HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	JETS SEMI-HOLONOMES ET TENSEURS NON- SYMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR I.
Author(s)	Kawaguchi, Michiaki
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido University. Ser. 1 Mathematics, 16(3-4), 193-213
Issue Date	1962
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/56031
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_16_N3-4_193-213.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

JETS SEMI-HOLONOMES ET TENSEURS NON-SYMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR I.

Par

Michiaki KAWAGUCHI

Introduction.

Le calcul des jets, créé par Ch. Ehresmann [1][1] en 1951, joue un rôle important à la géométrie différentielle fondamentale, surtout à celle d'ordre supérieur. En 1954, Ch. Ehresmann [2] a défini la notion de jet non holonome et essayé d'y étendre le calcul des jets. Il [3] a aussi traité quelques applications géométriques de ce jet non holonome. En ajoutant une condition supplémentaire à la définition du jet non holonome, il a considéré une sorte de jet qui est une généralisation du jet ordinaire (holonome), en même temps, une spécialisation du jet non holonome, appelée jet semi-holonome. Dans l'exposé de Ch. Ehresmann [4], en utilisant cette notion de jet semi-holonome, nous trouvons la définition générale des connexions d'ordre supérieur d'un espace fibré. De plus, le représentant tensoriel du jet semi-holonome peut être considéré et en vertu de ce représentant on obtient facilement la condition[2] pour que le jet semi-holonome soit identique à celui ordinaire (holonome). Quant à la condition pour que le jet non holonome devienne celui ordinaire, nous l'avons trouvé dans l'article[3] de l'auteur. Néanmoins, nous sommes arrivés aux questions: comment on peut définir la notion de jet semi-holonome dans le calcul des tenseurs d'ordre supérieur[4] et comment nous faisons le calcul des tenseurs qui correspond à celui des jets semi-holonomes.

Dans cet article, l'auteur a l'intention de discuter d'abord complètement sur le jet semi-holonome et puis de répondre à ces questions. À § 1, nous énonçons les travaux de Ch. Ehresmann concernant le jet semi-holonome et son représentant tensoriel. § 2 est consacré à discuter sur les compositions des jets semi-holonomes en utilisant les pseudo-représent-

1) Les nombres entre crochets renvoient aux références à la fin de cet article.

2) Voir Ch. Ehresmann [3], p. 397.

3) Voir M. Kawaguchi [10], p. 338.

4) Désormais, nous utilisons le mot "exvecteur (extenseur)" strictement pour signifier celui du sens de H.V. Craig. Dans l'autre cas, on l'appelle "vecteur (tenseur) d'ordre supérieur" ou "m^p-vecteur (tenseur)". Voir A. Kawaguchi [9].

ants tensoriels. Depuis § 3, pour que nous considérons le tenseur non-symétrique d'ordre supérieur, on discute d'abord un cas plus simple, un tenseur appelé P-tenseur non-symétrique d'ordre r. La notion de ce tenseur correspond à celle d'un jet semi-holonome lorsqu'on pense seulement les automorphismes des sources du jet semi-holonome et les buts sont toujours fixés. Pour définir ce tenseur, nous supposons une forme généralisée de la transformation d'ordre supérieur de paramètres de telle sorte que les coefficients de cette forme ne soient pas nécéssairement symétriques par rapport aux indices inférieurs et nous discutons surtout sur la structure des coefficients de cette transformation, en se référant au cas symétrique de A. Kawaguchi [7]. Les deux paragraphes suivants, § 4, § 5, sont consacrés à la définition de ce P-tenseur non-symétrique d'ordre r et à la discussion du calcul de ce tenseur. Dans la deuxième partie qui sera publiée bientôt, en considérant en même temps les automorphismes des buts et ceux des sources des jets semi-holonomes, nous arriverons au tenseur non-symétrique d'ordre supérieur et son calcul.

À la fin, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Ch. Ehresmann, qui m'a invité à Paris et a tout fait pour m'aider à étudier ses travaux concernant le calcul des jets. J'ajoute aussi ma gratitude pour A. Kawaguchi qui a bien voulu lire les résultats de cet article avant la publication.

§ 1. Jets semi-holonomes et ses représentants tensoriels.

Étant données deux r-variétés V_p, V_n. Soit $\bar{\Phi}^2 \equiv \bar{\pi} J^1(V_p, V_n)$ l'ensemble des jets $j^1_x \rho$ d'ordre 1, $x \in V_p$ où ρ est un relèvement local de V_p dans $J^1(V_p, V_n)$ vérifiant la condition supplémentaire $j^1_x(j^0 \circ \rho) = \rho(x)$, $j^0 \circ \rho$ signifie une projection du relèvement local ρ, telle qu'il soit une application de V_p dans V_n. En utilisant la condition générale supplémentaire $j^1_x(j^{k-1} \circ \rho_k) = \rho_k(x)$, nous pouvons définir, par récurrence, $\bar{\Phi}^{k+1} = \bar{\pi}\bar{\Phi}^k$ $(k = 2, \cdots, r-1)$ et à la fin l'ensemble $\bar{\Phi}^r \equiv \bar{J}^r(V_p, V_n)$, dont les éléments sont appelés *jets semi-holonomes d'ordre r de V_p dans V_n*. Nous adjoutons l'explication suivante concernant la condition générale précédente: $j^{k-1} \circ \rho_k$ signifie une projection du relèvement local ρ_k de V_p dans $\bar{\Phi}^k$ de telle sorte qu'il soit une application de V_p dans $\bar{\Phi}^{k-1}$.

Par L^r_{np}, nous désignons l'ensembles des jets (holonomes) d'ordre r de R_p dans R_n, dont la source et le but sont respectivement l'origine 0 de R_p et de R_n. Tout élément $X \in L^r_{np}$ admet un représentant tensoriel

$$(1.1)\qquad x^i=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}\cdots u^{\alpha_k},^{5)}$$
$$i=1,2,\cdots,n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k=1,2,\cdots,p,$$

où nous désignons les coordonnées canoniques de R_n et de R_p par (x^i), (u^α), respectivement, et ces coefficients $a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$ sont toujours symétriques par rapport aux indices inférieurs α_1, α_2, $\cdots$, α_k.

Dans (1.1) on voit aisément que les dérivées partielles évaluées à l'origine de R_p,

$$\left(\frac{\partial^k x^i}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}\cdots\partial u^{\alpha_k}}\right)_{u^\alpha=0},$$

est identique à $a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$. De plus, pour le représentant tensoriel de jet semi-holonome, il faut qu'on puisse trouver un relèvement local $u^\alpha\to a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$, de telle sorte que la relation

$$\left(\frac{\partial a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}}}{\partial u^{\alpha_k}}\right)_{u^\alpha=0}=a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$$

soit vérifiée. Alors, en désignant l'ensemble des jets semi-holonomes d'ordre r de R_p dans R_n (dont la source et le but sont respectivement l'origine de R_p et de R_n) par $\bar{L}^r_{np}$, nous obtenons immédiatement le représentant tensoriel de l'élément $\bar{X}\in\bar{L}^r_{np}$

$$(1.2)\qquad x^i=a^i_\alpha u^\alpha+\cdots,\qquad x^i_{\alpha_1}=a^i_{\alpha_1}+a^i_{\alpha_1\alpha_2}u^{\alpha_2}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$x^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}}=a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}}+a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}u^{\alpha_r},$$

où le symbole "$+\cdots$" signifie que les coefficients de chaque terme sont arbitraires et x^i, $x^i_{\alpha_1}$, $\cdots$, $x^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}}$ se notent un élément de $\bar{L}^{r-1}_{mp}$. Mais, d'après la définition nous pouvons dire que les choses essentiellement importantes sont seulement les coefficients $a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$ $(k=1,2,\cdots,r)$ qui ne sont pas toujours symétriques par rapport aux indices inférieurs $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$. De même, dans le représentant tensoriel (1.1) de jets holonomes, les coefficients $a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$ sont essentielles et donc ces coefficients peuvent être regardés comme le représentant tensoriel d'un jet (holonome).[6)] Par conséquent, $\bar{L}^r_{np}$ contient l'ensemble L^r_{np} des jets (holonomes) d'ordre r. Ainsi, on peut dire que $\bar{J}^r(V_p,V_n)$ contient l'ensemble $J^r(V_p,V_n)$.

Néanmoins, en cas de jets semi-holonomes, nous considérons la même forme que (1.1),

5) Voir, Ch. Ehresmann [1] p. 5.
6) Voir, A. Kawaguchi [9] p. 106.

$$x^i=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}\cdots u^{\alpha_k},$$

dont les coefficients ne sont pas toujours symétriques et nous l'appelons *le pseudo-représentant*[7] *tensoriel d'un jet semi-holonome.* Ce preudo-représentant tensoriel joue un rôle important pour obtenir les formules concernant les coefficients $a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$.

§ 2. Lois de composition entre deux jets semi-holonomes.

Nous allons définir la loi de composition externe à gauche d'un élément X de $\bar{L}^r_{np}$ par un élément Y de $\bar{L}^r_{mn}$. *Lorsque les pseudo-représentants tensoriels de X, Y sont respectivement désignés par*

$$x^i=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}\cdots u^{\alpha_k},$$

$$x^j=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^j_{i_1i_2\cdots i_k}x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_k},\qquad j=1,2,\cdots,m,$$

nous définissons le pseudo-représentant tensoriel de $Y\cdot X\in\bar{L}^r_{mp}$ par la forme

$$x^j=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^j_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}\cdots u^{\alpha_k},$$

avec les coefficients tels qu'il existe la relation suivante:

$$(2.1)\qquad a^j_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}=\sum_{\lambda=1}^{k}a^j_{i_1i_2\cdots i_\lambda}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}a^{i_1}_{(|\alpha(\mu_1)}a^{i_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots a^{i_\lambda}_{\alpha(\mu_\lambda)|)},$$

où nous utilisons les notations suivantes: 1) $\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}$ *signifie la sommation par rapport aux combinaisons de λ nombres entiers positifs $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_\lambda)$ avec la restriction $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda=k$;* 2) *le symbole de sommation* $\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)}$ *exprime la sommation par rapport aux combinaisons qui sont amenées en faisant λ classes de α ($\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_\lambda$: nombres de α), extraites dans l'ensemble des nombres $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$;* 3) *le symbole $(|\ |)$ a deux significations:* (a) *nous considérons l'ordre des indices α's, de telle sorte qu'on ait toujours $s^t_1<s^t_2<\cdots<s^t_{\mu_t}$, $t=1,2,\cdots,\lambda$ à chaque $a^{it}_{\alpha^t_{s_1}\alpha^t_{s_2}\cdots\alpha^t_{s_{\mu_t}}}\equiv a^{it}_{\alpha^t_{s(\mu_t)}}$;* (b) *nous changeons l'ordre des classes de α, $(\alpha^t_{s_1},\alpha^t_{s_2},\cdots,\alpha^t_{s_{\mu_t}})$, $t=1,2,\cdots,\lambda$ dans* $a^{i_1}_{\alpha^1_{s_1}\alpha^1_{s_2}\cdots\alpha^1_{s_{\mu_1}}}a^{i_2}_{\alpha^2_{s_1}\alpha^2_{s_2}\cdots\alpha^2_{s_{\mu_2}}}\cdots a^{i_\lambda}_{\alpha^\lambda_{s_1}\alpha^\lambda_{s_2}\cdots\alpha^\lambda_{s_{\mu_\lambda}}}$ *de telle sorte que nous ayons la relation suivante concernant les premiers indices: $\alpha'_{s_1}<\alpha''_{s_1}<\cdots<\alpha'''_{s_1}$, c'est-à-dire,*

7) Dans l'article de Ch. Ehresmann ([3] p. 1762) on l'appelle simplement le représentant tensoriel d'un jet semi-holonome.

en résultat, nous ayons

$$a^{i_1}_{\alpha_{s_1}\alpha_{s_2}\cdots\alpha_{s_{\mu_1}}}\, a^{i_2}_{\alpha_{s_1}\alpha_{s_2}\cdots\alpha_{s_{\mu_2}}}\cdots a^{i_\lambda}_{\alpha_{s_1}\alpha_{s_2}\cdots\alpha_{s_{\mu_\lambda}}}\,.$$

Ensuite, nous pouvons aussi considérer la loi de composition externe à droite d'un élément X de $\bar{L}^r_{np}$ par un élément Z de $\bar{L}^r_{pq}$. Si le pseudo-représentant tensoriel de Z s'écrit

$$u^\alpha=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}\beta^\alpha_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k}u^{\beta_1}u^{\beta_2}\cdots u^{\beta_k},$$

nous définissons le pseudo-représentant tensoriel de $X\cdot Z\in\bar{L}^r_{nq}$ par

$$x^i=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^i_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k}u^{\beta_1}u^{\beta_2}\cdots u^{\beta_k},$$

où nous avons la relation suivante entre les coefficients:

$$(2.2)\qquad a^i_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k}=\sum_{\lambda=1}^{k}a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_k)}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}\beta^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)}\beta^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots\beta^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|)},$$

dans laquelle nous utilisons les mêmes symboles que ceux de (2.1).

En utilisant deux compositions externes en même temps, la loi de composition externe d'un élément X de $\bar{L}^r_{np}$ par un élément (Y, Z) de $\bar{L}^r_{mn}\times\bar{L}^r_{pq}$ peut être considérée. Lorsque nous désignons le pseudo-représentant de $Y\cdot X\cdot Z\in\bar{L}^r_{mq}$ que nous obtenons en résultat, par la forme

$$x^j=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^j_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k}u^{\beta_1}u^{\beta_2}\cdots u^{\beta_k},$$

nous devons avoir la relation suivante entre les coefficients:

$$\begin{aligned}(2.3)\qquad a^j_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k}&=\sum_{\lambda=1}^{k}\alpha^j_{i_1i_2\cdots i_\lambda}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_k)}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}a^{i_1}_{(|\beta(\mu_1)}a^{i_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots a^{i_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|)}\\&=\sum_{\lambda=1}^{k}\alpha^j_{i_1i_2\cdots i_\lambda}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_k)}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}\\&\quad\times\Big[\sum_{\sigma_1=1}^{\mu_1}a^{i_1}_{\alpha^1_1\alpha^1_2\cdots\alpha^1_{\sigma_1}}\sum_{(\nu^1_1\nu^1_2\cdots\nu^1_{\sigma_1})}^{(|\beta(\mu_1)}\sum_{(+\nu_{\sigma_1})}^{\mu_1}\beta^{\alpha^1_1}_{(|\beta(\nu^1_1)}\beta^{\alpha^1_2}_{\beta(\nu^1_2)}\cdots\beta^{\alpha^1_{\sigma_1}}_{\beta(\nu^1_{\sigma_1})|)}\Big]\\&\quad\times\cdots\times\\&\quad\times\Big[\sum_{\sigma_\lambda=1}^{\mu_\lambda}a^{i_\lambda}_{\alpha^\lambda_1\alpha^\lambda_2\cdots\alpha^\lambda_{\sigma_\lambda}}\sum_{(\nu^\lambda_1\nu^\lambda_2\cdots\nu^\lambda_{\sigma_\lambda})}^{\beta(\mu_\lambda)|)}\sum_{(+\nu_{\sigma_\lambda})}^{\mu_\lambda}\beta^{\alpha^\lambda_1}_{(|\beta(\nu^\lambda_1)}\beta^{\alpha^\lambda_2}_{\beta(\nu^\lambda_2)}\cdots\beta^{\alpha^\lambda_{\sigma_\lambda}}_{\beta(\nu^\lambda_{\sigma_\lambda})|)}\Big].\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1. *Soit* $X\in\bar{L}^r_{np}$, $Y\in\bar{L}^r_{mn}$. *Pour* $r=2$, *le pseudo-représentant tensoriel de* $Y\cdot X\in\bar{L}^2_{mp}$ *s'obtient par substitution du pseudo-représentant tensoriel de* X *dans celui de* Y *et par suppression des termes de degré* >2. *Cette règle n'est plus valable pour* $r>2$.

Démonstration. En cas de $r=2$, c'est évident. En effet, pour $r=3$, lorsqu'on écrit le pseudo-représentant tensoriel de X et celui de Y par

$$x^i=a^i_\alpha u^\alpha+\frac{1}{2!}a^i_{\alpha_1\alpha_2}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}+\frac{1}{3!}a^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}, \tag{2.4}$$

$$x^j=\alpha^j_{i_1}x^{i_1}+\frac{1}{2!}\alpha^j_{i_1i_2}x^{i_1}x^{i_2}+\frac{1}{3!}\alpha^j_{i_1i_2i_3}x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}, \tag{2.5}$$

respectivement, en substituant x^i dans (2.5) par (2.4) et en supprimant les termes de degré >3, on a la relation

$$\begin{aligned}x^j=&\alpha^j_i a^i_\alpha u^\alpha+\frac{1}{2!}(\alpha^j_{i_1}a^{i_1}_{\alpha_1\alpha_2}+\alpha^j_{i_1i_2}a^{i_1}_{\alpha_1}a^{i_2}_{\alpha_2})u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}\\&+\frac{1}{3!}\Big[\alpha^j_{i_1}a^{i_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\frac{3}{2}\alpha^j_{i_1i_2}(a^{i_1}_{\alpha_1\alpha_2}a^{i_2}_{\alpha_3}+a^{i_1}_{\alpha_1}a^{i_2}_{\alpha_2\alpha_3})\\&+\alpha^j_{i_1i_2i_3}a^{i_1}_{\alpha_1}a^{i_2}_{\alpha_2}a^{i_3}_{\alpha_3}\Big]u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3},\end{aligned}$$

et alors le coefficient de terme $u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}$ n'est pas identiquement $a^j_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.2. *On peut trouver le jet semi-holonome inverse d'un jet semi-holonome $X\in\bar{J}^r(V_n,V_n)$, si le jet du premier ordre $j^1(X)$ est inversible. En ce cas on dit que le jet semi-holonome est inversible. Cet effet est le même qu'en cas de jet (holonome).*

Démonstration. Pour cela, il faut et il suffit que nous démontrions cette propriété sur un jet semi-holonome $X\in\bar{J}^r(R_n,R_n)$. Si l'on désigne le pseudo-représentant tensoriel de X par

$$x^j=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}a^j_{i_1i_2\cdots i_k}x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_k},\qquad j=1,2,\cdots,n, \tag{2.6}$$

le représentant tensoriel de $j^1(X)$ devient

$$x^j=a^j_i x^i.$$

Puisque $j^1(X)$ est inversible, le rang de (a^j_i) doit être identique à n et on peut obtenir l'application inverse,

$$x^i=\bar{a}^i_j x^j,$$

le représentant tensoriel du jet semi-holonome inverse de $j^1(X)$. Si le pseudo-représentant tensoriel (2.6) est résoluble inversement et l'application inverse s'écrit

$$x^i=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}\bar{a}^i_{j_1j_2\cdots j_k}x^{j_1}x^{j_2}\cdots x^{j_k}, \tag{2.7}$$

en substituant x^i de (2.6) par (2.7), nous avons

$$\begin{cases} a^j_i \overline{a}^i_k = \delta^j_k, \\ a^j_i \overline{a}^i_{k_1k_2} + a^j_{i_1i_2} \overline{a}^{i_1}_{k_1} \overline{a}^{i_2}_{k_2} = 0, \\ a^j_{i_1} \overline{a}^{i_1}_{k_1k_2k_3} + \dfrac{3}{2} a^j_{i_1i_2} (\overline{a}^{i_1}_{k_1k_2} \overline{a}^{i_2}_{k_3} + \overline{a}^{i_1}_{k_1} \overline{a}^{i_2}_{k_2k_3}) + a^j_{i_1i_2i_3} \overline{a}^{i_1}_{k_1} \overline{a}^{i_2}_{k_2} \overline{a}^{i_3}_{k_3} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

et les coefficients de (2.7) sont représentés par les formes

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \overline{a}^i_{k_1k_2} = - a^j_{i_1i_2} \overline{a}^{i_1}_{k_1} \overline{a}^{i_2}_{k_2} \overline{a}^i_j \\ \overline{a}^i_{k_1k_2k_3} = - \dfrac{3}{2} a^j_{i_1i_2} (\overline{a}^{i_1}_{k_1k_2} \overline{a}^{i_2}_{k_3} + \overline{a}^{i_1}_{k_1} \overline{a}^{i_2}_{k_2k_3}) \overline{a}^i_j - a^j_{i_1i_2i_3} \overline{a}^{i_1}_{k_1} \overline{a}^{i_2}_{k_2} \overline{a}^{i_3}_{k_3} \overline{a}^i_j \\ \cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

donc, par récurrence, on peut obtenir les coefficients. Par conséquent, inversement, lorsque nous considérons le pseudo-représentant tensoriel (2.7) muni des coefficients (2.8), il devient celui de l'élément inverse X^{-1} et le jet X est inversible. C. Q. F. D.

L'ensemble des éléments inversibles de $\overline{J}^r(V_n, V_n)$ forme un groupoïde $\overline{\pi}^r(V_n)$. Les éléments inversibles de source et de but $x \in V_n$ forment un groupe $\overline{L}^r_x(V_n)$, isomorphe au groupe $\overline{L}^r_n = \overline{L}^r_0(R_n)$, qui contient L^r_n comme sous-groupe. $\overline{L}^r_n$ s'appelle *groupe d'isotropie semi-holonome.* p^r*-vitesse semi-holonome* dans V_n d'origine x est un élément de $\overline{J}^r(R_p, V_n)$ de source 0 et de but x et $\overline{T}^r_p(V_n)$ exprime l'ensemble de ces p^r-vitesses semi-holonomes dans V_n. Une n^r-vitesse semi-holonome de rang n de V_n s'appelle *repère semi-holonome d'ordre r de* V_n. L'ensemble $\overline{H}^r(V_n)$ de ces reprères d'ordre r sera appelé *prolongement principal semi-holonome d'ordre r de* V_n. Un espace fibré associé au prolongement principal semi-holonome $\overline{H}^r(V_n)$ est appelé *prolongement parfait d'ordre r de* V_n.[8] Sur $\overline{T}^r_p(V_n)$ nous pouvons aussi définir une structure de prolongement de V_n, mais de plus celle de prolongement parfait de V_n, c'est-à-dire,

$$\overline{T}^r_p(V_n)(V_n, \overline{L}^r_{mn}, L^r_n, H^r(V_n)) \text{ et } \overline{T}^r_p(V_n)(V_n, \overline{L}^r_{mn}, \overline{L}^r_n, \overline{H}^r(V_n)).$$

Pour qu'un prolongement ordinaire soit parfait, il faut et il suffit que la loi de composition $(s, y) \to sy$, où $s \in L^r_n$ et $y \in F$, (F: fibre), s'étende à $\overline{L}^r_n$.[9]

8) Voir, Ch. Ehresmann [2] p. 1763.
9) Voir, *loc. cit.*, p. 1764.

§ 3. Paramètre-transformations non-symétriques d'ordre supérieur.

Nous considérons d'abord un espace numérique R_p, muni des coordonnées canoniques u^α, $\alpha=1, 2, \cdots, p$. Étant donnée une transformation r-fois différentiable des coordonnées canoniques $u^\beta=u^\beta(u^\alpha)$ dont les déterminants jacobiens ne sont pas identiques à zéro à tout espace R_p. Soit f une fonction analytique des coordonnées u^α, alors, nous pouvons considérer les dérivées partielles

$$\frac{\partial^\lambda f}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}\cdots\partial u^{\alpha_\lambda}}, \qquad \lambda=1, 2, \cdots, r,$$

lesquelle nous désignons simplement par $f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$ ou $f_{,\alpha(\lambda)}$. On trouve $\binom{p+r}{r}-1$ dérivées partielles d'espèce différente, car elles sont symétriques par rapport aux indices inférieurs $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\lambda$ et ${}_pH_1+{}_pH_2+\cdots+{}_pH_r=\binom{p+r}{r}-1$. Nous écrivons, en détail, la loi de transformation des dérivées partielles $f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$ dans $u^\beta=u^\beta(u^\alpha)$, pour qu'on l'utilisera par ailleurs dans l'autre discussion. En calculant les dérivées partielles successivement, on a

$$(3.1)\quad \begin{cases} f_{,\beta_1}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}f_{,\alpha_1}, \\ f_{,\beta_1\beta_2}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}f_{,\alpha_1\alpha_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}f_{,\alpha_1}, \\ f_{,\beta_1\beta_2\beta_3}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3}f_{,\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+(U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3}U^{\alpha_2}_{\beta_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_3}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}U^{\alpha_2}_{\beta_3})f_{,\alpha_1\alpha_2} \\ \qquad\qquad +U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}f_{,\alpha_1}, \\ f_{,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3}U^{\alpha_4}_{\beta_4}f_{,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \\ \qquad\qquad +(U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_4}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3}+U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_4}U^{\alpha_3}_{\beta_3}+U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3\beta_4}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_4} \\ \qquad\qquad +U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_3}U^{\alpha_3}_{\beta_4}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}U^{\alpha_2}_{\beta_3}U^{\alpha_3}_{\beta_4})f_{,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \\ \qquad\qquad +(U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3\beta_4}U^{\alpha_2}_{\beta_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_4}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_4}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_3}+U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_3\beta_4}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_4}U^{\alpha_2}_{\beta_3} \\ \qquad\qquad +U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}U^{\alpha_2}_{\beta_3\beta_4}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}U^{\alpha_2}_{\beta_4})f_{,\alpha_1\alpha_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}f_{,\alpha_1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{,\beta_1\beta_2\cdots\beta_r}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots U^{\alpha_r}_{\beta_r}f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}+\cdots+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_r}f_{,\alpha_1}, \end{cases}$$

où nous posons $U^\alpha_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}=\dfrac{\partial^\mu u^\alpha}{\partial u^{\beta_1}\partial u^{\beta_2}\cdots\partial u^{\beta_\mu}}$.

Puisque les dérivées partielles $f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$, $f_{,\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$ sont symétriques par rapport aux indices inférieurs, on peut écrire la forme (3.1) par

$$(3.2)\quad \begin{cases} f_{,\beta_1}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}f_{,\alpha_1}, \\ f_{,\beta_1\beta_2}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}f_{,\alpha_1\alpha_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}f_{,\alpha_1}, \\ f_{,\beta_1\beta_2\beta_3}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3}f_{,\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+3U^{\alpha_1}_{(\beta_1\beta_3}U^{\alpha_2}_{\beta_2)}f_{,\alpha_1\alpha_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}f_{,\alpha_1}, \\ f_{,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3}U^{\alpha_4}_{\beta_4}f_{,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}+6U^{\alpha_1}_{(\beta_1\beta_4}U^{\alpha_2}_{\beta_2}U^{\alpha_3}_{\beta_3)}f_{,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad +(4U^{\alpha_1}_{(\beta_1\beta_3\beta_4}U^{\alpha_2}_{\beta_2)}+3U^{\alpha_1}_{(\beta_1\beta_3}U^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_4)})f_{,\alpha_1\alpha_2}+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}f_{,\alpha_1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{,\beta_1\beta_2\cdots\beta_r}=U^{\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots U^{\alpha_r}_{\beta_r}f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}+\cdots+U^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_r}f_{,\alpha_1}. \end{array}\right.$$

En utilisant la notation plus simple $f_{,\alpha(\lambda)}\equiv f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$ et en désignant les coefficients de $f_{,\alpha(\lambda)}$, les polynomes de dérivées partielles $U^{\alpha}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$, par $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$, la forme (3.1) peut s'écrire:

$$\left\{\begin{array}{l} f_{,\beta(1)}=A^{\alpha(1)}_{\beta(1)}f_{,\alpha(1)}, \\ f_{,\beta(2)}=A^{\alpha(2)}_{\beta(2)}f_{,\alpha(2)}+A^{\alpha(1)}_{\beta(2)}f_{,\alpha(1)}, \\ f_{,\beta(3)}=A^{\alpha(3)}_{\beta(3)}f_{,\alpha(3)}+A^{\alpha(2)}_{\beta(3)}f_{,\alpha(2)}+A^{\alpha(1)}_{\beta(3)}f_{,\alpha(1)}, \\ f_{,\beta(4)}=A^{\alpha(4)}_{\beta(4)}f_{,\alpha(4)}+A^{\alpha(3)}_{\beta(4)}f_{,\alpha(3)}+A^{\alpha(2)}_{\beta(4)}f_{,\alpha(2)}+A^{\alpha(1)}_{\beta(4)}f_{,\alpha(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{,\beta(r)}=A^{\alpha(r)}_{\beta(r)}f_{,\alpha(r)}+\cdots+A^{\alpha(1)}_{\beta(r)}f_{,\alpha(1)}, \end{array}\right.$$

ou simplement

$$f_{,\beta(\mu)}=\sum_{\lambda=1}^{\mu}A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}f_{,\alpha(\lambda)}, \qquad \mu=1,2,\cdots,r. \tag{3.3}$$

D'après H. Hombu et T. Suguri[10], en posant $U^{\alpha}_{\beta(\mu)}=U^{\alpha}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$, nous avons déjà obtenu la forme récurrente de $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$

$$\left\{\begin{array}{l} A^{\alpha}_{\beta(\mu)}=U^{\alpha}_{\beta(\mu)}, \qquad A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}\equiv 0 \quad (\lambda>\mu), \\ A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}=A^{\alpha(\lambda-1)}_{\beta(\mu-1)}U^{\alpha_\lambda)}_{\beta\mu}+\dfrac{\partial^*}{\partial u^{\beta\mu}}A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu-1)} \qquad (1<\lambda<\mu),^{11} \\ A^{\alpha(\mu)}_{\beta(\mu)}=U^{(\alpha_1}_{\beta_1}U^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots U^{\alpha_\mu)}_{\beta_\mu} \end{array}\right. \tag{3.4}$$

et récemment A. Kawaguchi a donné la forme directe de $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ comme suit:

$$A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}=\sum_{(+s_\lambda)}^{\mu}\frac{\mu!}{s_1!\,s_2!\cdots s_\lambda!\,\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_{\mu-\lambda+1}!}U^{(\alpha_1}_{(\beta(s_1)}U^{\alpha_2}_{\beta(s_2)}\cdots U^{\alpha_\lambda)}_{\beta(s_\lambda))}, \tag{3.5}$$

[12]

où nous utilisons les notations suivantes: $\sum_{(+s_\lambda)}^{\mu}$ signifie la sommation par rapport à toutes les combinaisons de λ nombres entiers positifs $(s_1, s_2,\cdots, s_\lambda)$ avec la restriction $s_1+s_2+\cdots+s_\lambda=\mu$: par ν_t nous désignons le nombre des mêmes $s_\sigma=t$, $(\sigma=1,2,\cdots,\lambda)$, prenant t de 1 au plus jusqu'à $\mu-\lambda+1$, car le nombre de $s_\sigma\neq 1$ est au plus $\mu-\lambda$.

Mais, on n'utilise pas la forme précédente (3.3), et nous considérons

10) Voir [5] p. 68.

11) Voir [8] p. 258. $\dfrac{\partial^* F}{\partial u^\beta}$ signifie $\dfrac{\partial F}{\partial u^\beta}+\sum_{\sigma=1}^{r}\dfrac{\partial F}{\partial U^{\alpha}_{\beta(\sigma)}}\dfrac{\partial U^{\alpha}_{\beta(\sigma)}}{\partial u^\beta}$, lorsque F est une fonction de $(u^\beta, U^{\alpha}_{\beta(1)}, U^{\alpha}_{\beta(2)},\cdots, U^{\alpha}_{\beta(r)})$.

12) Cotte notation correspond à celle (p. 259, (1.6)) de l'article [8] de A. Kawaguchi. Nous trouvons aussi la démonstration de (3.5) dans cet article.

l'autre forme. Pour considérer une transformation pas toujours symétrique, nous supposons que $f_{,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$, $f_{,\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$ dans la forme (3.1) ne signifient pas des dérivées partielles $\partial^\lambda f/\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}\cdots\partial u^{\alpha_\lambda}$, $\partial^\mu f/\partial u^{\beta_1}\partial u^{\beta_2}\cdots\partial u^{\beta_\mu}$ et ne soient pas toujours symétriques par rapport aux indices $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\lambda$ ou aux indices $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu$. De plus, on suppose que $U^\alpha_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$ ne représentent pas les dérivées partielles $\partial^\mu u^\alpha/\partial u^{\beta_1}\partial u^{\beta_2}\cdots\partial u^{\beta_\mu}$ et ne soient pas toujours symétriques par rapport aux indices $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu$. Donc, la forme (3.1) devient une transformation qui n'est pas toujours symétrique par rapport aux indices. Cette transformation sera appelée *une paramètre-transformation non-symétrique d'ordre r*. En ce cas, pour distinguer les notations précédentes de dérivée partielle, on omet les virgules comme $f_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$, $f_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$ ou $f_{\alpha(\lambda)}$, $f_{\beta(\mu)}$ et nous utilisons $u^\alpha_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$ au lieu de $U^\alpha_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}$. Alors, en considérant les permutations admettant répétition des indices inférieurs, on voit que $f_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$ $(\lambda=1, 2, \cdots, r)$ expriment H fonctions de u^α, $(\alpha=1, 2, \cdots, p)$, H étant ${}_p\Pi_1+{}_p\Pi_2+\cdots+{}_p\Pi_r=\sum_{\alpha=1}^{r} p^\alpha=p(p^r-1)/p-1$.

En se référant à la forme (3.4) de H. Hombu et de T. Suguri, nous obtenons aussi une formule non-symétrique. Mais, la formule qui correspond à celle de A. Kawaguchi est toute différente.

THÉORÈME 3.1. *Au lieu de* (3.1) *nous pouvons utiliser la forme suivante*

$$f_{\beta(\mu)}=\sum_{\lambda=1}^{\mu} \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} f_{\alpha(\lambda)}, \tag{3.6}$$

et $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *s'exprime par la forme récurrente*

$$\begin{cases} \bar{A}^{\alpha}_{\beta(\mu)}=u^\alpha_{\beta(\mu)}, \qquad \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}\equiv 0 \quad (\lambda>\mu), \\ \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}=\bar{A}^{\alpha(\lambda-1)}_{\beta(\mu-1)} u^{\alpha_\lambda}_{\beta_\mu}+\dfrac{\partial^*}{\partial u^{\beta_\mu}}\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu-1)} \qquad (1<\lambda<\mu),^{13)} \\ \bar{A}^{\alpha(\mu)}_{\beta(\mu)}=u^{\alpha_1}_{\beta_1}u^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots u^{\alpha_\mu}_{\beta_\mu}, \end{cases} \tag{3.7}$$

ou par la forme directe

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}=\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\mu} u^{\alpha_1}_{(\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|}, \tag{3.8}$$

en utilisant les mêmes symboles qu'à la forme (2.1), *c'est-à-dire,* 1) $\sum_{(+\mu_\lambda)}^{\mu}$ *signifie la sommation par rapport aux combinaisons de* λ *nombres entiers positifs* $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\lambda)$ *avec la restriction* $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda=\mu$; 2) *le symbole*

13) $\dfrac{\partial^*}{\partial u^\beta}\bar{A}$ signifie $\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial u^\beta}+\sum_{\sigma=1}^{r}\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial u^\alpha_{\beta(\sigma)}}u^\alpha_{\beta(\sigma)\beta}$.

$\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}$ *exprime la sommation par rapport aux combinaisons qui sont amenées en faisant* λ *classes de* β $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\lambda$; *nombres de* $\beta)$, *extraites dans l'ensemble des nombres* $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu)$; 3) *le symbole* $(|\ \ |)$ *a deux significations* (a) *nous considérons l'ordre des indices* β*'s tel que* $s_1^t < s_2^t < \cdots < s_{\mu_t}^t$, $t=1, 2, \cdots, \lambda$ *à chaque* $u^{\alpha_t}_{\beta^t_{s_1}\beta^t_{s_2}\cdots\beta^t_{s_{\mu_t}}} \equiv u^{\alpha_t}_{\beta^t_{s}(\mu_t)}$, (b) *nous changeons l'ordre des classes de* β $(\beta^t_{s_1}, \beta^t_{s_2}, \cdots, \beta^t_{s_{\mu_t}})$, $t=1, 2, \cdots, \lambda$ *dans* $u^{\alpha_1}_{\beta^1_{s_1}\beta^1_{s_2}\cdots\beta^1_{s_{\mu_1}}} \times u^{\alpha_2}_{\beta^2_{s_1}\beta^2_{s_2}\cdots\beta^2_{s_{\mu_2}}} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta^\lambda_{s_1}\beta^\lambda_{s_2}\cdots\beta^\lambda_{s_{\mu_\lambda}}}$ *de telle sorte que nous ayons la relation suivante concernant les premiers indices* $\beta'_{s_1} < \beta''_{s_1} < \cdots < \beta'''_{s_1}$, *c'est-à-dire, au résultat, nous ayons*

$$u^{\alpha_1}_{\beta'_{s_1}\beta'_{s_2}\cdots\beta'_{s_{\mu_1}}} u^{\alpha_2}_{\beta''_{s_1}\beta''_{s_2}\cdots\beta''_{s_{\mu_2}}} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta'''_{s_1}\beta'''_{s_2}\cdots\beta'''_{s_{\mu_\lambda}}}.$$

Démonstration. La forme (3.7) est évidente. Nous posons $\mu=\lambda+\omega$. Pour $\omega=0$, il faut que $\mu_1=1$, $\mu_2=1, \cdots, \mu_\lambda=1$ et la forme (3.8) est établie. Lorsque la forme (3.8) est établie pour ω, un entier arbitrairement définitif, nous allons vérifier la forme (3.8) pour $\omega+1$. En utilisant la forme récurrente (3.7) nous pouvons calculer comme suit:

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\lambda+\omega+1)} &= \bar{A}^{\alpha(\lambda-1)}_{\beta(\lambda+\omega)} u^{\alpha_\lambda}_{\beta_{\lambda+\omega+1}} + \frac{\partial^*}{\partial u^{\beta_{\lambda+\omega+1}}} \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\lambda+\omega)} \\
&= \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_{\lambda-1})}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\lambda+\omega})} \sum_{(+\mu_{\lambda-1})}^{\lambda+\omega} u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_{\lambda-1}}_{\beta(\mu_{\lambda-1})|)} u^{\alpha_\lambda}_{\beta_{\lambda+\omega+1}} \\
&\quad + \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\lambda+\omega})} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\lambda+\omega} \left[u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1+1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|)} \right. \\
&\quad \left. + u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2+1)} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|)} + \cdots + u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda+1)|)} \right] \\
&= \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\lambda+\omega+1})} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\lambda+\omega+1} u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|)}.
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. *Lorsque* $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *sont symétriques par rapport aux indices* $\alpha(\lambda)$, $\beta(\mu)$, $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *devient* $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$.

Au lieu de la forme (3.8), nous avons aussi l'autre représentation.

THÉORÈME 3.2. *Nous pouvons aussi exprimer* $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *par la forme*

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} = \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \sum_{[+\mu_\lambda]}^{\mu} u^{\alpha_1}_{[|\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|]}, \tag{3.9}$$

en utilisant les symboles suivants: 1') $\sum_{[+\mu_\lambda]}^{\mu}$ *signifie la sommation par rapport aux permutations* $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\lambda)$ *de* λ *nombres entiers positifs avec la restriction* $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda=\mu$, 2') *pour* $\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}$ *nous considérons la*

sommation par rapport aux combinaisons qui sont amenées en faisant λ classes de β (chaque nombre de β dans λ classes sont respectivement $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\lambda$), extraites dans l'ensemble des nombres $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu)$, 3') le symbole [| |] a deux significations (a) *nous faisons des permutations de β de telle sorte que $s_1<s_2<\cdots<s_{\mu_t}$, $t=1, 2, \cdots, \lambda$ à chaque $u^{\alpha_t}_{\beta_{s_1}\beta_{s_2}\cdots\beta_{s\mu_t}} \equiv u^{\alpha_t}_{\beta_{s(\mu_t)}}$,* (b) *tous les termes*

$$u^{\alpha_1}_{\beta'_{s_1}\beta'_{s_2}\cdots\beta'_{s_{\mu_1}}} u^{\alpha_2}_{\beta''_{s_1}\beta''_{s_2}\cdots\beta''_{s_{\mu_2}}} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta'''_{s_1}\beta'''_{s_2}\cdots\beta'''_{s_{\mu_\lambda}}}$$

qui n'ont pas la relation $s'_1<s''_1<\cdots<s'''_1$ s'annulent.

Démonstration. Dans le cas 1') de (3.9), nous considérons les permtations au lieu des combinations en 1) de (3.8). En 2') de (3.9), nous faisons les mêmes choses qu'en cas 2) de (3.8). La signification $3')_{(a)}$ est la même que celle $3')_{(a)}$. En $3')_{(b)}$ nous annulons les choses qui sont augmentées en considérant les permutations en 1'). Les choses obtenues par $3)_{(b)}$ sont identiquement celles qui restent $3')_{(b)}$. C. Q. F. D.

§ 4. Quelques formules concernant les coefficients de paramètre-transformation non-symétrique.

Dans ce paragraphe nous allons considérer la structure des coefficients de paramètre-transformations non-symétriques et nous introduisons quelques formules concernant ces coefficients. Tout d'abord, nous calculons les dérivées partielles de $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ par rapport aux $u^{\alpha'}_{\beta'(\nu)}$ et en vertu de (3.8), le théorème suivant est obtenu.

THÉORÈME 4.1. *Lorsque $\lambda\leqq\mu$, $\nu\leqq\mu$, la dérivée partielle de $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ par rapport à $u^{\alpha'}_{\beta'(\nu)}$ s'exprime par*

$$(4.1)\quad \frac{\partial \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}}{\partial u^{\alpha'}_{\beta'(\nu)}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}_{\beta'_1\beta'_2\cdots\beta'_\nu}} \bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda\cdots\beta_\mu}$$

$$= \sum_{(<a_\lambda)}^{1,\mu} \delta^{\beta'_1}_{\beta a_1} \delta^{\beta'_2}_{\beta a_2} \cdots \delta^{\beta'_\nu}_{\beta a_\nu} \sum_{(s_1+s_2+\cdots(s_b)\cdots+s_\lambda)}^{\mu-\nu} \sum_{(s_1 s_2\cdots(s_b)\cdots s_\lambda)}^{(\beta_1\cdots(\beta_{a_1})\cdots(\beta_{a_2})\cdots(\beta_{a_\nu})\cdots\beta_\mu)}$$

$$\times \Big[u^{\alpha_1}_{\underbrace{\beta_{c_1}\cdots\beta}_{s_1}} u^{\alpha_2}_{\underbrace{\beta_{c_2}\cdots\beta}_{s_2}} \cdots u^{\alpha_{\sigma-1}}_{\underbrace{\beta_{c_{\sigma-1}}\cdots\beta}_{s_{\sigma-1}}} \delta^{\alpha_\sigma}_{\alpha'} u^{\alpha_{\sigma+1}}_{\underbrace{\beta_{c_\sigma}\cdots\beta}_{s_\sigma}} \cdots u^{\alpha_b}_{\underbrace{\beta_{c_{b-1}}\cdots\beta}_{s_{b-1}}} u^{\alpha_{b+1}}_{\underbrace{\beta_{c_b+1}\cdots\beta}_{s_{b+1}}} \cdots u^{\alpha_\lambda}_{\underbrace{\beta_{c_\lambda}\cdots\beta}_{s_\lambda}} \Big],^{14)}$$

où nous utilisons les notations suivantes: 1) *en principe, nous posons*

14) Dans chaque $u^{\alpha}_{\underbrace{\beta\cdots\beta}_{s}}$, l'indice s signifie le nombre de β. $\sum_{(<a_\nu)}^{1,\mu}$ exprime la sommation par rapport aux combinaisons de ν nombres entiers $(a_1, a_2, \cdots, a_\nu)$ avec la restriction $1\leqq a_1<a_2<\cdots<a_\nu\leqq\mu$ (Voir [11], p. 78).

$b=a_1$, *mais lorsque* $a_1>\lambda$, *nous posons* $b=\lambda$; 2) *les symboles* $(\beta_1\cdots(\beta_{a_1})\cdots(\beta_{a_2})\cdots(\beta_{a_\nu})\cdots\beta_\mu)$, $(s_1s_2\cdots(s_b)\cdots s_\lambda)$, $(s_1+s_2+\cdots(s_b)\cdots+s_\lambda)$ *signifient que* $\beta_{a_1}, \beta_{a_2},\cdots,\beta_{a_\nu}$ *ou* s_b *sont enlevés;* 3) *l'indice* β_c *désigne le premier indice inférieur de chaque* $u^{\alpha}_{\beta\ldots\beta}$ *et en vertu de la convention précédente on a toujours la relation* $c_1<c_2<\cdots<c_\lambda$: 4) *d'après* β_{a_1}, *nous cherchons l'entier positif* σ *de telle sorte que* $c_{\sigma-1}<a_1<c_\sigma$ *soit obtenu. Naturellement, on peut trouver le terme où nous avons* $c_{b-1}<a_1<c_b$, *c'est-à-dire,* σ *est justement identique à* b.

Ensuite, nous essayons d'exprimer les dérivées partielles des coefficients $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ en utilisant autant que possible $\bar{A}^{\alpha(\lambda')}_{\beta(\mu')}$ ($\lambda'\leqq\lambda$, $\mu'\leqq\mu$), ainsi que le théorème de Hombu-Suguri[15]. Mais cela est impossible et il faut ajouter un terme supplémentaire lequel se trouve dans le

THÉORÈME 4.2. *Nous pouvons expliquer la structure des dérivées partielles des coefficients* $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *comme suit: lorsque* $\nu>\mu-\lambda+1$, $\partial\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}/\partial u^{\alpha'}_{\beta'(\nu)}$ *est identiquement zéro et pour* $\nu\leqq\mu-\lambda+1$, *nous avons la forme*

$$(4.2)\quad \frac{\partial\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}}{\partial u^{\alpha'}_{\beta'(\nu)}}=\frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}_{\beta'_1\beta'_2\cdots\beta'_\nu}}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda\cdots\beta_\mu},\qquad \lambda<\mu,$$

$$=\sum_{(<a_\nu)}^{1,\mu}\delta^{\beta'_1}_{\beta a_1}\partial^{\beta'_2}_{\beta a_2}\cdots\delta^{\beta'_\nu}_{\beta a_\nu}\left[\delta^{\alpha_b}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\cdots(\beta a_1)\cdots(\beta a_2)\cdots(\beta a_\nu)\cdots\beta_\mu}+T^{\alpha_b\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots(\beta a_1)\cdots(\beta a_\nu)\cdots\beta_\mu}\right]$$

où nous utilisons les notations suivantes: 1) *en principe, on pose* $b=a_1$, *mais si* $a_1>\lambda$, b *est identiquement* λ; 2) *le symbole* $\bar{A}^{\cdots(\alpha_b)\cdots}_{\cdots(\beta a_1)\cdots(\beta a_2)\cdots(\beta a_\nu)\cdots}$ *signifie que les indices* $\alpha_b, \beta_{a_1}, \beta_{a_2},\cdots,\beta_{a_\nu}$ *manquent;* 3) *le symbole* $\sum_{(<a_\nu)}^{1,\mu}$ *exprime la sommation concernant les combinaisons de* ν *nombres entiers positifs dans* $(1,2,\cdots,\mu)$ *qui sont désignés par* $(a_1,a_2,\cdots,a_\nu)$ *avec la condition* $a_1<a_2<\cdots<a_\nu$, *c'est-à-dire, la sommation de* $\binom{\mu}{\nu}$ *termes;* 4) *nous cherchons l'entier positif* σ *de telle sorte que* $c_{\sigma-1}<a_1<c_\sigma$ *soit obtenu et nous posons*

$$T^{\alpha_b\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots(\beta a_1)\cdots(\beta a_\nu)\cdots\beta_\mu}=\sum_{b\neq\sigma}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\cdots(\beta_{a_1})\cdots(\beta_{a_\nu})\cdots\beta_\mu)}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{\mu}\Big[u^{\alpha_1}_{\underbrace{\beta c_1\cdots\beta}_{\mu_1}}\cdots u^{\alpha_{b-1}}_{\underbrace{\beta c_{b-1}\cdots\beta}_{\mu_b}}\delta^{\alpha_b}_{\alpha'}$$
$$\times u^{\alpha_{b+1}}_{\underbrace{\beta c_{b+1}\cdots\beta}_{\mu_{b+1}}}\cdots u^{\alpha_\lambda}_{\underbrace{\beta c_\lambda\cdots\beta}_{\mu_\lambda}}+u^{\alpha_1}_{\underbrace{\beta c_1\cdots\beta}_{\mu_1}}\cdots\delta^{\alpha_\sigma}_{\alpha'}u^{\alpha_{\sigma+1}}_{\underbrace{\beta c_\sigma\cdots\beta}_{\mu_\sigma}}\cdots$$
$$\times u^{\alpha_b}_{\underbrace{\beta c_{b-1}\cdots\beta}_{\mu_{b-1}}}u^{\alpha_{b+1}}_{\underbrace{\beta c_{b+1}\cdots\beta}_{\mu_{b+1}}}\cdots u^{\alpha_\lambda}_{\underbrace{\beta c_\lambda\cdots\beta}_{\mu_\lambda}}\Big],$$

15) Voir [5] p. 69.

en utilisant le symbole $\sum_{b\neq\sigma}$ *qui signifie la sommation des termes dont* σ *n'est pas identiquement* b.

Par exemple, nous montrons le cas $\lambda=3$, $\mu=5$, $\nu=2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}_{\beta'_1\beta'_2}}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5}\\
&=\sum_{(<\alpha_2)}^{1,5}\delta^{\beta'_1}_{\beta\alpha_1}\delta^{\beta'_2}_{\beta\alpha_2}\left(\delta^{\alpha_b}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_3}_{\beta_1\cdots(\beta\alpha_1)\cdots(\beta\alpha_2)\cdots\beta_5}+T^{\alpha_b\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_3}_{\alpha'\beta_1\cdots(\beta\alpha_1)\cdots(\beta\alpha_2)\cdots\beta_5}\right)\\
&=\delta^{\beta'_1}_{\beta_1}\delta^{\beta'_2}_{\beta_4}\delta^{\alpha_1}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_3\beta_5}+\delta^{\beta'_1}_{\beta_1}\delta^{\beta'_2}_{\beta_5}\delta^{\alpha_1}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_3\beta_4}+\delta^{\beta'_1}_{\beta_2}\delta^{\beta'_2}_{\beta_4}\delta^{\alpha_2}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_3}_{\beta_1\beta_3\beta_5}+\delta^{\beta'_1}_{\beta_2}\delta^{\beta'_2}_{\beta_5}\delta^{\alpha_2}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_3}_{\beta_1\beta_3\beta_4}\\
&\quad+\delta^{\beta'_1}_{\beta_3}\delta^{\beta'_2}_{\beta_4}\delta^{\alpha_3}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2\beta_5}+\delta^{\beta'_1}_{\beta_3}\delta^{\beta'_2}_{\beta_5}\delta^{\alpha_3}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2\beta_4}+\delta^{\beta'_1}_{\beta_4}\delta^{\beta'_2}_{\beta_5}\delta^{\alpha_3}_{\alpha'}\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2\beta_3}\\
&\quad+2[u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}u^{[\alpha_3}_{\beta_5}\delta^{\alpha_2]}_{\alpha'}\delta^{\beta'_1}_{\beta_3}\delta^{\beta'_2}_{\beta_4}+u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}u^{[\alpha_3}_{\beta_4}\delta^{\alpha_2]}_{\alpha'}\delta^{\beta'_1}_{\beta_3}\delta^{\beta'_2}_{\beta_5}].
\end{aligned}$$

Et puis nous considérons quand le terme supplémentaire $T^{\alpha_b\alpha_1\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots\beta_\mu}$ est identiquement zéro, c'est-à-dire, nous cherchons les cas où le théorème formellement identique à celui de Hombu-Suguri est obtenu.

COROLLAIRE 4.1. *Le terme supplémentaire* $T^{\alpha_b\alpha_1\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots\beta_\mu}$ *dans* (4.2) *disparait lorsque* b *est égal à* σ, *c'est-à-dire, on a toujours* $c_{b-1}<a_1<c_b$. *Plus clairement, lorsque* $\lambda=1,2$, *ou lorsque* $\nu=\mu-\lambda+1$, *on peut le dire.*

Démonstration. D'après la structure de $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$, c'est-à-dire, d'après (3.8), pour ν, on a la relation $1\leqq\nu\leqq\mu-\lambda+1$. Pour qu'on trouve $u^{\alpha}_{\beta(\mu-\lambda+1)}$ dans (3.8), tous les autres deviennent $u^{\alpha}_{\beta(1)}$. Alors, lorsque $\nu=\mu-\lambda+1$, nous avons toujours $c_{b-1}<a_1<c_b$. Lorsque $\lambda=1,2$, cela est évident.

C. Q. F. D.

En utilisant le théorème précédent 4.2, nous avons facilement le

THÉORÈME 4.3. *On peut exprimer les coefficients* $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *par la forme récurrente*

$$\begin{aligned}
(4.3)\qquad \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu+1)}=\bar{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\cdots\beta_\mu\beta_{\mu+1}}&=\sum_{t=0}^{\mu}\sum_{(<\alpha_t)}^{1,\mu}u^{\alpha_b}_{\beta\alpha_1\cdots\beta\alpha_t\beta_{\mu+1}}\bar{A}^{\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\cdots(\beta\alpha_1)\cdots(\beta\alpha_2)\cdots(\beta\alpha_t)\cdots\beta_\mu}\\
&+\sum_{t=1}^{\mu}\sum_{(<\alpha_t)}^{1,\mu}u^{\alpha_b}_{\beta\alpha_1\cdots\beta\alpha_t\beta_{\mu+1}}T^{\alpha_b\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots(\beta\alpha_1)\cdots(\beta\alpha_2)\cdots(\beta\alpha_t)\cdots\beta_\mu},
\end{aligned}$$

où nous utilisons les mêmes symboles qu'à la forme (4.2).

Démonstration. D'abord, en vertu de (3.7), on a

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu+1)}=\bar{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\cdots\beta_\mu\beta_{\mu+1}}=\bar{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_{\lambda-1}}_{\beta_1\cdots\beta_\mu}u^{\alpha_\lambda}_{\beta_{\mu+1}}+\sum_{t=1}^{\mu}u^{\alpha'}_{\beta'_1\cdots\beta'_t\beta_{\mu+1}}\overset{*}{\frac{\partial\bar{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\cdots\beta_\mu}}{\partial u^{\alpha'}_{\beta'_1\cdots\beta'_t}}},$$

et puis par la forme (4.3), nous obtenons

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu+1)}=\bar{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_\lambda-1}_{\beta_1\cdots\beta_\mu}u^{\alpha_\lambda}_{\beta_{\mu+1}}$$
$$+\sum_{t=1}^{\lambda}\sum_{(<\alpha_t)}^{1,\lambda}[u^{\alpha_b}_{\beta\alpha_1\beta\alpha_2\cdots\beta\alpha_t\beta_{\mu+1}}(\bar{A}^{\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\cdots(\beta\alpha_1)\cdots(\beta\alpha_2)\cdots(\beta\alpha_t)\cdots\beta_\mu}$$
$$+T^{\alpha_b\alpha_1\cdots(\alpha_b)\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots(\beta\alpha_1)\cdots(\beta\alpha_2)\cdots(\beta\alpha_t)\cdots\beta_\mu})].$$

Alors, nous avons la forme (4.3). C. Q. F. D.

Pour les coefficients $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ de transformation symétrique, A. Kawaguchi[16] a trouvé la formule

$$A^{\alpha(l)\alpha'(s-l)}_{\beta(r)}=\sum_{t=0}^{r-s}\sum_{(l+t,\,r-l-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_r)}A^{\alpha(\lambda)}_{(|\beta(l+t)}A^{\alpha'(\lambda-l)}_{\beta(r-l-t)|)}. \tag{4.4}$$

Dans notre cas non-symétrique, seulement en cas $l=1$, on peut obtenir cette formule et pour $l\geqq 2$ on ne l'obtient pas[17].

THÉORÈME 4.4. *Nous pouvons décomposer les coefficients* $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$ *comme suit:*

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}=\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}=\sum_{t=0}^{\mu-\lambda}\sum_{(t+1,\,\mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-1-t)|)}, \tag{4.5}$$

en utilisant les mêmes symboles qu'à la forme (3.8).

Démonstration. D'abord, nous considérons le cas $\lambda=\mu$. En ce cas, puisque t est identiquement zéro, nous avons

$$\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda}=u^{\alpha_1}_{\beta_1}u^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots u^{\alpha_\lambda}_{\beta_\lambda}=u^{\alpha_1}_{\beta_1}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_2\cdots\beta_\lambda}=\sum_{t\equiv 0}\sum_{(t+1,\,\lambda-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta\lambda)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\lambda-1-t)|)}.$$

Alors, la forme (4.5) est exacte. Par induction, nous allons calculer $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu+1)}$ lorsque la forme (4.5) pour λ, μ (les nombres arbitrairement fixés) est établie.

$$\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu\beta_{\mu+1}}=\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda-1}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}u^{\alpha_\lambda}_{\beta_{\mu+1}}+\bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu/\beta_{\mu+1}}$$
$$=\sum_{t=0}^{\mu-\lambda+1}\sum_{(1+t,\,\mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_{\lambda-1}}_{\beta(\mu-1-t)|)}u^{\alpha_\lambda}_{\beta_{\mu+1}}$$
$$+\sum_{t=0}^{\mu-\lambda}\sum_{(1+t,\,\mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)/|\beta_{\mu+1}|}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-1-t)|)}$$
$$+\sum_{t=0}^{\mu-\lambda+1}\sum_{(1+t,\,\mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-1-t)/\beta_{\mu+1}|)}$$
$$=\sum_{t=0}^{\mu-\lambda+1}\sum_{(1+t,\,\mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-1-t)|)\beta_{\mu+1}}$$
$$+\sum_{t=0}^{\mu-\lambda}\sum_{(1+t,\,\mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda)}u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)|\beta_{\mu+1}|}\bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-1-t)|)}$$

16) Voir le théorème 1.3 de l'article de A. Kawaguchi ([7], p. 261).

17) Voir le corollaire 4.2 dans ce travail.

$$= \sum_{t=0}^{\mu+1-\lambda} \sum_{(1+t,\ \mu-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\mu+1})} u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\, \bar{A}^{\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-\lambda)|)}.$$

Par conséquent, en substituant $\beta(\mu+1)$ au lieu de $\beta(\mu)$, la forme (4.4) est aussi obtenue. C. Q. F. D.

Pour comprendre plus facilement, nous montrons, par exemple, le cas $\mu=5,\ \lambda=3$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{5-3} \sum_{(t+1,\ 5-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_5)} u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)}\, \bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta(5-1-t)|)} \\
&\quad = u^{\alpha_1}_{\beta_1}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_3\beta_4\beta_5} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_4\beta_5} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_4}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_3\beta_5} \\
&\qquad + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_5}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_3\beta_4} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_4\beta_5} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_4}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_3\beta_5} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3\beta_4}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_5} \\
&\qquad + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_4\beta_5}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_3} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_5}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_3\beta_4} + u^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_3\beta_5}\bar{A}^{\alpha_2\alpha_3}_{\beta_2\beta_4} \equiv \bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5}.
\end{aligned}$$

En répétant quelques fois la manière de cette formule (4.4), on obtient le

THÉORÈME 4.5. *En général, nous avons l'expression suivante de* $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$*:*

$$(4.6)\quad \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} = \bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu} = \sum_{(+\mu_\sigma+1)}^{\mu} \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\sigma+1)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)}\, u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta(\mu_\sigma)}\, \bar{A}^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_{\sigma+1})|)},\quad 1\leqq\sigma\leqq\lambda,$$

où nous utilisons les mêmes symboles qu'à la forme (3.8). *Lorsque* $\sigma=\lambda$, *cette forme* (4.6) *est identiquement* (3.8).

Démonstration. En utilisant deux fois le théorème 4.4, on a

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} = \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(t+1,\ \mu-1-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t)} \sum_{u=0}^{\mu-\lambda-t} \sum_{(1+u,\ \mu-1-t-1-u)}^{(\beta_1\cdots(\beta(1+t))\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_2}_{\beta(1+u)}\, \bar{A}^{\alpha_3\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-1-t-1-u)|)}.$$

Nous répétons σ fois cette manière et la forme suivante est obtenue:

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} &= \sum_{t_1=0}^{u-\lambda} \sum_{t_2=0}^{\mu-\lambda-t_1} \sum_{t_3=0}^{\mu-\lambda-t_1-t_2} \cdots \sum_{t_\sigma=0}^{\mu-\lambda-t_1-\cdots-t_{\sigma-1}} \sum_{(t_1+1,\ \mu-1-t_1)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \\
&\quad \sum_{(t_2+1,\ \mu-t_1-t_2-2)}^{(\beta_1\cdots(\beta(t_1+1))\cdots\beta_\mu)} \sum_{(t_3+1,\ \mu-t_1-t_2-t_3-3)}^{(\beta_1\cdots(\beta(t_1+1)\cdots\beta(t_2+1))\cdots\beta_\mu)} \cdots \sum_{(t_\sigma+1,\ r-t_1-\cdots-t_\sigma-\sigma)}^{(\beta_1\cdots(\beta(t_1+1)\cdots\beta(t_{\sigma-1}+1)\cdots\beta_\mu)} \\
&\quad \times u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t_1)}\, u^{\alpha_2}_{\beta(1+t_2)}\cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta(1+t_\sigma)}\, \bar{A}^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-t_1-\cdots-t_\sigma-\sigma)|)} \\
&= \sum_{(t_1+t_2+\cdots+t_\sigma+t_{\sigma+1})}^{\mu-\sigma-1} \sum_{(t_1+1,\ t_2+1,\ \cdots,\ t_\sigma+1,\ t_{\sigma+1}+1)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_1}_{(|\beta(1+t_1)}\, u^{\alpha_2}_{\beta(1+t_2)}\cdots \\
&\quad \cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta(1+t_\sigma)}\, \bar{A}^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{(1+t_{\sigma+1})|)} \\
&= \sum_{(+\mu_\sigma+1)}^{\mu} \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\sigma+1)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_1}_{(|\beta(\mu_1)}\, u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta(\mu_\sigma)}\, \bar{A}^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_\sigma+1)|)}.
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4.2. *Pour les coefficients* $\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$, *nous ne pouvons pas obtenir la formule qui correspond à celle de A. Kawaguchi* (4.4), *lorsque* $l\geqq 2$, *c'est-à-dire,*

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} \mp \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(l+t,\ \mu-l-t)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l}_{(\beta(l+t)} \bar{A}^{\alpha_{l+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu-l-t))}, \qquad \textit{pour } \lambda \neq \mu.$$

Mais, lorsque $\lambda=\mu$, on obtient toujours cette formule.

Démonstration. En vertu du théorème précédent, on a

$$\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} = \sum_{(+\mu_\sigma+1)}^{\mu} \sum_{(\mu_1\cdots\mu_\sigma+1)}^{(\beta_1\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_1}_{(\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta(\mu_\sigma)} \bar{A}^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_{\sigma+1})} \mp \sum_{(+\mu_\sigma+1)}^{\mu} \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\sigma)}^{(\beta_1\cdots(\beta(\mu_\sigma+1))\cdots\beta_\mu)} \sum_{(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\sigma,\ \mu_\sigma+1)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} u^{\alpha_1}_{(\beta(\mu_1)} u^{\alpha_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta(\mu_\sigma)} \bar{A}^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta(\mu_{\sigma+1})}, \qquad \lambda \neq \mu,$$

car dans la dernière forme on trouve

$$u^{\alpha_1}_{\beta_1\ldots\beta} u^{\alpha_1}_{\beta_2\ldots\beta} \cdots u^{\alpha_\sigma}_{\beta_{\tau+1}\ldots\beta} A^{\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_\lambda}_{\beta_\tau\cdots\beta_\mu},$$

mais on n'en trouve pas dans la première forme à droite. Au cas $\lambda=\mu$, il est clair que cette formule est établie, car cet effect précédent est affirmatif. C. Q. F. D.

Puisque nous ne pouvons pas poser $\alpha_b \equiv \alpha_1$ dans la formule (4.3), le corollaire (Zusatz) de A. Kawaguchi ([7], p. 262) n'est pas obtenue.

§ 5. Paramètre-tenseurs non symétriques d'ordre supérieur.

Étant données deux paramètre-transformations dans R_p (automorphismes des points de R_p) désignées par $u^\beta=u^\beta(u^\alpha)$, $u^\tau=u^\tau(u^\beta)$. Et nous considérons la transformation produite de ces deux transformations et nous la désignons par $u^\tau=u^\tau(u^\beta(u^\alpha))$. Soit $f=F(u^\tau)$ une fonction de u^τ. Alors, on a $f=F(u^\tau(u^\beta))=F(u^\tau(u^\beta(u^\alpha)))$. En utilisant la forme (3.3), nous avons

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} f_{,\beta(\mu)} = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)} f_{,\alpha(\lambda)}, \qquad f_{,\tau(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{A}^{\beta(\mu)}_{\tau(\nu)} f_{,\beta(\mu)}, \\ f_{,\tau(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\tau(\nu)} f_{,\alpha(\lambda)}, \end{cases}$$

donc, la relation suivante est obtenue:

$$\text{(5.2)} \qquad \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\tau(\nu)} = \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} \bar{A}^{\beta(\mu)}_{\tau(\nu)} \bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)},$$

la même forme que celle au cas des coefficients $A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}$,

$$A^{\alpha(\lambda)}_{\tau(\nu)} = \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} A^{\beta(\mu)}_{\tau(\nu)} A^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}.$$

En particulier, lorsque la transformation produite devient $u^\tau(u^\alpha)=\delta^\tau_\alpha u^\alpha$, cette relation précédente s'écrit

$$\delta^{\alpha_1}_{\tau_1}\delta^{\alpha_2}_{\tau_2}\cdots\delta^{\alpha_\lambda}_{\tau_\lambda}\delta^{\lambda}_{\nu}=\overline{\delta}^{\alpha(\lambda)}_{\tau(\nu)}=\sum_{\mu=\lambda}^{\nu}\overline{A}^{\beta(\mu)}_{\tau(\nu)}\overline{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}.$$

Il en résulte que deux transformations données au commencement sont celles inverses mutuellement. De cela on a immédiatement le

THÉORÈME 5.1. *L'ensemble de ces transformations non-symétriques de la forme* (3.6) *forme un groupe* $\overline{G}_H$ *de* H *paramètres lorsque* $u^{\alpha}_{\beta(\lambda)}$ *prennent toute valeur réelle. Et on sait que*

$$H=\sum_{a=1}^{r}{}_{p}\prod_{a}=\sum_{a=1}^{r}p^a=\frac{p^{r+1}-p}{p-1}.$$

Ce groupe s'appelle H-paramètre-groupe non symétrique d'ordre r *dans* R_p.

Maintenant, nous considérons $\sum_{a=1}^{r}p^a$ fonctions $V_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}(u)=V_{\alpha(\lambda)}(u)$, $\lambda=1,2,\cdots,r$ définies sur un espace numérique R_p, $(u^\alpha\in R_p)$. Lorsque ces fonctions se transforment contre les paramètre-transformations (les changements des coordonnées de u) de la loi

$$V_{\beta(\mu)}=\sum_{\lambda=1}^{\mu}\overline{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}V_{\alpha(\lambda)}, \tag{5.3}$$

nous appelons l'ensemble de ces $\sum_{a=1}^{r}p^a$ valeurs $V_{\alpha(\lambda)}$ pour chaque système de valeur de u^α *un P-vecteur covariant non symétrique d'ordre* r. Pour *un P-vecteur contravariant non symétrique d'ordre* r nous prenons l'ensemble des valeurs $V^{\alpha(\lambda)}$ de $\sum_{a=1}^{r}p^a$ fonctions $V^{\alpha(\lambda)}(u)$ des coordonnées u^α dont la loi de transformation contre les paramètre-transformation s'exprime

$$V^{\beta(\mu)}=\sum_{\lambda=\mu}^{r}\overline{A}^{\beta(\mu)}_{\alpha(\lambda)}V^{\alpha(\lambda)}, \tag{5.4}$$

où $A^{\beta(\mu)}_{\alpha(\lambda)}$ signifient les coefficients de la transformation inverse de (1.20) et donc les relations

$$\sum_{\lambda=\mu'}^{\mu}\overline{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}\overline{A}^{\beta'(\mu')}_{\alpha(\lambda)}=\delta^{\beta'(\mu')}_{\beta(\mu)},\qquad \sum_{\mu=\lambda}^{\lambda'}\overline{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}\overline{A}^{\beta(\mu)}_{\alpha'(\lambda')}=\delta^{\alpha(\lambda)}_{\alpha'(\lambda')}$$

doivent être obtenues.

Nous pouvons aussi définir un P-tenseur non symétrique d'ordre r de la manière analogue à celle du calcul tensoriel ordinaire, par exemple, lorsque $(\sum_{a=1}^{r}p^a)^3$ fonctions $T^{\alpha_1(\lambda_1)\alpha_2(\lambda_2)}{}_{\alpha_3(\lambda_3)}$ se transforment contre les paramètre-transformations de la loi

$$T^{\beta_1(\mu_1)\beta_2(\mu_2)}{}_{\beta_3(\mu_3)}=\sum_{\lambda_1=1}^{\mu_1}\sum_{\lambda_2=1}^{\mu_2}\sum_{\lambda_3=1}^{\mu_3}\overline{A}^{\beta_1(\mu_1)}_{\alpha_1(\lambda_1)}\overline{A}^{\beta_2(\mu_2)}_{\alpha_2(\lambda_2)}\overline{A}^{\alpha_3(\lambda_3)}_{\beta_3(\mu_3)}T^{\alpha_1(\lambda_1)\alpha_2(\lambda_2)}{}_{\alpha_3(\lambda_3)}, \tag{5.5}$$

l'ensemble de $(\sum_{\alpha=1}^{r} p^{\alpha})^3$ valeurs de ces fonctions pour chaque valeur de u^{α} est appelé *un P-tenseur non symétrique contravariant de degré* 2, *covariant de degré* 1 *d'ordre r.*

Quant au *P-vecteur non symétrique covariant relatif de poids k d'ordre r* la loi de transformation s'exprime par

$$R_{\beta(\mu)}=U^{k}\sum_{\lambda=1}^{\mu}\bar{A}^{\alpha(\lambda)}_{\beta(\mu)}R_{\alpha(\lambda)},$$

en posant $U=\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right|$. Pour *le P-vecteur non symétrique contravariant relatif de poids k d'ordre r* ou *le P-tenseur non symétrique relatif de poids k d'ordre r*, nous pouvons définir analogiquement.

Dans l'article de A. Kawaguchi [7], on trouve le théorème 1.5, c'est-à-dire, étant donnés un P-vecteur contravariant non symétrique $T^{\alpha(\lambda)}$ et celui covariant $P_{\alpha(\lambda)}$, la quantité définie par

$$D^{\alpha(\mu)}(T,P)=\sum_{\lambda=\mu+1}^{r}\binom{\lambda}{\mu}T^{\alpha(\mu)\alpha(\lambda-\mu)}P_{\alpha(\lambda-\mu)},\qquad 1\leqq\mu\leqq r-1$$

est un P-vecteur contravariant d'ordre $r-1$. Alors, en notre cas, nous essayons de trouver le théorème analogue. Mais, le résutat est négatif. Pour montrer ce fait, lorsque un P-vecteur contravariant non symétrique $T^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda}$ d'ordre r, et celui covariant $T_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}$ sont données, nous allons calculer la loi de transformation de $D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)=\sum_{\lambda=\nu+1}^{r}T^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda}P_{\beta_{\nu+1}\cdots\beta_\lambda}$ contre les paramètre-transformations. D'abord, nous avons

$$\begin{aligned}D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)&=\sum_{\lambda=\nu+1}^{r}T^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda}P_{\beta_{\nu+1}\cdots\beta_\lambda}\\&=\sum_{\lambda=\nu+1}^{r}\sum_{\mu=\lambda}^{r}\bar{A}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\lambda}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}\sum_{\rho=1}^{\lambda-\nu}\bar{A}^{\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_\rho}_{\beta_{\nu+1}\cdots\beta_\lambda}P_{\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_\rho}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation $\sum_{\lambda=\nu+1}^{r}\sum_{\mu=\lambda}^{r}=\sum_{\lambda=\nu+1}^{\mu}\sum_{\mu=\nu+1}^{r}$ et le théorème 4.5, la forme précédente devient

$$\begin{aligned}D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)&=\sum_{\lambda=\nu+1}^{\mu}\sum_{\mu=\nu+1}^{r}\sum_{(+\mu_\nu+1)}^{\mu}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\nu+1)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu)}u^{\beta_1}_{(|\alpha(\mu_1)}u^{\beta_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots u^{\beta_\nu}_{\alpha(\mu_\nu)}\\&\quad\times\bar{A}^{\beta_{\nu+1}\cdots\beta_\lambda}_{\alpha(\mu_{\nu+1})|)}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}\sum_{\rho=1}^{\lambda-\nu}\bar{A}^{\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_\rho}_{\beta_{\nu+1}\cdots\beta_\lambda}P_{\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_\rho}\\&=\sum_{\mu=\nu+1}^{r}\sum_{(+\mu_\nu)}^{\sigma}\sum_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu=\nu}^{\mu-1}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\nu+1)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu)}u^{\beta_1}_{(|\alpha(\mu_1)}u^{\beta_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots u^{\beta_\nu}_{\alpha(\mu_\nu)}\\&\quad\times T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}P_{\alpha(\mu-\sigma)|)},\end{aligned}$$

de plus, en vertu de $\sum_{\mu=\nu+1}^{r}\sum_{(+\mu_\nu)}^{\sigma}\sum_{\sigma=\nu}^{\mu-1}=\sum_{\sigma=\nu}^{r-1}\sum_{(+\mu_\nu)}^{\sigma}\sum_{\mu=\sigma+1}^{r}$ nous avons

$$(5.6)\qquad D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)=\sum_{\sigma=\nu}^{r-1}\sum_{(+\mu_\nu)}^{\sigma}\sum_{\mu=\sigma+1}^{r}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\nu+1)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu)} u^{\beta_1}_{(|\alpha(\mu_1)}u^{\beta_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots u^{\beta_\nu}_{\alpha(\mu_\nu)}\times T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}P_{\alpha(\mu-\sigma)|)}$$

et la forme dernière ne peut pas s'écrire la forme désirée, c'est-à-dire,

$$D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)\neq\sum_{\sigma=\nu}^{r-1}\sum_{(+\mu_\nu)}^{\sigma}\sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\nu)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\sigma)} u^{\beta_1}_{(|\alpha(\mu_1)}u^{\beta_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots u^{\beta_\nu}_{\alpha(\mu_\nu)|)}D^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\sigma}(T,P).$$

La quantité $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}P_{\alpha(\mu-\sigma)}$ obtenue dans le résultat (5.6) n'est pas identiquement $D^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\sigma}(T,P)$, car on trouve les indices $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu$ dans $u^{\beta_1}_{(|\alpha(\mu_1)}\times$ $\times u^{\beta_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots u^{\beta_\nu}_{\alpha(\mu_\nu)|)}$, mais pas toujours tous les indices $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu\cdots\alpha_\sigma$. Cela veut dire que $D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)$ n'est pas de P-vecteur contravariant non symétrique d'ordre $r-1$.

Aucune manière que nous pouvons considérer, n'est utilisable. Si dans la première définition de $D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu}(T,P)$ nous prenons les autres $\beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2}\cdots\beta_{\alpha_\nu}$ au lieu de $\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu$, on ne peut pas utiliser le théorème 4.5 à mi-chemin de calculation. Prochainement, nous essayons d'utiliser le théorème 4.3. Mais en ce cas, le terme supplémentaire $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda}_{\alpha'\beta_1\cdots\beta_\mu}$ nous empêche d'obtenir quelque P-vecteur non-symétrique. Perce que, si nous considérons le cas seulement un β, c'est évident. De toute façon, il est impossible de trouver quelque P-vecteur contracté obtenu par $T^{\alpha(\lambda)}$ et $P_{\alpha(\lambda)}$.

Références

[1] Ch. Ehresmann: Les prolongements d'une variété différentiable, Atti IV Congresso Unione Mat. Italiana, Taormina, (1951), 25–31.

[2] Ch. Ehresmann: Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, C. R. Acad. Sci. Paris, 239 (1954), 1762–1764.

[3] Ch. Ehresmann: Applications de la notion de jet non holonome. C. R. Acad. Sci. Paris, 240 (1955), 397–399.

[4] Ch. Ehresmann: Les connexions infinitésimales d'ordre supérieur, Atti V Congresso Unione Mat. Italiana, Pavia-Torino (1956), 344–346.

[5] H. Hombu and T. Suguri: A treatment of geometric quantities in the manifold of surface-elements, Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ. Ser. A. 2 (1941), 67–90.

[6] A. Kawaguchi: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Series I, 9 (1940), 1–152.

[7] A. Kawaguchi: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung III. Erweiterte Parametertransformationen und P-Tensoren, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Series I, 10 (1941), 77–156.

[8] A. Kawaguchi: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV. Erweiterung der verallgemeinerten Rheonomtransformation von Flächenelementen höherer Ordnung und R_K-Extensoren, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 7, (1960), 256–276.

[9] A. KAWAGUCHI: On the vectors of higher order and the extended affine connections, Annali di Mat. pura ed applicata (IV), 55, (1961), 105–118.

[10] M. KAWAGUCHI: Une généralisation du calcul des jets et quelques prolongements généralisés de variétés différentiables, Tôhoku Math. Jour. Series II, 13 (1961), 329–370.

[11] M. KAWAGUCHI: Sur les dérivées covariantes des g-extenseurs, Tensor, N. S., 11 (1961), 74–98.

Faculté des Sciences,
Université de Hokkaido,
Sapporo, Japon.

(Received April 11, 1962)