HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	逆内包量による分数除法の指導 ： 分数のわり算はなぜわる数をひっくり返してかけるのか
Author(s)	丹尾, 春彦
Citation	教授学の探究, 29, 19-54
Issue Date	2015-01-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/57889
Type	departmental bulletin paper
File Information	AN10116428-29_19-54.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

逆内包量による分数除法の指導

―分数のわり算はなぜわる数をひっくり返してかけるのか―

丹　尾　春　彦
（長沼町立西長沼小学校）

はじめに

「小学生の算数くらいなら，簡単に教えられる」という人は少なくない。しかし，そういう人でも，分数のわり算の計算で，「わる数をひっくり返してかける」のはどうしてか，その説明を求められたら困るだろう。

わたしも何度かチャレンジしてはいるが，わかるように教えられたかどうかは自信がない。親切丁寧のつもりが，子どもたちを混乱させてしまうことになる。結果「ひっくり返してかけるんだ。」という説得になってしまう。

実際に，子どもたちはその方が困った様子がない。分数は乗除になじむので，計算自体は簡単なのである。テストの結果も計算に限って言えばほとんど満点に近い。いつの間にか，分数のわり算は私のタブーになっていった。

分数の乗除は，小学校算数では有理数演算の完結として重要な意義を持つ。そして倍・内包量・比・比例を経て新たな数学の世界を開くのである。また中学校数学では計算を簡便化するというとてもすばらしいツールとして働く。

しかし，６年生の４月に満点を取っていたはずの分数の計算が，中学校ではボロボロという話はよく聞かれるところである。つまり，計算はできるが，忘れたときに思い出したり，再構成できるものとはなっていないのである。

そうであるとすれば，タブーとして一切考えないわけにはいかない。ここで一念発起して，分数のわり算について再度考えてみることにした。

1　分数のわり算はどのように教えられてきたか

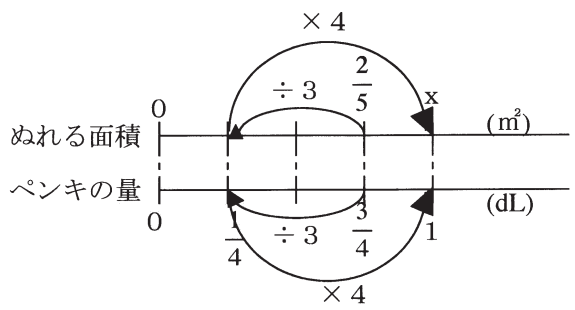
（1）現行教科書における分数のわり算

教科書ではだいたい３通りの説明がなされている。以下に紹介する。問題場面は，おおむね次の通りである。

「$\frac{2}{5}$ ㎡のへいをぬるのに，青いペンキを $\frac{3}{4}$ dL 使います。このペンキは１dL あたり何㎡ぬれる[1]でしょうか。」

[1] これは後述する逆内包量のひとつで，ペンキの「濃さ（dL/㎡）」に対して「薄さ（㎡/dL）」を表している（0 dL/㎡の濃さは存在するが，0㎡/dL の薄さは存在しない）。ただし，各教科書ともこれを逆内包量として扱ってはいない。

【考え方１】



$\frac{1}{4}$ｄＬでぬれる面積は

$\frac{2}{5}\div 3$（㎡）

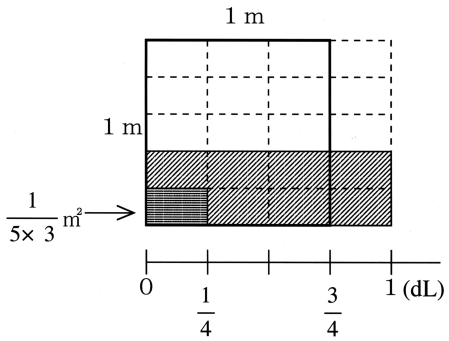
1ｄＬでぬれる面積は

$\frac{2}{5}\div 3\times 4$（㎡）

したがって

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\div 3\times 4=\frac{2}{5\times 3}\times 4=\frac{2\times 4}{5\times 3}$$

【考え方２】



1㎡を横に5等分、たてに3等分すると

分けられた面積は $\frac{1}{5\times 3}$ ㎡

1ｄＬでぬれる面積は $\frac{1}{5\times 3}$ ㎡ が (2×4) 個

したがって

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{5\times 3}\times(2\times 4)=\frac{2\times 4}{5\times 3}$$

【考え方３】

わり算は，わられる数とわる数に同じ数をかけても商は変わりません。だから，両方にわられる数の逆数をかけます。

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\div 1=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$$

なんと見事なことに，６社すべて，多少のぬけはありながらも同様の説明をしている。そのうち４社については問題場面・数値設定まで同じである。かなり分数のわり算については苦労していることが伺える。

どの教科書も説明が３つ並列されていると言うことが，非常に大きな問題点である。教科書に出てきている３つの考えを同列に扱い，子どもたちを混乱させてしまうことは，よく聞く話だ。教師力の問題といわれればそれまでであるが，果たしてどうであろうか。

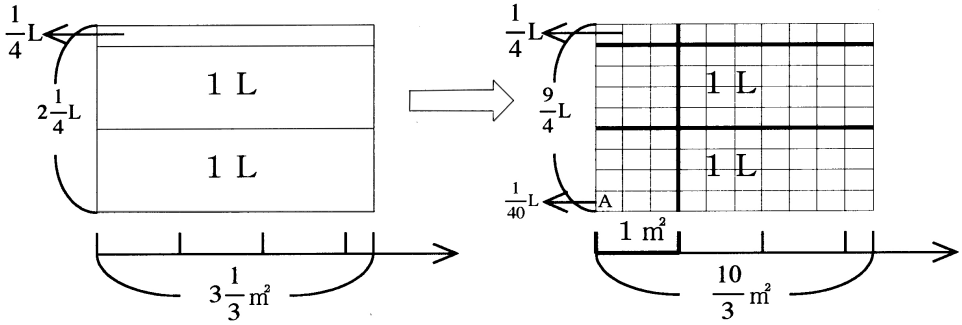
この中で一つでも納得できるものがあればよいと言うことではあるまい。いずれにしても３つとも子どもたちが探求し，発見するものではないことは明らかである。

（2）新居方式による分数のわり算

既存の方法の中で，量の分数の立場から指導するものとしては新居信正のプラン[2]がある。分数のわり算の計算方法を説明しようとする画期的な方法として，一部の教科書にも影響を与えてきた。以下に紹介しよう。

「$2\frac{1}{4}$Lの水をジョウロで$3\frac{1}{3}$㎡の花畑に均等分布するようにまきました。1㎡あたり何Lの水をまいたことになるでしょう。」

全体の量といくら分から1あたり量を求める問題である。新居は次のような「タイル図」（面積図）を用いて答えを求める。



図を見ると1Lが4×10で40等分されている。したがってAの大きさは$\frac{1}{40}$L。求める答えは1㎡の上に乗っている部分であるから，Aが9×3で27個分となり，答えは1㎡あたり$\frac{27}{40}$Lとなる。

ここで導かれる計算規則は$2\frac{1}{4}\div3\frac{1}{3}=\frac{9}{4}\div\frac{10}{3}=\frac{9\times3}{4\times10}$となる。つまり，ひっくりかえしてかけるのと同じであるということである。銀林浩は新居プランに対して次のように言う。

「これはこれなりにわかりやすいのであるが，どうも結果論（結果をみて，事後的に解釈する様式）のような気がしてもう一つピンとこないという批判がある」[3]。

私自身が授業で扱ってきたのは，この新居プランである。私はこれでわかるだろうと自信を持って説明するのであるが，子どもたちは今ひとつピンとこない様子。えっと思って説明すればするほど，わけがわからなくなるようであった。

（3）「倍と分布」による分数のわり算

「倍と分布」[4]は，北海道大学教育方法学研究室の数学教育グループが開発したプランである。

子どもたちの認識をグンと伸ばす倍という重要な概念を，ひとつのまとまりとして学ぶ単元が実は日本の小学校にはない。その点においてこのプランは，私にとって画期的なプランであった。

---

[2] 新居信正「授業書＜分数の乗除 第2部 分数の除法＞とその解説」『科学教育研究 No.3』1971年，国土社。

[3] 銀林浩「分数の除法についての1提案」『数学教室』1985年7月号，国土社。

[4] 道数協・算数プリント編集委員会『21世紀版 算数たのしい学習プリント5年』2002年，共同文化社。

このプランの論理的骨格は次の通りである。

＜倍の定義＞

ある量Ａに対して，その３個分の量Ｂをつくったとき，Ａを３倍したらＢになるといい，Ｂ＝Ａ×３と書きます。

＜倍の合成＞

倍は何回でも合成することができます。((Ａ×ａ）×ｂ）×ｃ＝Ａ×（ａ×ｂ×ｃ）

＜逆オペレーター＞

オペレーターにいれたものを元に戻す働きを「逆オペレーター」といいます。ある量Ａに対して，それを３等分した量をつくったとき，Ａを$\frac{1}{3}$倍したらＢになるといい，Ｂ＝Ａ×$\frac{1}{3}$と書きます（整数倍の逆オペレーターは単位分数倍である）。

＜単位分数倍の合成＞

３等分してから４等分する働きは 12 等分。（Ａ×$\frac{1}{3}$）×$\frac{1}{4}$＝Ａ×（$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{4}$）＝Ａ×$\frac{1}{12}$

＜分数倍＞

整数倍してから単位分数倍（またはその逆）のはたらきを１つの倍とみて分数倍といいます。

たとえば，Ａ×４×$\frac{1}{3}$＝Ａ×（４×$\frac{1}{3}$）＝Ａ×$\frac{4}{3}$

＜分数倍の合成＞

分数倍も合成できます。この方法は分数のかけ算の仕方の説明になります。

Ａ×$\frac{7}{5}$×$\frac{3}{4}$＝Ａ×７×$\frac{1}{5}$×３×$\frac{1}{4}$＝Ａ×（７×３）×（$\frac{1}{5}$×$\frac{1}{4}$）＝Ａ×21×$\frac{1}{20}$＝Ａ×$\frac{21}{20}$

＜倍の３用法＞

Ａ×x＝Ｂからxを求めるにはx＝Ｂ÷Ａ（第１用法）。

x×Ｐ＝Ｂからxを求めるにはx＝Ｂ÷Ｐ（第３用法）。

＜分数倍の逆オペレーター＞

ある数を$\frac{12}{7}$倍したら$\frac{3}{18}$になりました。ある数を求めなさい。

x×$\frac{12}{7}$＝$\frac{3}{18}$として，×$\frac{12}{7}$の逆オペレーター×$\frac{7}{12}$を両辺にかけると，

x×$\frac{12}{7}$×$\frac{7}{12}$＝$\frac{3}{18}$×$\frac{7}{12}$ よって，x＝$\frac{3\times7}{18\times12}$

このやりかたは，分数のわり算の仕方の説明になっています。

このプランを知って以来，私は，６年生の第一単元として「倍」の部分だけ扱っている。その中で分数のわり算を指導してきた。かなりすっきりしていて，私見ではあるが，「ひっくりかえしてかける」意味がわかると思う。

わり算と逆オペレーターが同じ操作であることがわかれば，「ひっくりかえしてかける」ことの意味はそう難しくない。しかし，子どもたちの反応は「よくわかった」か「今ひとつよくわか

らない」というように分かれるのである。

2　逆内包量と分数除法

（1）銀林浩の提案

銀林浩は「ある内包量の，土台量と全体量を交換して得られる内包量を逆内包量と呼ぶ」として，次のように言う。

「逆内包量の考えを使って，内包量の第３用法に当たる除法を考察し直してみると実におもしろい。第３用法は，（全体量）÷（内包量）であるが，除数の分母と分子をひっくり返して掛けるということは，逆内包量を掛けることと同じになる：（全体量）×（逆内包量）」[5]。

銀林の提案について，大田邦郎は「距離÷速さ」を例に次のように敷衍する。

「第３用法，たとえば$\frac{4}{5}$ m÷$\frac{2}{3}$ m／秒は，“ひっくり返してかける”と$\frac{4}{5}$ m×$\frac{3}{2}$ 秒／mと第２用法になる。逆数にするということは，量の世界では逆内包量にすることに対応する。＜÷内包量＞は＜×逆内包量＞となるのである。」

「意味的には『$\frac{4}{5}$ mの距離を$\frac{2}{3}$ m／秒の速さで進む』というのが，『$\frac{3}{2}$ 秒／mの遅さで$\frac{4}{5}$ mの距離を進む』とよみかえられる。前者では$\frac{4}{5}$ mは“全体量”であるが，後者では“土台量”に転換している。」[6]

m／秒をひっくり返した＜秒／m＞は，＜１m進むのにかかる時間＞と説明できる。この値が大きいほど，移動する物体は遅い。

ここでは，内包量を「１あたり量」，逆内包量を「逆１あたり量」ということにする。速さの逆１あたり量は「遅さ」である。

「遅さ」で分数のわり算が教えられる。＜遅さ＞に＜距離＞をかければ＜時間＞になるからだ。

2013 年夏に，大田とこの件について議論する機会があった。議論するうちにわたしのタブーであった分数のわり算の説明に光明が差した。

（2）授業書の基本構造

今回用いた授業書「分数のわり算は，なぜわる数をひっくり返してかけるのか？」の原型は，銀林案をもとに大田と佐藤洋子が 1986 年に作成したものである[7]。

これは，内包量の第３用法を，逆内包量を用いて第２用法に変換することで，除法を乗法に変換するというものであり，初めて分数のわり算を学習することを想定して作られている。

しかし，今回の授業は，分数除法を＜倍の逆オペレーター＞によって学習済みのクラスで行うことになった。そのため，授業書は 1986 年版をもとに，小学校で学習した事項をより高い見地

---

[5] 銀林浩『数の科学』1975 年，麦書房。

[6] 大田邦郎･佐藤洋子「授業のプログラミングに関する実証的研究――分数除法の指導を素材として――」『千葉大学教育工学研究 第 9 号』1988 年。

[7] 注 6 に所収。

からみなおすことを目標にして，大田が書き下ろした。そして，丹尾と岡野勉（新潟大学）による検討を経て修正したものが用いられた。

授業書の論理的骨格と指導計画（全５時間）は，以下の通りである。

【第１時】速さをもとめる

等速運動の速さを求めるには，大きく分けて２通りの方法が考えられる。時間を（１または最小公倍数に）そろえる方法と距離を（１または最小公倍数に）そろえる方法である。これらはどちらかが優れているわけではなく，そのとき便利な方法で使い分ければよい。ただ１通りに決めるとすれば，距離／時間となるのである。

ここでは無限小数や有限小数，また商分数にふれながら進める。小学校のまとめとして分数・小数のそれぞれの特性にふれていく。

【第２時】距離を求める

「速さ×時間＝距離」のかけ算をもとに分数のかけ算の計算方法を発見する。主として扱うのは面積図で分母×分母，分子×分子の意味を考えていく。整数と分数の関係についても明らかにしていくとともに，単位の計算を学習する。

【第３時】速さのもう一つの表し方――「遅さ」

単位時間あたりに進む距離を「速さ」というのに対し，単位距離を進むのにかかる時間を「遅さ」（または「逆速さ」）と定義する。数値が大きくなればなるほど遅くなるからである。

速さと遅さは数値が互いに逆数になることを確認し，逆数について再定義する。１の逆数は１であることや，０の逆数はないことにもふれる。

【第４時】時間をもとめる（その１）

「遅さ」を使えば時間を求める式は「遅さ」×距離になることを発見する。

【第５時】時間をもとめる（その２）

速さを使って時間を求める式は距離÷速さとなる。その問題を遅さの問題に書き換えてみる。同一の運動であるところから，÷分数が×逆数となることを発見する。その際に交換法則に触れ，時間＝距離÷速さ＝距離×遅さとする。

３　授業書と授業展開

今回の実験授業は，丹尾と千葉大学，新潟大学との共同研究の一環として，2014 年 2 月 12 ～ 14 日，奈井江町立奈井江小学校６年１組（児童数 28 名）において実施された。３日間で５校時分の授業が行われた。

（１）１時間目　2014 年 2 月 12 日（水）３校時

Ｔ：分数のわり算は，通信にも書いたんだけれど，いままで，長い歴史の中で，うまく説明できた人がいないんです。だれも。でも，計算自体はそんなに難しくないよね。分数のかけ算，わり算。でもなんでひっくりかえしてかけるのかというのをうまく説明できた人，わたしは心当たりないんですよね。今回は１週間かけて５時間のあいだ，みんなといっしょにそれについて考えてみたいと思います。

（授業書１ページ）

分数のわり算は、なぜわる数をひっくり返してかけるのか？

分数のわり算は、なぜわる数をひっくり返してかけるのか。これは小学校の算数の中でも、もっとも説明がむずかしい問題のひとつです。

みなさんは、分数のかけ算・わり算を「倍」で考えてきましたね。$\div \frac{2}{3}$ は、$\times \frac{2}{3}$ の逆オペレーターで、$\times \frac{3}{2}$ と同じでした。

分数のわり算の計算規則については、ほかにもいろいろな説明の仕方があります。教科書にも3通りの説明があります。

また、前に学習した「速さ」や「密度」を使って説明することもできます。このプリントでは、「速さ」の問題を使って分数のかけ算・わり算について考えてみましょう。

これから学習することは小学校の算数の範囲を越えているので、わからなくてもともとですが、これまでの6年間の算数の学習をもとに、頭をフル回転させて考えてみてください。少しでもわかってもらえたらうれしいです。

1　速さを求める

等速運動をする物体の速さをくらべるのに、いくつかの方法がありました。近くで同時に運動している場合は目で見てもわかりますが、遠かったり、同時でない場合には、測定の記録をもとにくらべます。

【問題1】ウサギのラビ太くんは、2kmの距離を等速で走って3分かかります。ラビ子さんは4kmの距離を等速で走って5分かかります*。どちらが速いか、2つの方法で説明してください。

* ウサギは種類にもよりますが、1分あたり0.6kmから1.2kmくらいの距離を走ります。

T：さて（速さを）比べるにはだいたい二通りの方法があったと思うんだけど，おぼえているかな。
C 23：まず，距離を合わせれば……。
T：うん，距離を合わせる？そろえる？
C：そろえる。
T：うん，距離をそろえる方法で，答えを出すとどうなる？
C 23：だから４kmラビ子さんは走ったから，ラビ太君を４km走らせればいい。×２。
T：なるほど，４kmにそろえるから，あと２km走ってくれと，なるほどね。４kmにそろえる。あとは？
C 15：時間。
T：時間をそろえる。たとえばどんな感じ？
C 18：５分。
T：５分に合わせる？
C 23：15 分。
C 7：15 分。最小公倍数で合わせて。
T：どうでしょう。C 18 さん。最小公倍数やったべや。15 分でそろえる。あとは合わせられそ

うなものはありませんか？
C 23：８㎞にする。
T：えっ８㎞。
C 23：ふやす。
T：ふやす。えー意外だなあ。
C 3：２㎞にそろえる。
T：２㎞だったらもう一声いけよ。
C 3：１㎞。
T：どうだ？
C：あー！
T：１㎞できそうか。
C：できる。できる。
T：だいぶ誘導尋問だったけど。ということは時間は？
C 23：１分。
T：１分。１分あたりに進む距離のことはなんて言うの？
C 14：速さ。
T：そうだね。速さを求めるときそうやってやったよね。

（授業書２ページ）

時間をそろえてくらべる

(1)　時間を15分にそろえたとき、進む距離は

ラビ太くん（　　）km　ラビ子さん（　　）km

(2)　時間を1分にそろえたとき、進む距離は

ラビ太くん（　　）km　ラビ子さん（　　）km

どちらにしても、同じ時間に進む距離が｛長い・短い｝方が速い。

距離をそろえてくらべる

(3)　距離を4kmにそろえたとき、かかる時間は

ラビ太くん（　　）分　ラビ子さん（　　）分

(4)　距離を1kmにそろえたとき、かかる時間は

ラビ太くん（　　）分　ラビ子さん（　　）分

どちらにしても、同じ距離を進むのにかかる時間が｛長い・短い｝方が速い。

――――――――――――――――――――――――――――――――

無限小数と有限小数

(2)や(4)では、1分あたりに進む距離や、1kmあたりにかかる時間を求めるために、わり算をします。2÷3を小数で表そうとすると、0.66666……と、小数点以下に6がずっと続いて、どこかで終わることはありません。このような小数を無限小数といいます。

これに対して、4÷5=0.8や5÷4=1.25のように小数点以下第何位かで終わる小数を有限小数といいます。無限小数については、中学校や高校でくわしく学習します。

――――――――――――――――――――――――――――――――

T：いいですかー！時間をそろえました。15 分にそろえました。さてラビ太くんは何㎞走ったでしょうか。C 28 さん。
C 28：10㎞です。
T：では，ラビ子さんはどうでしょうか。
C 28：12㎞。
T：これどっちが速いですか。
C：ラビ子さん。
T：C 15 さん，それはなぜですか？
C 15：12㎞の方が長い。
T：同じ時間で進む距離が，
C：ラビ子さんの方が長いから。
T：なるほど，はい，それではC 11 さん，１分あたり，お願いしてよろしいか。
C 11：0.666……
T：（板書しながら）どこまで書けばいいんだー！一応㎞と。はいラビ子さんは？
C 11：0.8㎞。
T：どちらが速いですか？
C：ラビ子さん。
T：やっぱり，ラビ子さん。C 21 さん，なぜラビ子さんの方が速いんですか？
C 21：１分あたりに進む距離がラビ子さんの方が長い。
T：すばらしいね。それではその下に書いてあるところです。どちらにしてもどうですか？
C 23：どちらにしても，同じ時間に進む距離が長い方が速い。
T：同じ時間で進む距離が長い方が速い。ということがわかりますね。いいでしょうか。

T：じゃあ，つぎ時間じゃなくて距離の方いってもいいかな？４㎞にそろえたとき，C 16 さん。
C 16：ラビ太くん６分。
T：じゃあラビ子さんは？
C 16：ラビ子さんは５分。
T：ラビ子さんの方が速い？
C：速い。
T：それはなぜですか。C 5 さん。
C 5：速いから。
T：速いから速い。確かにそうかもしれないけど。バトンタッチだね。C 20 さん。
C 20：えーっと距離が同じだから，時間が速い方が速い。
T：時間が速い方が速い。同じ距離に固定しているから，時間が速い方が速い。
C 3：時間が短い方が速い。
T：時間が短い方が速い。どうだろうか。
C：いいでーす。
T:ということは，こっちラビ子さんの勝ちということになりますね。次は１㎞にそろえたとき，いってみましょう。C 23 さん。
C 23：ラビ太さんは 1.5 分です。

Ｔ：ラビ子さんは。
Ｃ 23：1.25 分です。
Ｔ：じゃあ，同じことを聞くんだけれど，Ｃ 19 さん。なぜラビ子さんの方が速いのですか。
Ｃ 19：同じ距離で進む距離が，あれっ。同じ距離で進む距離が……同じ距離で，進むのにかかる時間が短い方が速い。
Ｔ：同じ距離で，進むのにかかる時間が短い方が速いから。

Ｔ：（「無限小数と有限小数」を読んでから）たとえばね，１㎞にそろえるとき，それから１分あたりにそろえるとき，このときに違う表し方をした人がいるんだ。ちょっと聞いてみようか。

Ｃ 15 さん，１分あたりどうやって表した？

Ｃ 15：１分あたりですか？ $\frac{2}{3}$ 。

Ｔ：（$\frac{2}{3}$㎞と板書して）これあり，ない。

Ｃ：あり（多数）。
Ｔ：ありだよねえ。（0.666……㎞を指しながら）これは表しきれないんだけれど，きちんと表すことができる。じゃあＣ 15 さんこっち（ラビ子）は？

Ｃ 15：$\frac{4}{5}$ ㎞。

Ｔ：あり，おーなるほど。じゃね，ついでにいってみようかな。Ｃ７さんこっち（１ｋｍあたりを指して）はどんなふうに表すの。

Ｃ７：$\frac{3}{2}$ 分。

Ｃ：あってた。
Ｔ：どうでしょう。
Ｃ：ありありあり。
Ｔ：あり。じゃあ（ラビ子さんを指し）これは。

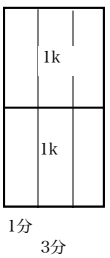
Ｃ７：$\frac{5}{4}$ 分。

（授業書３ページ）

整数のわり算の答は、小数を使わなくても表すことができます。

【問題2】ラビ太くんが2kmの距離を等速で走って3分かかるとき、1分あたりに進む距離は、図のどの部分に表されていますか。また、それは何kmですか。

ア　$\frac{1}{3}$km
イ　$\frac{2}{3}$km
ウ　2km



T：１分あたりに進む距離って，どの部分かわかりますか？
C：わかる。３分割。
T：じゃあ斜線ひいてみてくれますか？

T：（机間巡視をしながら）だいたい２通りくらい出てくるねえ。（$\frac{1}{3}$と$\frac{2}{3}$の２つを紹介）ここを塗った人とここを塗った人がいたんだけれど，どっち派か教えて。

これ（$\frac{1}{3}$）をA，これを（$\frac{2}{3}$）をBにしておきましょう。A派（７人挙手）B派（20人挙手）どうだろうこれ？　これ（上のタイル）とこれ（下のタイル）で？
C：２km。
T：で，１分あたりということは……何等分ですかね。
C 23：３等分。
T：３等分，ですか？ということはどちらが正しいですか？ C 25 さんはどう思いますか。

C 25：B。$\frac{2}{3}$ 。

T：何が？

C 25：１分あたりが$\frac{2}{3}$だから。

T：という話もありますけれども……。そもそもこれって何÷何だっけ
C：２km÷３分。
T：これがどうなるかってことですよね。C 28 さんどうですか？
C 28：B。

T：そうですね。（$\frac{2}{3}$をぬりながら）ここですよね。だから，これ２通りのいい表し方できるのわかる。これ１kmでしょ。これ（$\frac{1}{3}$を指して）なーんだ。

C：３分の１。

T：それが２つ分という言い方もできれば，これ（$\frac{2}{3}$を指して）３つで何になるの？３つ集まると２になる大きさということができます。両方できます。ということはこれはまちがいない，正しいと言うことでよいでしょう。
C 23：あっ勝手にすすめたー。
T：うわっ，そういうつっこみやめてくれ。

（2）2時間目　2014年2月12日（水）5校時

（授業書4ページ）

整数のわり算 $a \div b$ の答は分数 $\frac{a}{b}$ で表すことができます。これはとても便利な表し方で、中学校や高校では a や b がどんな数や式でも $a \div b = \frac{a}{b}$ と表します*。

2ページの(2)と(4)の計算の答を分数で表してみましょう。

(2)　時間を1分にそろえたとき、進む距離は

ラビ太くん　（　　）km　　ラビ子さん　（　　）km

(4)　距離を1kmにそろえたとき、かかる時間は

ラビ太くん　（　　）分　　ラビ子さん　（　　）分

それぞれ、どちらが速いかわかりますね。

――――――――――――――――――――――――――――――――

小数と分数

整数÷整数の答を分数で表すのは簡単ですが、2つの分数、たとえば $\frac{2}{3}$ と $\frac{4}{5}$ のどちらが大きいかは、通分しないとわかりません。通分すると、$\frac{10}{15}$ と $\frac{12}{15}$ になってくらべることができます。これは、時間を15分にそろえるのと同じことです。

答を小数で表すと、0.66666……と0.8だから、どちらが大きいかすぐにわかりますね。小数と分数には、それぞれ便利なところと不便なところがあります。

――――――――――――――――――――――――――――――――

* 例外がありますが、それについては44ページで説明します。

C 17：（2）時間を1分にそろえたとき，進む距離は，ラビ太くん $\frac{2}{3}$ km，ラビ子さん $\frac{4}{5}$ kmです。

T：どうでしょう。どちらの勝ちかわかりますか？

C 23：いやぱっと見じゃわかんないけど通分すればわかる。

T：通分すればわかる。小数はどうかな。

C 23：小数はぱっと見でわかるんじゃない。

T：では（4）のところ，C 26さんいいかな。

C 26：距離を1kmにそろえたとき，かかる時間は，ラビ太くん $\frac{3}{2}$ 分，ラビ子さん $\frac{5}{4}$ 分です。

T：C 27さんそれじゃ，$\frac{3}{2}$ と $\frac{5}{4}$ ではどちらがすくないですかね。

C 27：$\frac{3}{2}$ の方。

T：$\frac{3}{2}$ の方が少ない。通分してみましょう。どうやったらいいですか。

C 27：4にそろえる。

T：$\frac{3}{2}$ は4にそろえたら，

C 27：$\frac{6}{4}$。

T：どっちが大きいですか？
C 27：あー。

T：いま，通分で逆転現象が起きたよね。C 27 さんの予想では予想では$\frac{3}{2}$の方が少ないと思っていたんだけど，通分してみたら逆転現象が起きているね。
(「小数と分数」を読み，さらに次の５ページを配布して読む。)

(授業書５ページ)

等速運動の速さを数値で表すには、2つの方法がありました。1時間あたりに進む距離で表す方法と、1kmあたりにかかる時間で表す方法の2つです。

ア　3分で2kmを走るラビ太くんは、1分あたり$\frac{2}{3}$km進みます。
　これを2km÷3分=$\frac{2}{3}$km/分と表します。

イ　3分で2kmを走るラビ太くんは、1kmあたり$\frac{3}{2}$分かかります。
　これを3分÷2km=$\frac{3}{2}$分/kmと表します。

速さはふつう、アの「距離÷時間」で表します。単位はkm/分（「km パー 分」または「km 毎分」と読みます。）。そのほかに、km/時（「時」は「時間」を省略した言い方です）、m/秒などが使われます。

距離 ÷ 時間 = 速さ

速さの単位と分数

2km÷3分=$\frac{2}{3}$km/分という式から単位だけを取り出すと、
km÷分=km/分になります。$\frac{2}{3}$を2/3と書くことがありますが、
km/分も分数の形で$\frac{\text{km}}{\text{分}}$と書くことができます。

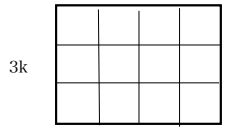
T：(6 ページの【問題３】について) どうでしょう。式を立てて解くことができるでしょうか。(約 18 分)
T：聞いてみようかな。じゃあ式から，C 22 さん。
C 22：３㎞／時×４時間。
T：じゃあこれを図で求めてみたいんだよね。ところで３㎞／時ってどんな意味？
C：１時間で３㎞。
T：おー１時間で３㎞。つまりこれ(横の線分)を１時間だとすれば，ここにタイルがいくつのる？
C：３つ。
T：３つのるね。で，太郎くんどれくらい歩くんだっけ？
C：四つ分，４時間。

（授業書６ページ）

２　距離を求める

等速運動の速さと、かかった時間がわかっているとき、進んだ距離を求めてみましょう。

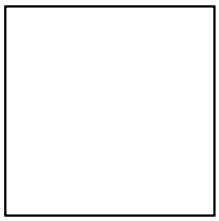
【問題3】(1)　人間の太郎くんは3km/時の速さで4時間歩きました*。何km進みましたか。



式＿＿＿＿＿＿＿＿.

答＿＿＿＿＿.

(2)　$\frac{2}{3}$km/時の速さで$\frac{4}{5}$時間歩くと、何km進みますか。（分数の計算はまだ知らないことにして、図から答を見つけましょう。）



式＿＿＿＿＿＿＿＿.

* 人間の大人が歩く速さが、1時間あたり4kmから5kmくらい、つまり4km/時から5km/時くらいです。

Ｔ：つまり横を何倍すればいいんだっけ？

Ｃ：４倍。

Ｔ：うん，４倍すればいいね。（横の線分を）１・２・３・４倍したよ。答え，距離になるところはここだ（３×４の長方形を囲む）この面積が答えになりますね。

Ｃ：おーっ納得。

Ｔ：ここ何時間？

Ｃ：４時間。

Ｔ：つまり４時間の上にのっている面積が答えになるわけだ。それで中身を数えてみたらわかるんだけれど，ここ（１時間あたりを指して）いくつ。

Ｃ：３つ。

Ｔ:で,みんなのにはちゃーんと線が入っているよね。（仕切り線を入れて１㎞のタイルに分ける）ここは４つ分だから，３×４で？

Ｃ：12。

T：ということは，このようにして答えを求めることもできるということですね。4時間あたりにのっているこの部分が答えですね。大丈夫？おれ強引じゃない？
C：大丈夫。

T：じゃあ（2）いってみよう。ではC 28 さん。式を教えてください。

C 28：$\frac{2}{3}$ km／時×$\frac{4}{5}$ 時間です。

T：さて，これをですね。図を使いながら答えを見つけてみようと思います。
（正方形を板書してデータを確認）ここ（縦軸）になんて書いてある？
C：1 km。
T：こっち（横軸）は？
C：1時間。
T：じゃあこれは1 kmのタイルだね。これをどうすればいいかと言うことですね。（計算し始める子あり）計算しちゃダメだぞ。計算できるけど知らないことにして・・・だからね。さあできるかな。（約5分）
T：それじゃあね。手も足も出ない人だけこっち見ます。一応みんなにアドバイスしたのは，1時間あたり$\frac{2}{3}$ kmだってことだね。ということは1時間の上に$\frac{2}{3}$乗っかっているんだから，これ（正方形）が1のタイルだとして，$\frac{2}{3}$ ってどこかなっていったら，C 22 さんは，横に3等分っていって，ここ（2つ分）に斜線を引いた。どうだろう$\frac{2}{3}$ 。ここまでは納得してもらえる？

C：はい。
T：ここで，何時間走るの？

C：$\frac{4}{5}$ 時間。

T：$\frac{4}{5}$ 時間っていうことは時間をまず何等分するの？

C：5等分。

T：5等分だね。（横軸を縦に5等分して）$\frac{4}{5}$ だからどこまで？

C：4。
T：1・2・3・4ここまでだね。C 2 さん，ここまでいっしょにやってくれてる？
C 2：はい。
T：OK ？そうすると，ここまでの上にのっかっているところが答えであることは，こっち（1）でわかっているよね。つまりここ（$\frac{2}{3}$×$\frac{4}{5}$の長方形）がこのかけ算の答えであることがわかりますね。C 3 さんもC 1 さんもこんな形を作っていたよね。そこでここに線（タイルを5等分）を入れると，全部同じ大きさに切れました。そうすると，あとはですね，（$\frac{1}{15}$を指して）これがいくつかわかればよいのではないでしょうか？どうでしょう。C 18 さん，ちょっと見て。1を縦

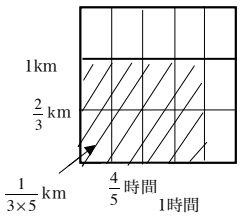
に何等分？
C 18：３等分。
T：横に何等分？
C 18：５。
T：結局？
C 18：15 等分。
T：つまりこれは，なんですか？
C 18：$\frac{1}{15}$。
T：ちっちぇーな声。$\frac{1}{15}$ですよね。これが赤の中にいくつありますか？縦に何個？
C：２こ。
T：２こ，横に？
C：４こ。
T：だから？
C：８こ。
T：$\frac{1}{15}$が８個だから，
C：$\frac{8}{15}$。
T：ということになりますね。ということは，これは$\frac{8}{15}$kmということになるんですが，計算方法に戻ってみましょう。さっきC 18 さんは$\frac{1}{15}$を出すのになんて言う九九を使いましたか？
C 18：３×５。
T：３×５をしましたね。これってみなさんがやった単位分数倍の合成ですよね。（$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$を板書）これをしたんですね。で，そのあとどうしたかって言うと何した？
C：２×４。
T：をしましたね。（３×５を指して）これってどこかにありませんか。
C：あっ（つぶやき多数）。
T：もっと大きな声で。
C：分母×分母。
T：じゃあ，２×４は，C 19 さん。
C：あっ分子×分子。
T：そうですね。分子にありますね。
(7 ページを配布して読む。さらに，8 ページの【練習】の問題を解き，答え合わせをする。9 ページも読む予定であったが，時間が不足したため，次の時間の最初に読んだ。)

（授業書７ページ）

3km/時の速さで歩くとき、つまり、1時間あたり3kmずつ歩くとき、4時間では12km歩きます。これを、3km/時×4時間=12kmと表します。等速運動の速さにかかった時間をかけると、進んだ距離が求められます。

速さ × 時間 = 距離

$\frac{2}{3}$km/時の速さで$\frac{4}{5}$時間歩くときに進む距離も、$\frac{2}{3}$km/時×$\frac{4}{5}$時間という式で表します。



求める答は図の斜線の部分で表されています。一番小さい長方形は、1kmを表す正方形をたてに3等分、よこに5等分した大きさで、$\frac{1}{3\times5}$kmを表しています。

答の部分は、これがたて2個分、よこ4個分なので、$\frac{2\times4}{3\times5}$kmです。つまり、

$$\frac{2}{3}\text{km/時}\times\frac{4}{5}\text{時間}=\frac{2\times4}{3\times5}\text{km}=\frac{8}{15}\text{km}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

分数のかけ算は分母どうし、分子どうしをかけます。

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}$$

（授業書８ページ）

【練習】つぎの計算をしましょう。

(1)　$2\frac{3}{4}$m/時×$3\frac{1}{2}$時間

(2)　$\frac{4}{5}$m/秒×3秒

（授業書９ページ）

帯分数のかけ算は、帯分数を仮分数に変身させてから、分母どうし、分子どうしをかけます。

$$2\frac{3}{4}\times3\frac{1}{2}=\frac{11}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{11\times7}{4\times2}=\frac{77}{8}=9\frac{5}{8}$$

分数のかけ算に整数がまざっているときも、整数を分数に変身させてから、分母どうし、分子どうしをかけます。

$$\frac{4}{5}\times3=\frac{4}{5}\times\frac{3}{1}=\frac{4\times3}{5\times1}=\frac{12}{5}=2\frac{1}{5}$$

整数と分数

整数は分数の形で表すことができます。$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\cdots\cdots$

整数は分数の一部です。

整数のかけ算は $3\times4=\frac{3}{1}\times\frac{4}{1}=\frac{3\times4}{1\times1}=\frac{12}{1}=12$ と計算してもいいのです。

単位のかけ算（その1）

$\frac{2}{3}$ km/時×$\frac{4}{5}$ 時間＝$\frac{8}{15}$ kmという式から単位だけを取り出してみましょう。km/時＝$\frac{\text{km}}{\text{時}}$ ですから、

km/時×時間＝ ― × ― ＝ $\frac{\times}{\times}$ ＝ ― ＝

単位も分数と同じように計算できます。

（３）３時間目　2014 年２月 13 日（木）５校時

Ｔ：今日は「遅さ」というものについて考えてみたいと思います。等速運動の速さを表すには２つの方法がありましたよね。紹介します。タートルくんです。（ライントレーサーのカタツムリの触覚に亀の絵をつけたもの）

Ｃ：かたつむりだ。改造したんだ！（と大騒ぎ）

Ｔ：だれがなんと言おうとタートルくんです。（ビニールテープの上を走らせる）タートルくんは今一生懸命歩いている。

Ｔ：まず（10 ページの【復習】の）アのほうから，タートルくんは５㎞の距離を等速で歩いて７時間かかるんだよね。（約２分）では式を教えて，Ｃ 21 さん。

Ｃ 21：はい，５㎞÷７時間。

Ｔ：そうすると速さは？

Ｃ：0.71……。

Ｔ：あっ，そっちいった。これさ，実はもともと何の単元だっけ。

（授業書 10 ページ）

3　速さのもうひとつの表し方――「遅さ」

等速運動の速さを数値で表すには、2つの方法がありました。

【復習】カメのタートルくんは、5kmの距離を等速で歩いて7時間かかります*。

ア　タートルくんは、1時間あたり何km進むでしょうか。

イ　タートルくんは、1km進むのに何時間かかりますか。

【問題5】(1)　$\frac{5}{7}$km/時と$\frac{7}{5}$時(間)/kmとでは、どちらが速いですか。

(2)　5時間/kmと6時間/kmとでは、どちらが速いですか。

(3)　0km/時はどのような速さですか。また、0時間/kmはどのような速さですか。

* カメの歩く速さはふつう、0.48km/時くらいです。0.48km/時=480m/60分=8m/分

C：あー分数だ。

T：じゃあ分数で表すとどうなる。

C：$\frac{5}{7}$ km／時。

T：ですよね。昨日これやったんだよね。みんな大変な思いしたね。これで懲りたしょ。次はイです。イは何を求めろと言われているの？

C：１km進むのに何時間かかりますか？

T：この場合の式わかります？（アを指して）これは１時間あたり何km，で，今回は１kmあたり何時間なんだよね。単位は，これがkm／時ということは，これは？

C：時／km。

T：になるんだよね。ということは式はどうなるかわかる？C 16 さん。

C 16：７時間÷５km。

T：こうなりますよね。この結果どうなるかわかるかな？C ５さん。

C 5：$\frac{7}{5}$ 時間 /km。

T：こういう結果になりました。これ，共通しているのはどちらもだれの運動だと言うことですか。
C：タートルくん。
T：どちらもタートルくんの運動ですね。ではいよいよできたら議論してみたいなあ。

T：【問題５】です。それではC 20 さん読んでみてください。

C 20：「$\frac{5}{7}$ km / 時と $\frac{7}{5}$ 時間 /kmとでは，どちらが速いですか？」

T：どちらが速いでしょう。
C 23：通分。
T：通分なんだ。ふーん通分。いいでしょうか，みなさん。さっき私，誘導尋問でポッと出したんですよね。だれの運動だ？
C：タートルくん。
T：２回走ったのか。
C：いえ。
T：別の運動なのか？
C：いえ。
T：ということは？
C：同じ。
T：同じということになるんじゃないかな。速さも同じ，だってなんで？
C：タートルくんの運動だから。
T：うん，どっちもタートルくんの運動だから，ただし何が違う？
C 3：ひっくり返した。
T：いやそうなんだけどさ。実は表し方が２通りあるので，２通りで表してみたんだけど，実は同じ速さであるということが，わかってもらえたでしょうか。
C：はい。
T：それでは，まず（１）はこれは引き分けですよね。引き分けというか同じ運動なので速さは同じである。OK ？
C：はい。
T：じゃあ，（２）はどうだい。５時間 /kmと６時間 /kmではどちらが速いですかね。はい，C 23 さん。
C 23：５時間 /km。
T：そう，本当？６時間 /kmの方が速いと思う人いないの？
C：……。
T：じゃあ，C 23 さん。なんで？
C 23：１km進むのに５時間しかかかっていないのと，まあ両方長いけどね。５時間と６時間だったら，５時間の方が短いから。
T：ああそうだね。時間が短い。同じ距離だけど時間が短いのでこっちの方が速い。

（授業書 11 ページ）

“速さ”はふつう、1時間（1秒、1分、…）あたりに進む距離で表します。

$$5\text{km}\div 7\text{時間}=\frac{5}{7}\text{km/時}$$

数値が大きいほど速いので、ふつうはこちらを「速さ」と言います。

逆に、1km（1cm、1m、…）あたり進むのにかかる時間で“速さ”を表すこともあります。

$$7\text{時間}\div 5\text{km}=\frac{7}{5}\text{時間/km}$$

こちらは数値が大きいほど遅い（5時間/mよりも6時間/mの方が遅い）ので、「遅さ」または「逆速さ」と言うことにしましょう。

「速さ」と「遅さ」は、単位の分母と分子が逆になっています。

$$\text{km/時}=\frac{\text{km}}{\text{時}} \quad \longleftrightarrow \quad \text{時(間)/km}=\frac{\text{時}}{\text{km}}$$

また「速さ」と「遅さ」は、数値の分母と分子が逆になっているとき、等しい“速さ”を表しています。

【練習】つぎの「速さ」を、等しい“速さ”の「遅さ」に書きかえましょう。

$\frac{3}{4}$m/秒　　$\frac{1}{2}$km/時　　60km/時

――――――――――――――――――――――――――――――――

逆数

分母と分子が逆になっている2つの数を、たがいに「逆数」であるといいます。逆数どうしは、かけたら1になります。いっぱんに（分数でなくても）、かけて1になる2つの数を、たがいに逆数であると言います。

$\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{5\times 7}{7\times 5}=1$ ―― $\frac{5}{7}$の逆数は$\frac{7}{5}$、$\frac{7}{5}$の逆数は$\frac{5}{7}$。

かけて1になる2つの数　⇔　たがいに逆数

――――――――――――――――――――――――――――――――

【練習】つぎの数の逆数は何でしょう。

$\frac{1}{3}$　　$\frac{2}{3}$　　1.5　　2　　1　　0

T：（【練習】の）つぎの「速さ」を等しい速さの遅さに書き換えましょう。（約２分 30 秒）では C 2 さん。どうなりますか。

C 2：$\frac{4}{3}$秒 / mです。

T：つぎは$\frac{1}{2}$km / 時，これを書き換えるとどうなるでしょう。C 13 さん。

C 13：$\frac{2}{1}$時間 /km。

T：これってこのままでいいの？$\frac{2}{1}$ってなんだ。

C：２。

T：ということは？

C：２時間 /km。

T：ということができるね。

C 23：両方どっちでもいいの？
T：まあ，どっちでもいいけど，整数に直せるんだったら，整数に直そうよ。次はみんなが詰まっていたやつです。60㎞／時。これ，何で詰まるのかって言うと，整数は分数の一部でしょ。これ一度分数に直すことできるしょ。60 は分数に直すと，

C：$\frac{60}{1}$。

T：だよね。これを遅さになおしたらどうなる。

C：$\frac{1}{60}$ 時間 /㎞。

（「逆数」を読み，最後の【練習】を宿題にして終わる。）

（4）4時間目　2014 年 2 月 14 日（金）4 校時
T：（11 ページ下の【練習】の答え合わせ，終わりの方で）C 11 さん，1 の逆数。

C 11：$\frac{1}{1}$ です。

C：いいでーす。

T：$\frac{1}{1}$ って？

C：あっ 1 です。
T：どっちでもいいんだけど，おそろしいね，これ。1 の逆数は？
C：1。
T：1 の逆数は？
C：1。
T：いつでも 1。1 はすごく特別な数だったよね。すべての整数の約数である。恐ろしい数だ。じゃあ次，0 の逆数は？C 21 さん。
C 21：0。
T：0 の逆数は 0。どうですか？
C：いいでーす。
T：いい人（6 人挙手）。だめな人に聞いてみよう。C 9 さん。

C 9：$\frac{1}{0}$ 。

T：0，$\frac{1}{0}$ あとは？C 4 さん。

C 4：できない。
C：あっそれだよ。できないよ。わたしも。
T：さあ，どれでしょう。
C：ない。わからない。
T：ちょっと最初に戻ってみようか。逆数って？
C：分母と分子。
T：あっそれに行くんだ。

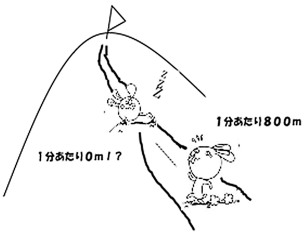
C：かけて１になる数。
T：それじゃあ，これ（０）にかけて１になる数。せーの，
C：ない。
T：この場合，逆数はない。ということになるのではないでしょうか。
C：はい。そうだ。そうです。
T：そうです。なんてあっさり納得してるんだ。いいのかそれで。
C：うん。
T：そうだねえ。０は恐ろしい数だよね。すべての整数の倍数であり，０倍はすべての数を……。
C：０にする。おそろしいねえ。
T：でもなくてはならない大切な数。で新しいやつ加わったしょ。０の逆数は？
C：ない。

（授業書 12 ページ）

「速さ」と「遅さ」 ―― ウサギとカメの話

私たちは“速さ”を表すときにはふつう、1分（1秒、1時間、…）あたりにどれだけの距離を進むかで表します。

等速で1分あたり800m走るときのウサギのラビットくんの速さは、 800m/分と表わされます。途中で寝ているときは1分あたりに進む距離が0mですから、0m/分の速さということになります。0m/分は静止状態の速さです。

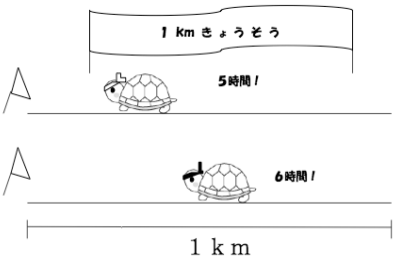


数値が大きいほど速く、数値が大きいほど速いから、ふつうはm/分などの単位で表す方を「速さ」といいます。

逆に、1km（1m、1cm、…）あたり進むのにどれだけの時間がかかるかで“速さ”を表わすこともあります。

1km進むのに5時間かかるカメのター助くんは、5時間/km
1km進むのに6時間かかるカメのター子さんは、6時間/km

数値の大きい6時間/kmの方が遅く、数値の小さい5時間/kmの方が速いので、時間/km、分/km、m/秒などの単位で表す方を「遅さ」または「逆速さ」ということができます。



（授業書 13 ページ）

5kmを7分で進むとき、

「速さ」は、5km÷7分=$\frac{5}{7}$km/分

「遅さ」は、7分÷5km=$\frac{7}{5}$分/km

同じ“速さ”でも、単位がkm/分のときと、分/kmのときでは、数値がたがいに逆数になっています。

いくら速いロケットでも、1km進むのに0分しかかからないということはありえません。「遅さ」は数値が小さいほど“速い”のですが、0分/kmのように数値が0になることはありません。0の逆数が存在しないのと同じことです。

――――――――――――――――――――――――――――――――

存在しない分数

0（=$\frac{0}{1}$=$\frac{0}{2}$=$\frac{0}{3}$=$\frac{0}{4}$=$\frac{0}{5}$=…）とかけて1になる数はありません。したがって、0に逆数はありません。

$\frac{0}{1}$、$\frac{0}{2}$、$\frac{0}{3}$、…の逆数はないのだから、これらの分母と分子を逆にした$\frac{1}{0}$、$\frac{2}{0}$、$\frac{3}{0}$、…は存在しません。

また、$\frac{0}{0}$も数とは見なされません。これについてはまた学習する機会があるでしょう。

どちらにしても、分母が0の分数はありません*。0÷0、3÷0　などのわり算をしないのと同じことです。

――――――――――――――――――――――――――――――――

* 32ページで「a や b がどんな数や式でも $a\div b=\frac{a}{b}$ と表します」という説明には例外があると書きました。この説明には「ただし b が0の場合をのぞく」と付け加える必要があります。

T：（タートルくんに見立てたライントレーサー[8]を見せて動かすが，電池切れで止まる。14 ページ【問題６】の（１）について約２分）C 18 さん，式をお願いします。

C 18：24 秒÷３㎝。

T：遅さはどうなりますか？

C 18：８秒/㎝。

T：（電池到着。ライントレーサーを動かして）では次です。ここからが本題なんです。（２）番が問題なんだよね。（約２分）遅さの場合どうやって時間を求めることができるのかって言う問題なんだよね。ちなみにみんなに聞いてみたいんだけど，今やってるの何算？

C：かけ算，わり算，わりかけ算（笑）。

[8] 白い紙の上に引かれた黒線に沿って自動的に走る模型自動車。

（授業書 14 ページ）

4　時間を求める（その1）

【問題6】つぎの問題を、単位がついた式を立てて解いてみましょう。

(1)　カタツムリのエスカル子さんは、3cm進むのに24秒かかりました*。「遅さ」を求めましょう。（エスカル子さんは等速運動するものとします。）

(2)　エスカル子さんはこの「遅さ」で、7cm進むのに何秒かかりますか。

(3)　$1\frac{2}{5}$秒/cmの「遅さ」で$2\frac{1}{4}$cm進みました。何秒かかりましたか。

* カタツムリが進む速さは、ふつう6m/時くらいです。世界記録は9.9m/時だそうです。
6m/時=600cm/60分=10cm/分=100mm/60秒=1.666…mm/秒

T：わり算の人（挙手０），かけ算の人（挙手 20）えっどんなかけ算さ。教えて。じゃあＣ７さん。

Ｃ７：８秒 /㎝× ７㎝。

T：計算結果はどうなったかな。Ｃ７さん。

Ｃ７：56 秒。

T：つまり遅さにすると，時間を求めるには何×何？

Ｃ：遅さ×距離。

T：で，時間が出るんだね。速さとはちょっと違うね。では（３）番いってみよう。できるかな。今度も遅さです。（約３分 30 秒）さてできたかな？ではＣ 15 さん，式を。

Ｃ 15：$1\frac{2}{5}$ 秒 /㎝× $2\frac{1}{4}$㎝です。

T：次は計算ですよね。こういう場合どうやって計算するんでしたっけ。

Ｃ：仮分数に直す。

T：$1\frac{2}{5}$を仮分数に直すと，Ｃ 15 さん

Ｃ 15：$\frac{7}{5}$ 。

T：で，かける？

Ｃ 15：$\frac{9}{4}$ 。

T：そして，これをどうするの？

C 15：$\frac{7\times9}{5\times4}$。

T：こうして計算結果は？

C 15：$\frac{63}{20}$です。

（授業書 15 ページ）

8秒/cm × 7cm ＝ 56秒

$1\frac{2}{5}$秒/cm × $2\frac{1}{4}$cm ＝ $3\frac{3}{20}$秒

「遅さ」に進んだ距離をかけると、かかった時間が求められます。

「遅さ」 × 距離 ＝ 時間

――――――――――――――――――――――――――――――――

単位のかけ算（その2）

$1\frac{2}{5}$秒/cm× $2\frac{1}{4}$cm＝ $3\frac{3}{20}$秒という式から単位だけを取り出してみましょう。秒/cm＝$\frac{\text{秒}}{\text{cm}}$だから、

秒/cm×cm＝ — × — ＝ $\frac{\times}{\times}$ ＝ — ＝

――――――――――――――――――――――――――――――――

（5）5時間目　2014 年 2 月 14 日（金）5校時

（授業書 16 ページ）

5　時間を求める（その2）

【問題7】つぎの問題を、単位がついた式を立てて解いてみましょう。

(1)　20mの距離を5m/分の速さで進むと、時間は何分かかりますか。

(2)　$\frac{4}{5}$mの距離を$\frac{2}{3}$m/分の速さで進むと、時間は何分かかりますか。

（分数の計算の方法は知らないことにしましょう。）

T：さて，謎は解けるのでしょうか？とりあえず，これ（【問題７】の（１））の式と答えから行ってみようかな。それではＣ 11 さんお願いします。
Ｃ 11：20 m ÷ 5 m / 分。
T：ということは，これ何分かかったかなあ？
Ｃ 11：４分です。

T：それではいよいよ（２）に入ります。今度は何違う？$\frac{4}{5}$ メートルはなに？

Ｃ：距離。

T：$\frac{2}{3}$ m / 分は？

Ｃ：速さ。
T：何を求める？
Ｃ：時間。
T：前と違うよね。何が違う？
Ｃ：分数。
T：うん実は分数なんだよね。これをそこに括弧書きしてあるでしょう。
Ｃ：「分数の計算の方法は知らないことにしましょう。」
T：なので，式だけ立ててみようと思います。立てられそう？
Ｃ：うん。
T：じゃあ式立てて（約１分）。いいですか？ Ｃ 21 さん，式を教えてください。

Ｃ 21：$\frac{4}{5}$ m ÷ $\frac{2}{3}$ m / 分。

T：こういう式になりますよね。でも一応知らないことになっているので，「これを計算することはまだできません」ということにしといてください。

T：では【問題８】。Ｃ 5 さん読んでください。
Ｃ 5：「次の問題文を，速さを遅さにして書き換えてみましょう。」
T：できますかね。それでは，もとの問題文を読んでもらいます。Ｃ 20 さん。

Ｃ 20：「$\frac{4}{5}$ mの距離を$\frac{2}{3}$ m / 分の速さで進むと，時間は何分かかりますか？」

T：この（２）の問題だよね。これを遅さの問題に書き換えられますかということですね。
では下の四角に書き入れてみてください。
T：（約５分）それではいいですか。Ｃ 8 さん。

Ｃ 8：$\frac{4}{5}$ mの距離を$\frac{2}{3}$ 分 / mの遅さで進むと時間は何分かかりますか。

T：$\frac{2}{3}$，あれＣ 8 さんこう書いてたっけ？

Ｃ 8：なおした。
T：書いてあったのなおしたのか，いいよ，いいよ。はい，みなさんどうですか？
Ｃ：えー違うかったー。

（授業書 17 ページ）

5m/分の速さとは、1分あたりに5m進む速さのことでした。20mの距離を進むには、20÷5=4で4分かかります。

このことをつぎのように書きます。

$$20\text{m} \quad \div \quad 5\text{m/分} \quad = \quad 4\text{分}$$

同じように、$\frac{4}{5}$mの距離を$\frac{2}{3}$m/分の速さで進むとき、かかる時間はつぎの式で表されます。

$$\frac{4}{5}\text{m} \quad \div \quad \frac{2}{3}\text{m/分} \quad = \quad ?\text{分}$$

距離 ÷ 速さ = 時間

分数のわり算の計算方法は知らないことにして、つぎの問題を考えてください。

【問題8】つぎの問題文を、「速さ」を「遅さ」にして書きかえてみましょう。

もとの問題文

$\frac{4}{5}$mの距離を$\frac{2}{3}$m/分の速さで進むと、時間は何分かかりますか。

書きかえた問題文

時間は何分かかりますか。

T：違うかったじゃなくて，これが正しいって決まってたか？決めたおぼえはないぞ。実はC 25 さんもこう書いてたんです。直しちゃったけど……。C 8 さんは最初こう書いてはいなかったんだけど，直してこうなりました。それではちがう人いるでしょ。じゃあC 24 さん。

C 24：$\frac{4}{5}$ mの距離を$\frac{3}{2}$ 分 / mの遅さで進むと時間は何分かかりますか。

T：ここ（遅さの数値）が違うのね。どうですか？

C：同じです。

T：C 24 さんと同じだという人（15 人挙手）。C 8 さんと同じ人（5 人挙手）。

C：同じだったけど変える。

T：なんで？

C：逆数。

T：そうだね。同じ運動の速さと遅さは？

C：逆数。

T：そう，逆数の関係になっているのでした。いいかな？合点した？合点できた？ということは遅さの問題に書き換えると「$\frac{4}{5}$mの距離を$\frac{3}{2}$ 分 / mの遅さで進むと時間は何分かかりますか。」

ということになりますね。

（授業書 18 ページ）

【問題9】問題8で書きかえた問題文を、式で表してください。

$\frac{4}{5}$ mの距離を $\frac{2}{3}$ m/分の速さで進むと、時間は何分かかりますか。

$\frac{4}{5}$ m ÷ $\frac{2}{3}$ m/分 ＝ ？分

$\frac{3}{2}$ 分/mの遅さで $\frac{4}{5}$ mの距離を進むと、時間は何分かかりますか。

＝ ？分

T：今度はこっち（遅さ）の問題で式を立ててみようと思います。ではやってください。（約 2 分 30 秒）いやあみんな賢いなあ。では式を教えていただけますでしょうか。C 10 さん。

C 10：はい。$\frac{3}{2}$ 分 / m × $\frac{4}{5}$ mです。

T：とすると，これ何算？

C：かけ算。

T：じゃあ出してみようか。（約 1 分 30 秒）計算できましたか？ではC 9 さん。

C 9：$\frac{3\times4}{2\times5}$ 。

T：となりますね。で，約分して……どうなる？

C 9：$\frac{6}{5}$ 。

T：で，これは何でしたっけ？

C：分。

T：ここいらへんにくると，わかってる人。気づいたんじゃないかな？

C：（つぶやき多数）反対なんじゃないの……速さ。

T：実はこの問題（速さ）とこの問題（遅さ）は，

C：同じ。

T：運動だよね。同じ問題なんだよね。で，こっちは速さで，こっちは？

C：遅さ。

T：でも，同じ運動。同じ距離を走るのにはどれだけかかる？

C：同じ時間。

T：そう同じ時間かかるんだよね。ということは，これ（$\frac{4}{5}$ m ÷ $\frac{2}{3}$ m / 分）の答えはどうなるはずなの？

C：$\frac{6}{5}$ 分。

T：同じ時間かかるから，$\frac{6}{5}$ 分かかるはずだよね。ここから，計算規則導き出せない？どこちがう？これ。

C：かけ算とわり算。

T：こっちは $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$，こっちは $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5}$，どうなってる？

C：反対。逆数。

T：で，分数のわり算はどうすればいいの？

C：遅さの時間の求め方で……。

T：何算？

C：かけ算。

T：遅さのかけ算に直すことができる。遅さのかけ算って，×何？　$\div \frac{2}{3}$ を？

C：$\times \frac{3}{2}$。

T：つまり，

C：逆数。

T：ひっくりかえしてかける。ということじゃない？

C：はい。

T：ちょっと悩ましいのは，こいつ（$\frac{3}{2}$）が先にあることじゃない？

C：うん。

T：ところがC 18 さんは，なんて書いたんだっけ？

C 18：$\frac{4}{5}$ m $\times \frac{3}{2}$ 分 / m

T：さてこの式は間違いですか？

C：間違いじゃない。

T：そうですよね。あなた方はなんていう法則を知っているの？

C：交換法則。

T：それじゃあ，これではっきりしない？分数のわり算は逆数を，

C：かけた。

T：かける，というふうにできますよね。

（19 ページを配布して，説明を加えながら読む。）

（授業書 19 ページ）

$\frac{4}{5}$ mの距離を $\frac{2}{3}$ m/分の速さで進むと、時間は何分かかりますか。

$\frac{4}{5}$ m ÷ $\frac{2}{3}$ m/分 ＝ ？分

$\frac{3}{2}$ 分/mの速さで $\frac{4}{5}$ mの距離を進むと、時間は何分かかりますか。

$\frac{3}{2}$ 分/m × $\frac{4}{5}$ m ＝ ？分

どちらもかかる時間は同じだから

$\frac{4}{5}$ m ÷ $\frac{2}{3}$ m/分 ＝ $\frac{3}{2}$ 分/m × $\frac{4}{5}$ m ＝ ？分

距離 ÷ 速さ ＝ 遅さ × 距離 ＝ 時間

数値だけ計算すると

$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$

つまり $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$ だから、分数÷分数は分数×逆数というかけ算にできます。

このことを、「分数のわり算はわる数をひっくり返してかける」と言います。

÷分数 → ×逆数

――――――――――――――――――――――――――――――――

かけ算の順序

「速さ×時間=距離」や「遅さ×距離=時間」のように、日本ではかけ算の式を「1あたり量×いくつ分」「もとの量×何倍」の順序で書きます。

しかし、国によってはその逆の場合もあります。オリンピック競技では、1人あたり100mずつ4人でリレーするときに「4×100m」と表しています。むしろ「いくつ分×1あたり量」「何倍×もとの量」の順序の方が国際標準です。

だから、$\frac{4}{5}$ m÷ $\frac{2}{3}$ m/分= $\frac{4}{5}$ m× $\frac{3}{2}$ 分/m（距離÷速さ=距離×遅さ）、

$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$ としてかまいません。

――――――――――――――――――――――――――――――――

T：（20 ページの【練習】について）これは遅さ？速さ？

C：速さ。

T：何を求める？

C：時間。

T：それでは速さで式を立ててみましょう。（約 1 分 20 秒）C 18 さん。

C 18：$6\frac{3}{4}$ m ÷ $2\frac{5}{8}$ m / 秒。

T：とりあえず，仮分数に直しておきたいんだけど，なおせる？ C 6 さん。

C 6：$\frac{27}{4}$ m ÷ $\frac{21}{8}$ m / 秒。

T：じゃあ２番。じゃあこれを遅さを使って計算してみましょう。ではみなさん国際標準で行き

（授業書 20 ページ）

【練習】 $6\frac{3}{4}$ mの距離を $2\frac{5}{8}$ m/秒の速さで進むと、時間は何秒かかりますか。

(1) 式をたてましょう。

(2) 「遅さ」を使って計算しましょう。

――――――――――――――――――――――――――――――――

単位のわり算（その1）

$6\frac{3}{4}$ m÷ $2\frac{5}{8}$ m/秒という式から単位だけを取り出してみましょう。

m/秒= $\frac{\text{m}}{\text{秒}}$ だから、

m÷m/秒= ― ÷ ― = ― × ― = $\frac{\times}{\times}$ = ― =

――――――――――――――――――――――――――――――――

ます。国際標準はこれ（距離×遅さ）だよね。距離はどうだっけ。

C：$\frac{27}{4}$ m。

T：じゃあ遅さにしたんだから……わり算？

C：かけ算。

T：逆数だから？

C：$\frac{8}{21}$。

T：単位は？

C：秒 / m

T：あとは計算できるよね。（約 30 秒）じゃあC 7 さん。

C 7：$\frac{27\times8}{4\times21}$ 。

T：ということで約分しましょうね。

C 7：１と２，７と９で$\frac{18}{7}$秒。

T：どう？遅さに変えたら，逆数のかけ算になる。ひっくり返してかける理由がわかっていただけたでしょうか？

C：はい。

C：うん。なんとなく。

（6）授業書のつづき

5校時目で，内包量の第3用法を，逆内包量を用いて第2用法に変換するところまで終えて，実験授業は終了した。一応，授業が速くすすんだ場合を想定して，この続きとして，第2用法（距離÷速さ）の場合に触れるページ，計算問題のページも作成しておいた。

（授業書 21 ページ）

【研究】「1　速さをもとめる」では、整数÷整数だけ考えました。分数÷分数でも考えてみましょう。

$\frac{4}{5}$mの距離を等速で歩いて$\frac{2}{3}$分かかるときの速さをもとめましょう。

この問題は、数値が分数でもやはり「距離÷時間=速さ」で表します。

$\frac{4}{5}$m　÷　$\frac{2}{3}$分　=　？m/分

では、この場合も「わる数をひっくり返してかける」のでいいでしょうか。

式から単位だけを取り出してみると、

$$m \div 分 = \frac{m}{1} \div \frac{分}{1}$$

ここで、わる数を逆数にしてかけていいとしたら、単位も分母と分子を逆にしてかければいいことになります。続けてみると

$$m \div 分 = \frac{m}{1} \div \frac{分}{1} = \frac{m}{1} \times \frac{1}{分} = \frac{m}{分} = m/分$$

単位は分母と分子を逆にしてかければうまく合うので、どうやら、数値もわる数を逆数にしてかければいいみたいですね。

これは、図を使うなどいろいろな方法で説明できるので、みなさんで研究してみてください。

4　感想文の分析

（1）楽しかったかどうか

C 1：最初の頃は「コレ（速さとか）が分数のわり算につながるのかな？」とか思ったけど，実はつながっていてびっくりした。全体的におもしろかった。豆知識があってなんかわかりやすかった。

C 6：時間を求める（その2）が楽しかった。

C 8：わからないところもあったけど，楽しかった。

C 27：むずかしいところもあったけど楽しかった。

C 3：少しむずかしかったけど，すごく楽しかったです。遅さを使った計算が楽しかった。

C 20：ふつうの算数の授業より楽しくできた。逆数の本当の意味がわかってよかった。この授

（授業書 22 ページ）

おわりに

これで、特別授業「分数のわり算は、なぜわる数をひっくり返してかけるのか？」は終わりです。だいぶ頭を使ってつかれたことと思います。

最後に分数のわり算の計算練習をしてみましょう。分数が苦手だった人も、いままでより簡単に計算ができるようになったでしょう。

【計算練習】

(1) $2\frac{2}{3}\div1\frac{3}{4}$　(2) $4\frac{4}{5}\div5\frac{1}{3}$　(3) $4\frac{2}{3}\div1\frac{1}{6}$

(4) $2\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$　(5) $\frac{5}{7}\div1\frac{1}{4}$　(6) $30\div2\frac{1}{7}$

(1) $7\frac{2}{3}\div2$　(1) $3\div\frac{6}{7}$　(1) $\frac{8}{15}\div6$

(1) $3\div\frac{1}{2}$　(1) $2\div3$　(1) $1\div1$

業を受けて算数が楽しかった。

C 2：最初は，速さをもとめる式，遅さをもとめる式とかがわからなかったけど，わかりやすく教えてもらったので，だんだん楽しくなってきて，わかったのでよかったです。

C 11：なんとなくわかったけど，複雑で難しかったけど楽しかった！！（計算の難しかったところが楽しかった。）

C 23：遅さというものがわかって楽しかった。逆数が深くわかった。

C 21：ちょっと複雑だったけど，分数を逆数にするところがすごく楽しかった。

C 17:かけ算の順序や単位のわり算などがあって，わかりやすくて楽しかったです。「速さ」と「遅さ」の違いを知らなかったけど，今回の勉強でわかりました。

（2）難しかったところ，わからなかったところ

C 5：単位のわり算がわからなかった。

C 18：緊張した。逆速さというものを初めて聞いた。遅さと速さが表し方が違うだけで同じというのは少し不思議に思う。100㎞／時でも 1 ／ 100 時／㎞の遅さということになるので時速 100㎞／時が遅いとは思えなかった。同じ速度でも速さと遅さになるのがよくわからなかったです。

C 2：最初は，速さをもとめる式，遅さをもとめる式とかがわからなかったけど。
C 9：P 6の図の書き方がよくわからなかった。
C 15：よくわかるようなわからないような感じでした。結果どうして逆にするのかがイマイチわからなかった。
C 16：最初はわかったけど後半わかんなかった。（カメさんら辺が意味がわからない）
C 27：単位だけの式がちょっと難しかった。
C 3：かけ算の順序が少しわからなくて難しかった。
C 8：P17の書き換えた問題が難しかった。
C 10：P17の問題の速さ・遅さのところが難しかった。
C 13：式を立てたり，答えを出すのが難しかった。
C 24：時間をもとめるところが難しかったけどわかりやすかったです。

（3）わかりやすかったところ
C 14：５年生のとき教えてもらったときよりもわかりやすかった。
C 26：いつも「何で分数のわり算はひっくり返してかけるのかな？」と思ってたけど，今日の授業でよくわかった。まとめるなら，速さの逆数＝遅さ・・・。
C 15：遅さの計算がわかりやすかった。
C 4：前に教えられたときよりも，詳しく知ることができた。
C 7：全部がわかったわけじゃないけど，なんとなく分数のわり算はひっくり返してかけるのがわかりました。
C 28：なんとなくわかった。
C 2：最初は，速さをもとめる式，遅さをもとめる式とかがわからなかったけど，わかりやすく教えてもらったので，だんだん楽しくなってきて，わかったのでよかったです。
C 11：なんとなくわかったけど，複雑で難しかったけど楽しかった！！（計算の難しかったところが楽しかった。）
C 19：最初はいまいちだったけど，逆数などわからないところがよくわかった。
C 23：逆数が深くわかった。
C 17：「速さ」と「遅さ」の違いを知らなかったけど，今回の勉強でわかりました。

おわりに――成果と課題――

（1）逆内包量の可能性と知恵ぶくろ

今回は，「分数のわり算はわる数をひっくりかえしてかける」ことを，逆内包量のかけ算を使うことで説明しようと試みた。授業記録・感想にあるとおり，おおむね理解されたと考えてよいだろう。つまり，逆内包量を使えば分数のわり算の計算方法を説明できる可能性があるということは，示すことができたと考える。

今回は速さをもとに考えたこともあり，単元の中で速さを再構成する必要があった。授業記録にあるとおり，プラレールやチョロQなどを想起させることで，等速運動の速さについては難なく再現することができた。これは，速さが知恵ぶくろとして確立されていることを示している。

つまり，子どもたちが分数のわり算の計算方法を忘れたとき，C 23 の感想にあるとおり，「速さ」の逆数＝「遅さ」になることを思い出せれば，再構成に困ることはない。そのような知恵ぶくろを子どもたちにたくさん持たせて中学校へ送り出したいものだ。

内包量の学習において，逆内包量は邪魔者扱いされることが多い。その扱いにも気をつける必要がある。

（2）子どもたちは難しいものが好き

C 15 の感想「よくわかるようなわからないような感じ」は決して否定的なものではない。C 15 はその後それを考え続けて，家庭学習にまとめてきた。なんとなくわかったけれど，まだはっきりとはわからないそうである。ほかの感想にもあるとおり，「複雑で難しい」から「楽しい」（C 11）のである。

私たちを含め，すぐわかるもの，すぐ使えるものばかり求めがちであるが，時間をかけて，頭をフル回転させて，少しずつわかっていく，そして発見する楽しさは，何物にも代え難いものがある。ぜひ，そんなすばらしい体験を子どもたちにさせたいものだ。

「だんだん楽しくなる授業」を目指して，現状に満足せず，タブーを作らず，「どのような活動を組織し，どのような問題を解決し，どのような法則を発見させるのか。」私たちが考え続ける必要がある。

（3）分数のわり算について

今回の授業は，あくまでも 6 年生のまとめとして行ったものである。初めて分数の乗除を学習する子どもたちにこのプランを使うためには，再構成する必要がある（もとの大田・佐藤プランは初めての子どもたち対象）。

また速さと遅さなどの用語[9]や学習事項の配列など，改善すべき点が確認できた。その点も含めたプランの改訂が当面の課題である。

内包量（速さ）を使うのであれば，その学習が前提となるであろうし，その単元内で学習する方法も考えられるであろう。いずれにせよ「行うは易い」計算であるので，学級の実態に合わせて子どもたちのイメージしやすい量を設定することが必要である。

今回もやはり，子どもたち全員にわかるように説明することができたわけではない。もちろん指導者にも問題があるし，プランにも今回明らかになった課題がある。それを改善しながら，よりベターなものを探究していくことこそ，いま私にもとめられていることだと思う。

今回の実践を通して，改めて分数のわり算は「教師のロマン」であることを感じた。永遠に解けないかもしれないが，その答えを追い求めることに魔性のような魅力を感じる。また分数のわり算に出会ったとき，どんな景観が見られるのか，それを楽しみにこれからも考え続けていこうと思う。

[9]「速さ」の逆内包量を、「遅さ」ではなく「逆速さ」と呼ぶことも検討している。