



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE HÖHERER ORDNUNG III. ERWEITERTE PARAMETERTRANS- FORMATIONEN UND TENSOREN1)
Author(s)	Kawaguchi, Akitsugu
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 10(2-3), 077-156
Issue Date	1941
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55959
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_10_N2-3_077-156.pdf



DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE HÖHERER ORDNUNG III. ERWEITERTE PARAMETERTRANS- FORMATIONEN UND P-TENSOREN¹⁾

Von

Akitsugu KAWAGUCHI

INHALT

	SEITE
Einleitung	77
§ 1. Parametertransformationen	80
§ 2. Die Zulässigkeitsbedingung bei einigen Parametertransfor- mationen	89
§ 3. P -Skalardichte und die Operatoren Δ_H	95
§ 4. Die Überschiebungen D_λ und D^λ	106
§ 5. Die Eigenschaft von P -Vektoren und der SYNGESchen Vektoren .	116
§ 6. Die erweiterten Parametertransformationen und $\mathfrak{P}$ -Vektoren . .	128
§ 7. Die Differentialformen unter Parametertransformationen . . .	137
§ 8. Die kovarianten Ableitungsdifferentialformen	147
Literaturverzeichnis	154

Einleitung

In der Differentialgeometrie höherer Ordnung, besonderes in der sogenannten intrinsiken Theorie, spielen Parametertransformationen eben so wie Koordinatentransformationen eine wichtige Rolle. Die Grundlegung der Theorie von erweiterten Koordinatentransformationen war das Hauptziel der ersten Abhandlung mit demselben Titel²⁾. Also muss jetzt die Theorie der Parametertransformationen von uns behandelt werden. In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns daher mit der systematischen Entwicklung der letzten Theorie, die uns die mächtigsten und nötigsten Hilfsmittel

1) Diese Forschung wurde auf Kosten der *Beihilfe des Unterrichtsministeriums für wissenschaftliche Forschung* ausgeführt.

2) A. KAWAGUCHI [23]. Diese Abhandlung bezeichnen wir im Folgenden einfachheitshalber mit D.H. I. Die Zahlen in eckiger Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Abhandlung.

bei der Untersuchung der intrinsiken Differentialgeometrie höherer Ordnung an die Hand gibt.

Eine Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ führt die ν -te Ableitung $f^{(\nu)}$ einer Funktion $f(t)$ des Parameters t in eine lineare Form der sukzessiven Ableitungen

$$f^{(\bar{\nu})} = \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu}^{\nu} f^{(\mu)}$$

über, wo die Koeffizienten a_{μ}^{ν} nur von den sukzessiven Ableitungen der Transformationsfunktion $\bar{t}(t)$ abhängig sein sollen. Diese Form der Parametertransformation lässt sich z.B. auf ein Linienelement höherer Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ in einem n -dimensionalen Raume mit den Koordinaten x^i anwenden:

$$x^{(\bar{\nu})i} = \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu}^{\nu} x^{(\mu)i}.$$

Die Grundformeln, welche die Struktur der Koeffizienten a_{μ}^{ν} einer Parametertransformation klar machen, stellen sich in §1 vor. Und alsdann definiert sich ein P -Vektor so, dass seine Bestimmungszahlen sich bei jeder Parametertransformation genau so wie die sukzessiven Ableitungen $f^{(\nu)}$ linear in den Koeffizienten a_{μ}^{ν} verändern.

Wenn eine Funktion $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ des Parameters t und eines Linienelementes höherer Ordnung bei einer Parametertransformation in $\bar{f}(\bar{t}, x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})})$ übergeht, und wenn die beiden Funktionen f und $\bar{f}$ dabei in ihrer funktionalen Form bezüglich jeder der entsprechenden Argumente eben dieselben sind, bis auf nur eine Potenz der Ableitung $d\bar{t}/dt$ als Faktor, dann sagen wir, dass die Funktion f die Parametertransformation zulässt. In §2 diskutieren wir die Zulässigkeitsbedingung einer Funktion des Parameters t und eines Linienelementes höherer Ordnung gründlich, wobei die in der vorhergehenden Abhandlung¹⁾ eingeführten Operatoren Δ_H die wichtigste Rolle spielen.

Mit Hilfe der Operatoren Δ_H werden in §3 die verschiedenen Eigenschaften von P -Skalardichten sowie von P -Vektordichten erörtert. Unter einer P -Skalardichte vom Gewichte α verstehen wir hierbei eine Funktion eines Linienelementes höherer Ordnung, welche jede Parametertransformation mit einer festen Gewichtszahl zulässt.

1) - D. H. I.

§ 4 liefert eine Art von Überschiebungen D_λ oder D^λ von P -Vektoren, welche aus zwei beliebigen P -Vektoren, von denen einer kontra- und der andere kovariant ist, einen neuen kontra- oder kovarianten P -Vektor aufbauen.

§ 5 behandelt die kontra- und kovarianten P -Vektoren A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$, die sich aus einer P -Skalardichte vom Gewichte eins und ihren Ableitungen nach dem Parameter t bilden lassen. Eine P -Skalardichte vom Gewichte eins, die uns die Metrik eines sogenannten intrinsiken KAWAGUCHISchen Raumes liefert, ist besonders bedeutungsvoll. Mittels dieser P -Vektoren A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ können wir aus den Bestimmungszahlen jedes P -Tensors $\overset{\mu}{T}$ immer die Grössen bilden, die bei jeder Parametertransformation unverändert bleiben. Zum Beispiel erhalten wir aus den sogenannten SYNGESchen Vektoren, die bei Parametertransformationen im allgemeinen nicht invariant sein mögen, die intrinsiken SYNGESchen Vektoren. Noch weitere Eigenschaften der SYNGESchen Vektoren werden in § 5 eingehend behandelt.

Alsdann fassen wir in § 6 eine Variation eines Linienelementes höherer Ordnung ins Auge und führen als eine erweiterte Parametertransformation eine Transformation der Variation ein, die durch eine Parametertransformation veranlasst wird und eine Bedingung erfüllt. Die Gruppe von erweiterten Parametertransformation macht eine Verallgemeinerung des Begriffes von P -Vektoren (folglich auch P -Tensoren) möglich, und $\mathfrak{P}$ -Vektoren treten dadurch auf. Verschiedene Eigenschaften von $\mathfrak{P}$ -Vektoren kann man auch in § 6 auffinden.

Wir legen die Frage vor: Wie verhält sich unter erweiterten Parametertransformationen eine Differentialform von Linienelementen höherer Ordnung, d.h. eine homogene ganze Funktion von Variationen von Linienelementen höherer Ordnung, deren Koeffizienten auch von einem Linienelemente höherer Ordnung abhängen mögen? § 7 widmet sich der Untersuchung dieser Frage.

Wir können aus einer P -(oder $\mathfrak{P}$ -) Tensordichte T eine $\mathfrak{P}$ -Tensordichte $T_{;\rho}$ (d) mittels der von den P -Vektoren A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ ausgeführten Differentialformen $A_{\beta\gamma}^\alpha(d)$ ableiten, wie es in § 8 gezeigt ist. Auf diesem Grund dürfen wir $T_{;\rho}(d)$ als die kovarianten Ableitungen der P -(oder $\mathfrak{P}$ -) Tensordichte T auffassen, wobei die Übertragungsparameter durch $A_{\beta\gamma}^\alpha(d)$ gegeben sind. Dabei verschwindet immer die aus $A_{\beta\gamma}^\alpha(d)$ gebildete Grösse $\Delta_{\beta\rho_1\rho_2}^\alpha(d_1, d_2)$ identisch, die als P -Krümmungstensor der P -Übertragung $A_{\beta\gamma}^\alpha(d)$ angesehen werden soll.

Man soll sich hier noch doch die folgende Tatsache tief einprägen. Es erfordert wirklich viele Vorbereitungen, die fundamentale und eigentliche Theorie der Differentialgeometrie im Raume höherer Ordnung aufzustellen. Die in der vorliegenden Abhandlung aufgestellte Theorie liefert dafür nichts anderes als eine Vorbereitung, die meinst formal sein wird, und die hier entwickelte Analyse liefert uns eine festere Basis, von der die eingehende Untersuchung der Differentialgeometrie im Raume höherer Ordnung zu ermöglichen ist.

Es soll noch eine Bemerkung hinzugefügt werden. In der vorliegenden Abhandlung ist nur der Fall von einem einzigem Parameter t behandelt worden. Aber es ist auch möglich, den Fall von mehreren Parametern z.B. $u^1, u^2, \dots, u^K$ zu behandeln. Und die beinahe analoge Theorie wird durch denselben Gedankengang sowie dieselbe Methode wie in der vorliegenden Abhandlung leicht entwickelt. Die letzt genannten Theorie möchte der Verfasser in einer anderen Abhandlung irgendwo veröffentlichen.

§ 1. Parametertransformationen.

1. Es liege eine Mannigfaltigkeit M -ter Ordnung $K_N^{(M)}$ zu Grunde, welche als geometrisches Element ein Linienelement M -ter Ordnung in einem N -dimensionalen Raume besitzt¹⁾. In diesem Raume ziehen wir dann eine parametrisierte d.h. einem bestimmten Parameter adjungierte Kurve $x^i = x^i(t)$ in Betracht und setzen die Regularität der Funktionen $x^i(t)$ im betreffenden Bereich vom Parameter t und ihre Ableitungen dx^i/dt nicht sämtlich verschwindend voraus, dann gibt es ein Linienelement M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ ²⁾ längs der Kurve für jeden Wert von t . Längs einer Kurve selbst ist die Parametrisierung nicht wesentlich und ganz beliebig wählbar, d.h. wir dürfen $\bar{t} = \bar{t}(t)$ statt des alten Parameters t als neuen Parameter annehmen, während $\bar{t}(t)$ eine beliebige analytische Funktion vom Parameter t ist und ihre Ableitung $d\bar{t}/dt$ nicht im betreffenden Bereich verschwindet. Bei dieser Parametertransformation geht ein Linienelement M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ längs der Kurve in ein neues Linienelement M -ter Ordnung $(x^i, x^{(\bar{1})i}, \dots, x^{(\bar{M})i})$ längs derselben

1) Vgl. D.H. I, S. 14.

2) Wir setzen einfachheitshalber in dieser Abhandlung durchweg $x^{(\nu)i} = \frac{d^\nu x^i}{dt^\nu}$.
Vgl. D.H. I, S. 14.

Kurve über, und wir erkennen dabei leicht, dass die Ableitungen $x^{(\bar{\nu})i}$ nach dem neuen Parameter $\bar{t}$ durch dieselben $x^{(\mu)i}$ nach dem alten Parameter t und auch umgekehrt $x^{(\mu)i}$ durch $x^{(\bar{\nu})i}$ linear dargestellt werden. In der Tat, wir haben

$$(1.1a) \quad \begin{aligned} x^{(\bar{1})i} &= \frac{dt}{d\bar{t}} x^{(1)i} = t^{(\bar{1})} x^{(1)i}, \\ x^{(\bar{2})i} &= t^{(\bar{1})2} x^{(2)i} + t^{(\bar{2})} x^{(1)i}, \\ x^{(\bar{3})i} &= t^{(\bar{1})3} x^{(3)i} + 3 t^{(\bar{2})} t^{(\bar{1})} x^{(2)i} + t^{(\bar{3})} x^{(1)i}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

setzend $t^{(\bar{\nu})} = \frac{d^\nu t}{d\bar{t}^\nu}$, im allgemeinen

$$(1.1) \quad x^{(\bar{\nu})i} = \alpha_\mu^\nu x^{(\mu)i} \quad (\text{summieren über } \mu = 1, 2, \dots, \nu)^{1)}$$

und umgekehrt

$$(1.2) \quad x^{(\mu)i} = \bar{\alpha}_\nu^\mu x^{(\bar{\nu})i},$$

wo α_μ^ν bzw. $\bar{\alpha}_\nu^\mu$ rationale Funktionen von

$$t^{(\bar{\alpha})} = \frac{d^\alpha t}{d\bar{t}^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu) \quad \text{bzw.} \quad \bar{t}^{(\beta)} = \frac{d^\beta \bar{t}}{dt^\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, \mu)$$

sind. Es besteht offenbar

$$(1.3) \quad \alpha_\nu^\mu = 0, \quad \bar{\alpha}_\nu^\mu = 0 \quad \text{für } \mu < \nu.$$

Setzen wir die rechte Seite von (1.2) an Stelle von $x^{(\mu)i}$ in (1.1) ein, dann geht (1.1) in die Gestalt

$$x^{(\bar{\nu})i} = \alpha_\mu^\nu \bar{\alpha}_\lambda^\mu x^{(\bar{\lambda})i}$$

über, daraus folgt sogleich

$$(1.4) \quad \alpha_\mu^\nu \bar{\alpha}_\lambda^\mu = \delta_\lambda^\nu \quad \text{oder} \quad \alpha_\mu^\nu \alpha_\lambda^\mu = \delta_\lambda^\nu.$$

1) In dieser Abhandlung lassen wir durchweg das Summationszeichen aus, wie in der Tensor-analysis, wenn dieselben *kleinen* Buchstaben als Indizes gerade zweimal d.h. einmal oben und ein anderes mal unten erscheinen, soweit nicht anderes gesagt wird. Von den *grossen* Buchstaben oder den kleinen Indizes, die additive Zusätze besitzen, wird dagegen jedes Glied nicht summiert, wenn das Glied das Summationszeichen nicht bekommt.

Da die Determinante $|a_\mu^\nu|$, welche a_μ^ν ($\nu, \mu = 1, 2, \dots, K$) als Elemente besitzt, wegen der Beziehungen (1.1) und (1.3) der Potenz $(t^{(\bar{1})})^{\frac{1}{2}K(K+1)}$ gleich ist, so ist die Determinante gemäss der Voraussetzung $t^{(\bar{1})} \neq 0$ nicht identisch gleich Null. Deshalb bestimmen sich $\bar{a}_\mu^\nu$ durch a_μ^ν nach (1.4).

Differenziert man (1.1) nach $\bar{t}$, so ergibt sich

$$x^{(\overline{\nu+1})i} = \frac{da_\mu^\nu}{d\bar{t}} x^{(\mu)i} + a_\mu^\nu \frac{dt}{d\bar{t}} x^{(\mu+1)i} = (a_\mu^{\nu(\bar{1})} + a_{\mu-1}^\nu t^{(\bar{1})}) x^{(\mu)i}.$$

Andererseits hat man $x^{(\overline{\nu+1})i} = a_\mu^{\nu+1} x^{(\mu)i}$ nach (1.1), somit lautet die Beziehung

$$(1.5) \quad a_\mu^\nu = a_\mu^{\nu-1(\bar{1})} + a_{\mu-1}^{\nu-1} t^{(\bar{1})} \quad \text{für } \nu > \mu > 1.$$

Weiterhin ist es nicht schwer zu sehen, dass

$$(1.6) \quad \begin{aligned} a_\nu^\mu &= \left(\frac{dt}{d\bar{t}} \right)^\mu = t^{(\bar{1})\mu} & \text{für } \mu = \nu \\ &= \frac{d^\mu t}{d\bar{t}^\mu} = t^{(\bar{\mu})} & \text{für } \nu = 1. \end{aligned}$$

2. Die oben erwähnten Beziehungen liefern den wichtigsten

Satz 1. Die Funktionen a_μ^λ von $t^{(\bar{1})}$, $t^{(\bar{2})}$, ... erfüllen die Beziehungen

$$(1.7) \quad \frac{\partial a_\mu^\lambda}{\partial t^{(\bar{\nu})}} = \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, \lambda - \mu + 1$$

$$(1.8) \quad = 0 \quad \text{für } \nu > \lambda - \mu + 1,$$

$$(1.9) \quad a_0^\lambda = \delta_0^\lambda, \quad a_\lambda^\lambda = \delta_\lambda^\lambda$$

ausser (1.3) und (1.6), und die Funktionen $\bar{a}_\mu^\lambda$ Analoges.

Beweis. Wir benutzen die Induktion, den Satz zu beweisen. Erstens können wir ohne weiteres die Richtigkeit von (1.8) und (1.9) nach der Definition (1.1) von a_μ^λ wegen (1.1a) erkennen, da $x^{(\bar{\nu})i}$ nur von $x^{(\mu)i}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) aber nicht von x^i selbst abhängig ist und $x^{(0)i} = x^i = x^{(\bar{0})i}$, und da die in a_μ^λ enthaltene höchste Ableitung von $t^{(\bar{\lambda}-\mu+1)}$ sein soll.

Zweitens setzen wir die Richtigkeit von (1.7) für die Werte $\mu = 1, 2, \dots, b$; $\lambda = \mu, \mu+1, \dots, a$; $\nu = 1, 2, \dots, a$ voraus, während a und b irgend zwei feste ganze Zahlen sind. Setzen wir $\lambda+1$ an Stelle von ν in (1.5) und differenzieren die erhaltene Beziehung nach $t^{(\bar{\nu})}$, so haben wir wegen der Voraussetzung, wenn wir (1.7) berücksichtigen, für $\nu > 1$

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda+1}}{\partial t^{(\nu)}} &= \frac{\partial}{\partial t^{(\nu)}} (a_{\mu}^{\lambda(\bar{i})} + a_{\mu-1}^{\lambda} t^{(\bar{i})}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t^{(\nu)}} \left(\sum_{\rho=1}^{\lambda-\mu+1} \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\rho)}} t^{(\bar{\rho}+1)} + a_{\mu-1}^{\lambda} t^{(\bar{i})} \right) \\
 &= \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\nu-1)}} + \sum_{\rho=1}^{\lambda-\mu+1} \frac{\partial}{\partial t^{(\rho)}} \left(\frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\nu)}} \right) t^{(\bar{\rho}+1)} + \frac{\partial a_{\mu-1}^{\lambda}}{\partial t^{(\nu)}} t^{(\bar{i})} \\
 &= \binom{\lambda}{\nu-1} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu+1} + \sum_{\rho=1}^{\lambda-\mu+1} \frac{\partial}{\partial t^{(\rho)}} \left\{ \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu} \right\} t^{(\bar{\rho}+1)} \\
 &\quad + \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-2}^{\lambda-\nu} t^{(\bar{i})} \\
 &= \binom{\lambda}{\nu-1} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu+1} + \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu(\bar{i})} + \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-2}^{\lambda-\nu} t^{(\bar{i})}, \\
 &\text{wegen (1.5),} \\
 &= \binom{\lambda}{\nu-1} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu+1} + \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu+1} = \binom{\lambda+1}{\nu} a_{\mu-1}^{\lambda+1-\nu},
 \end{aligned}$$

und für $\nu = 1$

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda+1}}{\partial t^{(\bar{i})}} &= \frac{\partial}{\partial t^{(\bar{i})}} (a_{\mu}^{\lambda(\bar{i})} + a_{\mu-1}^{\lambda} t^{(\bar{i})}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t^{(\bar{i})}} \left(\sum_{\rho=1}^{\lambda-\mu+1} \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\rho)}} t^{(\bar{\rho}+1)} \right) + \frac{\partial a_{\mu-1}^{\lambda}}{\partial t^{(\bar{i})}} t^{(\bar{i})} + a_{\mu-1}^{\lambda} \\
 &= \sum_{\rho=1}^{\lambda-\mu+1} \frac{\partial}{\partial t^{(\rho)}} \left(\frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\bar{i})}} \right) t^{(\bar{\rho}+1)} + \lambda a_{\mu-2}^{\lambda-1} t^{(\bar{i})} + a_{\mu-1}^{\lambda} \\
 &= \lambda (a_{\mu-1}^{\lambda-1(\bar{i})} + a_{\mu-2}^{\lambda-1} t^{(\bar{i})}) + a_{\mu-1}^{\lambda} \\
 &= \lambda a_{\mu-1}^{\lambda} + a_{\mu-1}^{\lambda} = \binom{\lambda+1}{1} a_{\mu-1}^{\lambda},
 \end{aligned}$$

was die Richtigkeit von (1.7) für $\lambda+1$ zeigt. Somit ersehen wir die Richtigkeit von (1.7) für $a+1$, da dieselbe für $\lambda = a+1$, $\nu = a+1$ ver-

sichert werden kann, in der Tat, die Definition (1.1) von a_μ^λ und (1.6) lehren uns

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_\mu^{a+1}}{\partial t^{(a+1)}} &= 0 \quad \text{für } \mu > 1 \quad (\text{nicht summieren über } a) \\ &= 1 (= a_0^0) \quad \text{für } \mu = 1. \end{aligned}$$

Für $\lambda = \mu$ erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_\mu^\lambda}{\partial t^{(\nu)}} &= \frac{\partial (t^{(\bar{1})})^\mu}{\partial t^{(\nu)}} = \mu \delta_\nu^1 (t^{(\bar{1})})^{\mu-1} \\ &= \binom{\mu}{\nu} a_{\mu-1}^{\mu-\nu} \quad (\text{nicht summieren über } \mu). \end{aligned}$$

Daher ist jetzt die Richtigkeit von (1.7) für alle Werte $\lambda = \mu, \mu+1, \dots; \nu = 1, 2, \dots$ (μ fest) klar.

Drittens sei (1.7) für $\mu = b; \lambda = b, b+1, \dots; \nu = 1, 2, \dots$ richtig, dann ergibt sich leicht nach (1.6)

$$\frac{\partial a_{b+1}^{b+1}}{\partial t^{(\nu)}} = \frac{\partial}{\partial t^{(\nu)}} (t^{(\bar{1})})^{b+1} = (b+1) \delta_\nu^1 (t^{(\bar{1})})^b = \binom{b+1}{\nu} a_{b-1}^{b-\nu},$$

was auch die Richtigkeit von (1.7) für $\mu = b+1; \lambda = b+1; \nu = 1, 2, \dots$ zeigt. Unter der Voraussetzung der Richtigkeit von (1.7) für $\mu = b+1; \lambda = b+1, \dots, c; \nu = 1, 2, \dots$ erhalten wir dann gerade nach (1.10) und (1.11) durch die Setzung, $\mu = b+1, \lambda = c$, die Beziehung

$$\frac{\partial a_{b+1}^{c+1}}{\partial t^{(\nu)}} = \binom{c+1}{\nu} a_b^{(c+1)-(b+1)},$$

daraus folgt, dass (1.7) für $\mu = b+1; \lambda = b+1, \dots; \nu = 1, 2, \dots$, folglich auch für alle Werte $\mu = 1, 2, \dots; \lambda = \mu, \mu+1, \dots; \nu = 1, 2, \dots$ wirklich richtig ist. W. z. b. z.

Wegen des letzten Satzes erkennen wir mit Hilfe der Beziehung (1.5)

$$\begin{aligned} a_\mu^\nu &= \sum_{\lambda=1}^{\nu-\mu} \frac{\partial a_{\mu-1}^{\nu-1}}{\partial t^{(\lambda)}} t^{(\lambda+1)} + a_{\mu-1}^{\nu-1} t^{(\bar{1})} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-\mu} \binom{\nu-1}{\lambda} a_{\mu-1}^{\nu-\lambda-1} t^{(\lambda+1)} + a_{\mu-1}^{\nu-1} t^{(\bar{1})} \\ &= \sum_{\lambda=2}^{\nu-\mu+1} \binom{\nu-1}{\lambda-1} a_{\mu-1}^{\nu-\lambda} t^{(\bar{1})} + a_{\mu-1}^{\nu-1} t^{(\bar{1})}, \end{aligned}$$

somit lautet der

Satz 2. Zwischen den Funktionen a_μ^λ gilt die Beziehung

$$(1.12) \quad a_\mu^\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu-\mu+1} \binom{\nu-1}{\lambda-1} a_{\lambda-1}^{\nu-\lambda} t^{(\lambda)} \quad \text{für } \nu \geq \mu \geq 1.$$

Der letzte Satz besagt, dass die Funktion a_μ^λ ein Polynom in den $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(\lambda-\mu+1)}$ ist. Aus dieser Tatsache können wir schliessen

Zusatz. Die Funktion a_μ^λ ist eine rationale Funktion von den $\bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \dots, \bar{t}^{(\lambda-\mu+1)}$, deren Nenner eine ganzzahlige Potenz von $\bar{t}^{(1)}$ ist.

Der Beweis dieses letzten Zusatzes ist nicht schwer. Die Funktion $\bar{a}_\mu^\lambda$ ist nämlich ein Polynom von den $\bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \dots, \bar{t}^{(\lambda-\mu+1)}$, was durch Vertauschung von t und $\bar{t}$ wegen Satz 2 sogleich folgt. (1.4) zeigt andererseits, dass die Matrizen $(\bar{a}_\mu^\lambda)$ und (a_λ^μ) zueinander invers sind. Somit stellt a_μ^λ sich durch einen Bruchausdruck dar, dessen Zähler eine rationale ganze Funktion von den $\bar{a}_\omega^\nu$ ($\nu, \omega = 1, 2, \dots, \lambda$) und dessen Nenner die Determinante $|\bar{a}_\mu^\lambda|$ ist, die nichts anderes als eine ganzzahlige Potenz von $\bar{t}^{(1)}$ ist. Daraus erkennt man die Richtigkeit der Behauptung des Zusatzes.

3. Es sei eine Funktion $f(t)$ vom Parameter t gegeben. Ihre sukzessiven Ableitungen $f^{(\mu)}$ gehen bei jeder Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ offenbar in

$$(1.13) \quad f^{(\bar{\nu})} = a_\mu^\nu f^{(\mu)}$$

über, d.h. jeder Parametertransformation entsprechend kommt immer eine und nur eine Transformation von der Gestalt (1.13) zustande.

Wir betrachten zwei nacheinander durchgeführten Parametertransformationen, $\bar{t} = \bar{t}(t)$ und $\dot{t} = \dot{t}(\bar{t})$, und $\dot{t} = \dot{t}(\bar{t}(t)) \equiv T(t)$ sei ihre Produkttransformation, dann ergeben sich die entsprechenden Transformationen von der Gestalt (1.13):

$$(1.14) \quad f^{(\bar{\nu})} = a_\mu^\nu(t^{(\bar{\alpha})}) f^{(\mu)}, \quad f^{(\dot{\lambda})} = a_\nu^\lambda(\bar{t}^{(\dot{\beta})}) f^{(\bar{\nu})} \quad \text{und} \quad f^{(\dot{\lambda})} = a_\mu^\lambda(t^{(\dot{\gamma})}) f^{(\mu)}.$$

Hiernach gilt die Beziehung

$$f^{(\dot{\lambda})} = a_\nu^\lambda(\bar{t}^{(\dot{\alpha})}) a_\mu^\nu(t^{(\bar{\beta})}) f^{(\mu)} = a_\mu^\lambda(t^{(\dot{\gamma})}) f^{(\mu)},$$

daraus erhält man die Gleichung

$$(1.15) \quad a_\mu^\lambda(t^{(\dot{\gamma})}) = a_\nu^\lambda(\bar{t}^{(\dot{\alpha})}) a_\mu^\nu(t^{(\bar{\beta})}).$$

Andererseits muss die Ableitung $t^{(\tau)}$ bekanntlich durch die Ableitungen $\bar{t}^{(\alpha)}$, $t^{(\beta)}$ ausgedrückt werden können:

$$(1.16) \quad t^{(\tau)} = \phi^{\tau}(\bar{t}^{(\alpha)}, t^{(\beta)}) . .$$

Setzt man die rechte Seite von (1.16) an Stelle von $t^{(\tau)}$ in der linken Seite von (1.15) ein, dann soll die Gleichung (1.15) identisch gelten. Da wir den $\bar{t}^{(\alpha)}$, $t^{(\beta)}$ beliebige Werte geben können, muss die Produkttransformation der ersten zwei Transformationen von (1.14) für beliebig bestimmte Werte von $\bar{t}^{(\alpha)}$, $t^{(\beta)}$ auch eine Transformation von der Gestalt (1.13) sein, deren Koeffizienten die Funktionwerte α_{ν}^{λ} für die durch (1.16) gegebenen festen Werte $t^{(\tau)}$ sind.

Im speziellen Falle $\bar{t} = t$ reduziert sich die Beziehung (1.15) zu

$$\delta_{\mu}^{\lambda} = \alpha_{\nu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\alpha)})\alpha_{\mu}^{\nu}(t^{(\beta)}) ,$$

was nichts anderes als (1.4) ist. Die Produkttransformation ist dabei die identische Transformation und die zwei vorgegebenen Transformationen sind zueinander invers. Diese Tatsachen zusammenfassend, erhält man

Satz 3. *Die Transformationen von der Gestalt (1.1) oder (1.13) bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}_M$, wenn wir den Wert von t fest halten und die diesem Werte entsprechenden Werte von den $\bar{t}^{(\alpha)}$ über alle reelle Werte laufen.*

4. Wir wollen noch einige Identitäten ausführen, die durch die Funktionen α_{μ}^{λ} erfüllt werden. Differenziert man eine Funktion $f(t)$ nach t λ -mal und dann nach $\bar{t}$ μ -mal, wobei $\bar{t}$ eine Funktion von t ist, dann ergibt sich mit Rücksicht auf (1.13)

$$(f^{(\lambda)})^{(\bar{\mu})} = (\bar{\alpha}_{\nu}^{\lambda} f^{(\bar{\nu})})^{(\bar{\mu})} = \sum_{\rho=0}^{\mu} \binom{\mu}{\rho} \bar{\alpha}_{\nu}^{\lambda(\mu-\rho)} f^{(\bar{\nu}+\rho)} .$$

Da im letzten Ausdrucke das Summationszeichen $\sum_{\nu=1}^{\lambda}$ ausgelassen ist, so erhält man, dasselbe einsetzend und dann die Reihenfolge der beiden Summationen vertauschend, die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=0}^{\mu} \sum_{\nu=1}^{\lambda} \binom{\mu}{\rho} \bar{\alpha}_{\nu}^{\lambda(\mu-\rho)} f^{(\bar{\nu}+\rho)} &= \sum_{\rho=0}^{\mu} \sum_{\tau=\rho+1}^{\lambda+\rho} \binom{\mu}{\rho} \bar{\alpha}_{\tau-\rho}^{\lambda(\mu-\rho)} f^{(\bar{\tau})} \quad (\tau = \nu + \rho \text{ gesetzt}) \\ &= \sum_{\tau=1}^{\lambda+\mu} \sum_{\rho=\tau-\lambda}^{\tau-1} \binom{\mu}{\rho} \bar{\alpha}_{\tau-\rho}^{\lambda(\mu-\rho)} f^{(\bar{\tau})} , \end{aligned}$$

daraus bekommt man durch Setzung $\kappa = \tau - \rho$

$$(1.17) \quad (f^{(\lambda)})^{(\bar{\mu})} = \sum_{\tau=1}^{\lambda+\mu} \sum_{\kappa=1}^{\lambda} \binom{\mu}{\tau-\kappa} \bar{a}_{\kappa}^{\lambda(\mu-\tau+\kappa)} f^{(\bar{\tau})},$$

wobei wir unter $\binom{\mu}{\rho}$ für $\mu - \rho < 0$ oder $\rho < 0$ immer Null verstehen sollen. Die Ableitung $(f^{(\lambda)})^{(\bar{\mu})}$ kann auch in anderer Gestalt ausgedrückt werden, nämlich

$$(f^{(\lambda)})^{(\bar{\mu})} = a_{\nu}^{\mu} (f^{(\lambda)})^{(\nu)} = \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa}^{\nu} f^{(\lambda+\kappa)} = \sum_{\kappa=1}^{\mu} \sum_{\tau=1}^{\kappa+\lambda} a_{\kappa}^{\nu} \bar{a}_{\tau}^{\kappa+\lambda} f^{(\bar{\tau})},$$

d.h.

$$(1.18) \quad (f^{(\lambda)})^{(\bar{\mu})} = \sum_{\tau=1}^{\lambda+\mu} \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa}^{\nu} \bar{a}_{\tau}^{\lambda+\kappa} f^{(\bar{\tau})}.$$

(1.17) und (1.18) vergleichend, kommt die Beziehung

$$(1.19) \quad \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa}^{\nu} \bar{a}_{\tau}^{\lambda+\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{\lambda} \binom{\mu}{\tau-\kappa} \bar{a}_{\kappa}^{\lambda(\mu-\tau+\kappa)} = \sum_{\kappa=1}^{\lambda} \sum_{\nu=1}^{\mu-\tau+\kappa} \binom{\mu}{\tau-\kappa} a_{\nu}^{\mu-\tau+\kappa} \bar{a}_{\kappa}^{\lambda(\nu)}$$

zustande. Besonders erhalten wir für $\lambda = 1$

$$(1.20) \quad \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\kappa}^{\nu} \bar{a}_{\tau}^{\kappa+1} = \binom{\mu}{\tau-1} (\bar{t}^{(1)})^{(\mu-\tau+1)} = \sum_{\nu=1}^{\mu-\tau+1} \binom{\mu}{\tau-1} a_{\nu}^{\mu-\tau+1} \bar{t}^{(\nu+1)},$$

da $\bar{a}_1^1 = \bar{t}^{(1)}$ ist.

Die Beziehung (1.20) benützend, erkennt man wegen

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(\mu)}} f^{(\bar{\nu})} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(\mu)}} (a_{\nu}^{\lambda} f^{(\nu)}) = \binom{\lambda}{\mu} a_{\nu-1}^{\lambda-\mu} f^{(\nu)} = \binom{\lambda}{\mu} \sum_{\kappa=0}^{\lambda-\mu} a_{\kappa}^{\lambda-\mu} f^{(\kappa+1)}$$

die Beziehung

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(\mu)}} f^{(\bar{\lambda})} &= \binom{\lambda}{\mu} \sum_{\kappa=0}^{\lambda-\mu} a_{\kappa}^{\lambda-\mu} \bar{a}_{\nu}^{\kappa+1} f^{(\bar{\nu})} \\ &= \binom{\lambda}{\mu} \sum_{\nu=1}^{\lambda-\mu} \sum_{\rho=1}^{\lambda-\mu-\nu+1} \binom{\lambda-\mu}{\nu-1} a_{\rho}^{\lambda-\mu-\nu+1} \bar{t}^{(\rho+1)} f^{(\bar{\nu})}. \end{aligned}$$

Durch Setzung $\bar{t} = t$ in der Beziehung (1.21) geht die Beziehung

$$(1.22) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{(\mu)}} f^{(\bar{\lambda})} \right)_{\bar{t}=t} = \binom{\lambda}{\mu} f^{(\lambda-\mu+1)}$$

hervor, da $(a_{\mu}^{\lambda})_{\bar{t}=t} = \delta_{\mu}^{\lambda}$ sein muss.

5. Die Ableitungen $f^{(\mu)}$ verändern sich bei jeder Parametertransformation nach der Regel (1.13). Im allgemeinen ziehen wir K Funktionen P^μ vom Parameter t in Betracht, die sich bei jeder Parametertransformation genau so wie $f^{(\mu)}$ verhalten:

$$(1.23) \quad P^\nu = a_\mu^\nu P^\mu.$$

Den Inbegriff von diesen K Werten P^μ für irgendeinen Wert von t wollen wir einen *kontravarianten P -Vektor vom Grad K* nennen. Die Werte der sukzessiven Ableitungen $f^{(\mu)}$ einer Funktion $f(t)$ bilden also einen kontravarianten P -Vektor.

Unter einem *kovarianten P -Vektor vom Grad K* verstehen wir dagegen den Inbegriff von K Werten P_μ , die jede Parametertransformation auf

$$(1.24) \quad \bar{P}_\nu = \bar{a}_\nu^\mu P_\mu$$

überträgt.

Ein Beispiel des kovarianten P -Vektors kann man unschwierig auffinden. Es soll im Folgenden behandelt werden. Es sei eine Funktion f , die längs einer Kurve $x^i = x^i(t)$ in intrinsiker Weise definiert ist (d.h. bei jeder Parametertransformation erhalten bleibt) und von einem Linienelemente K -ter Ordnung abhängig ist, dann verändern sich die K partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(\nu)i}} \equiv f_{(\nu)i}, \quad \nu = 1, 2, \dots, K$$

bei jeder Parametertransformation wegen (1.2) folgendermassen:

$$(1.25) \quad f_{(\bar{\nu})i} = f_{(\mu)j} \frac{\partial x^{(\mu)j}}{\partial x^{(\bar{\nu})i}} = f_{(\mu)j} \bar{a}_\nu^\mu \delta_i^j = \bar{a}_\nu^\mu f_{(\mu)i},$$

da $f(x^i(t)) = f(x^i(\bar{t}))$ ist. Die letzte Beziehung bestätigt, dass K Werte von $f_{(\nu)i}$ für jeden Wert von t einen kovarianten P -Vektor angeben.

Nun kann man sofort die Invarianz von $f_{(\nu)i} x^{(\nu)i}$ bei der Parametertransformation ansehen, da nach (1.1) und (1.25)

$$f_{(\bar{\nu})i} x^{(\bar{\nu})i} = \bar{a}_\nu^\mu f_{(\mu)i} a_\lambda^\nu x^{(\lambda)i} = \delta_\lambda^\mu f_{(\mu)i} x^{(\lambda)i} = f_{(\mu)i} x^{(\mu)i}$$

ist, aber es ist zu bemerken, dass die Grösse $f_{(\nu)i} x^{(\nu)i}$ bei einer Ko-

ordinatentransformation nicht immer erhalten bleiben, eben wenn f invariant ist¹⁾.

Auf ein anderes Beispiel von kovariantem P -Vektor, das in unserer Theorie sehr wichtig ist, wird in Nr. 14 hingewiesen.

Vom Begriff des P -Vektors aus können wir zu demselben eines P -Tensors auf analoge Weise wie in der gewöhnlichen Tensor-analysis kommen. Nämlich, wir definieren einen (gemischten) P -Tensor z.B. $(r+s)$ -ter Stufe mit r kontra- und s kovarianten Indizes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und $\mu_1, \dots, \mu_s$ vom Grad $K_1, \dots, K_r$ und $K'_1, \dots, K'_s$ beziehungsweise durch das System von $\prod_{p=1}^r K_p \prod_{q=1}^s K'_q$ Werten $T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s}$ ($\lambda_p = 1, 2, \dots, K_p$; $\mu_q = 1, 2, \dots, K'_q$), die bei jeder Parametertransformation sich verhalten nach der Regel

$$(1.26) \quad T^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s} = a^{\lambda_1}_{\nu_1} a^{\lambda_2}_{\nu_2} \dots a^{\lambda_r}_{\nu_r} \bar{a}^{\omega_1}_{\mu_1} \bar{a}^{\omega_2}_{\mu_2} \dots \bar{a}^{\omega_s}_{\mu_s} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s}.$$

§ 2. Die Zulässigkeitsbedingung bei einigen Parametertransformationen.

6. Da durch eine Parametertransformation $t = t(\bar{t})$ ein Linienelement M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ in ein neues Linienelement $(x^i, x^{(\bar{1})i}, \dots, x^{(\bar{M})i})$ übergeführt wird, so geht eine Funktion $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ von t und dem Linienelemente M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ durch die Parametertransformation zu einer Funktion $\bar{f}(\bar{t}, x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})})$ von $\bar{t}$ und dem neuen Linienelemente $(x^i, x^{(\bar{1})i}, \dots, x^{(\bar{M})i})$ über. Wenn die beiden Funktionen f und $\bar{f}$ dabei in ihrer funktionalen Form bezüglich jedes von den entsprechenden Argumenten eben dieselben sind, bis auf nur eine Potenz von $\bar{t}^{(1)} \equiv d\bar{t}/dt$ als Faktor,

$$f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = (\bar{t}^{(1)})^a f(\bar{t}, x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})}),$$

so pflegt man zu sagen, dass die Funktion f die Parametertransformation zulässt, und dass die bestimmte Zahl a das Gewicht von f in bezug auf die Transformation ist.

7. Wir können die notwendige und hinreichende Bedingung dafür leicht aufsuchen, dass f eine ein-, zwei- oder drei-gliedrige

1) Siehe D.H. I, S. 20. Die Grössen $f_{(\mu)i} x^{(\mu+1)i}$ und $\sum_{\mu} \mu f_{(\mu)i} x^{(\mu)i}$ sind beide invariant, aber $f_{(\mu)i} x^{(\mu)i}$ nicht.

Gruppe von Parametertransformationen zulässt. Da nach der LIESchen Theorie jede ein-, zwei- bzw. dreigliedrige Gruppe in einer Veränderlichen mit der Gruppe der Verschiebungen $\bar{t} = t + b$, der linearen Transformationen $\bar{t} = at + b$ bzw. der linear gebrochenen Transformationen $\bar{t} = \frac{at+b}{ct+d}$ ähnlich ist, so soll die Funktion aus einer gewissen Funktion, die diese Gruppe zulässt, durch geeignete Parametertransformationen hergeleitet werden. Deshalb ist es genug, nur diese drei Gruppen in Betracht zu ziehen und die Bedingungen in bezug auf jede von diesen Gruppen aufzusuchen.

Darum berücksichtigen wir erstens die Operatoren Δ_K , welche sich durch

$$(2.1) \quad \Delta_K f = \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} f_{(\lambda)} x^{(\lambda-K+1)} j, \quad K = 1, 2, \dots, M$$

definieren. Die Operatoren Δ_K erfüllen die Beziehungen¹⁾

$$(2.2) \quad (\Delta_H \Delta_K - \Delta_K \Delta_H) f = \frac{(H-K) \cdot (H+K-1)!}{H! K!} \Delta_{H+K-1} f, \quad H, K \geq 0$$

und

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Delta_K f^{(H)} &= \sum_{\nu=0}^H \binom{H}{\nu} (\Delta_{K-\nu} f)^{(H-\nu)} \quad \text{für } K \geq H \\ &= \sum_{\nu=0}^K \binom{H}{\nu} (\Delta_{K-\nu} f)^{(H-\nu)} \quad \text{für } K < H^2). \end{aligned}$$

(I) Die gesuchte Bedingung dafür, dass eine Funktion f die Gruppe der Verschiebungen zulassen soll, ist dann

$$(2.4) \quad \partial_t f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

1) Vgl. D.H. I, S. 61 und S. 64.

2) Diese Beziehung wird durch Induktion bezüglich H folgendermassen bewiesen:

$$\begin{aligned} \Delta_K f^{(H+1)} &= \Delta_{K-1} f^{(H)} + (\Delta_K f^{(H)})^{(1)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{K-1} \binom{H}{\nu} (\Delta_{K-1-\nu} f)^{(H-\nu)} + \sum_{\nu=0}^K \binom{H}{\nu} (\Delta_{K-\nu} f)^{(H-\nu+1)} \\ &= \sum_{\nu=0}^K \left\{ \binom{H}{\nu-1} + \binom{H}{\nu} \right\} (\Delta_{K-\nu} f)^{(H+1-\nu)} = \sum_{\nu=0}^K \binom{H+1}{\nu} (\Delta_{K-\nu} f)^{(H+1-\nu)}, \end{aligned}$$

wobei $\binom{H}{-1} = 0$ ist.

D.h. f darf den Parameter t nicht ausdrücklich enthalten, da für beliebiges b

$$f(t+b, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$$

sein muss. Man kann in diesem Falle das Gewicht von f nicht definieren.

(II) Für die Gruppe der linearen Transformationen erhalten wir als die gesuchte Bedingung

$$(2.5) \quad \partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f,$$

wobei α das Gewicht ist. Denn es soll

$$f(x, \alpha x^{(1)}, \dots, \alpha^M x^{(M)}) = \alpha^\alpha f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$$

für beliebiges α sein, somit sieht man die Notwendigkeit von (2.5), nach α differenzierend und dann $\alpha = 1$ setzend. Die Notwendigkeit von $\partial_t f = 0$ ist trivial. Umgekehrt enthält die Funktion f wegen $\partial_t f = 0$ den Parameter t nicht ausdrücklich. Setzt man somit

$$(2.6) \quad F(\alpha) \equiv f(x, \alpha x^{(1)}, \dots, \alpha^M x^{(M)}) - \alpha^\alpha f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}),$$

dann ist nach $\Delta_1 f = \alpha f$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \sum_{\lambda=1}^M \lambda \alpha^\lambda x^{(\lambda)} f_{(\lambda)}(x, \alpha x^{(1)}, \dots, \alpha^M x^{(M)}) - \alpha \alpha^\alpha f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) \\ &= \Delta_1 f(x, \alpha x^{(1)}, \dots, \alpha^M x^{(M)}) - \alpha \alpha^\alpha f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) \\ &= \alpha \{ f(x, \alpha x^{(1)}, \dots, \alpha^M x^{(M)}) - \alpha^\alpha f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) \} = \alpha F(\alpha), \end{aligned}$$

daraus folgt durch Integration nach α

$$F(\alpha) = \alpha^\alpha \Phi(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}),$$

wobei $\Phi(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ eine bestimmte Funktion des Linienelementes M -ter Ordnung ist und von α gar nicht abhängt. Andererseits liefert (2.6) uns die Anfangsbedingung $F(1) = 0$, somit muss die Funktion $\Phi(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ identisch Null sein, da sie α nicht enthalten soll. Das zeigt $F(\alpha) \equiv 0$, d.h., dass die Bedingung (2.5) wirklich hinreichend ist.

(III) Die gesuchte Bedingung für die Gruppe der linear gebrochenen Transformationen stellt sich dar in der Gestalt:

$$(2.7) \quad \partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f, \quad \Delta_2 f = 0.$$

Die Notwendigkeit der ersten und zweiten Bedingungen von (2.7) ist nach Obigem klar. So wollen wir die Notwendigkeit der dritten Bedingung von (2.7) zeigen. Da jede linear gebrochene Transformation aus linearen Transformationen und einer Transformation von der Gestalt

$$(2.8) \quad \bar{t} = 1/t$$

erzeugt wird, so genügt es, die Invarianz von f bei (2.8) zu fordern. Setzen wir

$$(2.9) \quad y^{\lambda i} = \sum_{\mu=1}^{\lambda} a_{\mu}^{\lambda} t^{\lambda-\mu} x^{(\bar{\mu})i}, \quad a_{\mu}^{\lambda} = \frac{\lambda! (\lambda-1)!}{\mu! (\mu-1)! (\lambda-\mu)!},$$

dann ergeben sich bei der Transformation (2.8)

$$(2.10) \quad x^{(\lambda)i} = (\bar{t}^{(1)})^{\lambda} y^{\lambda i}, \quad \partial_t y^{\lambda i} = 2 \binom{\lambda}{2} y^{\lambda-1, i} \quad (\lambda > 1),$$

da $(\lambda-\mu)a_{\mu}^{\lambda} = \lambda(\lambda-1)a_{\mu}^{\lambda-1, 1}$. Somit erhalten wir unter Berücksichtigung der ersten und zweiten Beziehungen von (2.7)

$$(2.11) \quad f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = (\bar{t}^{(1)})^{\alpha} f(x, y^1, \dots, y^M).$$

Andererseits soll die Beziehung

$$f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = (\bar{t}^{(1)})^{\alpha} f(x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})})$$

nach der Hypothese erfüllend sein, so muss

$$(2.12) \quad f(x, y^1, \dots, y^M) = f(x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})})$$

unter der Beziehung (2.9) für jeden Wert von t identisch bestehen. Differenzierend die letzte Gleichung nach t , ergibt sich wegen der letzten Beziehung von (2.10)

$$2 \sum_{\lambda=2}^M \binom{\lambda}{2} y^{\lambda-1, i} \frac{\partial}{\partial y^{\lambda i}} f(x, y^1, \dots, y^M) = 0.$$

Setzen wir hier $x^{(\lambda)i}$ an Stelle von $y^{\lambda i}$, dann gibt uns die letzte Gleichung $\Delta_2 f = 0$. Somit erkennt man die Notwendigkeit von

1) Vgl. H. Hombu [9], S. 147.

$\Delta_2 f = 0$. Nächstens wollen wir die Vollständigkeit von (2.7) beweisen. Da wegen der ersten und zweiten Beziehungen von (2.7) die Funktion f jede lineare Transformation von t zulässt, genügt es zu beweisen, dass die Funktion f die Transformation (2.8) zulässt. Vermöge der ersten und zweiten Beziehungen von (2.7) erhalten wir daraus (2.11) für die Transformation (2.8), somit kann man die Richtigkeit von (2.12) versichern. Unter Berücksichtigung von (2.10) geht

$$\partial_t f(x, y^1, \dots, y^M) = 2 \sum_{\lambda=2}^M \binom{\lambda}{2} y^{\lambda-1, i} \frac{\partial}{\partial y^{\lambda i}} f(x, y^1, \dots, y^M) = 0$$

hervor, denn die Beziehung $\Delta_2 f = 0$ ¹⁾ soll bei Setzung $y^{\lambda i}$ an Stelle von $x^{(\lambda)i}$ auch bestehen, wenn sie für $x^{(\lambda)i}$ besteht, da $x^{(\lambda)i}$ sowie $y^{\lambda i}$ je ebenfalls einen beliebigen Wert annehmen dürfen. Dies bedeutet, dass die Funktion $f(x, y^1, \dots, y^M)$ den Parameter t nicht ausdrücklich enthält, sondern eine Funktion nur von den Argumenten $x^i, x^{(\bar{1})i}, \dots, x^{(\bar{M})i}$ ist. Deswegen muss die Funktion $f(x, y^1, \dots, y^M)$ unverändert bleiben, eben wenn wir den Parameter t , der in $y^{\lambda i}$ steht, den Wert Null geben. Daraus folgt sogleich (2.12) vermöge (2.9), d.h. die Vollständigkeit von (2.7) ist jetzt bewiesen.

Nun können wir nach Obigem behaupten:

Satz 4. Die drei Beziehungen

$$\partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f, \quad \Delta_2 f = 0$$

sind voneinander unabhängig.

8. f sei eine solche Funktion, die die Gruppe G_3 der linear gebrochenen Transformationen zulässt, dann bestehen die Beziehungen (2.7) für die Funktion f . Wenn f dazu eine Parametertransformation $\mathfrak{T}$, die der Gruppe G_3 nicht angehört, zulässt, dann soll f auch eine viergliedrige Gruppe von Transformationen zulassen, die die Vereinigungsgruppe von G_3 und $\mathfrak{T}$ ist. Aber die LIESCHE Theorie lehrt uns, dass keine viergliedrige Gruppe in einer Veränderlichen existiert. Somit muss die Funktion f jede Parametertransformation zulassen. In der Tat kennt man andererseits die sogenannten ZERMELOSchen Bedingungen, die notwendig und hinreichend dafür sind,

1) Die Beziehung $\Delta_2 f = 0$ ist von einem Wertesystem der Argumente $x^{(\lambda)i}$ nicht abhängig sondern nur von der Gestalt der Funktion f , mit anderen Worten, die Beziehung $\Delta_2 f = 0$ besteht für jedes Wertesystem der Argumente im betrachteten Bereich und gibt eine Beschränkung für die Gestalt der Funktion f .

dass eine Funktion $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ bei jeder Parametertransformation bis auf einen Faktor $(\bar{t}^{(1)})^a$ erhalten bleiben soll¹⁾. Diese Bedingungen lassen sich in der Form schreiben:

$$\partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f, \quad \Delta_\lambda f = 0, \quad \lambda = 2, 3, \dots, M.$$

Aber diese $M+1$ Bedingungen sind überflüssig und voneinander nicht unabhängig. In der Tat bekommt man aus $\Delta_2 f = 0$ und $\Delta_3 f = 0$ mittels (2.2) für $H = 3, K = 2$

$$\frac{4!}{3! 2!} \Delta_4 f = [\Delta_3 \Delta_2] f = 0,$$

im allgemeinen

$$\frac{(H-2)! (H+1)!}{H! 2!} \Delta_{H+1} f = [\Delta_H \Delta_2] f = 0$$

$$\text{für } H = 3, 4, \dots, M-1.$$

Somit folgen die Beziehungen $\Delta_\lambda f = 0$ ($\lambda = 4, 5, \dots, M$) aus den beiden Beziehungen $\Delta_2 f = 0$ und $\Delta_3 f = 0$. Deshalb können wir schliessen

Satz 5. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Funktion f vom Parameter t und einem Linienelemente M -ter Ordnung jede beliebige Parametertransformation zulassen soll, sind*

$$(2.13) \quad \partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f, \quad \Delta_2 f = 0, \quad \Delta_3 f = 0,$$

und diese vier Beziehungen sind voneinander unabhängig²⁾.

Den letzten Teil dieses Satzes können wir ohne Schwierigkeit beweisen. In der Tat ist die Unabhängigkeit der ersten drei Beziehungen schon eingesehen worden, und die Unabhängigkeit der letzten $\Delta_3 f = 0$ von den anderen folgt unmittelbar daraus, dass unter den Bedingungen (2.13) die Funktion f jede beliebige Parametertransformation zulässt, während unter den ersten drei Bedingungen von (2.13) die Funktion f nur linear gebrochene Transformationen zulassen soll.

Bemerkung. f sei eine Funktion eines Linienelementes erster bzw. zweiter Ordnung, dann sind

1) In den eigentlichen ZERMELOSchen Bedingungen ist $\alpha = 1$. Vgl. z.B. TH. DE DONDER [1], S. 55.

2) Diesen Satz hat der Verfasser mit Herrn Prof. H. HOMBU zusammen aufgefunden.

$$\partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f \quad \text{bzw.} \quad \partial_t f = 0, \quad \Delta_1 f = \alpha f, \quad \Delta_2 f = 0$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Funktion f jede beliebige Parametertransformation zulassen soll. Zum Beispiel, f sei eine skalare Funktion von x^i und $x^{(1)i}$ und $\Delta_1 f = f$ bestehe, dann darf $f(x, x^{(1)})$ als die Metrik eines FINSLERSchen Raumes angefasst werden, und das Integral $\int f(x, x^{(1)}) dt$ ist dabei bei jeder Parametertransformation invariant.

§ 3. P -Skalardichte und die Operatoren Δ_H .

9. Wenn eine Funktion f eines Linienelementes M -ter Ordnung jede Parametertransformation zulässt und ihre Gewichtszahl immer einem festen Werte α gleich ist, dann nennen wir die Grösse f eine P -Skalardichte vom Gewichte α . Nämlich es stellt sich dann die Transformationsregel einer P -Skalardichte f vom Gewichte α durch

$$(3.1) \quad f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = (\bar{t}^{(1)})^\alpha f(x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})})$$

dar. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Funktion f eine P -Skalardichte vom Gewichte α sein soll, sind wegen Satz 5, dass f den Parameter t nicht ausdrücklich enthält und $\Delta_1 f = \alpha f$, $\Delta_2 f = 0$, $\Delta_3 f = 0$. Somit gelten für f die Beziehungen

$$(3.2) \quad \Delta_1 f = \alpha f, \quad \Delta_K f = 0 \quad \text{für} \quad K \geq 2.$$

Eine P -Skalardichte f vom Gewichte Null ist nichts anderes als eine absolute Invariante unter der Gruppe aller Parametertransformationen oder unter der Gruppe $\mathfrak{G}_M$ aller Transformationen von der Gestalt (1.1), für die die Beziehungen $\Delta_K f = 0$ immer bestehen sollen.

Es ist zu beachten, dass eine invariante Funktion $F(t)$ vom Parameter t nicht immer eine P -Skalardichte vom Gewichte Null ist. Sie ist es, wenn und nur wenn sie weiter die Beziehungen $\Delta_K F = 0$ erfüllt. Unter einer P -invarianten Grösse $F(t)$ verstehen wir durchaus eine solche Grösse, die bei jeder Parametertransformation erhalten bleibt.

Eine P -Skalardichte vom Gewichte eins liefert uns die Metrik eines sogenannten intrinsiken KAWAGUCHISchen Raumes von der Dimension N und der Ordnung M , in dem die Entfernung s von zwei Punkten längs durch die beiden Punkte hindurchgehenden Kurve

$x^i = x^i(t)$ durch das Integral $s = \int_{t_0}^t f dt$ gegeben ist. Hierbei darf die Entfernung s nur von den zwei Punkten und der Kurve abhängig sein, aber nicht von der Wahl des auf der Kurve angenommen Parameters t , d.h. von der Parametrisierung der Kurve. Also soll $\int f dt$ eine Integralinvariante sein,

$$(3.3) \quad \int f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) dt = \int f(x, x^{(\bar{1})}, \dots, x^{(\bar{M})}) d\bar{t},$$

da eine Kurve von ihrer Parametrisierung, d.h. von der Wahl des Parameters t unabhängig ist. Dafür ist die Bedingung $\Delta_1 f = f$, $\Delta_2 f = 0$, $\Delta_3 f = 0$ für f notwendig und hinreichend. f genügt folglich auch den Beziehungen $\Delta_K f = 0$ ($K = 4, 5, \dots, M$) nach Satz 5. Das meint, dass das Integral $\int f dt$ wesentlich nicht vom Linienelemente M -ter Ordnung sondern vom Kurvenelemente M -ter Ordnung abhängig ist¹⁾.

Es ist klar, dass $\int f^{\frac{1}{\alpha}} dt$ auch eine Integralinvariante ist, wenn f eine P -Skalardichte vom Gewichte α ist. Somit bestimmt $f^{\frac{1}{\alpha}}$ auch die Metrik eines intrinsiken KAWAGUCHISCHEN Raumes.

10. Über die Operatoren Δ_H gelten die folgenden Sätze:

Satz 6. Wenn eine Funktion f eines Linienelementes M -ter Ordnung eine P -Skalardichte vom Gewichte α ist, dann sind die Funktionen $\Delta_H f$ ($H = 1, 2, \dots, M$) je eine P -Skalardichte von demselben Gewichte.

Beweis. Es bestehen die Beziehungen (2.13) für f , somit ist

$$\Delta_K \Delta_H f = \alpha \delta_H^1 \Delta_K f = \alpha^2 \delta_H^1 \delta_K^1 f = \alpha \delta_K^1 \Delta_H f$$

und

$$\partial_t \Delta_H f = \alpha \delta_H^1 \partial_t f = 0. \quad \text{W. z. b. z.}$$

Satz 7. f sei eine P -Skalardichte vom Gewichte α , so besteht die Beziehung

$$(3.4) \quad \Delta_K f^{(H)} = \frac{H+1+(\alpha-1)K}{H+1} \binom{H+1}{K} f^{(H-K+1)} \\ = 0 \quad \begin{array}{l} \text{für } H+1 \geq K \geq 0 \\ \text{für } H+1 < K. \end{array}$$

1) Siehe D.H. I, S. 13.

Beweis. Wegen der Beziehungen (3.2) verschwinden alle Glieder in der rechten Seite von (2.3) bis auf die für $\nu = K$ und $\nu = K-1$, somit ist

$$\begin{aligned}\Delta_K f^{(H)} &= \binom{H}{K} (\Delta_0 f)^{(H-K)} + \binom{H}{K-1} (\Delta_1 f)^{(H-K+1)} \\ &= \left\{ \binom{H}{K} + \binom{H}{K-1} \alpha \right\} f^{(H-K+1)},\end{aligned}$$

da $\Delta_0 f = f^{(1)}$ und $\Delta_1 f = \alpha f$. Wegen

$$\binom{H}{K} + \binom{H}{K-1} \alpha = \frac{H+1 + (\alpha-1)K}{H+1} \binom{H+1}{K}$$

ist der Beweis des ersten Teiles der Behauptung fertig. Der letzte Teil ist dagegen wegen (2.3) offenbar richtig, da $\Delta_K f^{(H)}$ in diesem Falle nur durch die Ableitungen von $\Delta_L f$ ($L \geq 2$) aber nicht von $\Delta_1 f$ oder $\Delta_0 f$ ausgedrückt wird.

W. z. b. z.

Zusatz 1. Eine P -Skalardichte f vom Gewichte Null, d.h. eine absolute Invariante erfüllt die Beziehung

$$\begin{aligned}(3.4a) \quad \Delta_K f^{(H)} &= \binom{H}{K} f^{(H-K+1)} \quad \text{für } H+1 \geq K \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{für } H+1 < K.\end{aligned}$$

Zusatz 2. Für eine P -Skalardichte f vom Gewichte eins besteht die Beziehung

$$\begin{aligned}(3.4b) \quad \Delta_K f^{(H)} &= \binom{H+1}{K} f^{(H-K+1)} \quad \text{für } H+1 \geq K \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{für } H+1 < K.\end{aligned}$$

Es ergeben sich noch zwei andere Arten der Operatoren¹⁾:

$$\begin{aligned}(3.5) \quad \Delta_K f &= H! \sum_{\lambda=K}^{M-H} \binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)} \sum_{\nu=0}^H (-1)^\nu \binom{\lambda+\nu}{\lambda} \binom{M-\lambda-\nu}{M-H-\lambda} f_{(\lambda+\nu)}^{(\nu)} \\ &= H! \sum_{\lambda=0}^H (-1)^\lambda \binom{K+\lambda}{\lambda} \binom{M-K-\lambda}{M-H-K} (\Delta_{K+\lambda} f)^{(\lambda)},\end{aligned}$$

$$H = 0, 1, \dots, M; \quad K = 0, 1, \dots, M-H,$$

1) Siehe D.H. I, S. 62-63.

und

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Delta_K^H f &= \sum_{\lambda=K}^{M-H} \binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)i} \sum_{\nu=0}^{M-H-\lambda} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} f_{(\lambda+H+\nu)i}^{(\nu)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{M-H-K} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} (\Delta_{K+H+\nu} f)^{(\nu)}, \end{aligned}$$

$$H = 1, 2, \dots, M; \quad K = 0, 1, \dots, M-H.$$

Daraus folgt der

Satz 8. *f* sei eine *P*-Skalardichte vom Gewichte α , so ist für $K \geq 2$ immer $\Delta_K^H f = 0$, während für $K = 1$ bzw. $K = 0$

$$(3.7) \quad \Delta_1^H f = \frac{(M-1)!}{(M-H-1)!} \alpha f \quad \text{bzw.} \quad \Delta_0^H f = \frac{(M-1)!}{(M-H)!} (M\alpha - H) f^{(1)};$$

und alle $\Delta_K^H f$ verschwinden identisch, ausser $\Delta_0^1 f = \alpha f$.

Dieser Satz kann leicht durch Einsetzung von (3.2) und $\Delta_0 f = f^{(1)}$ nach (3.5) und (3.6) bewiesen werden.

Ausserdem bestätigen wir den

Satz 9. *Die Operatoren Δ_H ($H = 1, 2, \dots, M$) sind nichts anderes als die infinitesimalen Transformationen der in Satz 3 erwähnten Gruppe $\mathfrak{G}_M$ der Transformationen (1.1) vom Linienelemente M -ter Ordnung.*

Beweis. Die Gruppe $\mathfrak{G}_M$ enthält die M Gruppenparameter $t^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, M$) und die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}_M$ ist durch (1.16) fest bestimmt. Wir ersetzen nun, um das Verstehen leichter zu machen, $t^{(\bar{\nu})}$ $\bar{t}^{(\bar{\nu})}$ bzw. $t^{(\bar{\nu})}$ durch $p^{\bar{\nu}}$, $\bar{p}^{\bar{\nu}}$ bzw. $\dot{p}^{\bar{\nu}}$, dann wird (1.15) bzw. (1.16)

$$\alpha_\mu^\lambda (\dot{p}^{\bar{\nu}}) = \alpha_\nu^\lambda (\bar{p}^{\bar{\alpha}}) \alpha_\mu^\nu (p^{\bar{\beta}}) \quad \text{bzw.} \quad p^{\bar{\nu}} = \Phi^{\bar{\nu}}(\bar{p}^{\bar{\alpha}}, p^{\bar{\beta}}).$$

Für die identische Transformation nehmen diese Parameter die Werte $p^1 = 1$, $p^\alpha = 0$ ($\alpha = 2, 3, \dots, M$) an, somit müssen die infinitesimalen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_M$ durch Differentiationen einer beliebigen Funktion $f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ nach p^α und dann durch Setzung $p^1 = 1$ und $p^\alpha = 0$ ($\alpha = 2, 3, \dots, M$) gegeben werden, d.h. wegen Satz 1

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial f(x^{(\beta)})}{\partial p^\alpha} \right]_1 &= \left[\frac{\partial f(x^{(\beta)})}{\partial x^{(\tau)i}} \frac{\partial x^{(\tau)i}}{\partial p^\alpha} \right]_1 = \left[\frac{\partial f(x^{(\beta)})}{\partial x^{(\tau)i}} \frac{\partial a_\delta^\tau}{\partial p^\alpha} x^{(\delta)i} \right]_1 \\
 &= \sum_{\tau=1}^M \sum_{\delta=1}^{\tau-\alpha+1} \frac{\partial f(x^{(\beta)})}{\partial x^{(\tau)i}} \binom{\gamma}{\alpha} [a_{\delta-1}^{\tau-\alpha}]_1 x^{(\delta)i} = \sum_{\tau=1}^M \sum_{\delta=1}^{\tau-\alpha+1} \frac{\partial f(x^{(\beta)})}{\partial x^{(\tau)i}} \binom{\gamma}{\alpha} \delta_{\delta-1}^{\tau-\alpha} x^{(\delta)i} \\
 &= \sum_{\tau=1}^M \frac{\partial f(x^{(\beta)})}{\partial x^{(\tau)i}} \binom{\gamma}{\alpha} x^{(\tau-\alpha+1)i} = \sum_{\tau=\alpha}^M \binom{\gamma}{\alpha} x^{(\tau-\alpha+1)i} f_{(\tau)i} = \Delta_\alpha f,
 \end{aligned}$$

da $[a_\lambda^\lambda]_1 = \delta_\lambda^\lambda$, wobei $[\]_1$ den Wert des in den Klammern stehenden Ausdruckes für $p^1 = 1, p^\alpha = 0$ ($\alpha = 2, 3, \dots, M$) bedeutet. Es ergeben sich nur die M Gruppenparameter p^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$) und weiter gar nichts, somit darf keine infinitesimale Transformation ausser den $\Delta_K f$ existieren. W. z. b. z.

11. Wenn V^i die Bestimmungszahlen eines *intrinsiken* Vektors (oder Tensors) von der Ordnung M und vom P -Gewichte α sind, d.h. die Bestimmungszahlen V^i von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig und je eine P -Skalardichte vom Gewichte α sind, so sind $\Delta_1 V^i = \alpha V^i$ und $\Delta_H V^i = 0$ für $H = 2, 3, \dots, M$. Der Vektor dieser Art existiert wirklich und die intrinsiken SYNGESchen Vektoren $\mathbb{E}_{i,1}^{\mathbb{K}}$ liefern uns Beispiele.

Die Operatoren Δ_H finden viele wichtige Anwendungen in der Theorie des Systemes der Bahnen höherer Ordnung, d.h. in der Geometrie des Differentialgleichungssystemes höherer Ordnung:

$$(3.8) \quad T^i = x^{(M)i} + H(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(M-1)}) = 0.$$

Nämlich es sind

$$\partial_t T^i = 0, \quad \Delta_1 T^i = M T^i \quad \text{bzw.} \quad \partial_t T^i = 0, \quad \Delta_1 T^i = M T^i, \quad \Delta_2 T^i = 0$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das System den affinen bzw. projektiven Parameter trägt²⁾. In diesem Falle dürfen wir T^i als einen kontravarianten Vektor für Koordinatentransformationen auffassen und T^i bekommt den Faktor $(\bar{t}^{(1)})^M$ für Parametertransformationen, d.h. seine Gewichtszahl ist M . Weil, wenn (3.8) bei einer Koordinatentransformation in das System

$$\tilde{T}^i = \tilde{x}^{(M)i} + \tilde{H}^i(t, \tilde{x}, \tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(M-1)}) = 0$$

1) Vgl. A. KAWAGUCHI [14], S. 237 oder diese Abhandlung, S. 122.

2) Vgl. H. HOMBÜ [9], S. 145-149.

übergeht, dann ist

$$T^i = \tilde{T}^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j},$$

da

$$x^{(M)i} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{x}^{(M)j} + \alpha^i(\tilde{x}, \tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(M-1)}).$$

In derselben Weise ergibt sich

$$T^i = \bar{T}^i (\bar{t}^{(1)})^M$$

bei einer Parametertransformation, indem

$$x^{(M)i} = (\bar{t}^{(1)})^M x^{(\bar{M})i} + \beta^i(\bar{t}, x, x^{(1)}, \dots, x^{(\bar{M}-1)}).$$

Somit liefern $\Delta_H T^i$ uns für jeden Wert von $H = 1, 2, \dots, M$ je einen kontravarianten Vektor. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass durch jedes Kurvenelement $(M-1)$ -ter Ordnung eine einzige Integralkurve, d.h. Bahn des Systemes (3.8) läuft, gestaltet sich in der Form

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \partial_t T^i &= P_0 x^{(1)i}, & \Delta_1 T^i &= M T^i + P_1 x^{(1)i}, \\ \Delta_2 T^i &= P_2 x^{(1)i}, & \Delta_3 T^i &= P_3 x^{(1)i}, \end{aligned}$$

wo P_0, P_1, P_2, P_3 skalare Funktionen von $t, x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M-1)i}$ sind. In ganz analoger Weise wie in dem Beweis von Satz 5, kann man aus den letzten zwei Beziehungen mittels (2.2) die Beziehungen

$$\Delta_H T^i = P_H x^{(1)i} \quad \text{für } H = 4, 5, \dots, M$$

herleiten¹⁾. Deswegen haben in diesem Falle die Vektoren

$$\partial_t T^i, \quad K^i = \Delta_1 T^i - M T^i, \quad \Delta_H T^i, \quad H = 2, 3, \dots, M$$

längs jeder Kurve alle dieselbe Richtung wie der Tangentenvektor der Kurve.

12. Nun wollen wir einen z.B. exkontravarianten Extensor erster Stufe vom Grad M ins Auge fassen, der bei jeder Koordinatentransformation $x^a = x^a(x^i)$ sich verhält nach der Regel²⁾:

1) Vgl. H. HOMBUR [10], S. 47-48.

2) Siehe D.H. I, S. 20.

$$(3.10) \quad T^{\alpha a} = \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} T^{\beta i}.$$

Wie man wohl weiss, gilt dabei die Beziehung¹⁾

$$(3.11) \quad \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = \frac{\alpha! (\beta - \gamma)!}{\beta! (\alpha - \gamma)!} \frac{\partial x^{(\alpha - \gamma)a}}{\partial x^{(\beta - \gamma)i}} = \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial x^{(\alpha - \beta)a}}{\partial x^i} = \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^i} \right)^{(\alpha - \beta)}.$$

Da $\frac{\partial x^a}{\partial x^i}$ bei jeder Parametertransformation invariant bleibt und eine P -Skalardichte vom Gewichte Null ist, geht wegen Zusatz 2 von Satz 7 die folgende Beziehung hervor:

$$\begin{aligned} \Delta_K \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} &= \binom{\alpha}{\beta} \Delta_K \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^i} \right)^{(\alpha - \beta)} = \binom{\alpha}{\beta} \binom{\alpha - \beta}{K} \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^i} \right)^{(\alpha - \beta - K + 1)} \\ &= \frac{\alpha!}{\beta! K! (\alpha - \beta - K)!} \frac{\partial x^{(\alpha - \beta - K + 1)a}}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

daraus folgt mit Hilfe von (3.11)

$$\begin{aligned} \Delta_K \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} &= \frac{\alpha!}{\beta! K! (\alpha - \beta - K)!} \binom{\alpha - \beta - K + 1}{\beta}^{-1} \frac{\partial x^{(\alpha - K + 1)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \\ &= \frac{\alpha! (\alpha - \beta - K + 1)}{K! (\alpha - K + 1)!} \frac{\partial x^{(\alpha - K + 1)a}}{\partial x^{(\beta)i}}, \end{aligned}$$

d.h.

$$(3.12) \quad \Delta_K \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = \binom{\alpha}{K} \frac{\alpha - \beta - K + 1}{\alpha - K + 1} \frac{\partial x^{(\alpha - K + 1)a}}{\partial x^{(\beta)i}}.$$

Wendet man den Operator Δ_K auf einen exkontravarianten relativen Extensor $T^{\alpha i}$ erster Stufe vom Grad G und Gewichte $\mathfrak{f}$ an, dann gelangt man wegen (3.12) für $\alpha \geq K$ zu

$$\begin{aligned} \Delta_K T^{\alpha a} &= \Delta^{\mathfrak{f}} \left\{ \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \Delta_K T^{\beta i} + \left(\Delta_K \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \right) T^{\beta i} \right\} \\ &= \Delta^{\mathfrak{f}} \left\{ \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \Delta_K T^{\beta i} + \binom{\alpha}{K} \sum_{\beta=1}^{\alpha-K+1} \frac{\alpha - \beta - K + 1}{\alpha - K + 1} \frac{\partial x^{(\alpha - K + 1)a}}{\partial x^{(\beta)i}} T^{\beta i} \right\} \\ &= \Delta^{\mathfrak{f}} \left\{ \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \Delta_K T^{\beta i} + \binom{\alpha}{K} \sum_{\beta=1}^{\alpha-K+1} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha - K + 1} \right) \frac{\partial x^{(\alpha - K + 1)a}}{\partial x^{(\beta)i}} T^{\beta i} \right\}, \end{aligned}$$

1) Siehe D.H. I, S. 17.

wobei $\Delta = \left| \frac{\partial x^a}{\partial x^i} \right|$ ist, daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta_K T^{aa} - \binom{a}{K} T^{\alpha-K+1, a} \\ = \Delta^{-1} \left\{ \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \Delta_K T^{\beta i} - \binom{a}{K} \frac{1}{\alpha-K+1} \sum_{\beta=1}^{\alpha-K+1} \beta \frac{\partial x^{(\alpha-K+1)a}}{\partial x^{(\beta)i}} T^{\beta i} \right\}, \end{aligned}$$

da $T^{\alpha-K+1, a} = \Delta^{-1} \frac{\partial x^{(\alpha-K+1)a}}{\partial x^{(\beta)i}} T^{\beta i}$ ist. Im letzten Glied auf der rechten Seite der letzten Beziehung ersetzen wir β durch $\gamma - K + 1$ und berücksichtigen (3.11), dann gestaltet sich das Glied folgendermassen

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=K}^a \binom{a}{K} \frac{\gamma-K+1}{\alpha-K+1} \frac{\partial x^{(\alpha-K+1)a}}{\partial x^{(\tau-K+1)i}} T^{\tau-K+1, i} \\ = \sum_{\tau=K}^a \binom{a}{K} \frac{\gamma-K+1}{\alpha-K+1} \frac{\gamma! (\alpha-K+1)!}{a! (\gamma-K+1)!} \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\tau)i}} T^{\tau-K+1, i} \\ = \sum_{\tau=K}^a \binom{\gamma}{K} \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\tau)i}} T^{\tau-K+1, i}. \end{aligned}$$

Somit erkennen wir

$$\begin{aligned} \Delta_K T^{aa} - \binom{a}{K} T^{\alpha-K+1, a} = \Delta^{-1} \sum_{\tau=K}^a \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\tau)i}} \left\{ \Delta_K T^{\tau i} - \binom{\gamma}{K} T^{\tau-K+1, i} \right\} \\ + \Delta^{-1} \sum_{\tau=1}^{K-1} \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\tau)i}} \Delta_K T^{\tau i}. \end{aligned}$$

Andererseits weiss man, dass sich $\Delta_K T^{\alpha i}$ falls $K > \alpha$ bei jeder Koordinatentransformation folgendermassen verhält:

$$\Delta_K T^{\alpha i} = \Delta^{-1} \frac{\partial x^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\tau)i}} \Delta_K T^{\tau i},$$

weil $\Delta_K (\partial x^{(\alpha)a} / \partial x^{(\tau)i}) = 0$ für $K > \alpha$ ist. Demgemäss bilden die Grössen

$$\begin{aligned} (3.13) \quad \bar{\Delta}_K T^{\alpha i} &= \Delta_K T^{\alpha i} - \binom{a}{K} T^{\alpha-K+1, i} \quad \text{für } G \geq a \geq K \\ &= \Delta_K T^{\alpha i} \quad \text{für } 1 \leq a < K \end{aligned}$$

einen relativen Extensor derselben Art von demselben Grad G und Gewichte $\dagger$ wie $T^{\alpha i}$.

Auf analoge Weise bilden wir leicht aus einem exkovarianten relativen Extensor $T_{\alpha i}$ erster Stufe vom Grad G und Gewichte $\mathfrak{k}$ einen relativen Extensor $\bar{\Delta}_K T_{\alpha i}$ derselben Art von demselben Grad G und Gewichte $\mathfrak{k}$ wie $T_{\alpha i}$ aus:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_K T_{\alpha i} &= \Delta_K T_{\alpha i} + \binom{\alpha + K - 1}{K} T_{\alpha - K - 1, i} \\ &\quad \text{für } G - K + 1 \geq \alpha \geq 1 \\ &= \Delta_K T_{\alpha i} \quad \text{für } G \geq \alpha > G - K + 1. \end{aligned}$$

Die oben erhaltenen Ergebnissen zusammenfassend, bekommt man den

Satz 10. Wenn $T^{\alpha i}$ bzw. $T_{\alpha i}$ ein exkontra- bzw. exkovarianter relativer Extensor erster Stufe vom Grad G und Gewichte $\mathfrak{k}$ ist, dann ist $\bar{\Delta}_K T^{\alpha i}$ bzw. $\bar{\Delta}_K T_{\alpha i}$, das durch (3.13) bzw. (3.14) definiert wird, ein relativer Extensor derselben Art von demselben Grad G und Gewichte $\mathfrak{k}$ wie $T^{\alpha i}$ bzw. $T_{\alpha i}$. Im allgemeinen bilden die Grössen

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_K T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} &= \Delta_K T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} \\ &\quad - \sum_{p=1}^r \binom{\alpha_p}{K} T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1}, \alpha_p - K + 1, i_p \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} \\ &\quad + \sum_{q=1}^s \binom{\beta_q + K - 1}{K} \\ &\quad \times T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{q-1} j_{q-1}, \beta_q + K - 1, j_q \beta_{q+1} j_{q+1} \dots \beta_s j_s} \end{aligned}$$

einen relativen Extensor derselben Art von denselben Graden und Gewichte wie $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}$, wenn $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}$ ein vorgegebener relativer Extensor $(r+s)$ -ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, der beziehungsweise in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p und auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad G'_q ist. Hierbei soll man unter $\binom{\alpha_p}{K}$ bzw. $\binom{\beta_q + K - 1}{K}$ auf der rechten Seite von (3.15) für $1 \leq \alpha_p < K$ bzw. $G'_q \geq \beta_q > G'_q - K + 1$ immer den Wert Null verstehen¹⁾.

Den letzten Teil des Satzes kann man ohne Schwierigkeit auf analoge Weise beweisen und wir lassen hier den Beweis aus.

1) Vgl. Satz 28 in D.H. I, S. 61. Dieser Satz ist von H. HOMBU in einer noch spezielleren Form bewiesen worden. Siehe H. HOMBU [15], S. 42.

13. Wir wenden den Operator Δ_K auf einen P -Vektor an, dann bestehen die folgenden Sätze.

Satz 11. P^λ sei ein kontravarianter P -Vektor, dessen Bestimmungszahlen vom Linienelemente M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ abhängen, so ist

$$(3.16) \quad \Delta_K P^\lambda = \binom{\lambda}{K} P^{\lambda-K+1} \quad \text{für } \lambda \geq K \geq 1$$

$$= 0 \quad \text{für } K > \lambda.$$

Beweis. Wir differenzieren die beiden Seiten der Transformationsgleichungen $\bar{P}^\lambda = a_\mu^\lambda(t^{(\bar{\alpha})}) P^\mu$ nach $t^{(\bar{K})}$ und setzen dann $t^{(\bar{1})} = 1$ und $t^{(\bar{\alpha})} = 0$ für $\alpha = 2, 3, \dots$ So erhält man ohne weiteres die gesuchte Beziehung (3.16), da wegen Satz 1

$$\left[\frac{\partial a_\mu^\lambda(t^{(\bar{\alpha})})}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 = \binom{\lambda}{K} [a_{\mu-1}^{\lambda-K}]_1 = \binom{\lambda}{K} \delta_{\mu-1}^{\lambda-K}.$$

W. z. b. z.

Satz 12. Für einen kovarianten P -Vektor von der Ordnung H , dessen Bestimmungszahlen P_λ vom Linienelemente M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ abhängen, besteht die Beziehung

$$(3.17) \quad \Delta_K P_\lambda = -\binom{\lambda+K-1}{K} P_{\lambda+K-1} \quad \text{für } H-\lambda+1 \geq K \geq 1$$

$$= 0 \quad \text{für } K > H-\lambda+1.$$

Beweis. Erstens wollen wir den Wert $[\partial \bar{a}_\mu^\lambda(t^{(\bar{\alpha})}) / \partial t^{(\bar{K})}]_1$ berechnen. Darum differenzieren wir die Beziehung (1.4) nach $t^{(\bar{K})}$ und berücksichtigen (1.7), so ergibt sich

$$a_\mu^\lambda \frac{\partial \bar{a}_\nu^\mu}{\partial t^{(\bar{K})}} + \sum_{\mu=\nu}^{\lambda-K+1} \binom{\lambda}{K} a_{\mu-1}^{\lambda-K} \bar{a}_\nu^\mu = 0,$$

daraus folgt nach (1.20)

$$(3.18) \quad \frac{\partial \bar{a}_\nu^\mu}{\partial t^{(\bar{K})}} = - \sum_{\lambda-K+\nu-1}^{\mu} \bar{a}_\lambda^\mu \binom{\lambda}{K} \binom{\lambda-K}{\nu-1} (\bar{t}^{(1)})^{(\lambda-K-\nu+1)}$$

$$= - \binom{K+\nu-1}{K} \sum_{\lambda-K+\nu-1}^{\mu} \binom{\lambda}{K+\nu-1} \bar{a}_\lambda^\mu \cdot (\bar{t}^{(1)})^{(\lambda-K-\nu+1)},$$

somit ist

$$(3.19) \quad \left[\frac{\partial \bar{\alpha}_\nu^\mu}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 = - \binom{K+\nu-1}{K} \delta_{K+\nu-1}^\mu,$$

da $[\bar{\alpha}_\nu^\mu]_1 = \delta_\nu^\mu$ und $[(\bar{t}^{(1)})^{(\lambda-K-\nu+1)}]_1 = \delta_0^{\lambda-K-\nu+1}$.

Weiter differenziert man die beiden Seiten der Transformationsgleichungen $\bar{P}_\lambda = \bar{\alpha}_\lambda^\mu(t^{(\bar{\alpha})})P_\mu$ des kovarianten P -Vektors P_λ nach $t^{(\bar{K})}$ und setzt dann $t^{(\bar{1})} = 1$ und $t^{(\bar{\alpha})} = 0$ für $\alpha = 2, 3, \dots$. So erhält man mit Hilfe von (3.19) die gesuchte Beziehung (3.17). W. z. b. z.

Noch allgemeiner behaupten wir

Satz 13. Wenn $P^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s}$ ein P -Tensor $(r+s)$ -ter Stufe mit r kontra- und s kovarianten Indizes ist, dessen Bestimmungszahlen vom Linienelemente $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ abhängig sind, so besteht die Beziehung

$$(3.20) \quad \Delta_K P^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s} = \sum_{p=1}^r \binom{\lambda_p}{K} P^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}, \lambda_p-K+1, \lambda_{p+1} \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s} \\ - \sum_{q=1}^s \binom{\mu_q+K-1}{K} P^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_{q-1}, \mu_q+K-1, \mu_{q+1} \dots \mu_s},$$

wo $\binom{\lambda_p}{K}$ bzw. $\binom{\mu_q+K-1}{K}$ für $K > \lambda_p$ bzw. $K > H_q - \mu_q + 1$ immer den Wert Null hat. H_q bedeutet hierbei die Gradzahl des P -Tensors in bezug auf die kovarianten Indizes μ_q .

Den Beweis von Satz 13 kann man unschwer auf dieselbe Weise wie Satz 11 oder Satz 12 ausführen.

Insbesondere wird (3.20) für einen P -Tensor zweiter Stufe mit je einem kontra- und kovarianten Index P^λ_μ

$$(3.20a) \quad \Delta_K P^\lambda_\mu = \binom{\lambda}{K} P^{\lambda-K+1}_\mu - \binom{\mu+K-1}{K} P^\lambda_{\mu+K-1} \\ \text{für } \lambda \geq K \geq 1 \text{ und } H-\mu+1 \geq K \geq 1 \\ = \binom{\lambda}{K} P^{\lambda-K+1}_\mu \quad \text{für } \lambda \geq K > H-\mu+1 \\ = - \binom{\mu+K-1}{K} P^\lambda_{\mu+K-1} \quad \text{für } H-\mu+1 \geq K > \lambda \\ = 0 \quad \text{für } K > \lambda \text{ und } K > H-\mu+1.$$

Unter einer P -Tensordichte $(r+s)$ -ter Stufe mit r kontra- und s kovarianten Indizes vom Gewichte $\mathfrak{k}$ verstehen wir den Inbegriff

des Grössensystems $T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s}$, welches bei jeder Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ nach der Regel

$$(3.21) \quad \bar{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = (t^{\bar{i}})^{\alpha_1}_{\lambda_1} \dots \alpha_r_{\lambda_r} \bar{a}^{\mu_1}_{\beta_1} \dots \bar{a}^{\mu_s}_{\beta_s} T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s}$$

sich verändert.

Für eine P -Tensordichte besteht der

Satz 14. Wenn $T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s}$ eine P -Tensordichte $(r+s)$ -ter Stufe mit r kontra- und s kovarianten Indizes vom Gewichte $\mathfrak{k}$ ist, deren Bestimmungszahlen von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängen, so besteht die Beziehung

$$(3.22) \quad \Delta_K T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s} = \mathfrak{k} \delta_K^1 T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s} + \sum_{p=1}^r \binom{\lambda_p}{K} T^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}, \lambda_p - K + 1, \lambda_{p+1} \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_s} - \sum_{q=1}^s \binom{\mu_q + K - 1}{K} T^{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_{q-1}, \mu_q + K - 1, \mu_{q+1} \dots \mu_s},$$

wo $\binom{\lambda_p}{K}$ bzw. $\binom{\mu_q + K - 1}{K}$ für $K > \lambda_p$ bzw. $K > \mu_q + 1$ immer gleich Null ist, während H_q die Gradzahl der P -Tensordichte in bezug auf die kovarianten Indizes μ_q bedeutet.

§ 4. Die Überschiebungen D_λ und D^λ .

14. Es sei ein relativer Tensor T vorgegeben, dessen Bestimmungszahlen von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig sind, so sind die Grössen

$$(4.1) \quad D_\lambda(T, v) = \sum_{\nu=1}^M \binom{\nu}{\lambda} T_{(\nu)i} v^{i(\nu-\lambda)}, \quad 1 \leq \lambda \leq M$$

für jeden Wert von λ die Bestimmungszahlen eines relativen Tensors von derselben Art wie T , während v^i ein kontravarianter Vektor mit den vom Parameter t abhängigen Bestimmungszahlen ist¹⁾.

1) Diese Tatsache ist zuerst vom Verfasser aufgefunden worden. Siehe A. KAWAGUCHI [8], S. 149, worin er $D_\lambda(T, v)$ durch $\bar{D}_i^{M-\lambda}(T) v^i$ dargestellt hat. Aber es ist viel bequemer, die Bezeichnung $D_\lambda(T, v)$ aufzunehmen, da die Grössen $D_\lambda(T, v)$ einen kovarianten P -Vektor in bezug auf den Index λ aufbauen, wie wir gerade unten beweisen.

Betrachtet man eine beliebige aber P -invariante (d.h. bei jeder Parametertransformation unveränderte) Funktion ϕ vom Parameter t und eine Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$. Die durch diese Parametertransformation transformierten T und v^i bezeichnen wir mit $\bar{T}$ und $\bar{v}^i$ beziehungsweise, dann ist

$$(4.2) \quad \bar{T}_{(\bar{\alpha})i}(\bar{v}^i \phi)^{(\bar{\alpha})} = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\nu} \bar{T}_{(\bar{\alpha})i} \bar{v}^{i(\alpha-\nu)} \phi^{(\bar{\nu})} \\ = \sum_{\nu=0}^M \sum_{\alpha=\nu}^M \binom{\alpha}{\nu} \bar{T}_{(\bar{\alpha})i} \bar{v}^{i(\alpha-\nu)} \phi^{(\bar{\nu})},$$

wobei wir bequemlichkeitshalber $\bar{T}_{(0)i} \equiv 0$ setzen. Andererseits ist die linke Seite der letzten Gleichung nach Nr. 5 gleich

$$(4.3) \quad \bar{T}_{(\bar{\alpha})i}(\bar{v}^i \phi)^{(\bar{\alpha})} = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\mu=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\mu} \bar{T}_{(\alpha)i} \bar{v}^{i(\alpha-\mu)} \phi^{(\mu)} \\ = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\mu=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\alpha}{\mu} \bar{T}_{(\alpha)i} \bar{v}^{i(\alpha-\mu)} \bar{a}_{\nu}^{\mu} \phi^{(\bar{\nu})}.$$

Die Koeffizienten von $\phi^{(\bar{\nu})}$ auf den rechten Seiten von (4.2) und (4.3) vergleichend, haben wir

$$(4.4) \quad \sum_{\alpha=\nu}^M \binom{\alpha}{\nu} \bar{T}_{(\bar{\alpha})i} \bar{v}^{i(\alpha-\nu)} = \sum_{\alpha=\nu}^M \sum_{\mu=\nu}^{\alpha} \binom{\alpha}{\mu} \bar{T}_{(\alpha)i} \bar{v}^{i(\alpha-\mu)} \bar{a}_{\nu}^{\mu} \\ = \sum_{\mu=\nu}^M \sum_{\alpha=\mu}^M \binom{\alpha}{\mu} \bar{T}_{(\alpha)i} \bar{v}^{i(\alpha-\mu)} \bar{a}_{\nu}^{\mu},$$

da die Funktion ϕ beliebig gewählt werden kann. Wenn T eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ ist und wenn v^i bei der Parametertransformation invariant ist; d.h. $\bar{T} = (t^{\bar{i}})^{\mathfrak{k}} T$ und $\bar{v}^i = v^i$, so wird

$$(4.5) \quad \bar{D}_{\lambda}(T, v) = (t^{\bar{i}})^{\mathfrak{k}} \bar{a}_{\lambda}^{\mathfrak{k}} D_{\mu}(T, v).$$

Somit schliesst man

Satz 15. Wenn der Tensor T bzw. der Vektor v^i P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ bzw. P -Invariante ist, sind die Grössen (4.1) oder

$$(4.6) \quad D_{\lambda}^*(T, v) = D_{\lambda}(T, v) - T_{(\lambda)i} v^i = \sum_{\nu=\lambda+1}^M \binom{\nu}{\lambda} T_{(\nu)i} v^{i(\nu-\lambda)} \\ \text{für } \lambda = 1, 2, \dots, M$$

die Bestimmungszahlen eines kovarianten P -Vektors vom Grad M .

Differenzieren wir die beiden Seiten von (4.4) nach $t^{(\bar{K})}$ und setzen dann $t^{(\bar{\alpha})} = \delta_1^\alpha$ ($\alpha \geq 1$), dann geht die linke Seite in $\Delta_K D_\lambda(T, v)$ über und die rechte Seite wegen (3.19) in

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=\nu}^M \binom{\alpha}{\nu} \left[\frac{\partial \bar{T}_{(\alpha)i}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 v^{i(\alpha-\nu)} + \sum_{\alpha=\nu}^M \binom{\alpha}{\nu} T_{(\alpha)i} \left[\frac{\partial \bar{v}^{i(\alpha-\nu)}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 \\ & \quad - \sum_{\mu=1}^M \sum_{\alpha=\mu}^M \binom{\alpha}{\mu} T_{(\alpha)i} v^{i(\alpha-\mu)} \binom{K+\nu-1}{K} \delta_{K+\nu-1}^\mu \\ & = D_\nu(\Delta_K T, v) + \sum_{\alpha=1}^M \binom{\alpha}{\nu} T_{(\alpha)i} \left[\frac{\partial \bar{v}^{i(\alpha-\nu)}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 \\ & \quad - \sum_{\alpha=K+\nu-1}^M \binom{\alpha}{K+\nu-1} \binom{K+\nu-1}{K} T_{(\alpha)i} v^{i(\alpha-K-\nu+1)} \\ & = D_\nu(\Delta_K T, v) + \sum_{\alpha=1}^M \binom{\alpha}{\nu} T_{(\alpha)i} \left[\frac{\partial \bar{v}^{i(\alpha-\nu)}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 - \binom{K+\nu-1}{K} D_{K+\nu-1}(T, v), \end{aligned}$$

da $\frac{\partial \bar{T}_{(\alpha)i}}{\partial t^{(\bar{K})}} = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right)_{(\alpha)i}$, folglich $\left[\frac{\partial \bar{T}_{(\alpha)i}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 = (\Delta_K \bar{T})_{(\alpha)i}$. Das zweite Glied des letzten Ausdruckes wird folgendermassen umgeschrieben:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^M \binom{\alpha}{\nu} T_{(\alpha)i} \sum_{\rho=0}^{K-1} \binom{\alpha-\nu}{\rho} (\Delta_{K-\rho} v^i)^{(\alpha-\nu-\rho)} \\ & = \sum_{\alpha=0}^K \binom{\alpha}{\nu} T_{(\alpha)i} \sum_{\sigma=1}^K \binom{\alpha-\nu}{K-\sigma} (\Delta_\sigma v^i)^{(\alpha-\nu-K+\sigma)} \\ & = \sum_{\sigma=1}^K \binom{K+\nu-\sigma}{\nu} \sum_{\alpha=\nu}^M \binom{\alpha}{K+\nu-\sigma} T_{(\alpha)i} (\Delta_\sigma v^i)^{(\alpha-\nu-K+\sigma)} \\ & = \sum_{\sigma=1}^K \binom{K+\nu-\sigma}{\nu} D_{K+\nu-\sigma}(T, \Delta_\sigma v), \end{aligned}$$

denn unter Berücksichtigung von (3.19) und (2.3)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \bar{v}^{i(\alpha-\nu)}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 = \left[\frac{\partial}{\partial t^{(\bar{K})}} (\bar{v}^{i(\bar{\lambda})} \bar{a}_{\bar{\lambda}}^{\alpha-\nu}) \right]_1 \\ & = \left[\frac{\partial \bar{v}^{i(\bar{\lambda})}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 \delta_{\bar{\lambda}}^{\alpha-\nu} + v^{i(\bar{\lambda})} \left[\frac{\partial \bar{a}_{\bar{\lambda}}^{\alpha-\nu}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right]_1 \\ & = \Delta_K(v^{i(\alpha-\nu)}) - \binom{\alpha-\nu}{K} \sum_{\lambda} v^{i(\lambda)} \delta_{K+\lambda-1}^{\alpha-\nu} \\ & = \sum_{\rho=0}^K \binom{\alpha-\nu}{\rho} (\Delta_{K-\rho} v^i)^{(\alpha-\nu-\rho)} - \binom{\alpha-\nu}{K} v^{i(\alpha-K-\nu+1)} \\ & = \sum_{\rho=0}^{K-1} \binom{\alpha-\nu}{\rho} (\Delta_{K-\rho} v^i)^{(\alpha-\nu-\rho)}. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$(4.7) \quad \Delta_K D_\nu(T, v) = D_\nu(\Delta_K T, v) + \sum_{\sigma=1}^K \binom{K+\nu-\sigma}{\nu} D_{K+\nu-\sigma}(T, \Delta_\sigma v) \\ - \binom{K+\nu-1}{K} D_{K+\nu-1}(T, v).$$

Insbesondere gibt (4.7) falls $\Delta_K T = 0$ und $\Delta_\sigma v^i = 0$ die Beziehung

$$(4.8) \quad \Delta_K D_\nu(T, v) = - \binom{K+\nu-1}{K} D_{K+\nu-1}(T, v),$$

was wegen (3.17) die unmittelbare Folge aus (4.5) ist.

Da $T_{(\nu)i}$ bzw. $v^{i(\nu-\lambda)}$ ein kontra- bzw. kovarianter P -Vektor ist, so ist

$$(4.9) \quad \bar{D}_\lambda(T, v) = \sum_{\nu=\lambda}^M \binom{\nu}{\lambda} \bar{a}_\nu^\mu T_{(\mu)i} a_{\omega}^{\nu-\lambda} v^{i(\omega)} = \sum_{\nu=\lambda}^M \binom{\nu}{\lambda} \bar{a}_\nu^\mu a_{\omega}^{\nu-\lambda} T_{(\mu)i} v^{i(\omega)}.$$

Andererseits ergibt sich nach (4.5)

$$(4.10) \quad \bar{D}_\lambda(T, v) = \bar{a}_\lambda^\sigma D_\sigma(T, v) = \sum_{\sigma=\lambda}^M \bar{a}_\lambda^\sigma \sum_{\tau=\sigma}^M \binom{\tau}{\sigma} T_{(\tau)i} v^{i(\tau-\sigma)}.$$

Die Koeffizienten von $v^{i(\omega)}$ auf den letzten Seiten von (4.9) und (4.10) vergleichend, erhalten wir

$$\sum_{\mu=\lambda}^M \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} \binom{\nu}{\lambda} \bar{a}_\nu^\mu a_{\omega}^{\nu-\lambda} T_{(\mu)i} = \sum_{\tau=\lambda}^M \binom{\tau}{\omega} \bar{a}_\tau^{\tau-\omega} T_{(\tau)i},$$

da v^i ein beliebiger Vektor sein kann. Auf dieselbe Weise erreichen wir durch Vergleichung von Koeffizienten von $T_{(\mu)i}$ auf beiden Seiten der letzten Gleichung die wichtige Beziehung

$$(4.11) \quad \sum_{\nu=\lambda+\omega}^{\mu} \binom{\nu}{\lambda} \bar{a}_\nu^\mu a_{\omega}^{\nu-\lambda} = \binom{\mu}{\omega} \bar{a}_{\lambda}^{\mu-\omega},$$

da die Funktion T ganz beliebig gewählt werden kann.

Durch Multiplikation mit $\bar{a}_\tau^\omega$ und dann durch Summation über ω von 1 bis μ , folgt aus (4.11) die wichtige Beziehung

$$(4.12) \quad \binom{\lambda+\tau}{\lambda} \bar{a}_{\lambda+\tau}^\mu = \sum_{\omega=1}^{\mu-\lambda} \binom{\mu}{\omega} \bar{a}_{\lambda}^{\mu-\omega} \bar{a}_\tau^\omega,$$

da $a_{\omega}^{\nu-\lambda} \bar{a}_\tau^\omega = \delta_{\tau}^{\nu-\lambda}$ ist. In (4.11) sowie (4.12) können die Grössen a und $\bar{a}$ sich miteinander vertauschen, so erhalten wir

$$(4.11)_{\text{bis}} \quad \sum_{\nu=\lambda+\omega}^{\mu} \binom{\nu}{\lambda} a_{\nu}^{\mu} \bar{a}_{\omega}^{\nu-\lambda} = \binom{\mu}{\omega} a_{\lambda}^{\mu-\omega}$$

und

$$(4.12)_{\text{bis}} \quad \sum_{\omega=1}^{\mu-\lambda} \binom{\mu}{\omega} a_{\lambda}^{\mu-\omega} a_{\tau}^{\omega} = \binom{\lambda+\tau}{\lambda} a_{\lambda+\tau}^{\mu}.$$

15. Mittels der Beziehung (4.11) schliesst man allgemeiner den

Satz 16. *Es sei P^{α} bzw. T_{α} kontra- bzw. kovariante P -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{k}'$, dann ist*

$$(4.13) \quad D_{\lambda}(T, P) = \sum_{\nu=\lambda-1}^M \binom{\nu}{\lambda} T_{\nu} P^{\nu-\lambda}, \quad 1 \leq \lambda \leq M-1$$

eine kovariante P -Vektordichte vom Grad $M-1$ und Gewichte $\mathfrak{k}+\mathfrak{k}'$.

Denn (4.11) lehrt uns, dass $T_{(\nu)\lambda}$ bzw. $v^{i(\nu-\lambda)}$ in Satz 15 durch den allgemeinen P -Vektor $F^{-\mathfrak{k}'} T_{\nu}$ bzw. $F^{-\mathfrak{k}} P^{\nu-\lambda}$ ersetzt werden darf, während F eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist. Danach muss (4.13) eine kovariante P -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}+\mathfrak{k}'$ sein.

Da die kovariante P -Vektordichte T_{λ} in Satz 16 beliebig gewählt werden kann, lautet der

Satz 17. *P^{λ} sei eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}$, dann ist*

$$\begin{aligned} P^{\lambda}_{\nu} &= \binom{\lambda}{\nu} P^{\lambda-\nu} && \text{für } \lambda > \nu \\ &= 0 && \text{für } \lambda \leq \nu \end{aligned}$$

eine gemischte P -Tensordichte zweiter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, die vom Grad M' bzw. M'' in bezug auf den kontra- bzw. kovarianten Index λ bzw. μ ist, wobei die ganzen Zahlen M' und M'' ausser der Beschränkung

$$1 \leq M' - M'' \leq M$$

beliebig gewählt werden können.

Der letzte Satz kann mit Hilfe von (4.11)_{bis} durch Rechnung auch bewiesen werden. In der Tat hat man bei jeder Parametertransformation

$$\bar{P}^{\lambda}_{\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \bar{P}^{\lambda-\mu} = \binom{\lambda}{\mu} a_{\delta}^{\lambda-\mu} P^{\delta} = \sum_{\delta} \sum_{\tau=\delta+\mu}^{\lambda} \binom{\gamma}{\delta} a_{\tau}^{\lambda} \bar{a}_{\mu}^{\tau-\delta} P^{\delta}.$$

Die Reihenfolge der Summationszeichen vertauschend und dann $\beta = \gamma - \delta$ setzend, folgt daraus

$$\bar{P}^{\lambda}_{\mu} = \sum_{\gamma} \sum_{\beta} \binom{\gamma}{\beta} a^{\lambda}_{\gamma} \bar{a}^{\beta}_{\mu} P^{\gamma-\beta} = a^{\lambda}_{\gamma} \bar{a}^{\beta}_{\mu} P^{\gamma}_{\beta},$$

was die Richtigkeit des Satzes ergibt.

Aus dem letzten Satz folgt ohne weiteres der

Satz 18. P^{λ} bzw. Q^{λ} sei je eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad M bzw. M' und Gewichte $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{k}'$, dann ist

$$(4.14) \quad \begin{aligned} D^{\lambda}(P, T) &= \sum_{\nu=1}^{M'} \binom{\lambda}{\nu} P^{\lambda-\nu} Q^{\nu} \quad \text{für } M' < \lambda \leq M+M' \\ &= \sum_{\nu=1}^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\nu} P^{\lambda-\nu} Q^{\nu} \quad \text{für } 1 \leq \lambda \leq M' \end{aligned}$$

eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad $M+M'$ und Gewichte $\mathfrak{k} + \mathfrak{k}'$.

Setzen wir an Stelle von der kontravarianten P -Vektordichte Q^{ν} die sukzessiven Ableitungen $F^{(\lambda-1)}$ einer P -Skalardichte F vom Gewichte eins, so folgt aus Satz 18 der

Zusatz. Es sei P^{λ} eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}$ und F eine P -Skalardichte vom Gewichte eins, so ist

$$(4.15) \quad \begin{aligned} D^{\lambda}(P, F) &= \sum_{\nu=1}^{M'} \binom{\lambda}{\nu} P^{\lambda-\nu} F^{(\nu-1)} \quad \text{für } M' < \lambda \leq M+M' \\ &= \sum_{\nu=1}^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\nu} P^{\lambda-\nu} F^{(\nu-1)} \quad \text{für } 1 \leq \lambda \leq M' \end{aligned}$$

eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad $M+M'$ und Gewichte $\mathfrak{k}$.

16. Satz 16 kann noch weiter verallgemeinert werden. Nämlich man erhält

Satz 19. Wenn eine kovariante P -Vektordichte T_{ν} vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und L kontravariante P -Vektordichten P^{ν} vom Gewichte $\mathfrak{k}_g$ ($g = 1, 2, \dots, L$) beziehungsweise vorgegeben sind, ergibt sich eine kovariante P -Vektordichte vom Grad $M-L$ und Gewichte $\mathfrak{k} + \sum_{g=1}^L \mathfrak{k}_g$.

$$\begin{aligned}
(4.16) \quad D_\lambda(T, P_1, \dots, P_L) \\
= \sum_{\nu_L=\lambda+1}^{M-L+1} \dots \sum_{\nu_2=\nu_3+1}^{M-1} \sum_{\nu_1=\nu_2+1}^M \frac{\nu_1!}{(\nu_1-\nu_2)! (\nu_2-\nu_3)! \dots (\nu_L-\lambda)! \lambda!} \\
\times T_{\nu_1} P_1^{\nu_1-\nu_2} P_2^{\nu_2-\nu_3} \dots P_L^{\nu_L-\lambda}, \quad 1 \leq \lambda \leq M,
\end{aligned}$$

wobei M die Gradzahl von T_ν ist.

Beweis. Wir bekommen nach Satz 16 eine kovariante P -Vektordichte vom Grad $M-2$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$, $D_\lambda(T, P_1, P_2) = D_\lambda(D(T, P), P)$, indem $D_\lambda(T, P)$ an Stelle von T_λ in (4.12) gesetzt wird, da $D_\lambda(T, P)$ eine kovariante P -Vektordichte vom Grad $M-1$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}_1$ ist. Dieses Verfahren $(L-1)$ -mal wiederholend, gelangen wir zu einer kovarianten P -Vektordichte vom Grad $M-L$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \sum_{\sigma=1}^L \mathfrak{f}_\sigma$

$$\begin{aligned}
D_\lambda(D(T, P_1, \dots, P_{L-1}), P_L) \\
= \sum_{\nu_L=\lambda+1}^{M-L+1} \dots \sum_{\nu_2=\nu_3+1}^{M-1} \sum_{\nu_1=\nu_2+1}^M \binom{\nu_L}{\lambda} \dots \binom{\nu_2}{\nu_3} \binom{\nu_1}{\nu_2} T_{\nu_1} P_1^{\nu_1-\nu_2} P_2^{\nu_2-\nu_3} \dots P_L^{\nu_L-\lambda},
\end{aligned}$$

welches nichts anderes als (4.16) ist.

W. z. b. z.

Satz 20. Die P -Vektordichte (4.16) ist von der Reihenfolge von $P_1^\nu, P_2^\nu, \dots, P_L^\nu$ ganz unabhängig bestimmt, d.h. für beliebige ganze Zahlen A und B kann man P_A^ν und P_B^ν vertauschen:

$$(4.17) \quad D_\lambda(T, P_1, \dots, P_L) = D_\lambda(T, P_1, \dots, P_{A-1}, P_B, P_{A+1}, \dots, P_{B-1}, P_A, P_{B+1}, \dots, P_L).$$

Beweis. Für den Beweis ist es offenbar genügend, die Vertauschbarkeit von irgendzwei benachbarten P_A^ν und P_{A+1}^ν .

$$(4.18) \quad D_\lambda(T, P_1, \dots, P_L) = D_\lambda(T, P_1, \dots, P_{A-1}, P_{A+1}, P_A, P_{A+2}, \dots, P_L)$$

zu versichern. Denn wir können dann durch genügend vielmalige Vertauschungen benachbarter kontravarianter P -Vektordichten zum allgemeinen Fall gelangen. Auf diesem Grund wollen wir (4.18) beweisen. Setzen wir

$$\nu_g - \nu_{g+1} = a_g, \quad \nu_L - \lambda = a_L \quad (g = 1, 2, \dots, L-1),$$

so nimmt $D_\lambda(T, P_1, \dots, P_L)$ wegen (4.16) die Gestalt

$$(4.19) \quad D_\lambda(T, P_1, \dots, P_L) \\ = \sum_{\alpha_L=1}^{M-L+1-\lambda} \sum_{\alpha_{L-1}=1}^{M-L+2-(\alpha_L+\lambda)} \dots \sum_{\alpha_1=1}^{M-(\alpha_2+\dots+\alpha_L+\lambda)} \frac{\left(\sum_{g=1}^L \alpha_g + \lambda\right)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_L! \lambda!} \\ \times T_{\alpha_1+\dots+\alpha_L+\lambda} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_L^{\alpha_L}$$

an. Nun vertauschen wir zwei benachbarte Summationen, so ist

$$(4.20) \quad \sum_{\alpha_{g+1}=1}^{M-g-(\alpha_{g+2}+\dots+\alpha_L+\lambda)} \sum_{\alpha_g=1}^{M-g+1-(\alpha_{g+1}+\dots+\alpha_L+\lambda)} \\ = \sum_{\alpha_g=1}^{M-g-(\alpha_{g+2}+\dots+\alpha_L+\lambda)} \sum_{\alpha_{g+1}=1}^{M-g+1-(\alpha_g+\alpha_{g+2}+\dots+\alpha_L+\lambda)}$$

(4.19) soll nun unverändert bleiben, auch wenn man α_g bzw. α_{g+1} an Stelle von α_{g+1} bzw. α_g auf der rechten Seite von (4.19) schreibt. Andererseits geht dann die rechte Seite von (4.19) nach (4.20) in $D_\lambda(T, P_1, \dots, P_{A-1}, P_{A+1}, P_A, P_{A+2}, \dots, P_L)$ über. Somit erhalten wir immer dasselbe, wie auch die Reihenfolge von $P_1^\nu, P_2^\nu, \dots, P_L^\nu$ vertauscht werden mag.

In (4.19) kann man jede der P -Vektordichten P^ν ganz beliebig wählen. Somit müssen die Koeffizienten der Produkte $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_L^{\alpha_L}$ auf der rechten Seite von (4.19) eine kovariante P -Tensordichte bilden, wobei α_g je von 1 bis $M-L$ laufen dürfen, aber $\sum_{g=1}^L \alpha_g$ kann nicht grösser als M werden. Jetzt lautet

Satz 21. T_λ sei eine kovariante P -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{f}$, dann ist

$$(4.21) \quad \tilde{T}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L} \equiv \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_L!} T_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L},$$

$$1 \leq \alpha_g \leq M-L, \quad L \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L \leq M$$

eine kovariante P -Tensordichte L -ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{f}$.

17. Auf analoge Weise kann man die folgenden Sätze wegen Satz 17 oder Satz 18 behaupten:

Satz 22. T^λ sei eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{f}$ und irgendwelche L kontravarianten P -Vektordichte P^ν vom Grad M_g und Gewichte $\mathfrak{f}_g$ ($g = 1, 2, \dots, L$) beziehungsweise $\mathfrak{g}$ seien vorgegeben, dann ist

$$\begin{aligned}
 (4.22) \quad D^\lambda(T, P, \dots, P) \\
 &= \sum_{\alpha_1=1}^{M_1} \sum_{\alpha_2=1}^{M_2} \dots \sum_{\alpha_L=1}^{M_L} \frac{\lambda!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_L! (\lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_L)!} \\
 &\quad \times T^{\lambda - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L)} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_L^{\alpha_L} \\
 &= \sum_{\nu_L=1}^{M_L} \sum_{\nu_{L-1}=\nu_L+1}^{M_{L-1}+\nu_L} \dots \sum_{\nu_1=\nu_2+1}^{M_1+\nu_2} \frac{\lambda!}{(\lambda - \nu_1)! (\nu_1 - \nu_2)! \dots (\nu_{L-1} - \nu_L)! \nu_L!} \\
 &\quad \times T^{\lambda - \nu_1} P^{\nu_1 - \nu_2} \dots P^{\nu_{L-1} - \nu_L} P^{\nu_L}
 \end{aligned}$$

eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad $M + \sum_{g=1}^L M_g$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \sum_{g=1}^L \mathfrak{f}_g$. Und die P -Vektordichte (4.22) ist von der Reihenfolge der P^ν , $P_1^\nu, P_2^\nu, \dots, P_L^\nu$ ganz unabhängig bestimmt.

Beweis. An Stelle von P^λ in Satz 18 setzt man

$$D^\lambda(T, P)_1 = \sum_{\alpha_1=1}^{M_1} \binom{\lambda}{\alpha_1} T^{\lambda - \alpha_1} P_1^{\alpha_1},$$

das nach Satz 18 eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad $M + M_1$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}_1$ sein muss, und noch dazu nimmt die P -Vektordichte P_2^ν anstatt von Q^ν , so lehrt Satz 18 uns, dass

$$\begin{aligned}
 D^\lambda(D(T, P)_1, P)_2 &= \sum_{\alpha_2=1}^{M_2} \binom{\lambda}{\alpha_2} \left\{ \sum_{\alpha_1=1}^{M_1} \binom{\lambda - \alpha_2}{\alpha_1} T^{\lambda - \alpha_2 - \alpha_1} P_1^{\alpha_1} \right\} P_2^{\alpha_2} \\
 &= \sum_{\alpha_1=1}^{M_1} \sum_{\alpha_2=1}^{M_2} \frac{\lambda!}{\alpha_1! \alpha_2! (\lambda - \alpha_1 - \alpha_2)!} T^{\lambda - \alpha_1 - \alpha_2} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \\
 &= D^\lambda(T, P)_1 P_2
 \end{aligned}$$

eine kontravariante P -Vektordichte vom Grad $M + M_1 + M_2$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ ist. $(L-1)$ -malige Wiederholung dieses Verfahrens

führt uns zu einer kontravarianten P -Vektordichte vom Grad $M + \sum_{g=1}^L M_g$ und Gewichte $\mathfrak{k} + \sum_{g=1}^L \mathfrak{k}_g$, die nichts anderes als $D^\lambda(T, P_1, P_2, \dots, P_L)$ ist, da es die Gestalt

$$\begin{aligned}
 (4.23) \quad & D^\lambda(D(T, P_1, P_2, \dots, P_{L-1}, P_L), P) \\
 &= \sum_{\alpha_L=1}^{M_L} \binom{\lambda}{\alpha_L} \left\{ \sum_{\alpha_1=1}^{M_1} \dots \sum_{\alpha_{L-1}=1}^{M_{L-1}} \frac{(\lambda - \alpha_L)!}{a_1! a_2! \dots a_{L-1}! (\lambda - \alpha_L - a_1 - \dots - a_{L-1})!} \right. \\
 &\quad \times T^{\lambda - \alpha_L - \alpha_1 - \dots - \alpha_{L-1}} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_{L-1}^{\alpha_{L-1}} \left. \right\} P_L^{\alpha_L} \\
 &= \sum_{\alpha_1=1}^{M_1} \dots \sum_{\alpha_L=1}^{M_L} \frac{\lambda!}{a_1! a_2! \dots a_L! (\lambda - a_1 - \dots - a_L)!} \\
 &\quad \times T^{\lambda - a_1 - \dots - a_L} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_L^{\alpha_L}
 \end{aligned}$$

hat. Man setzt hierbei

$$a_1 = \nu_1 - \nu_2, \quad a_2 = \nu_2 - \nu_3, \quad \dots, \quad a_{L-1} = \nu_{L-1} - \nu_L, \quad a_L = \nu_L$$

d.h.

$$\nu_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_L, \quad \nu_2 = a_2 + a_3 + \dots + a_L, \quad \dots,$$

$$\nu_{L-1} = a_{L-1} + a_L, \quad \nu_L = a_L,$$

so geht die letzte Seite von (4.23) in die letzte Seite von (4.22) über. Die Unabhängigkeit von $D^\lambda(T, P_1, \dots, P_L)$ von der Reihenfolge der $P_1^\nu, P_2^\nu, \dots, P_L^\nu$ ist jetzt nach der Gestalt des Ausdrucks auf der letzten Seite von (4.23) deutlich, w. z. b. z.

Da in Satz 22 die P -Vektordichten P^ν voneinander unabhängig und ganz beliebig angenommen werden dürfen, müssen die Koeffizienten der Produkte $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_L^{\alpha_L}$ auf der rechten Seite von (4.22) uns eine gemischte P -Vektordichte geben, d.h.

Satz 23. *Es sei eine kontravariante P -Vektordichte T^λ vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}$ gegeben, so kann man daraus die gemischte P -Tensordichte $(L+1)$ -ter Stufe von demselben Gewichte*

$$\begin{aligned}
 (4.24) \quad \tilde{T}^{\lambda, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L} &= \frac{\lambda!}{a_1! a_2! \dots a_L! (\lambda - a_1 - a_2 - \dots - a_L)!} \\
 &\quad \times T^{\lambda - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L)}
 \end{aligned}$$

bilden, welche kontravarianten Index λ vom Grad $M + \sum_{g=1}^L M_g$ und L kovariante $\alpha_g (g = 1, 2, \dots, L)$ vom Grad M_g beziehungsweise besitzt, wobei jedes der M_g eine beliebige ganze Zahl sein darf.

Der letzte Satz kann auch eben durch Vergleichung von Satz 17 und Satz 21 gerade abgeleitet werden, und man kann denselben noch weiter verallgemeinern, d.h.

Satz 24. Eine gemischte P -Tensordichte z.B. T^λ_μ liefert uns eine andere höherer Stufe von demselben Gewichte, welche die folgende Gestalt besitzt:

$$(4.25) \quad \tilde{T}^{\lambda}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L \beta_1 \beta_2 \dots \beta_H} = \frac{\lambda!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_L! (\lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_L)!} \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_H)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_H!} \times T^{\lambda - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L)}_{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_H}.$$

§ 5. Die Eigenschaften von P -Vektoren und der SYNGESchen Vektoren.

18. Es sei eine P -Skalardichte F vom Gewichte eins fest gegeben, welche im allgemeinen von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig ist, dann ist das Integral $\int F dt$ bei jeder Parametertransformation invariant, wie man schon gesehen hat. Wenn wir durch F die Metrik unseres Raumes festlegen und das Integral

$$(5.1) \quad s = \int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) dt$$

auf jeder Kurve als ihre Bogenlänge definieren, so verwandelt ungerer Raum sich in einen sogenannten intrinsiken KAWAGUCHISchen.

Auf Betrachtung der sukzessiven Ableitungen $F^{(\lambda)}$ von F nach dem Parameter t setzen wir

$$(5.2) \quad F^1 = F, \quad F^\lambda = F^{(\lambda-1)},$$

dann bilden diese Größen F^λ einen kontravarianten P -Vektor, weil bei einer Parametertransformation

$$F^1(\bar{t}) = \frac{dt}{d\bar{t}} F^1(t) = a_1^1(t^{(1)}) F^1(t)$$

und demgemäss

$$(5.3) \quad F^\lambda(\bar{t}) = \alpha_\mu^\lambda(t^{(\bar{\beta})}) F^\mu(t)$$

ist. Nach Einführung des neuen Parameters s , der durch das Integral (5.1) definiert wird, ist es handgreiflich, dass $F^\lambda(t)$ nichts anderes als die Ableitung $s^{(\lambda)}$ von s nach t . Deswegen kann (5.3) in die Gestalt

$$(5.4) \quad s^{(\bar{\lambda})} = \alpha_\mu^\lambda(t^{(\bar{\beta})}) s^{(\mu)}$$

umgeschrieben werden.

Nun ersetzen wir $t^{(\bar{\beta})}$ in $\alpha_\mu^\lambda(t^{(\bar{\beta})})$ durch $s^{(\beta)} = F^\beta(t)$ bzw. $s^{(\bar{\beta})} = F^\beta(\bar{t})$, so erfüllen die erhaltenen α_μ^λ , die wir mit A_μ^λ bzw. $\bar{A}_\mu^\lambda$ bezeichnen, die Beziehung

$$(5.5) \quad A_\mu^\lambda = (A_\mu^{\lambda-1})^{(1)} + A_{\mu-1}^{\lambda-1} F(t) \quad \text{bzw.} \quad \bar{A}_\mu^\lambda = (\bar{A}_\mu^{\lambda-1})^{(\bar{1})} + \bar{A}_{\mu-1}^{\lambda-1} F(\bar{t}),$$

das die direkte Folge von (1.5) ist. (1.15) gibt uns dann

$$(5.6) \quad A_\mu^\lambda = \alpha_\nu^\lambda(t^{(\bar{\alpha})}) A_\mu^\nu.$$

Die inversen Grössen von A_μ^λ stellen wir durch $\bar{A}_\lambda^\mu$ dar, welche durch die Beziehung

$$(5.7) \quad A_\mu^\lambda \bar{A}_\lambda^\nu = \delta_\mu^\nu \quad \text{oder} \quad A_\mu^\lambda \bar{A}_\nu^\mu = \delta_\nu^\lambda$$

sich bestimmen, und wegen (1.4)

$$(5.8) \quad \bar{A}_\lambda^\mu = \bar{\alpha}_\lambda^\mu(s^{(\alpha)}) = \bar{\alpha}_\lambda^\mu(F^\alpha).$$

Unter der Parametertransformation verhält $\bar{A}_\lambda^\mu$ sich nach der Regel

$$(5.9) \quad \bar{A}_\lambda^\mu = \bar{\alpha}_\lambda^\nu(t^{(\bar{\alpha})}) \bar{A}_\nu^\mu.$$

(5.6) und (5.9) zeigen die Richtigkeit der Behauptung des folgenden Satzes.

Satz 25. Das System von Funktionen A_μ^λ bzw. $\bar{A}_\lambda^\mu$, die sich von einer P -Skalardichte F vom Gewichte eins und ihren Ableitungen nach dem Parameter t durch die Rekursionsformeln (5.5) aufbauen, gibt

für jeden festen Wert von μ je einen kontra- bzw. kovarianten P -Vektor in bezug auf den oberen bzw. unteren Index λ und dagegen keinen P -Vektor auf die unteren bzw. oberen Index μ .

19. Der letzte Satz kann noch verallgemeinert werden. Nämlich nehmen wir einen beliebigen kontravarianten P -Vektor P^λ statt F^λ an, dessen Bestimmungszahlen vom Parameter t und von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig sein mögen. F^λ in A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ durch P^λ ersetzend, erhalten wir $A^\lambda(P)$ und $\overset{\mu}{A}_\lambda(P)$. Die P -Vektoreigenschaft von A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ hat ihren Grund wesentlich in der Transformationsregel (5.3) der Grössen F^λ aber nicht in dem Verfahren „Differentiation nach t “ selbst. Da unter jeder Parametertransformation P^λ sich in ganz derselben Weise wie F^λ verhält, müssen deshalb die erhaltenen Grössen $A^\lambda(P)$ bzw. $\overset{\mu}{A}_\lambda(P)$ für jeden Wert von μ auch einen kontra- bzw. kovarianten P -Vektor aufbauen. Hiernach schliesst man den

Satz 26. P^λ sei ein kontravarianter P -Vektor, dessen Bestimmungszahlen vom Parameter t und von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig sein mögen. Dann sind die Grössen $A^\lambda(P)$ bzw. $\overset{\mu}{A}_\lambda(P)$, welche aus den Grössen A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ durch Setzung von P^λ an Stelle von F^λ hergeleitet werden, für jeden festen Wert von μ die Bestimmungszahlen eines kontra- bzw. kovarianten P -Vektors.

Es ist beachtungswert, dass P^1 immer eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist, wenn P^λ ein kontravarianter P -Vektor ist. Denn P^1 geht bei Parametertransformation in $\bar{P}^1 = \alpha_1^1 P^1 = t^{(1)} P^1$ über. Allgemeiner P^μ ist eine P -Skalardichte vom Gewichte μ , wenn und nur wenn $P^1 = P^2 = \dots = P^{\mu-1} = 0$ ist, weil $\bar{P}^\mu = \alpha_\nu^\mu P^\nu = (t^{(1)})^\mu P^\mu$.

20. Die Bestimmungszahlen eines Linienelementes M -ter Ordnung $x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i}$ sind bei einer Parametertransformation nicht invariant und verändern sich nach (1.1). Mittels der P -Vektoren A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ können wir aber aus den Bestimmungszahlen ein Linienelement M -ter Ordnung herleiten, dessen Bestimmungszahlen bei jeder Parametertransformation unverändert bleiben, und das mit dem ursprünglichen Linienelemente demselben Kurvenelemente angehört. Nämlich setzt man

$$(5.10) \quad X^{[\mu]i} = \overset{\mu}{A}_\lambda x^{(\lambda)i},$$

so bleibt jedes der $X^{[\mu]i}$ bei jeder Parametertransformation erhalten, da $\overset{\mu}{A}_\lambda(\mu \text{ fest gehalten})$ bzw. $x^{(\lambda)i}$ ein ko- bzw. kontravarianter P -Vektor ist. Wegen (5.8) und (1.1) bildet das Wertesystem $X^i(=x^i)$, $X^{[1]i}$, $\dots$, $X^{[M]i}$ eben die Bestimmungszahlen eines solchen Linienelementes, in das bei der Parametertransformation $s = s(t)$ das ursprüngliche Linienelement $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ übergeht. Hiernach kann man schliessen, dass die beiden Linienelemente demselben Kurvenelemente angehören.

Wir können dasselbe Ergebnis erhalten, auch wenn $\overset{\mu}{A}_\lambda(P)$ an Stelle von $\overset{\mu}{A}_\lambda$ angenommen ist.

Die P -Vektoren A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ spielen in unserer Theorie eine sehr wichtige Rolle, wie die oben erwähnte Tatsache beweist. Wir wollen im Folgenden noch eine andere wichtige Anwendung dieser P -Vektoren erläutern.

Wenn f eine von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängige P -Skalardichte vom Gewichte Null oder P -Invariante ist, so ist $f_{(\alpha)i}$ nach (1.25) ein kovarianter P -Vektor. Somit ist es klar, dass die Grösse

$$(5.11) \quad f_{[\alpha]i} = f_{(\beta)i} A_{\alpha}^{\beta},$$

auch eine P -Invariante ist. Die Grössen $f_{[\alpha]i}$ sind nichts anderes als die partiellen Ableitungen von f nach den Bestimmungszahlen des Linienelementes (5.10), d.h.

$$(5.12) \quad f_{[\alpha]i} = \frac{\partial f}{\partial X^{[\alpha]i}}.$$

Denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial X^{[\alpha]i}} = f_{(\beta)j} \frac{\partial x^{(\beta)j}}{\partial X^{[\alpha]i}} = f_{(\beta)i} A_{\alpha}^{\beta} = f_{[\alpha]i},$$

da wegen (5.10) $x^{(\beta)i} = A_{\alpha}^{\beta} X^{[\alpha]i}$ ist.

Nach Einführung des P -invarianten Linienelementes (5.10) kann man aus einer nicht P -invarianten Funktion $\phi(x^{(\alpha)i})$ vom Linienelemente M -ter Ordnung die P -invariante Grössen $\phi(X^{[\alpha]i})$ herleiten. Dieses Verfahren ist gleichbedeutend mit der Annahme eines P -invarianten Parameters s anstatt des beliebigen Parameters t . Ist

1) Im Falle, dass f nicht P -Invariante ist, besteht auch diese Beziehung.

z.B. $v^i(x^{(\alpha)j})$ ein Vektor, dessen Bestimmungszahlen von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängen und bei der Parametertransformation nicht invariant sein mögen, dann ist $v^i(X^{[\alpha]j})$ wieder ein Vektor mit P -invarianten Bestimmungszahlen. Denn bei einer Koordinatentransformation $x^a = x^a(x^i)$ enthalten die Koeffizienten $\frac{\partial x^a}{\partial x^i}$ der Transformationsgleichungen $v^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^i} v^i$ des Vektors die Größen $x^{(\alpha)i}$ nicht, d.h. sind von der Parametrisierung gar nicht abhängig, und damit herrschen dieselben Transformationsgleichungen die ersetzen $v^i(X^{[\alpha]j})$.

$\phi(x^{(\alpha)i})$ sei eine beliebige Funktion eines Linienelementes M -ter Ordnung und gehe durch die Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ in $\bar{\phi}(x^{(\bar{\alpha})i})$ über, dann erhalten wir nach Setzung $x^{(\alpha)i} = A^\alpha_{\beta} X^{[\beta]i}$ bzw. $x^{(\bar{\alpha})i} = \bar{A}^\alpha_{\beta} X^{[\beta]i}$

$$\frac{\partial}{\partial t^{(\bar{K})}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X^{[\beta]k}} \right) = \frac{\partial}{\partial X^{[\beta]k}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^{(\bar{K})}} \right),$$

da $X^{[\beta]k}$ von den $t^{(\bar{K})}$ unabhängig sein müssen. Daraus folgt gleich

$$(5.13) \quad \Delta_K \phi_{[\beta]k} = (\Delta_K \phi)_{[\beta]k}.$$

21. F sei eine skalare Funktion vom Parameter t sowie von einem Linienelemente M -ter Ordnung, dann liefert dieselbe uns die $M+1$ sogenannten SYNGESchen Vektoren¹⁾

$$(5.14) \quad E_{i\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^M (-1)^\lambda \binom{\lambda}{\mu} (F_{(\lambda)i})^{(\lambda-\mu)}, \quad \mu = 0, 1, \dots, M,$$

die die Beziehung

$$(5.15) \quad E_{i0}(F\phi) = \sum_{\mu=0}^M E_{i\mu}(F)\phi^{(\mu)} + \phi_i F$$

erfüllen, während ϕ eine beliebige Punktfunktion ist. Hierbei versteht man unter $E_{i\mu}(F)$ die von F gebildeten SYNGESchen Vektoren.

1) Diese Vektoren sind von H. V. CRAIG [5] und J. L. SYNGE [1] eingeführt worden. Siehe auch L. KOSCHMIEDER [v], S. 125. Von der Extensoreigenschaft von $F_{(\lambda)i}$ ausgehend, hat der Verfasser in D. H. I, S. 32 auch dieselben auf dem Standpunkt von Extensoren eingeführt. Man pflegt für gewöhnlich, die SYNGESchen Vektoren mit $\overset{\mu}{E}_i$ zu bezeichnen. Aber weil, diese SYNGESchen Vektoren $\overset{\mu}{E}_i$ für jeden festen Wert von i je eine kovariante P -Vektordichte vom Gewichte eins bilden, wie gerade unten bewiesen wird, möchte der Verfasser sie bequemi-
halber mit $E_{i\mu}$ bezeichnen.

E_{i0} ist der EULERSche Vektor und hat die Eigenschaft, dass seine Bestimmungszahlen unter der Gruppe $\mathfrak{G}_M$ von Parametertransformationen jede eine Integralinvariante d.h. eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist:

$$(5.16) \quad E_{i0}(\bar{F}) = t^{(\bar{1})} E_{i0}(F),$$

insofern F eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist. Deswegen ist nach (5.15)

$$\sum_{\mu=0}^M E_{i\mu}(\bar{F}) \phi^{(\bar{\mu})} + \phi_i \bar{F} = t^{(\bar{1})} \left\{ \sum_{\mu=0}^M E_{i\mu}(F) \phi^{(\mu)} + \phi_i F \right\},$$

daraus folgt durch Vergleichung der Koeffizienten der Ableitungen $\phi^{(\bar{\mu})}$ auf den beiden Seiten

$$(5.17) \quad E_{i\mu}(\bar{F}) = t^{(\bar{1})} \bar{a}_\mu^\lambda E_{i\lambda}(F).$$

Wir nennen den Inbegriff von H Grössen $\mathfrak{P}^\lambda$ bzw. $\mathfrak{P}_\lambda$, welche sich bei der Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ nach der Regel

$$(5.18) \quad \bar{\mathfrak{P}}^\lambda = (t^{(\bar{1})})^\dagger a_\mu^\lambda \mathfrak{P}^\mu \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathfrak{P}}_\lambda = (t^{(\bar{1})})^\dagger \bar{a}_\lambda^\mu \mathfrak{P}_\mu$$

verändern, eine kontra- bzw. kovariante P -Vektordichte vom Gewichte $\dagger$ und von der Ordnung H . Dann kann man nach (5.17) schliessen den

Satz 27. Die Bestimmungszahlen der SYNGESchen Vektoren $E_{i\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, M$) bilden für jeden festen Wert von i je eine kovariante P -Vektordichte vom Gewichte eins und von der Ordnung M , wenn F eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist.

Insbesondere gibt (5.17)

$$E_{iM}(\bar{F}) = t^{(\bar{1})} \bar{a}_M^\lambda E_{i\lambda}(F) = t^{(\bar{1})} \bar{a}_M^M E_{iM}(F) = (t^{(\bar{1})})^{-(M-1)} E_{iM}(F),$$

daraus erhält man den

Zusatz 1. Die Bestimmungszahlen des SYNGESchen Vektor^s $E_{iM} = (-1)^M F_{(M)i}$ sind je eine P -Skalardichte vom Gewichte $-(M-1)$.

Wegen Satz 2 besteht weiter der

Zusatz 2. * Die Grössen

$$(5.19) \quad \mathfrak{G}_{i\mu} = F^{-1} E_{i\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, M$$

bilden für jeden festen Wert von i einen kovarianten P -Vektor von der Ordnung M , insofern F eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist.

Die beiden Seiten von (5.18) nach $t^{(\bar{K})}$ differenzierend und dann $t^{(\bar{a})} = \delta_1^a$ setzend, haben wir sofort wegen Satz 1 bzw. (3.19)

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \Delta_K \mathfrak{P}^\lambda &= \mathfrak{f} \delta_K^1 \mathfrak{P}^\lambda + \left(\frac{\lambda}{K} \right) \mathfrak{P}^{\lambda-K+1} \quad \text{bzw.} \\ \Delta_K \mathfrak{P}_\lambda &= \mathfrak{f} \delta_K^1 \mathfrak{P}_\lambda - \left(\lambda + \frac{K-1}{K} \right) \mathfrak{P}_{\lambda+K-1}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung sagt nach Satz 27 der

Zusatz 3. Die SYNGESchen Vektoren $E_{i\mu}$ genügen der Beziehung

$$(5.21) \quad \Delta_K E_{i\mu} = \delta_K^1 E_{i\mu} - \left(\mu + \frac{K-1}{K} \right) E_{i, \mu+K-1}.$$

Auf Grund von Satz 25 und Satz 27 schliesst man den

Satz 28. Die Grössen

$$(5.22) \quad E_{i[\mu]} = A^\lambda_{\mu} E_{i\lambda}, \quad \mu = 0, 1, \dots, M$$

bilden für jeden festen Wert von μ einen kovarianten Vektor mit dem Index i und sind je eine P -Skalardichte vom Gewichte eins¹⁾.

Verknüpfend diesen Satz und Zusatz 2 von Satz 27, erreichen wir den wichtigen

Zusatz. Die Grössen

$$(5.23) \quad \mathfrak{E}_{i[\mu]} = A^\lambda_{\mu} \mathfrak{E}_{i\lambda}, \quad \mu = 0, 1, \dots, M$$

bilden für einen festen Wert von μ einen kovarianten Vektor mit dem Index i , dessen Bestimmungszahlen jede für sich P -Invariante sind.

Die Vektoren (5.23) sind nichts anderes als die bei festem Parameter s berechneten SYNGESchen Vektoren und fallen genau mit den vom Verfasser früher eingeführten intrinsiken SYNGESchen Vektoren²⁾ zusammen.

Insbesondere erkennt man sofort

$$(5.23)_{\text{bis}} \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}_{i[0]} &= F^{-1} E_{i0}, \quad \mathfrak{E}_{i[1]} = F^{-1} \sum_{\mu=1}^M F^{(\mu-1)} E_{i\mu}, \\ \mathfrak{E}_{i[M]} &= F^{M-1} E_{iM}. \end{aligned}$$

1) Für $\mu = 0$ ist es klar, dass diese Beziehung besteht, weil $E_{i[0]} = A^\lambda_0 E_{i\lambda} = E_{i0}$, da $A^\lambda_0 = \delta_0^\lambda$ ist.

2) Siehe A. KAWAGUCHI [14], S. 237.

22. Wir wollen im Folgenden die verschiedenen Eigenschaft der SYNGESchen Vektoren eingehend behandeln, während die Funktion F von einem Linienelemente M -ter Ordnung eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist. Wir setzen hierbei voraus, dass die ganze Zahl M grösser als eins ist. Diese Voraussetzung schadet der Allgemeinheit der Theorie nicht wesentlich, da im Falle $M = 1$ die Theorie ziemlich einfach wird.

Wenn eine Grösse f von einem Linienelemente K -ter Ordnung aber nicht von einem höherer Ordnung abhängig ist, sagt man, dass die Grösse f von der Ordnung K ist.

Z.B. die Ordnung der Funktion F ist M . Somit ersehen wir nach (5.14) sofort, dass $x^{(2M-\mu)i}$ die höchsten von den in dem μ -ten SYNGESchen Vektor $E_{i\mu}$ enthaltenen Ableitungen von x^i sind, d.h.

Satz 29. Der μ -te SYNGESche Vektor $E_{i\mu}$ ist im allgemeinen von der Ordnung $2M - \mu^1$.

Besonderes ist der EULERSche Vektor E_{i0} von der Ordnung $2M$ und der erste SYNGESche Vektor E_{i1} $2M - 1$.

Die Funktion α_μ^λ enthält $t^{(\lambda-\mu+1)}$ als die höchste Ableitung, wie man wegen Satz 1 leicht versichern kann. Deshalb enthält A^λ sowie $\overset{\mu}{A}_\lambda$ die Funktion $F^{\lambda-\mu+1}$ d.h. $F^{(\lambda-\mu)}$ als die höchste Ableitung von F , somit ist A^λ sowie $\overset{\mu}{A}_\lambda$ von der Ordnung $M + \lambda - \mu$. Nämlich man erhält unter Berücksichtigung von (5.19) und (5.23) den

Satz 30. Die Funktionen A^λ und $\overset{\mu}{A}_\lambda$ sind von der Ordnung $M + \lambda - \mu$, und die Ordnung des intrinsiken SYNGESchen Vektors $\mathbb{C}_{[i\mu]}$ ist im allgemeinen $2M - \mu$.

23. Aus der Beziehung $\Delta_M F = F_{(M)i} x^{(1)i} = 0$ bestätigt man sogleich durch Differentiation nach $x^{(M)j}$

$$(5.24) \quad F_{(M)i(M)j} x^{(1)i} = 0.$$

Diese Beziehung bedeutet, dass der Rang der Matrix $((F_{(M)i(M)j}))$ höchstens $n-1$ ist. Es ist klar, dass $F_{(M)i(M)j}$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist, dessen Bestimmungszahlen P -Skalardichten vom Gewichte $-(2M-1)$ sind.

1) Wenn die Funktion F bezüglich der höchsten Ableitungen $x^{(M)i}$ linear ist, d.h. $F_{(M)i}$ die Ableitungen $x^{(M)i}$ nicht mehr enthält, erniedrigt die Ordnung des SYNGESchen Vektors sich um $M-\nu$, während $F_{(M)i}$ die Ableitungen $x^{(\nu)i}$ als die höchsten enthält.

Nun regen wir die Frage an, wann die SYNGESchen Vektoren linear unabhängig sind, wenn das betreffende Linienelement $2M$ -ter Ordnung ganz beliebig gewählt ist? Die Antwort dafür schenkt der

Satz 31. Jede L der SYNGESchen Vektoren sind voneinander linear unabhängig, wenn der Rang der Matrix $((E_{(M)i(M)j}))$ grösser als $L-1$ ist.

Beweis. Es seien L Vektoren der SYNGESchen $E_{i\mu_1}, E_{i\mu_2}, \dots, E_{i\mu_L}$ voneinander linear abhängig, d.h. es soll L Skalargrößen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ geben, welche die Beziehung

$$(5.25) \quad \rho_1 E_{i\mu_1} + \rho_2 E_{i\mu_2} + \dots + \rho_L E_{i\mu_L} = 0$$

erfüllen. Hierbei darf man ohne Schaden der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_L,$$

da man die Reihenfolge der betrachteten Vektoren passend verändern kann. Dazu kann ρ_1 gleich eins gesetzt werden. Denn falls $\rho_1 \neq 0$ dürfen wir nur die linke Seite von (5.25) mit ρ_1 dividieren, und falls $\rho_1 = 0$ lassen wir das erste Glied von (5.25) weg und dann wiederholen dasselbe Verfahren, das zweite Glied anstatt des ersten betrachtend. Dann mögen $\rho_2, \dots, \rho_L$ die Ableitungen $x^{(2M-\mu_1)j}$ als die höchsten enthalten, aber sie können keine höheren Ableitungen besitzen, da die Vektoren $E_{i\mu_1}, E_{i\mu_2}, \dots, E_{i\mu_L}$ genau die sind. Nun differenzieren wir (5.25) nach $x^{(2M-\mu_1)j}$, so ergibt sich

$$(5.26) \quad (-1)^M \binom{M}{\mu_1} F_{(M)i(M)j} + \rho_2 x^{(2M-\mu_1)j} E_{i\mu_2} + \dots + \rho_L x^{(2M-\mu_1)j} E_{i\mu_L} = 0,$$

da $E_{i\mu}$ für $\mu > \mu_1$ die Ableitungen $x^{(2M-\mu_1)j}$ nicht enthält und nach (5.14)

$$E_{i\mu_1(2M-\mu_1)j} = (-1)^M \binom{M}{\mu_1} F_{(M)i(M)j}.$$

(5.26) zeigt, dass der Rang der Matrix $((F_{(M)i(M)j}))$ höchstens $L-1$ ist. Das widerspricht der Hypothese des Satzes, w. z. b. z.

24. Überschieben wir die SYNGESchen Vektoren $E_{i\mu}$ mit dem Vektor $x^{(1)i}$, dann ist nach (5.14) mit Hilfe einer in D. H. I bewiesenen Formel¹⁾

$$1) \quad AB^{(\mu)} = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} \binom{\mu}{\nu} (A^{(\nu)} B)^{(\mu-\nu)} = (-1)^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} \binom{\mu}{\nu} (A^{(\mu-\nu)} B)^{(\nu)}.$$

Siehe D.H. I, S. 15.

$$\begin{aligned}
E_{i\mu} x^{(1)i} &= \sum_{\lambda=\mu}^M (-1)^\lambda \binom{\lambda}{\mu} (F_{(\lambda)i})^{(\lambda-\mu)} x^{(1)i} \\
&= \sum_{\lambda=\mu}^M (-1)^\lambda \binom{\lambda}{\mu} (-1)^{\lambda-\mu} \sum_{\nu=0}^{\lambda-\mu} (-1)^\nu \binom{\lambda-\mu}{\nu} (x^{(\lambda-\mu-\nu+1)i} F_{(\lambda)i})^{(\nu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{M-\mu} (-1)^{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} \sum_{\lambda=\mu+\nu}^M \binom{\lambda}{\mu+\nu} (x^{(\lambda-\mu-\nu+1)i} F_{(\lambda)i})^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Da $\sum_{\lambda=\mu+\nu}^M \binom{\lambda}{\mu+\nu} x^{(\lambda-\mu-\nu+1)i} F_{(\lambda)i} = \Delta_{\mu+\nu} F$ ist, erhält man dadurch

$$(5.27) \quad E_{i\mu} x^{(1)i} = \sum_{\nu=0}^{M-\mu} (-1)^{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (\Delta_{\mu+\nu} F)^{(\nu)}.$$

Daraus folgt mittels der Beziehungen $\Delta_K F = \delta_K^1 F$ der

Satz 32. Für die SYNGEschen Vektoren bestehen die Gleichungen

$$(5.28) \quad E_{i\mu} x^{(1)i} = \delta_\mu^1 F, \quad .$$

d.h. die $(n-1)$ -Richtungen aller SYNGEschen Vektoren $E_{i\mu}$ mit der einzigen Ausnahme von E_{i1} enthalten die Richtung des Vektors $x^{(1)i}$.

Es ist bemerkenswert, dass die Beziehung (5.28) auch für den EULERSchen Vektor E_{i0} gültig ist. Denn nach (5.27) ist

$$E_{i0} x^{(1)i} = \sum_{\nu=0}^M (-1)^\nu (\Delta_\nu F)^{(\nu)} = \Delta_0 F - (\Delta_1 F)^{(1)} = 0.$$

Umgekehrt kann man die Ausdrücke $\Delta_K F$ durch die Skalare $E_{i\mu} x^{(1)i}$ und ihre Ableitungen darstellen, nämlich

$$\begin{aligned}
\Delta_K F &= \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)i} F_{(\lambda)i} \\
&= \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} (-1)^{\lambda-K} \sum_{\nu=0}^{\lambda-K} (-1)^\nu \binom{\lambda-K}{\nu} \{ (F_{(\lambda)i})^{(\lambda-K-\nu)} x^{(1)i} \}^{(\nu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{M-K} \sum_{\lambda=K+\nu}^M (-1)^{\lambda-K-\nu} \binom{K+\nu}{\nu} \binom{\lambda}{K+\nu} \{ (F_{(\lambda)i})^{(\lambda-K-\nu)} x^{(1)i} \}^{(\nu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{M-K} (-1)^{K+\nu} \binom{K+\nu}{\nu} \left\{ \left[\sum_{\lambda=K+\nu}^M (-1)^\lambda \binom{\lambda}{K+\nu} (F_{(\lambda)i})^{(\lambda-K-\nu)} \right] x^{(1)i} \right\}^{(\nu)},
\end{aligned}$$

so ist

$$(5.29) \quad \Delta_K F = \sum_{\nu=0}^{M-K} (-1)^{K+\nu} \binom{K+\nu}{\nu} (E_{i, K+\nu} x^{(1)i})^{(\nu)}.$$

Deshalb können wir behaupten, dass die Beziehungen $\Delta_K F = \delta_K^1 F$ bestehen, wenn $E_{i\mu} x^{(1)i} = \delta_\mu^1 F$ sind, d.h.

Satz 33. Das System der Beziehungen (5.28) ist gleichwertig mit dem System $\Delta_K F = \delta_K^1 F$, d.h. es enthält die Tatsache, dass F eine P -Skalardichte vom Gewichte eins ist.

Die Beziehungen (5.29) kann man vom Standpunkt der Theorie der Extensoren ausführen. Nämlich ist $x^{(\alpha+1)i}$ bzw. $\binom{\alpha+K}{K} F_{(\alpha+K)i}$ ein exkontra- bzw. exkovarianter Extensor erster Stufe vom Grad $M-K$, dann ist $\Delta_K F$ nichts anderes als der aus den beiden Extensoren durch Überschiebung hergeleitete Skalar $\sum_{\alpha=0}^{M-K} x^{(\alpha+1)i} \binom{\alpha+K}{K} F_{(\alpha+K)i} = \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)i} F_{(\lambda)i}$. Somit muss $\Delta_K F$ nach Satz 27 in D.H.I, § 8 durch die Skalarprodukte der wegen der beiden Extensoren $x^{(\alpha+1)i}$ und $\binom{\alpha+K}{K} F_{(\alpha+K)i}$ völlig fest bestimmten Vektoren $x^{(1)i}$ und $E_{i\mu}$ und durch die sukzessiven Ableitungen der Skalarprodukte darstellbar sein. Die erhaltenen Ausdrücke sind genau mit (5.29) übereinstimmend, wie man leicht verifizieren kann.

25. Mit Hilfe der Theorie der Extensoren kann (5.28) verallgemeinert werden. Nämlich, $F_{(\alpha)i}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, M$) ist bekanntlich ein exkovarianter Extensor vom Grad M , aus dem man die folgenden exkovarianten Extensoren bilden kann:

$$(5.30) \quad \mathfrak{E}^H F_{(\alpha)i} = H! \sum_{\nu=0}^H (-1)^\nu \binom{\alpha+\nu}{\nu} \binom{M-\alpha-\nu}{M-H-\alpha} F_{(\alpha+\nu)i}^{(\nu)},$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, M-H^1).$$

Wir können aus diesen Extensoren durch Überschiebung mit dem exkontravarianten Extensor $x^{(\alpha+1)i}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, M-H$) viele Invarianten herleiten. In der Tat erhält man aus dem Extensor $\binom{K+\alpha}{\alpha} \mathfrak{E}^H F_{(K+\alpha)i}$ ²⁾ für $K \geq 1$ die Invariante ³⁾

$$\sum_{\alpha=0}^{M-H-K} \left\{ \binom{K+\alpha}{\alpha} \mathfrak{E}^H F_{(K+\alpha)i} \right\} x^{(\alpha+1)i}$$

$$= H! \sum_{\sigma=0}^H (-1)^\sigma \binom{K+\sigma}{\sigma} \binom{M-K-\sigma}{M-H-K} (\Delta_{K+\sigma} F)^{(\sigma)},$$

1) Siehe D.H. I, S. 31, Satz 13.

2) $T_{\alpha i}$ sei ein exkovarianter Extensor vom Grad G , so ist $\binom{G-K+\alpha}{\alpha} T_{G-K+\alpha, i}$ auch ein exkovarianter Extensor vom Grad K , wobei K eine feste ganze Zahl ist. Vgl. D.H. I, S. 24, Satz 6.

3) Vgl. D.H. I, S. 62, (9.7) und (9.8).

daraus folgt falls $\Delta_K F = \delta_K^1 F$

$$(5.31) \quad \sum_{\alpha=0}^{M-H-K} \left\{ \binom{K+\alpha}{\alpha} \mathfrak{S}^H F_{(K+\alpha)i} \right\} x^{(\alpha+1)i} = \delta_K^1 \frac{(M-1)!}{(M-H-1)!} F.$$

Insbesondere hat man für $H = 0$

$$\sum_{\alpha=0}^{M-K} \binom{K+\alpha}{\alpha} x^{(\alpha+1)i} F_{(K+\alpha)i} = \delta_K^1 F,$$

dessen linke Seite genau $\Delta_K F$ ist.

Wegen $\mathfrak{S}^H F_{(M-H)i} = (-1)^{M-H} H! E_{i, M-H}^{(1)}$ wird (5.31) in die Gestalt

$$(5.31a) \quad (-1)^{\bar{M}} \binom{\bar{M}}{L} E_{i, \bar{M}} x^{(L+1)i} + \frac{1}{(M-\bar{M})!} \sum_{\alpha=0}^{L-1} \left\{ \binom{\bar{M}-L+\alpha}{\alpha} \mathfrak{S}^H F_{(\bar{M}-L+\alpha)i} \right\} x^{(\alpha+1)i} = \delta_{L+1}^{\bar{M}} \binom{M-1}{M-\bar{M}} F$$

umgeschrieben, setzend $\bar{M} = M-H$. (5.31 a) ist eben die gesuchte Verallgemeinerung von (5.28). Denn setzt man $L = 0$ in (5.31 a), so geht es genau in (5.28) über.

Für $L = 1$ reduziert (5.31 a) sich

$$(5.31b) \quad (-1)^{\bar{M}} \bar{M} E_{i, \bar{M}} x^{(2)i} + \frac{1}{(M-\bar{M})!} \mathfrak{S}^H F_{(\bar{M}-1)i} x^{(1)i} = \delta_2^{\bar{M}} (M-1) F,$$

wobei

$$(5.32) \quad \frac{1}{(M-\bar{M})!} \mathfrak{S}^H F_{(\bar{M}-1)i} = \sum_{\nu=0}^{M-\bar{M}} (-1)^{\nu} \binom{\bar{M}-1+\nu}{\nu} (M-\bar{M}+1-\nu) F_{(\bar{M}-1+\nu)i}^{(\nu)},$$

und für $L = \bar{M}-1$

$$(5.31c) \quad (-1)^{\bar{M}} \bar{M} E_{i, \bar{M}} x^{(\bar{M})i} + \frac{1}{(M-\bar{M})!} \sum_{\alpha=0}^{\bar{M}-2} (\alpha+1) \mathfrak{S}^H F_{(\alpha+1)i} x^{(\alpha+1)i} = \binom{M-1}{M-\bar{M}} F.$$

1) Siehe D.H. I, S. 32, (4.5).

Bemerkung. Es ergeben sich noch andere kovariante Extensoren, die aus dem Extensor $F_{(\alpha)i}$ hergeleitet werden,

$$(5.33) \quad \mathfrak{Z}^H F_{(\alpha)i} = \sum_{\nu=0}^{M-H-\alpha} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} F_{(\alpha+H+\nu)i}^{(\nu)},$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, M-H^1),$$

$$(5.34) \quad \mathfrak{Y}^H F_{(\alpha)i} = \sum_{\nu \geq 0} \binom{H}{\nu} F_{(\alpha-\nu)i}^{(H-\nu)} \quad \text{für } \alpha = 0, 1, \dots, M$$

$$= \sum_{\nu=\alpha-G}^H \binom{H}{\nu} F_{(\alpha-\nu)i}^{(H-\nu)}$$

$$\text{für } \alpha = M, \dots, M+H^2).$$

Die von diesen Extensoren auf dieselbe Weise gebildeten Invarianten können sich alle durch die Invarianten $\Delta_K F$ und ihre Ableitungen nach t darstellen³⁾:

$$\sum_{\lambda=K}^{M-H} \binom{\lambda}{H} x^{(\lambda-K+1)i} \mathfrak{Z}^H F_{(\lambda)i} = \sum_{\nu=0}^{M-H-K} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} (\Delta_{K+H+\nu} F)^{(\nu)},$$

$$\sum_{\lambda=K}^{M-H} \binom{\lambda}{H} x^{(\lambda-K+1)i} \mathfrak{Y}^H F_{(\lambda)i} = \sum_{\nu=0}^H \binom{H}{\nu} (\Delta_{K-\nu} F)^{(H-\nu)},$$

somit ist es genug, nur die Invarianten $\Delta_K F$ zu behandeln, und man braucht gar nicht die anderen Invarianten.

§ 6. Die erweiterten Parametertransformationen und $\mathfrak{B}$ -Vektoren.

26. Bei einer Parametertransformation wandelt sich ein Linienelement M -ter Ordnung in (1.1) um, wie wir schon gesehen haben. Nun betrachten wir zwei zueinander unendlich benachbarte Linienelemente M -ter Ordnung,

$$(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i}) \quad \text{und} \quad (x^i + dx^i, x^{(1)i} + dx^{(1)i}, \dots, x^{(M)i} + dx^{(M)i}).$$

Wenn diese beiden Linienelemente gleichzeitig auf demselben Wert desselben Parameters sich beziehen, d.h. $dt \equiv 0$, und derselben Parametertransformation unterworfen sind, so besteht wegen (1.1) für die Differenzen von Bestimmungszahlen der beiden Linienelemente

1) Vgl. D.H. I, S. 41.

2) Vgl. D.H. I, S. 47.

3) Siehe D.H. I, S. 63, (9.9) und (9.10); S. 64, (9.12) und (9.13).

$$(6.1) \quad dx^{(\bar{\lambda})i} = a_{\mu}^{\lambda} dx^{(\mu)i}.$$

Dagegen seien die beiden Linienelemente zu verschiedenen Werten desselben Parameters entsprechend, d.h. $dt \neq 0^1$, bekommt man aus (1.1) durch Differentiation

$$(6.2) \quad dx^{(\bar{\lambda})i} = a_{\mu}^{\lambda} dx^{(\mu)i} + (da_{\mu}^{\lambda})x^{(\mu)i} = \dot{a}_{\mu}^{\lambda} dx^{(\mu)i} + \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\nu)}} x^{(\mu)i} dt^{(\nu)},$$

d.h.

$$(6.2)_{\text{bis}} \quad dx^{(\bar{\lambda})i} = a_{\mu}^{\lambda} dx^{(\mu)i} + a_{\mu\nu}^{\lambda} x^{(\mu)i} t^{(\nu+1)} \frac{1}{t^{(1)}} dt,$$

wobei wegen Satz 1

$$(6.3) \quad a_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}}{\partial t^{(\nu)}} = \binom{\lambda}{\nu} a_{\mu-1}^{\lambda-\nu}.$$

27. Im allgemeinen, zwei verschiedene Linienelemente, $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ und $(x'^i, x'^{(1)i}, \dots, x'^{(M)i})$, mögen sich nicht auf denselben Parameter beziehen, sondern verschiedene voneinander unabhängige Parameter, t und t' , beziehungsweise tragen. Danach sollen wir hierbei die Parametertransformation ins Auge fassen, die die beiden betreffenden Parameter, t und t' , gleichzeitig beziehungsweise in $\bar{t}$ und $\bar{t}'$ überführt, worin die beiden neuen Parameter, $\bar{t}$ und $\bar{t}'$ noch voneinander ganz unabhängig sein können. Dadurch mögen im allgemeinen die Differenzen der Ableitungen $t'^{(\nu)} - t^{(\nu)}$ nicht sämtlich verschwinden.

Es ist nicht unnatürlich sondern viel bequemer und zweckmäßiger, die folgende Voraussetzung für die oben erwähnten, erweiterten Parametertransformationen anzunehmen.

Voraussetzung. Die erweiterte Parametertransformation führt jede zwei zueinander unendlich benachbarten Linienelemente auch in zwei noch zueinander unendlich benachbarte Linienelemente über. D.h. die unendliche Benachbarkeit von Linienelementen bleibt bei der erweiterten Parametertransformation erhalten, oder die durch die erweiterte Parametertransformation hervorgerufene Linienelemententransformation ist stetig.

1) Z.B. das ist der Fall, wo die beiden Linienelemente derselben mit dem Parameter t parametrisierten Kurve $x^i = x^i(t)$ angehören, d.h. die Kurve von der Ordnung M oskulieren.

Also wollen wir nur die der obigen Voraussetzung genügenden, erweiterten Parametertransformationen in Betracht ziehen.

Diese Voraussetzung ist damit gleichbedeutend, dass bei der erweiterten Parametertransformation die Differenzen $dt^{(\bar{v})}$ der Ableitungen $t^{(\bar{v})}$ für jede zwei unendlich benachbarten Linienelemente M -ter Ordnung sämtlich infinitesimale Grössen höchstens von derselben Ordnung wie die Differenzen $dx^{(\mu)i}$ von Bestimmungszahlen der beiden Linienelemente sind. Denn für die zwei Linienelemente M -ter Ordnung, $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ und $(x^i + \Delta x^i, x^{(1)i} + \Delta x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i} + \Delta x^{(M)i})$, welche die Parameter t und t' beziehungsweise tragen, ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta x^{(\bar{\lambda})i} &= a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) (x^{(\mu)i} + \Delta x^{(\mu)i}) - a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) x^{(\mu)i} \\ &= a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) \Delta x^{(\mu)i} + \left(a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) - a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) \right) x^{(\mu)i} \\ &= a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) \Delta x^{(\mu)i} + \frac{\partial a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) + \Theta^{\alpha}}{\partial t^{(\bar{v})}} \Delta t^{(\bar{v})} x^{(\mu)i},\end{aligned}$$

wobei $0 \leq \Theta^{\alpha} \leq \Delta t^{(\bar{\alpha})}, \quad t^{(\bar{\alpha})} - t^{(\bar{\alpha})} = \Delta t^{(\bar{\alpha})}.$

Deswegen haben wir für zwei unendlich benachbarte Linienelemente, (6.3) berücksichtigend,

$$(6.4) \quad dx^{(\bar{\lambda})i} = a_{\mu}^{\lambda} dx^{(\mu)i} + a_{\mu}^{\lambda} x^{(\mu)i} dt^{(\bar{v})}.$$

In den Theorien, die die erweiterten Parametertransformationen betreffen sollen, ist es meistens genug, nur die obige Voraussetzung erfüllenden, erweiterten Parametertransformationen zu betrachten, und man braucht nicht die allgemeineren. Insbesondere, in unserer Theorie ist es auch genau so. Unter einer erweiterten Parametertransformation verstehen wir also auf diesem Grund in der vorliegenden Abhandlung immer eine solche, die sich der Voraussetzung unterwirft.

28. f sei eine Funktion vom Parameter t und von einem Linienelemente, so unterwerfen sich ihre Ableitungen $f^{(\lambda)}$ nach t und die Variationen ihrer Ableitungen $df^{(\lambda)}$ bei einer erweiterten Parametertransformation der Transformation von der Gestalt¹⁾

1) Über die Transformationen dieser Gestalt siehe A. KAWAGUCHI [6], S. 48 und S. HOKARI [1], [2]. Wenn auch $\bar{d}f^{(\lambda)} \equiv \sum_{\sigma=1}^* (f^{(\lambda)})_{(\sigma)i} dx^{(\sigma)i}$ an Stelle von $df^{(\lambda)}$ steht, gilt noch die Transformationsregel dieser Gestalt, da a_{μ}^{λ} nur $t^{(\bar{\alpha})}$ ($\alpha \geq 1$) aber nicht t selbst enthält.

$$(6.5) \quad f^{(\bar{\lambda})} = a_{\mu}^{\lambda} f^{(\mu)}, \quad df^{(\bar{\lambda})} = a_{\mu}^{\lambda} df^{(\mu)} + a_{\mu\nu}^{\lambda} dt^{(\bar{\nu})} f^{(\mu)}.$$

Man hat nach H. HOMBUR¹⁾ den

Satz 34. Die Transformationen von der Gestalt (6.4) oder (6.5) bilden eine $2M$ -gliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_{2M}$, wenn wir den Wert von t fest halten und die dem Wert entsprechenden Werte von den $t^{(\bar{\alpha})}$ und $dt^{(\bar{\alpha})}$ voneinander unabhängig über alle reelle Werte laufen.

Diesen Satz können wir auf analoge Weise wie Satz 3 beweisen. Der identischen Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_{2M}$ entspricht das Wertesystem $t^{(\bar{\alpha})} = \delta_1^{\alpha}$, $dt^{(\bar{\alpha})} = 0$, und die Produkttransformation zweier Transformationen, $(a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}), a_{\mu\nu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})})dt^{(\bar{\nu})})$ und $(a_{\mu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})}), a_{\mu\nu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})d\bar{t}^{(\bar{\nu})})$, ist durch

$$(6.6) \quad \begin{aligned} a_{\mu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})}) &= a_{\nu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})a_{\mu}^{\nu}(t^{(\bar{\beta})}), \\ a_{\mu\nu}^{\lambda}(t^{(\bar{\alpha})})dt^{(\bar{\nu})} &= a_{\omega}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})a_{\mu\nu}^{\omega}(t^{(\bar{\beta})})dt^{(\bar{\nu})} + a_{\omega\nu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})d\bar{t}^{(\bar{\nu})}a_{\mu}^{\omega}(t^{(\bar{\beta})}) \end{aligned}$$

gegeben, wobei $dt^{(\bar{\nu})}$ nach (1.16) durch dem Ausdrucke

$$(6.7) \quad dt^{(\bar{\nu})} = \frac{\partial \Phi^{\nu}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})}, t^{(\bar{\beta})})}{\partial \bar{t}^{(\bar{\lambda})}} d\bar{t}^{(\bar{\lambda})} + \frac{\partial \Phi^{\nu}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})}, t^{(\bar{\beta})})}{\partial t^{(\bar{\mu})}} dt^{(\bar{\mu})}$$

dargestellt wird. Somit bestehen für zwei zueinander inverse Transformationen die Beziehungen

$$(6.8) \quad \begin{aligned} a_{\nu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})a_{\mu}^{\nu}(t^{(\bar{\beta})}) &= \delta_{\mu}^{\lambda}, \\ a_{\omega}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})a_{\mu\nu}^{\omega}(t^{(\bar{\beta})})dt^{(\bar{\nu})} + a_{\omega\nu}^{\lambda}(\bar{t}^{(\bar{\alpha})})d\bar{t}^{(\bar{\nu})}a_{\mu}^{\omega}(t^{(\bar{\beta})}) &= 0. \end{aligned}$$

Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{2M}$ können wir mittels (6.4) durch Differentiation nach den $t^{(\bar{K})}$ und $dt^{(\bar{K})}$ und dann durch Setzung $t^{(\bar{\alpha})} = \delta_1^{\alpha}$, $dt^{(\bar{\alpha})} = 0$ leicht erhalten, die durch

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \Delta_{0K} f &= \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} \left(x^{(\lambda-K+1)i} f_{(\lambda)i} + dx^{(\lambda-K+1)i} \frac{\partial f}{\partial dx^{(\lambda)i}} \right), \\ \tilde{\Delta}_{1K} f &= \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)i} \frac{\partial f}{\partial dx^{(\lambda)i}} \end{aligned}$$

1) Siehe H. HOMBUR [13], S. 91.

gegeben werden, wobei f eine Funktion von einem Linienelemente M -ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ und ihrem Differential $(dx^i, dx^{(1)i}, \dots, dx^{(M)i})$ ist. Ihre Klammerausdrücke sind

$$\begin{aligned} [\Delta_{0H} \Delta_{0K}]f &= \frac{(H-K) \cdot (H+K-1)!}{H! K!} \Delta_{0, H+K-1} f, \\ (6.10) \quad [\Delta_{0H} \Delta_{1K}]f &= \frac{(H-K) \cdot (H+K-1)!}{H! K!} \Delta_{1, H+K-1} f, \\ [\Delta_{1H} \Delta_{1K}]f &= 0. \end{aligned}$$

Mittels (6.10) lassen sich $\Delta_{0K}f$ für $K \geq 4$ und $\Delta_{1K}f$ für $K \geq 2$ durch $\Delta_{01}f$, $\Delta_{02}f$, $\Delta_{03}f$ und $\Delta_{11}f$ darstellen. Es ist klar, dass ein Differentialausdruck f des Linienelementes $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$ nur von dem Kurvenelemente abhängig ist, wenn und nur wenn

$$(6.11) \quad \Delta_{01}f = \Delta_{02}f = \Delta_{03}f = \Delta_{11}f = 0$$

identisch gültig sind. Denn $\Delta_{0K}f$ sowie $\Delta_{1K}f$ verschwinden dann alle identisch. Mit anderen Worten, ist (6.11) notwendig und hinreichend dafür, dass die Funktion f unter jeder erweiterten Parametertransformation invariant bleiben soll.

Da $t^{(\bar{K})}$ sowie $dt^{(\bar{K})}$ vom Koordinatensystem unabhängig sind, müssen die Operatoren Δ_{0K} sowie Δ_{1K} durch jede Koordinatentransformation erhalten bleiben. D.h., wenn f ein Skalar ist, so sind es $\Delta_{0K}f$ und $\Delta_{1K}f$ auch.

Noch allgemeiner sind $\Delta_{0K}T$ und $\Delta_{1K}T$ auch Tensoren von derselben Art wie T , wenn T ein Tensor ist. Dagegen wird die Extensoreigenschaft durch die Operatoren Δ_{0K} zerstört, aber nicht durch Δ_{1K} , weil die Koeffizienten $\frac{\partial x^{\alpha(\lambda)}}{\partial x^{i(\mu)}}$ der Transformation des Extensors bei einer erweiterten Parametertransformation nur die $t^{(\bar{K})}$ aber nicht die $dt^{(\bar{K})}$ betreffen. Und auf dieselbe Weise wie in Nr. 12 kann man versichern, dass Satz 10 auch richtig besteht, wenn die Bestimmungszahlen des Extensors je ein Differentialausdruck des Linienelementes M -ter Ordnung sind.

29. Der Begriff von P -Vektoren sowie von P -Skalardichten kann jetzt weiter verallgemeinert werden, stützend sich auf die Gruppe $\mathfrak{G}_{2M}$. Wir definieren zuerst einen kontra- bzw. kovarianten $\mathfrak{B}$ -Vektor vom Grad M durch ein System von $2M$ Differentialausdrücken, $P^A{}_\alpha$ ($A = 0, 1; \alpha = 1, 2, \dots, M$), des Linienelementes M -

ter Ordnung, die sich unter jeder erweiterten Parametertransformation nach der folgenden Regel verhalten:

$$(6.12a) \quad \bar{P}^{A\lambda} = \alpha_{B\mu}^{A\lambda} P^{B\mu} \quad (\text{summieren über } B = 0, 1)$$

bzw.

$$(6.12b) \quad \bar{P}_{A\lambda} = \bar{\alpha}_{A\lambda}^{B\mu} P_{B\mu} \quad (\text{summieren über } B = 0, 1),$$

wobei wegen (6.3) und (3.18)

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \alpha_{0\mu}^{0\lambda} &= \alpha_{1\mu}^{1\lambda} = \alpha_{\mu}^{\lambda}, \\ \alpha_{0\mu}^{1\lambda} &= d\alpha_{\mu}^{\lambda} = \alpha_{\mu\nu}^{\lambda} dt^{(\bar{\nu})}, \quad \alpha_{1\mu}^{0\lambda} = 0; \\ \bar{\alpha}_{0\lambda}^{0\mu} &= \bar{\alpha}_{1\lambda}^{1\mu} = \bar{\alpha}_{\lambda}^{\mu}, \quad \bar{\alpha}_{1\lambda}^{0\mu} = 0, \\ \bar{\alpha}_{0\lambda}^{1\mu} &= d\bar{\alpha}_{\lambda}^{\mu} = \frac{\partial \bar{\alpha}_{\lambda}^{\mu}}{\partial t^{(\bar{\nu})}} dt^{(\bar{\nu})} = - \sum_{\omega, \nu} \binom{\omega}{\nu} \binom{\omega - \nu}{\lambda - 1} \bar{\alpha}_{\omega}^{\mu} \left(\frac{1}{t^{(\bar{1})}} \right)^{(\omega - \nu - \lambda + 1)} dt^{(\bar{\nu})}. \end{aligned}$$

Also definiert das System von Bestimmungszahlen $x^{(\alpha)i}$ eines Linienelementes M -ter Ordnung und von ihren Differentialen $dx^{(\alpha)i}$ für festen Wert von i je einen kontravarianten $\mathfrak{P}$ -Vektor vom Grad M . Im allgemeinen bilden die sukzessiven Ableitungen $f^{(\alpha)}$ einer vom Linienelemente abhängigen, P -invarianten Funktion f und ihre Differentiale $df^{(\alpha)}$ einen kontravarianten $\mathfrak{P}$ -Vektor.

Dagegen wollen wir nächst auf das einfachste Beispiel von kovariantem $\mathfrak{P}$ -Vektor hinweisen. Man hat schon gelernt, dass $f_{(\alpha)i}$ ein kovarianter P -Vektor ist, wenn f eine vom Linienelemente M -ter Ordnung abhängige, P -invariante Funktion ist. Nun nimmt man $f_{(\alpha)i}$ mit ihren modifizierten Differentialen $\overset{*}{d}f_{(\alpha)i}$ zusammen an, dann verhalten sich diese $2M$ Grössen bei einer erweiterten Parametertransformation wie

$$f_{(\bar{\lambda})i} = \bar{\alpha}_{\lambda}^{\mu} f_{(\mu)i}, \quad \overset{*}{d}f_{(\bar{\lambda})i} = \bar{\alpha}_{\lambda}^{\mu} \overset{*}{d}f_{(\mu)i} + (d\bar{\alpha}_{\lambda}^{\mu}) f_{(\mu)i},$$

also bestimmen die Grössen $f_{(\alpha)i}$, $\overset{*}{d}f_{(\alpha)i}$ einen kovarianten $\mathfrak{P}$ -Vektor vom Grad M , wobei wir setzen

$$(6.14) \quad \overset{*}{d} = \sum_{\nu \geq 1} dx^{(\nu)i} \frac{\partial}{\partial x^{(\nu)i}}.$$

Aus der Definition folgt der

Satz 35. *Es sei ein kontra- bzw. kovarianter $\mathfrak{P}$ -Vektor $P^{A\alpha}$ bzw. $P_{A\alpha}$ vom Grad M gegeben, so ist $P^{0\alpha}$ bzw. $P_{1\alpha}$ ein kontra- bzw. kovarianter P -Vektor vom Grad M .*

Der letzte Satz lehrt uns, dass $\mathfrak{P}$ -Vektoren eine Verallgemeinerung von P -Vektoren sind. Dagegen kann man behaupten den

Satz 36. *P^α bzw. P_α sei ein kontra- bzw. kovarianter P -Vektor vom Grad M , so kann man $P^{A\alpha}$ bzw. $P_{A\alpha}$ als einen kontra- bzw. kovarianten $\mathfrak{P}$ -Vektor vom Grad M ansehen, setzend*

$$P^{0\alpha} = 0, \quad P^{1\alpha} = P^\alpha \quad \text{bzw.} \quad P_{1\alpha} = 0, \quad P_{0\alpha} = P_\alpha;$$

$$P^{0\alpha} = P^\alpha, \quad P^{1\alpha} = dP^\alpha \quad \text{bzw.} \quad P_{1\alpha} = P_\alpha, \quad P_{0\alpha} = dP_\alpha$$

oder

$$P^{0\alpha} = P^\alpha, \quad P^{1\alpha} = d^*P^\alpha \quad \text{bzw.} \quad P_{1\alpha} = P_\alpha, \quad P_{0\alpha} = d^*P_\alpha.$$

Es ergeben sich für $\mathfrak{P}$ -Vektoren zwei Arten von Überschiebungen d.h.

$$(6.15) \quad P^{0\lambda} Q_{1\lambda} \quad \text{und} \quad P^{A\lambda} Q_{A\lambda},$$

während $P^{A\lambda}$ bzw. $Q_{A\lambda}$ ein kontra- bzw. kovarianter $\mathfrak{P}$ -Vektor vom Grad M ist. Die Invarianz der ersten Grössen von (6.15) unter der erweiterten Parametertransformation ist gemäss Satz 35 klar, und dieselbe der zweiten kann man unter Berücksichtigung von (6.8) folgendermassen beweisen:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{1\lambda} \bar{Q}_{1\lambda} + \bar{P}^{0\lambda} \bar{Q}_{0\lambda} &= (\alpha_\mu^\lambda P^{1\mu} + d\alpha_\mu^\lambda P^{0\mu}) \bar{a}_\lambda^\nu Q_{1\nu} + \alpha_\mu^\lambda P^{0\mu} (\bar{a}_\lambda^\nu Q_{0\nu} + d\bar{a}_\lambda^\nu Q_{1\nu}) \\ &= \alpha_\mu^\lambda \bar{a}_\lambda^\nu (P^{1\mu} Q_{1\nu} + P^{0\mu} Q_{0\nu}) + (d\alpha_\mu^\lambda \bar{a}_\lambda^\nu + \alpha_\mu^\lambda d\bar{a}_\lambda^\nu) P^{0\mu} Q_{1\nu} \\ &= P^{1\mu} Q_{1\mu} + P^{0\mu} Q_{0\mu}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Verhältnis zwischen P -Vektoren und $\mathfrak{P}$ -Vektoren ist genau dasselbe wie dasjenige zwischen Vektoren und Extensoren erster Stufe (Exvektoren), wie man nach ihren Transformationsregeln erkennen kann. Ausführlicher gesagt, spielt der Index α von P -Vektor P^α oder $\mathfrak{P}$ -Vektor $P^{A\alpha}$ dieselbe Rolle wie der Koordinatenindex i vom Vektor V^i oder Extensor $V^{\alpha i}$, und der Index A von $\mathfrak{P}$ -Vektor $P^{A\alpha}$ wie der Gradindex α vom Extensor $V^{\alpha i}$. Auf diesem Grund kann man leicht auch wieder die Existenz von zwei Arten von Überschiebungen für $\mathfrak{P}$ -Vektoren nach der Existenz von K Arten von Überschiebungen für Extensoren vom

Grad K urteilen, da der $\mathfrak{P}$ -Vektor dem Extensor vom Grad 2 entsprechen soll.

30. Unter einer $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ versteht man eine Grösse f , die ein Differentialausdruck, vom Linienelemente M -ter Ordnung ist und unter jeder erweiterten Parametertransformation genau so wie eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ sich verhält, d.h.

$$(6.16) \quad \bar{f}(x^{(\bar{\alpha})i}, dx^{(\bar{\alpha})i}) = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}} f(x^{(\alpha)i}, dx^{(\alpha)i}).$$

Eine $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte Null ist eine $\mathfrak{P}$ -Invariante, die bei jeder erweiterten Parametertransformation unverändert bleibt.

Eine kontra- bzw. kovariante $\mathfrak{P}$ -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{f}$ definiert sich durch die $2M$ Differentialausdrücke $P^{A\alpha}$ bzw. $P_{A\alpha}$ des Linienelementes M -ter Ordnung, welche auch vom Parameter t und seinem Differential dt abhängig sein mögen und bei der erweiterten Parametertransformation in

$$(6.17) \quad \bar{P}^{A\lambda} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}} \alpha_{B\mu}^{A\lambda} P^{B\mu} \quad \text{bzw.} \quad \bar{P}_{A\lambda} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}} \bar{\alpha}_{A\lambda}^{B\mu} P_{B\mu}$$

übergehen. Die $\mathfrak{P}$ -Vektordichte vom Gewichte Null ist gleichbedeutend mit dem $\mathfrak{P}$ -Vektor. Im allgemeinen wird eine $\mathfrak{P}$ -Tensordichte (oder $\mathfrak{P}$ -Affinordichte) in analoger Weise wie eine gewöhnliche Tensordichte (oder Affinordichte) definiert.

Übt man die Operatoren Δ_{AK} auf eine $\mathfrak{P}$ -Skalardichte f aus, dann folgt nach (6.16) sofort

$$(6.18) \quad \Delta_{0K}f = \mathfrak{f} \delta_K^1 f, \quad \Delta_{1K}f = 0,$$

und man kann auf analoge Weise wie Satz 5 die Notwendigkeit und Vollständigkeit von (6.16) dafür beweisen, dass f eine $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ sein soll.

(6.17) liefert dagegen

$$(6.19) \quad \Delta_{0K}P^{A\lambda} = \mathfrak{f} \delta_K^1 P^{A\lambda} + \binom{\lambda}{K} P^{A, \lambda-K+1}, \quad \Delta_{1K}P^{A\lambda} = \delta_1^A \binom{\lambda}{K} P^{A, \lambda-K+1};$$

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \Delta_{0K}P_{A\lambda} &= \mathfrak{f} \delta_K^1 P_{A\lambda} - \binom{\lambda+K-1}{K} P_{A, \lambda+K-1}, \\ \Delta_{1K}P_{A\lambda} &= -\delta_A^0 \binom{\lambda+K-1}{K} P_{A, \lambda+K-1}. \end{aligned}$$

Wenn P^α bzw. T_α ein kontra- bzw. kovarianter P -Vektor vom Grad M ist, haben wir nach Satz 16 gesehen, dass

$$D_\alpha(T, P) \equiv \sum_{\lambda=\alpha+1}^M \binom{\lambda}{\alpha} T_\lambda P^{\lambda-\alpha}$$

ein kovarianter P -Vektor vom Grad M ist. Danach erkennt man unter Berücksichtigung von Satz 36 sofort den

Satz 37. Wenn P_α bzw. T^α ein kontra- bzw. kovarianter P -Vektor vom Grad M ist, dessen Bestimmungszahlen von einem Linienelemente K -ter Ordnung abhängig sind, so bilden die Größen

$$\begin{aligned} (6.21) \quad D_{1\alpha}(T, P) &= \sum_{\lambda=\alpha+1}^M \binom{\lambda}{\alpha} T_\lambda P^{\lambda-\alpha}, \\ D_{0\alpha}(T, P) &= {}^* d D_{1\alpha}(T, P) \\ &= \sum_{\lambda=\alpha+1}^M \binom{\lambda}{\alpha} (T_{\lambda(\beta)i} P^{\lambda-\alpha} + T_\lambda P^{\lambda-\alpha}_{(\beta)i}) dx^{(\beta)i} \end{aligned}$$

einen kovarianten $\mathfrak{P}$ -Vektor vom Grad M .

31. Wir wollen wieder auf den Fall (6.2) zurückgehen, wo

$$dt^{(\bar{v})} = t^{(\bar{v}+1)} d\bar{t} = t^{(\bar{v}+1)} (t^{(\bar{1})})^{-1} dt,$$

was bedeutet, dass die Variationen der Ableitungen $t^{(\bar{v})}$ immer vom Differential des Parameters t , aber nicht von der Variation des Parameters $\bar{t}$, abhängen. Es ist auch klar, dass die Transformationen von der Gestalt (6.2) eine $(M+1)$ -gliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_{M+1}$ bilden, wenn $t^{(\bar{\alpha})}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, M+1$) voneinander unabhängig über alle reelle Werte laufen. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{M+1}$ ist bekanntlich eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_{2M}$ und besitzt $\mathfrak{G}_M$ als eine Untergruppe.

Für die Produkttransformation entstehen, (6.6) entsprechend,

$$\begin{aligned} (6.22) \quad \sum_{\nu} a_{\mu\nu}^{\lambda} (t^{(\bar{\nu})}) t^{(\bar{\nu}+1)} (t^{(\bar{1})})^{-1} &= \sum_{\nu} a_{\omega}^{\lambda} (\bar{t}^{(\bar{\alpha})}) a_{\mu\nu}^{\omega} (t^{(\bar{\beta})}) t^{(\bar{\nu}+1)} (t^{(\bar{1})})^{-1} \\ &+ \sum_{\nu} a_{\omega\nu}^{\lambda} (\bar{t}^{(\bar{\alpha})}) \bar{t}^{(\bar{\nu}+1)} (t^{(\bar{1})})^{-1} a_{\mu}^{\omega} (t^{(\bar{\beta})}). \end{aligned}$$

Die identische Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_{M+1}$ entspricht dem System von Parameterwerten $t^{(\bar{\alpha})} = \delta_1^{\alpha}$. Die infinitesimalen Transformationen, welche durch Differentiation nach den Ableitungen $t^{(\bar{K})}$ ($K = 1, 2, \dots, M+1$) und dann durch Setzung $t^{(\bar{\alpha})} = \delta_1^{\alpha}$ hergeleitet werden, besitzen die Gestalten

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_1 f &= \sum_{\lambda=1}^M \lambda \left(x^{(\lambda)i} f_{(\lambda)i} + dx^{(\lambda)i} \frac{\partial f}{\partial dx^{(\lambda)i}} \right), \\
(6.23) \quad \tilde{\Delta}_K f &= \sum_{\lambda=K}^M \binom{\lambda}{K} \left(x^{(\lambda-K+1)i} f_{(\lambda)i} + dx^{(\lambda-K+1)i} \frac{\partial f}{\partial dx^{(\lambda)i}} \right) \\
&\quad + \sum_{\lambda=K-1}^M \binom{\lambda}{K-1} x^{(\lambda-K+2)i} \frac{\partial f}{\partial dx^{(\lambda)i}} dt \quad \text{für } 2 \leq K \leq M, \\
\tilde{\Delta}_{M+1} f &= x^{(1)i} \frac{\partial f}{\partial dx^{(M)i}} dt,
\end{aligned}$$

während f ein Differentialausdruck des Linienelementes M -ter Ordnung und des Parameters t ist. Daraus folgen gleich mit Rücksicht von (6.9)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_1 f &= \Delta_{01} f, \\
(6.24) \quad \tilde{\Delta}_K f &= \Delta_{0K} f + \Delta_{1, K-1} f dt \quad \text{für } 2 \leq K \leq M, \\
\tilde{\Delta}_{M+1} f &= \Delta_{1M} f dt.
\end{aligned}$$

Diese Operatoren befriedigen für $2 \leq H \leq M$, $2 \leq K \leq M$

$$(6.25) \quad [\tilde{\Delta}_H \tilde{\Delta}_K] f = \frac{(H-K)(H+K-1)!}{H! K!} \tilde{\Delta}_{H+K-1} f.$$

§ 7. Die Differentialformen unter Parametertransformationen.

32. Ein PFAFFScher Ausdruck lässt sich druch

$$\begin{aligned}
(7.1) \quad P(d) &= P_{\alpha i} dx^{(\alpha)i} + P_{0i} dx^i + P_0 dt \\
&\quad (\text{summieren über } \alpha = 1, 2, \dots, M)
\end{aligned}$$

geben, dessen Koeffizienten $P_{\alpha i}$, P_{0i} , P_0 vom Parameter t sowohl als von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig sind. Wenn $P(d)$ unter jeder Koordinatentransformation invariant ist, muss $P_{\alpha i}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, M$) ein exkovarianter Extensor vom Grad M und P_0 ein Skalar sein.

Der PFAFFSche Ausdruck (7.1) soll sich bei einer erweiterten Parametertransformation in

$$(7.2) \quad \bar{P}(d) = \bar{P}_{\alpha i} (\alpha_{\beta}^{\alpha} dx^{(\beta)i} + \alpha_{\beta \tau}^{\alpha} x^{(\beta)i} dt^{(\bar{\tau})}) + \bar{P}_{0i} dx^i + \bar{P}_0 (t^{(\bar{1})})^{-1} dt$$

umwandeln, während $\bar{P}_{\alpha i}$ sowie $\bar{P}_0$ die transformierten $P_{\alpha i}$ sowie P_0 beziehungsweise darstellen. Nach (7.2) gelangt man auf die übliche Wege zu

$$(7.3a) \quad \Delta_{0K}P(d) = \Delta_K P_{\alpha i} dx^{(\alpha)i} + \Delta_K P_{0i} dx^i + \Delta_K P_0 dt \\ + \sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} P_{\alpha i} dx^{(\alpha-K+1)i} - \delta_K^1 P_0 dt,$$

$$(7.3b) \quad \Delta_{1K}P(d) = \sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} P_{\alpha i} x^{(\alpha-K+1)i}.$$

(7.3a) kann mit Rücksicht von (3.14) in die Gestalt

$$(7.4) \quad \Delta_{0K}P(d) = \sum_{\alpha} \left\{ \Delta_K P_{\alpha i} + \left(\alpha + \frac{K-1}{K} \right) P_{\alpha+K-1, i} \right\} dx^{(\alpha)i} + \Delta_K P_{0i} dx^i \\ + (\Delta_K P_0 - \delta_K^1 P_0) dt \\ = \Delta_K P_{\alpha i} dx^{(\alpha)i} + \Delta_K P_{0i} dx^i + (\Delta_K P_0 - \delta_K^1 P_0) dt$$

umgeschrieben werden.

Da die Operatoren Δ_{AK} ($A = 1, 2$) vom Koordinatensystem unabhängig sind, wie es nach ihren Definitionen klar ist, so müssen die Grössen $\Delta_{AK}P(d)$ auch Skalare sein, wenn $P(d)$ es ist. Allgemeiner kann man leicht auf die Tensoreigenschaft der Grössen $\Delta_{AK}P(d)$ schliessen, wenn $P(d)$ ein Tensor sei. Diese Tatsache ist für $\Delta_{1K}P(d)$ schon in der Theorie von Extensoren wohl bekannt.

Man hat hierbei zu beachten, dass $\Delta_{AK}P(d)$ kein $\mathfrak{P}$ -Vektor ist und seine Transformationsregel etwas kompliziert ist, obwohl $P(d)$ ein $\mathfrak{P}$ -Skalar ist.

33. Dafür, dass (7.1) eine $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ sein soll, d.h. $\bar{P}(d) = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}} P(d)$, müssen die Beziehungen

$$(7.5) \quad \bar{P}_{\alpha i} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}} \bar{a}_{\alpha}^{\beta} P_{\beta i}, \quad \bar{P}_{0i} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}} P_{0i}, \quad \bar{P}_0 = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{f}+1} P_0, \\ \sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} P_{\alpha i} x^{(\alpha-K+1)i} = 0,$$

oder

$$(7.6) \quad \bar{\Delta}_K P_{\alpha i} = \mathfrak{f} \delta_K^1 P_{\alpha i}, \quad \Delta_K P_{0i} = \mathfrak{f} \delta_K^1 P_{0i}, \quad \Delta_K P_0 = (\mathfrak{f} + 1) \delta_K^1 P_0, \\ \Delta_{1K}P(d) = 0$$

bestehen. Denn die ersten drei Beziehungen folgen sogleich durch Vergleichung der Koeffizienten von $dx^{(\alpha)i}$, dx^i und dt auf den beiden

rechten Seiten von (7.1) und (7.2), und die Koeffizienten von $dt^{(\bar{t})}$ auf der rechten Seite von (7.2) müssen alle gleich Null sein, was sich wegen (7.5) und (4.11) so umgestalten kann, dass

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\alpha i} a_{\beta \tau}^{\alpha} x^{(\beta) i} &= (t^{(\bar{t})})^{\dagger} \sum_{\alpha, \beta} \binom{\alpha}{\gamma} a_{\beta-1}^{\alpha-\tau} P_{\delta i} \bar{a}_{\alpha}^{\delta} x^{(\beta) i} \\ &= (t^{(\bar{t})})^{\dagger} \sum_{\delta, \beta} \binom{\delta}{\beta-1} \bar{a}^{\delta-\beta+1} P_{\delta i} x^{(\beta) i} \\ &= (t^{(\bar{t})})^{\dagger} \sum_{\varepsilon} \bar{a}_{\tau}^{\varepsilon} \sum_{\delta} \binom{\delta}{\varepsilon} P_{\delta i} x^{(\delta-\varepsilon+1) i},\end{aligned}$$

setzend $\delta - \beta + 1 = \varepsilon$. Danach muss die letzte Beziehung bestehen. Umgekehrt, wenn die Beziehungen (7.5) bestehen, so ist (7.1) eine $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$, wie man leicht erkennen kann.

Die erste Beziehung von (7.5) oder (7.6) bedeutet, dass $P_{\alpha i}$ in bezug auf den Index α eine kovariante P -Vektordichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ ist, und die zweite, dass P_{0i} eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ ist. Die dritte lehrt dagegen, dass P_0 eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f} + 1$ ist. Also erhalten wir den

Satz 38. *Es sei $P_{\alpha i}$ ein exkovarianter Extensor vom Grad M , dessen Bestimmungszahlen, die die Beziehungen $\sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} P_{\alpha i} x^{(\alpha-K+1)i} = 0$ ($K = 1, 2, \dots, M$) befriedigen, für $\alpha = 1, 2, \dots, M$ kovariante P -Vektordichten mit dem Index α vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{f}$ bilden, und dessen übrige Bestimmungszahlen P_{0i} je eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ sind. Und dazu sei ein Skalar P_0 gegeben, das eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f} + 1$ ist, dann ist der PFAFFsche Ausdruck (7.1) eine bei der Koordinatentransformation invariante $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ und umgekehrt.*

Im besonderen Fall, wo P ein skalare P -Skalardichte vom Gewichte Null ist und seine partiellen Ableitungen $P_{(\alpha)i}$, $\partial P / \partial x^i$ bzw. $\partial P / \partial t$ an Stelle von $P_{\alpha i}$, P_{0i} bzw. P_0 stehen, reduziert sich (7.1) zu dem Differential dP , das auch wieder eine skalare $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte Null sein muss¹⁾. Dabei setzt man voraus, dass P von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig ist.

1) Denn wegen der P -Skalardichteigenschaft von P müssen die Beziehungen $\sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} P_{(\alpha)i} x^{(\alpha-K+1)i} = 0$ wegen 3.2) bestehen. $P_{(\alpha)i}$ ist dazu ein kovarianter P -Vektor vom Grad M und gleichzeitig ein exkovarianter Extensor, während sowohl $\partial P / \partial x^i$ als $\partial P / \partial t$ P -Skalardichten sind. Man hat hierbei zu beachten, dass wegen (3.2) $\partial P / \partial t = 0$ sein muss.

Wir denken uns allgemeiner ein System von PFAFFschen Ausdrücken

$$P^x(d) = P^{\alpha}_{\beta i} dx^{(\beta)i} + P^{\alpha}_{0i} dx^i + P^{\alpha}_0 dt,$$

die eine kontravariante P -Vektordichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ bilden. Dann müssen die Beziehungen

$$(7.5)_{\text{bis}} \quad \begin{aligned} \bar{P}^{\alpha}_{\beta i} &= (t^{(1)})^{\mathfrak{f}} a_{\lambda}^{\alpha} \bar{a}_{\beta}^{\lambda} P^{\lambda}_{\mu i}, & \bar{P}^{\alpha}_{0i} &= (t^{(1)})^{\mathfrak{f}} a_{\lambda}^{\alpha} P^{\lambda}_{0i}, \\ \bar{P}^{\alpha}_0 &= (t^{(1)})^{\mathfrak{f}+1} a_{\lambda}^{\alpha} P^{\lambda}_0, & \sum_{\beta=K}^M \binom{\beta}{K} P^{\alpha}_{\beta i} x^{(\beta-K+1)i} &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$(7.6)_{\text{bis}} \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_K P^{\alpha}_{\beta i} &= \mathfrak{f} \delta_K^1 P^{\alpha}_{\beta i}, & \bar{\Delta}_K P^{\alpha}_{0i} &= \mathfrak{f} \delta_K^1 P^{\alpha}_{0i}, \\ \bar{\Delta}_K P^{\alpha}_0 &= (\mathfrak{f}+1) \delta_K^1 P^{\alpha}_0, & \Delta_{1K} P^x(d) &= 0 \end{aligned}$$

für jede Parametertransformation erfüllt werden, wie man auf analoge Weise wie oben erkennen kann, wobei man setzt

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_K P^{\alpha}_{\beta i} &= \Delta_K P^{\alpha}_{\beta i} - \binom{\alpha}{K} P^{\alpha-K+1}_{\beta i} + \binom{\beta+K-1}{K} P^{\alpha}_{\beta+K-1, i}, \\ \bar{\Delta}_K P^{\alpha}_{0i} &= \Delta_K P^{\alpha}_{0i} - \binom{\alpha}{K} P^{\alpha-K+1}_{0i}, & \bar{\Delta}_K P^{\alpha}_0 &= \Delta_K P^{\alpha}_0 - \binom{\alpha}{K} P^{\alpha-K+1}_0. \end{aligned}$$

Für eine kovariante P -Vektordichte erhalten wir auch Analoges. Im allgemeinen ermitteln wir den folgenden Satz, wie man durch denselben Gedankengang versichern kann:

Satz 39. Wenn ein System von PFAFFschen Ausdrücken

$$P^{\dots}(d) = P^{\dots}_{\beta i} dx^{(\beta)i} + P^{\dots}_{0i} dx^i + P^{\dots}_0 dt$$

eine $\mathfrak{B}$ -Tensordichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ bildet, dann müssen erstens die Größen $P^{\dots}_{\beta i}$ den Beziehungen $\sum_{\beta=K}^M \binom{\beta}{K} P^{\dots}_{\beta i} x^{(\beta-K+1)i} = 0$ genügen und eine P -Tensordichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ sein, die einen kovarianten Index mehr als $P^{\dots}(d)$ und ebensoviel kontravariante Indizes wie $P^{\dots}(d)$ hat, und zweitens müssen $P^{\dots}_{0i}$ bzw. $P^{\dots}_0$ auch P -Tensordichten vom Gewichte $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}+1$ sein, die dieselben kontra- und kovarianten Indizes wie $P^{\dots}(d)$ haben. Und umgekehrt.

34. Wir bestätigen nun den

Satz 40. Es seien zwei P -Skalardichten T und F vom Gewichte $\mathfrak{f}$ und eins beziehungsweise gegeben, welche beide von einem Linien-elemente M -ter Ordnung abhängige Skalare sind. Dann ist der PFAFFsche Ausdruck

$$(7.7) \quad T_{:[\mu]}(d) \equiv \sum_{\alpha=0}^{M-1} \sum_{\tau=\alpha+1}^M \binom{\gamma}{\alpha} T_{(\tau)i} A_{\mu}^{\tau-\alpha} dx^{(\alpha)i}, \quad \mu = 1, 2, \dots, M$$

ein Skalar und gleichzeitig eine $\mathfrak{B}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$, wobei A_{μ}^{λ} sich durch (5.5) definieren. Noch allgemeiner, wenn T ein (relativer) Tensor irgendwelcher Stufe ist, so ist $T(d)$ auch wieder ein (relativer) Tensor derselben Art wie T ¹⁾.

Beweis. Erstens wollen wir die Skalareigenschaft von $T(d)$ beweisen. Da $T(d)$ durch Setzung $\beta = \gamma - \alpha$ und durch Vertauschung der Reihenfolge von Summationen in die Gestalt

$$T_{:[\mu]}(d) = \sum_{\tau=1}^M \sum_{\beta=1}^{\tau} \binom{\gamma}{\beta} T_{(\tau)i} A_{\mu}^{\beta} dx^{(\tau-\beta)i} = \sum_{\beta=1}^M \left\{ \sum_{\tau=\beta}^M \binom{\gamma}{\beta} T_{(\tau)i} dx^{(\tau-\beta)i} \right\} A_{\mu}^{\beta}$$

geschrieben werden kann, in dem der in den Klammern stehende Ausdruck auf der letzten Seite bekanntlich ein Skalar ist²⁾, können wir ohne weiteres die Skalareigenschaft von $T(d)$ schliessen. Zweitens ist $T_{(\tau)i}$ eine kovariante P -Vektordichte mit dem Indexe γ vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und jedes A_{μ}^{τ} ein kovarianter P -Vektor mit dem Indexe γ vom Grad M , so lehrt Satz 16, dass

$$D_{\alpha i}(T, A)_{\mu} = \sum_{\tau=\alpha+1}^M \binom{\gamma}{\alpha} T_{(\tau)i} A_{\mu}^{\tau-\alpha} = \sum_{\tau=\alpha+\mu}^M \binom{\gamma}{\alpha} T_{(\tau)i} A_{\mu}^{\tau-\alpha \ 3)}$$

eine kovariante P -Vektordichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ sein muss. Ausserdem befriedigen die Grössen $D_{\alpha i}(T, A)_{\mu}$ die Beziehungen

$$\sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} D_{\alpha i}(T, A)_{\mu} x^{(\alpha-K+1)i} = 0.$$

In der Tat formt die linke Seite sich folgendermassen um:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=K}^M \binom{\alpha}{K} \sum_{\tau=\alpha+1}^M \binom{\gamma}{\alpha} T_{(\tau)i} A_{\mu}^{\tau-\alpha} x^{(\alpha-K+1)i} &= \sum_{\tau=K+1}^M \sum_{\alpha=K}^{\tau-1} \binom{\alpha}{K} \binom{\gamma}{\alpha} T_{(\tau)i} x^{(\alpha-K+1)i} A_{\mu}^{\tau-\alpha} \\ &= \sum_{\tau=K+1}^M \sum_{\beta=K+1}^{\tau} \binom{\beta}{K} \binom{\gamma}{\beta} T_{(\tau)i} x^{(\tau-\beta+1)i} A_{\mu}^{\beta-K} \\ &= \sum_{\beta=K+1}^M \binom{\beta}{K} \sum_{\tau=\beta}^M \binom{\gamma}{\beta} T_{(\tau)i} x^{(\tau-\beta+1)i} A_{\mu}^{\beta-K} \\ &= \sum_{\beta=K+1}^M \binom{\beta}{K} A_{\mu}^{\beta-K} \Delta_{\beta} T, \end{aligned}$$

1) In diesem Satz und auch im nächsten kann $T_{(\tau)i}$ offenbar durch $T_{\tau i}$, welche sich bei jeder Koordinaten- und Parametertransformation genau so wie $T_{(\tau)i}$ verändern, ersetzt werden.

2) Vgl. D.H. I, S. 68, Satz 34.

3) Weil $A_{\mu}^{\tau-\alpha} = 0$ für $\mu > \gamma - \alpha$, d.h. für $\gamma < \alpha + \mu$.

das gleich Null sein muss. Denn es besteht $A_\beta T = 0$ für $\beta \geq 2$ wegen (3.2), da T eine P -Skalardichte ist. Nehmen wir zum Schluss $D_{\alpha i}(T, A)$ anstatt $P_{\alpha i}$ an und setzen $P_i = 0$, $P_0 = 0$, so erfüllen diese Größen die Hypothese von Satz 38. Daher folgt gleich die erste Behauptung des Satzes. Die letzte Behauptung ist auch richtig, was man auf ganz dieselbe Weise versichern kann, w. z. b. z.

Multiplizieren wir (7.7) mit $\overset{\mu}{A}_p$ und summieren dann über $\mu = 1, 2, \dots, M$, so ergibt sich

$$(7.8) \quad T_{;p}(d) \equiv \sum_{\tau=p}^M \binom{\gamma}{\rho} T_{(\tau)i} dx^{(\tau-p)i-1},$$

da $\overset{\mu}{A}_p A^{\tau-p} = \delta_p^{\tau-p}$ ist. $T_{;p}(d)$ ist eine kovariante $\mathfrak{B}$ -Vektordichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$, weil $D_\lambda(T, A)$ eine $\mathfrak{B}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und $\overset{\mu}{A}_p$ ein kovarianter P -Vektor ist. Jetzt behaupten wir den

Zusatz. T sei irgendein (relativer) Tensor, dessen Bestimmungszahlen P -Skalardichten vom Gewichte $\mathfrak{k}$ sind und von einem Linien-elemente M -ter Ordnung abhängen, dann muss (7.8) auch ein (relativer) Tensor derselben Art wie T sein und seine Bestimmungszahlen müssen kovariante $\mathfrak{B}$ -Vektordichten vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}$ sein.

$P_1^\nu, P_2^\nu, \dots$ bzw. P_L^ν in (4.16) durch $A_1^\lambda, A_2^\nu, \dots$ bzw. A_L^ν ersetzend, kann man Satz 40 noch weiter verallgemeinern, nämlich man bestätigt den

Satz 41. Es seien eine skalare P -Skalardichte F vom Gewichte eins und ein (relativer) Tensor irgendwelcher Stufe T , der eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ ist, gegeben, dann ist der PFAFFsche Ausdruck

$$(7.9) \quad T_{;[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_L]}(d) = \sum_{\alpha=0}^{M-L} D_{\alpha i}(T, A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_L}) dx^{(\alpha)i}, \quad 1 \leq \mu_g \leq M$$

wieder ein (relativer) Tensor derselben Art wie T , der eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ ist, wenn T von einem Linien-elemente M -ter Ordnung abhängig ist.

Den Satz können wir auf ganz dieselbe Weise wie Satz 40 beweisen und auch erhalten den

1) Von Satz 28 in D.H. I, S. 61 ist es wohlbekannt, dass (7.8), folglich auch (7.7) ein relativer Tensor sein muss, wenn T es ist.

Zusatz. Es sei T ein (relativer) Tensor irgendwelcher Stufe, dessen Bestimmungszahlen je eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängig sind, dann ist der PFAFFsche Ausdruck

$$(7.10) \quad T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L i}(d) = \sum_{a=0}^{M-L} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L + a)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_L! a!} \\ \times T_{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L + a)i} dx^{(\alpha)i}$$

auch ein (relativer) Tensor derselben Art wie T , der eine P -Tensor-dichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ ist.

35. Die oben erwähnten Tatsachen können ohne Schwierigkeit auf die Differentialform S -ten Grades

$$(7.11) \quad P(d_1, d_2, \dots, d_S) \\ = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_S}^{0, M} P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S} d_1 x^{(\alpha_1) i_1} d_2 x^{(\alpha_2) i_2} \dots d_S x^{(\alpha_S) i_S} \\ + \sum_{r=1}^S \sum_{\alpha=0}^M P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \\ \times d_1 x^{(\alpha_1) i_1} \dots d_{r-1} x^{(\alpha_{r-1}) i_{r-1}} d_r t d_{r+1} x^{(\alpha_{r+1}) i_{r+1}} \dots d_S x^{(\alpha_S) i_S} \\ + \dots + P_{00 \dots 0} d_1 t d_2 t \dots d_S t,$$

die in jedem von S Systemen der Differentiale

$$d_z x^i, d_z x^{(1)i}, \dots, d_z x^{(M)i}, d_z t \quad (z = 1, 2, \dots, S)$$

linear ist, erweitert werden.

Nämlich es ergeben sich auf demselben Grund wie oben

$$(7.12) \quad \Delta_{0K} P(d_1, d_2, \dots, d_S) \\ = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_S}^{0, M} \bar{\Delta}_K P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S} d_1 x^{(\alpha_1) i_1} d_2 x^{(\alpha_2) i_2} \dots d_S x^{(\alpha_S) i_S} \\ + \sum_{r=1}^S \sum_{\alpha=0}^M \left\{ \bar{\Delta}_K P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \right. \\ \left. - \delta_K^1 P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \right\} \\ \times d_1 x^{(\alpha_1) i_1} \dots d_{r-1} x^{(\alpha_{r-1}) i_{r-1}} d_r t d_{r+1} x^{(\alpha_{r+1}) i_{r+1}} \dots d_S x^{(\alpha_S) i_S} \\ + \dots + (\Delta_K P_{00 \dots 0} - S \delta_K^1 P_{00 \dots 0}) d_1 t d_2 t \dots d_S t,$$

$$\begin{aligned}
(7.13) \quad \Delta_{1K}^{(r)} P(d_1, d_2, \dots, d_S) \\
= \sum_{\alpha_r=K}^M \sum_{\alpha_p(\neq \alpha_r)}^{0, M} \binom{\alpha_r}{K} P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} d_1 x^{(\alpha_1)i_1} \dots \\
\quad \times d_{r-1} x^{(\alpha_{r-1})i_{r-1}} d_{r+1} x^{(\alpha_{r+1})i_{r+1}} \dots d_S x^{(\alpha_S)i_S} \\
+ \sum_{p=1}^S \sum_{\alpha_r=K}^M \sum_{\alpha_q(\neq \alpha_r, \alpha_p)}^{0, M} \binom{\alpha_r}{K} P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1} 0 \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_S i_S} \\
\quad \times x^{(\alpha_r-K+1)i_r} d_1 x^{(\alpha_1)i_1} \dots d_{p-1} x^{(\alpha_{p-1})i_{p-1}} d_p t d_{p+1} x^{(\alpha_{p+1})i_{p+1}} \dots \\
\quad \times d_{r-1} x^{(\alpha_{r-1})i_{r-1}} d_{r+1} x^{(\alpha_{r+1})i_{r+1}} \dots d_S x^{(\alpha_S)i_S} \\
+ \dots \\
+ \sum_{\alpha_r=K}^M \binom{\alpha_r}{K} P_{00 \dots 0 \alpha_r i_r 0 \dots 0} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} d_1 t \dots d_{r-1} t d_{r+1} t \dots d_S t,
\end{aligned}$$

wobei $\bar{\Delta}_K P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S}$ durch (3.15) fest bestimmt ist und

$$\begin{aligned}
(7.14) \quad \bar{\Delta}_K P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \\
= \Delta_K P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \\
+ \sum_{q \neq r}^{1, S} \sum_{\alpha_r=1}^{M-K+1} \binom{\alpha_q + K - 1}{K} \\
\quad \times T_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{q-1} i_{q-1}, \alpha_q + K - 1, i_q \alpha_{q+1} i_{q+1} \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S}, \\
\text{usw.}
\end{aligned}$$

Analog wie die Operatoren Δ_{0K} , Δ_{1K} für $P(d)$, können die Operatoren Δ_{0K} , $\Delta_{1K}^{(r)}$ für $P(d_1, d_2, \dots, d_S)$ durch die Operatoren Δ_{01} , Δ_{02} , Δ_{02} und $\Delta_{11}^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, S$) dargestellt werden, und sind vom Koordinatensystem ganz unabhängig. Wenn $P(d_1, d_2, \dots, d_S)$ ein Tensor sei, sind somit $\Delta_{AK} P(d_1, d_2, \dots, d_S)$ auch je ein Tensor derselben Art wie $P(d_1, d_2, \dots, d_S)$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (7.11) eine $\mathfrak{P}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ sein soll, ist

$$\bar{P}_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S} = (t^{(1)})^{\mathfrak{f}} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_S}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_S} P_{\beta_1 i_1 \beta_2 i_2 \dots \beta_S i_S},$$

$$\begin{aligned}
& \bar{P}_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \\
&= (t^{(\bar{1})})^{\dagger+1} a_{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_{r+1} \dots \alpha_S}^{\beta_1 \dots \beta_{r-1} \beta_{r+1} \dots \beta_S} P_{\beta_1 i_1 \dots \beta_{r-1} i_{r-1} 0 \beta_{r+1} i_{r+1} \dots \beta_S i_S}, \\
& \dots \dots \dots, \\
(7.15) \quad & \bar{P}_{00 \dots 0} = (t^{(\bar{1})})^{\dagger+S} P_{00 \dots 0}, \\
& \sum_{\alpha_r=K}^M \binom{a_r}{K} P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_S i_S} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} = 0, \\
& \sum_{\alpha_r=K}^M \binom{a_r}{K} P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1} 0 \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_S i_S} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} = 0, \\
& \dots \dots \dots (p \neq r), \\
& \dots \dots \dots, \\
& \sum_{\alpha_r=K}^M \binom{a_r}{K} P_{0 \dots 0 \alpha_r i_r 0 \dots 0} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} = 0, \\
& \dots \dots \dots a_1, a_2, \dots, a_S = 0, 1, \dots, M,
\end{aligned}$$

wobei einfachheitshalber

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_S}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_S} = a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_S}^{\beta_S}$$

gesetzt ist und man $a_0^s = \delta_0^s$ berücksichtigen muss. Die Beziehungen (7.15) können sich auch mit Hilfe der Operatoren $\bar{\Delta}_K$, Δ_K , $\Delta_{1K}^{(r)}$ in der folgenden Gestalt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
& \bar{\Delta}_K P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S} = t \delta_K^1 P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S}, \\
& \bar{\Delta}_K P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S} \\
(7.16) \quad &= (t+1) \delta_K^1 P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S}, \\
& \dots \dots \dots, \\
& \Delta_K P_{00 \dots 0} = (t+S) \delta_K^1 P_{00 \dots 0}, \\
& \Delta_{1K}^{(r)} P(d_1, d_2, \dots, d_S) = 0.
\end{aligned}$$

(7.15) liefert uns den

Satz 42. *Dafür, dass die Differentialform S -ten Grades (7.11) eine $\mathfrak{B}$ -Skalardichte vom Gewichte $\dagger$ sein soll, ist es notwendig und hinreichend, dass $P_{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \dots \alpha_S i_S}$, $P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S}$ ($r = 1, 2, \dots, S$), ... bzw. $P_{0 i_1 0 i_2 \dots 0 i_S}$ ein exkovarianter Extensor S -*

(S-1)-, ... bzw. nullter Stufe¹⁾ vom Grad M ist, dessen Bestimmungszahlen die Beziehung

$$\sum_{\alpha_r=K}^M \binom{\alpha_r}{K} P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_S i_S} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} = 0$$

befriedigen und für die $\alpha_p = 1, 2, \dots, M$ ($p = 1, 2, \dots, S$) kovariante P -Tensordichten S -, (S-1)-, ... bzw. nullter Stufe¹⁾ mit den Indizes α_p vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k}$ bilden; dass

$$P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1} 0 \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_S i_S},$$

$$P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1} 0 \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_{r-1} i_{r-1} 0 i_r \alpha_{r+1} i_{r+1} \dots \alpha_S i_S},$$

..... bzw.

$$P_{0 i_1 \dots 0 i_{p-1} 0 0 i_{p+1} \dots 0 i_S}$$

ein exkovarianter Extensor (S-1)-, (S-2)-, ... bzw. nullter Stufe vom Grad M ist, dessen Bestimmungszahlen die Beziehung

$$\sum_{\alpha_r=K}^M \binom{\alpha_r}{K} P_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1} 0 \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_S i_S} x^{(\alpha_r-K+1)i_r} = 0 \quad (p \neq r)$$

befriedigen und für die $\alpha_p = 1, 2, \dots, M$ ($p = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, S$) kovariante P -Tensordichten (S-1)-, (S-2)-, ... bzw. nullter Stufe mit den Indizes α_p vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{k} + 1$ bilden, usw.; schliesslich dass $P_{00 \dots 0}$ ein Skalar ist, der auch eine P -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k} + S$ ist.

Man kann auch leicht Satz 40 und Satz 41 für die Differentialform S -ten Grades erweitern, z.B.

Satz 43. Wenn $T(d_1, d_2, \dots, d_S) = T_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_S i_S} d_1 x^{(\alpha_1) i_1} \dots d_S x^{(\alpha_S) i_S}$ eine $\mathfrak{B}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und gleichzeitig ein von einem Linienelemente M -ter Ordnung abhängiger (relativer) Tensor ist, dann ist die Differentialform S -ten Grades

$$(7.17) \quad T_{[\mu_1, \dots, \mu_S]}(d_1, d_2, \dots, d_S)$$

$$= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_S}^{0, M-1} \sum_{\gamma_1=\alpha_1+1}^M \dots \sum_{\gamma_S=\alpha_S+1}^M \binom{\gamma_1}{\alpha_1} \dots \binom{\gamma_S}{\alpha_S} T_{\gamma_1 i_1 \dots \gamma_S i_S} \times A_{\mu_1}^{\gamma_1 - \alpha_1} \dots A_{\mu_S}^{\gamma_S - \alpha_S} d_1 x^{(\alpha_1) i_1} \dots d_S x^{(\alpha_S) i_S}$$

1) Unter einem Extensor nullter Stufe, einer P -Tensordichte nullter Stufe bzw. einer P -Tensordichte erster Stufe versteht man einen Skalar, eine P -Skalardichte bzw. eine P -Vektordichte.

eine $\mathfrak{B}$ -Skalardichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$, welche auch ein (relativer) Tensor derselben Art wie $T(d_1, d_2, \dots, d_S)$ ist. Hierbei definieren A^ν_μ sich durch (5.5).

Wir beweisen nicht den letzten Satz hier eingehend, da man ihn auf ganz analoge Weise wie Satz 40 beweisen kann. Wegen des letzten Satzes bekommt man ohne Schwierigkeit die P -Tensordichte

$$(7.18) \quad T_{\rho_1 \dots \rho_S}(d_1, d_2, \dots, d_S) \\ = \sum_{\gamma_1=\rho_1}^M \dots \sum_{\gamma_S=\rho_S}^M \binom{\gamma_1}{\rho_1} \dots \binom{\gamma_S}{\rho_S} T_{\gamma_1 i_1 \dots \gamma_S i_S} d_1 x^{(\gamma_1 - \rho_1) i_1} \dots d_S x^{(\gamma_S - \rho_S) i_S},$$

welche die Erweiterung von (7.8) ist.

Die Erweiterungen von (7.9) und (7.10) besitzen etwas komplizierte Gestalt, welche wir hier nicht ausführlich aufstellen.

§ 8. Die kovarianten Ableitungsdifferentialformen.

36. Wir wollen wieder den in Nr. 34 betrachteten Fall von noch allgemeinerem Standpunkt aus ins Auge fassen. Man denke sich die Grössen (7.8), wenn T eine beliebige vom Linienelemente M' -ter Ordnung abhängige Grösse sei. Bei einer Parametertransformation gehen (7.8) in

$$(8.1) \quad \bar{T}_{\rho'}(d) \equiv \sum_{\tau=\rho'}^{M'} \binom{\gamma}{\rho'} \bar{T}_{(\tau)i} dx^{(\tau-\rho')i}$$

über. Der letzte Ausdruck kann mittels (1.25), (6.2) und (6.3) folgendermassen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=\rho'}^{M'} \binom{\gamma}{\rho'} \bar{T}_{(\tau)i} \bar{a}_\tau^\beta (a_{\mu}^{\tau-\rho'} dx^{(\mu)i} + a_{\mu}^{\tau-\rho'} x^{(\mu)i} dt^{(\bar{\nu})}) \\ &= \bar{T}_{(\beta)i} \left\{ \sum_{\tau=\rho'}^{M'} \binom{\gamma}{\rho'} \bar{a}_\tau^\beta a_{\mu}^{\tau-\rho'} \right\} dx^{(\mu)i} \\ & \quad + \bar{T}_{(\beta)i} \sum_{\nu=1}^{M'-\rho'+1} \sum_{\mu} \left\{ \sum_{\tau=\rho'}^{M'} \binom{\gamma}{\rho'+\nu} \bar{a}_\tau^\beta a_{\mu-1}^{\tau-\rho'-\nu} \right\} \binom{\rho'+\nu}{\nu} x^{(\mu)i} dt^{(\bar{\nu})}, \end{aligned}$$

da $\binom{\gamma}{\rho'} a_{\mu}^{\tau-\rho'} = \binom{\gamma}{\rho'} \binom{\gamma-\rho'}{\nu} a_{\mu-1}^{\tau-\rho'-\nu} = \binom{\gamma}{\rho'+\nu} a_{\mu-1}^{\tau-\rho'-\nu} \binom{\rho'+\nu}{\nu}$ ist. Somit ist nach (4.11)

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{;\rho'}(d) &= \sum_{\beta=\rho'}^{M'} \sum_{\mu=0}^{\beta-\rho'} \binom{\beta}{\mu} \bar{T}_{(\beta)i} \bar{a}_{\rho'}^{\beta-\mu} dx^{(\mu)i} \\
&\quad + \sum_{\beta, \mu, \nu} \binom{\beta}{\mu-1} \bar{T}_{(\beta)i} \bar{a}_{\rho'+\nu}^{\beta-\mu+1} \binom{\rho'+\nu}{\nu} x^{(\mu)i} dt^{(\bar{\nu})} \\
&= \sum_{\nu=\rho'}^{M'} \left\{ \sum_{\beta=\nu}^{M'} \binom{\beta}{\nu} \bar{T}_{(\beta)i} dx^{(\beta-\nu)i} \right\} \bar{a}_{\rho'}^{\nu} \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{M'-\rho'+1} \sum_{\sigma=\rho'+\nu}^{M'} \left\{ \sum_{\beta=\sigma}^{M'} \binom{\beta}{\sigma} \bar{T}_{(\beta)i} x^{(\beta-\sigma+1)i} \right\} \bar{a}_{\rho'+\nu}^{\sigma} \binom{\rho'+\nu}{\nu} dt^{(\bar{\nu})}
\end{aligned}$$

d.h.

$$(8.2) \quad \bar{T}_{;\rho'}(d) = \bar{a}_{\rho'}^{\nu} T_{;\nu}(d) + \sum_{\nu=1}^{M'-\rho'+1} \binom{\rho'+\nu}{\nu} \bar{a}_{\rho'+\nu}^{\sigma} \Delta_{\sigma} \bar{T} dt^{(\bar{\nu})},$$

setzend

$$(8.3) \quad \bar{T}_{;\nu}(d) = \sum_{\beta=\nu}^{M'} \binom{\beta}{\nu} \bar{T}_{(\beta)i} dx^{(\beta-\nu)i} \quad \text{und} \quad \Delta_{\sigma} \bar{T} = \sum_{\beta=\sigma}^{M'} \binom{\beta}{\sigma} \bar{T}_{(\beta)i} x^{(\beta-\sigma+1)i}.$$

Insbesondere sei T eine kontravariante P -Vektordichte T^{α} vom Gewichte $\mathfrak{k}$, so ist $\bar{T}^{\alpha} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} a_{\tau}^{\alpha} T^{\tau}$, infolgedessen hat man $\bar{T}_{(\beta)i}^{\alpha} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} a_{\tau}^{\alpha} T_{(\beta)i}^{\tau}$, da a_{τ}^{α} von $x^{(\beta)i}$ unabhängig ist. Deswegen findet man

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{;\nu}^{\alpha'}(d) &= \sum_{\beta=\nu}^{M'} \binom{\beta}{\nu} \bar{T}_{(\beta)i}^{\alpha'} dx^{(\beta-\nu)i} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} a_{\alpha'}^{\alpha} T_{;\nu}^{\alpha}(d), \\
\Delta_{\sigma} \bar{T}^{\alpha'} &= \sum_{\beta=\sigma}^{M'} \bar{T}_{(\beta)i}^{\alpha'} x^{(\beta-\sigma+1)i} = (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} a_{\alpha'}^{\alpha} \Delta_{\sigma} T^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Satz 11 lehrt uns $\Delta_{\sigma} T^{\tau} = \binom{\gamma}{\sigma} T^{\tau-\sigma+1} + \mathfrak{k} \delta_{\sigma}^1 T^{\tau}$, daraus bekommt man mit Hilfe von (4.11) und (6.3) für $\rho \geq 1$ wegen

$$\sum_{\nu=1}^{M'-\rho} \sum_{\sigma=\rho+\nu}^{M'} \binom{\rho+\nu}{\nu} \bar{a}_{\rho+\nu}^{\sigma} \delta_{\sigma}^1 = \delta_{\rho}^0 a_1^1$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu} \binom{\rho+\nu}{\nu} \bar{a}_{\rho+\nu}^{\sigma} \Delta_{\sigma} \bar{T}^{\alpha'} dt^{(\bar{\nu})} \\
&= (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} \sum_{\nu} \sum_{\sigma, \alpha} \binom{\rho+\nu}{\nu} \bar{a}_{\rho+\nu}^{\sigma} a_{\alpha'}^{\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} T^{\alpha-\sigma+1} dt^{(\bar{\nu})} \\
&= (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} \sum_{\nu} \sum_{\tau, \alpha} \binom{\rho+\nu}{\nu} \bar{a}_{\rho+\nu}^{\alpha-\tau+1} a_{\alpha'}^{\alpha} T^{\tau} dt^{(\bar{\nu})} \quad (\tau = \alpha - \sigma + 1 \text{ gesetzt}) \\
&= (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} \sum_{\nu} \sum_{\tau} \binom{\rho+\nu}{\nu} \binom{\alpha'}{\rho+\nu} a_{\alpha'-\rho-\nu}^{\alpha'} T^{\tau} dt^{(\bar{\nu})} \\
&= (t^{(\bar{1})})^{\mathfrak{k}} \sum_{\nu=1}^{\alpha-\rho} \binom{\rho+\nu}{\nu} a_{\alpha', \rho+\nu}^{\alpha'} T^{\alpha} dt^{(\bar{\nu})} \quad (\alpha = \tau \text{ gesetzt}).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$(8.5) \quad \bar{T}^{\alpha'}_{\beta'; \rho}(d) = (t^{(1)})^{\dagger} \left\{ \alpha^{\alpha'}_{\alpha} \bar{a}^{\rho}_{\rho} T^{\alpha}_{\beta; \rho}(d) + \sum_{\nu=1}^{\alpha'-\rho'} \binom{\rho'+\nu}{\nu} \alpha^{\alpha'}_{\alpha} \bar{a}^{\rho+\nu}_{\rho+\nu} T^{\alpha} dt^{(\bar{\nu})} \right\}.$$

Nun nehmen wir den kontravarianten P -Vektor A^{α} , der durch (5.5) definiert wird und vom Linienelemente $(\alpha-\mu+1)^{\mu}$ -ter Ordnung abhängig ist, als T^{α} an, dann geht (8.5) in

$$\bar{A}^{\alpha'}_{\beta'; \rho}(d) = \alpha^{\alpha'}_{\alpha} \bar{a}^{\rho}_{\rho} A^{\alpha}_{\beta; \rho}(d) + \sum_{\nu=1}^{\alpha'-\rho'} \binom{\rho'+\nu}{\nu} \alpha^{\alpha'}_{\alpha} \bar{a}^{\rho+\nu}_{\rho+\nu} A^{\alpha} dt^{(\bar{\nu})}$$

über. Daraus folgt unmittelbar unter Berücksichtigung der Beziehung $\sum_{\mu=\beta}^{\alpha} A^{\mu}_{\beta} A^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta}$

$$(8.6) \quad \Delta^{\alpha'}_{\beta'; \rho}(d) = \alpha^{\alpha'}_{\alpha} \bar{a}^{\rho}_{\rho} \bar{a}^{\beta}_{\beta} \Delta^{\alpha}_{\beta; \rho}(d) - \sum_{\nu=1}^{\alpha'-\rho'} \binom{\rho'+\nu}{\nu} \alpha^{\alpha'}_{\alpha} \bar{a}^{\rho+\nu}_{\rho+\nu} \bar{a}^{\beta}_{\beta} dt^{(\bar{\nu})},$$

setzend

$$(8.7) \quad \Delta^{\alpha}_{\beta; \rho}(d) \equiv - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}^{\mu}_{\beta} A^{\alpha}_{\mu; \rho}(d) = - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}^{\mu}_{\beta} \sum_{\tau=\rho}^{\alpha-\mu+1} \binom{\gamma}{\rho} A^{\alpha}_{\mu; (\tau)} dx^{(\tau-\rho)\dagger}.$$

Die Gleichung (8.6) lehrt uns, dass

$$(8.8) \quad T^{\alpha}_{\beta; \rho}(d) \equiv T^{\alpha}_{\beta; \rho}(d) + T^{\beta} \Delta^{\alpha}_{\beta; \rho}(d)$$

eine β -Tensordichte vom Gewichte $\dagger$ ist, die für den Index α kontravariant und für den ρ kovariant ist.

Auf analoge Weise ersehen wir mittels der Beziehung

$$\sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}^{\mu}_{\beta} A^{\alpha}_{\mu; \rho}(d) = - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} A^{\alpha}_{\mu} \bar{A}^{\mu}_{\beta; \rho}(d),$$

dass

$$(8.9) \quad T_{\alpha; \rho}(d) \equiv T_{\alpha; \rho}(d) - T_{\beta} \Delta^{\beta}_{\alpha; \rho}(d)$$

eine kovariante P -Tensordichte zweiter Stufe vom Gewichte $\dagger$ ist, wenn T_{α} eine kovariante P -Vektordichte vom Gewichte $\dagger$ sei, wobei

$$(8.10) \quad T_{\alpha; \rho}(d) = \sum_{\tau=\rho}^{M'} \binom{\gamma}{\rho} T_{\alpha; (\tau)} dx^{(\tau-\rho)\dagger}.$$

44. Im allgemeinen können wir ermitteln den

Satz 44. Es sei $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ eine vom Linienelemente M' -ter Ordnung abhängige P -Tensordichte vom Gewichte $\dagger$, die für die Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bzw. $\beta_1, \dots, \beta_s$ kontra- bzw. kovariant ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (8.11) \quad T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s / \rho}(d) &\equiv \sum_{\gamma=\rho}^M \binom{\gamma}{\rho} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s(\gamma)_i} dx^{(\gamma-\rho)i} \\
 &+ \sum_{p=1}^r T^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \gamma \alpha_{p+1} \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \Delta_{\gamma \rho}^{\alpha p}(d) \\
 &- \sum_{q=1}^s T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_{q-1} \gamma \beta_{q+1} \dots \beta_s} \Delta_{\beta_q \rho}^{\gamma}(d)
 \end{aligned}$$

eine $\mathfrak{P}$ -Tensordichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$, die für die Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bzw. $\beta_1, \dots, \beta_s, \rho$ kontra- bzw. kovariant ist.

Daraus folgt durch Überschiebung mit dem kovarianten P -Vektor A^ρ_μ sofort der

Zusatz. $T^{\dots}$ sei eine vom Linienelemente M' -ter Ordnung abhängige P -Tensordichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$, die irgendviele kontra- und kovariante Indizes hat, so ist

$$(8.12) \quad T^{\dots}_{/[\mu]}(d) = A^\rho_\mu T^{\dots}_{/\rho}(d)$$

auch eine $\mathfrak{P}$ -Tensordichte derselben Art wie die ursprüngliche P -Tensordichte $T^{\dots}$.

Eine P -Tensordichte $T^{\dots}$ bekommt durch die Operation (8.11) einen neuen kovarianten Index ρ betreffs der Parametertransformation, was unter ganz ähnliche Verhältnisse wie die bei den gewöhnlichen kovarianten Ableitungen eines gewöhnlichen Tensors fällt. Aus diesem Grund dürfen wir (8.11) als die kovarianten Ableitungen der P -Tensordichte auffassen. Man hat aber doch zu bemerken, dass (8.11) im Gegensatz zum Fall der gewöhnlichen kovarianten Ableitungen keine endliche Grössen sondern PFAFFsche Ausdrücke sind.

Die Operation (8.11) ist sehr wichtig und nützlich. Eine Anwendung dieser Operation wird man nachher bei der Einführung der Grundübertragungen finden.

Bemerkung. An Stelle von Differentialen $dx^{(\gamma-\rho)i}$ in (8.8) setze man die Ableitungen $x^{(\gamma-\rho+1)i}$, d.h. man betrachte die Operation (8.8) längs der vorgegebenen Kurve $x^i = x^i(t)$, dann erhält man selbstverständlich wieder eine P -Tensordichte $T^{\alpha}_{/\rho}$. Aber $\Delta_{\beta \rho}^{\alpha}(d)$ verändert sich dabei zu $-\delta^{\alpha-\rho+1}_{\beta}$, da wegen Satz 11 $A^{\alpha}_{/\rho} \equiv \Delta_{\rho}^{\alpha} A^{\alpha} = \binom{\alpha}{\rho} A^{\alpha-\rho+1}$. Deshalb ist $T^{\alpha}_{/\rho} = \mathfrak{k} \delta^1_{\rho} T^{\alpha}$, indem $T^{\alpha}_{/\rho} \equiv \Delta_{\rho}^{\alpha} T^{\alpha} = \binom{\alpha}{\rho} T^{\alpha-\rho+1} + \mathfrak{k} \delta^1_{\rho} T^{\alpha}$. Ein ähnlicher Gedankengang führt uns auch zu $T_{\alpha/\rho} = \mathfrak{k} \delta^1_{\rho} T_{\alpha}$ und im allgemeinen

$$(8.13) \quad T^{\dots}_{/\rho} = \mathfrak{f} \delta^1_{\rho} T^{\dots},$$

was beachtenswert sein mag.

38. Satz 44 ist auch noch richtig, wenn man eine $\mathfrak{P}$ -Tensordichte $T^{\dots}(d)$ statt der P -Tensordichte $T^{\dots}$ annimmt, weil der dort erwähnte Beweisgang davon, ob $T^{\dots}$ endliche oder infinitesimale Grössen sind, gar nicht abhängig ist. Deswegen können wir die Operation (8.11) wieder auf die $\mathfrak{P}$ -Tensordichte $T^{\dots}_{/\rho_1}(d_1)$ anwenden, und dadurch geht die zweite Operation $T^{\dots}_{/\rho_1/\rho_2}(d_1, d_2)$ hervor, usw. Im allgemeinen können wir bestätigen den

Satz 45. Aus einer vom Linienelemente höherer Ordnung abhängigen P -Tensordichte $T^{\dots}$ vom Gewichte $\mathfrak{f}$ wird eine $\mathfrak{P}$ -Tensordichte $T^{\dots}_{/\rho_1/\rho_2 \dots / \rho_S}(d_1, d_2, \dots, d_S)$ vom Gewichte $\mathfrak{f}$ hergeleitet, die um S mehrere kovariante Indizes als die ursprüngliche P -Tensordichte $T^{\dots}$ besitzt, und deren Bestimmungszahlen je eine Differentialform S -ten Grades sind.

Hierbei muss man darauf achten, dass

$$\begin{aligned} & \left(T^{\dots}_{(\gamma_1)i} d_1 x^{(\gamma_1 - \rho_1)i} \right)_{(\gamma_2)j} d_2 x^{(\gamma_2 - \rho_2)j} \\ &= T^{\dots}_{(\gamma_1)i(\gamma_2)j} d_1 x^{(\gamma_1 - \rho_1)i} d_2 x^{(\gamma_2 - \rho_2)j}. \end{aligned}$$

Denn die Grössen $dx^{(\alpha)i}$ müssen von den $x^{(\beta)j}$ unabhängig sein.

Von S Differentialen $d_1, d_2, \dots, d_S$ in Satz 45 nehmen wir irgendein z.B. d_S längs der vorgegebenen Kurve $x^i = x^i(t)$ an, dann folgt

$$\begin{aligned} (8.14) \quad & T^{\dots}_{/\rho_1/\rho_2 \dots / \rho_S}(d_1, d_2, \dots, d_S) \\ &= \mathfrak{f} \delta^1_{\rho_S} T^{\dots}_{/\rho_1/\rho_2 \dots / \rho_{S-1}}(d_1, d_2, \dots, d_{S-1}) dt. \end{aligned}$$

Wenn alle Differentiale längs der vorgegebenen Kurve angenommen sind, hat man

$$(8.15) \quad T^{\dots}_{/\rho_1/\rho_2 \dots / \rho_S}(d_1, d_2, \dots, d_S) = \mathfrak{f} \delta^1_{\rho_1} \delta^1_{\rho_2} \dots \delta^1_{\rho_S} T^{\dots} (dt)^S.$$

Wenn F für die Koordinatentransformation invariant ist, so sind A^μ_α , A^μ_β und folglich die PFAFFschen Ausdrücke $\Delta^\alpha_{\beta\rho}(d)$ auch in-

variant. Diese Tatsache und Satz 34 in D.H. I, S. 68, liefern also den

Satz 46. Wenn $T_{\dots}$ eine P -Tensordichte und gleichzeitig ein relativer Tensor ist, so sind (8.11) und noch allgemeiner die Differentialformen S -ten Grades $T_{\dots/\rho_1/\rho_2\dots/\rho_S}(d_1, d_2, \dots, d_S)$ wieder ein relativer Tensor derselben Art wie der ursprüngliche Tensor $T_{\dots}$.

Die Extensoreigenschaft bleibt dagegen durch die Operatoren (8.11) nicht erhalten, d.h. $T_{\dots/\rho_1/\rho_2\dots/\rho_S}(d_1, d_2, \dots, d_S)$ wird kein Extensor sein, obwohl $T_{\dots}$ ein Extensor ist.

39. Aus (8.11) erhält man gleich

$$\begin{aligned} T_{\cdot/\rho_1/\rho_2}^{\alpha}(d_1, d_2) &= \sum_{\gamma_1=\rho_1}^{M'} \sum_{\gamma_2=\rho_2}^{M'} \binom{\gamma_1}{\rho_1} \binom{\gamma_2}{\rho_2} T_{(\gamma_1)i(\gamma_2)j}^{\alpha} d_1 x^{(\gamma_1-\rho_1)i} d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \\ &+ \sum_{\gamma_2=\rho_2}^{M'} \binom{\gamma_2}{\rho_2} \left\{ T_{(\gamma_2)j}^{\beta} d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \Delta_{\beta\rho_1}^{\alpha}(d_1) + T^{\beta} \Delta_{\beta\rho_1(\gamma_2)j}^{\alpha}(d_1) d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \right\} \\ &+ \Delta_{\beta\rho_2}^{\alpha}(d_2) \left\{ \sum_{\gamma_1=\rho_1}^{M'} \binom{\gamma_1}{\rho_1} T_{(\gamma_1)i}^{\beta} d_1 x^{(\gamma_1-\rho_1)i} + T^{\gamma} \Delta_{\gamma\rho_1}^{\beta}(d_1) \right\} \\ &- \sum_{\beta} \Delta_{\rho_1\rho_2}^{\beta}(d_2) \left\{ \sum_{\gamma_1=\beta}^{M'} \binom{\gamma_1}{\beta} T_{(\gamma_1)i}^{\alpha} d_1 x^{(\gamma_1-\rho_1)i} + T^{\gamma} \Delta_{\gamma\beta}^{\alpha}(d_1) \right\}, \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} T_{\cdot/\rho_1/\rho_2}^{\alpha}(d_1, d_2) - T_{\cdot/\rho_2/\rho_1}^{\alpha}(d_2, d_1) \\ = T^{\beta} \Delta_{\beta\rho_1\rho_2}^{\alpha}(d_1, d_2) - \left\{ T_{\cdot/\tau}^{\alpha}(d_1) \Delta_{\tau\rho_2}^{\alpha}(d_2) - T_{\cdot/\tau}^{\alpha}(d_2) \Delta_{\tau\rho_1}^{\alpha}(d_1) \right\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} (8.16) \quad \Delta_{\beta\rho_1\rho_2}^{\alpha}(d_1, d_2) &= \sum_{\gamma_2=\rho_2}^{\alpha-\beta+1} \binom{\gamma_2}{\rho_2} \Delta_{\beta\rho_1(\gamma_2)j}^{\alpha}(d_1) d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \\ &- \sum_{\gamma_1=\rho_1}^{\alpha-\beta+1} \binom{\gamma_1}{\rho_1} \Delta_{\beta\rho_2(\gamma_1)j}^{\alpha}(d_2) d_1 x^{(\gamma_1-\rho_1)j} \\ &+ \Delta_{\gamma\rho_2}^{\alpha}(d_2) \Delta_{\rho_1}^{\gamma}(d_1) - \Delta_{\gamma\rho_1}^{\alpha}(d_1) \Delta_{\rho_2}^{\gamma}(d_2). \end{aligned}$$

Die Grösse $\Delta_{\beta\rho_1\rho_2}^{\alpha}(d_1, d_2)$ muss identisch verschwinden. Denn (8.7) zeigt uns

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma_2=\rho_2}^{\alpha-\beta+1} \binom{\gamma_2}{\rho_2} A^{\alpha}_{\beta\rho_1(\gamma_2)j}(d_1) d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \\
&= - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}_{\beta}^{\mu} \sum_{\gamma_2=\rho_2}^{\alpha-\mu+1} \binom{\gamma_2}{\rho_2} \sum_{\gamma_1=\rho_1}^{\alpha-\mu+1} \binom{\gamma_1}{\rho_1} A^{\alpha}_{\mu(\gamma_1)i(\gamma_2)j} d_1 x^{(\gamma_1-\rho_1)i} d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \\
&\quad - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \sum_{\gamma_2=\rho_2}^{\mu-\beta+1} \binom{\gamma_2}{\rho_2} \bar{A}_{\beta(\gamma_2)j}^{\mu} d_2 x^{(\gamma_2-\rho_2)j} \sum_{\gamma_1=\rho_1}^{\alpha-\mu+1} \binom{\gamma_1}{\rho_1} A^{\alpha}_{\mu(\gamma_1)i} d_1 x^{(\gamma_1-\rho_1)i}.
\end{aligned}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite bleibt unverändert, obgleich man die beiden kleinen Indizes 1 und 2 gegeneinander vertauscht. Das letzte Glied geht mittelst der Beziehung $A^{\tau}_{\mu} \bar{A}_{\tau} = \delta_{\mu}^{\nu}$ über in

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}_{\beta;\rho_2}^{\mu} (d_2) A^{\alpha}_{\mu;\rho_1}(d_1) = - \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}_{\beta;\rho_2}^{\mu} (d_2) A^{\gamma}_{\mu} \sum_{\nu=\gamma}^{\alpha} \bar{A}_{\gamma}^{\nu} A^{\alpha}_{\nu;\rho_1}(d_1) \\
&= \sum_{\mu=\beta}^{\alpha} \bar{A}_{\beta}^{\mu} A^{\gamma}_{\mu;\rho_2}(d_2) \cdot \sum_{\nu=\gamma}^{\alpha} \bar{A}_{\gamma}^{\nu} A^{\alpha}_{\nu;\rho_1}(d_1) = A^{\gamma}_{\beta\rho_2}(d_2) A^{\alpha}_{\gamma\rho_1}(d_1).
\end{aligned}$$

Damit ist klar

$$(8.17) \quad A^{\alpha}_{\beta\rho_1\rho_2}(d_1, d_2) \equiv 0,$$

deswegen bekommen wir

$$\begin{aligned}
(8.18) \quad & T^{\alpha}_{\cdot/\rho_1/\rho_2}(d_1, d_2) - T^{\alpha}_{\cdot/\rho_2/\rho_1}(d_2, d_1) \\
&= - \left\{ T^{\alpha}_{\cdot/\tau}(d_1) A^{\tau}_{\rho_1\rho_2}(d_2) - T^{\alpha}_{\cdot/\tau}(d_2) A^{\tau}_{\rho_2\rho_1}(d_1) \right\}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die durch (8.16) definierte Grösse $A^{\alpha}_{\beta\rho_1\rho_2}(d_1, d_2)$ ist nichts anderes als der P -Tensor, den man als den P -Krümmungstensor der Übertragung $A^{\alpha}_{\beta\rho}(d)$ für P -Tensordichte ansehen soll. Infolgedessen kann man sagen, dass das Verschwinden der Grösse $A^{\alpha}_{\beta\rho_1\rho_2}(d_1, d_2)$ den Fernparallelismus der Übertragung $A^{\alpha}_{\beta\rho}(d)$ in einem Sinne¹⁾ bedeutet.

September 1941.

1) Z. B. vgl. A. Einstein [i].

LITERATURVERZEICHNIS¹⁾

I. Die Differentialgeometrie höherer Ordnung.

(FINSLERSche Räume und die Geometrie von Bahnen zweiter Ordnung
ausgeschlossen)

E. BORTOLOTTI

- [2] Geometria di sistemi alle derivate parziali, Tensor, 4 (1941), 25-34.

H. V. CRAIG

- [5] On a generalized tangent vector, Amer. Jour. of Math., 57 (1935), 457-462.

TH. DE DONDER

- [1] Théorie invariante du calcul des variations, Bruxelles, 1935.

H. HASHIMOTO

- [2] On the geometry of a system of partial differential equations of third order (continued), Tensor, 4 (1941), 55-59.

S. HOKARI

- [1] Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 3 (1935), 15-26.
 [2] Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören II, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 4 (1935), 41-50.
 [10] Über die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 104-108.
 [11] Die intrinsike Theorie der Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 326-332.
 [12] On the connections in the geometry of paths of higher order, Tensor, 3 (1940), 63-67.
 [13] Geometry in an n -dimensional space based on the idea of K -dimensional volume, Tensor, 4 (1941), 72-77.
 [14] Einige Sätze über System von PHAFFSchen Ausdrücken und ihre Anwendungen, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 17 (1941).

H. HOMBU

- [9] Die projektive Theorie eines Systems der "paths" höherer Ordnung I, Japanese Jour. of Math., 15 (1938), 139-196.
 [10] Die projektive Theorie eines Systems der "paths" höherer Ordnung II, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 7 (1938), 35-94.
 [13] Grundlage der Geometrie in der Mannigfaltigkeit der Kurvenelemente, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 90-96.
 [14] Die Geometrie des Integrals $\int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})dt$, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 97-103.

1) Die Fortsetzung des Literaturverzeichnisses in der vorhergehenden Abhandlung D. H. I. Siehe A. KAWAGUCHI [23]. Die in der vorliegenden Abhandlung zitierten Arbeiten werden wieder aufgestellt.

- [15] Neue Begründung der Geometrie des Integrals $s = \int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})dt$ auf die projektive Theorie der "paths", Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 1 (1940), 29-110.
- [16] Communication of a research, Tensor, 3 (1940), 56-57.
- [17] On the geometry of paths of higher order, Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 1 (1941), 129-142.

H. HOMBU und M. MIKAMI

- [1] Parabolas and projective transformations in the generalized spaces of paths, Japanese Jour. of Math, 17 (1941), 307-335.

H. HOMBU und T. SUGURI

- [1] A treatment of geometric quantities in the manifold of surface-elements, Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Im. Univ., Ser. A, 2 (1941), 67-90.

M. M. JOHNSON

- [1] An extension of a covariant differentiation process, Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), 269-271.

A. KAWAGUCHI

- [6] The foundation of the theory of displacements II (Application to the functional manifolds), Proc. Imp. Acad. Tokyo, 10 (1934), 45-48.
- [8] Some intrinsic derivations in a generalized space, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 12 (1936), 149-151.
- [14] Theory of connections in a KAWAGUCHI space of higher order, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 13 (1937), 237-240.
- [23] Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 9 (1940), 1-152.
- [24] Views on higher order geometry of connections, III, Tensor, 3 (1940), 68-70.
- [25] Die Differentialgeometrie höherer Ordnung II. Über die n -dimensionalen metrischen Räume mit vom m -dimensionalen Flächenelement abhängigem Zusammenhang, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 9 (1940), 153-188.
- [26] Views on higher order geometry of connections, IV, Tensor, 4 (1941), 66-68.

A. KAWAGUCHI und S. HOKARI

- [1] Die Grundlegung der Geometrie der fünf-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 313-319.
- [2] Die Grundlegung der Geometrie der n -dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des K -dimensionalen Flächeninhalts, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 320-325.

H. KNESER

- [1] Homogene Funktion auf der GRASSMANNschen Mannigfaltigkeit, Bull. Soc. Math. Grèce, 20 (1940), 101-103.

S. MICHIIRO

- [1] A remark to a covariant differentiation process, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 9 (1940), 189-192.
- [2] Theory of curves in a two-dimensional space with arc length $s = \int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$, Tensor, 4 (1941), 63-66.

M. MIKAMI

- [1] On parabolas in the generalized spaces, Japanese Jour. of Math., 17 (1941), 185-200.

T. OHKUBO

- [6] A symmetric connection in an n -dimensional KAWAGUCHI space, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 17 (1941), 178-181.

T. SUGURI

- [1] The geometry of K -spreads of higher order, Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 1 (1941), 143-166.
- [2] Projective theory of generalized affine connections, Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 2 (1941), 91-106.

J. L. SYNGE

- [1] Some intrinsic and derived vectors in a KAWAGUCHI space, Amer. Jour. of Math., 57 (1935), 679-691.

K. TONOWOKA

- [1] On a metric connection along a curve in a special KAWAGUCHI space of order two, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 17 (1941), 182-185.
- [2] On a metric displacement along a curve in a special KAWAGUCHI space, Tensor, 4 (1941), 60-62.

II. Andere verschiedene Gebiete.

(Nur die in der vorliegenden Abhandlung zitierten Arbeiten)

L. KOSCHMIEDER

- [v] Die neuere formale Variationsrechnung, Jahresberichte d. Deut. Math. Ver., 40 (1931), 109-132.

A. EINSTEIN

- [i] RIEMANN-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, Sitzungsber. d. Preuss. Akad., 1928, XVII, 217-221.
-