HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜBER PROJEKTIVE DIFFERENTIALGEOMETRIE VI. DIE FLACHENTHEORIE IM R3 UND IHRE BEZIEHUNG MIT DERSELBEN VON FUBINI
Author(s)	Kawaguchi, Akitsugu
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 1(2), 97-155
Issue Date	1931
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58077
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFS_HIU_v1n2-97.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

ÜBER PROJEKTIVE DIFFERENTIALGEOMETRIE VI. DIE FLÄCHENTHEORIE IM R_3 UND IHRE BEZIEHUNG MIT DERSELBEN VON FUBINI

Von

Akitsugu KAWAGUCHI

INHALT

PAGE

Einleitung 97
§ 1. LIEsche Flächen zweiter Ordnung 99
§ 2. Eine Kennzeichnung des LIEschen F_2-Systems 101
§ 3. Die Bedingungen für das LIEsche F_2-System 105
§ 4. Einige Bemerkungen zu den Bedingungen 114
§ 5. Die Bedingungen für das DARBOUXsche F_2-System . . 117
§ 6. Die Differentialformen des LIEschen F_2-Systems . . . 124
§ 7. Die Ableitungsgleichungen 130
§ 8. Die Integrabilitätsbedingungen 135
§ 9. Das System der fundamentalen Grundaffinoren . . . 141
§10. Beziehung mit der FUBINIschen Theorie 145

EINLEITUNG

In einer der vorangehenden Abhandlungen[1] ist die Theorie m-dimensionaler Mannigfaltigkeit M_m von Hyperflächen zweiter Ordnung F_2 im R_n begründet worden. Hier möchte ich mich mit der Untersuchung eines speziellen Fall, die Flächentheorie im R_3, beschäftigen, wobei wir die LIEschen Flächen zweiter Ordnung der Fläche zu grunde legen wollen, d. h. mit anderen Worten, wir wollen die Flächen als einen Umhüllungsmantel der LIEschen Flächen zweiter Ordnung ansehen.

(1) A. KAWAGUCHI: Über projektive Differentialgeometrie V. Grundlagen der Theorie m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten von Hyperflächen zweiter Ordnung im n-dimensionalen Raume, Tôhoku Mathematical Journal, Bd. 30 (1929), S. 257–277. Diese Arbeit wird im folgenden mit P. G. V zitiert.

Man wird in der jetzigen Arbeit ohne weiteres sehen, dass meine Theorie der Hyperflächen zweiter Ordnung[1] mit der FUBINIschen Theorie über die projektive Differentialgeometrie[2] in enger Beziehung steht, und ich glaube die Beziehung zwischen den beiden Theorien deutlich klarlegen zu können.

Die Theorie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung im projektiven dreidimensionalen Raume hat G. THOMSEN schon durch eine sehr schöne Methode behandelt[3]. Seine Theorie ist aber liniengeometrisch und nicht eigentlich F_2-geometrisch, mit anderen Worten, er hat sie in Linienkoordinaten untersucht und nicht in Koordinaten von Flächen zweiter Ordnung. Um einen Vergleich zu gebrauchen, behandelt man die windschiefen Flächen in Punktkoordinaten und nicht in Linienkoordinaten. Er hat auch dabei eine Fläche als ein System von LIEschen Flächen zweiter Ordnung betrachtet, natürlich in Linienkoordinaten. In dieser Abhandlung möchte ich die Theorie der Flächen von derselben Betrachtung behandeln, aber in Koordinaten von Flächen zweiter Ordnung, welche ich in P.G.V eingeführt habe.

Zuerst werden die LIEschen Flächen zweiter Ordnung in § 1 angeführt und dann eine Kennzeichnung des LIEschen F_2-Systems in § 2 gebracht. In § 3 stellen wir die Bedingung in Koordinaten von Flächen zweiter Ordnung vor, dass ein System von Flächen zweiter Ordnung das von LIEschen einer Fläche ist. In Linienkoordinaten hat G. THOMSEN schon dieselbe Bedingung in seiner oben zitierten Arbeit dargestellt.

Nach einigen Bemerkungen zur Bedingung in § 4, fügen wir in § 5 die Bedingung hinzu, dass ein System von Flächen zweiter Ordnung von DARBOUXschen einer Fläche besteht. Diese Bedingung

(1) A. KAWAGUCHI: Über projektive Differentialgeometrie I–V, Tôhoku Mathematical Journal, Bde. 28 (1927), 29 (1928), 30 (1929).

(2) FUBINI-ČECH: Geometria proiettiva differenziale, Bde. I, II, Bologna, 1926–27.

(3) G. THOMSEN: Über eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung, Hamburger Abhandlungen, Bd. 4 (1925), S. 232–266.

verändert sich gemäss der Bedingung für das System der LIEschen Flächen zweiter Ordnung, wenn wir einige Beschränkungen für sie hinzufügen.

Die Differentialformen des Systems der LIEschen Flächen zweiter Ordnung werden erst in § 6 eingeführt. In § 7 erhalten wir die Ableitungsgleichungen und in § 8 ihre Integrabilitätsbedingungen. Es gibt viele projektiv invariante Differentialformen (Affinoren), aber von diesen sind nur drei fundamentale, zwei der zweiten Stufe und eine der dritten Stufe, wie wir in § 9 erkennen werden.

Schliesslich werden wir in § 10 alle invarianten Affinoren sowie die anderen Grössen in Notationen der FUBINIschen Theorie vermerken, um die Beziehung zwischen unserer Theorie und derselben von FUBINI deutlich zu gestalten.

§ 1. LIESCHE FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

Betrachten wir eine auf ihre Asymptotenlinien bezogene Fläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ im R_3 in homogenen Punktkoordinaten und auf ihr eine Asymptotenlinie $u^2 = \text{konst.}$ etwa $= k$. Dann bilden die Geraden durch die Punkte $\mathfrak{x}(u^1, k)$ mit der Richtung $\left\{\frac{\partial}{\partial u^2}\mathfrak{x}(u^1, u^2)\right\}_{u^2 = k}$ eine geradlinige Fläche W. Durch drei benachbarte Erzeugenden von W ist eine Fläche zweiter Ordnung F_2 bestimmt. Wenn man in dieser Überlegung die Parameterlinien vertauscht, erhalten wir auch dieselbe F_2, die durch S. LIE bereits 1878[1] eingeführt worden und nach seinem Namen benannt ist. In dieser Weise ist jedem Flächenpunkt eine und nur eine LIEsche F_2 zugeordnet.

Wir nehmen nun einfachheitshalber die Punktkoordinaten der Fläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ als die projektiv normierten in Sinne von FUBINI[2] an und die Koordinatentetraeder derart, dass das einen betreffenden Flächenpunkt $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$, zwei auf der Tangentenebene der Fläche an $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ liegende Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ und der erste Normalenpunkt

(1) S. LIE: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3 (1922), S. 718 (Brief an F. KLEIN).
(2) FUBINI-ČECH, a. a. O., Bd. I, S. 85.

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{2} g^{rs} \mathfrak{x}_{rs} \tag{1}$$

zu seinen vier Eckpunkten besitzt, wobei

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1} \mathfrak{x}(u^1, u^2) , \qquad \mathfrak{x}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} \mathfrak{x}(u^1, u^2)$$

und g^{rs} die kontravarianten fundamentalen quadratischen Grössen von FUBINI[1] bedeuten. Unter $\mathfrak{x}_{rs}$ versteht man dabei die zweiten kovarianten Ableitungen von $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ in bezug auf g_{rs} unter der RIEMANNschen Übertragung.

Die LIEsche F_2 an einem Flächenpunkte $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ ist in bezug auf das oben eingeführte begleitende Koordinatentetraeder durch die Gleichung

$$2X_3X_4 + \Omega X_4^2 - \sum_{r,s}^{1,2} g_{rs} X_r X_s = 0 \tag{2}$$

mit den laufenden Koordinaten X^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) bestimmt[2], wobei

$$\Omega = \frac{1}{2} g^{rs} (\log G)_{rs} + 1 . \tag{3}$$

Wir setzen dabei ferner voraus, dass die Determinante von g_{rs}

$$G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0 .$$

Diese Voraussetzung ist keine so wichtige Beschränkung in unserem Falle, da wir durch eine kleine Modifizierung ganz ähnlich die Theorie entwickeln können, wenn $G < 0$ ist. Wir bemerken noch, dass der betreffende Punkt $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ in neuen Koordinaten X_α mit $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, $X_4 = 1$ dargestellt ist.

Es sei ein zweigliedriges F_2-System in die homogenen Punktkoordinaten x_α durch die Gleichung

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1,4} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0 \tag{4}$$

(1) FUBINI bezeichnet diese Grössen in seinen Lehrbüchern, a. a. O., mit A_{rs} oder a^{rs}.

(2) Siehe z. B. FUBINI-ČECH, a. a. O., Bd. 1, Kap. 3.

gegeben, wobei die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ eindeutige, stetige und genügend oft differenzierbare Funktionen von zwei Parametern u^1 und u^2 in einem Bereiche sind, d.h.

$$(5) \qquad a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(u^1, u^2) \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 .$$

In welcher Form werden dann die Bedingungen dafür aufgestellt, dass das F_2-System (5) aus den LIEschen F_2 einer Fläche besteht? In seiner Arbeit hat G. THOMSEN den folgenden Satz bewiesen[1]:

Gibt es in einem F_2-System zu jeder F_2 zwei Fortschreitungsrichtungen, für die sie sich mit der benachbarten F_2 längs einer ihrer Erzeugenden berührt, und gehören diese beiden Berührungsgeraden verschiedenen Regelscharen an, so besteht das System aus dem LIE*schen F_2 einer Fläche.*

Und auch er hat eine analytische Bedingungen erhalten, aber sie ist in Linienkoordinaten und nicht in den Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$. Wir werden daher in § 3 die Bedingungen in $a_{\alpha\beta}$ diskutieren.

§ 2. EINE KENNZEICHNUNG DES LIESCHEN F_2-SYSTEMS.

Nun wollen wir eine neue Kennzeichnung des LIEschen F_2-Systems vornehmen. Nimmt man ein Kurvennetz $u = u(\alpha, \alpha')$, $v = v(\alpha, \alpha')$ mit Parametern α und α' auf einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, die eine solche Eigenschaft hat, dass durch jeden Flächenpunkt je ein einziges Kurvenpaar $\alpha =$ konst. und $\alpha' =$ konst. des Netzes vorläuft, wobei $u =$ konst. und $v =$ konst. die Asymptotenlinien der Fläche auszeichen, und betrachtet auch längs jeder Kurve $\alpha =$ konst. bezw. $\alpha' =$ konst. die Tangenten der Asymptotenlinien einer Schar $v =$ konst. bezw. $u =$ konst. Diese Tangenten bestimmen dann eine geradlinige Fläche G bezw. G' und ihre drei benachbarten Erzeugenden bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung W bezw. W'. Somit kann man zu jedem Flächenpunkt je eine W bezw. W' entsprechen lassen. Daraus er-

(1) G. THOMSEN, a. a. O.

gibt sich die Kennzeichnung des LIEschen F_2-Systems folgendermassen:

Stimmen W und W' völlig überein, dann fällt die Kurvenschar $\alpha = konst.$ bezw. $\alpha' = konst.$ mit der Schar der Asymptotenlinien $u = konst.$ bezw. $v = konst.$ zusammen und folglich sind alle W die LIE*schen F_2 der Fläche.*

Um den Satz zu beweisen, stellen wir zuerst die geradlinige Fläche G' durch zwei Parameter α und p dar:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(u, v) + p\mathfrak{x}_v(u, v) \ .$$

Die Asymptoten dieser Fläche längs der Erzeugenden:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(u_0, v_0) + p\mathfrak{x}_v(u_0, v_0) \ ,$$

die von dieser Erzeugenden verschieden sind, bilden offenbar eine Schar von geradlinigen Erzeugenden der W'. Wir stellen daher die Differentialgleichung der zweiten Schar von Asymptotenlinien von G' auf:

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{x}}_p = \mathfrak{x}_v \ , \\
&\bar{\mathfrak{x}}_\alpha = \mathfrak{x}_\alpha + p\mathfrak{x}_{v\alpha} = \mathfrak{x}_u u' + \mathfrak{x}_v v' + p\mathfrak{x}_{vu}u' + p\mathfrak{x}_{vv}v' \\
&\quad = pp_{22}v'\mathfrak{x} + (u' + p\gamma v')\mathfrak{x}_u + (1 + p\theta_v)v'\mathfrak{x}_v + pau'\mathfrak{n} \ , \\
&\bar{\mathfrak{x}}_{pp} = 0 \ , \\
&\bar{\mathfrak{x}}_{p\alpha} = p_{22}v'\mathfrak{x} + \gamma v'\mathfrak{x}_u + \theta_v v'\mathfrak{x}_v + au'\mathfrak{n} \ , \\
&\bar{\mathfrak{x}}_{\alpha\alpha} = P_1\mathfrak{x} + P_2\mathfrak{x}_u + P_3\mathfrak{x}_v + P_4\mathfrak{n} \ ,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
P_1 &= p_{11}u'^2 + p_{22}v'^2 + p\{p_{22}v'' + a(p_{11v} + \beta p_{22})u'^2 + 2(p_{22u} + \gamma p_{11})u'v' \\
&\quad + (p_{22v} + p_{22}\theta_v)v'^2\} \ , \\
P_2 &= u'' + \theta_u u'^2 + \gamma v'^2 + p\{\gamma v'' + (\theta_{uv} + \beta\gamma)u'^2 + 2(p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u)u'v' \\
&\quad + (\gamma_v + \gamma + \gamma\theta_v)v'^2\} \ , \\
P_3 &= v'' + \beta u'^2 + \theta_v v'^2 + p\{\theta_v v'' + (\beta_v + p_{11} + \beta\theta_v)u'^2 + 2(\theta_{uv} + \beta\gamma)u'v' \\
&\quad + (p_{22} + \theta_{vv} + \theta_v^2)v'^2\} \ ,
\end{aligned}$$

$$P_4 = 2au'v' + ap\{u'' + \theta_u u'^2 + 2\theta_v u'v' + \gamma v'^2\} ,$$

da in asymptotischen Parametern die zwei fundamentalen Differentialformen

$$\Phi_2 \equiv g_{rs}du^r du^s = 2adudv , \qquad |a| = e^\vartheta ,$$

$$\Phi_3 \equiv a_{rst}du^r du^s du^t = a(\beta du^3 + \gamma dv^3) ,$$

$a = \beta\gamma$ (für die projektiv normierten Koordinaten $\mathfrak{x}$)

sind und

$$\mathfrak{x}_{uu} = p_{11}\mathfrak{x} + \theta_u\mathfrak{x}_u + \beta\mathfrak{x}_v ,$$

$$\mathfrak{x}_{uv} = a\mathfrak{n} ,$$

$$\mathfrak{x}_{vv} = p_{22}\mathfrak{x} + \gamma\mathfrak{x}_u + \theta_v\mathfrak{x}_v ,$$

$$\mathfrak{n}_u = a^{-1}\{(p_{11v} + \beta p_{22})\mathfrak{x} + (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mathfrak{x}_u + (\beta_v + p_{11} + \beta\theta_v)\mathfrak{x}_v\} ,$$

$$\mathfrak{n}_v = a^{-1}\{(p_{22u} + \gamma p_{11})\mathfrak{x} + (\gamma_u + p_{12} + \gamma\theta_u)\mathfrak{x}_u + (\theta_{vu} + \gamma\beta)\mathfrak{x}_v\}^{(1)} .$$

u' bezw. v' bedeutet hierbei $\frac{du}{d\alpha}$ bezw. $\frac{dv}{d\alpha}$, und

$$\mathfrak{x}_u = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial u}, \quad \mathfrak{x}_v = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial v} \qquad \text{usw.}$$

Daraus berechnen sich die Determinanten

$$|\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}}_\alpha, \bar{\mathfrak{x}}_p, \bar{\mathfrak{x}}_{\alpha\alpha}| = P_4(u' + p\gamma v') - P_2 pau' ,$$

$$|\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}}_\alpha, \bar{\mathfrak{x}}_p, \bar{\mathfrak{x}}_{\alpha p}| = au'^2 ,$$

$$|\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}}_\alpha, \bar{\mathfrak{x}}_p, \bar{\mathfrak{x}}_{pp}| = 0$$

und für die gewünschte Differentialgleichung erhalten wir

$$\{P_4(u' + p\gamma v') - P_2 pau'\}d\alpha + 2au'^2 dp = 0 .$$

Somit ergibt sich für W' mittels der Parameter p, q die Darstellung

(1) Siehe FUBINI-ČECH, a. a. O., Bd. 1, S. 89.

$$\begin{aligned}\mathfrak{z} &= \bar{\mathfrak{x}} + q\left\{\bar{\mathfrak{x}}_\alpha + \bar{\mathfrak{x}}_p \frac{dp}{d\alpha}\right\} \\ &= (1+pqp_{22}v')\mathfrak{x} + q(u'+p\gamma v')\mathfrak{x}_u \\ &\quad + \left\{p + q(1+p\theta_v)v' - q\frac{P_4(u'+p\gamma v') - P_2 p a u'}{2au'^2}\right\}\mathfrak{x}_v + pqau'\mathfrak{n} .\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{z} = x\mathfrak{x} + y\mathfrak{x}_u + z\mathfrak{x}_v + w\mathfrak{n}$$

und führen damit die Fläche begleitende Koordinaten x, y, z, w ein. So haben wir

$$x = 1+pqp_{22}v' , \qquad y = q(u'+p\gamma v') ,$$

$$z = p+q(1+p\theta_v)v' - q\frac{P_4(u'+p\gamma v') - P_2 p a u'}{2au'^2} , \qquad w = pqau' .$$

Wir dürfen hier voraussetzen: $a \neq 0$ und $u' \neq 0$. Wenn dagegen $a = 0$ ist, stimmen zwei Scharen von Asymptotenlinien der Fläche überein, und wenn $u' = 0$ ist, dann beschreibt $\mathfrak{z}$ nicht eine F_2 sondern eine Gerade $\mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{x}} + p\bar{\mathfrak{x}}_v$, welche beiden Fälle wir ausser Betracht lassen. Da die Gestalt von z $p+pqA+p^2qB$ ist, soll die Gleichung für W'

$$\begin{aligned}(a^2u'y - a\gamma v'x + a\gamma v'Cw)z = w\Big\{&\Big(au' - A\frac{v'}{u'}\gamma\Big)x + Aay \\ &- \Big(au'C - A\frac{v'}{u'}\gamma C + B\Big)w\Big\}\end{aligned}$$

sein, ähnlich dieselbe für W

$$\begin{aligned}(a^2\bar{v}'z - a\beta\bar{u}'x + a\beta\bar{u}'\bar{C}w)y = w\Big\{&\Big(a\bar{v}' - \bar{A}\frac{\bar{u}'}{\bar{v}'}\beta\Big)x + \bar{A}az \\ &- \Big(a\bar{v}'\bar{C} - \bar{A}\frac{\bar{u}'}{\bar{v}'}\beta\bar{C} + \bar{B}\Big)w\Big\} .\end{aligned}$$

Aber gemäss der Voraussetzung müssen die Koeffizienten dieser beiden Gleichungen proportional sein. $\bar{u}'$ bezw. $\bar{v}'$ bedeutet hierbei $\frac{du}{d\alpha'}$ bezw. $\frac{dv}{d\alpha'}$. Durch Vergleichung der Koeffizienten von xy und

xz ersehen wir somit $v' = 0$ und $\bar{u}' = 0$ an jedem Flächenpunkte, d.h. u bezw. v ist von α' bezw. α ganz unabhängig. Deshalb ist die Kurvenschar $\alpha =$ konst. bezw. $\alpha' =$ konst. Asymptotenlinien $u =$ konst. bezw. $v =$ konst. und alle W sind die LIEschen F_2 der Fläche.

§ 3. DIE BEDINGUNGEN FÜR DAS LIESCHE F_2-SYSTEM.

Wir werden nun die Bedingungen für das LIEsche F_2-System in den Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ der Gleichung von F_2: $\sum_{\alpha,\beta}^{1,4} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ bekommen. Man kann $a_{\alpha\beta}$ leicht solchermassen normieren, dass die Determinante von $a_{\alpha\beta}$

$$(6) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})^{(1)} = 4! \, |a_{\alpha\beta}| = \epsilon, \qquad \epsilon = \pm 1$$

ist, abgesehen vom Falle ausgearteter F_2, für die $|a_{\alpha\beta}| = 0$ ist. Dann folgt sofort aus (6) für die längs beliebiger Fortschreitungsrichtung dt differenzierten $\frac{da_{\alpha\beta}}{dt}$ die Beziehung

$$(7) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\right) = 0$$

und wir erkennen aus P.G.V ohne weiteres

$$(8) \qquad 3\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\right) = g^*_{rs} \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt},$$

wobei wir allen Grössen in P.G.V einen Stern hinzufügen, um sie von derselben der FUBINIschen Theorie zu unterscheiden.

Jetzt stellen sich die gesuchten Bedingungen folgendermassen vor:

Wenn

(*I*) *für die beliebige Fortschreitungsrichtung* dt

$$(9) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \mathfrak{a}\right) = 0,$$

(1) Dieses Symbol ist schon in P. G. V eingeführt.

$$\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\right) = 0 \tag{10}$$

sind und

(II) für jede von zwei Fortschreitungsrichtungen du und dv, für die

$$g^*_{rs}\, du^r du^s = 0$$

ist, die Matrix

$$\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{du}\right) \text{ bezw. } \left(\frac{da_{\alpha\beta}}{dv}\right)$$

den Rang 2 besitzt, trotzdem für andere beliebige Richtungen hat die entsprechende Matrix im allgemeinen den Rang 3 hat, wobei wir voraussetzen

$$G^* = g^*_{11} g^*_{22} - g^{*2}_{12} \neq 0\,, \tag{11}$$

dann besteht das F_2-System $a_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ aus den LIEschen *F_2 einer Fläche, und umgekehrt erfüllt jedes* LIEsche *F_2-System einer Fläche eben diese Bedingungen.*

Da wir später sehen werden, dass das LIEsche F_2-System einer Fläche stets die beiden Bedingungen (I) und (II) erfüllt, beweisen wir jetzt die Vollständigkeit dieser Bedingungen.

Erstens erkennen wir leicht, dass die Fläche zweiter Ordnung F_2 mit der Koordinaten $\frac{da_{\alpha\beta}}{dt}$ durch die Schnittkurve der zwei benachbarten $F_2 : \mathfrak{a}(a_{\alpha\beta})$ und $\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$ $(a_{\alpha\beta} + da_{\alpha\beta})$ hindurchgeht, und auch von (10), dass sie die ausgeartete, d.h. eine Kegelfläche zweiter Ordnung ist. Wenn man die Spitze der Kegelfläche als Eckpunkte des Koordinatentetraeders z.B. (0, 0, 0, 1) annimmt, dann sind

$$\frac{da_{14}}{dt} = \frac{da_{24}}{dt} = \frac{da_{34}}{dt} = \frac{da_{44}}{dt} = 0$$

und daraus folgt wegen (9)

$$0 = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \mathfrak{a}\right) = a_{44} \frac{\partial}{\partial \frac{da_{44}}{dt}} \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\right)$$

$$= 3!\, a_{44} \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{31}}{dt} \\ \frac{da_{12}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} \\ \frac{da_{13}}{dt} & \frac{da_{23}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix} .$$

Und die letzte Determinante kann nicht wegen (II) im allgemeinen identisch verschwindend sein, deshalb schliessen wir $a_{44} = 0$, die uns zeigen, dass die Spitze der Kegelfläche $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ auf $\mathfrak{a}$ sich legt. Zunächst wollen wir ersehen, dass alle Spitzen der Keglflächen für beliebige Richtungen miteinander zusammenfallen. Wenn die zwei nicht zusammenfallenden Spitzen dagegen sich ergeben, nehmen wir diese Punkte zu zwei Eckpunkte des Koordinatentetraeders z. B. (1, 0, 0, 0) und (0, 1, 0, 0) an. Dann werden die zwei entsprechenden Kegelflächen je die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} & \frac{da_{42}}{dt} \\ 0 & \frac{da_{23}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} & \frac{da_{43}}{dt} \\ 0 & \frac{da_{24}}{dt} & \frac{da_{34}}{dt} & \frac{da_{44}}{dt} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dw} & 0 & \frac{da_{31}}{dw} & \frac{da_{41}}{dw} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{da_{13}}{dw} & 0 & \frac{da_{33}}{dw} & \frac{da_{43}}{dw} \\ \frac{da_{14}}{dw} & 0 & \frac{da_{34}}{dw} & \frac{da_{44}}{dw} \end{pmatrix}$$

besitzen und die Beziehungen

$$\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dw}\right) = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dw}, \frac{d\mathfrak{a}}{dw}, \frac{d\mathfrak{a}}{dw}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\right) = 0 ,$$

die aus (10) folgen, zeigen uns, dass die Spitze jeder Kegelfläche auf der anderen liegt, d.h.

$$\frac{da_{11}}{dw} = \frac{da_{22}}{dt} = 0^{(1)} .$$

(1) Wenn eine Kegelfläche aus zwei Ebenen besteht, sehen wir jeden Punkt auf der Schnittgerade dieser zwei Ebenen als Spitze an.

Ferner erhalten wir von der Beziehung

$$\left(\frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{da}{dw}, \frac{da}{dw}\right) = 0 ,$$

welche auch aus (10) folgt,

$$\left(\frac{da_{23}}{dt} \cdot \frac{da_{14}}{dw} + \frac{da_{24}}{dt} \cdot \frac{da_{13}}{dw}\right)^2 = 0 ,$$

somit sind die Gleichungen der zwei Kegelflächen in Punktkoordinaten je

$$(12) \qquad \frac{da_{33}}{dt}x_3^2 + \left(2\frac{da_{24}}{dt}x_2 + 2\frac{da_{34}}{dt}x_3 + \frac{da_{44}}{dt}x_4\right)x_4 = 0 ,$$

$$\frac{da_{33}}{dw}x_3^2 + \left(2\frac{da_{14}}{dw}x_1 + 2\frac{da_{34}}{dw}x_3 + \frac{da_{44}}{dw}x_4\right)x_4 = 0 ,$$

wenn wir das Koordinatentetraeder solchermassen transformieren, dass $\frac{da_{23}}{dt} = 0$ ist. Aus (12) müssen die zwei Kegelflächen längs der Verbindungsgerade der beiden Spitzen einander berühren. Betrachten wir nun den Ort der Spitzen der Kegelflächen $\frac{da}{dt}$, dann erhält man hierfür

$$(13) \qquad x_\alpha = \rho \frac{\partial}{\partial \frac{da_{1\alpha}}{dt}}\left(\frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}\right)$$

$$= \rho \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \frac{da_{1\alpha}}{du}}\left(\frac{da}{du}, \frac{da}{du}, \frac{da}{du}, \frac{da}{dv}\right)\frac{du}{dt}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \frac{da_{1\alpha}}{dv}}\left(\frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}, \frac{da}{du}\right)\frac{dv}{dt}\right\} ,$$

d.h. der Ort ist eine Gerade, da wegen (II) für die beiden Richtungen du und dv

$$\frac{\partial}{\partial \frac{da_{1\alpha}}{du}}\left(\frac{da}{du}, \frac{da}{du}, \frac{da}{du}, \frac{da}{du}\right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \frac{da_{1\alpha}}{dv}}\left(\frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}\right) = 0$$

sind. Von (13) können wir leicht erkennen, dass alle Kegelflächen $\frac{da}{dt}$ auf einer Gerade ihre Spitzen besitzen und längs dieser Geraden einander berühren. Und wenn die Kegelfläche aus zwei Ebenen besteht, dann schneiden sich die zwei Ebenen längs dieser Gerade. Von Stetigkeit von $\frac{da_{\alpha\beta}}{dt}$ müssen somit alle Ebenen der beiden Kegelflächen $\frac{da}{du}$, $\frac{da}{dv}$, die wegen (II) aus je zwei Ebenen bestehen, durch diese Gerade hindurchgehen. Dann soll

$$\frac{1}{4}\sqrt{G^*} = \left(\frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\right) = 0$$

sein, das der Bedingung (II) widerspricht. Somit fallen alle Spitzen der Kegelflächen $\frac{da}{dt}$ miteinander zusammen, und die vier Ebenen von $\frac{da}{du}$ und $\frac{da}{dv}$ haben nur einen einzigen Punkt P gemeinsam. Dieser Punkt P beschreibt offenbar eine Fläche F, wenn die Parametern u^r über ihren Bereich durchlaufen. Die Fläche F berührt $\mathfrak{a}$ im Punkte P, wie man gleich ersehen kann, somit stimmen die Tangentenebenen der beiden Flächen F und $\mathfrak{a}$ überein.

Nun wollen wir die geometrische Beziehung zwischen den beiden F_2: $\mathfrak{a}$ und $\frac{da}{du}$ bezw. $\frac{da}{dv}$ finden. Dazu nehmen wir das Koordinatentetraeder wie folgt: Der Punkt P hat die Koordinaten $(1, 0, 0, 0)$ und alle Seitenebenen des Tetraeders berühren $\mathfrak{a}$ d. h. zwei Kanten $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ gehören zu einer Regelschar und andere zwei $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$ zur anderen Regelschar von $\mathfrak{a}$. Dann wird die Gleichung für $\mathfrak{a}$

$$x_1x_2 + \lambda x_3x_4 = 0 .$$

Da der Punkt auf beiden Ebenen von $\frac{da}{du}$ bezw. $\frac{da}{dv}$ liegt, hat die Gleichung von $\frac{da}{du}$ bezw. $\frac{da}{dv}$ die Form

$$(\alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)(\alpha' x_2 + \beta' x_3 + \gamma' x_4) = 0 ,$$

somit sind von (7) und (II)

$$0 = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}\right) = 3!\,\lambda(\beta\gamma' + \beta'\gamma)$$

und

$$0 = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}\right) = 4\left\{\beta\beta'\gamma\gamma' - \frac{1}{4}(\beta\gamma' + \gamma\beta')^2\right\}$$
$$= -(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 ,$$

daraus folgt sofort

$$\beta\gamma' = \gamma\beta' = 0 .$$

Es gibt hier folgende drei verschiedene Fälle:

(1) $\beta = \gamma = 0$ für $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ und auch für $\frac{d\mathfrak{a}}{dv}$;

(2) $\beta = \gamma = 0$ für $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ und $\beta = \beta' = 0$ bezw. $\gamma = \gamma' = 0$ für $\frac{d\mathfrak{a}}{dv}$ oder umgekehrt;

(3) $\gamma = \gamma' = 0$ für $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ und $\beta = \beta' = 0$ für $\frac{d\mathfrak{a}}{dv}$.

Da die vier Ebenen von $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ und $\frac{d\mathfrak{a}}{dv}$ nur einen Punkt gemeinsam haben, kann nicht der Fall $\beta = \beta' = 0$ für beiden $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ und $\frac{d\mathfrak{a}}{dv}$ bestehen. In den Fällen (1) und (2) kann man unschwer

$$\frac{1}{4}\sqrt{G^*} = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du},\ \frac{d\mathfrak{a}}{dv},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}\right) = 0$$

beweisen, das der Bedingung $G^* \neq 0$ widerspricht. Im Falle (3) gehört die Schnittgerade der zwei Ebenen von $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ einer Regelschar von $\mathfrak{a}$ und jene von $\frac{d\mathfrak{a}}{dv}$ anderer Regelschar von $\mathfrak{a}$ an. Daraus sollen zwei benachbarte F_2: $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$ in der Richtung du bezw. dv längs einer Erzeugenden zueinander berühren. Somit kann man

zufolge des Satzes von THOMSEN ersehen, dass das F_2-System aus der LIEschen F_2 einer Fläche besteht. Aber wir wollen hier diese Resultate ohne Hilfe des Satzes von THOMSEN herleiten.

Der Punkt P legt sich auf $\mathfrak{a}$ sowie auf $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$, wie wir schon gesehen haben, d.h. für seine Koordinaten x_α sind

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1,4} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = 0 , \tag{14}$$

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1,4} \frac{da_{\alpha\beta}}{dt} x_\alpha x_\beta = 0 , \tag{15}$$

und zwar

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1,4} \frac{da_{\alpha\beta}}{dt}\frac{dx_\alpha}{dw} x_\beta = 0 , \tag{16}$$

da wegen (13)

$$\sum_{\beta}^{1,4} \frac{da_{\alpha\beta}}{dt} x_\beta = 0$$

ist, wobei w eine beliebige Funktion von Parametern u^r ist. Die asymptotischen Richtungen der Fläche $x_\alpha(u^1, u^2)$ sind durch die Gleichung

$$\Phi \equiv L(du^1)^2 + 2Mdu^1du^2 + N(du^2)^2 \equiv \left| x , \frac{\partial x}{\partial u^1} , \frac{\partial x}{\partial u^2} , d^2x \right| = 0 \tag{17}$$

bestimmt, wobei wir den Ausdruck für die Determinante wie folgt abkürzen:

$$\left| x , \frac{\partial x}{\partial u^1} , \frac{\partial x}{\partial u^2} , d^2x \right| = \begin{vmatrix} x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & d^2x_1 \\ x_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & d^2x_2 \\ x_3 & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & d^2x_3 \\ x_4 & \frac{\partial x_4}{\partial u^1} & \frac{\partial x_4}{\partial u^2} & d^2x_4 \end{vmatrix} .$$

Da wegen (6) im allgemeinen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ nicht verschwindet und einen feste Wert ± 1 hat, multiplizieren wir denselben mit der obigen Determinante

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})\Phi = \epsilon\Phi$$

$$= 4\,! \left| a_{\alpha\beta} \right| \left| x\,,\ \frac{\partial x}{\partial u^1}\,,\ \frac{\partial x}{\partial u^2}\,,\ d^2x \right|$$

$$= 4\,! \left| \sum_\alpha a_{\alpha\beta} x_\alpha\,,\ \sum_\alpha a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1}\,,\ \sum_\alpha a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2}\,,\ \sum_\alpha a_{\alpha\beta} d^2x_\alpha \right| .$$

Von vier Koordinaten x_α soll mindestens eine z. B. x_1 von Null verschieden sein, man kann damit die letzte Determinante wie folgt umschreiben:

$$\epsilon\Phi = 4\,! \frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta & \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} x_\beta & \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} x_\beta & \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} d^2x_\alpha x_\beta \\ \sum_\alpha a_{\alpha 2} x_\alpha & \sum_\alpha a_{\alpha 2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} & \sum_\alpha a_{\alpha 2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} & \sum_\alpha a_{\alpha 2} d^2x_\alpha \\ \sum_\alpha a_{\alpha 2} x_\alpha & \sum_\alpha a_{\alpha 3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} & \sum_\alpha a_{\alpha 3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} & \sum_\alpha a_{\alpha 3} d^2x_\alpha \\ \sum_\alpha a_{\alpha 4} x_\alpha & \sum_\alpha a_{\alpha 4} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} & \sum_\alpha a_{\alpha 4} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} & \sum_\alpha a_{\alpha 4} d^2x_\alpha \end{vmatrix} ,$$

daraus folgt

$$(18) \qquad \epsilon\Phi = 4\,! \left(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \right) \frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} \sum_\alpha a_{\alpha 2} x_\alpha & \sum_\alpha a_{\alpha 2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} & \sum_\alpha a_{\alpha 2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} \\ \sum_\alpha a_{\alpha 3} x_\alpha & \sum_\alpha a_{\alpha 3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} & \sum_\alpha a_{\alpha 3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} \\ \sum_\alpha a_{\alpha 4} x_\alpha & \sum_\alpha a_{\alpha 4} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1} & \sum_\alpha a_{\alpha 4} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2} \end{vmatrix} .$$

Da, zufolge (14) und (15) kann man sofort bekommen

$$(19) \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{dt} x_\beta = 0$$

oder

$$(19)' \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u^1}x_\beta = 0\,, \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u^2}x_\beta = 0$$

und auch (16) und (19)

$$(20) \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}d^2x_\alpha x_\beta = -\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta\,.$$

Die Determinante in (18) ist von der Differentiale dt vollständig unabhängig, somit ist

$$(21) \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta = 0$$

für die asymptotischen Richtungen und umgekehrt. Daraus folgt nach (14), (19) und (21) längs der Richtungen

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(x_\alpha+\lambda dx_\alpha)(x_\beta+\lambda dx_\beta) = 0$$

für einen beliebigen Wert von λ, daraus können wir ohne weiteres schliessen, dass alle Punkte auf den zwei Geraden mit den Richtungen: $x_\alpha + \lambda dx_\alpha$ (λ: Parameter)[1] auch auf $\mathfrak{a}$ liegen, d. h. dass diese zwei Geraden zwei durch den Punkt x_α hindurchgehende Erzeugenden von $\mathfrak{a}$ sein sollen.

Nun betrachten wir eine der Richtungen du und dv, für welche

$$g^*_{rs}du^r du^s = 0$$

ist, z. B. du, dann berühren $\mathfrak{a}$ und die benachbarte $\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$ sich in der Richtung du einander längs einer Erzeugende von $\mathfrak{a}$. Andererseits ist ein Kurvennetz $\mathfrak{N}$ auf der Fläche $x_\alpha(u^1, u^2)$ bestimmt, so dass durch jeden Flächenpunkt nur ein Kurvenpaar des Netzes $\mathfrak{N}$ durchläuft und Kurven des Paares immer die Richtungen du und dv hat. Gemäss der hervorgehenden Ergebnisse ersieht man, dass jede zwei dem Punkte auf jeder Kurve des Netzes $\mathfrak{N}$ zugeordneten benachbarten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}+d\mathfrak{a}$ längs einer Asymptoten der Fläche $x_\alpha(u^1, u^2)$ zueinander berühren. Somit muss jede $\mathfrak{a}$ je drei benachbarte Asymptoten, die die Tangenten

(1) Diese Geraden sind offenbar bezw. die Tangenten am Punkte x_α von Asymptotenlinien der Fläche $x_\alpha(u^1, u^2)$.

von drei Asymptotenlinien einer Schar sind, längs der Kurve des Netzes $\mathfrak{N}$ erhalten. Zufolge des Satzes in § 2 können wir sofort erkennen, dass das Kurvennetz $\mathfrak{N}$ mit dem Netz von Asymptotenlinien völlig übereinstimmt. Mit anderen Worten, die Richtungen du und dv sind nichts anderes als die asymptotischen Richtungen der Fläche $x_\alpha(u^1, u^2)$, die durch $\mathfrak{a}$ umgehüllt ist, und jede $\mathfrak{a}$ ist die LIEsche F_2 der Fläche, d. h. die Vollständigkeit der beiden Bedingungen hat sich völlig erwiesen.

§ 4. EINIGE BEMERKUNGEN ZU DEN BEDINGUNGEN.

Wir wollen jetzt noch einige Bemerkungen zu den Bedingungen hinzufügen.

1. Die Bedingung (I) dürfte gemäss der Bedingung (II) durch die folgende ersetzt werden:

$$(9)_1 \qquad \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right) = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right) = 0\,,$$

$$(10)_1 \qquad \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right) = 0\,,$$

da (9) wegen (II) sogleich umgeschrieben werden kann

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \mathfrak{a}\right) &= \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \mathfrak{a}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^3 \\ &\quad + 3\left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{dv}{dt} \\ &\quad + 3\left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right)\frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)^3 \\ &= 3\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\left\{\left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right)\frac{du}{dt}\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \mathfrak{a}\right)\frac{dv}{dt}\right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

und (10)

$$\left(\frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}\right) = \left(\frac{da}{du}, \frac{da}{du}, \frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 .$$

2. Wenn man die normierten Koordinaten $a_{\alpha\beta}$ mit den nichtnormierten $a^*_{\alpha\beta}$, d. h. die Koeffizienten der Gleichungen von F_2 in allgemeine Form darstellt, so ist

$$a_{\alpha\beta} = (4!\,\Delta)^{-\frac{1}{4}} a^*_{\alpha\beta}, \tag{22}$$

wobei $\Delta = |\, a^*_{\alpha\beta}\,|$ ist. Daraus folgt:

$$\frac{da_{\alpha\beta}}{dt} = 3!\,(4!\,\Delta)^{-\frac{5}{4}}\left(4\Delta\frac{da^*_{\alpha\beta}}{dt} - \Theta_t a^*_{\alpha\beta}\right), \tag{23}$$

wenn man die Invarianten (im Sinne der algebraischen Geometrie) zwischen den beiden F_2: $a^*_{\alpha\beta}$, $\frac{da^*_{\alpha\beta}}{dt}$ mit Δ, Θ_t, Ψ_t, Θ'_t, Δ'_t bezeichnet, d. h. die Determinante

$$\left|\, a^*_{\alpha\beta} + \lambda\frac{da^*_{\alpha\beta}}{dt}\,\right| = \Delta + \lambda\Theta_t + \lambda^2\Psi_t + \lambda^3\Theta'_t + \lambda^4\Delta'_t$$

für ein beliebiges λ. Dann können wir die beiden Bedingungen (I) und (II) folgendermassen umschreiben:

(I)′ Für die beliebige Fortschreitungsrichtung dt sollen

$$16\Theta'_t\Delta^2 - 8\Theta_t\Psi_t\Delta - 3\Theta_t^3 = 0 , \tag{9$_2$}$$

$$4^4\Delta'_t\Delta^3 - 4^3\Theta_t\Theta'_t\Delta^2 + 4^2\Theta_t^2\Psi_t\Delta - 3\Theta_t^4 = 0 \tag{10$_2$}$$

sein;

(II)′ Für jede von zwei Fortschreitungsrichtungen du und dv, für die

$$8\Delta\Psi_u - 3\Theta_v^2 = 0 \qquad \text{bezw.} \qquad 8\Delta\Psi_v - 3\Theta_v^2 = 0$$

ist, hat die Matrix

$$\left(4\Delta\frac{da^*_{\alpha\beta}}{du} - \Theta_u a^*_{\alpha\beta}\right) \qquad \text{bezw.} \qquad \left(4\Delta\frac{da^*_{\alpha\beta}}{dv} - \Theta_v a^*_{\alpha\beta}\right)$$

den Rang 2, trotzdem für andere beliebige Richtungen die ähnliche Matrix im allgemeinen den Rang 3 hat.

3. $\frac{da_{\alpha\beta}}{du}$ bezw. $\frac{da_{\alpha\beta}}{dv}$ besteht aus zwei Ebenen, deren Schnittgerade eine Erzeugende von $a_{\alpha\beta}$ ist, wie wir schon gesehen haben. Somit schneidet jede dieser Ebenen die F_2: $a_{\alpha\beta}$ noch in je einer anderen Erzeugenden von $a_{\alpha\beta}$, und wir erhalten deshalb ein windschiefes Viereck, das von der in dieser Weise gefundenen Erzeugenden gebildet ist. Das eingeführte Viereck rührt von DEMOULIN her[1]. Die vier Eckpunkte des Vierecks DEMOULINS legen sich auf allen benachbarten F_2 von $a_{\alpha\beta}$ und jeder der Punkte beschreibt also eine Fläche, welche $a_{\alpha\beta}$ im Punkte berührt. Von den Sonderfällen wäre besonders den Fall zu beachten, wo das Viereck DEMOULINS stets zu einem Punkte $\bar{x}_\alpha$ zusammenschrumpft, was eintritt, wenn die beiden Matrizen $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{du}\right)$ und $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{dv}\right)$ stets den Rang 1 haben. Die Liesche F_2 der Fläche x_α ist dann gleichzeitig Liesche F_2 im entsprechenden Punkte der Fläche $\bar{x}_\alpha$, wie DEMOULIN bemerkt hat. Wenn eine der beiden Matrizen den Rang 2 und andere den Rang 1 hat, so stimmen zwei Gegenseiten des Vierecks DEMOULINS völlig überein.

4. Aus den beiden Bedingungen können wir die folgende Relation auffinden:

$$(\mathfrak{a}_{rs},\ \mathfrak{a}_t,\ \mathfrak{a}_u,\ \mathfrak{a}_v) = 0\ , \tag{24}$$

wobei $\mathfrak{a}_{rs}$ und $\mathfrak{a}_t$ die kovarianten Ableitungen von $\mathfrak{a}$ in bezug auf die quadratische Form $g_{rs}^{*}\,du^r\,du^s$ sind. Denn man sieht sofort nach der Bedingung (II)

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r du^s},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du}\right)=0 \text{ bezw. } \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r du^s},\ \frac{d\mathfrak{a}}{dv},\ \frac{d\mathfrak{a}}{dv},\ \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)=0 \tag{25}$$

und nach (10)

$$\left(\frac{d\mathfrak{a}}{du^s},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du^t},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du^u},\ \frac{d\mathfrak{a}}{du^v}\right) = 0\ , \tag{26}$$

(1) A. DEMOULIN: Sur la quadrique de Lie, Comptes Rendus de Paris, 147 (1908), 493–496.

somit bekommen wir aus (26) durch Differenzierung wegen (25)

$$(27)\qquad \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du^s}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}\right)=0 \text{ bezw. } \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{du^s}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)=0$$

und dadurch

$$(28)\qquad \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)=0 \text{ bezw. } \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)=0\,.$$

Ähnlicherweise erhalten wir aus

$$\left(\frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right) = 0$$

$$(29)\qquad \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)+\left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^r du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right) = 0\,,$$

folglich wegen (28)

$$(30)\qquad \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{du^2}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)=0 \text{ bezw. } \left(\frac{d^2\mathfrak{a}}{dv^2}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right)=0\,.$$

Aus (25), (26), (28) und (30) folgt (24) ohne weiteres.

Im Falle, wo die zehn F_2: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_{rs}$, $\mathfrak{a}_{rst}$ ein linear unabhängiges System bilden, kann die Bedingung (II) durch (24) und

$$(31)\qquad (\mathfrak{a}_{rst}, \mathfrak{a}_u, \mathfrak{a}_v, \mathfrak{a}_w)\, \underset{a}{e^u}\, \underset{a}{e^v}\, \underset{a}{e^w} = 0 \qquad\qquad a = 1, 2$$

ersetzt werden, wobei $\underset{a}{e^r}$ einen solchen kontravarianten Vektor bedeutet, dass

$$g^*_{rs}\, \underset{a}{e^r}\, \underset{b}{e^s} \begin{cases} = 0 & \text{für } a = b \\ \neq 0 & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

ist.

§ 5. DIE BEDINGUNGEN FÜR DAS DARBOUXSCHE F_2-SYSTEM.

Wir haben bereits die Fälle kennen gelernt, wo die beiden Matrizen $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{du}\right)$ und $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{dv}\right)$ stets den Rang 2 oder 1 haben. Der

Fall wäre nun dann zu beachten, wo mindestens eine dieser beiden Matrizen den Rang 3 hat, d.h. die Bedingung (II) nicht erfüllt ist. Wir wollen zuerst in analoger Weise wie in § 3 zeigen, dass eine der Matrizen unter der Bedingung (I) den Rang 2 haben soll, wenn die andere den Rang 2 hat.

Wenn die zwei Kegelflächen zweiter Ordnung $\frac{da}{du}$, $\frac{da}{dv}$, für die $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, da, da) = 0$ ist, voneinander verschiedene Spitzen haben, so nimmt man das Koordinatentetraeder solchermassen an, wie in § 3, dass zwei Eckpunkte des Tetraeders die zwei Spitzen sind und in bezug auf das Koordinatentetraeder $\mathfrak{a}$ in der Gestalt dargestellt wird:

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0.$$

Dann sollen die zwei Kegelflächen wegen der Bedingung (I) wie in § 3 die Koordinaten haben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{da_{23}}{du} & \frac{da_{24}}{du} \\ 0 & \frac{da_{23}}{du} & \frac{da_{33}}{du} & 0 \\ 0 & \frac{da_{24}}{du} & 0 & \frac{da_{44}}{du} \end{pmatrix} \text{ bezw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{da_{13}}{dv} & \frac{da_{14}}{dv} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{da_{13}}{dv} & 0 & \frac{da_{33}}{dv} & 0 \\ \frac{da_{14}}{dv} & 0 & 0 & \frac{da_{44}}{dv} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\frac{da_{33}}{du}\frac{da_{44}}{du} = \frac{da_{33}}{dv}\frac{da_{44}}{dv} = 0 \tag{32}$$

ist. Aber es ist

$$0 = \left(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \frac{da}{du}, \frac{da}{dv}\right) = -4\left(\frac{da_{33}}{du}\frac{da_{44}}{dv} + \frac{da_{33}}{dv}\frac{da_{44}}{du}\right). \tag{33}$$

Man sieht zufolge der Bedingung (I)

$$0 = \left(\frac{da}{du}, \frac{da}{du}, \frac{da}{dv}, \frac{da}{dv}\right) = 4\left(\frac{da_{23}}{du}\frac{da_{14}}{dv} - \frac{da_{24}}{du}\frac{da_{13}}{dv}\right)^2, \tag{34}$$

$$(35)\quad 0 = \left(\mathfrak{a}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right) = 4\left(\frac{da_{23}}{du}\frac{da_{13}}{dv}\frac{da_{44}}{du} - \frac{da_{24}}{du}\frac{da_{14}}{dv}\frac{da_{33}}{du}\right),$$

$$(36)\quad 0 = \left(\mathfrak{a}, \frac{d\mathfrak{a}}{du}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}, \frac{d\mathfrak{a}}{dv}\right) = 4\left(\frac{da_{23}}{du}\frac{da_{13}}{dv}\frac{da_{44}}{dv} - \frac{da_{24}}{du}\frac{da_{14}}{dv}\frac{da_{33}}{dv}\right).$$

Wenn $\frac{da_{44}}{du} = 0$ ist, so ist es

$$\frac{da_{33}}{du} \neq 0\,, \qquad \frac{da_{33}}{dv} = 0\,, \qquad \frac{da_{44}}{dv} \neq 0$$

von (32) und dann folgt aus (35)

$$\frac{da_{24}}{du}\frac{da_{14}}{dv} = 0\,.$$

Wir müssen jetzt zwei Fälle betrachten:

(i) $\frac{da_{14}}{dv} = 0$. Dann ist aus (34)

$$\frac{da_{24}}{du}\frac{da_{13}}{dv} = 0\,.$$

Wenn $\frac{da_{13}}{dv} = 0$ ist, so artet $\frac{da_{\alpha\beta}}{dv}$ zu zwei Ebenen aus, deren Schnittgerade durch die Spitze der $\frac{da_{\alpha\beta}}{du}$ hindurchgeht, d.h. wir dürfen annehmen, dass die beiden Kegelflächen die zusammenfallenden Spitzen haben, was aber der ersten Voraussetzung widerspricht. Deshalb kommt nicht dieser Fall heraus.

(ii) $\frac{da_{24}}{du} = 0$. Dann muss wegen (36)

$$\frac{da_{23}}{du}\frac{da_{13}}{dv} = 0$$

sein. $\frac{da_{13}}{dv} = 0$ ist der Fall (i) und $\frac{da_{23}}{du} = 0$ widerspricht auch der ersten Voraussetzung.

Für den Fall: $\frac{da_{33}}{du}=0$ ist es ganz analog. Somit haben die beiden Kegelflächen, folglich alle $\frac{da_{\alpha\beta}}{dt}$, die zusammenfallenden Spitzen x_α. Der Punkt x_α beschreibt eine Fläche und wir können wie in § 3 ersehen, dass zwei Asymptoten im Punkte x_α der Fläche die zwei Erzeugenden der entsprechenden $a_{\alpha\beta}$ sind. Somit kann man durch dieselbe Methode wie in § 3 die Richtigkeit unserer Behauptung beweisen. Denn die Matrix $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{du}\right)$ sei z.B. von Rang 2, dann soll $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$ die Koordinaten

$$(37)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{da_{22}}{du} & \frac{da_{32}}{du} & 0 \\ 0 & \frac{da_{23}}{du} & \frac{da_{33}}{du} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{da_{22}}{du} & 0 & \frac{da_{42}}{du} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{da_{24}}{du} & 0 & \frac{da_{44}}{du} \end{pmatrix}$$

in bezug auf das obengenannte Koordinatentetraeder besitzen, d.h. die Schnittgerade dieser zwei Ebenen ist eine Erzeugende von $\mathfrak{a}$, somit berühren die zwei benachbarten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}+d\mathfrak{a}$ in der Richtung du längs einer Asymptote der Fläche x_α einander.

Es sei $\mathfrak{a}(u^1, u^2)$ das LIEsche F_2-System einer Fläche und ξ_α die der $\mathfrak{a}$ zugeordneten Tangentenebene der Fläche, dann wird sich das DARBOUXsche F_2-Büschel durch

$$(38)\qquad \mathfrak{b}=\mathfrak{a}+\sigma\xi^2\,,$$

dargestellt, wobei ξ^2 die doppelt berechnete Tangentenebene ξ_α bedeutet, d.h.

$$(38)\qquad b_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\sigma\xi_\alpha\xi_\beta\,.$$

Daraus folgen

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi^2) = (d\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi^2) = (d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi^2) = 0 ,$$

$$(39) \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi d\xi) = (d\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi d\xi) = (d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi d\xi) = 0 ,$$

$$(d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, \xi^2) = (d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, \xi d\xi) = 0 ,$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi d\xi, \xi d\xi) = (d\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \xi d\xi, \xi d\xi) = (d\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, \xi d\xi, \xi d\xi) = 0, \text{ usw.}^{(1)} ,$$

da $d\mathfrak{a}$ bezw. ξ^2 bezw. $\xi d\xi$ die Koordinaten

$$(40) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & da_{22} & da_{32} & da_{42} \\ 0 & da_{23} & da_{33} & 0 \\ 0 & da_{24} & 0 & da_{44} \end{pmatrix} \text{ bezw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bezw.} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 d\xi_2 & \frac{1}{2}(\xi_2 d\xi_3 + \xi_3 d\xi_2) & \frac{1}{2}(\xi_2 d\xi_4 + \xi_4 d\xi_2) \\ 0 & \frac{1}{2}(\xi_2 d\xi_3 + \xi_3 d\xi_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\xi_2 d\xi_4 + \xi_4 d\xi_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

haben sollen, wenn wir das Koordinatentetraeder solchermassen annehmen, dass $\mathfrak{a}$ durch die Gleichung $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ dargestellt ist. Gemäss der Bedingung (I) erhalten wir daraus ebenso

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 1, \qquad (d\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0 ,$$

$$(41) \qquad (d\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \frac{1}{4} g^*_{rs} du^r du^s ,$$

$$(d\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0 , \qquad (d\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}) = 0 ,$$

d. h. *das F_2-System, welches von allen F_2 der* DARBOUX*schen F_2-Büscheln einer Fläche besteht, erfüllt auch eben die Bedingung (I),*

(1) Diese Beziehungen ergeben sich immer, wenn $\mathfrak{a}$ die Bedingung (I) erfüllt hat.

aber nicht (II), da die beiden Matrizen $\left(\frac{db_{\alpha\beta}}{du}\right)$ und $\left(\frac{db_{\alpha\beta}}{dv}\right)$ für $\sigma \neq 0, \quad \neq \infty$ wirklich den Rang 3 haben[1].

Überdies genügt das System die Bedingung (I), selbst wenn wir σ als Parameter ansehen würden.

Umgekehrt, wenn ein F_2-System $\mathfrak{b}$ *die Bedingung (I) erfüllt und für das* $g_{11}^* g_{22}^* - g_{12}^{*2} \neq 0$ *ist, dann gehört das System demselben von* DARBOUX*schen F_2-Büscheln einer Fläche an.* (Einfachheitshalber wollen wir das System mit den Worten "DARBOUXsches F_2-System" nennen).

Jetzt müssen wir diesen Satz beweisen. Alle $d\mathfrak{b}$ besitzen dann eine gemeinsame Spitze, die eine Fläche beschreibt, wie wir schon gesehen haben. Um den Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \sigma\xi^2$ für ein passend erwähntes σ das LIEsche F_2-System der Fläche wird, d. h. dass die Matrix $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{du}\right)$ den Rang 2 hat, da die Matrix $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{dv}\right)$ dann ebenso ist. ξ bedeutet hierbei die Tangentenebene der Fläche gerade wie oben. Es sei $L_2 = 0$ die Gleichung der Tangentenebene ξ, dann wird dieselbe von $\mathfrak{b}$

$$L_1 L_2 + L_3 L_4 = 0, \tag{42}$$

wobei $L_\alpha = \sum_{\beta}^{1,4} a_{\alpha\beta} x_\beta$ und die Determinante $|\, a_{\alpha\beta} \,|$ nicht verschwindet. Somit soll $\frac{d\mathfrak{b}}{du}$ von der Bedingung (I) z. B. durch die Gleichung von der Gestalt

---

(1) Wegen (37) und (40) weisst man sofort z. B. in bezug auf das obenerwahnte Koordinatentetraeder

$$\begin{vmatrix} \frac{db_{22}}{du} & \frac{db_{32}}{du} & \frac{db_{42}}{du} \\ \frac{db_{23}}{du} & \frac{db_{33}}{du} & \frac{db_{43}}{du} \\ \frac{db_{24}}{du} & \frac{db_{34}}{du} & \frac{db_{44}}{du} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{da_{22}}{du} + 2\sigma\xi_2 \frac{d\xi_2}{du} & \frac{da_{32}}{du} & 2\sigma\xi_2 \frac{d\xi_4}{du} \\ \frac{da_{23}}{du} & \frac{da_{33}}{du} & 0 \\ 2\sigma\xi_2 \frac{d\xi_4}{du} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \cdot 2\xi_2^2 \left(\frac{d\xi_4}{du}\right)^2 \frac{da_{33}}{du} \neq 0,$$

da $\frac{d\xi_3}{du} = 0$ bezw. $\frac{d\xi_4}{dv} = 0$ und auch $\frac{d\xi_4}{du} \neq 0$ bezw. $\frac{d\xi_3}{dv} \neq 0$, wenn die Windung der Asymptotenlinien am betreffenden Punkte von Null verschieden ist.

$$\lambda_{22}L_2L_2+2\lambda_{23}L_2L_3+2\lambda_{24}L_2L_4+\lambda_{33}L_3L_3=0 \tag{43}$$

dargestellt werden[1]. Ferner kann man setzen

$$\frac{dL_2}{du}=\mu_2L_2+\mu_3L_3+\mu_4L_4\,, \tag{44}$$

da die Ebene $\frac{dL_2}{du}=0$ durch den Schnittpunkt von drei Ebenen $L_2=0$, $L_3=0$, $L_4=0$ hindurchgehen soll. Daraus folgt aus (43), dass

$$\frac{d\mathfrak{a}}{du}=\frac{d\mathfrak{b}}{du}-\frac{d\sigma}{du}\xi^2+2\sigma\xi\frac{d\xi}{du} \tag{45}$$

die Gleichung

$$\left(\lambda_{22}-\frac{d\sigma}{du}-2\sigma\mu_2\right)L_2L_2+2(\lambda_{23}-\sigma\mu_3)L_2L_3+2(\lambda_{24}-\sigma\mu_4)L_2L_4 \tag{46}$$
$$+\lambda_{33}L_3L_3=0$$

haben muss, denn $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}-\sigma\xi^2$ hat die Gleichung

$$L_1L_2+L_3L_4-\sigma L_2L_2=0\,.$$

Nun wollen wir σ passend bestimmen, d. h.

$$\sigma=\frac{\lambda_{24}}{\mu_4}\,,$$

dann stellt die Gleichung (46) zwei Ebenen dar und diese Ebenen werden längs einer Erzeugenden von $\mathfrak{a}$ geschnitten, die die Schnittgerade der zwei Ebenen $L_2=0$, $L_3=0$ ist, da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Erzeugende gemeinsam haben[2]. Somit ist der Rang der Matrix $\left(\frac{da_{\alpha\beta}}{du}\right)$ wirklich zwei, deshalb können wir schliessen, dass $\mathfrak{a}$ das LIEsche F_2-System einer Fläche bilden.

---

(1) Dies kann man gerade ersehen, wenn man ein solches neues Koordinatensystem annimmt, dass $\bar{x}_\alpha=L_\alpha$, d.h. das Koordinatentetraeder betrifft, welches wir schon vielmal verwendet haben.

(2) Weil $\mathfrak{a}$ hat die Gleichung:

$$(L_1-\sigma L_2)L_2+L_3L_4=0\,.$$

Aus dem obigen Ergebnisse erhalten wir den Satz:

Die Bedingung (I) kennzeichnet das DARBOUXsche *F_2-System einer Fläche.*

§ 6. DIE DIFFERENTIALFORMEN DES LIESCHEN F_2-SYSTEMS.

Nun wollen wir unserem Hauptziel entgegenschreiten, d.h. gemäss unseres Standpunktes die Flächentheorie begründen. Betrachten wir das LIEsche F_2-System einer Fläche:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(u^1, u^2) ,$$

dann gelten die beiden Bedingungen in § 3 für dieses System. (7) und (8) lassen sich umschreiben, sodass

$$(\mathfrak{a}_i , \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0 , \tag{47}$$

$$3(\mathfrak{a}_i , \mathfrak{a}_j , \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = g^*_{ij} \text{ (1)}, \tag{48}$$

wobei $\mathfrak{a}_i$ bedeutet

$$\mathfrak{a}_i = \frac{d\mathfrak{a}}{du^i} .$$

Wir führen die kovariante Differenzierung im Sinne der RIEMANNschen Übertragung ein, wobei der fundamentale Tensor g_{ij} ist. Aus den Bedingungen in § 3 folgen dann sogleich

$$(\mathfrak{a}_i , \mathfrak{a}_j , \mathfrak{a}_k , \mathfrak{a}) = 0 , \tag{49}$$

$$(\mathfrak{a}_i , \mathfrak{a}_j , \mathfrak{a}_k , \mathfrak{a}_l) = 0 , \tag{50}$$

$$(\mathfrak{a}_{ij} , \mathfrak{a}_k , \mathfrak{a}_l , \mathfrak{a}_m) = 0 , \tag{51}$$

$$(\mathfrak{a}_{rst} , \mathfrak{a}_i , \mathfrak{a}_j , \mathfrak{a}_k) \underset{a}{e^i} \underset{a}{e^j} \underset{a}{e^k} = 0, \qquad a = 1, 2 , \tag{31}$$

(1) Wir wollen von nun an den Stern von g^*_{ij} weglassen, da g^*_{ij} mit dem FUBINIschen fundamentalen Tensor bis auf ein Vorzeichen übereinstimmt.

wobei $\mathfrak{a}_{ij}$ bezw. $\mathfrak{a}_{rst}$ die zweite bezw. dritte kovariante Ableitung darstellt.

Nimmt man die Notation in P. G. V an, so ist

$$(52) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\mathfrak{A} = \epsilon$$

oder man kann setzen

$$(53) \qquad \mathfrak{A} = ((\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}))\,.$$

Dann erhalten wir

$$(54) \qquad \mathfrak{a}_i\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}_i = 0\,,$$

$$(55) \qquad \mathfrak{a}_i\mathfrak{A}_j = \mathfrak{a}_j\mathfrak{A}_i = -\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{A} = -\mathfrak{a}\mathfrak{A}_{ij} = g_{ij}\,,$$

da

$$(56) \qquad \mathfrak{A}_j = 3((\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}))$$

ist. Aus (48) bekommt man zufolge (49)

$$3(\mathfrak{a}_{ik}, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 3(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{jk}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0\,,$$

d.h.

$$\mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{A}_j + \mathfrak{a}_{jk}\mathfrak{A}_i = 0\,.$$

Somit muss $\mathfrak{a}_{jk}\mathfrak{A}_i$ in bezug auf i und k symmetrisch sein, d. h.

$$\mathfrak{a}_{jk}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}_{ji}\mathfrak{A}_k\,, \qquad \mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{A}_j = \mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{A}_k\,,$$

daraus erhält man

$$(57) \qquad \mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{A}_k = 0\,, \qquad \mathfrak{a}_k\mathfrak{A}_{ij} = 0\ ^{(1)}$$

und aus (55) auch

$$(57)' \qquad \mathfrak{a}_{ijk}\mathfrak{A} = 0\,, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{A}_{ijk} = 0\,.$$

(1) Aus dieser Beziehung ersieht man, dass a_{rst} in P. G. V in unserem Falle ganz verschwindet.

(49) gibt uns mit Hilfe von (50)

$$(\mathfrak{a}_{1i}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_{2i}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}) = 0,$$

$$(\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_{22}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}) = 0,$$

$$(\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_{22}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}) = -(\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}).$$

Wenn wir als Parameterlinien die Asymptotenlinien annehmen, für die $g_{rs}\,du^r\,du^s = 0$ ist, dann können wir durch die Methode wie in § 5 schliessen

(58) $$((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a})) = 0, \qquad ((\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a})) = 0.$$

Somit ergibt sich im allgemeinen für das beliebige Parameterliniensystem

(59) $$(\mathfrak{a}_{ij}, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l, \mathfrak{a}) = 0.$$

Wegen (58) muss sich eine F_2: $\mathfrak{X}$ ergeben, für die

(58) $$((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a})) = g_{ij}\,\mathfrak{X}$$

gilt.

Betrachtet man eine Fläche zweiter Ordnung

(60) $$\mathfrak{b} = \frac{1}{2} g^{rs}\mathfrak{a}_{rs} + \epsilon\mathfrak{a}$$

und dualistisch

(60)′ $$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} g^{rs}\mathfrak{A}_{rs} + \epsilon\mathfrak{A},$$

die die folgenden Beziehungen erfüllen:

(61) $$\mathfrak{b}\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{B} = 0,$$

(62) $$\mathfrak{b}\mathfrak{A}_i = 0, \qquad \mathfrak{a}_i\mathfrak{B} = 0,$$

wie wir sofort beweisen können. Und wir erhalten auch

(63) $$\mathfrak{b}\mathfrak{B} = \epsilon$$

und

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i) = 0 , \tag{64}$$

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{ij}, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}) = 0^{(1)} , \tag{65}$$

folglich

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}) = 0 . \tag{66}$$

(59) und (60) geben uns wegen (48)

$$3(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}) = \epsilon g_{ij} , \tag{67}$$

daraus geht durch kovariante Differenzierung hervor

$$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{ji}, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_{ki}, \mathfrak{a})$$
$$+ (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_i) = 0 ,$$

somit folgt wegen (24) und (63)

$$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}) = 0 . \tag{68}$$

Nach (56) ersehen wir durch kovariante Differenzierung

$$\mathfrak{A}_{ij} = 3((\mathfrak{a}_{ij}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) + 6((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a})) , \tag{69}$$

deswegen ist die Beziehung zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = 3((\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) + 3((\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}))g^{rs} - 2\epsilon\mathfrak{A} , \tag{70}$$

somit folgt nach (67) und (61)

$$\epsilon = \mathfrak{b}\mathfrak{B} = 3(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 2\epsilon ,$$

$$3(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = -\epsilon . \tag{71}$$

---

(1) Diese beiden Beziehungen kann man nicht so leicht ableiten, aber sie gehen nach einiger Berechnung aus den Bedingungen für das LIEsche F_2-System hervor. Wir werden aber später ihre Richtigkeit erkennen.

Diese Beziehung gibt uns ohne weiteres

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})_i = 2(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 2(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}) = 0 ,$$

daraus folgt wegen (66)

$$(72) \qquad (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0 .$$

Andererseits sieht man aus (61) und (62)

$$(73) \qquad \mathfrak{b}_i \mathfrak{A} = 0 , \qquad \mathfrak{a} \mathfrak{B}_i = 0$$

und aus (63) und (70)

$$\mathfrak{b}_i \mathfrak{B} = -\mathfrak{b} \mathfrak{B}_i$$
$$= 3(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 3(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) g^{rs} - 2\epsilon \mathfrak{b}_i \mathfrak{A} ,$$

deshalb ist nach (68)

$$(74) \qquad \mathfrak{b}_i \mathfrak{B} = -\mathfrak{b} \mathfrak{B}_i = 0 .$$

Der Affinor

$$(75) \qquad b_{rst} = -3(\mathfrak{a}_{rs}, \mathfrak{a}_t, \mathfrak{b}, \mathfrak{b})$$

verschwindet nicht im allgemeinen identisch und ist zu g_{ij} apolar, d. h.

$$(76) \qquad g^{rs} b_{rst} = 0 ,$$

wie wir aus (64) und (66) erkennen können. Es muss hierzu bemerkt werden, dass der Affinor b_{rst} in bezug auf die ersten zwei Indexes symmetrisch ist, aber nicht im allgemeinen auf die letzten, d. h.

$$(77) \qquad b_{rst} = b_{srt} , \qquad b_{rst} \neq b_{rts} .$$

Wir führen noch einen Affinor $\bar{b}_{rst}$, der sich durch

$$(78) \qquad g^{rs} \bar{b}_{rst} = 0 , \qquad b^{rs}_{\cdot\cdot u} \bar{b}_{rst} = g_{ut}$$

erklärt, daraus entsteht

$$(79) \qquad \bar{b}_{rst} = b_{rsu} A^{u}_{\cdot t} ,$$

wobei $A^u_{\cdot t}$ durch folgende Gleichung definiert wird:

$$b_{rsw}b^{rs}_{\cdot\cdot u}A^u_{\cdot t} = g_{wt}^{(1)} , \tag{80}$$

wie aus (78) folgt.

Durch Überschiebung mit $\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot t}$ leiten wir aus $\mathfrak{a}_{rs}$ neue Flächen zweiter Ordnung her:

$$\mathfrak{c}_t = \bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot t}\mathfrak{a}_{rs} \tag{81}$$

und dualistisch

$$\mathfrak{C}_t = \bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot t}\mathfrak{A}_{rs} . \tag{81}'$$

Wir haben hiermit auch einen neuen Tensor

$$k_{tu} = \mathfrak{c}_t\mathfrak{C}_u ,$$

der symmetrisch ist, da nach (69) und (59)

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_t\mathfrak{C}_u &= 3(\mathfrak{c}_t , \mathfrak{a}_{rs} , \mathfrak{a}, \mathfrak{a})\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot u}+6(\mathfrak{c}_t , \mathfrak{a}_r , \mathfrak{a}_s , \mathfrak{a})\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot u}\\ &= 3(\mathfrak{c}_t , \mathfrak{c}_u , \mathfrak{a}, \mathfrak{a})+6(\mathfrak{a}_{ij} , \mathfrak{a}_r , \mathfrak{a}_s , \mathfrak{a})\bar{b}^{ij}_{\cdot\cdot t}\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot u}\\ &= 3(\mathfrak{c}_t , \mathfrak{c}_u , \mathfrak{a}, \mathfrak{a})\end{aligned}$$

ist, d. h.

$$k_{tu} = \mathfrak{c}_t\mathfrak{C}_u = \mathfrak{c}_u\mathfrak{C}_t . \tag{82}$$

Man kann auch leicht wegen (58) und (69) ersehen, dass

$$\mathfrak{C}_t = 3((\mathfrak{c}_t , \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) \tag{83}$$

ist, aus denen (82) wieder erhalten wird.

Die drei Affinoren g_{rs}, b_{rst} und k_{tu} sind die fundamentalen des LIEschen F_2-Systems, d. h. der Flächentheorie, wie wir später ersehen werden.

---

(1) Wir können andererseits ersehen, dass

$$b_{rsw}\,b^{rs}_{\cdot\cdot u} = \alpha g_{uw} , \qquad 2\alpha = b_{rsu}\,b^{rsu} \tag{80}'$$

ist, folglich ist

$$A_{ut} = \alpha^{-1}g_{ut} \tag{80}''$$

und

$$\bar{b}_{rst} = \alpha^{-1}b_{rst} . \tag{80}'''$$

Aus (55) erhalten wir

$$\mathfrak{c}_t\mathfrak{A} = 0\,, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{C}_t = 0 \tag{84}$$

und aus (57)

$$\mathfrak{c}_t\mathfrak{A}_i = 0\,, \qquad \mathfrak{a}_i\mathfrak{C}_t = 0\,. \tag{85}$$

Es entstehen auch

$$\mathfrak{c}_t\mathfrak{B} = 0\,, \qquad \mathfrak{b}\mathfrak{C}_t = 0\,, \tag{86}$$

deren Richtigkeit man später ersehen wird.

§ 7. DIE ABLEITUNGSGLEICHUNGEN.

Die drei Affinoren g_{rs}, b_{rs1}, b_{rs2} sind voneinander linear unabhängig, wenn

$$G \equiv g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$$

ist, da

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{111} & b_{121} & b_{221} \\ b_{112} & b_{122} & b_{222} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ \bar{b}^{11}_{\cdot\cdot 1} & \bar{b}^{12}_{\cdot\cdot 1} & \bar{b}^{22}_{\cdot\cdot 1} \\ \bar{b}^{11}_{\cdot\cdot 2} & \bar{b}^{12}_{\cdot\cdot 2} & \bar{b}^{22}_{\cdot\cdot 2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = 2G$$

ist.

Die drei Flächen zweiter Ordnung $\frac{1}{2}g^{rs}\mathfrak{a}_{rs}$ und $\mathfrak{c}_t$ sind aus $\mathfrak{a}_{rs}$ durch lineare Kombinationen gebildet und aus der obigen Tatsache ersehen wir, dass diese drei Flächen zweiter Ordnung voneinander linear unabhängig sind. Somit muss $\mathfrak{a}_{rs}$ von ihnen linear dargestellt werden:

$$\mathfrak{a}_{rs} = \frac{1}{2}A_{rs}g^{ij}\mathfrak{a}_{ij} + B_{rs}^{\cdot\cdot t}\mathfrak{c}_t\,,$$

daraus folgt durch Überschiebung mit g^{rs} oder $\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot u}$

$$A_{rs}g^{rs} = 2\,, \qquad B_{rs}^{\cdot\cdot t}g^{rs} = 0\,,$$

$$A_{rs}\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot t} = 0\,, \qquad B_{rst}\bar{b}^{rs}_{\cdot\cdot u} = g_{tu}\,.$$

Somit können wir schliessen

$$A_{rs} = g_{rs} \qquad \text{und} \qquad B_{rst} = b_{rst}$$

und erhalten deswegen

$$\mathfrak{a}_{rs} = -\epsilon g_{rs}\mathfrak{a} + g_{rs}\mathfrak{b} + b_{rs}^{\cdot\cdot t}\mathfrak{c}_t \,, \tag{87}$$

wenn man (60) ersetzt. Ganz ähnlich erkennen wir sofort

$$\mathfrak{A}_{rs} = -\epsilon g_{rs}\mathfrak{A} + g_{rs}\mathfrak{B} + b_{rs}^{\cdot\cdot t}\mathfrak{C}_t \,. \tag{87}'$$

Aus (87) folgt sogleich

$$((\mathfrak{a}_{rs}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) = -\epsilon g_{rs}\mathfrak{A} + g_{rs}((\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) + b_{rs}^{\cdot\cdot t}((\mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) \,, \tag{88}$$

daraus kann man wieder (82) und (83) ableiten.

(48) und (67) zusammen geben uns andererseits

$$((\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a})) = \frac{\epsilon}{3} g_{rs}\mathfrak{A} + \frac{1}{3} g_{rs}\mathfrak{B} + g_{rs}\mathfrak{R} \,, \tag{89}$$

wobei $\mathfrak{R}$ eine solche Fläche zweiter Klasse ist, dass

$$\mathfrak{a}\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{R} = \mathfrak{b}\mathfrak{R} = 0 \tag{90}$$

und auch

$$\mathfrak{a}_{rs}\mathfrak{R} = \mathfrak{c}_t\mathfrak{R} = 0 \tag{91}$$

ist, da aus (67)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_{ij}, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) &= g_{ij}g_{rs}\left(-\frac{\epsilon^2}{3}\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \frac{1}{3}\mathfrak{b}\mathfrak{B}\right) + b_{ij}^{\cdot\cdot t} g_{rs}\mathfrak{c}_t\mathfrak{R} \\ &= b_{ij}^{\cdot\cdot t} g_{rs}\mathfrak{c}_t\mathfrak{R} \\ &= 0\end{aligned}$$

wegen (59) folgt.

(70) wird wegen (89)

$$\mathfrak{B} = -3((\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) - 6\mathfrak{R} \,. \tag{92}$$

Es seien $\mathfrak{d}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) die Flächen zweiter Ordnung, für welche die Beziehungen

$$\mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{A} = \mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{A}_i = \mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{B} = \mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{C}_i = 0 \tag{93}$$

gelten. Diese Flächen werden natürlich nicht eindeutig bestimmt, sondern sie haben je vier Freiheiten, d.h. zusammen 12. Die Flächen zweiter Klasse $\mathfrak{D}_\alpha$ bestimmen sich dann durch die Beziehungen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{a}_i\mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{b}\mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{c}_i\mathfrak{D}_\alpha = 0 \tag{94}$$

und

$$\mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{D}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{95}$$

für jedes System von $\mathfrak{d}_\alpha$.

Man nehme dann $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{d}_\alpha$ bezw. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{D}_\alpha$ als Grundflächen zweiter Ordnung bezw. zweiter Klasse an, und kann alle andere Flächen zweiter Ordnung bezw. zweiter Klasse mit ihnen linear darstellen. Zwischen diesen Grundflächen besteht das Multiplikationsgesetz gemäss folgender Tabelle:

(96)

	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_i$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}_i$	$\mathfrak{d}_\alpha$
$\mathfrak{A}$	ϵ	0	0	0	0
$\mathfrak{A}_j$	0	g_{ij}	0	0	0
$\mathfrak{B}$	0	0	ϵ	0	0
$\mathfrak{C}_j$	0	0	0	k_{ij}	0
$\mathfrak{D}_\beta$	0	0	0	0	$\delta_{\alpha\beta}$

Um die anderen Ableitungsgleichungen zu finden, müssen wir zuerst die Koeffizienten der Gleichung

$$\mathfrak{b}_i = A_i\mathfrak{A} + B_i{}^j\mathfrak{a}_j + C_i\mathfrak{b} + D_i{}^j\mathfrak{c}_j + \sum_\alpha E_{i\alpha}\mathfrak{d}_\alpha \tag{97}$$

berechnen. Multipliziert man $\mathfrak{A}$, dann folgt nach (96) und (73)

$$0 = \mathfrak{b}_i \mathfrak{A} = \epsilon A_i$$

und ähnlich durch Multiplikation von $\mathfrak{A}_k$ nach (87)′

$$B_{ik} = \mathfrak{b}_i \mathfrak{A}_k = -\epsilon g_{ik} ,$$

da

$$\mathfrak{b}_i \mathfrak{A}_k = -\mathfrak{b} \mathfrak{A}_{ki} = -\epsilon g_{ik}$$

ist. (74) zeigt ferner $C_i = 0$. Somit lautet (97) schliesslich

$$\mathfrak{b}_i = -\epsilon \delta_i^j \mathfrak{a}_j + q_i^{\cdot j} \mathfrak{c}_j + \sum_\alpha r_{i\alpha} \mathfrak{d}_\alpha , \tag{98}$$

wenn man

$$\mathfrak{b}_i \mathfrak{C}_k = q_{ij} k_k^j , \qquad \mathfrak{b}_i \mathfrak{D}_\alpha = r_{i\alpha} \tag{99}$$

setzt. Durch dualistische Betrachtung erhalten wir daraus sogleich

$$\mathfrak{B}_i = -\epsilon \mathfrak{d}_i^j \mathfrak{A}_j + \bar{q}_i^{\cdot j} \mathfrak{C}_j + \sum_\alpha \bar{r}_{i\alpha} \mathfrak{D}_\alpha , \tag{98}′$$

wobei

$$\mathfrak{c}_k \mathfrak{B}_i = \bar{q}_{ij} k_k^j \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{d}_\alpha \mathfrak{B}_i = \bar{r}_{i\alpha} \tag{99}′$$

ist.

Aus (84) folgt wegen (85)

$$\mathfrak{c}_{t,i} \mathfrak{A} = 0 \tag{100}$$

und aus (85)′ wegen (87)′

$$\mathfrak{c}_{t,i} \mathfrak{A}_k = -\mathfrak{c}_t \mathfrak{A}_{k,i} = -b_{ki}^{\cdot\cdot u} k_{ut} . \tag{101}$$

Es ist ferner

$$\mathfrak{c}_{t,i} \mathfrak{B} = -\bar{q}_{iu} k_t^u , \tag{102}$$

da nach (86) und (99)′

$$\mathfrak{c}_{t,i} \mathfrak{B} = -\mathfrak{c}_t \mathfrak{B}_i = -\bar{q}_{iu} k_t^u$$

ist. Somit muss $\mathfrak{c}_{t,i}$ in folgender Weise durch die Grundflächen linear dargestellt werden:

$$\mathfrak{c}_{t,i} = -b^{j}_{\cdot iu}k^{u}_{t}\mathfrak{a}_{j} - \epsilon\bar{q}_{iu}k^{u}_{t}\mathfrak{b} + t^{\cdot\cdot u}_{it}\mathfrak{c}_{u} + \sum_{\alpha} u_{iu\alpha}k^{u}_{t}\mathfrak{d}_{\alpha}\,, \tag{103}$$

wobei

$$\mathfrak{c}_{t,i}\mathfrak{B}_{k} = t_{itu}k^{u}_{k}\,, \qquad \mathfrak{c}_{t,i}\mathfrak{D}_{\alpha} = u_{iu\alpha}k^{u}_{t} \tag{104}$$

sind. Dualistisch wird deswegen

$$\mathfrak{C}_{t,i} = -b^{j}_{\cdot iu}k^{u}_{t}\mathfrak{A}_{j} - \epsilon q_{iu}k^{u}_{t}\mathfrak{B} + \bar{t}^{\cdot\cdot u}_{it}\mathfrak{C}_{u} + \sum_{\alpha}\bar{u}_{iu\alpha}k^{u}_{t}\mathfrak{D}_{\alpha}\,, \tag{103}'$$

wobei analog

$$\mathfrak{c}_{k}\mathfrak{C}_{t,i} = \bar{t}_{itu}k^{u}_{k}\,, \qquad \mathfrak{d}_{\alpha}\mathfrak{C}_{t,i} = \bar{u}_{iu\alpha}k^{u}_{t} \tag{104}'$$

sind.

Da man nach (82) durch kovariante Differenzierung

$$k_{tu,i} = \mathfrak{c}_{t,i}\mathfrak{C}_{u} + \mathfrak{c}_{t}\mathfrak{C}_{u,i}$$

erhalten kann, folgt aus (104) und (104)′

$$k_{tu,i} = t_{itr}k^{r}_{u} + \bar{t}_{iur}k^{r}_{t}\,, \tag{105}$$

deswegen kann man $\bar{t}_{iur}$ durch k_{tu} und t_{iur} darstellen.

In analoger Weise können wir

$$\mathfrak{d}_{\alpha,i} = -\epsilon\bar{r}_{i\alpha}\mathfrak{b} - \bar{u}^{t}_{i\cdot\alpha}\mathfrak{c}_{t} + \sum_{\beta} v_{i\alpha\beta}\mathfrak{d}_{\beta}\,, \tag{106}$$

$$\mathfrak{D}_{\alpha,i} = -\epsilon r_{i\alpha}\mathfrak{B} - u^{t}_{i\cdot\alpha}\mathfrak{C}_{t} - \sum_{\beta} v_{i\beta\alpha}\mathfrak{D}_{\beta} \tag{106}'$$

bekommen, da wegen (99) bezw. (99)′

$$\mathfrak{d}_{\alpha,i}\mathfrak{B} = -\mathfrak{d}_{\alpha}\mathfrak{B}_{i} = -\bar{r}_{i\alpha}\,, \tag{107}$$

$$\mathfrak{b}\mathfrak{D}_{\alpha,i} = -\mathfrak{b}_{i}\mathfrak{D}_{\alpha} = -r_{i\alpha}\,, \tag{107}'$$

und wegen (104) bezw. (104)′

$$\mathfrak{d}_{\alpha,i}\mathfrak{C}_{t} = -\mathfrak{d}_{\alpha}\mathfrak{C}_{t,i} = -\bar{u}_{iu\alpha}k^{u}_{t}\,, \tag{108}$$

$$\mathfrak{c}_t\mathfrak{D}_{\alpha,i} = -\mathfrak{c}_{t,i}\mathfrak{D}_\alpha = -u_{iu\alpha}k_t^u \tag{108)'}$$

sind, wobei man setzt:

$$\mathfrak{d}_{\alpha,i}\mathfrak{D}_\beta = v_{i\alpha\beta} = -\mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{D}_{\beta,i}\,, \tag{109}$$

die aus (95) sogleich abgeleitet ist.

Die Gleichungen (87), (98), (103) und (106) bezw. (87)', (98)', (103)' und (106)' sind die gesuchten Ableitungsgleichungen für das LIEsche F_2-System. Wir haben hierbei viele neue Affinoren

$$q_{ij}\,,\ \bar{q}_{ij}\,,\ t_{ijk}\,,\ u_{ij\alpha}\,,\ \bar{u}_{ij\alpha}\,,\ v_{i\alpha\beta}$$

bekommen, aber sie lassen sich durch die drei Affinoren g_{ij}, b_{ijk} und k_{ij} darstellen, wenn man die noch nicht völlig bestimmten Flächen $\mathfrak{d}_\alpha$ passend erwählt, wie wir im folgenden ersehen können.

§ 8. DIE INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN.

Wir wollen nun die Integrabilitätsbedingungen für die Ableitungsgleichungen suchen. Differenzierend (87) kovariantlich und ellimi-nierend die Ableitungen der Grundflächen aus denen vermöge der Ableitungsgleichungen, lauten die dritten kovarianten Ableitungen von $\mathfrak{a}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{rst} &= -\epsilon g_{rs}\mathfrak{a}_t + g_{rs}\mathfrak{b}_t + b_{rs\cdot,t}^{\cdot\cdot i}\,\mathfrak{c}_i + b_{rs}^{\cdot\cdot i}\mathfrak{c}_{i,t}\\
&= -2\epsilon g_{rs}\mathfrak{a}_t + g_{rs}(q_t^i\mathfrak{c}_i + \sum_\alpha r_{t\alpha}\mathfrak{d}_\alpha) + b_{rs\cdot,t}^{\cdot\cdot i}\,\mathfrak{c}_i\\
&\quad + b_{rs}^{\cdot\cdot i}(-b_{\cdot tu}^{j}k_i^u\mathfrak{a}_j - \epsilon\bar{q}_{tu}k_i^u\mathfrak{b} + t_{ti}^{\cdot\cdot u}\mathfrak{c}_u + \sum_\alpha u_{tu\alpha}k_i^u\mathfrak{d}_\alpha)\\
&= -(2\epsilon g_{rs}\delta_t^j + b_{rs}^{\cdot\cdot i}b_{\cdot tu}^{j}k_i^u)\mathfrak{a}_j - \epsilon b_{rs}^{\cdot\cdot i}\bar{q}_{tu}k_i^u\mathfrak{b}\\
&\quad + (g_{rs}q_t^{\cdot j} + b_{rs\cdot,t}^{\cdot\cdot j} + b_{rs}^{\cdot\cdot i}t_{ti}^{\cdot\cdot j})\mathfrak{c}_j + \sum_\alpha (g_{rs}r_{t\alpha} + b_{rs}^{\cdot\cdot i}u_{tu\alpha}k_i^u)\mathfrak{d}_\alpha\,.
\end{aligned}$$

Es mu s dafür

$$\mathfrak{a}_{r[st]} = \frac{1}{2}R_{r\cdot ts}^{\cdot j}\mathfrak{a}_j$$

gelten damit die Gleichungen (87) integrabel sein sollen, wobei R_{rjts} den Krümmungstensor in bezug auf den Fundamentaltensor g_{ij} bezeichnet. Somit erhalten wir die folgenden Bedingungen:

$$2\epsilon g_{r[s}g_{t]j} + b_{r[s}^{\cdot\cdot i}b_{t]ju}k_i^u = \frac{1}{2}R_{rjts}\,, \tag{110}$$

$$b_{r[s}^{\cdot\cdot i}\bar{q}_{t]u}k_i^u = 0\,, \tag{111}$$

$$g_{r[s}q_{t]j} + b_{r[s|j|,t]} + b_{r[s}^{\cdot\cdot i}t_{t]ij} = 0\,, \tag{112}$$

$$g_{r[s}r_{t]x} + b_{r[s}^{\cdot\cdot i}u_{t]ux}k_i^u = 0 \tag{113}$$

und auch durch dualistische Betrachtung aus

$$\mathfrak{A}_{r[st]} = \frac{1}{2}R_{r\cdot ts}^{\cdot j}\mathfrak{A}_j$$

die Bedingungen (110) und

$$b_{r[s}^{\cdot\cdot i}q_{t]u}k_i^u = 0\,, \tag{111}'$$

$$g_{r[s}\bar{q}_{t]j} + b_{r[s|j|,t]} + b_{r[s}^{\cdot\cdot i}\bar{t}_{t]ij} = 0\,, \tag{112}'$$

$$g_{r[s}\bar{r}_{t]x} + b_{r[s}^{\cdot\cdot i}\bar{u}_{t]ux}k_i^u = 0\,. \tag{113}'$$

Durch Überschiebung mit g^{rs} können wir aus (110) wegen (76)

$$2\epsilon g_{tj} - b_t^{\cdot ri}b_{jru}k_i^u = -g_{tj}R$$

d.h.

$$b_t^{\cdot ri}b_{jru}k_i^u = (2\epsilon + R)g_{tj} \tag{114}$$

herleiten, da im zweidimensionalen Fall

$$R_{rjts} = (g_{rt}g_{js} - g_{rs}g_{jt})R \tag{115}$$

ist, wobei R das GAUSSische Krümmungsmass des metrischen Fundamentaltensor g_{ij} bedeutet, d.h.

$$R = -\frac{1}{2}R_{\cdot\cdot ts}^{st}\,. \tag{116}$$

Wenn man

$$b_{rsu}k_t^u = c_{rst} \tag{117}$$

setzt, dann kann man (116) wie folgt umschreiben:

$$b_t^{ri}c_{sri} = (2\epsilon + R)g_{st} \tag{118}$$

und c_{rst} ist natürlich in bezug auf die ersten zwei Indexes symmetrisch und mit g_{rs} apolar, d. h.

$$g^{rs}c_{rst} = 0\ . \tag{119}$$

Mit derselben Methode wie oben können wir aus (110)

$$c_r^{\cdot st}q_{st} = 0 \tag{120}$$

überführen und ebenso aus (110)′

$$c_r^{\cdot st}\bar{q}_{st} = 0\ . \tag{120}'$$

(112) bezw. (112)′ gibt in derselben Weise

$$q_{ts} = b_{t\cdot s,r}^{r} + b_t^{ri}t_{ris} \tag{121}$$

bezw.

$$\bar{q}_{ts} = b_{t\cdot s,r}^{r} + b_t^{ri}\bar{t}_{ris}\ , \tag{121}'$$

daraus folgt wegen (120) und (120)′

$$c_r^{\cdot tj}b_t^{\cdot si}(t_{sij} - \bar{t}_{sij}) = 0 \tag{122}$$

und

$$c_r^{\cdot tj}\{2b_{t\cdot j,s}^{s} + b_t^{\cdot si}(t_{sij} + \bar{t}_{sij})\} = 0\ . \tag{123}$$

(121) sowie (121)′ zeigt uns, dass q_{ts} sowie $\bar{q}_{ts}$ durch g_{ij}, b_{ijk}, k_{ij} und t_{ijk} dargestellt werden kann, da $\bar{t}_{ijk}$ so ist. Durch (105) wird (122)

$$b_r^{\cdot tu}b_t^{\cdot si}(t_{sij}k_u^j + t_{suj}k_i^j - k_{ui,s}) = 0$$

d. h.

$$2b_r^{\cdot tu}b_t^{\cdot si}t_{s(i|j|}k_{u)}^{j} = b_r^{\cdot tu}b_t^{\cdot si}k_{ui,s} \tag{124}$$

und (123)

$$\begin{aligned} 2b_r^{\cdot tu}b_t^{\cdot si}t_{s[u|j|}k_{i]}^{j} &= b_r^{\cdot tu}b_t^{\cdot si}k_{ui,s} + 2c_r^{\cdot tj}b_{t\cdot j,s}^{s} \\ &= b_r^{\cdot tu}c_{t\cdot u,s}^{s} + c_r^{\cdot tj}b_{t\cdot j,s}^{s} . \end{aligned} \tag{125}$$

Andererseits geht ähnlich aus (113) bezw. (114) hervor

$$r_{t\alpha} = c_t^{\cdot rs}u_{rs\alpha} \qquad \text{bezw.} \qquad \bar{r}_{t\alpha} = c_t^{\cdot rs}\bar{u}_{rs\alpha} , \tag{126}$$

deswegen ersieht man, dass $r_{t\alpha}$ bezw. $\bar{r}_{t\alpha}$ durch g_{ij}, b_{ijk}, k_{ij} und u_{ijk} bezw. $\bar{u}_{ijk}$ dargestellt werden kann.

Da wir durch kovariante Differenzierung aus (98)

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{rs} = & -\epsilon\delta_r^j\mathfrak{a}_{js} + q_{r\cdot,s}^{\cdot j}\mathfrak{c}_j + \sum_\alpha r_{r\alpha,s}\mathfrak{d}_\alpha + q_r^{\cdot j}\mathfrak{c}_{j,s} + \sum_\alpha r_{r\alpha}\mathfrak{d}_{\alpha,s} \\ = & \; g_{rs}\mathfrak{a} - q_r^{\cdot j}c_{\cdot sj}^{t}\mathfrak{a}_t \\ & -\epsilon(g_{rs} + q_{rj}\bar{q}_{su}k^{ju} + \sum_\alpha r_{r\alpha}\bar{r}_{s\alpha})\mathfrak{b} \\ & +(-\epsilon b_{rs}^{\cdot\cdot t} + q_{r\cdot,s}^{\cdot t} + q_r^{\cdot j}t_{sj}^{\cdot\cdot t} - \sum_\alpha r_{r\alpha}\bar{u}_{s\cdot\alpha}^{\cdot t})\mathfrak{c}_t \\ & +\sum_\beta (r_{r\beta,s} + q_{rj}u_{su\beta}k^{ju} + \sum_\alpha r_{r\alpha}v_{s\alpha\beta})\mathfrak{d}_\beta \end{aligned}$$

erhalten, wird die Integrabilitätsbedingungen von (98) aus

$$\mathfrak{b}_{[rs]} = 0$$

wie folgt:

$$q_{[r}^{\cdot j}c_{s]tj} = 0 , \tag{127}$$

$$q_{[r|j|}\bar{q}_{s]u}k^{ju} + \sum_\alpha r_{[r|\alpha|}\bar{r}_{s]\alpha} = 0 , \tag{128}$$

$$q_{[r\cdot,s]}^{\cdot t} + q_{[r}^{\cdot j}t_{s]j}^{\cdot\cdot t} - \sum_\alpha r_{[r|\alpha|}\bar{u}_{s]\cdot\alpha}^{\cdot t} = 0 , \tag{129}$$

$$r_{[r|\beta|,s]} + q_{[r|j|}u_{s]u\beta}k^{ju} + \sum_\alpha r_{[r|\alpha|}v_{s]\alpha\beta} = 0 \tag{130}$$

und dieselbe von (98)′ aus

$$\mathfrak{R}_{[rs]} = 0$$

ausser (128)

(127)′ $$\bar{q}_{[r}^{\cdot j} c_{s]tj} = 0 ,$$

(129)′ $$\bar{q}_{[r}^{\cdot t}{}_{\cdot, s]} + \bar{q}_{[r}^{\cdot j} \bar{t}_{s]j}^{\cdot t} - \sum_{\alpha} \bar{r}_{[r|\alpha|} u_{s]\cdot\alpha}^{\cdot t} = 0 ,$$

(130)′ $$\bar{r}_{[r|\beta|, s]} + \bar{q}_{[r|j} \bar{u}_{s]u;} k^{ju} - \sum_{\alpha} \bar{r}_{[r|\alpha|} v_{s]\beta\alpha} = 0 .$$

(127) und (127)′ sind nichts anderes als (111) und (111)′. (128) gibt nach (121) und (126)

(131) $$b_r^{\cdot ij} b_s^{\cdot kl} \{ t_{ijp} \bar{t}_{klq} k^{pq} - t_{klp} \bar{t}_{ijq} k^{pq} + k_j^p k_l^q \sum_{\alpha} (u_{ip\alpha} \bar{u}_{kq\alpha} - u_{kq\alpha} \bar{u}_{ip\alpha}) \} = 0.$$

Die Bedingungen

$$\mathfrak{c}_{t,[rs]} = \frac{1}{2} R_{t\cdot sr}^{\cdot j} \mathfrak{c}_j$$

geben in ganz analoger Weise

(132) $$c_{j[r|t|, s]} - k_t^u \bar{q}_{[r|u|} g_{s]j} + t_{[r|\dot{t}|}^{\cdot u} c_{s]ju} = 0 ,$$

(133) $$\bar{q}_{[r|u|, s]} k_t^u + \bar{q}_{[r|u|} k^u{}_{|t|, s]} + t_{[r|\dot{t}|}^{\cdot u} \bar{q}_{s]v} k_u^v + \sum_{\alpha} u_{[r|u\alpha|} \bar{r}_{s]\alpha} k_t^u = 0 ,$$

(134) $$-c_{\cdot[r|t}^{u} b_{s]uj} + t_{[r|tj|, s]} - \epsilon \bar{q}_{[r|u|} q_{s]j} k_t^u + t_{[r|\dot{t}|}^{\cdot u} t_{s]uj} - \sum_{\alpha} u_{[r|u\alpha|} \bar{u}_{s]j\alpha} k_t^u = \frac{1}{2} R_{tjsr} ,$$

(135) $$u_{[r|u\beta|, s]} k_t^u + u_{[r|u\beta|} k^u{}_{|t|, s]} - \epsilon \bar{q}_{[r|u|} r_{s]\beta} k_t^u + t_{[r|\dot{t}|}^{\cdot u} u_{s]v\beta} k_u^v + \sum_{\alpha} u_{[r|u\alpha|} v_{s]\alpha\beta} k_t^u = 0$$

und

$$\mathfrak{C}_{t,[rs]} = \frac{1}{2} R_{t\cdot sr}^{\cdot j} \mathfrak{C}_j$$

dualistisch

(132)′ $$c_{j[r|t|, s]} - k_t^u q_{[r|u|} g_{s]j} + \bar{t}_{[r|\dot{t}|}^{\cdot u} c_{s]ju} = 0 ,$$

$$(133)' \qquad q_{[r|u|,s]}k^u_t + q_{[r|u|}k^u{}_{|t|,s]} + \overset{*}{t}_{[r|}{}^{\cdot}{}_{|t|}{}^{u}q_{s]v}k^v_u + \sum_\alpha \overline{u}_{[r|u\alpha|}r_{s]\alpha}k^u_t = 0 \ ,$$

$$(134)' \qquad -c^u_{\cdot[r|t|}b_{s]uj} + \overset{*}{t}_{[r|tj|,s]} - \epsilon q_{[r|u|}\overline{q}_{s]j}k^u_t + \overset{*}{t}_{[r|}{}^{\cdot}{}_{|t|}{}^{u}\overset{*}{t}_{s]uj}$$
$$- \sum_\alpha \overline{u}_{[r|u\alpha|}u_{s]j\alpha}k^u_t = \frac{1}{2}R_{tjsr} \ ,$$

$$(135)' \qquad \overline{u}_{[r|u\beta|,s]}k^u_t + \overline{u}_{[r|u\beta|}k^u{}_{|t|,s]} - \epsilon q_{[r|u|}\overline{r}_{s]\beta}k^u_t + \overset{*}{t}_{[r|}{}^{\cdot}{}_{|t|}{}^{u}\overline{u}_{s]v\beta}k^v_u$$
$$- \sum_\alpha \overline{u}_{[r|u\alpha|}v_{s]\beta\alpha}k^u_t = 0 \ .$$

(132) bezw. (132)′ ist nichts anderes als (112)′ bezw. (112). Weil aus (132) z.B. durch Überschiebung mit g^{rj} nach (105) entsteht

$$\begin{aligned} \overline{q}_{su}k^u_t &= c^r_{\cdot st,r} - t^{r\cdot}_{\cdot t}{}^{u}c_{sru} \\ &= b^r_{\cdot su,r}k^u_t + b^r_{\cdot su}k^u_{t\ ,r} - t^{r\cdot}_{\cdot t}{}^{w}b_{rsu}k^u_w \\ &= b^r_{\cdot su,r}k^u_t + b^{\cdot rw}_{s}\overset{*}{t}_{rwu}k^u_t \ , \end{aligned}$$

die man aus (121)′, folglich aus (112)′, gleich ausführen kann. Ausserdem ist (133) bezw. (133)′ mit (129)′ bezw. (129) identisch, da z.B.

$$\begin{aligned} \overline{q}_{[r|u|}k^u{}_{|t|,s]} + t_{[r|}{}^{\cdot}{}_{|t|}{}^{u}q_{s]v}k^v_u &= \overline{q}_{[r|u|}k^u{}_{|t|,s]} - q_{[r}{}^{\cdot u}t_{s]tv}k^v_u \\ &= \overline{q}_{[r|u|}(k^u{}_{|t|,s]} - t_{s]tv}k^{vu}) \\ &= \overline{q}_{[r|u|}\overset{*}{t}{}^{\cdot u}_{s]\cdot v}k^v_t \end{aligned}$$

ist.

Aus der Bedingung

$$\mathfrak{d}_{\alpha,[rs]} = 0 \qquad \text{bezw.} \qquad \mathfrak{D}_{\alpha,[rs]} = 0$$

werden wir ausser (113)′, (130)′ und (135)′ bezw. (113), (130) und (135)

$$(136) \qquad v_{[r|\alpha\beta|,s]} - \epsilon\overline{r}_{[r|\alpha|}r_{s]\beta} - \overline{u}_{[r\cdot}{}^{\cdot t}{}_{|\alpha|}u_{s]u\beta}k^u_t + \sum_\gamma v_{[r|\alpha\gamma|}v_{s]\gamma\beta} = 0$$

erhalten, die zu selbst dualistisch ist.

§ 9. DAS SYSTEM DER FUNDAMENTALEN GRUNDAFFINOREN.

In hervorgehenden Paragraphen haben wir viele Affinoren eingeführt, die mit dem LIEschen F_2-Systeme projektiv invariantlich verknüpft sind, von denen aber einige durch andere ausgedrückt sind. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass die oben eingeführten Affinoren alle durch g_{ij}, b_{ijk} und k_{ij} dargestellt werden können, d.h. dass diese drei letztgenannten die fundamentalen sind.

Zuerst betrachten wir wegen (105)

$$k_{kt,i} = t_{itu}k_k^u + \bar{t}_{iku}k_t^u = \mathfrak{C}_k\mathfrak{c}_{t,i} + \mathfrak{C}_{k,i}\mathfrak{c}_t \tag{137}$$

und es ist nach (83)

$$\mathfrak{C}_k\mathfrak{c}_{t,i} = 3(\mathfrak{c}_{t,i}, \mathfrak{c}_k, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = t_{itu}k_k^u$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{k,i}\,\mathfrak{c}_t &= 3(\mathfrak{c}_t, \mathfrak{c}_{k,i}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 6(\mathfrak{c}_k, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}) \\ &= t_{itu}k_k^u + 6(\mathfrak{c}_k, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}),\end{aligned}$$

deswegen wird (137)

$$k_{kt,i} = t_{itu}k_k^u + t_{iku}k_t^u + 6(\mathfrak{c}_k, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a})$$

d.h.

$$6(\mathfrak{c}_k, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}) = k_{kt,i} - t_{itu}k_k^u + t_{iku}k_t^u\,. \tag{138}$$

Andererseits folgt aus (59)

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_j(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) \\ &= (\mathfrak{c}_{i,j}, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c}_i, \mathfrak{a}_{rj}, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) \\ &\qquad + (\mathfrak{c}_i, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{sj}, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c}_i, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}_j) \\ &= (\mathfrak{c}_{i,j}, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) + (b_{rj}^{\cdot\cdot p}\delta_s^q + b_{sj}^{\cdot\cdot p}\delta_r^q)(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_p, \mathfrak{a}_q, \mathfrak{a})\end{aligned} \tag{139}$$

wegen (51) und (87), und aus (89) und (103)

$$(140)\qquad (\mathfrak{c}_{i,j}, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}) = \frac{1}{3} g_{rs}\mathfrak{c}_{i,j}\,\mathfrak{B} + g_{rs}\mathfrak{c}_{i,j}\,\mathfrak{R}$$

$$= -\frac{1}{3}\bar{q}_{ju}k^u_i g_{rs} + \frac{1}{6} g_{rs}(q_{ju}k^u_i + \bar{q}_{ju}k^u_i)$$

$$= \frac{1}{6} g_{rs}(q_{ju}k^u_i - \bar{q}_{ju}k^u_i)\ .$$

Somit ist

$$(141)\qquad (b_{rj}^{\cdot\cdot p}\delta_s^{\ q} + b_{sj}^{\cdot\cdot p}\delta_r^{\ q})\,(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_p, \mathfrak{a}_q, \mathfrak{a}) = -\frac{1}{6} g_{rs}(q_{ju} - \bar{q}_{ju})k^u{}_i\ .$$

Ersetzt man $(\mathfrak{c}_k, \mathfrak{c}_p, \mathfrak{a}_q, \mathfrak{a})$ in dieser Beziehung durch (138) und q_{ju} sowie $\bar{q}_{ju}$ durch (121) sowie (121)', so bekommt man wegen (137)

$$(b_{rj}^{\cdot\cdot p}\delta_s^{\ q} + b_{sj}^{\cdot\cdot p}\delta_r^{\ q})(k_{ip,q} - t_{qpu}k^u{}_i - t_{qiu}k^u{}_p)$$

$$= -g_{rs}b_j^{\cdot kl}(t_{klu} - \bar{t}_{klu})k^u{}_i$$

$$= -g_{rs}b_j^{\cdot kl}(t_{klu}k^u{}_i + t_{kiu}k^u{}_l - k_{li,k})$$

d.h.

$$(142)\qquad (b_{rj}^{\cdot\cdot p}\delta_s^{\ q} + b_{sj}^{\cdot\cdot p}\delta_r^{\ q} - g_{rs}b_j^{\cdot pq})(k_{ip,q} - t_{qpu}k^u{}_i - t_{qiu}k^u{}_p) = 0\ ,$$

daraus folgt sofort durch Überschiebung mit $b_{\cdot\cdot t}^{rs}$

$$(143)\qquad b_{rj}^{\cdot\cdot p}b_{\cdot\cdot t}^{rq}(k_{ip,q} - t_{qpu}k^u{}_i - t_{qiu}k^u{}_p) = 0\ .$$

Diese Gleichung ist mit (142) ganz gleichwertig. Weil der Affinor

$$A_{rsj}^{pq} = b_{rj}^{\cdot\cdot p}\delta_s^{\ q} + b_{sj}^{\cdot\cdot p}\delta_r^{\ q} - g_{rs}b_j^{\cdot pq}$$

in bezug auf r und s symmetrisch und mit g^{rs} apolar ist:

$$A_{rsj}^{pq}g^{rs} = 0\ ,$$

deshalb soll er wie folgt dargestellt werden:

$$A^{pq}_{rsj} = \overset{\cdot\cdot t}{b}_{rs} \overset{uv}{b}_{\cdot\cdot t} A^{pq}_{uvj} \quad (1) .$$

(143) enthält in der Tat (124), wie wir durch Überschiebung mit g^{it} und dann durch Vertauschung von i und p (2) aus (143) erkennen werden. (143) geben uns im ganzen acht Gleichungen in bezug auf die Klammerausdrücke, aber der Rang der Determinante

$$\begin{vmatrix} P^{11}_{11} & P^{12}_{11} & P^{21}_{11} & P^{22}_{11} \\ P^{11}_{12} & P^{12}_{12} & P^{21}_{12} & P^{22}_{12} \\ P^{11}_{21} & P^{12}_{21} & P^{21}_{21} & P^{22}_{21} \\ P^{11}_{22} & P^{12}_{22} & P^{21}_{22} & P^{22}_{22} \end{vmatrix}$$

ist im allgemeinen drei(3), somit sind nur sechs von den acht Gleichungen voneinander unabhängig, wobei wir $\overset{\cdot\cdot p}{b}_{rj} \overset{rq}{b}_{\cdot\cdot t}$ mit P^{pq}_{jt} bezeichnen. Um den Affinor t_{ijk} durch andere auszudrücken, fehlen noch zwei Gleichungen, da er acht Bestimmungszahlen hat. Die zwei Gleichungen gehen aber aus (125) hervor. Wir kennen damit, dass der Affinor t_{ijk} durch drei Affinoren g_{ij}, b_{ijk} und k_{ij} dargestellt werden kann.

Wir haben die Grundflächen $\mathfrak{b}_\alpha$ noch nicht völlig bestimmt und sie haben je vier Freiheiten. Folglich können wir die Affinoren $u_{ij\alpha}$ ganz beliebig festsetzen, abgesehen von der Beschränkung, dass sie voneinander linear unabhängig sein sollen. Wir wollen damit hier z.B.

$$(144) \qquad u_{ij1} = g_{ij} , \quad u_{ij2} = b_{ij1} , \quad u_{ij3} = b_{ij2} , \quad u_{ij4} = e_{ij} ,$$

annehmen, wobei e_{ij} ein schiefsymmetrischer Affinor wie folgt definiert ist:

---

(1) Jeder über r und s symmetrische Affinor $A_{rsp\ldots q}$ wird stets dargestellt:

$$A_{rsp\ldots q} = \frac{1}{2} g_{rs} A^{\cdot t}_{tp\ldots q} + \overset{\cdot\cdot t}{b}_{rs} \overset{uv}{b}_{\cdot\cdot t} A_{uvp\ldots q} .$$

(2) Das ist möglich, da der Ausdrucke in der Klammer in bezug auf i und p symmetrisch ist.

(3) Diese Tatsache werden wir später verifizieren.

$$e_{11} = 0\,, \qquad e_{12} = -e_{21} = \sqrt{G}\,, \qquad e_{22} = 0\,.$$

(135) lässt sich wegen (105) derart umschreiben, dass

$$(145) \qquad u_{[r|u\beta|,s]} - \epsilon \overline{q}_{[r|u|} r_{s]\beta} + \overline{l}^{\,v}_{[r\cdot|u|} u_{s]v\beta} + \sum_{\alpha} u_{[r|u\alpha|} v_{s]\alpha\beta} = 0$$

ist. Wir setzen hier einfachheitshalber

$$Q_{rsu\beta} = -u_{[r|u\beta|,s]} + \epsilon \overline{q}_{[r|u|} r_{s]\beta} - \overline{l}^{\,v}_{[r\cdot|u|} u_{s]v\beta}\,,$$

die nur von g_{ij}, b_{ijk} und k_{ij} gebildet ist, dann wird (145)

$$\sum_{\alpha} u_{[r|u\alpha|} v_{s]\alpha\beta} = Q_{rsu\beta}\,.$$

Berücksichtigend (144) und überschiebend mit $u^{*ur}_{\cdot\cdot\gamma}$, bekommt man daraus

$$(146) \qquad v_{s\gamma\beta} - \sum_{\alpha} u^{*ur}_{\cdot\cdot\gamma} u_{su\alpha} v_{r\alpha\beta} = 2u^{*ur}_{\cdot\cdot\gamma} Q_{rsu\beta}\,,$$

wobei

$$u^{*ur}_{\cdot\cdot 1} = \frac{1}{2} g^{ur}\,, \quad u^{*ur}_{\cdot\cdot 2} = \overline{b}^{ur1}\,, \quad u^{*ur}_{\cdot\cdot 3} = \overline{b}^{ur2}\,, \quad u^{*ur}_{\cdot\cdot 4} = -\frac{1}{2} e^{ur}$$

sind. Betrachtet man (146) als das Gleichungssystem von $v_{r\alpha\beta}$, dann können wir sie in bezug auf $v_{r\alpha\beta}$ auflösen, da die quadratische Matrix mit 8^2 Elementen

$$(147) \qquad M = (\delta^{r}_{s}\delta_{\gamma\alpha} - u^{*ur}_{\cdot\cdot\gamma} u_{su\alpha})$$

den Rang 8 hat, wobei in der Zeile r über 1, 2 und α über 1, 2, 3, 4, aber in der Spalte s über 1, 2 und γ über 1, 2, 3, 4 läuft, die man durch Annahme von Asymptotenlinien als Parameterlinien verifizieren kann. Wir erkennen dann, dass alle $v_{r\alpha\beta}$ sich durch die drei Affinoren g_{ij}, b_{ijk} und k_{ij} darstellen lassen. Andererseits können wir Affinoren $\overline{u}_{ij\alpha}$ durch g_{ij}, b_{ijk}, k_{ij} und $v_{r\alpha\beta}$ darstellen, wenn wir (137) als das Gleichungssystem von $\overline{u}_{ij\alpha}$ ansehen.

Endlich schliessen wir damit:

Alle Affinoren, die mit dem LIEschen F_2*-Systeme projektiv invariantlich verknüpftet sind, lassen sich durch* g_{ij}, b_{ijk} *und* k_{ij} *darstellen.*

Wir fügen noch eine Relation hinzu. (83) und (86) zeigen uns ohne weiteres

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_j(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \\ &= (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}_{t,j}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 2(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}) , \end{aligned}$$

daraus folgt wegen (65) und (89)

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_i \mathfrak{C}_t &= 3(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_t, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = -3(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}_{t,i}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \\ &= -3\mathfrak{c}_{t,i}((\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})) = \mathfrak{c}_{t,i}\mathfrak{B} + 6\mathfrak{c}_{t,i}\mathfrak{R} . \end{aligned}$$

Somit erhält man aus (99) und (102)

$$q_{ji}k^i{}_t + \overline{q}_{ji}k^i{}_t = 6\mathfrak{c}_{t,j}\mathfrak{R} . \tag{148}$$

§ 10. BEZIEHUNG MIT DER FUBINISCHEN THEORIE.

Wir wollen jetzt die Gelegenheit ergreifen, zu prüfen, wie eng unsere Theorie mit FUBINIschen verknüpft ist. Darum ist es am besten, dass wir unsere invarianten Affinoren sowie andere Grössen mit der FUBINIschen Bezeichnungen einführen.

Wir bezeichnen die projektive Transformation mit P, welche ein beliebiges Koordinatensystem dem in § 1 eingeführten begleitenden Koordinatensystem X_α der Fläche überträgt. Dann hat die Determinante von P den Wert

$$|P| = |\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_u, \mathfrak{b}_v, \mathfrak{n}| = \sqrt{G}\ ^{(1)} . \tag{149}$$

Die umgekehrte Transformation von P lässt sich dabei durch P^{-1} darstellen und sie hat die Determinante

(1) FUBINI-ČECH, a. a. O., S. 78, wobei er anstatt $\mathfrak{n}$ die Notation X benützt. Wir setzen hierbei voraus, dass $G > 0$ ist.

$$|P^{-1}| = \frac{1}{\sqrt{G}}. \tag{150}$$

Die LIEsche F_2 der Fläche hat dann die Koordinaten $\mathfrak{a}$ wegen (2):

$$\mathfrak{a} = (4!)^{-\frac{1}{4}} P^{-1} \begin{pmatrix} -g_{11} & -g_{12} & 0 & 0 \\ -g_{21} & -g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \Omega \end{pmatrix}, \tag{151}$$

da

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = (4!)^{-1} 4! \, |P^{-1}|^2 \begin{vmatrix} -g_{11} & -g_{12} & 0 & 0 \\ -g_{21} & -g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \Omega \end{vmatrix} = -1$$

ist, wobei $\Omega = 1-K$ ist. K sei hierbei das GAUSSische Krümmungsmass des metrischen Fundamentaltensor von FUBINI g_{ij}. Und wir ersehen daraus sogleich

$$\mathfrak{A} = \frac{(4!)^{\frac{1}{4}}}{4} G P^{-1} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{21} & 0 & 0 \\ g^{12} & g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-K & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{152}$$

Lässt $\bar{\mathfrak{a}}$ die Grössen in der Klammer in (151) sein, so ist

$$\mathfrak{a} = (4!)^{-\frac{1}{4}} P^{-1} \bar{\mathfrak{a}} \tag{153}$$

d. h.

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_{\alpha,i} x_{\beta,j} = (4!)^{-\frac{1}{4}} \bar{a}_{ij}, \qquad \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = (4!)^{-\frac{1}{4}} \bar{a}_{33}, \\ &\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_{\beta,i} = (4!)^{-\frac{1}{4}} \bar{a}_{i3}, \qquad \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha n_\beta = (4!)^{-\frac{1}{4}} \bar{a}_{34}, \\ &\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} n_\alpha x_{\beta,i} = (4!)^{-\frac{1}{4}} \bar{a}_{i4}, \qquad \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = (4!)^{-\frac{1}{4}} \bar{a}_{44}. \end{aligned} \tag{154}$$

Durch kovariante Differenzierung in bezug auf den FUBINIschen Tensor g_{ij} bekommen wir aus (154) mit Hilfe von Formeln[1]

$$
(155)\qquad \begin{cases}
\mathfrak{x}_{rs} = a_{rs}{}^{p}\mathfrak{x}_{p} + g_{rs}\mathfrak{y} + p_{rs}\mathfrak{x} , \\
\mathfrak{y}_{r} = l_{r}\mathfrak{x} + m_{r}{}^{p}\mathfrak{x}_{p} , \\
m_{rs} = \pi_{rs} + (1-K)g_{rs} , \\
l_{r} + \lambda_{r} = -K_{r} , \\
p_{rs} + \pi_{rs} = a_{rsi}\tau^{i} , \\
-p_{rs} + \pi_{rs} = a_{rsi}\psi^{i} , \\
l_{r} - \lambda_{r} = \tau_{r} - a_{r}{}^{ij}(\psi_{i,j} + \psi_{i}\psi_{j}) , \\
a_{rs}{}^{t}{}_{,t} = a_{rst}\psi^{t}
\end{cases}
$$

die Werte von $\mathfrak{a}_{r}$[2]:

$$
(156)\qquad \mathfrak{a}_{r} = (4!)^{-\frac{1}{4}} P^{-1} \begin{pmatrix} 2a_{11r} & 2a_{12r} & 0 & a_{1ri}\psi^{i} \\ 2a_{21r} & 2a_{22r} & 0 & a_{2ri}\psi^{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{1ri}\psi^{i} & a_{2ri}\psi^{i} & 0 & \Lambda_{r} \end{pmatrix},
$$

daraus kann man sofort erkennen, dass $\mathfrak{a}$ die in § 3 erwähnten Bedingungen für das LIEsche F_2-System wirklich erfüllt.

$\mathfrak{a}_{r}$ kann man nun unmittelbar aus (151) und (156) durch die Relation $\mathfrak{A}_{r} = 3((\mathfrak{a}_{r}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}))$ berechnen:

---

(1) FUBINI-ČECH, a. a. O., S. 349.

(2) Z. B.

$$
\begin{aligned}
(4!)^{-\frac{1}{4}}\bar{a}_{ij,r} &= \nabla_{r}\Big(\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}x_{\alpha,i}x_{\beta,j}\Big) \\
&= \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta,r}x_{\alpha,i}x_{\beta,j} + \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}x_{\alpha,ir}x_{\beta,j} + \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}x_{\alpha,i}x_{\beta,jr} \\
&= \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta,r}x_{\alpha,i}x_{\beta,j} + \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}(a_{ir}{}^{p}x_{\alpha,p} + g_{ir}n_{\alpha} + p_{ir}x_{\alpha})x_{\beta,j} \\
&\qquad + \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}x_{\alpha,i}(a_{jr}{}^{p}x_{\beta,p} + g_{jr}n_{\beta} + p_{jr}x_{\beta}) \\
&= \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta,r}x_{\alpha,i}x_{\beta,j} + (4!)^{-\frac{1}{4}}(a_{ir}{}^{p}\bar{a}_{pj} + g_{ir}\bar{a}_{j4} + p_{ir}\bar{a}_{j3} \\
&\qquad + a_{jr}{}^{p}\bar{a}_{pi} + g_{jr}\bar{a}_{i4} + \gamma_{jr}\bar{a}_{i3}) \\
&= \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta,r}x_{\alpha,i}x_{\beta,j} - (4!)^{-\frac{1}{4}}(a_{irj} + a_{jri}),
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta,r}x_{\alpha,i}x_{\beta,j} = (4!)^{-\frac{1}{4}}(2a_{ijr} + \bar{a}_{ij,r}) = (4!)^{-\frac{1}{4}}(2a_{ijr}).
$$

$$(157)\qquad \mathfrak{A}_r = \frac{(4!)^{\frac{1}{4}}}{4} G P^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{2a_{22r}}{G} & \frac{2a_{21r}}{G} & -a^1{}_{ri}\psi^i & 0 \\ \frac{2a_{12r}}{G} & -\frac{2a_{11r}}{G} & -a^2{}_{ri}\psi^i & 0 \\ -a^1{}_{ri}\psi^i & -a^2{}_{ri}\psi^i & \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\Lambda_r = a_r{}^{ij}(\psi_{i,j} + \psi_i\psi_j) - \tau_r = \lambda_r - l_r$$

ist. Unser Fundamentaltensor g^*_{ij} lässt sich dann folgendermassen schreiben:

$$(158)\qquad g^*_{ij} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{A}_j = -G^{-1}(a_{11i}a_{22j} + a_{22i}a_{11j} - 2a_{12i}a_{21j}) = -g_{ij}\ ^{(1)},$$

d.h. er stimmt bis auf Vorzeichen mit dem FUBINIschen überein. Wir erhalten ähnlicherweise

$$(159)\qquad ((\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a})) = \frac{(4!)^{\frac{1}{4}}}{3\cdot 4} G g_{rs} P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\psi^1 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi^2 & 0 \\ -\psi^1 & -\psi^2 & 2(1-K) + \frac{1}{2}\psi_i\psi^i & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

da

$$\frac{-2(a_{12(r}a_{s)2i} - a_{22(r}a_{s)1i})\psi^i}{G} = -\psi^1 g_{rs} \qquad \text{usw.}$$

(159) ist nichts anderes als (58).

Durch nochmalige kovariante Differenzierung erhalten wir in analoger Weise aus (156)

$$(160)\qquad \mathfrak{a}_{rs} = -(4!)^{-\frac{1}{4}} P^{-1} \begin{pmatrix} A^{(11)}_{rs} & A^{(12)}_{rs} & 2a_{1rs} & A^{(1)}_{rs} \\ A^{(21)}_{rs} & A^{(22)}_{rs} & 2a_{2rs} & A^{(2)}_{rs} \\ 2a_{1rs} & 2a_{2rs} & 0 & a_{rsi}\psi^i \\ A^{(1)}_{rs} & A^{(2)}_{rs} & a_{rsi}\psi^i & A^{(0)}_{rs} \end{pmatrix},$$

(1) FUBINI-ČECH, a. a. O., S. 84.

wobei

$$A^{(0)}_{rs} = a_{isj}a^{i}{}_{rk}(\tau^k+\psi^k)\psi^j+2(1-K)a_{rsi}\psi^i-\Lambda_{r,s}\,,$$

$$A^{(p)}_{rs} = 2(1-K)a_{prs}+a_{pir}a^{i}{}_{sj}(\tau^j+2\psi^j)+g_{ps}\Lambda_r-a_{pr}{}^{i}\psi_{i,s}-a_{pri,s}\psi^i\,,$$

$$A^{(pq)}_{rs} = 2(a_{pr}{}^{i}a_{isq}+a_{qr}{}^{i}a_{isp})+g_{ps}a_{qri}\psi^i+g_{qs}a_{pri}\psi^i-2a_{pqr,s}\,.$$

Man kann (57) wegen (157) und (160) verifizieren[1] und auch (59) wegen (159) und (160).

Es folgt aus (160)

$$\frac{1}{2}g^{rs}\mathfrak{a}_{rs} = -(4!)^{-\frac{1}{4}}P^{-1}\begin{pmatrix} 2g_{11} & 2g_{12} & 0 & \psi_1 \\ 2g_{21} & 2g_{22} & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 & \frac{1}{2}(\Psi-\psi_i\psi^i) \end{pmatrix},$$

folglich

$$\text{(162)}\qquad \mathfrak{b} = -(4!)^{-\frac{1}{4}}P^{-1}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & \psi_1 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \psi_1 & \psi_2 & 1 & -\frac{1}{2}(\Psi-\psi_i\psi^i)-(K-1) \end{pmatrix},$$

---

(1) $$\begin{aligned}\mathfrak{a}_{rs}\mathfrak{N}_t &= \frac{1}{4}(4a^p{}_{ti}\,a_{prs}\psi^i+2\sum_{pq}e^{up}\,e^{vq}\,a_{uvt}\,A^{(pq)}_{rs})\\ &= \frac{1}{2}(2a^p{}_{ti}\,a_{prs}\psi^i-\sum_{pq}a^{pq}{}_t\,A^{(pq)}_{rs})\\ &= \frac{1}{2}(2a^p{}_{ti}\,a_{prs}\psi^i-4a^{pq}{}_t\,a_{pr}{}^i\,a_{isq}-2a^{q}{}_{ts}\,a_{qri}\psi^i+2a^{pq}{}_t\,a_{pqr,s})\\ &= (a^p{}_{ti}\,a_{prs}-a^p{}_{ts}\,a_{pri})\,\psi^i+\frac{1}{2}e_{si}\,e^{lm}\,a^p{}_{tl}\,a_{prm}\,\psi^i\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

da

$$a^{pq}{}_t\,a_{pr}{}^i\,a_{isq}=0 \qquad \text{(161)}$$

und

$$\frac{1}{2}e_{si}\,e^{lm}\,a^p{}_{tl}\,a_{prm}\,\psi^i = a^{pq}{}_t\,a_{pqr,s}\,.$$

Siehe FUBINI-ČECH, a. a. O., § 56. Man kann (161) wie folgt beweisen: Durch Überschiebung mit $a^{tr}{}_v$ erhält man aus

$$a_{rsp}\,a^p{}_{tu}+a_{stp}\,a^p{}_{ru}+a_{usp}\,a^p{}_{tr}=\frac{1}{2}(g_{rs}\,g_{tu}+g_{st}\,g_{ru}+g_{us}\,g_{tr})\,,$$

die in FUBINI-ČECH, a. a. O., S. 500 steht, die Gleichung

$$2a_{rsp}\,a^p{}_{tu}\,a^{tr}{}_v+a_{usv}=a_{usv}\,,$$

welche (161) gibt.

wobei man setzt:

$$\Psi = g^{ij}\Lambda_{i,j} - \psi_i \tau^i \,. \tag{163}$$

Wendet man (70) an, um $\mathfrak{B}$ abzufinden, dann gibt

$$\mathfrak{B} = \frac{(4\,!)^{\frac{1}{4}}}{4} G\, P^{-1} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{21} & -\psi^1 & 0 \\ g^{12} & g^{22} & -\psi^2 & 0 \\ -\psi^1 & -\psi^2 & \frac{1}{2}(\Psi + \psi_i \psi^i) + (K-1) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{164}$$

(162) und (164) beweisen die Richtigkeit von (63), da

$$\mathfrak{b}\mathfrak{B} = -\frac{1}{4} G \,|\, P^{-1} \,|^2 (g_{rs} g^{rs} + 2) = -1 \,.$$

(64) folgt ausserdem aus (156) und (162), d.h.

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_r) = 2 \cdot 3\,!\,(4\,!)^{-1} \,|\, P^{-1} \,|^2 (a_{11r} g_{22} - 2 a_{12r} g_{21} + a_{22r} g_{11})$$

$$= \frac{1}{2} a_{ijr} g^{ij} = 0 \,.$$

Es gibt ferner

$$((\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a})) = \frac{(4\,!)^{\frac{1}{4}}}{3 \cdot 4} G P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2a_{22r}}{G} & -\frac{2a_{21r}}{G} & a^1{}_{ir}\psi^i & 0 \\ -\frac{2a_{12r}}{G} & \frac{2a_{11r}}{G} & a^2{}_{ir}\psi^i & 0 \\ a^1{}_{ir}\psi^i & a^2{}_{ir}\psi^i & a_r{}^{ij}\psi_{i,j} - \tau_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{165}$$

da

$$\frac{a_{12r}\psi_2 - a_{22r}\psi_1}{G} = a^1{}_{ir}\psi^i \,, \qquad \frac{a_{12r}\psi_1 - a_{11r}\psi_2}{G} = a^2{}_{ir}\psi^i$$

sind. $-3((\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}))$ ist mit $\mathfrak{A}_r$ identisch, abgesehen von einem Elemente allein, das in der dritten Zeile und dritten Spalte steht,

wie man durch Vergleichung von (157) und (165) leicht ersehen kann. Somit erkennen wir nochmals die Richtigkeit von (65).

Wir wollen zunächst den Affinor b_{ijk} heranziehen. Darum müssen wir erstens $(\mathfrak{a}_{rs}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_t)$ berechnen. Es ist aber von (162)

$$(166) \qquad ((\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_r)) = \frac{(4!)^{\frac{1}{4}}}{3\cdot 4} GP^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{2a_{22r}}{G} & \frac{2a_{21r}}{G} & 0 & 0 \\ \frac{2a_{12r}}{G} & -\frac{2a_{11r}}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deshalb erhalten wir wegen (160)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_{rs}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_t) &= \frac{1}{6}\sum_{pq} e^{lp}e^{mq}a_{pqt}A_{rs}^{(pq)} \\ &= -\frac{1}{6}\sum_{pq} a^{pq}{}_t A_{rs}^{(pq)} \\ &= -\frac{1}{3}(a^p{}_{st}a_{pri}\psi^i - a^{pq}{}_t a_{pqr,s}) \\ &= -\frac{1}{3}a_{rsp}a^p{}_{ti}\psi^i \ ^{(1)} , \end{aligned}$$

daraus erkennen wir sofort

$$(167) \qquad b_{rst} = a_{rsp}a^p{}_{ti}\psi^i .$$

---

(1) Weil $(\mathfrak{a}_{rs}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_t)$ über r und s symmetrisch ist, deshalb soll es so geschrieben werden, dass

$$a^p{}_{st}a_{pri}\psi^i - a^{pq}{}_t a_{pqr,s} = B_t g_{rs} + C_{tu}a_{rs}{}^u ,$$

und wir sehen daraus durch Überschiebung mit g^{rs} bezw. $a^{rs}{}_p$

$$B_t = 0 \qquad \text{bezw.} \qquad C_{tp} = a_{tpi}\psi^i ,$$

da

$$a_{rst,i} = -e_{ik}\psi^k \bar{b}_{rst} \qquad \text{und} \qquad a^{rs}{}_p \bar{b}_{rst} = e_{pt}$$

ist, wobei man setzt:

$$\bar{b}_{rst} = e_{ir}a^i{}_{st} .$$

Wir können jetzt mit Hilfe dieser Gleichung (80)′ verifizieren, d.h.

$$b_{rsp}b^{rs}_{\cdot\cdot q} = a_{rsu}a^{u}{}_{pi}\psi^{i}a^{rs}{}_{v}a^{v}{}_{qj}\psi^{j}$$
$$= g_{uv}a^{u}{}_{pi}\psi^{i}a^{v}{}_{qj}\psi^{j}$$
$$= \frac{1}{2}g_{pq}g_{ij}\psi^{i}\psi^{j}\ ^{(1)}.$$

Jetzt ist es klar, dass die Relation $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_r) = 0$ sich ergibt.

Wir wollen nun beweisen, dass die Matrix (P^{pq}_{jt}) in der Gleichung (143) im allgemeinen den Rang 3 hat, welcher Beweis wir zu zeigen in Aussicht gestellt haben. Wir nehmen die Asymptotenlinien als Parameterlinien an, dann sind

$$g_{11} = g_{22} = 0\ , \qquad a_{112} = a_{121} = a_{211} = a_{122} = a_{212} = a_{221} = 0$$

und wir setzen einfachheitshalber

$$g_{12} = g\ , \qquad \psi^{i}\psi_{i} = \alpha\ , \qquad a_{111} = \beta\ , \qquad a_{222} = \gamma\ .$$

Da nach (167) wegen (168)

$$b^{\cdot\cdot p}_{rj}\, b^{rq}_{\cdot\cdot t} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\delta^{q}_{j}\delta^{p}_{t}\alpha + (a^{qp}{}_{u}a_{jtv} - a^{p}{}_{ju}a^{q}{}_{tv})\,\psi^{u}\psi^{v}\right\}$$

ist, wird dann die Matrix

$$(P^{pq}_{jt}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha + \psi^{1}\psi^{2}\frac{\beta\gamma}{g^{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha & -\psi^{1}\psi^{2}\frac{\beta\gamma}{g^{2}} & 0 \\ 0 & -\psi^{1}\psi^{2}\frac{\beta\gamma}{g^{2}} & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha + \psi^{1}\psi^{2}\frac{\beta\gamma}{g^{2}} \end{pmatrix},$$

(1) Es ist im allgemeinen

(168) $$a_{rs}{}^{p}\,a_{pij} = \frac{1}{2}(g_{ri}g_{sj} + g_{rj}g_{si} - g_{rs}g_{ij})\,.$$

$$= \frac{1}{2}\psi^1\psi^2 \begin{pmatrix} 2g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & -g & 0 \\ 0 & -g & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2g \end{pmatrix}, \quad (1)$$

dessen Rang 3 ist.

Man hat nach (160) und (167)

$$(169) \qquad \mathfrak{c}_t = b^{rs}{}_t\mathfrak{a}_{rs} = a^{rs}{}_p a^p{}_{ti}\psi^i\mathfrak{a}_{rs}$$

$$= -(4!)^{-\frac{1}{4}}a^p{}_{ti}\psi^i$$

$$\times P^{-1}\begin{pmatrix} 2g_{1p}\psi_1 & g_{1p}\psi_2+g_{2p}\psi_1 & 2g_{1p} & B_{1p} \\ g_{1p}\psi_2+g_{2p}\psi_1 & 2g_{2p}\psi_2 & 2g_{2p} & B_{2p} \\ 2g_{1p} & 2g_{2p} & 0 & \psi_p \\ B_{1p} & B_{2p} & \psi_p & 2(1-K)\psi_p - a^{rs}{}_p\Lambda_{r,s} \end{pmatrix},$$

da

$$g_{ps}a_{qri}\psi^i + g_{qs}a_{pri}\psi^i - 2a_{pqr,s} = (g_{pt}\psi_q + g_{qt}\psi_p)a^t{}_{rs}$$

und

$$K = -\frac{1}{3}g^{rs}\psi_{r,s}$$

ist, wobei man setzt:

$$B_{ip} = (2+K)g_{ip} + \psi_i\psi_p + \psi_{j,p} - a_{ip}{}^j\tau_j \,.$$

Und es ist

$$(170) \qquad \mathfrak{C}_t = \frac{(4!)^{\frac{1}{4}}}{4}a_{pti}\psi^i G$$

$$\times P^{-1}\begin{pmatrix} -2g^{p1}\psi^1 & -(g^{p1}\psi^2+g^{p2}\psi^1) & \overline{B}^{1p} & 2g^{1p} \\ -(g^{p1}\psi^2+g^{p2}\psi^1) & -2g^{p2}\psi^2 & \overline{B}^{2p} & 2g^{2p} \\ \overline{B}^{1p} & \overline{B}^{2p} & a^{rsp}\Lambda_{r,s} - \psi^p & -\psi^p \\ 2g^{1p} & 2g^{2p} & -\psi^p & 0 \end{pmatrix},$$

(1) In die projektiven normierten Koordinaten ist $\beta\gamma = g^3$. Siehe FUBINI-ČECH, a. a. O., S. 89.

wobei

$$\overline{B}^{ip} = 3Kg^{ip} + \psi^i\psi^p + \psi^{i\,p}_{\cdot\,\cdot} - a^{ipj}\tau_j \ .$$

Jetzt können wir den Affinor k_{ij} von (169) und (170) ausführen, d. h.

$$(171)\qquad k_{ij} = \mathfrak{c}_i\mathfrak{C}_j$$

$$= -a^p{}_{iu}\psi^u a_{qjv}\psi^v \left\{B^q_{\cdot p} + \overline{B}^{\cdot q}_{p} - \frac{1}{2}(\psi_p\psi^q + \delta^q_p\psi_k\psi^k + \psi_p\psi^q)\right\}$$

$$= -a^p{}_{iu}\psi^u a^q{}_{jv}\psi^v \left\{2(1+2K)g_{pq} + \psi_p\psi_q + 2\psi_{(p,\,q)} - 2a_{pq}{}^j\tau_j \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}g_{pq}\psi^k\psi_k\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left\{2(2+K)g_{ij} + a_{ij}{}^t(2\psi^u\psi_t - \delta^u_t\alpha)(2\Lambda_u - a_u{}^{pq}\psi_p\psi_q)\right\} \ .$$

Man kann natürlich (118) wegen (167) und (171) verifizieren.

Unsere fundamentale Grundaffinoren sind also durch die FUBINIschen dargestellt, und umgekehrt kann man die FUBINIschen durch unsere darstellen. Wir erhalten in der Tat einen Affinor

$$II_{rs} = a_{rst}\psi^t \ ,$$

die Gleichungen auflösend

$$b_{rst}II^{st} = 0 \ , \qquad II_{rs}II^{rs} = b^{rst}b_{rst} \ ,$$

dann wird II_{rs} bis auf das Vorzeichen völlig bestimmt. a_{rst} kann man durch die Gleichungen

$$b_{rst} = a_{rsp}II^p{}_t$$

bestimmen, wobei das Vorz ichen von a_{rst} noch unbestimmt bleibt. Das ist aber belanglos, da das Vorzeichen von a_{rst} durch eine Korrelation sich ändert. Der andere Affinor τ_r wird dann aus (171) erhalten.

Wir beschäftigen uns nun mit der Verifizierung von (86). Nach (162) und (170) wird tatsächlich

$$\mathfrak{b}\mathfrak{C}_t = -\frac{1}{4}a_{pti}\psi^i(-2\psi^p+4\psi^p-2\psi^p) = 0$$

und

$$\mathfrak{c}_t\mathfrak{B} = -\frac{1}{4}a^p{}_{ti}\psi^i(2\psi_p-4\psi_p+2\psi_p) = 0\ .$$

$\mathfrak{R}$ hat die Koordinaten

$$\mathfrak{R} = -(4!)^{-\frac{3}{4}}GP^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{172}$$

wie man aus (159) wegen (89) und (162) ersehen kann.

Schliesslich werden wir durch kovariante Differenzierung aus (162) bezw. (169) wegen (99) bezw. (102) die folgende Relation erhalten:

$$q_{ij}k^j{}_k = a^t{}_{kj}\psi^j\left\{\left(2+K-\frac{1}{2}\psi\right)g_{it}+2\psi_{[i,t]}\right\}$$

bezw.

$$\bar{q}_{ij}k^j{}_k = -a^t{}_{kj}\psi^j\left\{\left(2+K+\frac{1}{2}\psi\right)g_{it}+2\psi_{[i,t]}\right\},$$

daraus folgt (148) sogleich.

Sapporo, März 1931.