HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	辻栄, 周平
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第11536号
Issue Date	2014-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/57123
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Shuhei_Tsujie_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　辻　栄　　周　平

学 位 論 文 題 名

Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups

（有限鏡映群の標準不変式系の構成）

体 $\mathbb{K}$（$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）上の n 次元ベクトル空間 V の鏡映で生成される有限群 W を有限鏡映群という．W は V^* の対称代数 S に自然に作用する．双対空間 V^* の正規直交基底 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を固定したとき，S を n 変数多項式環 $\mathbb{K}[x]$ と同一視することができる．Chevalley の古典的な定理（1955）により，不変式環 S^W は n 個の $\mathbb{K}$ 上代数的独立な斉次多項式 $f_1, \ldots, f_n$ で生成される．$\{f_1, \ldots, f_n\}$ を基本不変式系という．$f, g \in S$ に対し，$\mathbb{K}$-双線形写像を $(f, g) := f^* g$ と定める．ここで，$f = \sum c_{\boldsymbol{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ に対し，$f^* := \sum \overline{c_{\boldsymbol{i}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n}$ とした．基本不変式系 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ が標準不変式系であるとは，$(f_i, f_j) = 0 \quad (i \neq j)$ を満たすときにいう．S に作用する群 G に対し，多項式 $f \in S$ が G 調和であるとは，任意の定数項をもたない不変式 $g \in S_+^G$ に対し，$(g, f) = 0$ を満たすときにいう．W に属するすべての鏡映の鏡映面のなす集合を $\mathcal{A}_W$ とする．$H \in \mathcal{A}_W$ に対し，$L_H \in V^*$ を H の定義多項式とし，また，e_H で W の H を固定する部分群 W_H の位数を表す．$\Delta := \prod_{H \in \mathcal{A}_W} L_H^{e_H - 1}$ は W 調和多項式である．さらに Steinberg の定理 (1964) により W 調和な多項式全体のなす空間 $\mathcal{H}_W$ は $\{(f, \Delta) \in S \mid f \in S\}$ に一致することが知られている．標準不変式系は，鏡映群を対称群にもつ多面体の頂点に関する平均値の性質を研究する際に，Flatto (1968) により導入された．その後，多面体の平均値の性質についての問題は，頂点に限らず一般の面に拡張，定式化され研究されてきた．P を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の n 次元多面体し，$P(k)$ を P の k 次元骨格とする．多項式 $f \in S$ が $P(k)$ 調和であるとは，任意の $x \in V$ と任意の $r > 0$ に対し，$f(x) = \frac{1}{|P(k)|} \int_{P(k)} f(x + ry) d\mu_k(y)$ を満たすときにいう．ここで，$|P(k)|$ は $P(k)$ の k 次元体積，$d\mu_k$ は通常の k 次元 Euclid 測度である．$P(k)$ 調和な多項式全体のなす空間を $\mathcal{H}_{P(k)}$ で表し，多面体 P の対称群を $\Gamma(P)$ で表す．Iwasaki(1997) により，$\mathcal{H}_{\Gamma(P)} \subset \mathcal{H}_{P(k)}$ となることが知られている．さらに，多面体の対称群が次数がすべて異なる鏡映群 W の場合には，$\{f_1, \ldots, f_n\}$ を標準不変式系としたとき，Iwasaki(1999) の定理により，$\mathcal{H}_W = \mathcal{H}_{P(k)}$ と

$\int_{P(k)} f_i d\mu_k(x) \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$ が同値となる．これは，多面体の調和多項式の空間が，有限個の積分の値の評価により決定し得るという著しい定理である．

$K = \mathbb{R}$ のときの標準不変式系の存在性は Flatto と Wiener (1968,1969) により証明されているが，より具体的に標準不変式系を決定することは，多面体の平均値の性質を研究する際に重要であるといえる．既約有限鏡映群の無限系列 A_n, B_n, D_n 型および $I_2(m)$ 型についての標準不変式系は Iwasaki(1997) により，具体的に構成されている．また，例外型 H_3, H_4 および F_4 型についての標準不変式系は Iwasaki, Kenma, Matsumoto(2002) により具体的に分かっている．残る E_6, E_7, E_8 型については，標準不変式系の明示公式は知られていなかった．

本論文では，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合も含めた標準不変式系の存在の証明と，標準不変式系を表す明示公式について述べる．W を既約有限鏡映群とする．標準不変式系の存在性を示す際の肝となるのは，正則 1 形式のなす空間の部分空間 $\Omega_W \coloneqq (\mathcal{H}_W \otimes_{\mathbb{K}} V^*)^W$ である．$\mathcal{H}_W$ は W の余不変式環に $\mathbb{K}[W]$ 加群として同型であり，したがって，W の正則表現と同型である．W の既約性より，Ω_W は n 次元であることが分かる．Ω_W の斉次基底 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ に対し，$\{\varepsilon(\omega_1), \ldots, \varepsilon(\omega_n)\}$ を直交化したものが標準不変式系となることが示せる．ただし，$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ に対し，$\varepsilon(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ とした．

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ を既約鏡映群 W の標準不変式系とすると，$\{df_1, \ldots, df_n\}$ は Ω_W の基底を成している．さらに，各 df_i が S 上の $\mathbb{K}$ 線形変換 $\phi(f) \coloneqq ((f, \Delta), \Delta)$ から誘導される $S \otimes_{\mathbb{K}} V^*$ 上の $\mathbb{K}$ 線形変換 $\tilde{\phi} \coloneqq \phi \otimes 1_{V^*}$ の固有ベクトルとなるような，標準不変式系 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ を取ることができる．この様な標準不変式系を用いると，任意の基本不変式系 $\{h_1, \ldots, h_n\}$ に対し，$\{(\varepsilon \circ \tilde{\phi})(dh_1), \ldots, (\varepsilon \circ \tilde{\phi})(dh_n)\}$ を直交化したものが標準不変式系となることが示される．以上の構成法は，任意の既約有限鏡映群に対して有効である．したがって，残されていた場合の実既約鏡映群 E_6, E_7, E_8 型も含んでいる．

また，上記の構成法とは別の方法でユニタリ鏡映群の無限系列 $G(m, p, n)$ の標準不変式系の明示公式を得た．この方法は，Iwasaki(1997) の A_n, B_n, D_n 型に対する方法を拡張したものである．こちらの方法は公式の記述の際に他の基本不変式系を必要とせず，さらに先の方法よりも計算回数が少ない．