



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	DIE THEORIE DES KAWAGUCHISCHEN RAUMES MIT DER MASSBESTIMMUNG VON EINER BESTIMMTEN GESTALT
Author(s)	Hokari, Shisanji
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 8(2-3), 063-078
Issue Date	1940
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55948
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_08_N2-3_063-078.pdf



DIE THEORIE DES KAWAGUCHISCHEN RAUMES MIT DER MASSBESTIMMUNG VON EINER BESTIMMTEN GESTALT

Von

Shisanji HOKARI

Wenn in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit die Bogenlänge jeder parametrisierten Kurve $x^i = x^i(t)$, oder die allgemeine Massbestimmung durch das Integral

$$s = \int F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) dt$$

gegeben ist, so nennen wir diese Mannigfaltigkeit nach H. V. CRAIG und J. L. SYNGE den KAWAGUCHISCHEN Raum von der Dimension n und der Ordnung m . Dafür, dass die Bogenlänge s bei jeder Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ unverändert bleiben soll, d.h. von der Parametrisierung auf der Kurve unabhängig sein soll, ist es notwendig und hinreichend, dass F nicht von t abhängig ist:

$$(1) \quad s = \int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) dt$$

und dass die bekannten Beziehungen

$$\Delta_1 F = F, \quad \Delta_s F = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m$$

gelten⁽¹⁾. In seiner interessanten Arbeit⁽²⁾ hat Herr Prof. A. KAWAGUCHI die geometrische Theorie des Integrals (1) unter der Gruppe aller regulären Punkttransformationen entwickelt, d.h. es ist ihm gelungen, aus (1) auf Grund des Gebrauches vom Linienelemente $(2m-1)$ -ter Ordnung ein intrinsektes Übertragungsschema (bei der Parameter-

(1) H. V. CRAIG, On generalized tangent vector, American Journal of Mathematics, Bd. 57 (1935), S. 457-462; II, Bd. 58 (1936), S. 833-846. H. HOMBU, Die projektive Theorie eines Systems der "paths" höherer Ordnung, II, dieses Journal, Bd. 7 (1938), S. 35-94.

(2) A. KAWAGUCHI, Theory of connections in a KAWAGUCHI space of order 2, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyô, Bd. 13 (1937), S. 183-186; Theory of connections in a KAWAGUCHI space of higher order, ibid., S. 237-240.

transformation) herzuleiten und dadurch zur Theorie des KAWAGUCHI-schen Raumes eine Grundlage anzugeben. Die dabei verfolgte Geometrie besteht darin, dass es eine von gegebener Grundfunktion F eingeführte intrinseke Grösse mit den folgenden Bestimmungszahlen gibt:

$$g_{ij} = mF^{2m-1}F_{(m)i(m)j} + \overset{1}{\mathfrak{G}}_i \overset{1}{\mathfrak{G}}_j + \overset{m}{\mathfrak{G}}_i \overset{m}{\mathfrak{G}}_j$$

und deren Determinante $|g_{ij}|$ nicht verschwindet. Wie man weiss, gibt es aber viele spezielle KAWAGUCHI-sche Räume, von denen die Determinante $|g_{ij}|$ identisch verschwindet. Allein seine Methode ist nicht auf diese Fälle anwendbar. Diese Tatsache führt zu der Frage, ob in diesen Räumen die Theorie von Parallelübertragungen aufgestellt werden könne, indem man andere neue Methoden anwendet.

In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns mit dem Integral

$$(2) \quad s = \int \left\{ \sum_{\alpha=0}^K b_{\alpha}^* a_{i_1} \dots a_{i_{K-\alpha}} x^{(m)i_1} \dots x^{(m)i_{K-\alpha}} \right\}^{\frac{1}{p}} dt, \quad b_0^* = 1$$

beschäftigen. Es ist selbstverständlich, dass im KAWAGUCHI-schen Raume mit dieser Massbestimmung die Determinante des KAWAGUCHI-schen metrischen Tensors g_{ij} identisch verschwindet. Es ergeben sich aus der Grundfunktion die $K-1$ intrinseken absoluten Skalare B_{γ} ($\gamma = 2, 3, \dots, K$), welche höchstens vom Linienelemente $(m-1)$ -ter Ordnung abhängen; und mit Hilfe dieser Skalare leiten wir ein Übertragungsschema in der Mannigfaltigkeit des Linienelementes $(m-1)$ -ter Ordnung her. Wir haben auch die $K-1$ anderen intrinseken absoluten Skalare f_{β} ($\beta = 1, 2, \dots, K-1$), die vom Linienelemente m -ter Ordnung abhängig sind. Es sind zwei Fälle als spezielle hervorzuheben, erstens der Fall: jeder Skalar B_{γ} verschwindet identisch; zweitens der Fall: $K=1$. Auf jeden Fall können wir schliessen, dass das oben gegebene Integral (2) in die Gestalt

$$(3) \quad s = \int (a_i x^{(m)i} + b)^{\frac{1}{q}} dt$$

umgeschrieben wird; und das Übertragungsschema dieses Raumes wird auf ganz andere Weise gegeben.

1. Die Skalare B_{γ} , f_{β} . Wir ziehen jetzt den speziellen KAWAGUCHI-schen Raum mit der Massbestimmung (2) in Betracht, wobei

a_i und b_α^* höchstens vom Linienelemente $(m-1)$ -ter Ordnung abhängig sind. Ohne der Allgemeinheit wesentlich zu schaden, können wir voraussetzen, dass die Definitionsgleichung der Massbestimmung (2)

$$(4) \quad s = \int \left\{ \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} b_\alpha a_{i_1} \dots a_{i_{K-\alpha}} x^{(m)i_1} \dots x^{(m)i_{K-\alpha}} \right\}^{\frac{1}{p}} dt, \quad b_0 = 1$$

ist, da wir $\binom{K}{\alpha} b_\alpha$ statt b_α^* für $\alpha = 0, 1, \dots, K$ schreiben dürfen. Um die Schreibweise zu verkürzen, setzen wir f an Stelle des Ausdrucks in grossen Klammern von (4); dann ist f ein Skalar mit dem Gewicht p bei der Parametertransformation. Es lautet dann der

Satz 1. a_i sind die Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors und b_α ($\alpha = 0, 1, \dots, K$) transformieren sich nach der Regel

$$(5) \quad \bar{b}_\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} b_\beta T^{\alpha-\beta}$$

unter den Koordinatentransformationen $x^i = x^i(\bar{x}^j)$, wobei gesetzt sind:

$$(6) \quad x^{(m)i} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^{(m)j} + T^i, \quad a_i T^i = T.$$

Beweis. Da f ein Skalar ist, so folgt sogleich wegen $b_0 = 1$, dass a_i die Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors sind.

Setzt man

$$(7) \quad a_i x^{(m)i} = S,$$

so ergibt sich wegen (6) bzw. (4)

$$S = \bar{S} + T$$

bzw.

$$(8) \quad s = \int \left\{ \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} b_\alpha S^{K-\alpha} \right\}^{\frac{1}{p}} dt.$$

Aus (8) wird jetzt gesetzt:

$$(9) \quad f = \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} b_\alpha S^{K-\alpha}.$$

Ersetzen wir die Grösse S in der rechten Seite durch $\bar{S} + T$, so ist f ein Polynom K -ten Grades in $\bar{S}$, d.h.

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} b_{\alpha} \sum_{\beta=0}^{K-\alpha} \binom{K-\alpha}{\beta} \bar{S}^{K-\alpha-\beta} T^{\beta} \\
&= \sum_{\beta=0}^K \binom{K}{\beta} \bar{S}^{K-\beta} \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} b_{\alpha} T^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Da f ein absoluter Skalar ist, so erhält man eine Identität

$$\sum_{\beta=0}^K \binom{K}{\beta} \bar{S}^{K-\beta} \left\{ \bar{b}_{\beta} - \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} b_{\alpha} T^{\beta-\alpha} \right\} \equiv 0;$$

daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung des Satzes unmittelbar.

Alle Grössen b_{γ} ($\gamma = 1, 2, \dots, K$) sind keine Skalare, aber von denen können wir die $K-1$ absoluten Skalare ableiten.

Satz 2. Die $K-1$ aus b_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, K$) eingeführte Grössen

$$(10) \quad B_{\gamma} = b_{\gamma} - (b_1)^{\gamma} - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_{\delta} b_{\gamma-\delta} \quad \text{für } \gamma = 2, 3, \dots, K^{(1)}$$

sind absolute Skalare, die im allgemeinen vom Linienelemente $(m-1)$ -ter Ordnung abhängig sind.

Beweis. Da nach (5) $\bar{b}_1 = b_1 + T$ und $\bar{b}_2 = b_2 + 2b_1 T + T^2$ sind, so erkennen wir sogleich, dass B_2 ein absoluter Skalar ist. Wir haben also nach Induktion bezüglich $\gamma (> 2)$:

$$\begin{aligned}
B_{\gamma} &= \bar{b}_{\gamma} - (b_1)^{\gamma} - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_{\delta} b_{\gamma-\delta} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\alpha} b_{\alpha} T^{\gamma-\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\alpha} (b_1)^{\alpha} T^{\gamma-\alpha} \\
&\quad - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_{\delta} \sum_{\alpha=0}^{\gamma-\delta} \binom{\gamma-\delta}{\alpha} b_{\alpha} T^{\gamma-\delta-\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=2}^{\gamma} \binom{\gamma}{\alpha} \{ b_{\alpha} - (b_1)^{\alpha} \} T^{\gamma-\alpha} - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_{\delta} b_{\gamma-\delta} \\
&\quad - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_{\delta} \sum_{\alpha=\delta}^{\gamma-1} \binom{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} b_{\alpha-\delta} T^{\gamma-\alpha} \\
&= B_{\gamma} + \sum_{\alpha=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\alpha} T^{\gamma-\alpha} \left\{ b_{\alpha} - (b_1)^{\alpha} - \sum_{\delta=2}^{\alpha} \binom{\alpha}{\delta} B_{\delta} b_{\alpha-\delta} \right\} \\
&= B_{\gamma}.
\end{aligned}$$

(1) Unter einem Symbol $\sum_{\delta=a}^b$ für $a > b$ versteht man, dass die Summe nicht eintritt.

Satz 3. Die Grössen

$$(11) \quad f_\beta = \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} b_\alpha a_{i_1} \dots a_{i_{\beta-\alpha}} x^{(m)i_1} \dots x^{(m)i_{\beta-\alpha}} \quad \text{für } \beta = 1, 2, \dots, K$$

sind absolute Skalare, welche vom Linienelemente m -ter Ordnung abhängig sind.

Beweis. Offenbar ist (11) richtig für $\beta = 1$; somit wird der Beweis von (11) induktiv durchgeführt, d.h.

$$\begin{aligned} \bar{f}_\beta &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} \bar{S}^{\beta-\alpha} \bar{b}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} \sum_{\delta=0}^{\beta-\alpha} (-1)^\delta \binom{\beta-\alpha}{\delta} S^{\beta-\alpha-\delta} T^\delta \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} b_\gamma T^{\alpha-\gamma} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \sum_{\delta=\alpha}^{\beta} (-1)^{\delta-\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \binom{\beta-\alpha}{\delta-\alpha} S^{\beta-\delta} \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} b_\gamma T^{\delta-\gamma} \\ &= \sum_{\delta=0}^{\beta} \sum_{\alpha=0}^{\delta} (-1)^{\delta-\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \binom{\beta-\alpha}{\delta-\alpha} S^{\beta-\delta} \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} b_\gamma T^{\delta-\gamma} \\ &= \sum_{\delta=0}^{\beta} (-1)^\delta \binom{\beta}{\delta} S^{\beta-\delta} \sum_{\gamma=0}^{\delta} \binom{\delta}{\gamma} b_\gamma T^{\delta-\gamma} \sum_{\alpha=\gamma}^{\delta} (-1)^{\alpha} \binom{\delta-\gamma}{\delta-\alpha}. \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{\alpha=\gamma}^{\delta} (-1)^{\alpha} \binom{\delta-\gamma}{\delta-\alpha} = 0 \quad \text{für } \delta > \gamma$$

ist, so verschwindet das letzte Glied für $\delta > \gamma$ identisch. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}_\beta &= \sum_{\delta=0}^{\beta} (-1)^\delta \binom{\beta}{\delta} S^{\beta-\delta} b_\delta (-1)^\delta \\ &= \sum_{\delta=0}^{\beta} \binom{\beta}{\delta} b_\delta S^{\beta-\delta} = f_\beta, \end{aligned}$$

daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung des Satzes.

Da der Skalar f_K nichts anderes als f ist, so können wir schliessen, dass es im KAWAGUCHISchen Raume mit der Massbestimmung (4) die $K-1$ absoluten Skalare B_γ und auch die $K-1$ absoluten Skalare f_β gibt. Wenn alle B_γ für $\gamma = 2, 3, \dots, K$ identisch verschwinden, so wird die zugrundegelegte Funktion f in folgender Gestalt geschrieben:

$$f = (a_i x^{(m)i} + b_1)^K;$$

und in diesem Falle wird das Integral (4) so geschrieben:

$$s = \int (a_i x^{(m)i} + b_1)^{\frac{1}{q}} dt,$$

wobei $q = \frac{p}{K}$ gesetzt ist.

2. **Parametertransformation.** Da die Bogenlänge s bei der Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ sich nicht verändert, muss die Grösse f der Bedingung $\bar{f} = \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^p f$ genügen, wo man $f(x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{m})})$ mit $\bar{f}$ bezeichnet⁽¹⁾. Infolgedessen kann man schliessen, dass die bekannten Beziehungen

$$\Delta_1 f = pf, \quad \Delta_s f = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m$$

bestehen müssen. Da nach der Definition

$$\Delta_1 f = \sum_{r=1}^m \binom{r}{1} f_{(r)j} x^{(r)j}$$

ist, so gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^m \binom{r}{1} x^{(r)j} \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} \left\{ b_{\alpha(r)j} a_{i_1} \dots a_{i_{K-\alpha}} x^{(m)i_1} \dots x^{(m)i_{K-\alpha}} \right. \\ & \quad + (K-\alpha) b_{\alpha} (a_{i_1(r)j} a_{i_2} \dots a_{i_{K-\alpha}} x^{(m)i_1} \dots x^{(m)i_{K-\alpha}} \\ & \quad \left. + a_{i_1} \dots a_{i_{K-\alpha}} \delta_j^{i_1} \delta_m^r x^{(m)i_2} \dots x^{(m)i_{K-\alpha}} \right\} \\ & = p \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} b_{\alpha} a_{i_1} \dots a_{i_{K-\alpha}} x^{(m)i_1} \dots x^{(m)i_{K-\alpha}}, \end{aligned}$$

daraus ergeben sich die einfachen Bedingungen:

$$(12) \quad \Delta_1 b_{\alpha} = \frac{\alpha p}{K} b_{\alpha}, \quad \Delta_1 a_i = \frac{p-mK}{K} a_i;$$

(1) Hier ist abkürzend $x^{(\bar{r})i} = \frac{dx^i}{d\bar{t}^r}$ gesetzt.

und auf dieselbe Weise geht aus $\Delta_s f = 0$ heraus

$$\Delta_s b_\alpha + \alpha \binom{m}{s} b_{\alpha-1} a_j x^{(m-s+1)j} = 0, \quad (13)$$

$$\Delta_s a_i = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m.$$

Mit Hilfe von (12) und (13) erkennen wir, dass a_i die Bestimmungszahlen eines intrinseken kovarianten Vektors mit dem Gewicht $\frac{p-mK}{K}$ (bei der Parametertransformation) und b_α nicht intrinseke Grössen sind; aber es besteht der folgende

Satz 4. *Bei der Parametertransformation ist B_γ intrinseker Skalar mit dem Gewicht $\frac{\gamma p}{K}$ ($\gamma = 2, 3, \dots, K$), d.h.*

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_1 B_\gamma &= \frac{\gamma p}{K} B_\gamma, & \Delta_s B_\gamma &= 0 \\ (\gamma &= 2, 3, \dots, K; s = 2, 3, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Beweis. Wegen (10), (12) und (13) erhalten wir für $\gamma = 2$

$$\begin{aligned} \Delta_1 B_2 &= \Delta_1 b_2 - 2b_1 \Delta_1 b_1 = \frac{2p}{K} b_2 - \frac{2p}{K} (b_1)^2 = \frac{2p}{K} B_2, \\ \Delta_s B_2 &= \Delta_s b_2 - 2b_1 \Delta_s b_1 = 0, \end{aligned}$$

wonach die Behauptung (14) für $\gamma = 2$ richtig ist. Die übrigen Beziehungen lassen sich nach Induktion beweisen. Wenn nämlich (14) für $\gamma-1$ richtig ist, so ist es auch richtig in bezug auf das dem $\gamma-1$ unmittelbar Nachfolgende, d.h.

$$\begin{aligned} \Delta_1 B_\gamma &= \Delta_1 b_\gamma - \Delta_1 (b_1)^\gamma - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} \Delta_1 (B_\delta b_{\gamma-\delta}) \\ &= \frac{\gamma p}{K} b_\gamma - \frac{\gamma p}{K} (b_1)^\gamma - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} \left\{ \frac{\delta p}{K} B_\delta b_{\gamma-\delta} + \frac{(\gamma-\delta)p}{K} B_\delta b_{\gamma-\delta} \right\} \\ &= \frac{\gamma p}{K} \left\{ b_\gamma - (b_1)^\gamma - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_\delta b_{\gamma-\delta} \right\} \\ &= \frac{\gamma p}{K} B_\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_s B_r &= \Delta_s b_r - \Delta_s (b_1)^r - \sum_{\delta=2}^{r-1} \binom{\gamma}{\delta} B_\delta \Delta_s b_{r-\delta} \\
&= -\gamma \binom{m}{s} b_{r-1} a_j x^{(m-s+1)j} + \gamma \binom{m}{s} (b_1)^{r-1} a_j x^{(m-s+1)j} \\
&\quad + \sum_{\delta=2}^{r-1} \binom{\gamma}{\delta} (\gamma - \delta) \binom{m}{s} B_\delta b_{r-\delta-1} a_j x^{(m-s+1)j} \\
&= \binom{m}{s} a_j x^{(m-s+1)j} \left\{ -\gamma b_{r-1} + \gamma (b_1)^{r-1} + \sum_{\delta=2}^{r-1} (\gamma - \delta) \binom{\gamma}{\delta} B_\delta b_{r-\delta-1} \right\} \\
&= \gamma \binom{m}{s} a_j x^{(m-s+1)j} \left\{ -b_{r-1} + (b_1)^{r-1} + \sum_{\delta=2}^{r-1} \binom{\gamma-1}{\delta} B_\delta b_{r-\delta-1} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für den Skalaren f_β ($\beta = 1, 2, \dots, K-1$) besteht der

Satz 5. Bei der Parametertransformation ist f_β intrinseker Skalar mit dem Gewicht $\frac{\beta p}{K}$ ($\beta = 1, 2, \dots, K-1$), d.h.

$$\begin{aligned}
(15) \quad \Delta_1 f_\beta &= \frac{\beta p}{K} f_\beta, & \Delta_s f_\beta &= 0 \\
&(\beta = 1, 2, \dots, K-1; s = 2, 3, \dots, m).
\end{aligned}$$

Beweis. Einfache Rechnung lehrt uns, benutzend die Beziehungen (7), (12) und (13), dass für die Grösse S die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\Delta_1 S = \frac{p}{K} S, \quad \Delta_s S = \binom{m}{s} a_j x^{(m-s+1)j} \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m.$$

Infolge dieser Gleichungen und (12), (13) ist also:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 f_\beta &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} \{ (\beta - \alpha) b_\alpha S^{\beta-\alpha-1} \Delta_1 S + S^{\beta-\alpha} \Delta_1 b_\alpha \} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} \left\{ \frac{p}{K} (\beta - \alpha) b_\alpha S^{\beta-\alpha} + \frac{\alpha p}{K} b_\alpha S^{\beta-\alpha} \right\} \\
&= \frac{\beta p}{K} f_\beta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta_s f_\beta &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} \left\{ (\beta - \alpha) \binom{m}{s} b_\alpha S^{\beta-\alpha-1} a_j x^{(m-s+1)j} \right. \\
&\quad \left. - \alpha \binom{m}{s} b_{\alpha-1} S^{\beta-\alpha} a_j x^{(m-s+1)j} \right\} \\
&= \binom{m}{s} a_j x^{(m-s+1)j} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} (\beta - \alpha) \binom{\beta}{\alpha} b_\alpha S^{\beta-\alpha-1} - \sum_{\alpha=1}^{\beta} \alpha \binom{\beta}{\alpha} b_{\alpha-1} S^{\beta-\alpha} \right\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung des Satzes.

3. Herleitung eines Übertragungsschema in K_n^{m-1} . Es sind zwei Fälle hervorzuheben, erstens der Fall: es gibt mindestens einen unverschwindenden Skalar in B_r ($r = 2, 3, \dots, K$); zweitens der Fall: alle Skalare sind gleich Null. Wir wollen jetzt mit dem ersten Falle beginnen. Da der Skalar B_{r_0} für eine gewisse Zahl r_0 nicht identisch verschwindet, nehmen wir ohne der Allgemeinheit zu schaden an, dass r_0 gleich 2 ist. Diesen Skalar B_2 benutzend, haben wir den Skalar $B = (B_2)^{\frac{1}{2}}$ mit dem Gewicht $\frac{p}{K}$ bei der Parametertransformation.

Wir betrachten jetzt in unserem Raume den sogenannten $(m-1)$ -ter SYNGESchen Vektor bezüglich der skalaren Funktion f_1 , deren Bestimmungszahlen als Funktion des Linienelementes von m -ter Ordnung gegeben sind, und sie sind bis auf den Zahlenfaktor $(-1)^m$ mit der Gestalt gegeben:

$$\begin{aligned}
U_i &= m \frac{d}{dt} f_{1(m)i} - f_{1(m-1)i} \\
&= (m a_{i(m-1)j} - a_{j(m-1)i}) x^{(m)j} + m \sum_{r=0}^{m-2} a_{i(r)j} x^{(r+1)j} - b_{1(m-1)i}.
\end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, besteht

$$\Delta_s \varphi_{(r)i} = (\Delta_s \varphi)_{(r)i} - \binom{r+s-1}{s} \varphi_{(r+s-1)i} \quad \text{für } r \geq 1$$

und

$$\Delta_s \frac{d}{dt} \varphi = \frac{d}{dt} \Delta_s \varphi + \Delta_{s-1} \varphi \quad \text{für } s \geq 2.$$

Berücksichtigt man die letzten und (15), erhält man

$$\Delta_s \frac{d}{dt} f_1 = \frac{p}{K} \delta_s^2 f_1, \quad \Delta_s f_{1(m)i} = 0$$

und

$$\Delta_s U_i = -\frac{m(m-2q+1)}{2} \delta_s^2 a_i.$$

Somit ist der Vektor U_i nicht intrinsek, aber wir können aus U_i einen intrinseken Vektor mit Hilfe von B ableiten. Setzen wir hier

$$(16) \quad \mathfrak{U}_i = U_i + k a_i B^{-1} \frac{d}{dt} B,$$

so ist $\Delta_s \mathfrak{U}_i = 0$, wobei

$$(17) \quad k = \frac{m(m-2q+1)}{2q} \quad \text{und} \quad q = \frac{p}{K}$$

gesetzt sind. Auf Grund von (14), (15) und der Formel

$$\Delta_1 \frac{d}{dt} \varphi = \frac{d}{dt} \Delta_1 \varphi + \frac{d}{dt} \varphi$$

erhält man sogleich

$$\Delta_1 \mathfrak{U}_i = -(m-q-1) \mathfrak{U}_i, \quad \Delta_s \mathfrak{U}_i = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m.$$

Also bei einer Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ transformiert sich $\mathfrak{U}_i$ in der Weise

$$\mathfrak{U}_i = \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^{q+1-m} \bar{\mathfrak{U}}_i.$$

Dieser intrinseke Vektor $\mathfrak{U}_i$ hat die Gestalt

$$(18) \quad \mathfrak{U}_i = \mathfrak{A}_{ij} x^{(m)j} + \mathfrak{B}_i,$$

wobei gesetzt sind:

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{ij} &= m a_{i(m-1)j} - a_{j(m-1)i} + k a_i (\log B)_{(m-1)j} \\ \mathfrak{B}_i &= \sum_{r=0}^{m-2} x^{(r+1)j} \{ m a_{i(r)j} + k a_i (\log B)_{(r)j} \} - b_{1(m-1)i}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_{ij}$ sind die Bestimmungszahlen eines Affinors zweiter Stufe und genügen den Bedingungen:

$$(20) \quad \begin{aligned} \Delta_1 \mathfrak{U}_{ij} &= -(2m-q-1)\mathfrak{U}_{ij}, \\ \Delta_s \mathfrak{U}_{ij} &= 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m-1 \end{aligned}$$

und

$$(21) \quad \mathfrak{U}_{ij} x^{(1)i} = 0, \quad \mathfrak{U}_{ij} x^{(1)j} = 0;$$

daher sind $\mathfrak{U}_{ij}$ intrinsek, d.h. bei einer Parametertransformation transformiert sich in der Weise

$$\mathfrak{U}_{ij} = \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^{q+1-2m} \bar{\mathfrak{U}}_{ij}$$

und der Rang der Matrix $(\mathfrak{U}_{ij})$ ist höchstens $n-1$. Im Folgenden setzen wir weiter voraus, dass die Ränge von zwei Matrixen

$$(22) \quad (\mathfrak{U}_{ij}), \quad (\mathfrak{U}_{ij} \mathfrak{B}_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

beide genau $n-1$ sind.

Es ist zu beachten, dass für den Vektor $\mathfrak{U}_i$ bei Überschiebung mit $x^{(1)i}$ folgt:

$$\mathfrak{U}_i x^{(1)i} = -\Delta_{m-1} f_1 = \begin{cases} -q f_1 & \text{für } m = 2 \\ 0 & \text{für } m \geq 3. \end{cases}$$

Der Fall, dass $m = 2$ ist, fällt hier weg, da a_i und b_i nur vom Linienelemente erster Ordnung abhängig sind und da wir die Übertragungstheorie bezüglich des gegebenen Integrals ganz analog wie die KAWAGUCHISche Übertragung⁽¹⁾ und die HOKARISche⁽²⁾ einführen können.

In seiner interessanten Arbeit hat H. HOMBU neuerdings eine projektive Theorie eines Bahnsystems höherer Ordnung entwickelt, und eine wichtige Anwendung dieser Theorie auf die Theorie des KAWAGUCHISchen Raumes gegeben.

(1) A. KAWAGUCHI, Die Geometrie des Integrals $\int (A_i x''^i + B) \frac{1}{p} dt$, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyô, Bd. 12 (1936), S. 205-208; Geometry in an n -dimensional space with the arc length $s = \int (A_i x''^i + B) \frac{1}{p} dt$, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 44 (1938), S. 153-167.

(2) S. HOKARI, Die Geometrie des Integrals $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c) \frac{1}{p} dt$, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyô, Bd. 12 (1936), S. 209-212.

Nach HOMBUScher Methode betrachten wir mittels u_i das System der Differentialgleichungen

$$(23) \quad u_i \equiv \mathfrak{U}_{ij} x^{(m)j} + \mathfrak{B}_i = 0,$$

das wegen $|\mathfrak{U}_{ij}| = 0$ nicht ein Bahnsystem ist, aber in enger Beziehung zu einer projektiven Klasse des Systems der Bahnen steht. Fassen wir (23) als die simultanen Gleichungen mit den Unbekannten $x^{(m)j}$ auf, so erhalten wir wegen der Voraussetzung betreffs der Matrixen (22) ein spezielles Lösungssystem

$$(24) \quad x^{(m)i} = -H^i(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}).$$

Das System (24) ist nichts anderes als ein Bahnsystem m -ter Ordnung und sein Lösungssystem ist auch das des Systems (23).

$x^i = x^i(t)$ sei eine Lösungskurve von (23). Da der Rang der Matrix $(\mathfrak{U}_{ij})$ $n-1$ ist, so ist u_i , welches den Beziehungen $\mathfrak{U}_{ij} u^j = 0$ genügt, nach (21) zu $x^{(1)i}$ proportional. Infolgedessen haben wir längs der Lösungskurve

$$(25) \quad x^{(m)i} + H^i + \rho(t)x^{(1)i} = 0,$$

wo $\rho(t)$ eine Funktion von t ist. Somit erkennen wir, dass die Lösungskurve $x^i = x^i(t)$ einem Bahnsystem (25) angehört, welches mit dem System (24) projektiv verwandt ist. Aus dieser projektiven Klasse können wir nach dem Fundamentalsatz von H. HOMBUS⁽¹⁾ von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig das ausgezeichnete System herausziehen:

$$(26) \quad x^{(m)i} + \mathfrak{H}^i = 0,$$

womit wir ein Übertragungsschema in K_n^{m-1} definieren können.

Zusammengefasst gibt dies das wichtige Ergebnis:

Im KAWAGUCHIschen Raume mit der Massbestimmung (4) gibt es die K Fundamentalgrößen $f_1, B_\gamma (\gamma=2, 3, \dots, K)$; und mittels diesen Grössen wird das Problem, in unserem Raume eine Parallelübertragung zu definieren, leicht gelöst.

4. Ein Satz in bezug auf die Ordnung eines Skalars. Wir benötigen in diesem Paragraphen jetzt noch einen Satz, um später Unterbrechung des Gedankenganges zu vermeiden.

(1) H. HOMBUS, a.a.O., S. 83.

Satz 6. Es sei ein kovarianter Tensor mit den Bestimmungszahlen $g_{ij} = h_{ij} + k_i k_j$ gegeben, wobei h_{ij} bzw. k_i ein symmetrischer kovarianter Tensor bzw. ein kovarianter Vektor ist und den Beziehungen

$$(27) \quad h_{ij} x^{(1)j} = 0 \quad \text{bzw.} \quad k_i x^{(1)i} = \Phi \quad (\neq 0)$$

genügt, welcher vom Linienelemente λ -ter bzw. μ ($\geq \lambda$)-ter Ordnung abhängig ist. Hat die Matrix (h_{ij}) den Rang $n-1$, und ist auch A_{ij} ein kovarianter Tensor, dessen Bestimmungszahlen vom Linienelemente λ -ter Ordnung abhängen und den Beziehungen

$$A_{ij} x^{(1)i} = A_{ij} x^{(1)j} = 0$$

genügen, so gibt es einen Skalar

$$(28) \quad \mathfrak{S} = g^{ij} A_{ij},$$

der höchstens vom Linienelemente λ -ter Ordnung abhängt.

Beweis. Da der Rang der Matrix (h_{ij}) $n-1$ ist, so folgt die Existenz einer skalaren Dichte ψ mit dem Gewicht zwei (bei der Koordinatentransformation), die den Beziehungen

$$(29) \quad H^{ij} = x^{(1)i} x^{(1)j} \psi \quad (\psi \neq 0)$$

genügt, wenn das algebraische Komplement von h_{ij} in der Determinante $|h_{ij}|$ mit H^{ij} sich bezeichnet. Aus (29) gewinnen wir

$$|g_{ij}| = k_i k_j H^{ij} = \Phi^2 \psi \neq 0,$$

dann ergibt sich ein symmetrischer kontravarianter Tensor g^{ij} , welcher den Beziehungen $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ genügt und im allgemeinen vom Linienelemente μ -ter Ordnung abhängt. Differenzierend den $\mathfrak{S}$ nach $x^{(a)k}$, ergibt sich für $a = \lambda+1, \dots, \mu$

$$(30) \quad \mathfrak{S}_{(a)k} = g^{ij}_{(a)k} A_{ij} = -A_{ij} g^{il} g^{jh} g_{lh(a)k}.$$

Da wegen (27) und der Voraussetzung für h'_{ij}

$$(31) \quad \begin{aligned} g_{lh(a)k} &= k_{l(a)k} k_h + k_l k_{h(a)k}, \\ g_{lh} x^{(1)h} &= \Phi k_l \quad \text{oder} \quad x^{(1)h} = \Phi k_l g^{lh} \end{aligned}$$

bestehen, erhält man durch Ersetzung des Wertes (31) in (30), dass die Grössen $\mathfrak{S}_{(a)k}$ für $a = \lambda+1, \dots, \mu$ identisch verschwinden, d.h.

höchstens vom Linienelemente λ -ter Ordnung abhängig ist. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung des Satzes.

Z.B. in dem KAWAGUCHISCHEN Raume mit der Massbestimmung (1) gibt es einen symmetrischen Tensor

$$g_{ij} = m F^{2m-1} F_{(m)i(m)j} + \mathbb{E}_i^1 \mathbb{E}_j^1 + \mathbb{E}_i^m \mathbb{E}_j^m,$$

dessen Determinante $|g_{ij}|$ im allgemeinen nicht verschwindet, insofern die Matrix $(m F^{2m-1} F_{(m)i(m)j} + \mathbb{E}_i^m \mathbb{E}_j^m)$ den Rang $n-1$ hat, da

$$g_{ij} x^{(1)i} x^{(1)j} = F^2$$

ist. Schreiben wir h_{ij} bzw. k_i statt $m F^{2m-1} F_{(m)i(m)j} + \mathbb{E}_i^m \mathbb{E}_j^m$ bzw. $\mathbb{E}_i^1$, welches vom Linienelemente m -ter bzw. $(2m-1)$ -ter Ordnung abhängig ist, so ergibt sich nach Satze 6 ein vom Linienelemente m -ter Ordnung abhängender Skalar $\mathbb{S} = g^{ij} \mathbb{E}_i^m \mathbb{E}_j^m$, da für die Grösse h_{ij} bzw. k_i die bekannten Beziehungen $h_{ij} x^{(1)j} = 0$ bzw. $k_i x^{(1)i} = -F$ bestehen.

Wir können im KAWAGUCHISCHEN Raume auf ähnliche Weise viele Beispiele bringen.

5. Herleitung eines Übertragungsschemas im Raume mit der Massbestimmung (3). Wir sind jetzt in der Lage, den zu Anfang des Paragraphen 3 aufgeworfenen zweiten Fall zu untersuchen. Da in diesem Falle alle Skalare B_r identisch verschwinden oder K gleich eins ist, so sehen wir leicht, dass das Integral (2) in die Gestalt (3) umgeschrieben wird. Das Übertragungsschema für $q = \frac{m+1}{2}$ wird von H. HOMBU gegeben, unter der Voraussetzung, dass der Rang der Matrix $(m a_{i(m-1)j} - a_{j(m-1)i})$ $n-1$ ist. Hier können wir für den allgemeinen Wert von q das Übertragungsschema definieren.

Da sich $g = a_i x^{(m)i} + b$ bei der Parametertransformation wie $g = \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^q \bar{g}$ transformiert, so bestehen die Beziehungen:

$$\Delta_1 g = qg, \quad \Delta_s g = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m,$$

woraus hervorgeht, dass man ohne Schwierigkeit erhält:

$$\begin{aligned} \Delta_1 a_i &= (q-m)a_i, & \Delta_1 b &= qb, \\ (32) \quad \Delta_s a_i &= 0, & \Delta_s b + \binom{m}{s} a_i x^{(m-s+1)i} &= 0 \\ & \text{für } s = 2, 3, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Es gibt andererseits den SYNGESchen Vektor $\overset{1}{\mathfrak{G}}_i$ bezüglich des gegebenen Integrals (3), der vom Linienelemente $(2m-1)$ -ter Ordnung abhängig ist.

Setzt man $F = (a_i x^{(m)i} + b)^{\frac{1}{q}}$, dann existiert ein symmetrischer Tensor

$$(33) \quad g_{ij} = a_{i(m-1)j} + a_{j(m-1)i} + F^{q+1-2m} \overset{1}{\mathfrak{G}}_i \overset{1}{\mathfrak{G}}_j,$$

welcher das Gewicht $q+1-2m$ bei der Parametertransformation hat, und dessen Determinante $|g_{ij}|$ im allgemeinen nicht verschwindet, insofern die Matrix $(a_{i(m-1)j} + a_{j(m-1)i})$ den Rang $n-1$ hat. Es gibt also für $q \neq 1$ nach Satze 6 einen intrinseken Skalar mit dem Gewicht eins:

$$(34) \quad S^* = (g^{ij} a_i a_j)^{\frac{1}{q-1}},$$

$$(35) \quad \Delta_1 S^* = S^*, \quad \Delta_s S^* = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m-1,$$

der vom Linienelemente $(m-1)$ -ter Ordnung abhängt.

Wenn der Skalar S^* identisch nicht verschwindet, so ist nach der Skalareigenschaft von $g = a_i x^{(m)i} + b$

$$\begin{aligned} V_i &= m \frac{d}{dt} g_{(m)i} - g_{(m-1)i} + k g_{(m)i} S^{*-1} \frac{d}{dt} S^* \\ &= \left\{ m a_{i(m-1)j} - a_{j(m-1)i} + k a_i (\log S^*)_{(m-1)j} \right\} x^{(m)j} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-2} \left\{ m a_{i(r)j} + k a_i (\log S^*)_{(r)j} \right\} x^{(r+1)j} - b_{(m-1)i} \end{aligned}$$

ein intrinseker kovarianter Vektor, bei dem

$$k = \frac{m(m-2q+1)}{2} \quad \text{und} \quad m \geq 3$$

sind. Wie man leicht sieht, bestehen nach (32) und (35)

$$\Delta_1 V_i = (q-m+1) V_i, \quad \Delta_s V_i = 0 \quad \text{für } s = 2, 3, \dots, m$$

und

$$V_i x^{(1)i} = 0.$$

Dann wird durch $V_i = 0$ wieder eine projektive Klasse der Bahnsysteme m -ter Ordnung angegeben, wie wir im Paragraphen 3 gesehen haben, womit wir ein Übertragungsschema im Raume mit der Massbestimmung (3) definieren können, unter der Voraussetzung, dass die Matrix $(ma_{i(m-1)j} - a_{j(m-1)i} + ka_i(\log S^*)_{(m-1)j})$ den Rang $n-1$ hat.

Oktober 1939.
