für w_i positivwertig, aber für w_j ($i \neq j, 1 \leq j \leq r$) nullwertig.

Hilfssatz 2. Ist w eine beliebige Bewertung aus W und sind $w_1, w_2, \dots, w_r$ beliebige von w verschiedene Bewertungen aus W , so gibt es in $\mathfrak{o}$ ein Primelement von w , das für $w_1, \dots, w_r$ nullwertig ist.

Beweis. Ein Primelement π_0 von w kann nach Axiom II für höchstens endlich viele Bewertungen aus W einen von Null verschiedenen Wert haben. Es seien $w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s$ diejenigen von w verschiedenen Bewertungen aus W , für welche π_0 einen von Null verschiedenen Wert besitzen kann. Nach Hilfssatz 1 existiert in $\mathfrak{o}$ ein Element ρ mit $w(\rho) = 0$ und $w_i(\rho) > 0$ ($i = 1, \dots, s$). Dabei kann man ρ auch so wählen, daß $w_i(\rho\pi_0) > 0$ ($i = 1, \dots, s$) ist. $\rho\pi_0$ ist offenbar Element aus $\mathfrak{o}$. Bestimmt man nun für jedes l ($1 \leq l \leq r$) ein Element τ_l aus $\mathfrak{o}$ so, daß $w_l(\tau_l) = 0$, $w(\tau_l) > w(\rho\pi_0)$ und $w_j(\tau_l) > 0$ ($j \neq l, 1 \leq j \leq r$) ist, so gilt für $\pi = \rho\pi_0 + \sum_{l=1}^r \tau_l$:

$w(\pi) = w(\rho\pi_0) = w(\pi_0) = 1$, und $w_l(\pi) = w_l(\tau_l) = 0$ ($l = 1, \dots, r$),
w. z. b. w.

Unter einem Ideal aus k versteht man einen Modul aus k mit $\mathfrak{o}$ als Multiplikatorenbereich, der sich durch Multiplikation mit einem geeigneten von Null verschiedenen Element aus $\mathfrak{o}$ in einen Modul aus $\mathfrak{o}$ verwandelt⁽¹⁾. Ein Ideal, dessen Elemente alle zu $\mathfrak{o}$ gehören, nennt man ein ganzes Ideal⁽²⁾. Ist nun $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus k und w eine

(1) Das Nullideal schließen wir im folgenden von unserer Betrachtung aus.

(2) Dagegen ist ein nicht ganzes Ideal aus k oft ein gebrochenes Ideal in bezug auf $\mathfrak{o}$ genannt.

Bewertung aus W , so besitzt die Wertmenge $w(a)$ aller Elemente a aus α die untere Grenze. Für ein geeignetes von Null verschiedenes Element λ aus $\mathfrak{o}$ wird nämlich λa ganz. Die Wertmenge $w(\lambda a)$ aller λa aus $\lambda \alpha$ besitzt die endliche nicht-negative untere Grenze a . Ferner existiert in $\lambda \alpha$ ein Element γ , dessen Wert $w(\gamma) = a$ ist, weil w diskret ist. Das Element $\frac{\gamma}{\lambda}$ gehört dem Ideal α an und $w\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)$ ist gleich der unteren Grenze der Wertmenge $w(a)$. Wir bezeichnen im folgenden mit $w(a)$ die untere Grenze der Wertmenge $w(a)$ und nennen $w(a)$ den Wert von a in bezug auf w . Aus der Definition der Werte folgt:

Hilfssatz 3. Ist α ein beliebiges Ideal aus k und w eine Bewertung aus W , so ist $w(a)$ stets endlich. Ferner ist der Wert des Produktes aus endlich vielen Idealen aus k gleich der Summe der Werte der Faktoren.

Nach II sieht man sofort ein, daß ein Ideal aus k für höchstens endlich viele Bewertungen einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Man kann offenbar einem Ideal α einen Vektor zuordnen, dessen Komponenten aus den Werten von α in bezug auf alle Bewertungen aus W bestehen. Diesen Vektor nennen wir den *Wertvektor* von α . Die Wertvektoren von α und β heißen gleich, wenn für jede Bewertung w stets $w(\alpha) = w(\beta)$ ist. Unter der Summe der Wertvektoren von α und β versteht man wie üblich einen Vektor, dessen Komponenten aus $w(\alpha) + w(\beta)$ bestehen, wo w alle Bewertungen aus W durchläuft. Nun gilt folgender.

Satz 1. Der Wertvektor eines Ideals aus k besitzt höchstens endlich viele von Null verschiedene Komponenten. Ferner ist der Wertvektor des Produktes aus endlich vielen Idealen gleich der Summe der Wertvektoren der Faktorenideale.

Satz 2. Es sei α ein Ideal aus k und $w_1, \dots, w_r$ seien beliebige voneinander verschiedene Bewertungen aus W . Dann existiert in α ein Element a mit $w_i(a) = w_i(\alpha)$ ($i = 1, \dots, r$).

Beweis. Offenbar enthält α ein Element α_i mit $w_i(\alpha_i) = w_i(\alpha)$. Nach Hilfssatz 1 kann man in $\mathfrak{o}$ ein Element γ_i so wählen, daß $w_i(\gamma_i) = 0$ und $w_j(\gamma_i) > 0$ ($i \neq j, 1 \leq j \leq r$) ist. Dann gilt:

$$w_i(\alpha_i \gamma_i) = w_i(\alpha_i) + w_i(\gamma_i) = w_i(\alpha_i) = w_i(\alpha)$$

und

$$w_j(\alpha_i \gamma_i) = w_j(\alpha_i) + w_j(\gamma_i) > w_j(\alpha_i) \geq w_j(\alpha) \quad (i \neq j, 1 \leq j \leq r).$$

Die Summe $\sum_{i=1}^r \alpha_i \gamma_i$ besitzt für $w_1, \dots, w_r$ bzw. die Werte $w_1(\alpha), \dots, w_r(\alpha)$.

Satz 3. *Enthält W nur endlich viele Bewertungen von k , so ist jedes Ideal aus k stets Hauptideal.*

Beweis. Es seien $w_1, \dots, w_r$ die sämtlichen verschiedenen Bewertungen aus W . Dann kann man nach Satz 2 aus einem Ideal α aus k ein solches Element α herausgreifen, daß $w_i(\alpha) = w_i(\alpha)$ ist ($i = 1, \dots, r$). Für ein beliebiges Element γ aus α ist $\gamma\alpha^{-1}$ für $w_1, \dots, w_r$ nicht negativwertig; d.h. $\gamma\alpha^{-1} \in \mathfrak{o}$. Hieraus folgt sofort $(\alpha) = \alpha$.

Wenn B den Bewertungsring einer Bewertung w aus W bezeichnet, so bildet die Gesamtheit aller in bezug auf w positivwertigen Elemente aus B ein Primideal $\mathfrak{P}$ aus B (VAN DER WAERDEN [1], S. 249). Bildet man nun den Durchschnitt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$, welches seinerseits aus allen in bezug auf w positivwertigen Elementen aus $\mathfrak{o}$ besteht. Wir wollen im folgenden $\mathfrak{p}$ das zu w gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$ nennen.

Hilfssatz 4. Es seien w_1, w_2 nicht äquivalente Bewertungen aus W , und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ bzw. die zu w_1, w_2 gehörigen Primideale aus $\mathfrak{o}$. Dann sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ voneinander verschieden.

Beweis. Nach Axiom III existiert in $\mathfrak{o}$ ein Element π mit folgender Eigenschaft: $w_1(\pi) > 0$ und $w_2(\pi) = 0$. Offenbar gehört π zu $\mathfrak{p}_1$, aber nicht zu $\mathfrak{p}_2$, w. z. b. w.

Satz 4. *Es sei w eine Bewertung aus W und $\mathfrak{p}$ das zu w gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$. Ist dann $\mathfrak{q}$ ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares Primärideal⁽¹⁾ aus $\mathfrak{o}$, so besitzt $\mathfrak{q}$ nur für w einen von Null verschiedenen Wert.*

Beweis. Da $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ ist, so ist offenbar $w(\mathfrak{q}) \geq w(\mathfrak{p}) = 1$. Wir setzen $w(\mathfrak{q}) = e$. Es sei w' eine beliebige, zu w nicht äquivalente Bewertung aus W . Dann kann man nach Hilfssatz 2 in $\mathfrak{p}$ ein solches Primälement π von w auffinden, daß $w'(\pi) = 0$ ist. Da in $\mathfrak{q}$ ein Element λ mit $w(\lambda) = w(\mathfrak{q})$ existiert, so ist $w\left(\frac{\lambda}{\pi^e}\right) = 0$. Nach Hilfssatz 1 existiert ein Element $\eta \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$ derart, daß $\frac{\lambda}{\pi^e}\eta$ zu $\mathfrak{o}$ gehört und $w\left(\frac{\lambda}{\pi^e}\eta\right) = 0$ ist. Setzt man nun $\frac{\lambda}{\pi^e}\eta = \zeta$, so ist $\zeta\pi^e = \lambda\eta$ in $\mathfrak{q}$ enthalten. Da $w(\zeta) = 0$ ist, so ist ζ in $\mathfrak{q}$ nicht enthalten, weil $w(\mathfrak{q}) > 0$ ist. Daher muß eine geeignete Potenz $(\pi^e)^{e'}$ von π^e zu $\mathfrak{q}$ gehören,

(1) VAN DER WAERDEN [2], S. 31.

weil q primär ist. Nach der Wahl von π ist $w'(\pi^{ee'}) = 0$; d.h. es gibt in q ein Element, dessen Wert für w' Null ist, w. z. b. w.

Zusatz. Ist p das zu w gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$, so ist für jede von w verschiedene Bewertung w' aus W stets $w'(p) = 0$.

Es seien α, b Ideale aus k . Dann bedeutet $\alpha : b$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus k , welche, mit jedem Element aus b multipliziert, zu α gehören. Daß $\alpha : b$ einen Modul mit $\mathfrak{o}$ als Multiplikatorenbereich bildet, folgt ohne weiteres aus der Definition. Ist nun β ein beliebiges von Null verschiedenes Element aus b , so kann man aus $\mathfrak{o}$ ein Element $\lambda (\neq 0)$ so herausgreifen, daß $\lambda\alpha \subseteq \mathfrak{o}$ und $\lambda\beta \in \mathfrak{o}$ ist. Dann gilt:

$$(\alpha : b)(\lambda\beta) = \lambda(\alpha : b)\beta \subseteq \lambda\alpha \subseteq \alpha.$$

$\alpha : b$ bildet wirklich ein Ideal aus k . Wenn insbesondere $\alpha = \mathfrak{o}$ ist, so bezeichnet b^{-1} den Modulquotienten $\mathfrak{o} : b$. Weil $(ab^{-1})b = a(b^{-1}b) \subseteq a\mathfrak{o} = a$ ist, so ist offenbar

$$ab^{-1} \subseteq \alpha : b.$$

Wir beweisen nun:

Satz 5. Ist $\alpha \subseteq b$, so ist $\alpha : b$ ein ganzes Ideal.

Beweis. Angenommen, es wäre $\alpha : b$ nicht ganz. Dann enthält $\alpha : b$ mindestens ein Element ξ , welches für eine passend gewählte Bewertung w aus W einen negativen Wert besitzt: $w(\xi) < 0$. Multipliziert man nun ξ mit einem β aus b , dessen Wert in bezug auf w gleich $w(b)$ ist, so ist $\xi\beta$ ein Element aus α , und es gilt:

$$w(\xi\beta) < w(b) \leq w(\alpha),$$

weil aus $\alpha \subseteq b$, $w(\alpha) \geq w(b)$ folgt; aber die Relation $w(\xi\beta) < w(\alpha)$ ergibt sicher einen Widerspruch. Damit ist der Beweis fertig.

Ein Ideal aus k heiße *nullwertig*, wenn sein Wertvektor der Nullvektor ist. Nach Definition ist $\mathfrak{o}$ ein nullwertiges Ideal, und jedes nullwertige Ideal stets ganz.

Satz 6. Wenn $\mathfrak{o}$ ein Hauptidealring ist, so ist $\mathfrak{o}$ ein einziges nullwertiges Ideal in k .

Beweis. Zu einem nullwertigen Ideal m gibt es ein Element μ aus k derart, daß $(\mu) = m$ ist. Offenbar ist μ für alle Bewertungen

aus W nullwertig, es ist also auch μ^{-1} nullwertig; d.h. μ^{-1} ist Element aus $\mathfrak{o}$. Hieraus folgt ohne weiteres: $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus k , so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ stets nullwertig.*

Beweis. Wenn W nur endlich viele verschiedene Bewertungen enthält, so ist $\mathfrak{a}$ nach Satz 3 ein Hauptideal, woraus

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}$$

folgt.

Wir wollen also annehmen, daß W unendlich viele verschiedene Bewertungen enthält und $\mathfrak{a}$ für höchstens r verschiedene Bewertungen $w_1, \dots, w_r$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Dann existiert nach Satz 2 ein Element α aus $\mathfrak{a}$, das für $w_1, \dots, w_r$ bzw. die Werte $w_1(\alpha), \dots, w_r(\alpha)$ besitzt. Dabei kann α für eine noch beliebig zu bestimmende, von $w_1, \dots, w_r$ verschiedene Bewertung w_0 aus W den Wert Null besitzen.

Wenn α^{-1} für einige von $w_0, w_1, \dots, w_r$ verschiedene Bewertungen aus W einen negativen Wert besitzt, so kann man nach Hilfssatz 1 ein Element τ aus $\mathfrak{o}$ so bestimmen, daß

$$w_0(\alpha^{-1}\tau) = 0, w_1(\alpha^{-1}\tau) = -w_1(\alpha) = -w_1(\alpha), \dots, w_r(\alpha^{-1}\tau) = -w_r(\alpha)$$

und für jede von $w_0, \dots, w_r$ verschiedene Bewertung w' aus W stets $w'(\alpha^{-1}\tau) \geq 0$ wird.

Ist nun α' ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$ und w eine beliebige Bewertung aus W , so ist stets

$$w(\alpha'\alpha^{-1}\tau) = w(\alpha') + w(\alpha^{-1}\tau) \geq w(\alpha) - w(\alpha) = 0.$$

Also ist $\alpha^{-1}\tau$ Element aus $\mathfrak{a}^{-1}$. Offenbar gehört $\alpha \cdot \alpha^{-1}\tau$ zu $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$, und es ist $w_i(\alpha \cdot \alpha^{-1}\tau) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, r$). $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ enthält ein Element, dessen Werte für $w_0, w_1, \dots, w_r$ alle Null sind. Weil dabei w_0 alle von $w_1, \dots, w_r$ verschiedenen Bewertungen aus W durchlaufen kann, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ nullwertig.

Aus Satz 7 folgt sofort

Zusatz. Wenn $w(\mathfrak{a}) = e$ ist, so ist $w(\mathfrak{a}^{-1}) = -e$.

Denn es ist einerseits $w(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}) = w(\mathfrak{a}) + w(\mathfrak{a}^{-1})$ und andererseits $w(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}) = 0$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 8. *Ein Ideal aus k ist dann und nur dann nullwertig, wenn sein Reziprokes gleich $\mathfrak{o}$ ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit m ein nullwertiges Ideal. Ist dann w eine beliebige Bewertung aus W , so ist nach Zusatz zu Satz 7 $w(m^{-1}) = -w(m) = 0$, es ist also $m^{-1} \subseteq o$. Da aus $m \subseteq o$, $m^{-1} \supseteq o$ folgt, so muß $m = o$ sein.

Ist umgekehrt für ein Ideal m aus k $m^{-1} = o$, so gilt für eine beliebige Bewertung w aus W stets:

$$w(m) = -w(m^{-1}) = 0;$$

d.h. m ist ein nullwertiges Ideal.

Satz 9. Ist m ein nullwertiges Ideal aus k und a ein beliebiges Ideal aus k , so ist

$$(am)^{-1} = a^{-1}.$$

Beweis. Weil $am \subseteq a$ ist, so ist $(am)^{-1} \supseteq a^{-1}$. Ist nun ξ ein Element aus $(am)^{-1}$, so ist

$$o \supseteq \xi(am) = (\xi a)m,$$

woraus $\xi a \in m^{-1}$ folgt. Da nach Satz 8 $m^{-1} = o$ ist, so gehört ξ offenbar zu a^{-1} .

Satz 10. Wenn es in o überhaupt ein von o verschiedenes nullwertiges Ideal gibt, so gibt es ein nullwertiges Primideal aus o .

Beweis. Wir bringen alle von o verschiedenen, nullwertigen Ideale aus o in eine Wohlordnung: $m_1, \dots, m_\mu, \dots$, und bilden durch die transfinite Induktion eine Teilmenge der von o verschiedenen nullwertigen Ideale: $m_1^* = m_1, \dots, m_\mu^*, \dots$ mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Für } \mu < \nu \text{ ist } m_\mu^* \subseteq m_\nu^*.$$

Es genügt, unter Annahme, daß alle m_μ^* mit $\mu < \lambda$ gegeben sind, m_λ^* zu konstruieren. Wir setzen

$$m_\lambda^* = (m_\mu^*, m_\lambda), \quad \text{wenn } (m_\mu^*, m_\lambda) \neq o \text{ ist,}$$

$$m_\lambda^* = (m_\mu^*), \quad \text{wenn } (m_\mu^*, m_\lambda) = o \text{ ist.}$$

Wie man leicht bestätigt, ist die Vereinigungsmenge m^* aller $m_1^*, m_2^*, \dots, m_\nu^*, \dots$ ein nullwertiges Ideal und von o verschieden. Denn enthält m das Einselement, so muß es schon in einem m_μ^* enthalten sein, was unmöglich ist. Nach der Konstruktion besitzt m^* nur o als echten Teiler, d.h. m^* ist in o teilerlos. Hieraus folgt, wie bekannt, daß m^* ein Primideal ist (VAN DER WAERDEN [1], S. 58).

§ 2. Die Darstellung eines Ideals als Primidealpotenzprodukt im quasigleichen Sinne.

In diesem Paragraphen bedeutet k bzw. $\mathfrak{o}$ den im vorigen Paragraphen definierten Körper bzw. Integritätsbereich. Ferner ist vorausgesetzt, daß die Axiome I, II, III in $\mathfrak{o}$ erfüllt sind.

Die Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aus k heißen *quasigleich*, wenn ihre Wertvektoren gleich sind: in Zeichen, $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$. Die Quasigleichheit ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. Ferner folgt aus der Definition sofort:

Satz 11. Ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}' \sim \mathfrak{b}'$, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \sim \mathfrak{b}\mathfrak{b}'$.

Der folgende Satz charakterisiert die Quasigleichheit idealtheoretisch:

Satz 12. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aus k sind dann und nur dann quasigleich, wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ ist. Ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, so existieren zwei nullwertige Ideale $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ derart, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{m}_2$$

ist.

Beweis. Wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ ist, so gilt für eine beliebige Bewertung w aus W :

$$w(\mathfrak{a}) = -w(\mathfrak{a}^{-1}) = -w(\mathfrak{b}^{-1}) = w(\mathfrak{b});$$

d.h. $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, so bilde man das Ideal $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$. Dann ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})\mathfrak{b}.$$

Setzt man $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{m}_2$, so sind $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ nullwertig. Ferner folgt aus Satz 9:

$$\mathfrak{a}^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1)^{-1} = (\mathfrak{b}\mathfrak{m}_2)^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}.$$

Mit Hilfe der Quasigleichheit kann man alle vom Nullideal verschiedenen Ideale aus k in die Klassen derart einteilen, daß je zwei Ideale aus einer und derselben Klasse stets einander quasigleich sind, aber je zwei Ideale aus verschiedenen Klassen niemals quasigleich sind. Sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bzw. Ideale aus den Klassen K_1 und K_2 , so definiert man die $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ enthaltende Klasse als die Produktklasse. Offenbar ist die Produktklasse durch K_1 und K_2 eindeutig bestimmt,

aber sie ist unabhängig von der Wahl von α_1 und α_2 . Damit ist die Multiplikation der Klassen definiert. Wie man leicht bestätigt, bilden die sämtlichen Klassen hinsichtlich der Klassenmultiplikation eine abelsche Gruppe, deren Einheitselement die $\mathfrak{o}$ enthaltende Klasse ist.

Da allen Idealen aus einer und derselben Klasse und nur solchen gleiche Wertvektoren zugeordnet werden, so gilt offenbar folgender

Satz 13. *Die Gruppe der Klassen von quasigleichen Idealen aus k ist isomorph der (additiven) Gruppe der Wertvektoren aller vom Nullideal verschiedenen Ideale aus k .*

Satz 14. *Ist $\mathfrak{p}^*$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$ und nicht nullwertig, so existiert in W eine Bewertung w derart, daß $\mathfrak{p}^*$ das zu w gehörige Primideal ist.*

Beweis. Sei für eine Bewertung w aus W $w(\mathfrak{p}^*) > 0$. Dann ist für das zu w gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ stets $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$. Ist nun $w(\mathfrak{p}^*) = e > w(\mathfrak{p})$, so gibt es in $\mathfrak{p}^*$ ein Element π^* mit $w(\pi^*) = e$; für ein Primelement π von w aus $\mathfrak{p}$ wird $\frac{\pi^*}{\pi^e} \xi = \zeta \in \mathfrak{o}$ und $w\left(\frac{\pi^*}{\pi^e} \xi\right) = 0$, wenn ξ nach Hilfssatz 1 in $\mathfrak{o}$ passend gewählt ist. Da $\pi^{e-1} \cdot \pi \zeta \in \mathfrak{p}^*$ ist, so muß mindestens eines von π^{e-1} und $\pi \zeta$ zu $\mathfrak{p}^*$ gehören, was ein Widerspruch ist. Es ist also

$$w(\mathfrak{p}) = w(\mathfrak{p}^*).$$

Nach Satz 12 gibt es zwei nullwertige Ideale $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^*$ derart, daß $\mathfrak{p}\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^*\mathfrak{m}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$ ist, weil $\mathfrak{p}^*$ nach Satz 4 nur für w von Null verschiedenen Wert besitzt. Existiert in $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{p}^*$ nicht enthaltenes Element π_0 , so besteht für ein in $\mathfrak{p}^*$ nicht enthaltenes Element μ aus $\mathfrak{m}$:

$$\pi_0 \mu \in \mathfrak{p}^*,$$

was aber unmöglich ist. Also ist $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^*$, woraus wegen $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$ folgt.

Aus dem obigen Satz folgt nun:

Zusatz. Das zu einer Bewertung aus W gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$ ist *minimales Primideal*; d.h. es besitzt außer dem Nullideal kein echtes Vielfaches.

Satz 15. *Ein nullwertiges Primideal aus $\mathfrak{o}$ enthält unendlich viele minimale Primideale aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung und nach den Sätzen 3 und 6 existieren in W unendlich viele verschiedene Bewertungen. Bezei-

chnet nun m ein nullwertiges Primideal aus $\mathfrak{o}$ und $\mu \neq 0$ ein Element aus m , so gibt es endlich viele verschiedene Bewertungen $w_1, \dots, w_r$ aus W , für welche μ gerade einen positiven Wert besitzt. Denn sonst wäre μ für alle Bewertungen aus W nullwertig, es wäre also auch μ^{-1} nullwertig, woraus entgegen der Voraussetzung $m = \mathfrak{o}$ folgte. Es seien die Werte von μ für $w_1, \dots, w_r$ bzw. $e_1, \dots, e_r$, und $\mathfrak{p}_i$ sei das zu w_i gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$ ($i = 1, \dots, r$). Dann ist

$$m \supseteq (\mu) \supseteq \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Denn $(\mu)^{-1} \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ ist nullwertig und infolgedessen ist

$$\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r} = (\mu)(\mu)^{-1} \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r} \subseteq (\mu) \subseteq m.$$

Da m ein Primideal aus $\mathfrak{o}$ ist, so muß eines von den $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ in m enthalten sein.

Nun seien ν verschiedene, nicht nullwertige Primideale $\mathfrak{p}^{(1)}, \dots, \mathfrak{p}^{(\nu)}$ in m enthalten. Dann gibt es in W ν verschiedene Bewertungen $w^{(1)}, \dots, w^{(\nu)}$ derart, daß $\mathfrak{p}^{(1)}, \dots, \mathfrak{p}^{(\nu)}$ bzw. die zu $w^{(1)}, \dots, w^{(\nu)}$ gehörigen Primideale aus $\mathfrak{o}$ sind. Da m nullwertig ist, so gibt es nach Satz 2 ein Element μ' aus m , welches für $w^{(1)}, \dots, w^{(\nu)}$ nullwertig ist. Für passend gewählte, nicht nullwertige Primideale $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ aus $\mathfrak{o}$ gilt dann:

$$(\mu') \sim \mathfrak{p}'_1^{e'_1} \dots \mathfrak{p}'_s^{e'_s}.$$

Dabei sind $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ alle von $\mathfrak{p}^{(1)}, \dots, \mathfrak{p}^{(\nu)}$ verschieden und $e'_1, \dots, e'_s$ alle positiv. Wie beim obigen μ schließt man leicht, daß eines von den $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ in m enthalten ist. Somit ist gezeigt, daß in m ein von $\mathfrak{p}^{(1)}, \dots, \mathfrak{p}^{(\nu)}$ verschiedenes, nullwertiges Primideal aus $\mathfrak{o}$ enthalten ist.

Da W unendlich viele verschiedene Bewertungen enthält, so können wir in m wie oben unendlich viele nicht nullwertige Primideale auffinden. Nach Zusatz zu Satz 14 sind diese nicht nullwertigen Primideale alle minimal in $\mathfrak{o}$, w. z. b. w.

Nach den Sätzen 14 und 15 gilt:

Zusatz. Dann und nur dann ist ein Primideal aus $\mathfrak{o}$ minimales Primideal, wenn es nicht nullwertig ist. Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal aus $\mathfrak{o}$, so gibt es in W eine Bewertung w derart, daß $\mathfrak{p}$ das zu w gehörige Primideal wird.

Satz 16. *Es sei w' eine zu jeder Bewertung aus W nicht äquivalente (aber nicht notwendig diskrete) Bewertung von k , und B' der zu w' gehörige Bewertungsring in k . Enthält dann B' den Ring $\mathfrak{o}$, so ist das zu w' gehörige Primideal $\mathfrak{p}'$ aus $\mathfrak{o}$ nullwertig.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}'$ nicht nullwertig, so existiert nach Satz 14 eine Bewertung w aus W derart, daß $\mathfrak{p}'$ das zu w gehörige Primideal wird. Wenn also für ein Element ξ aus $\mathfrak{o}$ $w(\xi) = 0$ ist, so muß auch $w'(\xi) = 0$ sein, weil sonst $\xi \in \mathfrak{p}'$ sein müsste. Ebenso ist für ein Element ξ' aus $\mathfrak{o}$ mit $w'(\xi') = 0$ stets $w(\xi') = 0$. Für ein Primelement π von w aus $\mathfrak{o}$ ist jedes Element $\zeta \neq 0$ aus k eindeutig von der Form $\zeta = \pi^\rho \eta$ mit $w(\eta) = 0$. Multipliziert man η mit einem passend gewählten Element τ aus $\mathfrak{o}$ mit $w(\tau) = 0$, so gehört $\eta\tau$ zu $\mathfrak{o}$. Da $\eta\tau$ Element aus $\mathfrak{o}$ und $w(\eta\tau) = 0$ ist, so ist $w'(\eta\tau) = 0$, woraus wegen $w'(\tau) = 0$ auch $w'(\eta) = 0$ folgt. Aus $\zeta = \pi^\rho \eta$ schließt man, daß dann und nur dann $w'(\zeta) > 0$ ist, wenn $\rho > 0$ ist. Hieraus folgt sofort, daß das Primelement π von w auch Primelement von w' ist. Setzt man hier für eine geeignete positive Zahl κ

$$w'(\pi) = \kappa w(\pi), \text{ so ist für jedes Element } \zeta = \pi^\rho \eta \text{ stets} \\ w'(\zeta) = w'(\pi^\rho \eta) = \kappa w(\pi^\rho) = \kappa w(\zeta);$$

d.h. w, w' sind äquivalent. Dies steht aber im Widerspruch mit der Voraussetzung. $\mathfrak{p}'$ muß also nullwertig sein.

Satz 17. *Ein $\mathfrak{o}$ nicht quasigleiches Ideal aus k ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig quasigleich einem Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$*

Beweis. Es sei α ein $\mathfrak{o}$ nicht quasigleiches Ideal aus k , und $w_1, \dots, w_r$ seien die sämtlichen verschiedenen Bewertungen aus W , für welche α bzw. von Null verschiedene Werte $e_1, \dots, e_r$ besitzt. Da für das zu w_i gehörige Primideal $\mathfrak{p}_i$ $w_i(\mathfrak{p}_i) = 1$ ist, so ist $\alpha \sim \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$, weil die Ideale α und $\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ gleiche Wertvektoren besitzen. Dabei sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ nach Zusatz zu Satz 14 alle minimal in $\mathfrak{o}$.

Nun sei für s verschiedene minimale Primideale $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ $\alpha \sim \mathfrak{p}'_1^{e'_1} \dots \mathfrak{p}'_s^{e'_s}$, wo $e'_1, \dots, e'_s$ alle von Null verschieden sind. Dann existieren nach Zusatz zu Satz 15 s verschiedene Bewertungen $w'_1, \dots, w'_s$ aus W derart, daß $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ bzw. die zu $w'_1, \dots, w'_s$ gehörigen Primideale sind. Im Wertvektor von α sind einerseits genau die zu $w_1, \dots, w_r$ gehörigen Komponenten und andererseits

genau die zu $w'_1, \dots, w'_s$ gehörigen Komponenten von Null verschieden. Daher müssen die Bewertungen $w_1, \dots, w_r$ im Ganzen mit $w'_1, \dots, w'_s$ übereinstimmen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $w_1 = w'_1, \dots, w_r = w'_s$ und $r = s$ ist. Dann ist $p_i = p'_i$ ($i = 1, \dots, r$). Da offenbar

$$e_i w_i(p_i) = w_i(a) = e'_i w_i(p_i) \quad (i = 1, \dots, r)$$

ist, so ist $e_i = e'_i$, w. z. b. w.

Satz 18. *Es seien in der Darstellung $a \sim p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ und $b \sim p_1^{e'_1} \dots p_s^{e'_s}$ $p_1, \dots, p_r$ bzw. $p'_1, \dots, p'_s$ voneinander verschiedene (aber nicht notwendig minimale) Primideale aus $\mathfrak{o}$. Ist dann $a \leq b$, so kommt in $p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ jedes minimale Primideal aus $p'_1, \dots, p'_s$ mindestens so oft vor als in $p_1^{e'_1} \dots p_s^{e'_s}$. Die Umkehrung dieser Tatsache gilt dann auch, wenn b Hauptideal ist.*

Beweis. Setzt man $c = ab^{-1}$, so ist c nach Satz 17 entweder quasigleich $\mathfrak{o}$ oder einem Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ mit positivem Exponenten, weil $ab^{-1} \leq a:b$ und $a:b$ nach Satz 5 ganz ist. Da $a \sim bc$ ist, so ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Nun sei b ein Hauptideal und β ein erzeugendes Element von b . Dann ist nach Voraussetzung $ab^{-1} = a(\beta)^{-1}$ quasigleich einem ganzen Ideal. Also ist $a = (a(\beta)^{-1}) \cdot (\beta) \leq (\beta) = b$.

Ein Ideal a aus k heißt *b-Ideal*, wenn $(a^{-1})^{-1} = a$ ist. Für jedes Ideal c aus k ist $c^* = (c^{-1})^{-1}$ stets b -Ideal. Denn nach Zusatz zu Satz 7 ist $c^* \sim c$, es ist also nach Satz 12 $c^{*-1} = c^{-1}$ und folglich $(c^{*-1})^{-1} = (c^{-1})^{-1} = c^*$, w. z. b. w. Wie eben bewiesen, folgt aus $a \sim b$ $(a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}$. Da $aa^{-1} \leq \mathfrak{o}$ und $(a^{-1})^{-1}a^{-1} \leq \mathfrak{o}$ ist, so ist $a \leq (a^{-1})^{-1}$. Ebenso ist $b \leq (b^{-1})^{-1}$. Hieraus schließt man:

Jede Klasse von quasigleichen Idealen aus k enthält ein und sogar ein einziges b -Ideal, welches seinerseits die Vereinigung aller ihm quasigleichen Ideale ist.

Ist nämlich a ein beliebiges Ideal aus einer Klasse, so gehört $(a^{-1})^{-1}$ zu derselben Klasse wie a . Da aus $a \sim b$

$$b \leq (b^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}$$

folgt, so ist die Vereinigung aller Ideale aus der Klasse einerseits in $(a^{-1})^{-1}$ enthalten und muß andererseits $(a^{-1})^{-1}$ enthalten, muß also gleich $(a^{-1})^{-1}$ sein; d.h. jedes b -Ideal aus einer Klasse stimmt mit der Vereinigung aller Ideale aus der Klasse überein, w. z. b. w.

Nun beweise ich :

Satz 19. *Jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ ist stets ein $\mathfrak{v}$ -Ideal.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal aus $\mathfrak{o}$, so ist es nach Satz 12 nicht nullwertig. Da $\mathfrak{p}$ und $(\mathfrak{p}^{-1})^{-1}$ denselben Wertvektor besitzen, so ist nach der Definition von $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p} \supseteq (\mathfrak{p}^{-1})^{-1},$$

woraus wegen $\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{p}^{-1})^{-1}$ die Gleichung $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}^{-1})^{-1}$ folgt, w. z. b. w.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus k heißt *umkehrbar*, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}$ ist. Bezeichnen nun $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ umkehrbare Ideale aus k , so ist das Produkt $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r$ auch umkehrbar. Denn es gilt offenbar :

$$\mathfrak{o} \supseteq (\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r) (\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r)^{-1} \supseteq (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1^{-1}) \dots (\mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r^{-1}) = \mathfrak{o},$$

woraus $(\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r) (\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r)^{-1} = \mathfrak{o}$ folgt, w. z. b. w.

Nach dem eben Gezeigten bilden alle umkehrbaren Ideale aus k hinsichtlich der Idealmultiplikation eine (abelsche) Gruppe.

Satz 20. *Die Gesamtheit aller $\mathfrak{v}$ -Ideale aus k bildet dann und nur dann hinsichtlich der Idealmultiplikation eine Gruppe, wenn alle minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ umkehrbar sind.*

Beweis. Wenn die Gesamtheit aller $\mathfrak{v}$ -Ideale aus k eine Gruppe bildet, so ist jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ sicher umkehrbar, weil es nach Satz 19 ein $\mathfrak{v}$ -Ideal ist.

Es seien umgekehrt alle minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ umkehrbar. Bezeichnet dann $\mathfrak{a}^*$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes $\mathfrak{v}$ -Ideal aus k , so gilt nach Satz 17 :

$$\mathfrak{a}^* \sim \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ verschiedene minimale Primideale aus $\mathfrak{o}$ bedeuten und $e_1, \dots, e_r$ von Null verschieden sind. Nach der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{a}^*$ ist

$$\mathfrak{a}^* \supseteq \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ alle umkehrbar sind, so ist das Produkt $\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ auch umkehrbar. Hieraus folgt :

$$\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{a}^* \mathfrak{a}^{*-1} \supseteq (\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}) (\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r})^{-1} = \mathfrak{o}.$$

Also sind alle $\mathfrak{v}$ -Ideale umkehrbar.

Nun genügt zu zeigen, daß das Produkt von zwei beliebigen $\mathfrak{b}$ -Idealen α^* , $\mathfrak{b}^*$ auch $\mathfrak{b}$ -Ideal ist. Dies folgt einfach aus folgender Relation:

$$((\alpha^* \mathfrak{b}^*)^{-1})^{-1} = (\alpha^{*-1} \mathfrak{b}^{*-1})^{-1} = (\alpha^{*-1})^{-1} (\mathfrak{b}^{*-1})^{-1} = \alpha^* \mathfrak{b}^*.$$

Zusatz 1. Wenn alle minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ umkehrbar sind, so ist jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene $\mathfrak{b}$ -Ideal α^* eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ darstellbar.

Beweis. Nach Satz 17 existieren zu α^* endlich viele verschiedene minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ aus $\mathfrak{o}$ derart, daß $\alpha^* \sim \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ ist. Da nach Satz 19 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ alle $\mathfrak{b}$ -Ideale sind, so ist nach Satz 20 $\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ auch $\mathfrak{b}$ -Ideal. Da in einer Klasse von quasigleichen Idealen nur ein einziges $\mathfrak{b}$ -Ideal enthalten ist, so ist

$$\alpha^* = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Die Eindeutigkeit der obigen Darstellung folgt daraus, daß $\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ nach Satz 17 durch α eindeutig bestimmt ist.

Zusatz 2. Sind alle minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ Hauptideal, so ist jedes $\mathfrak{b}$ -Ideal stets Hauptideal.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes $\mathfrak{b}$ -Ideal α^* Hauptideal ist. Da jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ Hauptideal ist, so ist es umkehrbar. Nach dem obigen Zusatz gilt;

$$\alpha^* = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ voneinander verschiedene minimale Primideale aus $\mathfrak{o}$ und $e_1, \dots, e_r$ alle von Null verschieden sind. Nach Voraussetzung wird α^* ein Hauptideal.

Satz 21. Wenn alle minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ umkehrbar sind, so ist jedes Ideal aus k darstellbar als Produkt aus höchstens endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ und einem $\mathfrak{o}$ quasigleichen Ideal.

Beweis. Wenn α ein nullwertiges Ideal ist, so bleibt nichts zu beweisen. Wenn α ein nicht nullwertiges Ideal aus k ist, so gibt es ein α quasigleiches $\mathfrak{b}$ -Ideal α^* , und es gilt: $\alpha \subseteq \alpha^*$. Offenbar ist $\alpha(\alpha^*)^{-1} = \mathfrak{c}$ ein $\mathfrak{o}$ quasigleiches Ideal. Also ist

$$\alpha = \alpha(\alpha^*)^{-1} \alpha^* = \mathfrak{c} \alpha^*,$$

weil nach Satz 20 $(\alpha^*)^{-1} \alpha^* = \mathfrak{o}$ ist. Da nach Zusatz 1 zu Satz 20 für

endlich viele verschiedene minimale Primideale $p_1, \dots, p_r$ aus $\mathfrak{o}$ $a^* = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ gilt, so ist

$$a = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r} c.$$

§ 3. Die DEDEKIND-E. NOETHERsche Idealtheorie.

Zu den bisherigen drei Axiomen wollen wir in diesem Paragraphen noch ein neues Axiom hinzufügen:

IV. *In $\mathfrak{o}$ existiert ein einziges nullwertiges Ideal.*

Da $\mathfrak{o}$ nullwertig ist, so kann es außer $\mathfrak{o}$ kein nullwertiges Ideal geben. Nach Zusatz zu Satz 15 ist jedes Primideal aus $\mathfrak{o}$ stets in $\mathfrak{o}$ minimal. Nun wollen wir beweisen:

Satz 22. *Es seien in $\mathfrak{o}$ die Axiome I, II und III erfüllt. Dann ist das IV. Axiom damit gleichbedeutend, daß jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ teilerlos in $\mathfrak{o}$ ist.*

Beweis. Es sei das IV. Axiom erfüllt. Dann ist ein echter Teiler eines minimalen Primideals aus $\mathfrak{o}$ stets nullwertig, muß also nach Voraussetzung gleich $\mathfrak{o}$ sein; d.h. ein minimales Primideal ist teilerlos.

Nun sei umgekehrt jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ teilerlos. Existiert dann ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes, nullwertiges Ideal aus $\mathfrak{o}$, so gibt es nach Satz 10 ein nullwertiges Primideal, welches nach Satz 15 sicher ein minimales Primideal enthält, was aber ein Widerspruch ist.

Zwei Ideale aus $\mathfrak{o}$ heißen *teilerfremd*, wenn das von ihnen erzeugte Ideal $\mathfrak{o}$ ist. Man beweist nun:

Satz 23. *Das IV. Axiom ist damit gleichbedeutend, daß je zwei verschiedene, minimale Primideale aus $\mathfrak{o}$ teilerfremd sind.*

Beweis. Sind p_1, p_2 verschiedene minimale Primideale aus $\mathfrak{o}$, so ist nach Zusatz zu Satz 4 das Ideal (p_1, p_2) nullwertig, es ist also $(p_1, p_2) = \mathfrak{o}$, wenn das IV. Axiom erfüllt ist.

Es seien umgekehrt je zwei verschiedene minimale Primideale teilerfremd. Existiert dann ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes nullwertiges Ideal, so gibt es in $\mathfrak{o}$ ein nullwertiges Primideal $\mathfrak{m}$. Da nach Satz 15 $\mathfrak{m}$ unendlich viele minimale Primideale enthält, so muß entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$ sein, w. z. b. w.

Ferner schließt man aus Satz 21:

Satz 24. *Jedes Ideal aus k ist entweder gleich $\mathfrak{o}$ oder eindeutig einem Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen aus $\mathfrak{o}$.*

Den vorangehenden Satz kann man auch ohne Kenntnis von Satz 21 folgendermaßen beweisen. Dazu schicke ich zunächst einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 5. Wenn die Wertvektoren von ganzen Idealen a und b gleich sind und $a \subseteq b$ ist, so ist $a = b$.

Beweis. Wir greifen aus b ein beliebiges Element β heraus. Dann ist offenbar $a \subseteq (a, \beta) \subseteq b$. Es besitze der Wertvektor von a höchstens für die Bewertungen $w_1, \dots, w_r$ aus W einen von Null verschiedenen Wert. Dann existiert nach Satz 2 ein Element α aus a derart, daß $w_1(\alpha) = w_1(a), \dots, w_r(\alpha) = w_r(a)$ ist. Betrachtet man den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, so besitzt er für $w_1, \dots, w_r$ einen nicht negativen Wert. Man kann daher nach Hilfssatz 1 ein Element τ mit $w_i(\tau) = 0$ ($i = 1, \dots, r$) so wählen, daß $\frac{\beta}{\alpha}\tau = \zeta$ zu $\mathfrak{o}$ gehört; d.h. $\beta\tau = \alpha\zeta \in a$. Also ist $(\tau)(\beta, a) = (\tau\beta, \tau a) \subseteq a$. Der Idealquotient $a : (\beta, a)$ enthält offenbar τ . Beachtet man nun, daß $a : (\beta, a)$ das Ideal a und τ enthält, so erkennt man sofort, daß $a : (\beta, a)$ ein nullwertiges Ideal ist und infolgedessen nach dem IV. Axiom $a : (\beta, a) = \mathfrak{o}$ ist. Da aber $a \subseteq \mathfrak{o}(\beta, a) = (a : (\beta, a))(\beta, a) \subseteq a$ ist, so muß $a = (\beta, a)$ sein, woraus $\beta \in a$ folgt. Weil β alle Elemente aus b durchlaufen kann, so ist $a = b$.

Zusatz. Ist B der Bewertungsring einer zu W gehörigen Bewertung w und $\mathfrak{P}$ das zu w gehörige Primideal aus B , so ist für eine natürliche Zahl e $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{P}^e \cap \mathfrak{o}$, wo $\mathfrak{p}$ das zu w gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$ bezeichnet.

Beweis. Da $\mathfrak{p}$ ein Primelement von w enthält, so ist der Wertvektor von $\mathfrak{p}^e$ gleich dem von $\mathfrak{P}^e \cap \mathfrak{o}$. Ferner ist offenbar $\mathfrak{p}^e \subseteq \mathfrak{P}^e \cap \mathfrak{o}$, woraus nach dem obigen Hilfssatz $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{P}^e \cap \mathfrak{o}$ folgt.

Ist a ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{o}$, so ist a eindeutig als Potenzprodukt von minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ darstellbar.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in W endlich viele verschiedene Bewertungen $w_1, \dots, w_r$ von der Art, daß a genau für $w_1, \dots, w_r$ von Null verschiedene Werte $e_1, \dots, e_r$ besitzt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ bzw. die Primideale aus den zu $w_1, \dots, w_r$ gehörigen Bewertungsringen und mit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die zu $w_1, \dots, w_r$ gehörigen Primideale aus $\mathfrak{o}$, so ist

$$a \subseteq (\mathfrak{P}_1^{e_1} \cap \mathfrak{o}) \cap \dots \cap (\mathfrak{P}_r^{e_r} \cap \mathfrak{o}) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

weil nach dem vorigen Zusatz $\mathfrak{P}_i^{e_i} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_i^{e_i}$ ($i = 1, \dots, r$) ist. Da die Wertvektoren von α , $\mathfrak{p}_1^{e_1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r^{e_r}$ und $\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ gleich sind, so folgt zunächst

$$\alpha = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r^{e_r} \supseteq \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

und ferner $\alpha = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$.

Daß die obige Darstellung von α eindeutig ist, folgt daraus, daß der Wertvektor von α durch α eindeutig bestimmt ist.

Für ein gebrochenes Ideal α aus k beachte man zunächst, daß für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$ stets nullwertig und folglich gleich $\mathfrak{o}$ ist. Multipliziert man nun α mit einem geeigneten, vom Nullideal verschiedenen Hauptideal (λ) aus $\mathfrak{o}$, so wird $(\lambda)\alpha$ ganz und es gilt nach dem oben Gezeigten:

$$(\lambda)\alpha = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ verschiedene Primideale aus $\mathfrak{o}$ sind und $e_1, \dots, e_r > 0$ ist. Für (λ) gilt: $(\lambda) = \mathfrak{q}_1^{f_1} \dots \mathfrak{q}_s^{f_s}$, wo $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ Primideale aus $\mathfrak{o}$ sind und $f_1, \dots, f_s \geq 1$ ist. Hieraus folgt

$$\alpha = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r} \mathfrak{q}_1^{-f_1} \dots \mathfrak{q}_s^{-f_s},$$

woraus man eine Produktdarstellung von α in Primidealen erhält. Die Eindeutigkeit der Darstellung folgt daraus, daß sich aus verschiedenen Darstellungen von α dem oben Bewiesenen entgegen auch verschiedene Darstellungen von $(\lambda)\alpha$ ergeben würden.

Nun beweise ich anschließend an Satz 22 folgenden Satz:

Satz 25. *Es seien in $\mathfrak{o}$ die Axiome I, II und III erfüllt, und es existiere außer $\mathfrak{o}$ noch ein nullwertiges Ideal. Dann gibt es unendlich viele nullwertige Ideale aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß in $\mathfrak{o}$ nur endlich viele nullwertige Ideale existieren. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{o}$, so ist für jedes nicht in $\mathfrak{p}$ enthaltene Element η aus $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}, \eta)$ stets ein nullwertiges Ideal. Da es nur endlich viele nullwertige Ideale gibt, so gilt für geeignete verschiedene natürliche Zahlen μ, ν :

$$\mathfrak{m}^\mu = \mathfrak{m}^\nu.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $\mu < \nu$ annehmen. Dann besteht für ein passend gewähltes Element π aus $\mathfrak{p}$ die Gleichung

$$\eta^\mu = \kappa \eta^\nu + \pi,$$

wo κ Element aus $\mathfrak{o}$ ist. Da $\eta^\mu(1-\kappa\eta^{\nu-\mu}) = \pi \in \mathfrak{p}$ ist, so muß $1-\kappa\eta^{\nu-\mu}$ zu $\mathfrak{p}$ gehören, weil η nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. Also ist $1 = (1-\kappa\eta^{\nu-\mu}) + \kappa\eta^{\nu-\mu}$ Element aus $\mathfrak{m}$; d.h. $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$.

Besitzte nun $\mathfrak{p}$ außer $\mathfrak{o}$ noch einen echten Teiler $\mathfrak{n}$, so gäbe es in $\mathfrak{n}$ ein Element η , welches nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. Dann würde nach dem eben Bewiesenen $(\mathfrak{p}, \eta)$, also erst recht $\mathfrak{n}$, gleich $\mathfrak{o}$ sein, was ein Widerspruch ist. $\mathfrak{p}$ ist teilerlos. Nach Satz 22 gibt es in $\mathfrak{o}$ entgegen der Voraussetzung nur ein einziges nullwertiges Ideal.

§ 4. Endliche algebraische Erweiterungen des Grundkörpers.

In einer endlichen algebraischen Erweiterung K eines bewerteten Körpers k besitzt eine Bewertung w von k endlich viele nicht äquivalente Fortsetzungen (OSTROWSKI [1]). Wenn insbesondere w diskret ist, so sind die Fortsetzungen von w alle diskret.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{o}$ den in § 1 definierten Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper k . Ferner bezeichnen wir mit $\bar{W}$ eine Menge der Bewertungen von K , welche in k irgendwelche zu W gehörigen Bewertungen induzieren. Der Durchschnitt $\mathfrak{O}$ der Bewertungsringe aller Bewertungen aus $\bar{W}$ enthält offenbar den Integritätsbereich $\mathfrak{o}$. Wir beweisen nun:

Satz 26. *Jedes von Null verschiedene Element aus K besitzt für die Fortsetzungen von höchstens endlich vielen Bewertungen aus W einen von Null verschiedenen Wert.*

Beweis. Ein Element $\xi \neq 0$ aus K genügt einer algebraischen Gleichung $x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = 0$ mit Koeffizienten aus k . Besitzen alle Koeffizienten der obigen Gleichung für eine Bewertung w aus W den Wert Null, so ist der Wert von ξ in bezug auf eine (beliebige) Fortsetzung $\bar{w}$ von w in K auch Null. Wäre nämlich etwa $\bar{w}(\xi) > 0$, so gälte

$$\begin{aligned} \infty &= \bar{w}(\xi^m + a_1\xi^{m-1} + \dots + a_m) \\ &= \text{Min}(\bar{w}(\xi^m), \dots, \bar{w}(a_m)) = 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Ebenso kann nicht $w(\xi) < 0$ sein. ξ kann also nur für diejenigen Bewertungen von K einen von Null verschiedenen Wert besitzen, welche Fortsetzungen der Bewertungen aus W sind, welche mindestens einem von $a_1, \dots, a_m$ einen von Null verschiedenen Wert angeben. Da nach Axiom II höchstens endlich viele verschiedene Bewertungen existieren, welche den $a_1, \dots, a_m$ von

Null verschiedene Werte geben, so kann ξ für die Fortsetzungen von endlich vielen Bewertungen aus W einen von Null verschiedenen Wert besitzen.

Es sei ξ ein Element aus K , welches höchstens für endlich viele verschiedene Bewertungen $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r$ aus $\bar{W}$ einen negativen Wert besitzt. Dann bezeichnen wir mit $w_1, \dots, w_r$ bzw. die durch $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r$ in k induzierten Bewertungen aus W . Nach Hilfssatz 1 kann man in $\mathfrak{o}$ ein Element π derart auffinden, daß $w_i(\pi) > 0$ ($i = 1, \dots, r$) ist. Multipliziert man ξ mit einer geeigneten Potenz von π , so gehört das Produkt zu $\mathfrak{O}$. Hieraus folgt ohne weiteres, daß K der Quotientenkörper von $\mathfrak{O}$ ist. Es gilt dann offenbar:

I*. $\mathfrak{O}$ ist der Durchschnitt der Bewertungsringe aller Bewertungen aus $\bar{W}$.

II*. Jedes von Null verschiedene Element aus $\mathfrak{O}$ besitzt für höchstens endlich viele Bewertungen aus $\bar{W}$ einen von Null verschiedenen Wert.

Nun beweisen wir folgenden

Satz 27. Sind $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r$ die sämtlichen nicht äquivalenten Fortsetzungen einer Bewertung w aus W , so gibt es in $\mathfrak{O}$ die Primelemente $\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_r$ von $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r$ von der Art, daß für $j \neq i$ ($1 \leq j \leq r$) $\bar{w}_j(\bar{\pi}_i) = 0$ ist ($i = 1, \dots, r$).

Beweis. Nach einem Satz von OSTROWSKI (OSTROWSKI [1], S. 310–311) existiert in K ein Primelement ξ von $\bar{w}_i$ mit $\bar{w}_j(\xi) = 0$ ($i \neq j$, $1 \leq j \leq r$). Es besitze ξ für höchstens s verschiedene Bewertungen $\bar{w}_{r+1}, \dots, \bar{w}_{r+s}$ aus $\bar{W}$ einen negativen Wert. Dann induzieren $\bar{w}_{r+1}, \dots, \bar{w}_{r+s}$ in k die w nicht äquivalenten Bewertungen $w_{r+1}, \dots, w_{r+s}$ aus W . Nach Hilfssatz 1 existiert in $\mathfrak{o}$ ein Element π mit $w(\pi) = 0$ und $w_{r+l}(\pi) > 0$ ($l = 1, \dots, s$). Multipliziert man ξ mit einer geeigneten Potenz von π , so sind das Produkt π_i ein Element mit der verlangten Eigenschaft.

Aus Satz 27 folgt in trivialer Weise:

III*. Zu zwei verschiedenen Bewertungen $\bar{w}_1$ und $\bar{w}_2$ aus $\bar{W}$ existieren Elemente $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ aus $\mathfrak{O}$, für welche $\bar{w}_1(\bar{\pi}_1) > 0$, $\bar{w}_2(\bar{\pi}_1) = 0$ und $\bar{w}_1(\bar{\pi}_2) = 0$, $\bar{w}_2(\bar{\pi}_2) > 0$ sind.

Sind nämlich $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ Fortsetzungen einer und derselben Bewertung w aus W , so folgt die Behauptung aus dem obigen Satz. Wenn aber $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ in k bzw. nicht äquivalente Bewertungen w_1, w_2 induzieren, so gibt es nach Axiom III Elemente π_1, π_2 mit $w_1(\pi_1) > 0$, $w_2(\pi_1) = 0$ und $w_1(\pi_2) = 0$, $w_2(\pi_2) > 0$ sind, w. z. b. w.

Die oben Bewiesenen Tatsachen I*, II* und III* zeigen uns, daß die in § 1 aufgestellten Axiome auch in $\mathfrak{D}$ erfüllt sind. Die in § 2 entwickelte Idealtheorie gilt also auch in K .

Wir beweisen nun:

Satz 28. *Es seien in k alle minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ umkehrbar. Dann bildet die Gesamtheit aller $\mathfrak{v}$ -Ideale aus K dann und nur dann eine Gruppe, wenn das Erweiterungsideal jedes minimalen Primideals aus $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{D}$ einem Produkt aus minimalen Primidealen aus $\mathfrak{D}$ gleich ist, falls es in $\mathfrak{D}$ nicht nullwertig ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ ein minimales Primideal aus $\mathfrak{D}$, so gibt es nach Zusatz zu Satz 15 eine solche Bewertung $\bar{w}$ aus $\bar{W}$, daß $\mathfrak{P}$ das zu $\bar{w}$ gehörige Primideal aus $\mathfrak{D}$ ist. Induziert $\bar{w}$ in k die Bewertung w aus W , so gibt es in $\mathfrak{o}$ das zu w gehörige (minimale) Primideal $\mathfrak{p}$. Nach Satz 17 gilt dann in $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{D} \sim \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}.$$

Dabei sind $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ voneinander verschiedene minimale Primideale aus $\mathfrak{D}$ und $e_1, \dots, e_r$ alle positiv. Wenn alle $\mathfrak{v}$ -Ideale aus $\mathfrak{D}$ eine Gruppe bilden, so ist nach Satz 20 $\mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}$ auch ein $\mathfrak{v}$ -Ideal aus $\mathfrak{D}$, weil $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ alle $\mathfrak{v}$ -Ideale sind. Da $\mathfrak{p}$ in k umkehrbar ist, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{D}$ ein $\mathfrak{v}$ -Ideal aus $\mathfrak{D}$, woraus

$$\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$

folgt. Dies gilt offenbar für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{p}\mathfrak{D}$ nicht nullwertig ist.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}$. Dann ist

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{p}\mathfrak{D}) (\mathfrak{p}\mathfrak{D})^{-1} = \mathfrak{P}_1 (\mathfrak{P}_1^{e_1-1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}) (\mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r})^{-1}.$$

Also ist

$$(\mathfrak{P}_1^{e_1-1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}) (\mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r})^{-1} \subseteq \mathfrak{P}_1^{-1},$$

woraus $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_1^{-1} = \mathfrak{D}$ folgt. $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ sind umkehrbar. Nach Satz 20 bilden daher alle $\mathfrak{v}$ -Ideale aus K eine Gruppe.

Für die weitere Untersuchung beweisen wir folgenden

Satz 29. *Es sei ξ ein Element aus K , welches für alle Fortsetzungen einer Bewertung w aus W einen nicht negativen Wert besitzt. Dann genügt ξ einer algebraischen Gleichung, die für w nicht negativ-*

wertige Koeffizienten aus k und sogar den höchsten Koeffizienten 1 besitzt. Wenn insbesondere ξ für alle Fortsetzungen von w den Wert Null besitzt, so ist die Norm von ξ nach k in bezug auf w nullwertig.

Beweis. Bezeichnet p die Charakteristik von $K^{(1)}$, so gibt es eine Potenz p^e von p derart, daß $\xi^* = \xi^{p^e}$ zur maximalen, in K enthaltenen separablen Erweiterung K_0 über k gehört (VAN DER WAERDEN [1], S. 129–130). Wir betrachten nun einen K_0 enthaltenden, separablen galoisschen Körper N über k . Nach Voraussetzung besitzt ξ^* für alle Fortsetzungen von w in K_0 einen nicht negativen Wert. Wendet man auf ξ^* alle Automorphismen von N über k an, so besitzen die so entstandenen Elemente $\xi_1^* = \xi^*, \dots, \xi_n^*$ für alle Fortsetzungen von w in N nicht negative Werte, weil sonst ξ^* für eine Fortsetzung von w in K_0 einen negativen Wert besitzen müsste (KRULL [1], DEURING [1]). Das Polynom $g(x) = (x^{p^e} - \xi_1^*) \dots (x^{p^e} - \xi_n^*)$ aus $k[x]$ hat den höchsten Koeffizienten 1 und für w nicht negativwertige Koeffizienten aus k . Offenbar ist $g(\xi) = 0$.

Wenn insbesondere ξ für alle Fortsetzungen von w in K den Wert Null besitzt, so besitzt $\xi^* = \xi^{p^e}$ für alle Fortsetzungen von w in K_0 , also auch in N den Wert Null. Dann ist $N_{Nk}(\xi^*) = \xi_1^* \dots \xi_n^*$ für w nullwertig, weil $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ für alle Fortsetzungen von w in N nullwertig sind. Da ξ^* zu K_0 gehört, so ist $N_{Nk}(\xi^*)$ eine Potenz von $N_{K_0k}(\xi^*)$, es ist also $N_{K_0k}(\xi^*)$ für w nullwertig. Andererseits ist $N_{Kk}(\xi)^{p^e} = N_{Kk}(\xi^*)$ auch eine Potenz von $N_{K_0k}(\xi^*)$. Daher muß $N_{Kk}(\xi)$ für w den Wert Null besitzen.

Wir benutzen vorläufig alle Bezeichnungen im obigen Beweise. Wenn ξ für alle Fortsetzungen von w in K einen nicht negativen Wert besitzt, so sind $\xi_1^* = \xi^{p^e}, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$ für alle Fortsetzungen von w in N nicht negativwertig. Bezeichnet ν den Grad von N nach K_0 , so tritt in $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ das Element ξ_1^* mindestens ν -mal auf. Da $N_{Nk}(\xi^*)\xi^{*- \nu} = (N_{K_0k}(\xi^*)\xi^{*-1})^\nu$ ist, so besitzt $N_{K_0k}(\xi^*)\xi^{*-1}$ als Element aus K_0 für alle Fortsetzungen von w in K_0 einen nicht negativen Wert. Da $N_{Kk}(\xi^*)$ eine Potenz von $N_{K_0k}(\xi^*)$ ist, so ist $N_{Kk}(\xi^*)\xi^{*-1} = (N_{Kk}(\xi)\xi^{-1})^{p^e}$ für alle Fortsetzungen von w in K nicht negativwertig. Hieraus folgt:

Zusatz. Besitzt ein Element ξ aus K für alle Fortsetzungen einer beliebigen Bewertung w aus W einen nicht negativen Wert, so ist es auch $N_{Kk}(\xi)\xi^{-1}$.

(1) Dabei kann p auch Null sein.

Es sei w ein Bewertung aus W und $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s$ diejenigen voneinander verschiedenen Fortsetzungen von w in K , welche nicht zu $\bar{W}$ gehören. Dann kann man nach Satz 27 für jeden Index $i (1 \leq i \leq s)$ ein solches Primelement π_i von $\bar{w}_i$ aus $\mathfrak{O}$ finden, daß π_i für alle von $\bar{w}_i$ verschiedenen Fortsetzungen von w in K den Wert Null besitzt. Wenn man eventuell π_i^{-1} mit einem passend gewählten Element aus $\mathfrak{o}$, welches für w nullwertig ist, multipliziert, so besitzt das Produkt nur für $\bar{w}_i$ einen negativen Wert. Offenbar gehört das Produkt zu $\mathfrak{O}$. Dieses Produkt bezeichnen wir mit $\bar{\zeta}_i$.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein nullwertiges Ideal aus $\mathfrak{O}$, und $\bar{w}_{s+1}, \dots, \bar{w}_r$ seien die sämtlichen zu $\bar{W}$ gehörigen Fortsetzungen von w in K . Dann enthält $\mathfrak{A}$ nach Satz 2 ein Element $\bar{a}$, welches für $\bar{w}_{s+1}, \dots, \bar{w}_r$ nullwertig ist. Multipliziert man $\bar{a}$ mit einer geeigneten Potenz von $\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_s$, so besitzt das Produkt für $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s$ einen negativen Wert. Wenn man dieses Produkt mit einem passend gebildeten Potenzprodukt aus $\pi_1, \dots, \pi_s$ multipliziert, dann wird das Produkt für alle Fortsetzungen von W in K nullwertig. Nun gilt folgender

Satz 30, *Ein nullwertiges Ideal aus $\mathfrak{O}$ enthält stets ein nullwertiges Ideal aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ ein nullwertiges Ideal aus $\mathfrak{O}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$ von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{M}$ ist, wie man leicht bestätigt, ein Ideal aus $\mathfrak{o}$. Ist nun w eine beliebige Bewertung aus W , so gibt es nach dem oben Bemerkten ein Element μ aus $\mathfrak{M}$, welches für alle Fortsetzungen von w in K nullwertig ist. Da man nötigenfalls aus μ durch Multiplikation mit einem passend gewählten Element aus $\mathfrak{o}$ ein Element, welches für die sämtlichen Fortsetzungen der Bewertungen aus W einen nicht negativen Wert und sogar für alle Fortsetzungen von w den Wert Null besitzt, bilden kann, so kann man annehmen, daß μ von vornherein ein derartiges Element ist. Dann ist die Norm $N_{Kk}(\mu)$ von μ nach Satz 29 für alle Bewertungen aus W nicht negativwertig und sogar für w nullwertig. Da nach Zusatz zu Satz 29 $N_{Kk}(\mu)\mu^{-1}$ Element aus $\mathfrak{O}$ ist, so gehört $N_{Kk}(\mu)$ zu $\mathfrak{M}$. Also gehört $N_{Kk}(\mu)$ zu $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$. Da w eine beliebige Bewertung aus W ist, so enthält $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$ für jede Bewertung w aus W ein für w nullwertiges Element; d.h. $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$ ist ein nullwertiges Ideal aus $\mathfrak{o}$.

Aus Satz 30 folgt nun:

IV*. *Das IV. Axiom gilt auch in $\mathfrak{O}$, wenn es schon in $\mathfrak{o}$ erfüllt ist.*

Satz 31. *Es sei $\bar{W}$ die Menge aller Fortsetzungen der sämtlichen Bewertungen aus W , und $\mathfrak{O}$ der Durchschnitt der Bewertungsringe aller Bewertungen aus $\bar{W}$. Dann besteht $\mathfrak{O}$ aus allen in bezug auf $\mathfrak{o}$ ganzen Element aus K .*

Beweis. Ist ξ ein Element aus $\mathfrak{O}$, so ist es für alle Bewertungen aus $\bar{W}$ nicht negativwertig. Nach Satz 29 genügt ξ einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten alle zu $\mathfrak{o}$ gehören und deren höchster Koeffizient gleich 1 ist; d.h. ξ ist ganz in bezug auf $\mathfrak{o}$.

Genügt umgekehrt ξ einer Gleichung $x^m + \dots + a_m = 0$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$, so besitzt ξ für eine beliebige Bewertung $\bar{w}$ aus $\bar{W}$ einen nicht negativen Wert. Denn sonst gälte

$$\infty = \bar{w}(\xi^m + \dots + a_m) \geq \text{Min}(\bar{w}(\xi^m), \dots, \bar{w}(a_m)) = m\bar{w}(\xi) < 0,$$

weil $\bar{w}(a_1), \dots, \bar{w}(a_m)$ alle nicht negativ sind. Dies ist aber ein Widerspruch.

Zusatz. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Ring, in dem die Axiome I, II, III und IV erfüllt sind. Ferner sei K eine endliche algebraische Erweiterung über k , und $\mathfrak{O}$ der Ring aller in bezug auf $\mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K . Dann ist jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal aus K eindeutig als ein Potenzprodukt von Primidealen aus $\mathfrak{O}$ darstellbar.

§ 5. Beispiele. Unabhängigkeit der Axiome.

1. k bedeute den rationalen Zahlkörper. Legt man dann eine Primzahl p fest, so ist jede von Null verschiedene rationale Zahl a von der Form $a = p^{\rho(a)}r$, wo r , dargestellt als reduzierter Bruch, weder im Zähler noch im Nenner p als Faktor besitzt. Der Exponent $\rho(a)$ ist durch a und p eindeutig bestimmt. Setzt man nun $w(a) = \rho(a)$ und $w(0) = \infty$, so definiert w , wie man leicht bestätigt, eine diskrete (Exponenten-) Bewertung von k , welche p -adische Bewertung genannt ist. Aus verschiedenen Primzahlen entstehen offenbar nicht äquivalente p -adische Bewertungen. Wir bezeichnen mit W die Menge aller nicht äquivalenten p -adischen Bewertungen. Für den Ring $\mathfrak{o}$ aller ganzen rationalen Zahlen sind die Axiome I und II erfüllt. Sind w_1, w_2 verschiedene Bewertungen aus W , so entsprechen ihnen bzw. verschiedene Primzahlen p_1, p_2 als Primelemente. Da offenbar $w_1(p_1) > 0$, $w_2(p_1) = 0$, und $w_1(p_2) = 0$, $w_2(p_2) > 0$ sind, so ist das III. Axiom auch erfüllt. Da eine Bewertung w aus W stets eine Primzahl p als Primelement besitzt, so ist das zu w gehörige Prim-

ideal aus $\mathfrak{o}$ das Hauptideal (p) . Ist nun α ein echter Teiler von (p) aus $\mathfrak{o}$, so enthält α sicher eine zu p prime Zahl a . Daher enthält α die Zahl 1; d.h. $\alpha = \mathfrak{o}$. Jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ ist also teilerlos in $\mathfrak{o}$; nach Satz 22 ist das IV. Axiom auch in α erfüllt.

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade und $\mathfrak{O}$ der Ring aller in bezug auf $\mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K , d.h. aller ganzen algebraischen Zahlen aus K . Dann ist nach Zusatz zu Satz 31 jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal aus K als Potenzprodukt von Primidealen aus $\mathfrak{O}$ darstellbar.

2. Es sei k ein beliebiger Körper und x ein über k transzendentes Element. Dann sind bekanntlich die Bewertungen des Körpers $k(x)$ völlig bestimmt. Ist nämlich $p(x)$ ein irreduzibles Polynom im Ring $k[x]$ aller Polynome von x mit Koeffizienten aus k , so ist jedes von Null verschiedene Element $f(x)$ aus $k(x)$ von der Form $f(x) = p(x)^{\rho(f(x))} r(x)$, wo $r(x)$, dargestellt als reduzierter Bruch, weder im Zähler noch im Nenner $p(x)$ als Faktor enthält. Der Exponent $\rho(f(x))$ ist durch $f(x)$ und $p(x)$ eindeutig bestimmt. Setzt man nun $w(f(x)) = \rho(f(x))$ und $w(0) = \infty$, so definiert w eine diskrete (Exponenten-) Bewertung von $k(x)$. Wir bezeichnen mit W die Menge aller derjenigen nicht äquivalenten Bewertungen von $k(x)$, welche auf obige Weise aus den irreduziblen Polynomen aus $k[x]$ entstehen. Außer den zu W gehörigen Bewertungen von $k(x)$ gibt es noch eine Bewertung w_0 , welche $\frac{1}{x}$ als ein Primelement besitzt. Die sämtlichen Bewertungen aus W mit w_0 zusammen repräsentieren alle nicht äquivalenten Bewertungen von $k(x)$.

Bezeichnet man $k[x]$ durch $\mathfrak{o}$, so sind offenbar in $\mathfrak{o}$ die Axiome I und II erfüllt. Sind w_1, w_2 verschiedene Bewertungen aus W , so gibt es irreduzible Polynome $p_1(x), p_2(x)$ aus $\mathfrak{o}$, welche bzw. Primelemente von w_1 und w_2 sind. Dann sind nach Definition $w_1(p_1(x)) > 0$, $w_2(p_1(x)) = 0$ und $w_1(p_2(x)) = 0$, $w_2(p_2(x)) > 0$. Also ist in α das III. Axiom erfüllt. Wenn w eine Bewertung aus W und $p(x)$ ein w definierendes irreduzibles Polynom aus $\mathfrak{o}$, so ist das zu w gehörige Primideal aus $\mathfrak{o}$ das Hauptideal $(p(x))$. Da ein echter Teiler von $(p(x))$ stets ein zu $p(x)$ primes Polynom enthält, so ist es gleich $\mathfrak{o}$; d.h. das IV. Axiom ist auch in $\mathfrak{o}$ erfüllt.

Es sei K eine endliche algebraische Erweiterung von $k(x)$ und $\mathfrak{O}$ der Ring aller in bezug auf $\mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K . Dann gilt nach Zusatz zu Satz 31:

In K ist jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen aus $\mathfrak{O}$ darstellbar (VAN DER WAERDEN [2], §§ 99, 100).

3. Es sei k ein beliebiger Körper und X eine Menge von endlich oder unendlich vielen Unbestimmten $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, \dots$ über $k^{(1)}$. Dann lege ich im Polynomring $k[x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, \dots] = \mathfrak{o}$ ein irreduzibles Polynom $p(x)$ fest. Jedes Element $f(x)$ aus dem Körper $k(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, \dots)$ ist von der Form $f(x) = p(x)^{\rho(f(x))} r(x)$, wo $r(x)$, dargestellt als reduzierter Bruch, weder im Zähler noch im Nenner $p(x)$ als Faktor enthält. Der Exponent $\rho(f(x))$ ist durch $f(x)$ und $p(x)$ eindeutig bestimmt. Setzt man nun $w(0) = \infty$ und $w(f(x)) = \rho(f(x))$, so definiert w , wie man leicht bestätigt, eine diskrete Bewertung von $k(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, \dots)$. Man bezeichne mit W die Menge aller derjenigen nicht äquivalenten Bewertungen von $k(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, \dots)$, die auf obige Weise definiert sind. Der Ring $\mathfrak{o}$ erfüllt dann sicher die Axiome I und II. Sind w_1, w_2 verschiedene Bewertungen aus W , so existieren in $\mathfrak{o}$ irreduzible Polynome $p_1(x)$ mit $w_1(p_1(x)) > 0$ und $p_2(x)$ mit $w_2(p_2(x)) > 0$. Da nach Definition $w_2(p_1(x)) = 0$ und $w_1(p_2(x)) = 0$ ist, so ist das III. Axiom auch erfüllt. Das IV. Axiom ist nicht mehr erfüllt, wenn X mindestens zwei Unbestimmte enthält.

Nach Definition entspricht jeder Bewertung aus W stets ein *Primhauptideal* aus $\mathfrak{o}$; d.h. jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ ist umkehrbar. Hieraus folgt nach Satz 21: —

Jedes Ideal aus $\mathfrak{o}$ läßt sich als Produkt aus endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ und aus einem $\mathfrak{o}$ quasigleichen Ideal darstellen.

Wenn insbesondere X genau $n (> 1)$ Unbestimmte $x_1, x_2, \dots, x_n$ enthält, dann ist jedes minimale Primideal aus $k[x_1, \dots, x_n]$ ein $(n-1)$ -dimensionales Hauptideal. Da offenbar jedes Hauptideal aus $k[x_1, \dots, x_n]$ stets ein $\mathfrak{v}$ -Ideal ist, so schließt man leicht aus Zusatz zu Satz 20:

Dann und nur dann ist ein Ideal aus $k[x_1, \dots, x_n]$ ein ungemischtes $(n-1)$ -dimensionales Ideal, wenn es Hauptideal ist (VAN DER WAERDEN [2], §§ 90, 94).

Unabhängigkeit der Axiome.

Wenn die Menge W aus nur zwei verschiedenen, aber einander äquivalenten Bewertungen w_1, w_2 von k besteht und $\mathfrak{o}$ der Bewer-

(1) D.h. $x_\alpha, \dots, x_\lambda, \dots$ sind über k algebraisch unabhängig.

tungsring von w_1 (also auch von w_2) ist, so sind in $\mathfrak{o}$ die Axiom I, II und IV erfüllt. Aber das III. Axiom ist nicht mehr erfüllt, weil für jedes Element γ aus $\mathfrak{o}$ mit $w_1(\gamma) > 0$ auch stets $w_2(\gamma) > 0$ sein muß. Obwohl W aus nicht äquivalenten Bewertungen besteht, kann das III. Axiom doch im allgemeinen nicht erfüllt sein, während die Axiome I und II erfüllt sind. Wir betrachten nämlich den Körper $k' = k(x_1, x_2)$, welcher aus einem Körper k durch Adjunktion von zwei Unbestimmten x_1, x_2 entsteht. Ist nun $\frac{a(x)}{b(x)}$ ⁽¹⁾ ein vom Nullelement verschiedenes Element aus $k(x_1, x_2)$, so setze man $w^*\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right) =$ dem niedrigsten Grad von $a(x)$ — dem niedrigsten Grad von $b(x)$, und $w^*(0) = \infty$. Dann definiert w^* eine diskrete Bewertung von k' . w^* gibt offenbar jedem Element aus $k[x_1, x_2]$ einen nicht negativen Wert. Fügt man nun allen denjenigen nicht äquivalenten Bewertungen von $k(x_1, x_2)$, welche wie im Beispiel 3 definiert sind, noch die Bewertung w^* hinzu, und bezeichnet die so entstandene Menge der Bewertungen mit W^* , so erfüllt $k[x_1, x_2]$ offenbar die Axiome I und II, aber nicht das III. Axiom. Denn ist w_1 die Bewertung mit x_1 als Primelement, so ist für jedes Element $f(x) \neq 0$ aus $k[x_1, x_2]$ mit $w_1(f(x)) > 0$, stets auch $w^*(f(x)) > 0$, weil $f(x)$ sicher von x_1 nicht frei ist.

Es seien $p_1, p_2, \dots, p_r, \dots$ unendlich viele voneinander verschiedene *ungerade* Primzahlen, und k_0 sei der rationale Zahlkörper. Dann sind die Körper $k_0(\sqrt{p_1}) = k_1, k_0(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}) = k_2, \dots, k_0(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r}) = k_r, \dots$ alle über k_0 abelsch. Da die Galoisgruppe von k_r über k_0 abelsch vom r -gliedrigen Typus $(2, \dots, 2)$ ist, so ist jeder Primteiler vom Hauptideal (p_1) in k_r höchstens vom Grade 2 und vom Exponenten 2 über k_0 . Im Ring aller ganzen algebraischen Zahlen aus dem Vereinigungskörper k von $k_0, k_1, \dots, k_r, \dots$ besitzt das Hauptideal (p_1) unendlich viele verschiedene Primteiler, welche über k vom Exponenten 2 sind (STIEMKE [1]). Aus jedem Primteiler $\mathfrak{p}$ von (p_1) in k entsteht eine diskrete Bewertung w von k derart, daß jede durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze algebraische Zahl aus k für w stets einen positiven Wert, aber jede nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze algebraische Zahl aus k den Wert Null besitzt (MORIYA [1], S. 164–166). Aus je zwei verschiedenen Primteilern von (p_1) entstehen nicht äquivalente Bewertungen. Wir bezeichnen mit W die Menge aller derjenigen nicht äquivalenten Bewertungen von k , welche aus den Primteilern

(1) $a(x), b(x)$ sind Polynome mit Koeffizienten aus k .

von (p_1) entstehen. Bezeichnet $\mathfrak{o}$ den Durchschnitt der Bewertungsringe aller Bewertungen aus W , so besitzt $\mathfrak{o}$ den Körper k als Quotientenkörper, weil $\mathfrak{o}$ den Ring aller ganzen algebraischen Zahlen aus k enthält. Das I. Axiom ist nach Definition in $\mathfrak{o}$ erfüllt. Sind w_1, w_2 verschiedene Bewertungen aus W , so gibt es nach Definition ganze algebraische Zahlen γ_1, γ_2 , für welche $w_1(\gamma_1) < 0$, $w_2(\gamma_1) = 0$ und $w_1(\gamma_2) = 0$, $w_2(\gamma_2) > 0$ gilt. Das III. Axiom ist daher in $\mathfrak{o}$ erfüllt.

Wir nehmen nun an, daß es außer $\mathfrak{o}$ ein nullwertiges Ideal gibt. Dann existiert nach Satz 10 ein *nullwertiges Primideal* $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{o}^{(1)}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{m}_i$ von $\mathfrak{m}$ mit dem Körper k_i ist ein Primideal im Durchschnitt $\mathfrak{o}_i$ von $\mathfrak{o}$ mit k_i , wenn i hinreichend groß gewählt ist. Wenn man nämlich den Index I so groß wählt, daß $\mathfrak{m}$ ein von Null verschiedenes Element aus k_i enthält, so ist für jeden Index $i \geq I$ $\mathfrak{m}_i$ ein vom Nullideal verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{o}_i$. Ferner ist $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{o}_i$, weil $\mathfrak{o}_i$ die Zahl 1 enthält. Im folgenden ist stets $i \geq I$ vorausgesetzt. Ist für die Zahlen α_i, β_i aus $\mathfrak{o}_i$ $\alpha_i \beta_i \in \mathfrak{m}_i$, so ist wegen der Primidealeigenschaft $\alpha_i \in \mathfrak{m}_i$ oder $\beta_i \in \mathfrak{m}_i$, woraus $\alpha_i \in \mathfrak{m}_i$ oder $\beta_i \in \mathfrak{m}_i$ folgt, w. z. b. w. Jede Bewertung aus W induziert in k_i eine Bewertung derart, daß sie für einen Primteiler von (p_1) aus k_i einen von Null verschiedenen Wert, aber für jede durch diesen Primteiler unteilbare ganze algebraische Zahl aus k den Wert Null angibt. Daher induzieren die sämtlichen Bewertungen aus W in k_i endlich viele nicht äquivalente Bewertungen $w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}$. Bezeichnet man mit $B_1^{(i)}, \dots, B_{r_i}^{(i)}$ bzw. die zu $w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}$ gehörigen Bewertungsringe, so ist ersichtlich

$$B_1^{(i)} \wedge \dots \wedge B_{r_i}^{(i)} = \mathfrak{o}_i.$$

Das Primideal $\mathfrak{m}_i$ ist höchstens für eines der $w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}$ nicht nullwertig. Sind nämlich etwa $w_1^{(i)}(\mathfrak{m}_i) > 0$, $w_2^{(i)}(\mathfrak{m}_i) > 0$, so existieren zu einer von Null verschiedenen Zahl μ aus $\mathfrak{m}_i$ zwei Zahlen γ_1, γ_2 aus $\mathfrak{o}_i$ von der Art, daß $w_1(\gamma_1) > 0$, $w_2(\gamma_1) = 0$ und $w_1(\gamma_2) = 0$, $w_2(\gamma_2) > 0$ sind und $\mu = \gamma_1 \gamma_2$ gilt (OSTROWSKI 1, S. 310–311). Da γ_1 in $\mathfrak{m}_i$ nicht enthalten ist, so muß γ_2 in $\mathfrak{m}_i$ enthalten sein, was aber unmöglich ist. Wir nehmen jetzt an, daß für jeden Index i das Ideal $\mathfrak{m}_i$ stets für eines der $w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}$ nicht nullwertig ist. Dann gibt es in den Körpern $k_I, \dots, k_i, \dots$ bzw. die Bewertungen $w^{(I)}, \dots, w^{(i)}, \dots$ derart,

(1) Beim Beweis von Satz 10 sind die Axiome II und III nicht gebraucht.

daß $w^{(I)}(m_I), \dots, w^{(i)}(m_i), \dots$ positiv sind, wobei $w^{(i)}$ die durch irgendeine Bewertung aus W in k_i induzierte Bewertung bedeutet. Dabei ist $w^{(i+1)}$ eine Fortsetzung von $w^{(i)}$. Denn sonst induzierte $w^{(i+1)}$ in k_i eine $w^{(i)}$ nicht äquivalente Bewertung und folglich besäße m_i für zwei nicht äquivalente Bewertungen aus $w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}$ einen von Null verschiedenen Wert, was aber ein Widerspruch ist. Man kann daher durch $w^{(I)}, \dots, w^{(i)}, \dots$ eine Bewertung w von k bestimmen, indem man für $\alpha \in k_i$ $w(\alpha) = w^{(i)}(\alpha)$ setzt ($i = I, \dots$). Wie man leicht bestätigt, gibt w einem Primteiler von (p_1) aus k einen von Null verschiedenen Wert, und jede durch diesen Primteiler unteilbare ganze algebraische Zahl ist für w stets nullwertig. w ist also eine Bewertung aus W . Da die Wertmenge $w^{(I)}(m_I), \dots, w^{(i)}(m_i), \dots$ nach unten beschränkt ist, so ist von einem passend gewählten Index j ab stets $w^{(j)}(m_j) = w^{(j+1)}(m_{j+1}) = \dots > 0$. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$w(m) > 0,$$

was aber ein Widerspruch ist. Daher gibt es ein m_i , welches für $w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}$ nullwertig ist. Da $\mathfrak{o}_i$ nach Satz 3 ein Hauptidealring ist, so muß m_i nach Satz 6 gleich $\mathfrak{o}_i$ sein. Hieraus folgt entgegen der Voraussetzung:

$$m = \mathfrak{o}.$$

Das IV. Axiom ist also in $\mathfrak{o}$ erfüllt. Dagegen ist das II. Axiom nicht mehr erfüllt, weil p_1 für unendlich viele Bewertungen aus W einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Wir schließen nun im Beispiel 1 von der Menge aller nicht äquivalenten p -adischen Bewertungen die *dyadische* Bewertung aus. Die neue Menge soll im folgenden mit W' bezeichnet werden. Wenn man mit $\mathfrak{o}$ wieder den Ring aller ganzen rationalen Zahlen bezeichnet, so sind in $\mathfrak{o}$ sicher die Axiome II, III und IV. erfüllt. Aber das I. Axiom ist nicht erfüllt, weil der Durchschnitt der Bewertungsringe aller Bewertungen aus W' eine gebrochene Zahl mit 2 als Nenner enthalten kann.

Das Beispiel 3 zeigt uns, daß das IV. Axiom im allgemeinen nicht erfüllt ist, während die Axiome I, II und III erfüllt sind.

Satz 32. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein Integritätsbereich mit k als Quotientenkörper. Für die Ideale⁽¹⁾ aus k sei die Quasigleichheit „ $\sim$ “ erklärt, welche*

(1) Unter einem Ideal aus k versteht man wie bisher ein vom Nullideal verschiedenes, gebrochenes Ideal in bezug auf $\mathfrak{o}$.

die Äquivalenzeigenschaft besitzt. Ferner besitzen die Ideale aus k folgende Beschaffenheiten:

1. Wenn für die Ideale a, a', b, b' $a \sim a', b \sim b'$ gilt, so ist $aa' \sim bb'$,

2. Jedes Ideal a aus $\mathfrak{o}$ ist entweder $\mathfrak{o}$ oder einem Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ quasigleich. Dabei ist das a quasigleiche $\mathfrak{o}$ oder ein a quasigleiches Potenzprodukt durch a eindeutig bestimmt.

3. Für die Ideale a, b aus $\mathfrak{o}$ seien $a \sim \mathfrak{P}_a$ und $b \sim \mathfrak{P}_b$, wo $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b$ bzw. entweder $\mathfrak{o}$ oder Potenzprodukte von minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ bedeuten. Ist dann $a \subseteq b$, so geht jedes minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{P}_a$ mindestens mit so hohem Exponenten auf wie in $\mathfrak{P}_b^{(1)}$. Die Umkehrung gilt auch, wenn b ein Hauptideal ist.

Dann sind die Axiome I, II und III in $\mathfrak{o}$ erfüllt.

Wenn insbesondere die Quasigleichheit durch die Gleichheit ersetzt ist, so gilt auch das IV. Axiom.

Beweis. Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_a$ stets entweder $\mathfrak{o}$ oder ein Potenzprodukt von minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$, dem nach 3 ein Ideal a aus $\mathfrak{o}$ quasigleich ist. Besonders schreiben wir für ein Hauptideal (α) $\mathfrak{P}_\alpha$ statt $\mathfrak{P}_{(\alpha)}$.

Wir legen nun ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ zugrunde. Ist für ein Element $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$ $(\alpha) \sim \mathfrak{P}_\alpha$, so bezeichnen wir mit $\rho(\alpha)$ den genauen Exponenten von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}_\alpha$, und setzen $w_{\mathfrak{p}}(\alpha) = \rho(\alpha)$. Für Null setzen wir $w_{\mathfrak{p}}(0) = \infty$. Dann ist für jedes Element γ aus $\mathfrak{o}$ der Wert $w_{\mathfrak{p}}(\gamma)$ eindeutig definiert, und es ist nach 3 stets $w_{\mathfrak{p}}(\gamma) \geq 0$, weil $\mathfrak{o} = (1) \geq (\gamma)$ ist.

Es seien α, β Elemente aus $\mathfrak{o}$. Ist dann eines von α und β gleich Null, so gilt offenbar:

$$w_{\mathfrak{p}}(0) = w_{\mathfrak{p}}(\alpha\beta) = w_{\mathfrak{p}}(\alpha) + w_{\mathfrak{p}}(\beta) = \infty.$$

Wenn aber α, β beide von Null verschieden sind, so folgt aus $(\alpha) \sim \mathfrak{P}_\alpha$ und $(\beta) \sim \mathfrak{P}_\beta$ die Beziehung $(\alpha\beta) \sim \mathfrak{P}_\alpha \mathfrak{P}_\beta = \mathfrak{P}_{\alpha\beta}$, weil $\mathfrak{P}_\alpha \mathfrak{P}_\beta$ entweder $\mathfrak{o}$ oder ein Potenzprodukt von minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ ist und folglich wegen der Eindeutigkeitseigenschaft in 3 $\mathfrak{P}_\alpha \mathfrak{P}_\beta = \mathfrak{P}_{\alpha\beta}$ sein muß.

(1) Wenn $\mathfrak{P}_a$ gleich $\mathfrak{o}$ oder ein solches Potenzprodukt ist, daß in ihm ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ nicht aufgeht, so verabreden wir, daß $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}_a$ mit dem genauen Exponenten 0 aufgeht. Dabei verstehen wir unter $\mathfrak{p}^0$ stets das Ideal $\mathfrak{o}$.

Hieraus schließt man sofort:

$$w_p(\alpha\beta) = w_p(\alpha) + w_p(\beta).$$

Für beliebige Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gilt jedenfalls:

$$w_p(\alpha\beta) = w_p(\alpha) + w_p(\beta).$$

Für ein Element $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$ folgt aus $(\alpha) \sim \mathfrak{P}_\alpha$:

$$\mathfrak{o} = (\alpha)^{-1}(\alpha) \sim (\alpha)^{-1}\mathfrak{P}_\alpha.$$

Setzt man dann $(\alpha)^{-1}\mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{m}$ Ideal aus $\mathfrak{o}$. Denn da $\mathfrak{m} \sim \mathfrak{o} = \mathfrak{P}_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{o}$ Hauptideal ist, so muß nach 3 $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{o}$ sein, w. z. b. w. Wenn p mit dem genauen Exponenten $\rho(\alpha)$ in $\mathfrak{P}_\alpha$ aufgeht, so ist offenbar

$$p^{\rho(\alpha)} \geq \mathfrak{P}_\alpha = (\alpha)\mathfrak{m},$$

Ebenso gilt für ein Element $\beta \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$:

$$p^{\rho(\beta)} \geq \mathfrak{P}_\beta = (\beta)\mathfrak{n},$$

wo $\mathfrak{n} \sim \mathfrak{o}$ ist und $\rho(\beta)$ den genauen Exponenten von p in $\mathfrak{P}_\beta$ bedeutet. Setzt man nun $\text{Min}(\rho(\alpha), \rho(\beta)) = \nu$, so ist $p^\nu \geq (\alpha)\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ und $p^\nu \geq (\beta)\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, woraus

$$p^\nu \geq (\alpha, \beta)\mathfrak{m}\mathfrak{n} \geq (\alpha + \beta)\mathfrak{m}\mathfrak{n}$$

folgt. Wenn $\alpha + \beta = 0$ ist, so ist ersichtlich

$$\infty = w_p(\alpha + \beta) > \text{Min}(w_p(\alpha), w_p(\beta)).$$

Wenn aber $\alpha + \beta \neq 0$ ist, so gilt:

$$(\alpha + \beta)\mathfrak{m}\mathfrak{n} \sim (\alpha + \beta) \sim \mathfrak{P}_{\alpha + \beta}.$$

Nach 3 muß p mindestens mit dem Exponenten ν in $\mathfrak{P}_{\alpha + \beta}$ aufgehen; d. h.

$$w_p(\alpha + \beta) \geq \nu \geq \text{Min}(\rho(\alpha), \rho(\beta)) = \text{Min}(w_p(\alpha), w_p(\beta)).$$

Wenn entweder α oder β gleich Null ist, so ist offenbar

$$w_p(\alpha + \beta) = \text{Min}(w_p(\alpha), w_p(\beta)).$$

Auf jeden Fall gilt für die Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$:

$$w_p(\alpha + \beta) \geq \text{Min}(w_p(\alpha), w_p(\beta)).$$

Da k der Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$ ist, so existieren zu einem Element ξ aus k Elemente $\alpha, \beta \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$ derart, daß $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$ ist. Wir setzen jetzt:

$$w_p(\xi) = w_p(\alpha) - w_p(\beta).$$

Wie man leicht bestätigt, definiert dann w_p eine Exponentenbewertung von k (VAN DER WAERDEN [1], § 73). Für ein von Null verschiedenes Element α aus $\mathfrak{p}$ gilt nach dem oben Bemerkten:

$$\mathfrak{P}_\alpha \leq (\alpha) \leq \mathfrak{p}.$$

Nach 3 muß $\mathfrak{p}$ mit einem positiven Exponenten in $\mathfrak{P}_\alpha$ aufgehen; d.h. $w_p(\alpha) > 0$. Also ist w_p eine nicht triviale Bewertung von k . Da für jedes Element $\xi \neq 0$ aus k $w_p(\xi)$ eine ganze rationale Zahl ist, so ist w_p diskret. Die Bewertung w_p wollen wir die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung nennen.

Wir zeigen nun, daß für ein in $\mathfrak{p}$ nicht enthaltenes Element β aus $\mathfrak{o}$ stets $w_p(\beta) = 0$ ist. Nach dem oben Bemerkten gibt es nämlich ein $\mathfrak{o}$ quasisgleiches Ideal $\mathfrak{n}$ derart, daß $\mathfrak{P}_\beta = (\beta)\mathfrak{n}$ ist. Wenn $\mathfrak{p}$ mit einem positiven Exponenten in $\mathfrak{P}_\beta$ aufgeht, so ist $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{P}_\beta = (\beta)\mathfrak{n}$, es muß also $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{n}$ sein, weil (β) in $\mathfrak{p}$ nicht enthalten und $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Da andererseits $\mathfrak{n} \sim \mathfrak{o}$ ist, so ergibt die Relation $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{n}$ nach 3 einen Widerspruch; d.h. $w_p(\beta) = 0$.

Wir bezeichnen mit W die Menge derjenigen diskreten Exponentenbewertungen von k , welche auf obige Weise durch die sämtlichen verschiedenen minimalen Primideale aus $\mathfrak{o}$ definiert sind. Da für $\alpha \neq 0$ $\mathfrak{P}_\alpha$ entweder $\mathfrak{o}$ oder ein Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen aus $\mathfrak{o}$ ist, so besitzt α für höchstens endlich viele Bewertungen aus W einen von Null verschiedenen Wert; d.h. das II. Axiom ist erfüllt. Sind nun w_1, w_2 verschiedene Bewertungen aus W , so gibt es in $\mathfrak{o}$ zwei verschiedene minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ derart, daß w_1, w_2 bzw. die zu $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ gehörigen Bewertungen sind. Da $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ verschiedene minimale Primideale sind, so gibt es in $\mathfrak{p}_1$ ein Element α , welches in $\mathfrak{p}_2$ nicht enthalten ist, und ebenso gibt es in $\mathfrak{p}_2$ ein Element β , welches nicht zu $\mathfrak{p}_1$ gehört. Nach dem oben Gezeigten gilt dann:

$$w_1(\alpha) > 0, w_2(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad w_1(\beta) = 0, w_2(\beta) > 0.$$

Das III. Axiom ist auch erfüllt.

Da für eine beliebige Bewertung aus W jedes Element aus $\mathfrak{o}$ einen nicht negativen Wert besitzt, so ist $\mathfrak{o}$ im Durchschnitt der Bewertungsringe aller Bewertungen aus W enthalten. Ist umgekehrt $\xi \neq 0$ Element aus diesem Durchschnitt, so ist für jede Bewertung w aus W $w(\xi) \geq 0$. Wir bestimmen für ξ Element α, β aus $\mathfrak{o}$ so, daß $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$ ist. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ das w definierende minimale Primideal aus $\mathfrak{o}$, so geht $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}_\alpha$ und $\mathfrak{P}_\beta$ bzw. mit dem genauen Exponenten $w(\alpha)$ und $w(\beta)$ auf. Wegen $w(\alpha) - w(\beta) = w(\xi) \geq 0$ muß also $w(\alpha) \geq w(\beta)$ sein. Da (β) Hauptideal ist, so gilt nach 3 $(\beta) \supseteq (\alpha)$. Hieraus folgt:

$$\mathfrak{o} = (\beta)(\beta)^{-1} \supseteq (\alpha\beta^{-1});$$

d.h. $\frac{\alpha}{\beta}$ ist Element aus $\mathfrak{o}$. Somit ist das Erfülltsein des I. Axiomes bestätigt.

Es sei besonders die Quasigleichheit durch die gewöhnliche Gleichheit ersetzt. Dann ist für ein nullwertiges Ideal $\mathfrak{m}^{(1)}$ aus $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{m} = \mathfrak{P}_\mathfrak{m}$. Wenn $\mathfrak{P}_\mathfrak{m}$ nicht gleich $\mathfrak{o}$ ist, so gibt es nach 3 ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$, für welches $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{P}_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ gilt. Jedes Element μ aus $\mathfrak{m}$ ist stets in $\mathfrak{p}$ enthalten. Bezeichnet man mit w die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung, so ist $w(\mu) > 0$; d.h. $\mathfrak{m}$ ist für w nicht nullwertig, was aber ein Widerspruch ist. Es muß also $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$ sein.

Wir wollen sagen, in einem Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ gelte die gewöhnliche Idealtheorie, wenn jedes vom Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal aus $\mathfrak{o}$ eindeutig als Produkt von endlich vielen Primidealpotenzen mit positiven Exponenten darstellbar ist und jedes Primideal aus $\mathfrak{o}$ stets in $\mathfrak{o}$ teilerlos ist. Dann gilt:

Satz 33. *Gilt in $\mathfrak{o}$ die gewöhnliche Idealtheorie, so auch in der Hauptordnung⁽²⁾ $\mathfrak{D}$ jeder endlichen algebraischen Erweiterung des Quotientenkörpers k von $\mathfrak{o}$ (GRELL [1]).*

Beweis. Nach Voraussetzung besitzt $\mathfrak{o}$ die in Satz 32 angegebenen Beschaffenheiten 1 und 2. Es sei für die Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Ferner seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ alle diejenigen voneinander verschiedenen Primideale aus $\mathfrak{o}$, welche im $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ gleichen Primidealpotenzprodukt wirklich auftreten. Dann kann man $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \dots \mathfrak{p}_r^{a_r}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{b_1} \dots \mathfrak{p}_r^{b_r}$ setzen. Dabei können einige Exponenten eventuell Null sein, und

(1) $\mathfrak{m}$ ist also für jede Bewertung aus W nullwertig.

(2) D. h. $\mathfrak{D}$ ist der Ring aller in bezug auf $\mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus der Erweiterung.

wir setzen wie üblich $p_i^0 = 0$ ($i = 1, \dots, r$). Ist nun a eine größere natürliche Zahl als $\text{Max}(a_2, \dots, a_r)$, so gilt wegen $(p_1, p_i) = 0$ ($i \geq 2$):

$$0 = (p_1, p_i)^a = (p_1^a, p_1^{a-1} p_i, \dots, p_i^a) \subseteq (p_1, p_i^a) \subseteq 0;$$

d. h.

$$(p_1, p_i^a) = 0 \quad (i = 2, \dots, r).$$

Ebenso beweist man leicht aus $0 = (p_1, p_2^a) \dots (p_1, p_r^a) \subseteq (p_1, p_2^a \dots p_r^a) \subseteq 0$:

$$(p_1, p_2^a \dots p_r^a) = 0.$$

Weil $p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} \geq p_2^a \dots p_r^a$ ist, so ist $(p_1, p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}) = 0$. Schließlich folgt:

$$(p_1^{b_1}, p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}) = 0.$$

Multipliziert man jetzt die beiden Seiten der obigen Gleichung mit $p_1^{a_1}$, so ist

$$(p_1^{a_1+b_1}, a) = p_1^{a_1} (p_1^{b_1}, p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}) = p_1^{a_1}.$$

Da $p_1^{b_1} \geq b \geq a$ ist, so ist $p_1^{b_1} \geq p_1^{a_1}$. Hieraus folgt sofort $a_1 \geq b_1$. Denn sonst würde wegen $a_1 < b_1$ $p_1^{b_1} \leq p_1^{a_1}$ folgen und folglich für $a_1 \neq b_1$ $p_1^{a_1} = p_1^{b_1}$ sein. Ebenso beweist man:

$$a_2 \geq b_2, \dots, a_r \geq b_r.$$

$\mathfrak{o}$ besitzt also die 3. Beschaffenheit in Satz 32. Nach Satz 32 sind daher in $\mathfrak{o}$ die Axiome I, II, III und IV erfüllt. Somit folgt die Behauptung des Satzes aus dem Zusatz zu Satz 31.

Literaturverzeichnis.

- C. CHEVALLEY: [1] Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Thèse, Paris (1933).
 R. DEDEKIND u. H. WEBER: [1] Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 92 (1882), S. 181-290.
 M. DEURING: [1] Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann., Bd. 105 (1931), S. 277-307.
 H. GRELL: [1] Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art, Math. Zeitschr., Bd. 40 (1936), S. 503-505.

- H. HASSE: [1] Klassenkörpertheorie, Ausarbeitung einer Vorlesung an der Universität Marburg (1933).
- K. HENSEL: [1] Theorie der algebraischen Zahlen, Berlin (1908).
- W. KRULL: [1] Galoissche Theorie bewerteter Körper, Sitzungsber., München (1930), S. 225-238.
[2] Idealtheorie, Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgebiete, IV. Bd., 3. Berlin (1935).
- J. KÜRSCHÁK: [1] Über die Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 142 (1913), S. 211-253.
- M. MORIYA: [1] Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, Journ. Scie. Hokkaidô Imp. Univ., Series I, Bd. 3 (1935), S. 109-190.
- E. NOETHER: [1] Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionkörpern, Math. Ann., Bd. 96 (1927), S. 26-91.
- A. OSTROWSKI: [1] Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Teil I. Math. Zeitschr., Bd. 39 (1935), S. 269-320.
- F. K. SCHMIDT: [1] Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen, Diss. Freiburg (1926).
[2] Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p , Math. Zeitschr., Bd. 33 (1931), S. 1-32.
[3] Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I, Math. Zeitschr., Bd. 41 (1936), S. 413-438.
- E. STIEMKE: [1] Über unendliche algebraische Zahlkörper, Math. Zeitschr., Bd. 25 (1926), S. 9-39.
- VAN DER WAERDEN: [1] Moderne Algebra, I. Teil, 2. Auf., Berlin (1937).
[2] Moderne Algebra, II. Teil, Berlin (1931).