



Title	高校数学における量と関数の指導
Author(s)	氏家, 英夫
Citation	教授学の探究, 29, 77-134
Issue Date	2015-01-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/57891
Type	departmental bulletin paper
File Information	AN10116428-29_77-134.pdf



高校数学における量と関数の指導

氏 家 英 夫

(白樺学園高等学校)

目次

はじめに.....	77
第 1 章 量と数.....	78
1.1 問題状況	78
1.2 量の倍変換としての数	78
1.3 授業プランの概略	78
1.4 授業プランと授業過程	79
第 2 章 1 次関数と 2 次関数.....	92
2.1 問題状況	92
2.2 1 次関数	92
2.3 2 次関数	92
2.4 授業プランの概略	92
2.5 授業プランと授業過程	93
第 3 章 指数関数と e	106
3.1 問題状況	106
3.2 相対変化率と e の値.....	107
3.3 授業プランの概略	108
3.4 授業プランと授業過程	109
第 4 章 指数現象のメガネとしての対数関数	125
4.1 問題状況	125
4.2 等比数列と等差数列の対応.....	125
4.3 授業プランの概略	126
4.4 授業プランと授業過程	127
おわりに.....	134

はじめに

教育内容としてある概念や法則をとりこもうとするとき、その概念や法則の教育内容体系全体の中での位置や他の諸概念との関連が問題にならざるをえない。個々の教材は、教育内容体系の中で位置づけられることによって、その教材で形成されるべき概念の外延と内容が明確になる。しかしこの教育内容体系の全体は、どの教科においても必ずしも明確にされていない。これは比較的その体系性が明らかであると考えられている数学教育においても同様である。

そこで、一方では「量から微積分へ」という大域を見通しながら、その基礎的単位となるであろういくつかの概念をとりだし、その指導過程の確定に向けて取り組むことが課題となる。本稿は、高校数学の場における量から微積分へと展開する筋道の、どのような量のどのような変化を解析するかという問題に対する、指導過程をふくめた提案である。

第1章 量と数

1.1 問題状況

高校に入学してきた生徒の多くは、自然数、整数、有理数、実数といった数の体系およびその性質についてきわめてあいまいな認識しか持っていない。こうした状況に対し、これまで多くの高校において「基礎学力の不足」がいわれ、「基礎学力回復」の試みがなされてきた。しかし、その多くは内容と方法において小学校、中学校の復習の域を出ていなかったように思われる。それまでの小中学校の授業で落ちこぼされてきた生徒たちに、より貧困な内容と方法でより少ない時間の中で復習をさせても、落ちこぼしは必ず再生産されることになる。また、高校の数学にはじめて向かい合おうとしている彼らに小中学校の復習をさせることは、かえって彼らの高校生としての新しい意欲をなくさせ、プライドを傷つけかねない。

量と数の指導について数学教育協議会の人々が生み出してきた実践に「量数概論」という形で「高校数学入門」の取り組みがある。これは「数教協による『量の体系』と『水道方式』は、理論的にも実践的にも著しい成功をおさめ・・・(それを)高校生に適合したカリキュラムで高校教育へ導入」¹⁾する試みだった。それは「単なる『中学校のまとめ』や『中学校までの復習』ではない。・・・『数学教育現代化』の理念によって・・・小学校・中学校・高校という各教育体系に有機的連関を与えるものである」²⁾とされた。その内容は、自然数から無理数までの数について、分離量・連続量・外延量・内包量といった「量の理論」に基づき展開していくものであった。この取り組みは、大変貴重で重要な成果を残した。しかし、その後この取り組みはほとんど発表されておらず、決定版と言えるような授業実践はいまだ生み出されてはいないように思われる。また多くの高校では、教科書に入る前にこれらの量の系統、分類を授業で展開することは、時間的制約もあって難しいことであろう。

1.2 量の倍変換としての数

量と数との関係を問題とすると、数は量の「測度」として扱われることが多い。これに対して田村二郎『量と数の理論』(1978年 日本評論社)は、「もともと異質の概念である量と数を明確に区別し、数を量空間の変換とみなす」⁴⁾ことによって、量の基本性質から自然数から実数という数の導入を数学的に基礎づけている。例えば「自然数は個数を表す」という立場からは、長さや自然数を結びつけることは不自然なこととなるが、自然数を「量空間の倍変換とみなす」すなわち「 n 倍変換と自然数 n とを同一視する」⁵⁾ことによって、はじめて自然数は量と結び付けられる。また対称性を持つ量空間とくに1次元の有向量の空間の変換として負の数を導入することによって、正負の数の計算規則がはじめて明確に基礎づけられた。

1.3 授業プランの概略

こうした検討に基づき、高校に入学した新入生に数概念の基礎を形成することを目的とした授業プラン「高校生のための量と数」が取り組まれた。その概略は以下のようなものである。

第1節 自然数とその演算

- ・「数は量の倍変換」という立場と加法、減法の意味づけ。
- ・乗除の演算の1あたり量による意味づけ。

第2節 有向量と正負の数

- ・1次元有向量に基づく正負の数の加減。
- ・反対量を表すマイナスと減法のマイナスの区別と同一視。
- ・水量の増減を用いた正負の数の乗除。

第3節 有理数

- ・分割分数と商分数による分数の定義。
- ・量に基づく分数の加減乗除。

第4節 実数

- ・量の測定
- ・有理数の小数表示
- ・循環小数の分数表示
- ・循環しない無限小数

1.4 授業プランと授業過程

第1節 自然数とその演算

バラバラの物の個数を表すのには1、2、3・・・などの数が用いられる。これらの数を自然数と呼ぶ。一方世の中は長さ、重さ、面積などの「量」であふれている。長さを例とすれば、「どちらが長いか」ということは測らなくとも比べることができる。測る前から「長さ」や「面積」は存在する。

こうした長さなどの量については個数ということは考えられないので、私たちは適当な長さを「単位」として決め、いろいろな長さがこの単位の何倍になっているかを数を用いて表す。つまり数 a とはある量を a 倍する働きなのである。

ア 加法

量は加えることができる。

練習1 次の2つの長さを加えなさい。

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \hline & + & \hline \end{array}$$

長さ M の2倍 $2M$ と3倍の長さ $3M$ とを加えれば $5M$ になる。これに対応して自然数の加法も自然に決められる。

$$2 + 3 = 5$$

イ 乗法

「1あたり量」というものを考える。例えばうさぎ1匹あたり耳2本、3輪車1台あたりタイヤ3本・・・このようなある法則性を表現する量を「1あたり量」とよび、2本/ひき 3本/台などと表す。

練習2 1あたり量の例を4～9について考えなさい。

乗法は 1 あたり量から全体の量を求める計算である。

$$1 \text{ あたり量} \times \text{いくつ分} = \text{全体量}$$

1

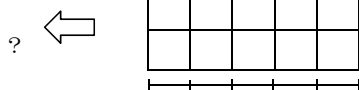
この文脈ではかけ算は倍の合成として扱うのが自然であるが、あとで出てくるマイナスの乗法や分数の乗法の意味づけのために、ここでは正比例型で定義しておく。

練習 2 はいろいろな例が生徒から出てきて楽しい授業になる。除法は乗法の逆として、等分除と包含除を説明する。最後の減法の定義はマイナスの引き算との関係で重要になる。

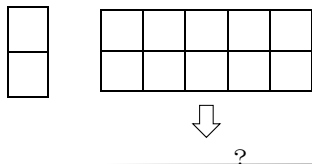
ウ、除法

割り算は乗法の逆の演算である。

・全体量といくつ分がわかっていて、1 あたり量を求める割り算を等分除と呼ぶ。



・全体量と 1 あたり量がわかっていて、いくつ分を求める割り算を包含除と呼ぶ。



エ、減法

A, B 2 つの同じ種類の量があって、 $A < B$ ならば

$$A + X = B \quad \text{となるような量 } X \text{ が存在する。このよ}$$

うな X を「B と A の差」といい、 $B - A$ で表す。

これに対応して、2 つの自然数 a, b に対して、 $a < b$ ならば

$$a + x = b \quad \text{となるような数 } x \text{ が存在する。}$$

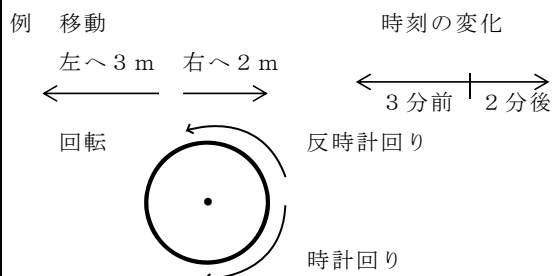
このような x を「 b と a の差」といい、 $b - a$ で表す。

2

次に正負の数を導入する。正負の数の概念を形成するということの内容は、次の 3 点を含んだものでなければならないであろう。①マイナスの量を表す一と引き算の一の区別と同一視。②量のレベルでの対称性。③数のレベルで対称性が崩れていること。有向量を基礎にした正負の数の指導によって、これらの基礎的な問題に対する解答が可能となった。

第2節 有向量と正負の数

長さや重さ、面積のような大きさだけを持つ量をユークリッド式量と呼ぶ。これに対して、世の中には、移動、回転、時刻の変化、電流など、大きさのほかに方向を持つ量がある。このような量を有向量と呼ぶ。ここでは東と西、右と左など、互いに反対の2つの方向をもつ有向量を考える。



ここでは白樺通りに沿っての移動を考える。移動の方向は東と西の2つの方向である。例えば東へ8 mとか西へ5 m等々。簡単のために、これを(東8)とか(西5)のように表す。

ア 有向量の加法

こうした移動は加えることができる。東へ8 m、西へ5 m移動すると、結果は東へ3 m移動している。

$$(\text{東} 8) + (\text{西} 5) = (\text{東} 3)$$

練習1 次の加法を計算しなさい。

$$(\text{東} 7) + (\text{西} 4) = \quad (\text{西} 9) + (\text{東} 6) =$$

$$(\text{東} 3) + (\text{西} 8) = \quad (\text{東} 2) + (\text{西} 2) =$$

A と逆向きの方向を持ち同じ大きさを持つ量を A の反対量といい A' で表す。 $A + A'$ は移動しないという結果となる。この量をゼロ量と呼び $\bigcirc$ で表す。 $A + A' = \bigcirc$

練習 2 次の量はどのような量か。

(東 3) $' =$ (西 5) $' =$

ここで減法の定義「 $A + X = B$ のとき、X を B と A の差といい、 $B - A$ と表す」より、

$A + A' = \bigcirc$ だから $A' = \bigcirc - A$

$\bigcirc - A$ を $-A$ と略することになれば

$$A' = -A$$

すなわち 反対量 () $'$ を減法の記号 $-$ を用いて

$-()$ と表すことができる。

練習 3 次の量はどのような量か。

$-(東 8) =$ $-(西 7) =$

4

こうして減法の $-$ と反対量を表す $'$ との区別と同一視がなされる。A と反対量 A' との関係はここでは完全に対称的である。「ここで、 $-A$ を負の量などと考えてはならない。A と A' はたがいに逆の量であって、一方が正、他方が負というものではないのである。実際

$$-A = A'$$

と同時に

$$-A' = A$$

が成り立ち、A と A' の関係は完全に対称的である」⁶⁾。

ここで有向量の 2 つの向き的一方を $+$ の向きと決めてやれば、もう一方の向きは $-$ を用いて表すことができる。また、時間の前後とか増加減少のように $+$ の方向が自然に決まる量もある。

例えば、東と西の移動について、東の方向を $+$ と決めれば、西の方向は $-$ で表すことができる。

(東 5) $= +5$ (西 3) $= -3$

練習 4 次の加法を計算しなさい。

$(+7) + (-4)$

$(-9) + (+6)$

$(-5) + (-2) + (+4) + (-6)$

このような場合加法の記号 $+$ とかっこを省略して

$-5 - 2 + 4 - 6$

と書くのが普通である。

5

練習 5 次の加法を+とカッコを省略してから計算しなさい。

$$(-3) + (+5) + (-6)$$

$$(+4) + (-3) + (+5) + (-8)$$

$$(-1) + (+7) + (+4) + (-3)$$

練習 6 次の計算をしなさい。

$$-2 + 8 - 7 + 9$$

$$-1 - 7 + 5 - 3$$

ところで－は反対量を表したのだから、例えば

$$-(+5) = -5 \qquad -(-3) = +3$$

練習 7 カッコをはずして計算しなさい。

$$3 - (+5) - (-8) - (+2) + (-6)$$

$$-3 - (-7) + (-14) - (+10)$$

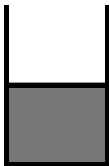
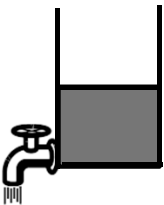
次に乗法を考える。量の増加減少と時間の前後といった、
 +-が自然に決まっている有向量を用いた方が、自然でわかりやすい。

イ 有向量の乗法

乗法とは 1あたり量×いくつ分で全体量を求めることであつた。有
 向量の乗法として、1あたり量として1分あたりの水量の増減を考え、
 いくつ分として時間を考える。

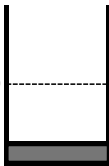
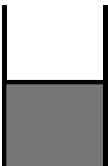
増加 減少

 + 3 l/分  - 3 l/分

○ 1あたり量が増加(+)の場合

 0  0  0

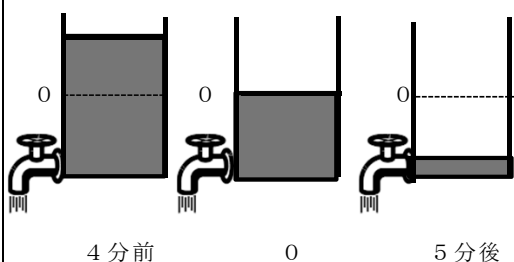
4 分前 0 5 分後

$(+3 \text{ l/分}) \times (-4 \text{ 分})$ $(+3 \text{ l/分}) \times (+5 \text{ 分})$

= =

7

○ 1 あたり量が減少 (－) の場合



$$(-3 \text{ l/分}) \times (-4 \text{ 分}) \qquad (-3 \text{ l/分}) \times (+5 \text{ 分})$$

$$= \qquad =$$

こうして有向量の乘法に基づき正負の数の乘法が自然に導かれる。

$$(+) \times (-) = (-) \qquad (+) \times (+) = (+)$$

$$(-) \times (-) = (+) \qquad (-) \times (+) = (-)$$

練習 8 次の計算をなさい。

$$(+ 8) \times (- 5) \qquad (+ 12) \times (+ 7)$$

$$(- 9) \times (- 7) \qquad (- 13) \times (+ 6)$$

$$11 \times (- 4) \qquad - 9 \times (- 8)$$

$$- 6 \times 5 \qquad - 3 \times (- 8) \times (- 2) \times 4$$

8

第 3 節 有理数

ここで長さなどのユークリッド式量の世界にもどる。長さや面積などの量には次の重要な性質がある。

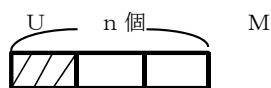
ある量 M と自然数 n に対し

$U \times n = M$ となるような量 U が存在する。

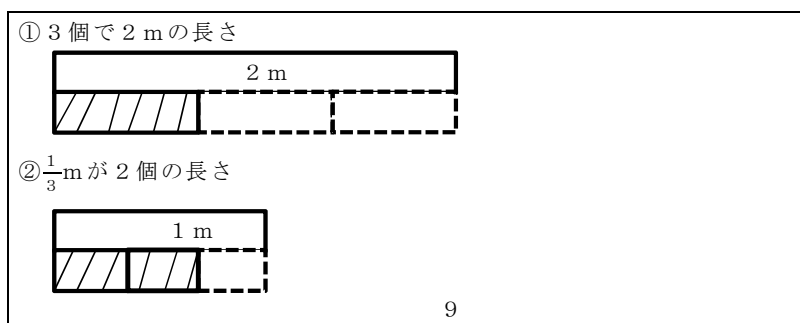
このような量 U を「 M の n 等分」といい

n 個で M になる量 U を

$$U = \frac{1}{n} M \quad \text{と表す。}$$



問題 3 個で 1 m になる長さを $\frac{1}{3} \text{ m}$ という。それでは $\frac{2}{3} \text{ m}$ はどのような長さか。



分数には商分数と分割分数の 2 つの意味がある⁷⁾。特に①の商分数の論理を説明しておかないと分母に 0 がとれないことが説明できない。

ここで分数の分母には 0 をとれないことは明らかである。 $\frac{3}{0}$ m とは 0 個で 3 m になる長さということになるが、そのような長さは存在しない。また $\frac{0}{0}$ m とは 0 個で 0 m になる長さということになるが、これはすべての長さがあてはまり特定できない。

ア 倍分・約分

分数の計算にとって次の原理が本質的である。

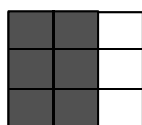
分数の分母と分子に、同じ数をかけても、
同じ数で割っても分数の大きさは変わらない



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{4}{6}$$



$$\frac{6}{9} \text{ 等々}$$

練習 1 次の分数を分母が 60 になるように倍分しなさい。

$$\frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{12}$$

練習 2 次の分数を約分しなさい。

$$\frac{42}{63}$$

イ 加法・減法

分母が同じであれば、分数の加減は簡単である。
分子どうしをたしたり引いたりすればよい。

練習 3

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{7}{12} - \frac{11}{12}$$

分母が異なる場合は倍分を用いて通分する。

練習 4

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{9} + \frac{11}{12}$$

10

ウ 乗法

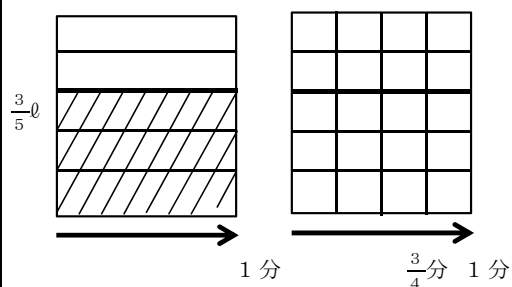
分数の乗法を考えるために、1あたり量として「1分あたり何ℓ増えるか」という「増加速度」ℓ/分を考える。いくつ分は時間(分)

で、全体量は増加量(ℓ)である。例として増加速度 $\frac{3}{5}\ell/\text{分}$ で、

$\frac{3}{4}$ 分後の増加量を求める。

$$\frac{3}{5}\ell/\text{分} \times \frac{3}{4}\text{分}$$

問題 このときの全体量の部分に斜線を入れよ。



- ・分母は1ℓを5等分したものをさらに4等分しているので□が 5×4 で20個
- ・分子は□が 3×3 で9個
- ・こうして全体量は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4} = \frac{9}{20} \quad (0) \quad \text{となる。}$$

すなわち分数の乗法は分母どうし分子どうしをかければよい。

練習 5 次の計算をなさい。

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{8}$$

1 1

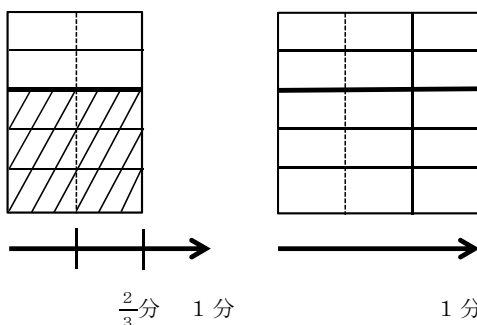
エ 除法

除法には1あたり量を求める除法といくつ分を求める除法がある。ここでは1あたり量を求める除法を考えよう。

例えば $\frac{3}{5}$ 増えるのに $\frac{2}{3}$ 分かかったときの1あたり量を求める。

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} \text{ 分}$$

問題 1分あたりの量の部分に斜線を入れよ。



こうして分数の割り算は割る方を逆にしてかければよい。

1 2

実数は『量と数の理論』では切断によって定義される。「 $\mathbf{Q}^+$ の切断

$$\alpha = (A \mid \bar{A})$$

において、 $\max A$ はないとする。このとき

$$V : U = (A \mid \bar{A})$$

となるような V を U の α 倍といい、 αU で表す」⁸⁾。

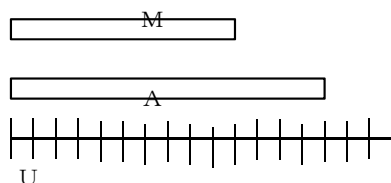
しかしこの内容は高校数学の範囲をこえる。そこで、ここでは小数をもちいて実数を定義する。

第4章 実数

基本量 M である量 A を測ることを考える。十分大きな自然数 m を選び、 M を m 等分した量 U をつくる。次にこの小さい量 U を

U 、 $U \times 2$ 、 $U \times 3 \dots$

と倍にしていって順に A と比較する。いつかは A よりも大きくなる。



このときどこかで等式

$$U \times n = A$$

が成り立てば

$$A = \frac{n}{m}M \quad \text{となる。}$$

問題 どんな長さ A についてもこのような等式が成り立ち

$$A = \frac{n}{m}M$$

とすべて分数（有理数）で表すことができるか。

この問題を考えるために10進小数を導入する。つまり等式が成り立たないときどんどん基本単位を10等分して、

$$a = x + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \dots$$

として、これで $A = aM$ と表すことを考える。

ア 分数を小数にする

すべての分数は小数にすることができる。割り算を実行すればよい。

練習1 次の分数を小数で表しなさい。

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{7}$$

このように分数は有限小数と、循環する無限小数とに分かれる。

イ 小数を分数にする

有限小数は簡単に分数にすることができる

練習 2 次の小数を分数にしろ。

0.3

3.27

循環する無限小数の場合は、循環するケタ数だけ 10^n をかけて、そこから元の数をひいて循環する部分を消去してやればよい。

例 $a = 0.424242 \dots$

$100a = 42.424242 \dots$

—) $a = 0.424242 \dots$

$99a = 42$

$$a = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

練習 3 次の循環する無限小数を分数にしろ。

0.373737 $\dots$

14

ウ 循環しない無限小数

循環しない無限小数も無数に存在する。これらは分数では表すことができないから、有理数ではない。

例えば 0.01001000100001 $\dots$

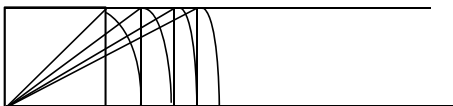
0.102003000400005 $\dots$

$$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508 \dots$$

$\pi = 3.1415926535 \dots$ 等々

ルートについては以下の簡単な作図で長さとして数直線の上に示すことができる。



1 $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $2\sqrt{5}$

これらの循環しない無限小数を無理数と呼ぶ。有理数と無理数を合わせた全体を実数と呼ぶ。

実数 α によって、すべての長さ A は

$$A = \alpha M$$

と表すことができる。

1 5

- 注 1) 森毅・市川徹『量数概論』明治図書、1968 年、
1 ページ。
- 2) 同上、1 ページ。
- 3) 田村二郎『量と数の理論』日本評論社、1978 年。
- 4) 同上、2 ページ。
- 5) 同上、20 ページ。
- 6) 同上、71 ページ。
- 7) 大田邦郎「小学校の分数指導における新しい試み」『教授学研究シリーズ 3』北海道大学
教育学部教育方法研究室、1978 年、2 ページ。
- 8) 田村二郎『量と数の理論』106 ページ。

第2章 1次関数と2次関数

2.1 問題状況

教科書での関数の扱いは、代数的な扱いとグラフの指導に終始しており、それぞれの関数の固有の内容、とくに量の変化の法則性を分析するという解析学本来の視点が欠落している。古典解析学が力学との深い結びつきの中で発展してきたことを考えれば、自然の量的変化の解析こそが関数指導の基本とならなければならない。

2.2 1次関数

1次関数に固有の性質は、時間が s たてば変化は正比例関数 $g(s)$ であるということ。すなわち

$$f(x+s) = f(x) + g(s)$$

ということにある。これはくどの時点 x から始めても s が一定なら変化量は一定という性質をあらわしており、1次関数が正比例関数 g の一種の相対化であることを示している。

この相対性は等速運動の例でいえば、速度 a の運動を任意の時刻(b)でながめるという形で生ずる。このときの状態を c とすれば $f(b) = c$ 。ここからの変化量を問題にすると

$$f(x) - c = a(x - b)$$

となる。この形を1次関数の標準形と呼ぶ。 b という任意の時点から出発して正比例が観察されること、ここに1次関数の固有の内容がある。

2.3 2次関数

標準化によって比例関係となる1次関数に対し、2次関数は非一様変化をしめす関数のひとつである。その典型的な例は自然落下や斜面の運動のような等加速運動である。

いま0秒のとき位置0 cmからスタートした斜面の運動を観察すれば Δx 一定のとき Δy は1, 3, 5...の奇数列の割合で変化する。

ガリレオはその「新科学対話」の中で定理の系として次のように述べている。「故に若し運動の端初からかぞえて任意の等しい時間間隔、...をとり、それらの時間内に...だけの距離を通過するものとすれば、これらの距離は相互に1, 3, 5, 7等の奇数列の比を成す」⁹⁾。

さらに、 p 秒後に q cmの位置からこの運動がスタートした場合、何秒後にどの位置からスタートしても1, 3, 5...という変化の様子は変わらないので、

$$y - q = a(x - p)^2$$

と表すことができる。この形が2次関数の標準形となる。

2.4 授業プランの概略

第1部 1次関数¹⁰⁾

・変化を調べる道具 Δx 、 Δy

・等速運動の分析、 Δx が一定のとき Δy も一定 変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

- ・ 1 次関数の定義 変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 一定の関数
- ・ 1 次関数の標準形 初期条件 (p, q)
変化率 a のとき $y - q = a(x - p)$
- ・ 標準形からグラフを書く。
- ・ 2 点を通る 1 次関数
- ・ 1 次関数の一般形 $y = ax + b$ を求める。

第 2 部 2 次関数

- ・ ものの落ちる速さの実験。
- ・ 斜面の実験から 2 次関数の式とその変化が 1, 3, 5・・・となること。
- ・ 変化法則 1, 3, 5・・・からグラフを書く。
- ・ (p, q) からスタートした斜面の運動から標準形 $y - q = a(x - p)^2$
- ・ 標準形から 2 次関数のグラフを書く。
- ・ 一般形から標準形を求める。

2.5 授業プランと授業過程

1 次関数と 2 次関数

第 1 部 1 次関数

1、変化をしらべる

問題 1 ①この物体 A は () 秒間に () c m 進んだ。

この物体 A は () 秒間に何 c m 進むか。

②この物体 B は () 秒間に () c m 進んだ。

この物体 B は () 秒間に何 c m 進むか。

まとめ

物体 A というのは等速運動をする玩具の自動車、物体 B というのはカーテンレールをこるパチンコ玉の運動である。実際に 2 ～ 3 秒後の位置をものさしではかって、5 秒後くらいの位置を予想させる。B は大きく予想がはずれるが、ここではあまり深入りせずに「これから物体 A のような等速運動について調べていく」とまとめる。

次の表はある等速運動をする物体 A について、はかり始めてからの時刻を x 秒、基準点からの位置を y c m として、表にしたものです。

表 1

x 秒	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y cm	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43

このような時刻と位置の表をながめているだけではその規則性はわからない。
そこで、このような変化を調べるための道具を用意する。

問題 1

① x が 5 秒から 8 秒に変わった。時刻の変化（時間）は何秒か。

② y が 19 cm の位置から 28 cm の位置に変わった。

位置の変化（距離）は何 cm か。

まとめ

練習 つぎの Δx や Δy をもとめなさい。

① x が 2 から 6 に変わった。 $\Delta x =$

② y が 7 から 12 に変わった。 $\Delta y =$

③ y が 19 から 8 に変わった。 $\Delta y =$

「変化を調べるにはどれだけ変わったかという量を問題にしなければならない。 x の増加分を Δx y の増加分を Δy と表す（ Δ はギリシャ文字でデルタ）」とまとめ、練習する。

それでは変化を調べる道具 Δx と Δy をつかって、表 1 の変化の規則をしらべてみる。

問題 2 2 秒おきに変化を調べてみよう。

$\Delta x =$

x 秒	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y cm	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43

$\Delta y =$

こんどは 1 秒おきに変化を調べてみよう。

$\Delta x =$

x 秒	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y cm	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43

$\Delta y =$

まとめ

等速運動では

問題 3 つぎの 2 つの等速運動はどちらが速い運動といえるか。

A $\Delta x = 3$ のとき $\Delta y = 15$ (3 秒間に 15 cm 進む)

B $\Delta x = 5$ のとき $\Delta y = 20$ (5 秒間に 20 cm 進む)

まとめ

速さをくらべるには

「速さを比べるには？」ということではいろいろな意見が出るところだが、「1 秒間に進む距離で比べる」とまとめる。

等速運動の速さは 距離÷時間であらわすが、このことを Δ であらわした

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ を変化率という。}$$

練習 つぎの変化率を求めなさい。

- ① $x=3$ のとき $\Delta y=2$
- ② $x=2$ のとき $\Delta y=-6$
- ③ ある等速運動が2秒後に4 cm、6秒後に16 cmの位置にあった。

2、1次関数の定義と式

ともなって変化する2つの量があるとき、変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{一定}$ の関数を1次関数とよぶ。変化率が一定なので、1次関数は変化率と x に対する y の値がわかれば、変化の様子がすべてわかる。

問題4 5 cm/秒の等速運動をする物体がある。3秒後の位置が4 cmだったとき、この運動を表す次の表を完成させなさい。

$\Delta x =$

--	--	--	--	--

x				3					
y				4					

$\Delta y =$

--	--	--	--	--

このように与えられた x と y の組を初期条件という。1次関数は変化率と初期条件で決まる。次にその式を求めてみる。

問題5 変化率3、初期条件(2, 5)である1次関数についてつぎの問いに答えなさい。

x		2		x	
y		5		y	

- ① x が2から x にかわり y が5から y に変わったと考えて $\Delta x \Delta y$ を求めよ。
- ② 変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を表す式を求めよ。

こうして、1次関数の標準形

$$y - q = a(x - p) \quad \text{が得られる。}$$

問題 6 初期条件 (p, q) 変化率 a の 1 次関数の式を求めよ。

これを 1 次関数の標準形という。

練習 次のような 1 次関数の式を求めよ。

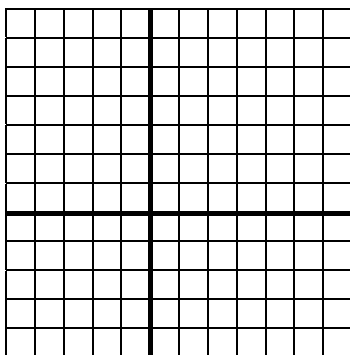
① 速さ 4 c m/秒の等速運動がある。7 秒後の位置が 1 2 c m だった。

② $x = 3$ のとき $y = 7$ 、変化率が $\frac{2}{3}$

③ $x = -2$ のとき $y = -3$ 、変化率 -4

④ 初期条件 $(2, -4)$ 変化率 $\frac{1}{2}$

問題 7 初期条件 $(1, 3)$ 変化率 2 の 1 次関数のグラフを書きなさい。



練習 次の 1 次関数のグラフを書きなさい。

① $y - 2 = 3(x - 1)$ ② $y - 1 = -2(x - 3)$

こののち、1 次関数の式を求める以下のような練習問題を扱う。

問題 8

ある等速運動が 2 秒後に 7 c m、5 秒後に 9 c m の位置にあった。この等速運動を表す 1 次関数の式を求めよ。

$\Delta x =$

$\Delta y =$

変化率は

初期条件は

問題 9

ある一次関数のグラフが、2 点 (3, 4) (7, 1) を通るとき、
この 1 次関数の式を求めよ。

練習

①ある等速運動が 1 秒後に 5 c m、4 秒後に 1 1 c m の位置にあった。
この等速運動を表す 1 次関数の式を求めよ。

②ある 1 次関数のグラフが、2 点 (2, 5) (5, 14) を通るとき、
この 1 次関数の式を求めよ。

③ある 1 次関数のグラフが、2 点 (3, 4) (7, 6) を通るとき、
この 1 次関数の式を求めよ。

5

ここで、初期条件 (0, b) の 1 次関数の式は

$$y = ax + b$$

となる。この形を 1 次関数の一般形とする。

3. 1 次関数の一般形

問題 10

水の出る速さが 5 l/分の蛇口でお風呂の水をいれる。測り始めたときすでに 7 l の水が入っていた。このときの 1 次関数の式を求めよ。

変化率は

初期条件は

問題 11

この形を一般化すると 変化率 a 初期条件 (0, b) の 1 次関数の式は

これを、1 次関数の一般形という。

練習 次の 1 次関数の式を一般形で求めよ。

①変化率 2 初期条件 (0, 4)

②変化率 3 初期条件 (7, 12)

③変化率 -2 初期条件 (3, 4)

④ある等速運動が 2 秒後に 5 cm、6 秒後に 17 cm の位置にあった。

6

問題 1 2 次の 1 次関数のグラフを書きなさい。

① $y = 2x + 3$ ② $y = \frac{1}{3}x - 2$ ③ $y = -2x - 1$

問題 1 3 次のような 1 次関数の式を一般形で求めよ。

- ①ある等速運動が 2 秒後に 5 cm、6 秒後に 17 cm の位置にあった。
- ②ある 1 次関数のグラフが、2 点 (1, 4) (6, 14) を通る。
- ③ある 1 次関数のグラフが、2 点 (3, -2) (7, -10) を通る。
- ④ 1 次関数のグラフが 2 点 (2, 4) (5, 6) を通る。

7

第 2 部 2 次関数

0、ものの落ちる速さ

問題 1 ピンポン玉と消しゴムを同じ 50 cm ほどの高さから落としてみます。どち

らが速く落ちると思いますか。

- ア) ピンポン玉
- イ) 消しゴム
- ウ) ほとんど同時

問題 2 こんどはピンポン玉と消しゴムを 2 m ほどの高さから落としてみます。どちらが速く落ちると思いますか。

- ア) ピンポン玉
- イ) 消しゴム
- ウ) ほとんど同時

問題 3 こんどはピンポン玉と消しゴムを 10 m ほどの高さから落としてみます。どちらが速く落ちると思いますか。

- ア) ピンポン玉
- イ) 消しゴム
- ウ) ほとんど同時

8

これらの問題は板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』の「第2話 真空とものの落ちる速さについての論争」の「4 ピンポン玉と消しゴムの落ちる速さくらべ」¹¹⁾に出てくる問題をそのまま使った。問題3の結果については、事前に10 mほどの塔の上から落として実験した時の写真を見せた。

1、変化を調べる

非常に速い落下運動の変化の様子を直接調べるのは難しいので、ここでは斜面をころがるボールの運動の様子を調べてみよう。



9

このカーテンレールの実験はなかなかむずかしい。生徒の前でボールをころがして見せるまではよいが、それを測定し、そのデータを直接つかって関数を求めることは多くの場合できない。特に0秒から1秒後の間の値が重要なのだが、その値にばらつきが大きい。そこで何らかの形で実測したデータからはなれて理想化したデータに移り、それをもとに授業を展開していくことになる。

カーテンレールの上でパチンコ玉をころがし、1秒後、2秒後、3秒後の位置を前の列の生徒に見てもらいマーカーでマークして、ものさしで測る。このときあまり厳密にやらないで

「大体こころへん」という感じでデータをとって表をつくる。その上で「今回は大体でしかできなかったからあまり正確でない。正確に測定した人たちのデータがあるので、そのデータをもとに、斜面のボールの運動の様子を調べてみよう」として、次の問題に移る。

この「 Δx 一定のとき、 Δy は1、3、5・・・と奇数列で変化する」という変化の法則がこの後の展開の基本となる。

次のデータはある斜面のボールの運動を記録したものである。このデータをもとに、斜面のボールの運動の様子を調べてみよう。

表 1

x 秒	0	1	2	3	4	
y cm	0	3 0	1 2 0	2 7 0	4 8 0	

問題 1 $\Delta x = 1$ として 1 秒おきの変化を調べてみよう。

$\Delta x =$

x 秒	0	1	2	3	4	
y cm	0	3 0	1 2 0	2 7 0	4 8 0	

$\Delta y =$

問題 2 3 0 c m を 1 目盛とした表をつくり、 $\Delta x = 1$ として Δy を求めなさい。

$\Delta x =$

x 秒	0	1	2	3	4	
y cm	0					

$\Delta y =$

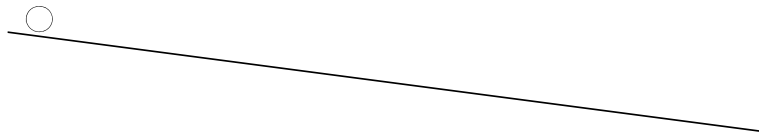
このように斜面の運動は Δx が一定のとき

Δy は

変化する。

問題 3 30 cmを1目盛としたときの変化の様子を下の図に書き入れなさい。

また、スタートからの位置の変化を図に書き入れなさい。



問題 4 それでは x 秒後の位置を y 目盛とするとき、この運動を式で表しなさい。

問題 5 地球上で物体を落下させ、 x 秒後の落下距離を y m とすると、およそ $y = 5x^2$ と表されることが知られている。

① の関数を表で表しなさい。

$\Delta x =$

x 秒	0	1	2	3	4	
y cm	0					

$\Delta y =$

② $x = 1$ のときの Δy の値を求めよ。

まとめ $y = ax^2$ と表される関数は $(0, 0)$ のところから $\Delta x = 1$ のとき Δy は と変化する。

1 1

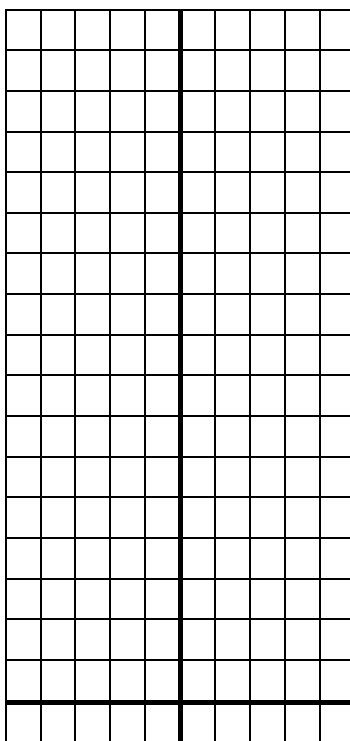
2、2次関数のグラフ

まず最も簡単な $y = x^2$ のグラフを書いてみよう。

x の負の値も含めたいろいろな値に対する y の値を求めてみる。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

問題 5 $y=x^2$ のグラフを書いてみよう。



$y=x^2$ のグラフは $(0, 0)$ の点からスタートして
 $\Delta x=1$ のとき、 Δy は 1, 3, 5...と変化する。
 さらに x の負の値に対しては、軸 $x=0$ で対称に点をとればよい。

$y=ax^2$ のグラフは $\Delta x=1$ のとき、 Δy は
 1, 3, 5...に変化係数 a をかけた a 、 $3a$ 、 $5a$...と変化する。

1 2

問題 6 次の関数のグラフを書きなさい。

① $y=2x^2$

② $y=3x^2$

③ $y=-x^2$

④ $y=-2x^2$

1 3

問題 7 ある斜面のボールの運動を観察すると以下の表のようになった。

$\Delta x =$

x 秒	0	1	2	3	4	5	6	
y m	0	1	4	9	16	25	36	

$\Delta y =$

① この運動を表す式を求めよ。

② この斜面の実験を繰り返していたとき、ぼんやりしていて、時計が動き出してから2秒後に3 mの位置からボールがスタートしてしまった。



同じ斜面なので Δx に対する Δy の変化の様子は同じということから、このときの表を完成しなさい。

$\Delta x =$

x 秒	2	3	4	5	
y m	3				

$\Delta y =$

③ スタート時点 (2, 3) から (x , y) までの増加分 $x-2$ 、 $y-3$ の表をつくりなさい。

$\Delta x =$

$(x-2)$	2				...	x	...
$(y-3)$	3				...	y	...

$\Delta y =$

④ このときの x と y の関係を表す式をつくりなさい。

$y-3 =$

1 4

一般に p 秒後に q m の位置からスタートした斜面の運動は

$$y - q = a(x - p)^2$$

と表すことが出来る。これを 2 次関数の標準形と呼ぶ。

練習 つぎのような 2 次関数の式をつくりなさい。

① $(2, 4)$ からスタートし、 $a = 3$

② $(-2, -3)$ からスタートし $a = -4$

問題 8 次の 2 次関数のグラフを書きなさい。

① $y - 1 = 2(x - 3)^2$ ② $y + 4 = (x - 5)^2$

練習 次の 2 次関数のグラフの頂点の座標をいいなさい。

① $y - 7 = 3(x - 4)^2$ ② $y + 2 = -5(x + 2)^2$

③ $y - 4 = (x + 5)^2$ ④ $y = 2(x - 4)^2$

注 9) ガリレオ・ガリレイ『新科学対話下』岩波文庫、1949 年、p.38。

10) この第 1 部の基本的な構想は須田勝彦「一次関数の指導」(数学教育協議会第 24 回全国大会発表レジメ、1976 年)に多くを依っている。

11) 板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』岩波書店、1972 年、p.110。

第3章 指数関数と e

3.1 問題状況

指数関数は自然や社会の量の変化の法則性の中核をなしている。バクテリアの増殖、人口の増加、音階、放射性元素の崩壊、光の減衰など実在の量の多くの例が指数的变化を示す。

指数関数とは何かという問いに対する答え方は3通り考えられる。

1° $y = a^x$ という形をした関数

2° 微分方程式 $f'(x) = f(x)$ $f(0) = 1$ の解となる関数

3° $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ の逆関数

1° のような式の形から入る関数指導に対し、すでに 1960 年代から「量の変化の基本的な法則から関数を導入すること・・・一様倍変化という量の変化の法則そのものから指数の拡張を導き、それが同時に指数関数の導入にもなるようにする」^{1 2)} ことが主張されてきた。

「われわれは、解析を予測の科学として考えたい。・・・決定論的な法則性から始めるべきだろう。それは予測の典型であって、

現状こうである（初期値） このままいくと（変化法則、微分方程式）

将来こうなるだろう（予測、微分方程式の特殊解）という形式である」^{1 3)}。

指数関数の場合、増加速度が現在量に比例するという自然な関係を表わす微分方程式の解となつて現れることが重要である。

例えば十分な栄養供給がなされている中でバクテリアを増殖させ、時刻 x におけるバクテリアの量を y とするとき、一つの関数

$$f: x \mapsto y \quad y = f(x)$$

が与えられる。このとき $f(x)$ の変化 $f(x_2) - f(x_1)$ と、初めの量 $f(x_1)$ との比

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)}$$

を $f(x)$ の相対変化と呼ぶ。すなわち相対変化 $r = \Delta y / y$

ここで Δx 一定のとき相対変化 r は一定である。すなわち $\Delta y = ry$ となり、変化量 Δy は現在量 y に比例している。

相対変化を経過時間で割れば、相対平均変化率

$$\frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{f(x_1)}$$

を得る。ここで、 x_1 x_2 を一つの時刻 x_0 に近づければ、相対平均変化率は

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

に近づく。これを相対変化率と呼ぶ。指数関数では相対変化率は時刻 x に関係なく一定である。

この値を k とすると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k$$

すなわち $f'(x) = kf(x)$ となって、増加速度 $f'(x)$ は現在量 $f(x)$ に比例している。

最も典型的な場合

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 & (\text{相对变化率 } 1) \text{ ①} \\ f(0) = 1 & (\text{初期值 } 1) \text{ ②} \end{array} \right.$$

この2つの条件を満たす関数を指数関数と名付け、 $\exp x$ で表わす¹⁴⁾。

3° の対数関数の逆関数とする定義は、多くの大学教養での微積分のテキストでは普通の行き方だが、高校における最初の指数関数の指導においてこの立場をとることは、積分の指導との順序の問題もあって難しい。

3.2 相対変化率と e の値

相対変化率 1 としたとき、 $x = 1$ における $f(x)$ の値（指数関数の底の値）を求めてみる。

区間 $[0, 1]$ を n 等分する。すなわち $\Delta x = \frac{1}{n}$

相対変化率 1 を近似的に考えると $\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = 1$ だから

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$$0 \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad 1$$

x

y

$$1 \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot f(1)$$

$$\Delta y = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1$$

$$\text{相対変化率は} \frac{\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}}{1} = 1$$

したがって $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$ となる。

次に $f\left(\frac{2}{n}\right)$ について

$$\frac{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}{f\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 \quad \text{だから}$$

$$f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

同様に続けると最後に

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

という近似値が得られる¹⁵⁾。ここで n を限りなく大きくしていくと

$$f(1) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

右辺は単調増加で有界であるから極限值が存在する。この値を e とすれば

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

こうして相対変化率一定という指数関数のもつ最も本質的な変化法則から、 e の値やその定義が自然に得られる。

3.3 授業プランの概略

1 節、指数の拡張

マイナスの指数と分数への指数の拡張を、主としてバクテリアの増殖を例に行なう。

2 節、倍率と相対変化

量 y_1 が y_2 に変化したとき $\frac{y_2}{y_1}$ の値を倍率、 $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$ の値を相対変化と呼ぶ。

3 節、指数関数

① バクテリアの増加を例に、指数関数を「 Δx 一定のとき相対変化 $\frac{\Delta y}{y}$ 一定の関数」と定義する。

② 次にバクテリア自身の増加の能力を調べるために、平均増加速度 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ と、相対平均増加速度

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y を考える。指数関数では Δx 一定ならば相対平均増加速度も一定である。

- ③ さらに、瞬間の増加速度を考える。ここでは $dx=0.001$ としておおまかな瞬間増加速度を

電卓によって求め、そのときの相対増加速度（相対変化率） $\frac{dy}{dx}$ を求めて行く。ここでも

$$\frac{dy}{dx} = k \quad (\text{一定})$$

だから、増加速度は現在量 y に比例する。例えば $y=2^x$ のとき相対増加速度は $dy/dx/y=0.69338746\cdots$ となる。

- ④ 相対増加速度（相対変化率）が 1 になる指数関数があれば、増加速度 dy/dx が y の値と一致する。相対変化率が 1 になる指数関数の倍率を、関数電卓を用いて捜せば、 e の値が求められる。

$\Delta x = \frac{1}{n}$ 、相対変化率 = 1 とおいてこの過程を式で表わせれば e の定義が得られる。

3.4 授業プランと授業過程

第 0 節 はじめに

むかし、豊田秀吉のけらいに曾呂利新左衛門という知恵者がいた。あるとき新左衛門がたいへんな手柄を立てたので、秀吉が「ほうびをとらずぞ、なんでもいうてみい」と聞くと、新左衛門は「それでは 1 日目には将棋盤のはじめのマス目に 1 粒、2 日目には次のマス目に 2 粒、3 日目には次のマス目に 4 粒・・・とつぎつぎに 2 倍にして、将棋盤のマス目の分だけいただきたい」とこたえたという。秀吉はそれを約束したが、いざやってみると・・・という話がつたわっている。

質問 いま、米でやるのは大変なので、はじめのマス目に 1 円玉 1 枚、次のマス目に 2 枚、その次のマス目に 4 枚・・・とつぎつぎに 2 倍にしていっていったとしたら、最後のマス目には大体何円分の 1 円玉がつまれることになるか、予想してしなさい。

ア、1 0 0 0 円くらい

イ、1 万円くらい

ウ、1 0 0 万円くらい

エ、1 億円くらい

オ、日本の国家予算くらい

ク、それ以上

1

この問題は指数現象が人間にとって予想しにくいということを印象づけるための問題である。教室に将棋盤と 1 円玉をたくさんもっていて実演する。3 2 枚くらいまでが限界である。結果

問題 2 1 時間で a 倍になるバクテリアがあったとして、下の対応表を完成させなさい。

- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	m	$m + 1$	$m + n$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓			
a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^m	a^{m+1}	a^{m+n}

まとめると

$$\begin{aligned} a^0 &= \\ a^{-n} &= \\ a^{m+n} &= \end{aligned}$$

練習

① $7^0 =$

② 3^{-2}

③ $2^{-5} =$

④ 10^{-3}

⑤ $2^3 \times 2^4 =$

⑥ $3^{-2} \times 3^5$

4

問題 3 大腸菌 O 1 5 7 は 1 時間に 1 0 倍もの割合で増えるという。 $\frac{1}{2}$ 時間後にはおよそもとの量の何倍になっているか。

	0	$\frac{1}{2}$	1
時間	↓	↓	↓
	10^0	$10^{\frac{1}{2}}$	10^1

問題 4 ① 1 時間で 1 0 倍に増えるとき $\frac{1}{3}$ 時間後にはおよそもとの量の何倍か。

② 1 時間で 1 0 倍に増えるとき $\frac{2}{3}$ 時間後にはおよそ元の量の何倍か。

5

問題 1 でマイナス指数を意味づける。「1 時間前 2 時間前にはどれだけの量になっていたか」を考えることで、自然に意味づけることが出来る。問題 2 で一般化する。問題 3 は分数指数の意味づけであり、「1 時間で 1 0 倍であれば、3 0 分ではどれだけか」を考える。

このように $a^{\frac{n}{m}}$ は m 乗すると a になる数を n 乗したものである。

一般に m 乗して a になる正の数を $\sqrt[m]{a}$ と表す。

この表し方をつかうと

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

練習 次の数を $\sqrt[m]{a^n}$ の形で表せ。

① $3^{\frac{2}{3}}$

② $12^{\frac{2}{3}}$

練習 次の値を求めよ。

① $8^{\frac{2}{3}}$

② $27^{\frac{1}{3}}$

③ $1000^{\frac{2}{3}}$

④ $16^{\frac{3}{4}}$

研究問題

音の高さはその振動数で決まる。もとの音に対し 2 倍の振動数の音が 1 オクターブ上の高さである。人間はオクターブ異なる音を同じ高さの音と感じる（男女の声の高さはほぼ 1 オクターブちがう）。

バッハの時代以降、この 1 オクターブを 12 に平均に分けた平均律と呼ばれる音階が主に使われている。

12 個の半音で 1 オクターブすなわち 2 倍になるのだから、半音 1 個で

$$\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} \text{ 倍になっている。}$$

関数電卓でこの値を求めると $2^{\frac{1}{12}} =$

この値を用いて下の表を完成しなさい。

音名	振動数
ラ	440
ラ#	
シ	
ド	
ド#	
レ	
レ#	
ミ	
ファ	
ファ#	
ソ	
ソ#	
ラ	880

7

この研究問題は小数指数を計算できる関数電卓が必要である。後にも使用する必要があるの
でここで練習させておきたい。授業では関数電卓を用意できなかったのも、パソコン演習室に
行って Windows のアクセサリーの関数電卓を使用した。

第2節 倍率と相対変化

問題5 ある研究所で乳酸菌の増え方を研究している。Aという種類の乳酸菌は1時間で80mgから100mgに増え、Bという種類の乳酸菌は1時間で150mgから180mgになった。

どちらの増え方が大きいか。

8

A 80mg → 100mg

B 150mg → 180mg

増え方の比べ方には3通りある。

ア 差でくらべる

A $100\text{mg} - 80\text{mg} = 20\text{mg}$

B $180\text{mg} - 150\text{mg} = 30\text{mg}$

イ 倍率でくらべる

A $100\text{mg} \div 80\text{mg} = 1.25$

B $180\text{mg} \div 150\text{mg} = 1.2$

ウ 相対変化でくらべる

A $(100\text{mg} - 80\text{mg}) \div 80\text{mg} = 0.25$

B $(180\text{mg} - 150\text{mg}) \div 150\text{mg} = 0.2$

ものごとの成長や上昇をくらべるとき、1.25倍になったとか25%増えたというように、もとの量に対する倍率や相対変化でくらべる。

量 y_1 が y_2 に変化したとき

$\frac{y_2}{y_1}$ を倍率

$\frac{y_2 - y_1}{y_1}$ を相対変化という。

9

問題6

① 150mgのバクテリアが210mgになった。相対変化を求めよ。また倍率を求めよ。

② バイトの時給が750円だったのが今年も750円だった。

③ 2500円のCDが2000円で売られていた。相対変化を求めよ。また倍率を求めよ。

相対変化は倍率から__を引いたものである。

(倍率は相対変化に__をたしたものである)

また 相対変化が正ならば _____
 相対変化が 0 ならば _____
 相対変化が負ならば _____

1 0

問題 5 には差で比べて疑問を感じない生徒も多い。倍率や相対変化で比べることが自然であることを強調しておきたい。問題 6 で相対変化が 0 やマイナスになる（減少）の例を考える。

練習問題

- ① 元金 1 2 0 0 0 0 円を定額貯金しておいたら、1 年後に 1 2 1 2 0 0 円になったという。利率（相対変化）を求めよ。
- ② 自動車ローンで 1 8 0 万円の車を買うと、1 年後に 2 1 6 万円を返さなくてはならない。利率（相対変化）を求めよ。
- ③ 海水面に 1 0 0 ルックスの光をあてると 1 0 m 下では 8 0 ルックスになるという。相対変化と倍率を求めよ。

1 1

第 3 節 指数関数

問題 7 2 0 分で 2 倍になるバクテリアについて次の問いに答えなさい。

- ① 1 時間で何倍になるか。
- ② 観察スタートの時 5 m g だったとして、次の対応表を完成しなさい。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
y				5			

- ③ x 時間後の重さ y m g をもとめる式をつくりなさい。

$y =$

1 2

問題 8 前頁の例について Δx (x の増加分) を 1 時間として相対変化を求めよ。

$\Delta x =$

	0	1	2	3	4
x 時間					
y m g					
	5	40	320	2560	20480

$\Delta y =$

$\frac{\Delta y}{y} =$

Δx が一定の時、倍率 a が一定（相対変化 r が一定）の関数を指数関数という。
 式で表せば

$y = c a^x$ または $y = c (1 + r)^x$

（ただし c は $x=0$ のときの y の値、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $r > -1$ 、 $r \neq 0$ ）

この例では $\frac{\Delta y}{y} = 7$ だから $\Delta y = 7y$ となって、

指数関数では y の変化量 Δy は、もとの量 y に比例している。

$\frac{\Delta y}{y} = k$ だから $\Delta y = ky$

指数関数では y の量が増えればそれに比例して増加量が増える。

1 3

前節で扱ったことがすでに指数関数の導入になっている。相対変化が一定（倍率が一定）の関数を指数関数と定義。とりわけ相対変化が一定であることから、 Δy が現在量 y に比例していることを確認する。

練習問題

1. 海にすむブソイドモナス菌は10分間で1回分裂するという。

- ① 1時間で何倍になるか。
- ② 最初にこの菌が3mgあったとして、次の表を完成させなさい。

$$\Delta x =$$

	0	1	2	3	4
x 時間					
y mg					
	3				

$$\Delta y =$$

$$\frac{\Delta y}{y} =$$

- ③ x 時間後の重さ y mgを求める式を書きなさい。

14

2. ナフタリンは空気中に放置しておくと、およそ1日で20%蒸発してなくなるという。

- ① 1日で何倍になるか。
- ② 最初に10gあったとして次の表を完成させなさい。

$$\Delta x =$$

	0	1	2	3	4
x 日					
y mg					
	10				

$$\Delta y =$$

$$\frac{\Delta y}{y} =$$

- ③ x 日後の重さ y gを求める式を書きなさい。

15

問題 9

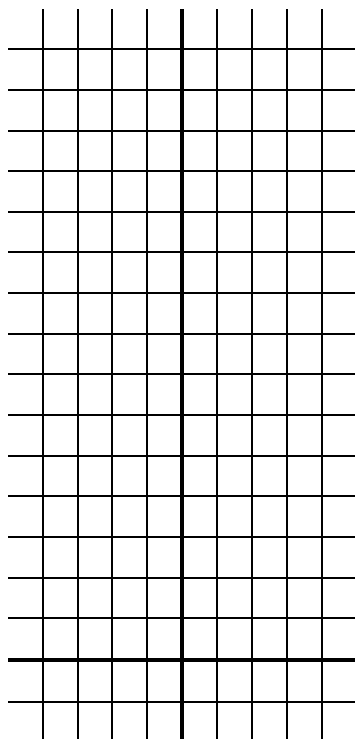
1. ある乳酸菌は 1 時間で 1 回分裂するという。

① 観察をスタートしたときにこの菌が 1 mg あったとして、次の表を完成しなさい。

x 時間	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y mg							1

② x 時間後の重さ y mg を求める式を書きなさい。

③ この指数関数のグラフを書きなさい。



問題 10

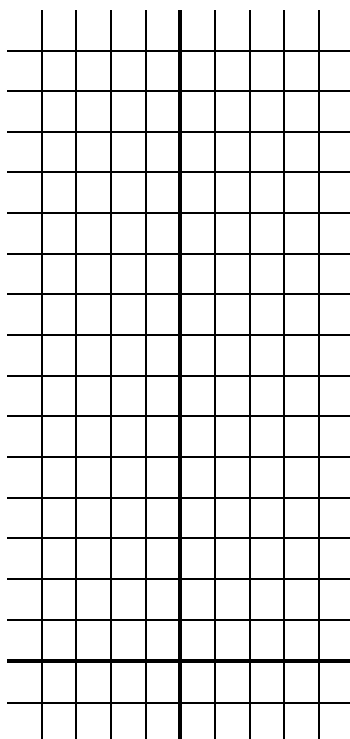
1. 放射性元素のラドンは 3 日で $\frac{1}{2}$ が崩壊して別の元素になる (半減期 3 日)。

① 観察をスタートしたときにラドンが 1 g あったとして、半減期 3 日を x の 1 期間として次の表を完成しなさい。

x 期間	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y g					1				

② x 期間後の重さ y を求める式を書きなさい。

③ この指数関数のグラフを書きなさい。



第4節 増加速度

大腸菌は1時間で8倍、プソイドモナス菌は10分で2倍、乳酸菌は15分で2倍等々、そこでバクテリアの増加速度はその種類によって異なる。そこで、バクテリアの増加する能力をくらべるために、まずバクテリアの

平均増加速度 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を求めてみる。

またこれをもとの量 y でわった、

相対平均変化率 $\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y}$ を求めてみる。

問題11 1時間で4倍になる乳酸菌が1mgあったとき、 $\Delta x = 1$ として、次の表を完成させなさい。

	$\Delta x =$			
x 時間	0	1	2	3
y mg	1	4	16	64
	$\Delta y =$			
平均増加速度	$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$			
相対平均変化率	$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y} =$			

指数関数では Δx 一定ならば相対平均変化率が一定である。

すなわち 平均増加速度が y の量に 比例する。

$$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y} = k \text{ (一定)} \text{ すなわち } \frac{\Delta y}{\Delta x} = k y$$

18

この節は小数指数の計算ができる関数電卓を、できれば人数分用意して進めたい。

問題11でバクテリア自身のもっている増加の能力をしらべるために、バクテリアの

平均増加速度 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ と 相対平均変化率 $\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y}$ を考える。

相対平均変化率では同じ指数関数でも Δx によって値が異なることから、さらに瞬間の増加速度を y と比べることを考える。

ここでは $dx=0.001$ として、おおまかな増加速度を求め、そのときの相対変化率を求めてみる。

ここで相対変化率が 1 になる指数関数があれば

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 1 \quad \text{だから} \quad \frac{dy}{dx} = y \quad \text{となって}$$

増加速度が y の値と一致して大変計算が簡単になる。相対変化率が 1 になる指数関数の倍率はおよそ何倍であればよいかを関数電卓を用いてさがす。

練習 次のような 1 時間で 3 倍になるバクテリアの相対平均変化率を求めなさい。

	$\Delta x =$			
x 時間	0	1	2	3
y m g	1	3	9	27
	$\Delta y =$			
平均増加速度	$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$			
相対平均変化率	$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y} =$			

平均増加速度は Δx の期間（この場合 1 時間）の平均の増加速度であるから、その期間の間でも速度は変化している。そこで平均ではなく本当の速度、瞬間増加速度を求めてみたい。

質問 瞬間増加速度を求めるにはどうしたらよいと思うか。

瞬間の増加速度を求めるためには Δx を無限に小さくして無限小 dx に対する y の増加分 dy を求め、 $\frac{dy}{dx}$ を求めてやれば良い。

ここでは無限小のかわりに $dx = 0.001 \left(\frac{1}{1000} \right)$ として、おおまかな増加速度を求め、それをもとの量 y でわった **相対変化率** $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$ を求めてみよう。

問題 1 2 1 時間で 2 倍になる乳酸菌 1 m g について、 $dx = 0.001$ として増加速度と相対変化率を求めよ。

$dx =$

x 時間	0	0.001	0.002	……	1
y m g	1	2 ^{0.001}	2 ^{0.002}	……	2

$dy =$

増加速度 $\frac{dy}{dx} =$

相対変化率 $\frac{\frac{dy}{dx}}{y} =$

ここでも $\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = k$ (一定) だから $\frac{dy}{dx} = k y$ となって

増加速度 $\frac{dy}{dx}$ は y に比例する。

$\frac{dy}{dx}$
 相対増加速度 $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$ が 1 になる指数関数があれば、

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 1 \quad \text{だから} \quad \frac{dy}{dx} = y \text{ となって}$$

増加速度が y の量と一致する

$\frac{dy}{dx}$
 問題 1 3 相対変化 $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$ が 1 になる指数関数の倍率はおよそ何倍であればよいか。

相対変化率はどこで計算しても一定なので、簡単のため $x = 0$ のところで計算すれば良い。

x 時間	0	0.001		1
y mg	1	() ^{0.001}		()

2 1

授業では「2. 7 が正解なの、2. 8 が正解なの？」という質問が出る。さらにその下のケタの値を捜してみることを指示する。

ここまで $dx=0.001$ としてきたが dx を $\frac{1}{n}$ とおくことによって、 e を求める式を導く。最後に e の詳しい値に触れる。

授業では e の値を 2. 718281828・・・と与えたときに、「その値では 1 にならない」との指摘が生徒から出た。この値を 0.001 乗し、さきの計算で相対変化率を求めたとき 1 にならないことを指摘したもので、自分から e を底として相対変化率を求めてみたことを示している。

およそ 2.7 ちょつとで相対変化率が 1

この相対変化率がちょうど 1 になる指数関数の倍率を e で表す。

e の求め方

e の正確な値を求める式をつくってみよう。

これまでは $dx = 0.001 = \frac{1}{1000}$ としてきたが、ここで $dx = \frac{1}{n}$ とおくと

$$dx = \frac{1}{n}$$

x 時間	0	$\frac{1}{n}$		1
--------	---	---------------	-------	---

y mg	1	$e^{\frac{1}{n}}$		e
--------	---	-------------------	-------	-----

$$dy =$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

相対変化率が 1 だから

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

変形すると $e^{\frac{1}{n}} =$

両辺を n 乗すると

$$e =$$

この n を無限大にすると e の値が得られる。 $e = 2.718281828459 \cdots$

2 2

- 注 1 2) 宮本敏雄『数学教育現代化の基礎 3 関数・空間』(遠山啓 銀林浩編)、国土社、1971 年 p.21。
- 1 3) 山野照『数学教育現代化の基礎 3 関数・空間』(遠山啓 銀林浩編)、国土社、1971 年 p.55。
- 1 4) 田村二郎『微積分読本』、岩波書店、1975 年、p.176～p.178 の記述を参考にした。記号等はこのプランにあわせて変えてある。
- 1 5) e を求めるこうした考え方にはっきり言及しているものとしては溝畑茂『数学解析』上 (p.54～p.56) がある。

第4章 指数現象のメガネとしての対数関数

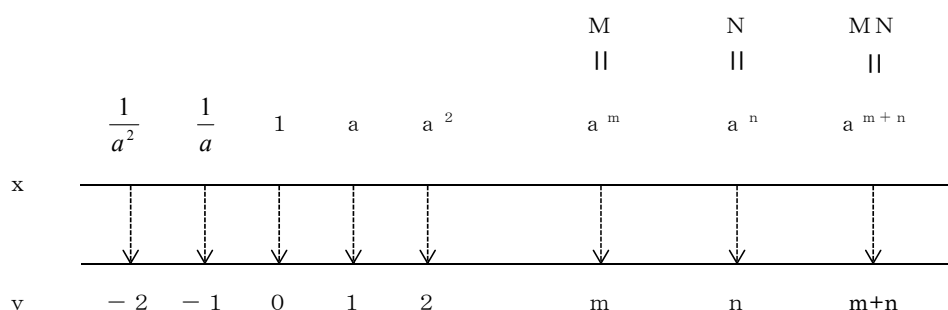
4.1 問題状況

教科書にあるような、対数の $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ という定義と指数表現の対数表現への書き換えによる導入は、対数関数の本来の意味にもとづくものになっていない。対数関数は、dB（デシベル）、マグニチュード、PH（ペーハー）、星の等級など、自然や社会のいろいろな量の数値化でよく用いられる。そこでは「対数は＜自然＞の倍の法則を＜人間＞の比例の法則にうつすメガネの役割をはた」¹⁶⁾している。

対数関数は $y = ca^x$ という指数関数を1次関数に移す。この対数関数の最も基本的な性質が、人間にとって認識しにくく予想もしにくい指数的变化を、人間にとって自然な比例の世界へ移し線形性に基づく予測を可能にする。指数的变化と比例的变化の対応こそが対数関数の本来の意味となる。

4.2 等比数列と等差数列の対応

いま下の図のような等比数列と等差数列との対応を考え、この対応の働きを $\log_a$ と定義する。



このMとNのyへの対応から

$$\text{I} \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

は明らかである。

また $\frac{M}{N} = M \times \frac{1}{N}$ だから

$$\text{II} \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

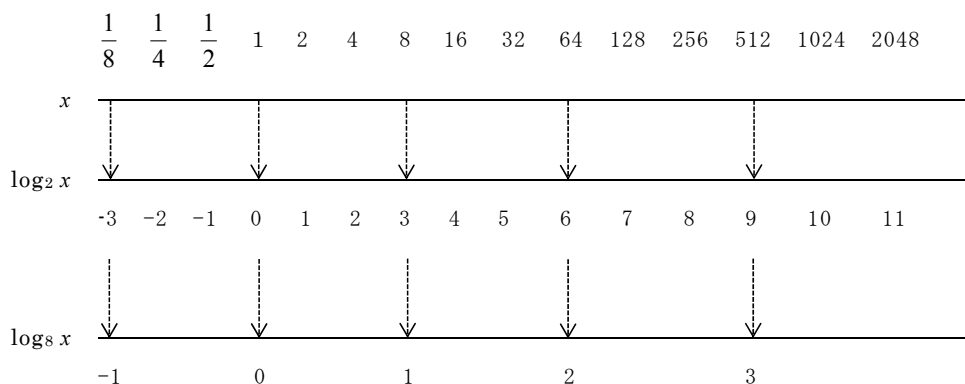
となる。さらにIより、

$$\begin{aligned} \log_a M^n &= \log_a (M \times M \times M \cdots M) \\ &= \log_a M + \log_a M + \log_a M + \cdots + \log_a M \\ &= n \log_a M \end{aligned} \quad \text{だから、}$$

$$\text{III} \quad \log_a M^n = n \log_a M$$

が成り立つ。

底の異なる対数関数を指数的变化に以下のように対応させると、2つの対数関数が互いに定数倍であることは明らかである。



このように、指数的变化 x の底の異なる2つの対数関数が

$$\log_a x = A \log_b x$$

という形で比例している。比例定数は $\log_b a$ の逆数になる。これが底の変換公式である。これによって対数関数はひとつ標準となる底に対するものが与えられると他はすべてその定数倍で計算できる。このような標準的な底として e や 10 が選ばれる。

また、 $y = c a^x$ という指数現象があるとき、その両辺を対数で見ると、

$$\log y = (\log a) x + \log c$$

$Y = \log y$ とおけば、

$$Y = Ax + C$$

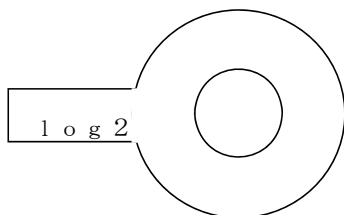
という形の1次関数となる。それゆえ、 y 軸方向を対数目盛にとったとき、指数的变化のグラフは直線になる。この関係では底の変換は直線の傾きの変化としてあらわれる。この比例関係を簡単に見えるようにするために、あらかじめ y 軸を対数目盛にした片対数グラフ用紙がある。

この片対数グラフにデータをプロットすることによって現象の法則性が目に見えるようになり、将来の予測も可能となる。

4.3 授業プランの概略

第1節 指数現象と対数

対数を＜指数現象を見るためのメガネ＞として全体を通して扱う。下の図のように厚紙を切りぬいたメガネで対数を導入する。



第2節 対数表

等比数列と等差数列の対応をもとに対数の計算規則をみちびく。

第3節 底の変換

底の異なる2つの対数関数が比例していることから底の変換を意味づける。

第4節 片対数グラフ

指数的変化のグラフのy軸方向を対数目盛にとり、直線になることを確認する。片対数グラフ用紙にデータをプロットすることによって現象を分析する。

4.4 授業プランと授業過程

第1節 指数現象と対数

質問 新聞紙を半分、そのまた半分・・・と折りたたんでいく。100回折りたためたら、どのくらいの高さになるか。

- 予想 ア 人間の背のたかさ
イ 校舎の高さくらい
ウ 東京タワーの高さくらい
エ 月までとどく
カ 宇宙のはて

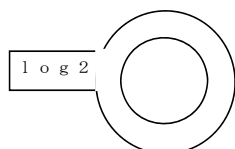
質問 いま1分間で2倍になるバクテリアがコップの中にある。1時間後にコップがバクテリアでいっぱいになったとすると、コップの半分になるのはいまから何分後か。

1

指数現象が人間にとってわかりにくく予想もしにくいということを明確にするための問題である。新聞紙を持って行って説明する。生徒の予想はイウエが多いが、カを選ぶ生徒も各クラスに2, 3人いる。解答は $2^{10} \approx 10^3$ を用いて計算する。「百億光年だからほとんど宇宙のはて、ただし新聞紙の1辺の方も原子の直径よりもずっと小さくなる」。大抵の場合、生徒は大変驚く。

このように人間にとって指数現象というものは大変わかりにくく予想もしにくい。そこで人間は指数現象を見る便利なメガネとして対数 $\log$ というものを発明した（発明した人はネプアという人で1614年のこと）。

$\log$ のメガネ



のメガネで32を見ると 5に見える。
4を見ると 2に見える。

では、16を見ると
64を見ると
2を見ると

log 3

のメガネで9を見ると
27を見ると
81を見ると

log a のメガネの働きは

問題 次の値を求めよ。

① $\log_2 8$

② $\log_3 243$

③ $\log_{10} 10000$

④ $\log_5 125$

⑤ $\log_3 3$

⑥ $\log_7 1$

⑦ $\log_3 \frac{1}{27}$

⑧ $\log_2 \frac{1}{32}$

2

授業には、四つ切画用紙を虫メガネの形に切り、柄の部分に $\log_2 \log_3 \log_{10}$ と書いたものを用意し、「この不思議なメガネで見ると・・・」などと進める。初めは「全然みえない」「見えるわけないべや」などと言っている生徒も何題か取り組むと＜底の何乗になっているか＞を考えればよいことに気がついていく。

第2節 対数表

$x = 2^n$ に対応させて y として $\log_2 \bigcirc$ のメガネで見える値を書きなさい。

	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
x															
$\log_2 x$															

このような表を2を底とする対数表という。

対数表を使うと、 x のかけ算を $\log_2$ どうしのたし算で計算できる。このことが電卓のない時代に計算を簡単にするのに大変役に立ち、天文学者の寿命をのばしたと言われている。

- 128 -

例えば $8 \times 16 =$ を求める。
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$
 $\log_2$ で見ると $3 + 4 = 7$
 わり算はどうか
 $256 \div 32 =$ を求める。
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$
 $8 - 5 = 3$

問題 対数表をつかって、次の計算をしなさい。

① 64×32 ② 16×16 ③ $2048 \div 128$
 ④ $512 \times \frac{1}{16}$ ⑤ $4 \div \frac{1}{8}$ ⑥ $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

3

この真数—対数の対応表の扱いがこの後の展開の基盤となる。積が和に対応していること、それによって計算が簡単になることを生徒にある種の驚きをもって伝えたい。授業では「先生すごいね。誰が考えたの?」「これなら私でも計算できそう」など反応も良く楽しく進められた。

対数の計算規則

$\log_2$ の対数表で行ったことを $\log_a$ の対数表をつかって一般化する。

					M	N	MN	
	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^m	a^n	a^{m+n}
x								
y								
	- 2	- 1	0	1	2	m	n	m+n
						$\log_a M$	$\log_a N$	$\log_a MN$

x のかけ算は y のたし算に対応しているから

$$\text{I} \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

x の割り算は y の引き算に対応しているから

$$\text{II} \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

また $\log_a M^n = \log_a (M \times M \times M \times \cdots \times M)$

$$= \log_a M + \log_a M + \log_a M + \cdots + \log_a M \quad \text{だから}$$

$$\text{III} \quad \log_a M^n = n \log_a M$$

問題 次の値を求めなさい。

① $\log_2 (512 \cdot 64)$

② $\log_2 (1024 \div 32)$

③ $\log_3 (27 \cdot 243)$

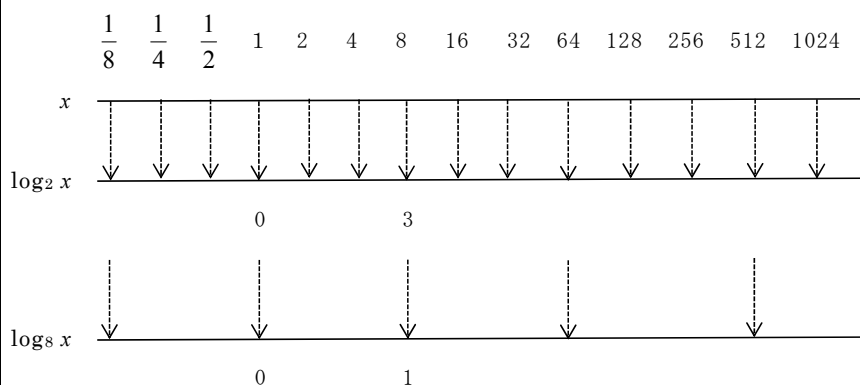
④ $\log_2 16^3$

4

前頁で扱ったことの一般化であるということで具体的な例を示しながら進める。この後問題集などもつかって $\log$ の計算練習を補う。

第3節 底の変換

$x = 2^n$ を、底の異なる $\log_2 \bigcirc$ のメガネと $\log_8 \bigcirc$ のメガネで見た対数表をつくると



これを見ると底の異なる $\log$ のメガネで見た対数表どうしは互いに比例している。この関係をつかえば $\log_8 x$ のあいている値も簡単に求められる。

対数表から、 $\log_8 x$ の値は $\log_2 x$ の値に $\frac{1}{3}$ かければよい。この 3 という値は $\log_2 \bigcirc$ のメガネで 8 を見た値になっている。つまり

$$\log_8 x = \frac{1}{\log_2 8} \times \log_2 x$$

という関係になっている。

一般に底を a から b に変えるためには

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \times \log_b x$$

とすればよい。つまり

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

これを底の変換公式という。

この関係をつかえば、ひとつくわしい対数表があれば、他の底の対数の値も求めることができる。

例 いま底が 2 の対数表が与えられているとすると

$$\log_8 256 = \underline{\hspace{2cm}}$$

5

ひとつの指数現象に対して底の異なる 2 つの対数表を対応させることによって、対数どうしが比例していることが簡単に確かめられる。このことが底の変換の自然な意味づけとなる。

$\log_a x$ と $\log_b x$ とが

$$\log_a x = A \log_b x$$

という形で比例していて、このときの比例定数 A が $\log_b a$ の逆数になるのだから、底の変換公式は

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x$$

と表すのが、よりその本質的な関係を表現している¹⁷⁾。

問題 底の変換公式を用いて、次の対数の値を求めよ。

① $\log_8 1024$

② $\log_4 8$

③ $\log_{16} 128$

④ $\log_9 243$

世の中ではこの一つの詳しい対数表として 10 を底とする $\log_{10} x$ の対数表がよく用いられる。この 10 を底とする対数には常用対数という名前がついている。教科書の後ろのページに小数点以下 4 ケタの常用対数表がのっている。

6

底の変換によって自由に底が選択できることを前提として、実用上便利な底として 10 が選ばれる。授業ではこの後、常用対数の計算練習と底の変換を用いて常用対数表をつかう応用問題を扱った。

第 4 節 片対数グラフ

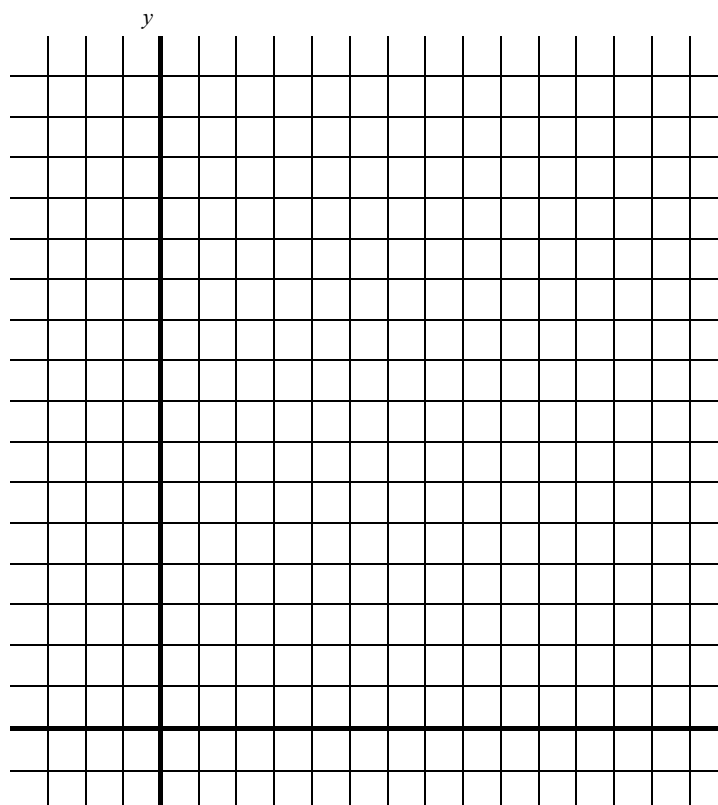
1 時間で 2 倍になるバクテリア 1 g がある。 x 時間後の重さを y g とするとその変化は $y = 2^x$ と表すことができる。

作業 1 表の $y = 2^x$ の欄に数を書き入れ、下のグラフ用紙に $y = 2^x$ のグラフを書きなさい。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = 2^x$											
$Y = \log_{10} y$											
$Y' = \log_2 y$											

作業2 表の Y の欄に、 y を $\log_{10}$ のメガネで見た値を書き入れ、
 $Y = \log_{10} y$ のグラフを書きなさい。

作業3 表の Y' の欄に、 y を $\log_2$ のメガネで見た値を書き入れ、
 $Y' = \log_2 y$ のグラフを書きなさい。



このように一定の倍率で変化する指数現象を $\log$ のメガネで見ると底にかかわらずそのグラフは になる。

そこで $\log$ を使うと指数現象の将来の予測が簡単になり、また非常に大きな量になるものを扱いやすくなる。例えば音の強さはそのエネルギーで表され非常に大きな数になる。音の強さの単位として用いられる dB は音のエネルギーを $\log_{10}$ のメガネで見た単位である。

7

作業2は y の値の対数 Y を同一のグラフ上にプロットするということで、生徒が混乱しやすい。 y のグラフ上の点に値を書き込み、その値を $\log_{10}$ で見た値をとるとわかりやすい。作業3は 2^x の値を $\log_2$ で見るということで x の値を等しくなるのは当然なのだが、指数現象のメガ

ネとしての対数は本質的に底によらない（底を変えても直線の傾きが変わるだけ）ということ
を確かめるためには、底の異なる対数でグラフをつくってみる必要がある。

いちいち対数表からグラフをつくるのは大変なので、あらかじめ縦軸 Y を
対数目盛でめもってあるグラフ用紙が売っている。これを片対数グラフ用紙あ
るいは半対数グラフ用紙と呼ぶ。

作業 4 片対数グラフ用紙に $y = 2^x$ のグラフを書きなさい。

社会現象では、物価指数とか経済の成長率などのように、数値の変化よりも
倍率の変化が問題になることが多い。

作業 5 次の表は 1955 年以降の日本の自動車生産台数の表である。この変化
の様子を片対数グラフに書いて、日本の自動車生産台数の成長の変化を
調べなさい。

年	生産台数（万）	年	生産台数(万)
1955	7	72	629
56	11	73	708
57	18	74	655
58	19	1975	694
59	26	76	784
1960	48	77	852
61	81	78	927
62	99	79	964
63	128	1980	1104
64	170	81	1118
1965	187	82	1073
66	229	83	1111
67	315	84	1147
68	409	1985	1227
69	468	86	1226
1970	523	87	1225
71	581	…	…

片対数グラフ作成の問題としては、世界の人口などのようなまっすぐなグラフになる例より
は、この例のように途中で大きく変化している例の方がグラフ作成の面白さがある¹⁸⁾。

注 16) 森毅『数の現象学』朝日新聞社、1978年、112ページ。

17) 須田勝彦・氏家英夫『量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導』（北海道数学教育協議会、2000年）、60ページ。まったくおなじ叙述が、江見圭司他の『基礎数学のⅠⅡⅢ』（共立出版、2005年）の207ページに見られる。

18) 片対数グラフの例として日本の自動車の生産台数のデータを使うことについては、板倉聖宣・井藤伸比古『対数グラフの世界』（仮説社）を参考にした。データは『日本国勢図会』（国勢社）の巻末の長期統計のもので千の位で四捨五入してある。

おわりに

本稿執筆のきっかけは、雑誌『数学教室』から依頼されて「量から微積分へ」¹⁹⁾と題して3回の連載の原稿を書いたことである。そこでは「量と数」から「微積分」まで関数指導の授業プランの概略を紹介したが、ページ数の制限もあり授業過程を再現可能な形で詳しく述べることができなかった。そこで別の形で、量から微積分まで、現在提案できる授業プランの全体をまとめて展開したいと考えた。しかし本稿では微積分の前段階までしか展開できなかった。微積分の指導についてはまた別の機会に提案したい。

本稿の第3章第4章で扱われている等差一等比の対応による指数関数・対数関数の指導の基本的な考え方、とりわけ対数表どうしの比例が底の変換の基礎であるとの見方は、北大教育方法研究室数学教育グループの中心であった須田勝彦氏の教示によるものである。

注 19) 氏家英夫「連載 私の授業 量から微積分へ 1～3」（『数学教室』2014年1月号3月号4月号、国土社）