HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES ENSEMBLES BORELIENS ET ANALYTIQUES III(1)
Author(s)	Kunugui, Kinjiro
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 8(2-3), 079-108
Issue Date	1940
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55949
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_08_N2-3_079-108.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES ENSEMBLES BORELIENS ET ANALYTIQUES, III[1]

Par

Kinjiro KUNUGUI

§ 8. δs-Opérations de M. Hausdorff.

Pour avancer nos études sur les théorémes de sections fermées, il faut nous préparer d'abord quelques notions auxiliaires. Dans son livre "Mengenlehre"[2] M. F. HAUSDORFF introduisit une fonction d'une infinité d'ensembles:

$$\Phi(E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots)$$

dite δs-opération de M. HAUSDORFF et définie comme il suit: étant donnée une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, et un sous-ensemble A de l'ensemble N de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1, le résultat de l'opération Φ est defini par

$$\Phi_A(E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots) = \sum_{\nu \in A} \prod_k E_{n_k}$$

où $\prod_k E_{n_k}$ désigne le produit des ensembles $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_k}, \ldots$ dont les indices $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ forment le développement en fraction continue du nombre ν: $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ (Voir Contribution I.[1] p. 162.), et ν parcourt tous les nombres irrationnels appartenant à A. L'ensemble A sera dit *base de l'opération.*

---

(1) La première et la deuxième partie de ce mémoire ont été publiées dans ce même Journal: Contribution à la Théorie des Ensembles Boreliens et Analytiques, I, p. 161-189, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, Vol. VII (1939), et Contribution à la Théorie des Ensembles Boreliens et Analytiques, II, p. 1-24, ibid. Vol. VIII. Ces deux mémoires seront cités resp. "Contribution I et II".

(2) Cf. F. HAUSDROFF; Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1927, p. 89-90. W. SIERPIŃSKI: Sur les opérations de M. HAUSDORFF, Fund. Math. t. XV. p. 119. KANTOROVITCH, L ET LIVENSON, E: Sur les δs-fonctions de M. HAUSDORFF, C.R. de Paris, t. 190, p. 352. ——: Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets (I), Fund. Math. t. XVIII, p. 214-276. M. KONDÔ: Sur les Opérations Analytiqucs dans la Théorie des Ensembles et Quelques Problèmes qui s'y rattachent, I, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, Vol. VII, p. 1-34,

$\mathfrak{M}$ étant une famille quelconque d'ensembles, nous désignons par $H_A(\mathfrak{M})$ la famille de tous les ensembles-résultats de δs-opération de M. HAUSDORFF, dont la base est A, opérée sur les suites d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ appartenant à $\mathfrak{M}$.

Les développements en fraction continue $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1 forment des points de l'espace de BAIRE à zero dimension[1], lorsqu'à deux points différents:

$$p = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots) \quad \text{et} \quad p' = (n_1', n_2', \ldots, n_k', \ldots)$$

sont attribués leur distance $\rho(p, p') = 1/k_0$, où k_0 désigne le premier des indices k tels que $n_k \neq n_k'$. Cet espace de BAIRE sera désigné par $\mathfrak{B}$. Cette transformation de N en $\mathfrak{B}$ est biunivoque et bicontinue, et les sous-ensembles de N seront parfois considérés comme des ensembles situés dans $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{M}$ étant une famille quelconque des ensembles, désignons d'habitude par $\mathfrak{M}_\delta$ et $\mathfrak{M}_\sigma$ les familles de tous les ensembles-produits et de tous les ensembles-sommes resp. des suites des ensembles de $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}_\delta$ et $\mathfrak{M}_\sigma$ coïncident resp. avec les familles $H_{A_1}(\mathfrak{M})$ et $H_{B_1}(\mathfrak{M})$, où A_1 désigne l'ensemble constitué d'un seul nombre irrationnel $(1, 2, 3, \ldots)$, et B_1 l'ensemble dénombrable des nombres irrationnels $(1, 1, 1, \ldots)$, $(2, 2, 2, \ldots)$, $(3, 3, 3, \ldots)$, $\ldots$. A_1 et B_1 sont donc des ensembles fermés relativement à N.

Étant donnée une famille quelconque $\mathfrak{M}$ d'ensembles, appelons selon d'habitude *famille borelienne construite sur* $\mathfrak{M}$ et désinons par $\mathfrak{M}_B$ la plus petite des familles $\mathfrak{M}^*$ satisfaisant aux conditions suivantes: 1) toute somme et tout produit d'une suite (finie ou infinie) des ensembles de $\mathfrak{M}^*$ appartiennent à $\mathfrak{M}^*$; 2) $\mathfrak{M}$ fait partie de $\mathfrak{M}^*$. M. F. HAUSDORFF a classifié les ensembles de la famille $\mathfrak{M}_B$, comme il suit. D'abord, tous les nombres ordinaux finis ou transfinis inférieurs à Ω sont divisés en deux classes: les nombres de la forme 2ξ s'appellent *pairs*, et ceux de la forme $2\xi+1$ *impairs*. Cela posé, la famille $\mathfrak{M}^\xi$ est donné par la règle inductive: 1° $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}$; 2° Pour ξ pair $(\xi > 0)$, $\mathfrak{M}^\xi$ est la famille de tous les ensembles-sommes—et pour ξ impair, de tous les ensemble-produits—des suites (finies ou infinies) des ensembles de $\mathfrak{M}^\eta (0 \leq \eta < \xi)$.

(1) Voir p. ex. M. FRÉCHET: Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, Paris, 1928. p. 118.

M. F. HAUSDORFF a montré[1] que, pour $\xi \geq 1$, il existe une base A_ξ, dépendant seulement de ξ, telle que la famille $H_{A_\xi}(\mathfrak{M})$ coïncide exactement avec $\mathfrak{M}^\xi$.

Or, nous allons considérer cinq opérations sur les ensembles de l'espace de BAIRE :

(I) Transformation $h_m(p)$. Tout nombre entier positif j peut être exprimé dans une et une seule expression suivante : $j = 2^{m-1}(2n-1)$; nous les désignerons par

$$m = \varphi(j), \qquad n = \psi(j).$$

Désignons encore par $\mathfrak{B}_m$ l'ensemble de tous les points $p = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de $\mathfrak{B}$, tels que $\varphi(n_k) = m$ pour tout $k = 1, 2, 3, \ldots$. $\mathfrak{B}_m$ est une partie fermée de $\mathfrak{B}$. Les distances mutuelles entre les ensembles $\mathfrak{B}_m$ et $\mathfrak{B}_{m'}$ $(m \neq m')$ sont tous égales à 1.

La transformation $h_m(p)$ de l'espace $\mathfrak{B}$ en un sous-ensemble $\mathfrak{B}_m$ de $\mathfrak{B}$ est définie d'après la règle suivante : le point $p = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de $\mathfrak{B}$ correspond au point $h_m(p) = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots)$ de $\mathfrak{B}_m$ lié par la relation : $n'_k = 2^{m-1}(2n_k - 1)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. La transformation $h_m(p)$ est biunivoque et isométrique, et par suite les ensembles fermés de $\mathfrak{B}$ seront transformés en des ensembles fermés (et vice versa). De plus, on voit bien que le point $p = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de $\mathfrak{B}$ satisfaisant à la condition : $\alpha)$ $\overline{\lim_{k\to\infty}} n_k = \infty$[2] sera transformé en un point de $\mathfrak{B}_m$ qui satisfait à la même condition.

(II) Deuxièmement, considérons l'opération $S = S(M_1, M_2, M_3, \ldots)$ qui fait la somme d'une suite d'ensembles M_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ contenus resp. dans $\mathfrak{B}_k$. Si les ensembles M_k sont tous fermés, la somme $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k = S(M_1, M_2, M_3, \ldots)$ est également un ensemble fermé.

(III) Considérons troisièmement le produit cartésien $M \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \times \ldots$, où M est un ensemble donné, contenu dans l'espace $\mathfrak{B}$. Par définition même, c'est l'ensemble de tous les points $p = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de $\mathfrak{B}$ tels que

1) $(n_1, n_3, n_5, \ldots) \in M$; 2) n_{2k} sont arbitraires.

---

(1) F. HAUSDORFF, loc. cit. p. 90.

(2) On désigne par $\overline{\lim_{k\to\infty}} n_k = \infty$ le fait qu'il existe des termes n_k aussi grands que l'on veut.

Nous désignons cet ensemble par $M \times \mathfrak{B}^\infty$. Il est bien clair que si M est un ensemble fermé, $M \times \mathfrak{B}^\infty$ l'est également. La condition α) est encore invariante par rapport à cette opération.

(IV) Quatrièmement, introduisons l'opération $g_m(p)$, dite *permutation des coordonnées:* au point $p = (r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots)$ de l'espace $\mathfrak{B}$, correspond le point $g_m(p) = (r'_1, r'_2, \ldots, r'_k, \ldots)$ d'après la règle suivante:

1) $r'_{2^{m-1}(2n-1)} = r_{2n-1}$; 2) $r'_{2n-1} = r_{2^{m-1}(2n-1)}$;

3) $r'_{2^{m'-1}(2n-1)} = r_{2^{m'-1}(2n-1)}$ pour tout m' différent de m.

$g_m(p)$ transforme l'espace $\mathfrak{B}$ en lui-même. Elle est biunivoque et bicontinue. Donc, la condition, α) est invariante par rapport à cette transformation. Évidemment, la condition d'être un ensemble fermé l'est également.

(V) Comme cinquième opération, citons le produit d'une suite des ensembles E_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ contenus dans $\mathfrak{B}$: $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$. Si les ensembles E_k sont fermés et s'ils satisfont à la condition α), leur produit est un ensemble fermé et satisfait à la même condition.

Supposons maintenant qu'une suite des bases A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfont à deux conditions suivantes:

1°) A_k sont des sous-ensembles de N fermés relativement à N,

2°) pour tous les points $p = (n_1, n_2, \ldots, n_{k'}, \ldots)$ de A_k, on a toujours $\overline{\lim}_{k' \to \infty} n_{k'} = \infty$,

et considérons l'ensemble qu'on obtiendra par la formule:

$$A = S\left(h_1(A_1), h_2(A_2), \ldots\right), \tag{1}$$

(toujours en supposant, s'il est nécessaire, les sous-ensembles de N comme ensembles de $\mathfrak{B}$). M. F. Hausdorff a montré que *la famille* $H_A(\mathfrak{M})$ *coïncide exactement avec la famille de tous les ensembles-sommes des suites des ensembles* $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ *tels que*

$$E_k \in H_{A_k}(\mathfrak{M}). \tag{2}$$

En effet, d'après l'hypothèse (2), il existe une suite des ensembles E_n^k $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que $E_k = \Phi_{A_k}(E_1^k, E_2^k, \ldots, E_n^k, \ldots)$. Posons

$$M_k = E_{\psi(k)}^{\varphi(k)}. \tag{3}$$

Il est évident que nous avons la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu \in A_k} \prod_{k'=1}^{\infty} E_{k'}^{k} = \Phi_A(M_1, M_2, M_3, \ldots).$$

Or, la formule (1) montre bien que l'ensemble A est fermé relativement à N et qu'il satisfait à la condition α).

Enfin, étant donné un ensemble E situé dans l'espace cartésien à n dimensions ($n = 1, 2, 3, \ldots$), nous appelons *diamètre euclidien de* E la borne supérieure des distances euclidiens $\rho(p_1, \rho_2)$[1] entre deux points p_1, p_2 variables de E. Il sera désigne par $\delta(E)$. Soient données une suite des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ et une famille quelconque $\mathfrak{M}$ des ensembles situés tous dans l'espaces cartésien à n dimensions. Supposons que ces encembles E_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) satisfont à la condition suivante :

3°) Pour tout nombre positif $\varepsilon > 0$, il existe une suite des ensembles E_n^k ($n = 1, 2, 3, \ldots$) appartenant à $\mathfrak{M}$, tels que

1) $E_k = \Phi_{Ak}(E_1^k, E_2^k, E_3^k, \ldots)$, 2) $\delta(E_n^k) \leq \varepsilon$,

3) $\lim_{n\to\infty} \delta(E_n^k) = 0$.

Alors pour tout nombres positif $\varepsilon > 0$, nous pouvons supposer que les ensembles E_n^k satisfassent toujours à deux conditions $\delta(E_n^k) \leq \varepsilon/k$ et $\lim_{n\to\infty} \delta(E_n^k) = 0$. Dans ces suppositions, nous avons (en vertu de (3)) l'inégalité : $\delta(M_k) \leq \varepsilon$. Si, d'autre part, la relation $\lim_{k\to\infty} \delta(M_k) = 0$ on'aurait pas lieu, il existerait une suite partielle M_{k_i} telle que

$$(4) \qquad \delta(M_{k_i}) > l > 0.$$

Alors, $\varphi(k_i)$ serait toujours inférieurs à ε / l. Par suite, $\psi(k_i)$ augmente indéfiniment avec l'indice i. L'inégalité (4) est sûrement absurde, puisqu'il existe une suite partielle infinie $k_{i'}$ telle que $\varphi(k_{i'})$ soit constante ($\varphi(k_i)$ étant bornée). Nous avons donc $\lim_{k\to\infty} \delta(M_k) = 0$. Ainsi, la somme $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ satisfait également à la condition 3°), pour la base A obtenue à partir des A_k par le procédé exprimé dans la formule (1).

Ce moyen d'obtenir l'ensemble A à partir des A_k a été donné par M. F. HAUSDORFF. Il a donné également un moyen de traiter

(1) Voir p: ex. F. HAUSDORFF : Mengenlehre, p. 98.

le cas du produit $E = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\Pi}} E_k$, ce que nous allons étudier maintenant.

Soit donnée une suite des bases $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$, qui sont des ensembles satisfaisant à deux conditions 1°) et 2°). Considérons l'ensemble qu'on obtient par la formule :

$$(5) \qquad A = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\Pi}} g_k\left\{h_k(A_k) \times B^\infty\right\}.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, on voit bien que A est un ensemble fermé relativement à N et qu'il satisfait à la condition α). M. F. HAUSDORFF a montré que *la famille* $H_A(\mathfrak{M})$ *coïncide exactement avec celle de tous les ensembles-produits des suites des ensembles* $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ *tels que* $E_k \in H_{A_k}(\mathfrak{M})$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Pour le voir, il nous suffit, dans ce cas aussi, de prendre une suite des ensembles E_n^k $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que $E_k = \Phi_{A_k}(E_1^k, E_2^k, E_3^k, \ldots)$, et de poser $M_k = E_{\psi(k)}^{\varphi(k)}$. Il est bien clair que nous avons

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\Pi}} E_k = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\Pi}} \sum_{\nu \in A_k} \overset{\infty}{\underset{k'=1}{\Pi}} E_{k'}^k = \Phi_A(M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots).$$

Si E_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles situés dans l'espace cartésien à n dimensions et si $\mathfrak{M}$ est une famille d'ensembles du même espace satisfaisant à la condition 3°), le raisonnement que nous avons fait à page 83 nous permet de voir que le produit $E = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\Pi}} E_k$ satisfait également à la même condition, pour la base A obtenue par la formule (5).

Les bases A_ξ $(1 \leq \xi < \Omega)$ considérées par M. F. HAUSDORFF sont obtenues à partir de A_1, en effectuant alternativement les procédés (1) et (5) : pour ξ impair $(\xi > 1)$, A_ξ est donné par la formule (5), en posant $A_k = A_{\xi-1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; pour ξ pair et non limite, A_ξ est donné par la formule (1), en posant $A_k = A_{\xi-1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; pour ξ limite, il existe une suite bien déterminée (dépendant seulement du nombre ξ) des nombres ordinaux : $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k \ldots$ telle que $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \xi$; nous obtenons A_ξ au moyen de la formule (1), en posant $A_k = A_{\eta_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Ainsi, nous avons vu que *les ensembles* A_ξ $(1 \leq \xi < \Omega)$ *sont tous fermés relativement à* N[1]. D'ailleurs, comme la base A_1 satisfait à la condition α), tous les ensembles A_ξ $(1 \leq \xi < \Omega)$ y satisfont également.

(1) Cf. KANTOROVITCH, L. ET LIVENSON, E. : Sur les δs-fonctions de M. HAUSDOREF, C.R. de Paris, *t.* 190, p. 352 ; — : Sur les ensembles projectifs de M. LUSIN. C.R. de Paris, *t.* 190, p. 1114, III.

M. F. HAUSDORFF a donné une autre classification des ensembles de la famille $\mathfrak{M}_B$; celle-ci est classé en familles $\mathfrak{N}^\xi$ $(0 \leq \xi < \Omega)$, qui est définie par la règle inductive suivante: 1° $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{M}$; 2° pour ξ pair $(\xi > 1)$, $\mathfrak{N}^\xi$ est la famille de tous les ensembles-produits—et pour ξ impair, de tous les ensembles-sommes—des suites (finies ou infinies) des ensembles de $\mathfrak{N}^\eta (0 \leq \eta < \xi)$.

Il est tout à fait analogue aux familles $\mathfrak{M}^\xi$ que nous pouvons voir qu'il existe, pour $\xi \geq 1$, une base B_ξ, qui est un ensemble fermé relativement à N et dépendant seulement de ξ, telle que la famille $H_{B_\xi}(\mathfrak{M})$ coïncide exactement avec $\mathfrak{N}^\xi$.

Mais, dans ce cas, la base B_1 ne remplit pas la condition a). Au contraire, la deuxième: B_2 y satisfait sûrement. En effet, B_2 se constitue, d'après la formule (5), de tous les nombres dont $2^{m-1}(2n-1)$-ième chiffre est de la forme $2^{m-1}(2n'-1)$. Donc, 2^{m-1}-ieme chiffre est au moins égal à 2^{m-1}. *B_2 satisfait donc à la condition a).* Par suite, *$B_\xi (2 \leq \xi < \Omega)$ y satisfait tous également.*

Considérons maintenant l'espace cartésien à n dimensions $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit $\mathfrak{M}$ la famille de tous les carrés[1] de cet espace, et désignons par $\mathfrak{M}^*$ la famille de tous les ensembles E satisfaisant à la condition: pour tout nombre positif $\varepsilon > 0$, il existe une suite des ensembles E_k de $\mathfrak{M}$ telle que 1) $E = \Phi_{B_2}(E_1, E_2, E_3, \ldots)$; 2) $\delta(E_k) \leq \varepsilon$; 3) $\lim_{k \to \infty} \delta(E_k) = 0$. Je dis que $\mathfrak{M}^*$ *contient* $\mathfrak{M}_{\sigma\delta}$. En effet, soit d'abord E un carré quelconque. Pour fixer les idées, considérons le cas du plan. Divisons d'abord le carré E en 4 petits carrés égaux par deux segments parallèles à ses côtés. Parmi ces petits carrés, il existe un qui est situé à la distance positive des deux côtés de E situés à droite et en haut. Il est appelé *stable*, tandis que les autres *instables*. Divisons ensuite chacun des carrés instables en 4 petits carrés égaux par deux segments parallèles à ses côtés. Il existe toujours un ou deux petits carrés qui sont situés à la distance positive des deux côtés de E situés à droite et en haut. Ils s'appellent stables, tandis que les autres instables. Constinuons ainsi de suite indéfiniment.

Ainsi, nous obtiendrons une suite infinie bien déterminée des carrés stables, que nous désignerons par C_j' $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, qui

(1) Les points de cet espace sont exprimés par ses coordonnés rectangulaires:

$$p = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_a)$$

Appelons *carrés* les figures de cet espace formées de tous les points tels que

$$a_i \leq x_i < b_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \quad b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_n - a_u .$$

La fermeture d'un carré s'appelle un *carré fermé*.

satisfont aux conditions suivantes: 1) $\sum_{j=1}^{\infty} C_j' = E$; 2) les diamètres euclidiens de ces carrés sont inférieurs à la moitié de celle de E; 3) $\lim_{j\to\infty} \delta(C_j^1) = 0$. Nous appelons ces carrés *de premier rang*. Maintenant, divisons chaque carré de premier rang C_j' en quatre petits carrés égaux par deux segments parallèles à ses côtés. Nous les appelons *de second rang*. Continuons ainsi de suite. Pour obtenir les carrés de m-ième rang: C_j^m, $j = 1, 2, \ldots$, nous divisons chacun des carres de $m-1$ -ième rang en 4 de la même manière.

Or, soit M un ensemble $\mathfrak{M}_{\sigma\delta}$ quelconque. Nous pouvons poser: $M = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M_i^m$, où M_i^m sont des carrés que nous pouvons supposer en outre $\delta(M_i^m) < \varepsilon$. Sur le carré M_i^m $(m, i = 1, 2, 3, \ldots)$, opérons la division de rang $m+i$. Nous obtiendrons alors une suite bien déterminée des carrés C_{ij}^m $(j = 1, 2, \ldots)$. En suite, nous arrangeons la double suites C_{ij}^m $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ en une suite simple E_j^m $(j = 1, 2, 3, \ldots)$. Il est clair que nous avons la relation $\lim_{j\to\infty} \delta(E_j^m) = 0$. Enfin, posons $E_k = E_{\psi(k)}^{\varphi(k)}$.

L'ensemble E_k étant une partie de E, nous avons évidemment $E \supseteq \Phi_{B_2}(E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots)$. D'autre part, nous avons

$$E = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_j^m = \sum_{h\in N} \prod_{k=1}^{\infty} E_{j_k}^k; \quad \nu = (j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots).$$

Soit $\nu = (j_1, j_2, \ldots, j_m, \ldots)$ un nombre quelconque de N. Si nous posons $n_{2^{m-1}(2j-1)} = 2^{m-1}(2j_m - 1)$ pour tout j, le nombre $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ appartiendra à B_2 et $\prod_{m=1}^{\infty} E_{j_m}^m = \prod_{k=1}^{\infty} E_{\psi(n_k)}^{\varphi(n_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \in \Phi_{B_2}(E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots)$. Donc $E \subseteq \Phi_{B_2}(E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots)$. Deux inclusions que nous avons établies sont équivalentes à: $E = \Phi_{B_2}(E_1, E_2, \ldots)$. Nous avons évidemment $\delta(E_k) \leq \varepsilon$. Enfin, nous pouvons voir sans peine la relation: $\lim_{k\to\infty} \delta(E_k) = 0$. Car, sinon, il existerait une suite partielle E_{k_i} telle que $\delta(E_{k_i}) > l > 0$. Aors, nous avons $l < \delta(E_{k_i}) = \delta\left(E_{\psi(k_i)}^{\varphi(k_i)}\right) < \varepsilon/2^{\varphi(k_i)-1}$, et par suite $\varphi(k_i) < (\varepsilon/l)+1$. La suite $\varphi(k_i)$ serait bornée, et $\psi(k_i)$ augmenterait conséquemment avec l'indice i, ce qui est une contradiction. Nous avons donc la relation: $\lim_{k\to\infty} \delta(E_k) = 0$. Ainsi, la suite E_k satisfait à nos trois conditions. Cela revient à dire que nous avons l'identité: $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{M}^*$. De là s'ensuit $\mathfrak{N}^3 = (\mathfrak{M}^*)_\sigma$, $\mathfrak{N}^4 = (\mathfrak{M}^*)_{\sigma\delta}$, etc., c'est-à-dire, *les deux familles* $\mathfrak{M}_B$ *et* $(\mathfrak{M}^*)_B$ *coïncident.*

Or, d'après ce que nous avons vu plus haut, $(\mathfrak{M}^*)_B$ est justement la famille de tous les ensembles E de $(\mathfrak{M}^*)_B$, qui satisfont aux conditions: pour tout nombre positif $\varepsilon > 0$, il existe une suite des ensembles $E_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ de $\mathfrak{M}$, et un nombre ordinal $\xi (2 \leq \xi < \Omega)$ tels que 1) $E = \Phi_{B_\xi}(E_1, E_2, \ldots)$; 2) $\delta(E_k) \leq \varepsilon$; 3) $\lim_{k\to\infty} \delta(E_k) = 0$. D'autre part, il est bien connu que $\mathfrak{M}_B$ coïncide avec la famille de tous les ensembles boreliens du plan.

Enfin, l'ensemble de la famille $\mathfrak{N}^\xi$ pour $\xi \geq 3$ impair peut être considéré comme la somme des ensembles $\mathfrak{N}^\eta (2 \leq \eta < \xi)$, dont les termes sont disjoints, et les raisonnements dus à MM. N. LUSIN et H. HAHN[1] montrent bien que nous pouvons prendre comme ensembles E_k dans la formule 1), les carrés fermés qui satisfont à la condition:

5°) pour deux nombres quelconqes ν et ν', $\nu \neq \nu'$, $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ et $\nu' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots)$, qui appartiennent à B_ξ, nous avons $\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \cdot E_{n'_k} = 0$.

Les carrés de la famille $\mathfrak{M}$ peuvent être remplacés par ceux qui sont fermés.

Ainsi, nous sommes arrivés à notre but de démontrer le théorème suivant qui sera utile dans le paragraphe § 9:

Théorème 10. *Pour tout ensemble borelien E de classe $\mathfrak{G}^\xi$ $(2 \leq \xi < \Omega)$[2], situé dans l'espace cartésien R_n à n dimensions, il existe un sous-ensemble B_ξ de l'ensemble N de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1, fermé relativement à N, et une suite des carrés fermés $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ de R_n, satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *pour toute famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles, $H_{B_\xi}(\mathfrak{M})$ coïncide avec $\mathfrak{N}^\xi$;*

2) $E = \Phi_{B_\xi}(E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots)$;

3) *pour tout nombre $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de B_ξ, nous avons $\overline{\lim_{k\to\infty}} n_k = \infty$;*

4) $\lim_{k\to\infty} \delta(E_k) = 0$;

---

(1) N. LUSIN, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930. p. 114–119. H. HAHN: Reelle Funktionen, Erster Teil, Leipzig, 1932, p. 370–371.

(2) $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$ est la famille de tous les ensembles ouvrets dans l'espace considéré; $\mathfrak{G}_\xi$ désigne celle de tous les ensembles-produits ou de tous les ensembles-sommes des ensembles $\mathfrak{G}^\eta (1 \leq \eta < \xi)$, suivant que ξ est pair ou impair.

5) *pour deux nombres différents* ν *et* ν' *de* $B_{\aleph}$, $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $\nu' = (n', n'_2, \ldots, n'_k, \ldots)$, *nous avons toujours*

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \cdot E_{n'_k} = 0 .$$

§ 9. Théorème de sections fermées (suite).

M étant un ensemble de plan OXY, nous avons désigné par $I(M)$ l'ensemble de tous les points x de l'axe OX jouissant de la propritété suivante : la section de M engendrée par le point $(x, 0)$ est un ensemble fermé et non vide. Nous avons déjà démontré que, pour tout ensemble plan M appartenant à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{c\delta\sigma\delta}$, $\Gamma(M)$ est un complémentaire analytique[1]. Maintenant nous allons généraliser encore ce théorème comme il suit :

Théorème 11 (de sections fermées). *L'ensemble* $\Gamma(M)$ *est toujours un complémentaire analytique, pourvu que* M *est un ensemble plan borelien.*

$\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G} \subseteq (\mathfrak{F} \times \mathfrak{G})_B$ et par suite $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta\sigma}$ etc. font sûrement des parties de la famille des ensembles boreliens plans. Donc, les théorèmes 3, 4 et celui que nous avons indiqué plus haut sont des cas particuliers de ce Théorème.

Démonstration. 1. Nous avons désigné par $G(M)$ l'ensemble de tous les points $(x, 0)$ de l'axe OX, tels que la section de M engendrée par le point $(x, 0)$ est un ensemble fermé vide ou non. D'après un théorème de M. W. SIERPIŃSKI, $G(M)$ est un complémentaire analytique, pour tout ensemble plan borelien M[2]. Soit, d'autre part, A l'ensemble de tous les points (x, y) de M, tels que les sections de M engendrées par les points $(x, 0)$ soient des ensembles non fermés. Le théorème de M. W. SIERPIŃSKI montre bien que A est un ensemble analytique.

Désignons d'abord par R_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ le carré fermé : $-n \leq x \leq n$, $-n \leq y \leq n$, dont le centre est $(0, 0)$ et la longueur des côtés est égale à $2n$. Alors la formule : $\Gamma(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(R_n . M) G(M)$

(1) En effet, $\Gamma(M) \subseteq \Delta(M)$ entraîne l'égalité $\Gamma(M) = G(M) \cdot \Delta(M)$ (voir les définitions de p. 172 et p. 187, Contribution I.). Nous avons vu d'autre part que $G(M)$ ainsi que $\Delta(M)$ sont des complémentaires analytiques (Cf. le Théorème 8, p. p. 9, Contribution II.

(2) Voir p. 172, Contribution I.

montre bien qu'il nous suffit de démontrer que $\Gamma(R_n \cdot M)$ sont tous des complémentaires analytique. $R_n \cdot M$ étant borelien, nous pouvons considérer seulement le cas où M est borné, sans perdre la généralité. Nous supposons donc M est contenu dans le carre fermé : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

2. L'ensemble horelien M est un ensemble $\mathfrak{G}^\xi$. Nous supposons de plus $2 \leq \xi < \Omega$, (puisque $\mathfrak{G}^1$ est un $\mathfrak{G}^2$). D'après le Théorème 10, il existe une base B_ξ de δs-opération de M. F. HAUSDORFF, qui est un sous-ensemble de N fermé relativement à N, et une suite des carrés fermés : $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, telle que 1) pour toute famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles quelconques, $H_{B_\xi}(\mathfrak{M})$ coïncide avec la famille $\mathfrak{M}^\xi$; 2) $M = \Phi_{B_\xi}(M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots)$; 3) pour tout $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de B_ξ, on a $\overline{\lim_{n\to\infty}} n_k = \infty$; 4) $\lim_{k\to\infty} \delta(M_k) = 0$; 5) si $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ et $\nu' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots)$ sont deux points distincts de B_ξ, on a toujours $\prod_{1=k}^{\infty} M_{nk} \cdot M_{n'_k} = 0$.

Soit Z l'ensemble de tous les points de B_ξ : $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ tels que $\prod_{k=1}^{\infty} M_{nk}$ soit non vide. D'après un théoreème de G. Cantor, pour que $\prod_{k-1}^{\infty} M_{nk}$ soit vide, il faut et il suffit qu'il existe un indice k_0, tel que le produit partiel $\prod_{k-1}^{k_0} M_{nk}$ soit vide. Donc, Z est un sous-ensemble de N fermé relativement à N. En vertu des propriétés 3) et 4) dont jouissent les ensembles M_n et B_ξ, pour tout point t de Z, $t = (n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots)$, l'ensemble $\prod_{k-1}^{\infty} M_{nk}$ se constitue d'un et d'un seul point. Nous pouvons donc l'exprimer par

$$p = (x, y), \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in Z.$$

Or, si une suite des points $t_p = (n_1^p, n_2^p, \ldots, n_k^p, \ldots)$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, de Z tendent vers un point $t = (n_1, u_2, \ldots, n_k, \ldots)$, t appartient à Z, et pour tout k aussi grand que l'on veut, il existe un indice p_0, tel que $n_1^p = n_1$, $n_2^p = n_2$, $\ldots$, $n_k^p = n_k$ dès que $p > p_0$. Deux points $\prod_{k=1}^{\infty} M_{n_k^p}$ et $\prod_{k-1}^{\infty} M_{nk}$ appartiennent donc aux mêmes carrés fermés $M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}$. D'après la propriété 4), le point $\varphi(t_p)$ et $\psi(t_p)$ tendent vers $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ respectivement. Les deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont donc continues sur Z. D'ailleurs la propriété 5) montre que la correspondance entre Z et M par ces deux fonctions est biunivoque.

Désignons par $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ ($n_1, n_2, n_3, \ldots = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots$), l'ensemble de tous les points p de M, tels que

$p \in M_{n_1} \cdot M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}$, et où $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot Z \neq 0$. Soit $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ la projection de $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sur l'axe OX. L'ensemble M peut être écrit :

$$M = \sum_{\nu \in Z} \prod_{Z} P_{n_k} = \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} \bar{P}_{n_k}$$

En effet, pour tout t de Z, nous avons $\{\varphi(t), \psi(t)\} = \prod P_{n_k}$. Par suite, on a $M \subseteq \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} P_{n_k} \subseteq \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} P_{n_k}$.

La projection P de l'ensemble M sur l'axe OX peut être donnée par la formule :

$$(1) \qquad P = \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} \bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

En effet, on a évidemment $P \subseteq \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Soit, d'autre part, x_0 un point de $\sum_{\nu \in Z} \prod_{k} \bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Il existe alors un nombre irrationnel ν de Z, $\nu = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots)$, tel que $x_0 \in \prod_{\infty} \bar{A}_{n_1, n_1, \ldots, n_k}$. Pour chaque k, nous avons alors un point (x_k, y_k) appartenant à $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subseteq M_{n_1} \cdot M_{n_2} \ldots \cdot M_{n_k}$, tel que $|x_0 - x_k| < 1/k$. Les carrés fermés $M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}$ sont donc non vides, et évidemment leur produit $\prod_{i=1}^{k} M_{n_i}$ est non croissant. Nous avons $\overline{\lim_{k}} n_k = +\infty$ et $\lim_{k \to \infty} \delta(M_n) = 0$. Donc $\lim_{k \to \infty} \delta(M_{n_1} \cdot M_{n_2} \ldots M_{n_k}) = 0$. D'après un théorème de Cantor, l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} M_{n_k}$ se réduit à un et un seul point, qu'on peut désigner par (x, y). Le point (x, y) appartient douc à l'ensemble M. Or, x_k appartenant à la projection de M_{n_k} sur l'axe OX, on a $x_0 = x$. Donc, x appartient à l'ensemble P. Nous avons donc $P \supseteq \sum_{\nu \in Z} \prod_{k} \bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Les deux inclusions établies nous donnent évidemment l'égalité (1).

3. Supposons qu'à tous les nombres naturels n correspondent leur rang k, qu'on désigne par $k = \sigma(n)$. Si $\sigma(n_1) < \sigma(n_2)$, nous l'exprimons par la notation $n_1 \prec n_2$. Étant donnée une suite des ensembles E_n d'éléments quelconques, considérons pour chaque rang k, la somme S_k de tous les ensembles E_{n_i}, tels que $\sigma(n_i) \geq k$. Le produit de tous les S_k s'appelle la limite complète au sens de $\prec$, et sera désinée par $\overline{\lim_{\prec}} E_n$. Nous pouvons voir sans peine que nous avons l'égalité

$$\overline{\lim_{\prec}} E_n = \sum_{\nu}^{*} \prod_{k} E_{n_k}$$

, où la sommation Σ^*_{ν} s'étend à tous les nombres irrationnels entre 0 et 1 qui satisfait à la relation : $n_1 \prec n_2 \prec n_3 \prec \ldots \prec n_k \prec \ldots$.

Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 1. *Étant donnée une suite d'ensembles analytiques* A_1, A_2, ..., A_n, ..., *il existe une suite des complémentaires analytiques* H_n *qui satisfont aux conditions :*

1) $A_n - \overline{\lim_{\prec}} A_n \subseteq H_n$; 2) $\overline{\lim_{\prec}} H_n = 0$;

3) H_n *sont des ensembles analytiques relativement à* $C\overline{\lim_{\prec}} A_n$.

En effet, posons d'abord $A_k^* = \sum_{\sigma(n_i)\geq k} A_{n_i}$, la sommation s'étendant à tous les nombres naturels n_i tels que $\sigma(n_i) \geq k$. Nous avons alors $\prod_{k=1}^{\infty} A_k^* = \overline{\lim_{\prec}} A_n$. On voit bien que A_k^* sont des ensembles analytiques. Posons $U^k = CA_k^*$. D'après un théorème de M. C. KURATOWSKI (dit le théorème de réduction), il existe une suite des complémentaires analytiques Γ^n, tels que 1) $\Gamma^k \cdot \Gamma^{k'} = 0\,(k \neq k')$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} U^n = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^n$; 3) $U^n \supseteq \Gamma^n$.

Posons $C_k = \sum_{i \neq k} \Gamma^k$ et $D_k = C_1 \cdot C_2 \ldots C_k$. On voit bien que tous les ensembles D_k sont des complémentaires analytiques. Pour tout nombre n tel que $\sigma(n) = k$, nous posons $D_k = H_n$ et nous allons voir que H_n satisfait à nos conditions.

Il vient d'abord

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma^k = \sum_{k=1}^{\infty} U^k = \sum_{k=1}^{\infty} CA_k^* = C \prod_{k=1}^{\infty} A_k^* = C \overline{\lim_{\prec}} A_n ,$$

et par suite

$$A_k^* - \overline{\lim_{\prec}} A_n = A_k^* \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma^i = CU^k \sum_{i=1}^{\infty} U^i \subseteq C\Gamma^k \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma^i = \sum_{i \neq k} \Gamma^i = C_k .$$

En vertu de l'inclusion : $A_n - \overline{\lim_{\prec}} A_n \subseteq A_m^* - \overline{\lim_{\prec}} A_n$ pour tout m inférieur ou égal à $\sigma(n)$, il s'ensuit que $A_n - \overline{\lim_{\prec}} A_n \subseteq C_1 \cdot C_2 \ldots C_k = H_n$, pour $k = \sigma(n)$.

D'autre part, $C_k \cdot \Gamma^k = 0$ entraîne $\prod_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma^i = 0$. Comme nous avons $C_k = \sum_{i \neq k}^{\infty} \Gamma^i \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma^i$, il vient $\prod_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma^i = \prod_{k=1}^{\infty} C_k = 0$. De là s'ensuit enfin que $\overline{\lim_{\prec}} H_n = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} D_{k+i} = \prod_{k=1}^{\infty} D_k = \prod_{k=1}^{\infty} C_k = 0$.

D'ailleurs, Γ^i étant disjoint, nous avons

$$C\Gamma^k = C\sum_{i=1}\Gamma^i + \sum_{i\neq k}^{\infty}\Gamma^i = \overline{\lim_{\prec}} A_n + \sum_{i\neq k}\Gamma^i,$$

ou $C\Gamma^k C\overline{\lim_{\prec}} A_n = \sum_{i\neq k}\Gamma^i \cdot C\overline{\lim_{\prec}} A_n$. Donc, Γ_k est un ensemble analytique relativement à l'ensemble $C\lim_{\prec} A_n$. Par suite, C_k et H_k sont des ensembles analytiques relativement à $C\overline{\lim_{\prec}} A_n$. c. q. f. d.

4. Revenons à la démonstration du Théorème 11. À chaque nombre y_0, introduisons la notion du *rang du système* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *relativement au nombre* y_0, $n_1, n_2, \ldots = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots$, comme il suit: considérons deux domaines situés dans le plan OXY et définis par

$$y_0+1/(k+1) < y \leq 1 \quad \text{et} \quad y-1/(k+1) > y \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1^{(1)}.$$

Si le produit $M_{n_1} \cdot M_{n_2} \ldots M_{n_k}$ possède des points communs avec un de ces domaines, le rang du système $(n_1, n_1, \ldots, n_k)$ est de rang au plus égal à k, mais s'il n'est pas de rang au plus égal à $k-1$, il s'appelle de rang k. Si le system $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est de rang au plus égal à 1, il est de rang 1.

Or, $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant des ensembles boreliens, les ensembles $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont analytiques. Au lieu de $\overline{\lim_{\prec}} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, écrivons $\overline{\lim_{y_0}} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. D'après le Lemme 1, nous avons, pour chaque valeur y_0, un complémentaire analytiques $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y_0}$ tel que

1) $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y_0} \supseteq A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \overline{\lim_{y_0}} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$;

2) $\overline{\lim_{y_0}} H_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y_0} = 0$.

Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant

Lemm 2. *L'ensemble* $\Gamma(M)$ *peut être exprimé par la formule:*

$$(2) \qquad \Gamma(M) = P \cdot G(M) = \sum_{t\in Z}\prod_{y}\left\{A(y) + \prod_{k=1}^{\infty}(A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y)\right\}$$

$$(3) \qquad = \sum_{t\in Z}\prod_{y}\left\{A(y) + \prod_{k=1}^{\infty}(\bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y)\right\},$$

(1) Si $y_0+1/(k+1) > 1$ ou $y_0-1/(k+1) < 0$, l'un ou deux de ces domaines sont vides.

où $A(y)$ désigne (la projection sur l'axe OX de) la partie de l'ensemble A[1] située sur la droite parallèle à l'axe OX et qui passe par le point $(0, y)$, et

$$D_y = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ky}, \quad D_{ky} = \overline{\lim_{y}} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

($n_1, n_2, \ldots, n_k$ parcourant tous les 1, 2, 3, ... tel que $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot Z \neq 0$).

En effet, soit d'abord x_0 un point quelconque de $P \cdot G(M)$. Il existe alors un nombre t_0 de Z, tel que $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$. Soit $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ le développement en fraction continue de t_0. Étant donné un nombre arbitraire y^* entre 0 et 1, si x_0 n'appartient pas à $A(y^*)$, y^* et y_0 sont deux valeurs distinctes, et il existe un intervalle $[y_1, y_2]$, où $y_1 = y^* - 1/r$, $y_2 = y^* + 1/r$ et tel que la section de M n'a aucun point de coordonnée y appartenant à $[y_1, y_2]$, puisque cette section est un ensemble fermé. Donc, pour tous les points t de Z, tel que $\varphi(t) = x_0$, les rangs des systèmes $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ sont au plus égaux à r, puisque M_{n_i} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ contient le point $(\varphi(t), \psi(t))$ qui appartient à l'un des deux domaines: $y^* + 1/r < y \leq 1$ et $y^* - 1/r > y \geq 0$.

Donc, x_0 n'appartient à $\overline{\lim_{y^*}} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ pour aucun k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. x_0 appartient donc à $\prod_{k=1}^{\infty} (A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y)$. Ainsi, x_0 appartient au membre droit de l'égalité (2). Nous avons par suite démontré l'inclusion :

$$\Gamma(M) \subseteq \sum_{t \in Z} \prod_{y} \left\{ A(y) + \prod_{k=1}^{\infty} (A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y) \right\}.$$

Deuxièmement, supposons que x_0 appartient au membre droit de (3). Il existe alors un nombre $t = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ appartenant à Z, tel que $x_0 \in \prod_{y} \left\{ A(y) + \prod_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y) \right\}$. S'il existe un y tel que $x_0 \in A(y)$, alors x_0 appartiendra à $\Gamma(M)$. Donc, supposons que x_0 n'appartient à $A(y)$ pour aucun y, et nous verrons que nous aboutissons à une contradiction.

En effet, dans cette hypothèse, x_0 appartient à $\prod_{k=1}^{\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y$ pour tout y. D'abord, comme $x_0 \in \prod_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, x_0 appartient à P, la projection de M sur l'axe OX. Donc, pour x_0, il existe au moins une valeur y_0, qui satisfait à deux conditions suivantes :

(1) Voir la définition de p. 88.

1) $(x_0, y_0) \in M$; 2) il existe une suite des nombres y_m, telle que $\lim_{m\to\infty} y_m = y_0$ et que $(x_0, y_m) \in M$.

Or, le point (x_0, y_m) correspond à $t_m = (n_1^m, n_2^m, n_3^m, \ldots, n_k^m, \ldots)$ tel que $\varphi(t_m) = x_0$, $\varphi(t_m) = y_m$. Il existera alors au moins un indice k, tel que $\overline{\lim_{m\to\infty}} n_k^m = \infty$. En effet, si n_k^m sont bornés pour tout k, il existe au moins un $n_1^{m'}$ tel qu'on a $n_1^{m'} = n_1^{m_1} = n_1^{m_2} = \ldots$ pour une suite infinie $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$. Il existe aussi un $n_1^{m''}$ tel que $n_1^{m''} = n_1^{m'}$ et $n_2^{m''} = n_2^{m_1} = n_2^{m_2} = \ldots$ pour une suite infinie $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, car les points t_m tels que $n_1^{m''} = n_1^{m'}$ sont en nombre infini, tandis que n_2^m sont en nombre fini. Il existe aussi un $n_3^{m'''}$ tel que $n_1^{m'''} = n_1^{m'}$, $n_2^{m'''} = n_2^{m''}$ et $n_3^{m'''} = n_3^{m_1} = n_3^{m_2} = \ldots$ pour une suite infinie $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$. Continuons ainsi de suite. Nous avons alors une valeur $t_0 = (n_1^{m'}, n_2^{m''}, n_3^{m'''}, \ldots)$ telle que $n_1^{m(n)} = n_1^{m'}$, $n_2^{m(n)} = n_2^{m''}, \ldots$. Donc, les points $t^{m(n)}$ tendent vers t_0. Comme l'ensemble Z est fermé (relativement à N), et que $t_{m^{(n)}}$ appartient à Z, $\bar{t}_0$ appartient également à Z.

Or, les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant continues sur Z,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_{m^{(n)}}) = \varphi(t_0) \quad \text{et} \quad y_0 = \lim_{n\to\infty} \psi(t_{m^{(n)}}) = \psi(t_0).$$

Donc, (x_0, y_0) appartient à M, ce qui est absurde. Ainsi, *il existe un k tel que n_k^m ne sont pas bornés.* On a $\overline{\lim_{m\to\infty}} n_k^m = \infty$, c. à d. il existe une suite partielle m_n telle que $\lim_{n\to\infty} n_k^{m_n} = \infty$.

Or, le produit $M_{n_1^{m_n}} \cdot M_{n_2^{m_n}} \ldots M_{n_k^{m_n}}$ contient le point (x_0, y^{m_n}), et le diamètre de $M_{n_k^{m_n}}$ tend vers 0. Donc, le rang du système $(n_1^{m_n}, n_2^{m_n}, \ldots, n_k^{m_n})$ tend vers ∞. Par suite, x_0 appartient à $D_{k, y_0} = \overline{\lim_{y_0}} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, à plus forte raison à D_{y_0}. Ceci est une contradiction. c. q. f. d.

5. Or, comme

$$H_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} \supseteq A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_{k, y} \supseteq A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y,$$

en posant

$$H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} =$$

$$H_{n_1; y} \cdot H_{n_1, n_2; y} \cdots H_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} (\bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - D_y),$$

nous avons

$$(4) \qquad \Gamma(M) = \sum_{t \in Z} \prod_{y} \left\{ A(y) + \prod_{k=1}^{\infty} H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} \right\}.$$

D'autre part, pour le système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, posons encore

$$\Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \prod_{y} \left\{ A(y) + H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} \right\}.$$

Nous avons alors le lemme suivant

Lemme 3. *L'ensemble $\Gamma(M)$ peut être exprimé par la formule:*

$$(5) \qquad \Gamma(M) = \prod_{k-1}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \right\},$$

où la sommation $\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *s'étend à tous les systèmes* $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ *tels que* $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot Z \neq 0$.

En effet, soit d'abord x_0 un point qui n'appartient à $A(y)$ pour aucun y. Nous allons voir qu'il n'existe qu'un nombre limité de n_1 tel que $x_0 \in \Phi_{n_1}$. Car, dans le cas contraire, il existe une suite infinie n_1^m tel que $x_0 \in H^{*m}_{n_1; y} \subseteq \bar{A}_{n_1^m}$. La droite d parallèle à l'axe OY, qui passe par $(x_0, 0)$ a des points communs avec les ensembles $M_{n_1^m}$. Comme ces parties communes $M_{n_1^m} \cdot d$ sont contenues dans l'intervalle borné et fermé: $0 \leq y \leq 1$, il existe au moins une valeur y_0 telle que l'une suite partielle de $M_{n_1^m} \cdot d$ tend vers (x_0, y_0)[1]. Soit $M_{n_1^{m_i}} \cdot d$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ une de ces suites partielles.

Comme le diametre de M_n tend vers 0 avec n augmentant indéfiniment, le rang de $n_1^{m_i}$ relativement à y_0 augmente indéfiniment. Or, comme x_0 n'appartient à $A(y)$ pour aucun y, x_0 appartient à $H^{*m_i}_{n_1; y_0}$. Mais, $H^{*m_i}_{n_1; y_0} \subseteq H_{n_1^{m_i}; y_0}$ entraîne $x_0 \in H_{n_1^{m_i}; y_0}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Ceci est impossible, puisque d'après la relation 2) (voir p. 92), on a $\overline{\lim_{y_0}} H_{n_1} = 0$. Ainsi, nous avons vu qu'il n'existe qu'un nombre limté de n_1 tels que $x_0 \in \Phi_{n_1}$. Ensuite, de la même manière, nous pouvons voir que, pour tout k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, il n'existe qu'un nombre limité de systèmes $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tels que $x_0 \in \Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

---

(1) Nous disons qu'une suite des ensembles E_n tend vers un point p, si, pour tout nombre réel positif $\varepsilon > 0$, il existe un indice $N(\varepsilon)$ tel que E_n soient contenus dans le voisinage $V_\varepsilon(p)$ dès que n surpasse $N(\varepsilon)$

Or, supposons d'abord qu'un point x_0 appartient au membre droit de l'égalité (4). Si x_0 appartient à $A(y)$ pour un nombre y, il appartient sûrement à $\Gamma(M)$. Si x_0 n'appartient à $A(y)$ pour aucun y, il n'existe qu'un nombre limité de systèmes $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ pour chaque k, $k=1, 2, 3, \ldots$, tels que $x_0 \in \Phi n_1, n_2, \ldots, n_k$ et que $\delta n_1, n_2, \ldots, n_k \cdot Z \neq 0$.

Il est bien évident que les ensembles $\Phi n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ satisfont à l'inclusion $\Phi n_1, n_2, \ldots, n_k \supseteq \Phi n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$ avec celle de $H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} \supseteq H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}; y}$. Cela entraîne, d'après le Théorème 2, l'égalité

$$C\Gamma(M) \cdot \prod_{k-1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \sum_{t \in Z} \prod_{k-1}^{\infty} \Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot C\Gamma(M).$$

Il existe alors un nombre $t=(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ de Z, tel que $x_0 \in \Phi n_1, n_2, \ldots, n_k \cdot C\Gamma(M)$.

En vertu de la définition, on a alors $x_0 \in H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y}$ pour tout k et y. Ceci est impossible, puisque, d'après la formule (4), on a

$$O = \Gamma(M) \cdot C\Gamma(M) = \sum_{t \in Z} \prod_{y} \prod_{k} H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y}.$$

Donc, pour tout t de Z, on a $\prod_y \prod_k H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = 0$. Ainsi, nous avons vu l'inclusion:

$$\Gamma(M) \supseteq \prod_k \left\{ \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \right\}, \quad \delta n_1, n_2, \ldots, n_k \cdot Z \neq 0.$$

Soit, deuxièmement, x_0 un point de $\Gamma(M)$. Il existe alors, d'après le Lemme 2, un nombre t_0 de Z, tel que, pour toute valeur y, x_0 appartient à $A(y) + \prod_{k-1}^{\infty} (A n_1, n_2, \ldots, n_k - D_y)$. Donc, x_0 appartient ou bien à $A(y)$, ou bien à tous les $Hn_1, n_2, \ldots, n_i; y$, $i=1, 2, 3, \ldots, k$ et à $\bar{A} n_1, n_2, \ldots, n_k - D_y$. Par suite, $x_0 \in H^*_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k; y}$.

Remarquons d'ailleurs que ces nombres $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont indépendants de y. Donc, $x_0 \in \prod_y \left\{ A_y + H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k; y} \right\} = \Phi n_1, n_2, \ldots, n_k$. Par suite, x_0 appartient à $\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \Phi n_1, n_2, \ldots, n_k (\delta n_1, n_2, \ldots, n_k \cdot Z \neq 0)$, pour tout k, $k=1, 2, 3, \ldots$. Ainsi, nous avons vu l'autre inclusion:

$$\Gamma(M) \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \right\}.$$

Notre Lemme 3 est donc établi entièrement.

6. Enfin, nous allons démontrer le

Lemme 4. *Il existe des ensembles* $Hn_1, n_2, \ldots, n_k, v$ *tels que, pour tout système* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, *l'ensemble* $\Phi n_1, n_2, \ldots, n_k$ *est un complémentaire analytique.*

En effet, considérons l'espace à trois dimensions $OXYZ$. À chaque droite : $y = y_0$ (y_0 étant une constante), qui est parallèle à l'axe OX, plaçons l'ensemble linéaire $A(y_0)$. L'ensemble plan ainsi obtenu coïncide justement avec $M \cdot \{G(M) \times OY\}$. Nous le désignons par $\mathfrak{A}$, c. à d. $\mathfrak{A} = M - A$. $\mathfrak{A}$ est donc un complémentaire analytique situé sur le plan OXY.

Désignons ensuite par $Bn_1, n_2, \ldots, n_k$ la projection de produit $Mn_1 \cdot Mn_2 \ldots Mn_k$ sur l'axe OY, et par $B'_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'intervalle (on un point) situé sur l'axe OZ, qui est congruent à $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Considérons l'ensemble $\Gamma n_1, n_2, \ldots, n_k$ de tous les points (x, y, z) tels que $x \in An_1, n_2, \ldots, n_k$, $y \in B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, $z \in B'_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Considérons maintenant l'ensemble T_r défini par l'inégalité : $z - 1/r < y < z + 1/r$, et désignons par $\Gamma n_1, n_2, \ldots, n_k; r$ la partie de $\Gamma n_1, n_1, \ldots, n_k$ de tous les points (x, y, z_0) dont la coordonnée z_0 telle que le produit de $\Gamma n_1, n_2, \ldots, n_k$ et du plan $z = z_0$ soit contenu entièrement dans T_r.

Faisons d'abord la somme $\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \Gamma n_1, n_2, \ldots, n_k; r$, la sommation s'étendant à tous les systèmes $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ tels que $\delta n_1, n_2, \ldots, n_k \cdot Z \neq 0$, et soit $L_{k,r}$ la projection de cette somme sur le plan : $y = z$. Désignons par L_k la projection sur le plan OXY de l'ensemble-produit $\prod_{r=1}^{\infty} L_{k,r}$. Cet ensemble L_k jouit la propriété suivante : la partie commune à la droite : $y = y_0$ avec l'ensemble L_k est précisément l'ensemble $\overline{\lim_{y_0}} An_1, n_2, \ldots, n_k$.

On voit bien que les ensembles L_k, comme projections des ensembles analytiques, sont eux-mêmes des ensembles analytiques. La somme $D = \sum_{k=1}^{\infty} L_k$ est donc un ensemble analytique. La partie commune à D et à la droite $y = y_0$ coïncide avec D_{y_0}.

Comme nous avons vu, l'ensemble $L_{k,r}$ est situé sur le plan $y=z$, et est un ensemble analytique. Posons $U_k^r = CL_{k,r}$, le complémentaire étant pris par rapport au plan $y=z$. D'après le théorème de réduction de M. C. KURATOWSKI, il existe un complémentaire analytique Γ_k^r situé sur le plan $y=z$, qui satisfait à la condition suivante :

$$1)\ \Gamma_k^r \cdot \Gamma_k^{r'} = 0\ (r \neq r')\ ; \qquad 2)\ \sum_{r=1}^{\infty} U_k^r = \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_k^r\ ; \qquad 3)\ U_k^r \supseteq \Gamma_k^r .$$

Posons $C_k^r = \sum_{i \neq r} \Gamma_k^i$ et $D_k^r = C_k^1 \cdot C_k^2 \cdot \cdots \cdot C_k^r$. On voit bien que l'ensemble D_k^r ainsi que sa projection D_k^{*r} sur le plan OXY sont des complémentaires analytiques. Pour tout système $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$, définissons le rang comme il suit : *le rang de* $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ est r si l'ensemble $OX \times B_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times B'_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est contenu dans T_r et s'il n'est pas contenu dans T_{r+1}. On pose ensuite $H_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k} = D_k^{*r}$ pour tout systeme $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ de rang r. L'ensemble $H_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k}$ jouit de la propriété suivante : la partie commune à l'ensemble $H_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k}$ et à la droite $y = y_0$ parallèle à l'axe OX, qui passe le point $(0, y_0)$ peut être considéré comme l'ensemble $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k ; y_0}$.

Posons encore $H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = H_{n_1} \cdot H_{n_1, n_2} \cdot \ldots H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Cet ensemble est également un complémentaire analytique. Enfin, l'ensemble $\bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times OY$ est un ensemble fermé situé sur le plan OXY. Ainsi, l'ensemble

$$\Theta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = M \cdot \{G(M) \times OY\} + H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot (\bar{A}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times OY) \cdot CD$$

est un complémentaire analytique situé sur le plan OXY, et jouit de la propriété suivante : la partie commune à cet ensemble et à la droite $y = y_0$ est précisément l'ensemble $A(y_0) + H^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k ; y_0}$.

Donc, $\Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est le complémentaire de la projection (sur l'axe OX) de l'ensemble-complémentaire de l'ensemble $\Theta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (le complémentaire étant pris par rapport au plan OXY). Le complémentaire de $\Theta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ ainsi que sa projection sur l'axe OX étant des ensembles analytiques, l'ensemble $\Phi_{n_1, u_2, \ldots, n_k}$ doit être un complémentaire analytique. Notre Lemme 4 est ainsi établi, c. q. f. d.

Il est maintenant bien clair que le Théorème 11 est une conséquence immédiate du Lemme 4 et la formule (5) de Lemme 3. Le Théorème 11 est donc entièrement démontré.

Corollaire 1. *Soit M un ensemble borelien situé dans le plan OXY. Si toutes les intersections de M avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles fermés, la projection de M sur l'axe OX est toujours un ensemble borelien.*

En effet, l'ensemble $\Gamma(M)$ coïncide dans ce cas avec la projection de M sur l'axe OX. Par suite, d'après le Théorème 11, cette projection est simultanément un ensemble analytique et un complémentaire analytique. D'après un théorème de SOUSLIN, elle est un ensemble borelien. c. q. f. d.

Il faut remarquer que *tout ensemble M borelien situé dans le plan OXY, dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OX sont fermées, appartient nécessairement à la famille* $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta}$.

En effet, désignons par $\sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, $(n_1, n_2, \ldots = 1, 2; k = 1, 2, 3, \ldots)$, l'intervalle fermé défini par

$$(n_1-1)/2+(n_2-1)/4+\cdots+(n_k-1)/2^k \leq y \leq (n_1-1)/2 + (n_2-1)/4+\cdots+(n_{k-1}-1)/2^{k-1}+n_k/2^k$$

et par $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ la projection de l'ensemble $M\cdot(OX\times\sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$ sur l'axe OX. D'après le Corollaire 1, cette projection est un ensemble borelien, quel que soit $n_1, n_2, n_3, \ldots = 1, 2$ et $k = 1, 2, 3, \ldots$. Désignons encore par $\sigma^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de toutes les valeurs y telles que l'intérieur de l'intervalle $\sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ contienne ou bien $y-1/8^k$ ou bien $y+1/8^k$. $\sigma^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est donc un intervalle *ouvert* contenant $\sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Il est maintenant facile de voir que nous avons la formule suivante :

$$(6) \qquad M = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} (A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times \sigma^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k}).$$

En effet, nous avons évidemment

$$M \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \left(A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times \sigma^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\right).$$

Soit, deuxièmement (x_0, y_0) un point du membre droit de l'égalité (6). Alors, il existe, pour chaque k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, un système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tel que $x_0 \in A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Si $(x_0, y_0) \bar{\in} M$, il existe un intervalle $[y_1, y_2]$ contenant y_0 dans son intérieur et qui jouit de la propriété: la section de M engendrée par le point $(x_0, 0)$ ne contient aucun point de $[y_1, y_2]$.

Or, si k est un indice assez élevé, $\sigma^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et, à plus forte raison, $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est contenu dans $[y_1, y_2]$ puisqu'il contient y_0 et tend vers y_0 lorsque k augmente indéfiniment. Par suite, $x_0 \bar{\in} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, contrairement au résultat indiqué plus haut. Cela montre que (x_0, y_0) appartient à M, et par suite que nous avons

$$M \supseteq \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} (A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times \sigma^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k}).$$

La formule (6) montre bien que M appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta}$; c. q. f. d.

Corollaire 2. *Soit M un ensemble situé dans un espace $R \times S$, où R et S sont des espaces métriques, séparables et complets*[1]. *Désignons par $\Gamma(M)$ l'ensemble de tous les points x_0 de l'espace R tels que la partie commune à M et à l'ensemble $x_0 \times S$ soit compacte en soi*[2]. *Si M est un ensemble borelien, $\Gamma(M)$ est un complémentaire analytique.*

En effet, transformons d'abord l'espace S en un ensemble situé dans l'espace E_ω à une infinité de dimensions de M. M. FRÉCHET, en faisant appel à un théorème de URYSOHN[3]. Cette transformation est biunivoque et bicontinue. Donc, d'après un théorème de M. P. ALEXANDROFF[4], le transformé T de S dans E_ω est un ensemble G_δ: Un sous-ensemble compact en soi de S sera transformé en un sous-ensemble compact en soi de T, et vice versa.

L'ensemble M sera transformé en un ensemble borelien situé dans $R \times E_\omega$. Donc, nous pouvons supposer sans restrendre la généralité que $S = E_\omega$.

---

(1) Voir M. FRÉchet: Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, Paris, 1928. p. 190 et 74.

(2) ibid. p. 69–70.

(3) M. FRÉCHET: loc. cit. p. 82.

(4) Cf. p. ex. C. KURATOWSKI, loc. cit. p. 215.

Considérons deuxièmement la transformation suivante, en désignant les points de l'espace E_ω par leurs coordonnées : $p = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$,

$$q = g(p) = \left(\frac{y_1}{1+|y_1|}, \frac{y_2}{1+|y_2|}, \ldots, \frac{y_n}{1+|y_n|}, \ldots\right).$$

Cette transformation est aussi biunivoque et bicontinue, et par suite nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que les coordonnées de tous les points de M sont inférieures en module à 1.

Soit maintenant C l'ensemble parfait non-dense de Cantor[1], situé dans l'intervalle : $0 \leq x \leq 1$. Tout point x de C possède un développement triadique :

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_k}{3^k} + \cdots,$$

où $c_k = 0$ ou 2. En faisant correspondre ce point x au point y défini par

$$y = \frac{c_1}{2^2} + \frac{c_2}{2^3} + \frac{c_3}{2^4} + \cdots + \frac{c_k}{2^{k+1}} + \cdots,$$

nous obtiendrons une fonction $y = f(x)$ définie et continue pour tous les points de C, dont les valeurs y parcourent tous les points de l'intervalle $I = [0 \leq y \leq 1]$.

Désignons par C^* l'ensemble $C \times C \times C \times \ldots$. qui est une partie de tous les points de E_ω dont chaque coordonnée x_n appartient à C. Faisons correspondre à tout point $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de C^*, le point $q = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ de E_ω. Les points q varient dans un ensemble R_ω de tous les points de E_ω dont toutes les coordonnées y_n satisfont à $|y_n| \leq 1$. En ajoutant la correspondance identique $x_0 = x_0$, $x_0 \in R$, nous avons une transformation qui transforme l'espace $R \times C^*$ en un ensemble $R \times R_\omega$; désignons-la par $(x_0, q) = f(x_0, p)$.

Or, comme nous avons supposé que M est situé dans l'espace $R \times R_\omega$, l'ensemble $E = f^{-1}(M)$ sera situé dans $R \times C^*$. Alors, pour tout point x_0 de R, l'ensemble $(x_0 \times C^*) \cdot E = f^{-1}\{(x_0 \times R_\omega) \cdot M\}$ satisfait à la propriété suivante : *si* $(x_0 \times R_\omega) \cdot M$ *est compact en soi*, $(x_0 \times C^*) \cdot E$

(1) ibid. p. 80.

l'est également, et vice versa. En effet, comme $q = f(p)$ est une transformation univoque et continue[1], si l'ensemble $(x_0 \times C^*) \cdot E$ est compact en soi, $(x_0 \times R_\omega) \cdot M = f\{(x_0 \times C^*) \cdot M\}$ l'est également. Je dis que si, inversement, l'ensemble $(x_0 \times R_\omega) \cdot M$ est compact en soi, $(x_0 \times C^*) \cdot E = f^{-1}\{(x_0 \times R_\omega) \cdot M\}$ l'est également. Pour le voir, supposons que $(x_0 \times R_\omega) \cdot M$ est compact en soi, et soit (x_0, t_k) une suite infinie des points de $(x_0 \times C^*) \cdot E$. Posons $(x_0, s_k) = f(x_0, t_k)$. Il existe alors une suite partielle (x_0, s_{k_m}) $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ de (x_0, s_k) et un point (x_0, s) de $(x_0 \times R_\omega) \cdot M$, tels que $\lim_{m \to \infty} (x_0, s_{k_m}) = (x_0, s)$.

Posons $t_{k_m} = (x_1^{k_m}, x_2^{k_m}, x_3^{k_m}, \ldots, x_n^{k_m}, \ldots)$. Nous avons $|x_n^{k_m}| \leq 1$. Par suite, t_{k_m} est une suite bornée[2], et il existe une suite partielle $t_{k'_m}$ qui converge vers a un point $t = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Comme C^* est fermé, $t \in C^*$ et nous avons $\lim_{m' \to \infty} x_n^{k_{m'}} = x_n$, pour tout n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

La fonction $f(x)$ étant continue, nous avons $\lim_{m' \to \infty} f(x_n^{k_{m'}}) = f(x_n)$, ou bien $\lim_{m' \to \infty} (x_0, s_k^{m'}) = f(x_0, t)$. Donc, $(x_0, s) = f(x_0, t)$. D'autre part, comme $(x_0, s) \in (x_0 \times R_\omega) \cdot M$, nous avons

$$(x_0, t) \in (x_0 \times C^*) \cdot E .$$

L'ensemble $(x_0 \times C^*) \cdot E$ est donc compact en soi.

Ainsi, l'ensemble $\Gamma(M)$ coïncide avec $\Gamma(E)$. Par conséquent, nous pouvons supposer, sans affecter la généralité, que l'ensemble M est situé dans $R \times C^*$.

Enfin, d'après un théorème de M. C. KURATOWSKI[3], C^* est homéomorphe à C. Par conséquent, nous pouvons transformer l'espace $R \times C^*$ en $R \times C$ par une transformation biunivoque et bicontinue qui laisse invariants les points de R. Donc, nous pouvons supposer enfin que l'ensemble M est situé dans l'espace $R \times C$.

D'ailleurs, nous pouvons considérer l'espace R lui-même comme sous-ensemble d'une droite. En effet, il existe un sous-ensemble F de N, fermé relativement à N, et une homéomorphie généralisée de classe (0, 1)[4]. Nous n'avons qu'à ajouter à cette transformation la

(1) Il faut remarquer que la transformation inverse $f^{-1}(x_0, q)$ n'est pas univoque
(2) Voir M. FRÉCHET : loc. cit. p. 118.
(3) C. KURATOWSKI : Topologie I, p. 148 et p. 79-80.
(4) ibid. p. 226. Corollaire.

correspondance identique $y = y\,(y \in C)$ pour avoir une homéomorphie généralisée entre $R \times C$ et $F \times C$.

Comme l'ensemble de Cantor C est borné et fermé, le Théorème 11 montre bien que $\Gamma(M)$ est un complémentaire analytique. Le Corollaire 2 est ainsi démontré.

Remarquons que nous ne pouvons pas remplacer la condition d'être compact en soi qui est imposée aux sections de M par celle d'être fermé et non vide.

Corollaire 3. *Soient R et S deux espaces cartésien aux nombres finis de dimensions. Étant donné un ensemble M situé dans l'espace $R \times S$, désignons par $\Gamma(M)$ l'ensemble de tous les points x_0 de R tels que $(x_0 \times S) \cdot M$ sont fermés et non vides. Si M est un ensemble borelien, $\Gamma(M)$ est un complémentaire analytique.*

En effet, désignons par $G^*(M)$ l'ensemble de tous les points x_0 de R, tels que $(x_0 \times S) \cdot M$ ne soient pas fermés. D'après un théorème de M. W. SIERPIŃSKI déjà cité, $G^*(M)$ est un ensemble analytique.

Désignons par R_n les carrés fermés situés dans l'espace $R \times S$, dont les centres coïncident avec l'origine de $R \times S$, et dont les côtés ont la longueur $2n$. Alors, nous avons une formule évidente :

$$\Gamma(M) = CG^*(M) \cdot \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(M \cdot R_n)\right\}$$

et d'après le Corollaire 2, $\Gamma(M \cdot R_n)$ est un complémentaire analytique. c. q. f. d.

Corollaire 4. *Soient R et S deux espaces cartésiens aux nombres finis de dimensions. Étant donne un ensemble M situé dans l'espace $R \times S$, désignons par $\Theta(M)$ l'ensemble de tous les points x_0 de R tels que la partie commune $(x_0 \times S) \cdot M$ est non vide et simultanément F_σ et G_δ. Si M est borelien, $\Theta(M)$ est un complémentaire analytique.*

En effet, comme l'espace est séparable, nous pouvons choisir un système de voisinages : (1) $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$. dits bases de l'espace S, qui jouit de la propriété suivante : tout ensemble ouvert est une somme d'une suite partielle de (1). Or, pour que l'ensemble $(x_0 \times S) \cdot M$ soit un ensemble non vide et simultanément F_σ et G_δ, il faut qu'il existe un voisinage V_n où $(x_0 \times \bar{V}_n) \cdot M$ est fermé et non vide[1]. Donc.

$$\Theta(M) \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left\{(R \times \bar{V}_n) \cdot M\right\}.$$

(1) Cf. p. ex. C. KURATOWSKI : Topologie I, p. 65 et 207.

D'autre part, il est facile de voir que l'ensemble $\Pi(M)$ de tous les points x_0 de R tels que $(x_0 \times S) \cdot M$ soit simultanément F_σ et G_δ (vide ou non) est un complémentaire analytique[1]. Et enfin, en vertu de la formule évidente :

$$\Theta(M) = \Pi(M) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left\{(R \times \overline{V}_n) \cdot M\right\},$$

nous voyons bien que $\Theta(M)$ est un complémentaire anaytique.

Corollaire 5. *Soient R et S deux espaces cartésiens aux nombres finis de dimensions. Si l'ensemble M situé dans l'espace $R \times S$ est borelien et si toutes les intersections de M avec les hyper-espaces $x \times S$, $x_0 \in R$ sont des ensembles simultanément F_σ et G_δ, la projection de M sur l'espace R est un ensemble borelien.*

§ 10. Applications des Théorèmes de sections fermées.

1. *Les points inférieurs des ensembles et l'uniformisation des ensembles boreliens.* Étant donné un ensemble M situé dans le plan OXY, nous disons qu'un point (x_0, y_0) de M est *un point inférieur de M*, s'il n'existe aucun point (x_0, y) de M ayant l'ordonnée y inférieure à y_0. L'ensemble de tous les points inférieurs de M sera désigné par $M^{(m)}$. M. S. MAZURKIEWICZ a démontré[2] que si M est un ensemble borelien, $M^{(m)}$ est un complémentaire analytique. Mais, dans ce cas général, l'ensemble $M^{(m)}$ peut être non borelien. Pour le voir, il suffit de prendre un ensemble A, analytique et non borelien, situé sur l'axe OX, et de considérer, l'ensemble plan E défini par

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} (A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times \sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) \right\},$$

où $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont des ensembles linéaires fermés tels que $A = \sum_{\nu} \prod_{k} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et $\sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_1, n_1, 1, n_2, \ldots, 1, n_k$. Si $E^{(m)}$ est borelien, l'ensemble A, comme projection uniforme de l'ensemble borelien $E^{(m)}$, lui-même serait un ensemble borelien contrairement à l'hypothèse.

En vertu des Théorèmes des sections fermées, nous pouvons maintenant donner une condition pour que $M^{(m)}$ soit un ensemble borelien.

---

(1) Cf. p. ex. Contribution (I), p. 182, et D. MONTGOMERY : Properties of plane sets and functions of two variables, Amer. J. Math. 56, (1934), p. 576.

(2) S. MAZURKIEWICZ : Sur une propriété des ensembles $C(A)$. Fund. Math. t. X, (1927), p. 172-174.

Théorème 12. *Si M est un ensemble borelien situé dans le plan OXY et si la partie commune à M et à toute droite parallèle à l'axe OY est toujours fermée, l'ensemble $M^{(m)}$ est borelien.*

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que l'ensemble $M-M^{(m)}$ est borelien. Or, pour qu'un point (x_0, y_0) de M appartienne à $M-M^{(m)}$, il faut et il suffit qu'il existe un nombre rationnel r, $r<y_0$ et un point (x_0, y) de M tel que $y<r$. Désignons par M_r et M'_r l'ensemble de tous les points (x, y) de M tels que $y<r$ et $y>r$ respectivement :

$$M_r = M\cdot(OX\times[y<r]),\quad M'_r = M\cdot(OX\times[y>r]),$$

où l'on désigne par $[y<r]$ l'intervalle ouvert $-\infty<y<r$ et par $[y>r]$ celui de $+\infty>y>r$. M_r et M'_r sont des ensembles boreliens, dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont des produits des ensembles fermés et des intervalles ouverts, ceux-ci appartenant à F_σ et à G_δ simultanément. Par conséquent, d'après le Corollaire 5 du Théorème 11, la projection sur l'axe OX de M_r, soit désigné par P_r, est toujours un ensemble borelien.

Ainsi, la formule évidente :

$$M-M^{(m)} = \sum_r M'_r\cdot(P_r\times OY)$$

montre bien que l'ensemble $M-M^{(m)}$ est un ensemble borelien. c. q. f. d.

MM. N. Lusin et W. Sierpiński[1] ont considéré l'uniformisation des ensembles boreliens, et ont montré que tout ensemble plan borelien peut être uniformisé par un complémentaire analytique. M. N. Lusin a remarqué d'ailleurs que tout ensemble borelien en général ne peut être uniformisé par un ensemble borelien, mais il en est ainsi, si l'ensemble avisé jouit de la propriété : toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY ne contiennent qu'au plus une infinité dénombrable de points.

En vertu du Théorème 12, nous pouvons maintenant donner une autre condition pour qu'un ensemble borelien situé dans le plan peut être uniformisé par un ensemble de la même nature.

---

(1) N. Lusin : Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles. Mathematica. Vol. IV. 1930. p. 54-66. W. Sierpinski : Sur l'uniformisation des ensembles mesurables (B), Fund. Math. t. XVI, p. 136-139.

Corollaire. *Soit M un ensemble borelien situé dans le plan OXY. Si toutes les intersections de M avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles fermés et bornés, l'ensemble M peut être uniformisé par un ensemble borelien.*

En effet, il nous suffit de considérer l'ensemble $M^{(m)}$. Puisque toutes les intersections de M par les droites parallèles à l'axe OY sont fermées, il existe nécessairement un point inférieur pour toute section qui n'est pas vide. Donc, l'ensemble $M^{(m)}$ est un uniformisateur de M. Or, en vertu du Théorème 12, $M^{(m)}$ est un ensemble borelien, c. q. f. d.

2. Les fonctions implicites. Considérons une fonction implicite définie par l'équation :

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

où $f(x, y)$ est une fonction représentable analytiquement de deux variables x, y. Les points (x, y) qui satisfont à l'équation (1) forment un ensemble borelien M qui est situé dans le plan OXY.

Supposons que toutes les intersections de l'ensemble M par les droites parallèles à l'axe OY sont fermées et bornées. Dans ce cas, nous pouvons former des solutions $y = \varphi(x)$ de l'équation (1) comme il suit: soit E la projection de M sur l'axe OX. À tout point x_0 de E, faisons correspondre deux valeurs, soient $\varphi_1(x_0)$ et $\varphi_2(x_0)$, valeurs minimum et maximum des y telles que $(x_0, y) \in M$. L'intersection de M par la droite $x = x_0$ parallèle à l'axe OY se trouve dans l'intervalle fermé $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$. Nous appelons ces deux fonctions $y = \varphi_1(x)$ et $y = \varphi_2(x)$ *les solutions minimum et maximum respectivement de l'équation (1).* Leurs domains d'existence coïncident avec l'ensemble E.

Or, d'après le Corollaire 1 du Théorème 11, E est un ensemble borelien. D'autre part, pour qu'une fonction $y = \varphi(x)$ soit représentable analytiquement, il faut et il suffit que l'image de cette fonction dans le plan OXY soit un ensemble borelien[1]. Or, l'image de la fonction $y = \varphi_1(x)$ coïncide exactement avec l'ensemble $M^{(m)}$ de tous les points inférieurs de M. Mais, d'après le Théorème 12, $M^{(m)}$ est un ensemble borelien. Par suite, la fonction $y = \varphi_1(x)$ est une fonction représentable analytiquement. De même, la fonction $y = \varphi_2(x)$ est de la même nature. Ainsi, nous avons le

(1) Voir p. ex. C. KURATOWSKI, Topologie I. p. 183, VII; p. 253, V; et p. 187.

Théorème 13. *Si les points* (x, y) *du plan* OXY *qui satisfont à l'équation* (1) *forment un ensemble* M *jouissant de la propriété: toutes les intersections par les droites parallèles à l'axe* OY *sont des ensembles fermés et bornés, l'équation* (1) *admet les solutions minimum et maximum qui sont des fonctions représentables analytiquement. Leurs domaines d'existence est un ensemble borelien.*

M. H. LEBESGUE a étudié le cas fondamental où l'ensemble M est uniforme par rapport à l'axe OY, et a montré que pour ce cas deux lois suivants sont valables : (1)

(L_1) Le domaine d'existence E de la solution est un ensemble borelien ;

(L_2) La solution est une fonction représentable analytiquement. M. N. LUSIN(2) a examiné le cas où toutes les intersections de M par les droites parallèles à l'axe OY sont constituées par une infinité dénombrable de points au plus, et a montré que, même dans ce cas, les deux lois ci-dessus subsistent encore.

Le Théorème 13 dit que, dans notre cas aussi, les deux lois de M. H. LEBESGUE ont lieu. Il faut remarquer que les choix de deux solutions $y = \varphi_1(x)$ et $y = \varphi_2(x)$ sont indépendants de la représentation de l'ensemble M, ceci à lieu naturellement dans le cas fondamental de M. H. LEBESGUE.

Considérons maintenant l'équation :

$$f(x, y_1, y_2) = 0 , \tag{2}$$

où $f(x, y_1, y_2)$ est une fonction représentable analytiquement de trois variables x, y_1, y_2 qui satisfait à la condition : si l'on désigne par M l'ensembles de tous les points (x, y_1, y_2) de l'espace OXY_1Y_2 où l'on à $f(x, y_1, y_2) = 0$, toutes les intersections de M par les plans parallèles à OY_1Y_2, sont fermées et bornées.

Nous allons choisir une solution de l'équation (2) comme il suit : La projection P_1 de l'ensemble M sur le plan OXY_1 est un ensemble borelien (Corollaire 5 du Théorème 11). Toutes les intersections de P_1 par les droites parallèles à l'axe OY_1 sont des ensembles fermés et bornés. Donc, en vertu du Théorème 12, l'ensemble $P_1^{(m)}$ est un ensemble borelien, et il détermine une fonction représentable analy-

(1) H. LEBESGUE : Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de Mathematiques, (6), Vol. 1, 1905, p. 192. Cf. aussi N. LUSIN, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930, p. 229.

(2) N. LUSIN, loc. cit. p. 237-247.

tiquement : $y_1 = \varphi(x)$. Ensuite, $P_1^{(m)} \times OY_2$ ainsi que $M \cdot (P_1^{(m)} \times OY_2)$ sont des ensembles boreliens, qui sont uniformes par rapport à l'axe OY_1. La projection Q_2 de $M \cdot (P_1^{(m)} \times OY_2)$ sur le plan OXY_2 est un ensemble borelien dont toutes les intersections par les droites parallèles à l'axe OY_2 sont fermées et bornées. Donc, $Q_2^{(m)}$ est un ensemble borelien et détermine une fonction représentable analytiquement : $y_2 = \psi(x)$. Ces deux fonctions $y_1 = \varphi(x)$, $y_2 = \psi(x)$ forment une solution de (2). Leurs domaines d'existence E coïncident avec la projection de M sur l'axe OX. En vertu du Corollrire 5 du Théorème 11, E est un ensemble borelien.

On voit bien que, dans ce cas encore, les deux lois de M. H. LEBESGUE subsistent, et nous avons un choix de solution indépendant de la représentation de l'ensemble M.

(à suivre).