HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE IN DEN VERSCHIEDENEN FUNKTIONALRÄUMEN 1.VEKTORIALEN UND TENSORIALEN
Author(s)	Kawaguchi, Akitsugu
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 3(2), 43-106
Issue Date	1935
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58078
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFS_HIU_v3n2-43.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE IN DEN VERSCHIEDENEN FUNKTIONALRÄUMEN, I. VEKTORIALEN UND TENSORIALEN

Von

Akitsugu KAWAGUCHI

INHALT

SEITE

Einleitung 43
§ 1. Allgemeine Notionen und Transformationen 46
§ 2. Komplexfunktionen 54
§ 3. Vektorialen und Tensorialen 67
§ 4. Tensorialen zweiten Grades 79
§ 5. Die Massbestimmung 88

EINLEITUNG

Unter dem Funktionalraume (oder Funktionenraume) verstehen wir den Raum, dessen Elemente die in einem abgeschlossenen Bereich definierten eindeutigen Funktionen sind. Über den Funktionalraum und über die in ihm geltende Funktionentheorie sind zahlreiche Untersuchungen angestellt worden, doch meist hauptsächlich von dem Standpunkte der Analysis, d.h. um den geometrischen Begriff auf die Analysis anzuwenden. Über seine geometrische, besonders differentialgeometrische Untersuchungen können wir nur wenig aufweisen. Hauptsächlich durch Problemdarstellungen und heuristische Ansätze der Quantenmechanik angeregt, ist ein metrischer komplexer Funktionalraum, der zu dem HILBERTschen Raume isomorph ist, seit kurzer Zeit in einem neuen Aufschwung begriffen[1]. Die Hauptgegenstände dieser Untersuchungen sind überhaupt die

(1) F. RIESZ: Über die linearen Transformationen des komplexen HILBERTschen Raumes, Acta Szeged, 5 (1930), 23-54. J. v. NEUMANN: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932. M. H. STONE: Linear transformations in HILBERT space, New York, 1932. S. BANACH: Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

Journal of the Facutly of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. III, No. 2, 1935.

linearen Transformationen im Raume, d.h. die linearen Operatoren, und das wichtigste Hauptresultat ist der Satz über die Spektralzerlegung und die entsprechende Integraldarstellung der quadratischen Formen. Die Metrisierung des Funktionalraumes spielt dabei die wichtigste Rolle und ist die grundlegende Hauptsache. Aber sie ist nicht mehr so wichtig von dem neuesten Standpunkte der Geometrie, und es ist auch interessant, die Theorie ohne Metrik aufzubauen, z. B. die der affinen oder projektiven Geometrie entsprechende Theorie(1).

Bei Aufbau der Theorie ohne Metrik, liegt eine Transformationsgruppe im Funktionalraume zugrund, welches Element eine funktionale Transformation $f(x) = F[\varphi(t), x]$ ist. Dabei kommt ein Funktional $F[\varphi(t), x]$ einer Funktion $\varphi(t)$ vor, das in bezug auf x eine gewöhnliche Funktion ist. Ausser Eindeutigkeit, Summierbarkeit und Vollstetigkeit sollen wir hier bei dem Funktional Differenzierbarkeit voraussetzen. Die Form vom Differential eines Funktionals bestimmt sich nicht eindeutig, sondern der Form entsprechend erscheinen mehre Arten von Transformationen von Variationen $\delta f(x)$ in Lichte. Von denen sind am wichtigsten und bedeutungsvollsten diejenigen, die den FREDHOLMschen und VOLTERRAschen Integralgleichungen erster und zweiter Arten und den PICARDschen dritter Art entsprechen. Diese Transformationen derselben Art bilden einzeln eine Gruppe und charakterisieren die Eigenschaft des Funktionalraumes. Somit müssen wir verschiedene Funktionalräume gemäss der Art von Transformationen unterscheiden.

Im Raume endlicher Dimensionen erzielte man die neueste und grösste Entwicklung der Differentialgeometrie auf Grund des bedeutungsvollen Begriffes "Parallelübertragung". Die euklidischen Differentialgeometrie im Funktionalraume ist ziemlich eingehend untersucht worden(2). Trotzdem können wir nur wenige Untersuchungen

(1) I. A. BARNETT, I. A. BARNETT und D. NATHAN, J. DELSARTE [8], L. L. DINES, L. S. KENNISON, G. KOWALEWSKI [2].

(2) G. ALIPRANDI [1]–[3], V. AMBARZUMIAN, G. ASCOLI, L. BIEBERBACH, P. BORTOLOZZI [1] [2], M. FRÉCHET, L. INGOLD [1], M. KERNER, G. KOWALEWSKI [1] [2], M. PASTORI, E. PINTE [1]–[3], F. RIESZ, I. SACILOTTO, E. SIMONETTO, A. TONOLO [1] [2], G. VITALI [1]–[11].

auf Grund dieses neuen Begriffes erweisen[1]. Überdies sind diese Untersuchungen alle in Rechnungen sowie in Ausdrücken so mühsam und kompliziert, dass sie äusserst schwer zu verstehen sind, und entbehren der klaren Darstellung der geometrischen Bedeutung. Um von dieser unangenehmen Sachlage auszugehen, möchte ich drei neue Symbole $\delta^{rs}_{[t]}$, $\delta^{r[t]}_{s}$, $\delta^{[t]}_{rs}$ einführen, die in einem Sinne mit dem KRONECKERschen Delta und in anderem Sinne mit dem imaginären Symbol $\sqrt{-1}$ Ähnlichkeit haben. Diese Symbole dürfen als verbesserte von der δ-Funktion von DIRAC und CONFORTO[2] angesehen werden.

In einer Reihe von Abhandlungen mit demselben Titel möchte ich den Begriff "Parallelübertragung" in die verschiedenen Funktionalräume mit Hilfe von den neuen Symbolen einführen und mich mit der systematischen Untersuchung beschäftigen, womit nicht nur eine prinzipielle Vereinfachung und Vereinheitlichung der Methoden, sondern auch Bereicherung des Inhalts und weitere Entwicklung der Theorie erzielt wird.

In der vorliegenden Abhandlung stellt sich nur die einleitende Theorie vor, und den Hauptteil unserer Theorie möchte ich in den nachfolgenden Abhandlungen entwickeln. In § 1 werden die verschiedenen Transformationen von Variationen erklärt. Mit Hilfe der in § 2 definierten Symbole $\delta^{rs}_{[t]}$, $\delta^{r[t]}_{s}$, $\delta^{[t]}_{rs}$ greifen wir dann den wichtigen Begriff "Komplexfunktion", die wesentlich mit einem System von Funktionen equivalent ist (§ 2). Wir definieren auf Grund dieses neuen Begriffes die kontravarianten und kovarianten Vektorialen sowie die kontravarianten, kovarianten und gemischten Tensorialen, die mit Vektoren und Tensoren im gewöhnlichen RICCI-Kalkül Ähnlichkeit haben und dieselbe Rolle spielen (§ 3). Wir finden dabei zwei Arten von relativen Grössen, gewöhnliche und M-relative. In § 4 werden die weiteren Untersuchungen über die Tensorialen zweiten Grades angestellt. Durch Einführung des Fundamentaltensorials und

(1) F. CONFORTO [1]–[4], A. KAWAGUCHI [1]–[4], A. D. MICHAL [2]–[7], A. D. MICHAL und L. S. KENNISON, A. D. MICHAL und T. S. PETERSON, G. C. MOISIL [1], T. S. PETERSON [1] [2].

(2) P. A. M. DIRAC: The principles of quantum mechanics, 1910, Oxford, S. 64. F. CONFORTO [4].

der Vektorialenschar wird das Eigenwertproblem des Tensorials zweiten Grades gelöst (§ 5). Schliesslich fügen wir eine wichtige Bemerkung über die Beziehung zwischen dem Tangentialraume unseres Funktionalraumes und dem HILBERTschen Raume hinzu: Der durch ein Fundamentaltensorial metrisierte Tangentialraum ist zum HILBERTschen Raume isomorph.

§ 1. ALLGEMEINE NOTIONEN UND TRANSFORMATIONEN.

1. Es sei f^x oder φ_x eine eindeutige summierbare Funktion von einer Variablen x, welche über einen Bereich B von der Variablen x definiert ist. Auf den Bereich B werden alle vorkommenden unabhängigen Variablen beschränkt. Einfachheitshalber mögen vorläufig alle vorkommenden Funktionen sowie Variablen als reell vorausgesetzt werden. Der Bereich B ist dabei eine messbare Menge. Diese Voraussetzung ist aber eigentlich nicht notwendig, da wir dieselbe durch einige Modifizierung sofort weglassen können und alle in dieser Abhandlung erklärten Tatsachen im allgemeinen Falle erweitern können[1].

Unter einem Funktionalraume ist die Gesamtheit aller obenerwähnten Funktionen verstanden. Dabei wird jede Funktion der Punkt genannt und seine Koordinaten sind nichts anderes als die Werte der Funktion, überlaufend die Variable x auf dem Bereich B. Wir möchten sagen, dass zwei Funktionen f^x und φ^x zueinander gleich sind, und durch $f^x = \varphi^x$ darstellen, wenn sie über den ganzen Bereich B bis auf eine Nullmenge[2] immer gleiche Werte haben.

Wir setzen jetzt ferner, dass die Umgebung (ε-Umgebung) eines Punktes f^x die Gesamtheit solcher Funktionen $\bar{f}^x$ bedeutet, die für

(1) Die Variable x darf als ein Element einer gewissen kompakten und metrisierenden Menge angesehen werden, besonders z.B. als ein Punkt eines reellen oder komplexen Raumes von endlich vielen Dimensionen. Demgemäss wird f^x eine Mengenfunktion und im letzten Falle eine Funktion von endlich vielen reellen oder komplexen Variablen.

(2) "Nullmenge" besagt eine Menge vom LEBESGUEschen Mass Null.

eine reelle Zahl ε über den ganzen Bereich B bis auf eine Nullmenge die folgende Beziehung erfüllen:

$$|\bar{f}^x - f^x| < \varepsilon .$$

Somit ist unser Funktionalraum nichts anderes als der Raum im HAUSDORFFschen Sinne.

2. Unter den Worte "Integral" verstehen wir stets das bestimmte Integral im LEBESGUEschen Sinne, welches sich über den ganzen Variablenbereich B erstreckt, wenn anderes nicht gesagt ist.

Als Voraussetzung für die vorkommenden Funktionen ist der Bequemlichkeit wegen angenommen, dass die Ordnung von Integralzeichen immer vertauschbar ist, d.h. z. B.

$$\int \left(\int f^r \varphi^s \, dr \right) ds = \int \left(\int f^r \varphi^s \, ds \right) dr .$$

Wir können weiter, ohne eigentliche Beschränkung für unsere Theorie, voraussetzen, dass über den Bereich B

$$\int dr = 1 .$$

3. Wir setzen die folgende Abkürzung für das Integralzeichen fest, um alle Ausdrücken in kurzer Form darzustellen, welcher Bequemlichkeit im Folgenden sofort erwiesen wird.

Wenn ein Index in einem Term mehrmal als zwei, einige oben und die übrigen unten, vorkommt, dann integrieren wir stets den Term in bezug auf den Index über den Bereich B, selbst wenn das Integralzeichen nicht ausdrücklich hinzugeschrieben wird, z. B.

$$f^r \varphi_r = \int f^r \varphi_r \, dr ,$$

$$f^{rs} \varphi_{rrst} \psi_s = \int\int f^{rs} \varphi_{rrst} \psi_s \, dr \, ds .$$

Es gibt aber eine Ausnahme, dass wenigstens ein der in einem Term vorkommenden Indizes in Klammern gesetzt wird. In dem Falle integrieren wir nicht den Term in bezug auf die Indizes, z. B.

$$f^{(r)s}\varphi_{rss} = \int f^{rs}\varphi_{rss}\, ds\ .$$

4. Wir müssen uns zuerst allerdings mit Transformationen im Funktionalraume beschäftigen, welche wesentlich nötig sind, um unsere Theorie zu entwickeln. Es sei eine Transformation im Funktionalraume, die jeder Funktion f^y z. B. in einem Funktionenbereiche $\mathfrak{B}$ eine Funktion $\bar{f}^y$ in einem Funktionenbereiche $\bar{\mathfrak{B}}$ entsprechen lässt:

$$(1) \qquad \bar{f}^x = F^x[f^y]\ .$$

Dabei kommt ein Funktional $F^x[f^y]$ einer Funktion f^y vor, welches in bezug auf x eine Funktion ist.

Ein Funktional $F^{r_1 r_2 \cdots r_m}_{s_1 s_2 \cdots s_n}[f^y]$ einer Funktion f^y, welches von Variablen $r_1, r_2, \ldots, r_m, s_1, s_2, \ldots, s_n$ abhängt ist, heisst stetig von nullter Ordnung, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Funktion f^y in $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl $\delta(\varepsilon)$ gehört, so dass

$$\left| F^{r_1 r_2 \cdots r_m}_{s_1 s_2 \cdots s_n}[\varphi^y] - F^{r_1 r_2 \cdots r_m}_{s_1 s_2 \cdots s_n}[f^y] \right| < \varepsilon$$

für alle Variablen $r_1, r_2, \ldots, r_m, s_1, s_2, \ldots, s_n$ in B bis auf eine Nullmenge, sobald

$$|\varphi^y - f^y| < \delta(\varepsilon)$$

für alle Werten von y in B bis auf eine Nullmenge, wobei φ^y eine Funktion in $\mathfrak{B}$ ist.

Wir setzen für die Transformationen (1) voraus, dass

(I) das Funktional $F^x[f^y]$ eine eindeutige und summierbare Funktion in bezug auf x in B und stetig für jedes f^y in $\mathfrak{B}$ ist;

(II) das Funktional $F^x[f^y]$ ein Differential in FRÉCHETschen Sinne[1] hat und dieses Differential von der VOLTERRAschen Form ist.

(1) M. FRÉCHET: Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne, Transactions of the Amer. Math. Soc., 15 (1914), S. 139. P. LÉVY, Leçons d'analyse fonctionnelle, 1922, Paris, S. 48–105. V. VOLTERRA, Theory of functionals, 1930, London, S. 22–34.

Dann erhalten wir durch die Transformation (1) die Transformationsregel von Variationen δf^y, welche naturmässig in bezug auf δf^y linear sein muss:

$$(2) \qquad \delta \bar{f}^x = F^x{}_{,x}\, \delta f^{(x)} + F^x_y\, \delta f^y ,$$

wobei $F^{(x)}{}_{,x}$ und F^x_y die Funktionalen von f^y sind.

Wir setzen überdies voraus, dass

(III) das Funktional $F^{(x)}{}_{,x}$ bzw. F^x_y eine eindeutige und summierbare Funktion von x bzw. x und y für $x, y < B$ und für jedes f^y in $\mathfrak{B}$ stetig ist;

(IV) eine und nur eine inverse Transformation von (1) existiert und diese Transformation

$$f^y = {}'F^y[\bar{f}^x]$$

auch die Bedingungen (I)-(III) befriedigt.

Nach (IV) folgt

$$(3) \qquad \delta f^y = {}'F^y{}_{,y}\, \delta \bar{f}^{(y)} + {}'F^y_x\, \delta \bar{f}^x .$$

Wir betrachten in der vorliegenden Abhandlung überhaupt nur den Fall, wo die Funktionenbereiche $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ übereinstimmen.

5. Es sei in einem Punkte f^y

$$F^{(x)}{}_{,x} = 0$$

in dem ganzen Bereich B, dann ist (2) eine Integralgleichung erster Art, während δf^y als eine unbekannte Funktion angesehen wird. Dafür, dass (2) eine Lösung (3) haben soll, ist notwendig und hinreichend, dass $\sum \lambda_i^2 c_i^2 = \sum a_i^2$ konvergiert, wobei λ_i bzw. $\underset{i}{\varphi_x}$ die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns F^x_y [1] sind und

$$c_i = \delta \bar{f}^x \underset{i}{\varphi_x} , \qquad a_i = \delta f^x \underset{i}{\varphi_x} .$$

(1) Wenn der Kern nicht symmetrisch ist, können wir aus ihm einen symmetrischen Kern H^x_y ausführen, so dass $\delta \bar{f}^x = H^x_y\, \delta f^y$.

(2) E. PICARD: Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et sur certains problèmes de physique mathématique, und Sur les équations intégrales de première espèce, Comptes Rendus, Paris, 148 (1909).

Die Lösung wird dann durch

$$\delta f^y = \sum_i c_i \varphi_y$$

gegeben, und der Kern hat die Form

$$F_y^x = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \varphi_x \varphi_y .$$

Da jeder Eigenwert reell ist und da die Summe ihrer reziproken Quadrate, ein jedes nach seiner Vielfachheit gezählt, konvergiert, so muss $\sum c_i^2$ auch konvergieren, und zwar $\delta \bar{f}^x$ nach Eigenfunktionen entwickelbar sein

$$\delta \bar{f}^x = \sum_i c_i \varphi_x .$$

Daraus erkennen wir, dass alle betreffenden Variationen δf^x als Punkte in einem HILBERTschen Raume angesehen werden dürfen. Der Tangentialraum unseres Funktionalraumes im Punkte f^y ist deswegen nichts anderes als ein HILBERTscher Raum. Unter dem Tangentialraume verstehen wir den Funktionalraum, der von allen Variationen δf^y besteht.

Jede lineare Transformation in einem HILBERTschen Raume kann in der Form

$$\delta \bar{f}^x = F_y^x \, \delta f^y \tag{4}$$

dargestellt werden, deshalb sollen wir anstatt (1) immer (4) zu Grund legen. Alle linearen Transformationen vom Typus (4) bilden bekanntlich eine Gruppe. Wir möchten im Folgenden den Punkt *den HILBERTschen Punkt* nennen, wenn der Tangentialraum im Punkte f^y ein HILBERTscher ist. Der Funktionalraum wird *der allgemeine HILBERTsche Raum* genannt, und mit den Buchstabe $\mathfrak{H}$ bezeichnet, wenn jeder Punkt des Raumes ein HILBERTscher ist.

6. Ist im Punkte f^y

$$F^{(x)}{}_{,x} = 1 \tag{5}$$

in dem ganzen Bereich B, dann wird (2) eine FREDHOLMsche Integralgleichung zweiter Art. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der einzigen inversen Transformation (3) von (2) ist bekannterweise, dass die FREDHOLMsche Determinante $D[F_y^x]$ des Kerns F_y^x im Punkte f^y nicht verschwunden ist. Dann ist für die inverse Transformation

$$(6) \qquad {}'F^{(x)}{}_{,x} = 1$$

und ${}'F_y^x$ die Resolvente des Kerns F_y^x, für die die Relationen

$$(7) \qquad F_y^x + {}'F_y^x + F_z^x {}'F_y^z = 0 ,$$

$$(7') \qquad F_y^x + {}'F_y^x + {}'F_z^x F_y^z = 0$$

gelten. Die Transformation (2) wird dabei die FREDHOLMsche Transformation, und alle FREDHOLMschen Transformationen mit nicht verschwindender FREDHOLMscher Determinante

$$D[F_y^x] = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{vmatrix} F_{x_1}^{x_1} & F_{x_2}^{x_1} & \dots & F_{x_i}^{x_1} \\ F_{x_1}^{x_2} & F_{x_2}^{x_2} & \dots & F_{x_i}^{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{x_1}^{x_i} & F_{x_2}^{x_i} & \dots & F_{x_i}^{x_i} \end{vmatrix}$$

bilden bekanntlich eine Gruppe, *die FREDHOLMsche Gruppe* heisst[1]. Den der FREDHOLMschen Gruppe unterworfenen Funktionalraum wollen wir deswegen *den FREDHOLMschen Raum* nennen. Der Punkt wird *der FREDHOLMsche Punkt* genannt, dessen Tangentialraum ein FREDHOLMscher ist. Der Funktionalraum wird *der allgemeine FREDHOLMsche Raum* geheissen und mit der Bezeichnung $\mathfrak{F}$ angedeutet, wenn jeder Punkt des Raumes stets ein FREDHOLMscher ist.

7. Für

$$(8) \qquad F^{(x)}{}_{,x} \neq 0$$

(1) G. KOWALEWSKI [2], S. 95. I. FREDHOLM: Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta Math., 27 (1903), S. 342-373.

in dem ganzen Bereich B ist (2) eine Integralgleichung dritter Art, die von PICARD erst eingeführt wird[1]. Es ist notwendig und hinreichend, dass die FREDHOLMsche Determinante $D\left[\begin{matrix} F^x_y \\ F^{(x)}_{,x} \end{matrix}\right]$ nicht verschwindet, dafür, dass (2) auflösbar sein soll, d.h. dass die inverse Transformation von (2) existieren soll. Wenn die FREDHOLMsche Determinante nicht verschwindet, erhalten wir für die inverse Transformation (3)

$$(9)\qquad \begin{aligned} F^{(x)}_{,x}\,'F^x_{,x} &= 1\ , \\ 'F^{(x)}_{,x}\,F^y_x + F^{(y)}_{,y}\,'F^y_x + F^y_z\,'F^z_x &= 0^{(2)}\ , \end{aligned}$$

daraus geht sogleich (7) hervor, setzend $F^{(x)}_{,x} = 1$. Wir wollen die Transformation (2) mit nicht verschwindender FREDHOLMscher Determinante $D\left[\begin{matrix} F^x_y \\ F^{(x)}_{,x} \end{matrix}\right]$ *die PICARDsche Transformation* nennen.

Je zwei PICARDsche Transformationen

$$(10)\qquad \begin{aligned} \delta\bar{f}^x &= F^{(x)}_{,x}\,\delta f^x + F^x_y\,\delta f^y\ , \\ \delta\overset{*}{f}{}^x &= \bar{F}^{(x)}_{,x}\,\delta\bar{f}^x + \bar{F}^x_y\,\delta\bar{f}^y \end{aligned}$$

nach einander ausgeführt ergeben wiederum eine PICARDschen Transformation:

$$(11)\qquad \delta\overset{*}{f}{}^x = \overset{*}{F}{}^{(x)}_{,x}\,\delta f^x + \overset{*}{F}{}^x_y\,\delta f^y\ ,$$

wobei

$$(12)\qquad \begin{aligned} \overset{*}{F}{}^{(x)}_{,x} &= F^{(x)}_{,x}\,\bar{F}^x_{,x}\ , \\ \overset{*}{F}{}^x_y &= \bar{F}^{(x)}_{,x}\,F^x_y + F^{(y)}_{,y}\,\bar{F}^x_y + \bar{F}^x_z F^z_y\ . \end{aligned}$$

Zwischen den FREDHOLMschen Determinanten ergibt sich dabei eine Beziehung

$$(13)\qquad D\left[\frac{\overset{*}{F}{}^x_y}{\overset{*}{F}{}^{(x)}_{,x}}\right] = D\left[\frac{F^x_y}{F^{(x)}_{,x}}\right] D\left[\frac{\bar{F}^x_y}{\bar{F}^{(x)}_{,x}}\right]\ ,$$

(1) E. PICARD: Sur les équations intégrales de troisième espèce, Annales de l'École Normale Supér., (3) 28 (1911), S. 459–472.

(2) A. KAWAGUCHI [1] und [2].

denn (12) gibt uns

$$\frac{\overset{*}{F}{}^x_y}{\overset{*}{F}{}^{(x)}_{,x}} = \frac{F^x_y}{F^{(x)}_{,x}} + \frac{F^{(y)}_{,y}}{F^{(x)}_{,x}} \frac{\bar{F}^x_y}{\bar{F}^{(x)}_{,x}} + \frac{F^z_y}{F^{(x)}_{,x}} \frac{\bar{F}^x_z}{\bar{F}^{(x)}_{,x}},$$

daraus folgt

$$D\left[\frac{\overset{*}{F}{}^x_y}{\overset{*}{F}{}^{(x)}_{,x}}\right] = D\left[\frac{F^x_y}{F^{(x)}_{,x}}\right] D\left[\frac{F^{(y)}_{,y}\bar{F}^x_y}{F^{(x)}_{,x}\bar{F}^x_{,x}}\right]$$

$$= D\left[\frac{F^x_y}{F^{(x)}_{,x}}\right] D\left[\frac{\bar{F}^x_y}{\bar{F}^{(x)}_{,x}}\right].$$

Wenn die zwei Transformationen (10) zueinander invers sind, so ist (11) die identische Transformation, d.h. $\overset{*}{F}{}^{(x)}_{,x}=1$, $\overset{*}{F}{}^x_y=0$. (12) geht dann sogleich in (9) über.

Wir können erweisen, dass alle PICARDschen Transformationen eine Gruppe bilden[1]. Die Gruppe nennen wir *die PICARDsche Gruppe* und den der PICARDschen Gruppe unterworfenen Funktionalraum *den PICARDschen Raum*. Der Punkt heisst *der PICARDsche Punkt*, wenn der Tangentialraum am Punkte der PICARDsche ist. Unter *dem allgemeinen PICARDschen Raum* verstehen wir den Funktionalraum, dessen alle Punkte die PICARDschen sind, und deuten den Raum mit Bezeichnung $\mathfrak{P}$ an. Die FREDHOLMsche Gruppe ist eine Untergruppe der PICARDschen Gruppe.

8. Bis jetzt ist der Integrationsbereich B von der Variablen unabhängig festgesetzt. Im Falle, wo der Bereich B von der Variablen abhängig, z. B. das Intervall $(0, x)$ ist, gibt (2) uns eine VOLTERRAsche Integralgleichung zweiter Art

$$\delta\bar{f}^x = F^{(x)}_{,x}\,\delta f^x + \int_0^x F^x_y\,\delta f^y\,dy, \tag{14}$$

die immer auflösbar ist, wenn $F^{(x)}_{,x} \neq 0$. Die Lösung ist dann durch

$$\delta f^x = {}'F^{(x)}_{,x}\,\delta\bar{f}^x + \int_0^x {}'F^x_y\,\delta\bar{f}^y\,dy \tag{15}$$

(1) A. D. MICHAL und T. S. PETERSON.

gegeben, wobei

$$F^{(x)}{}_{,x}\,'F^{x}{}_{,x} = 1\,, \tag{16}$$

$$F^{(y)}{}_{,y}\,'F^{x}_{y} + {}'F^{(x)}{}_{,x}\,F^{x}_{y} + \int_{y}^{x} F^{x}_{z}\,'F^{z}_{y}\,dz = 0\,.$$

In Betrachtung als Transformationen sind (14) und (15) zueinander invers. Wir nennen (14) mit $F^{(x)}{}_{,x} \neq 0$ *die* VOLTERRAsche *Transformation*. Dann können wir leicht schliessen, dass alle VOLTERRAsche Transformationen eine Gruppe, *die* VOLTERRAsche *Gruppe*, bilden[1]. Auf ganz analoge Weise wie im Vorhergehenden können wir *den* VOLTERRAschen *Raum*, *den* VOLTERRAschen *Punkt* und *den allgemeinen* VOLTERRAschen *Raum* definieren.

Für (14) mit $F^{(x)}{}_{,x} = 0$ ist der Zustand etwas anders, und die Lösung wird nicht in der Gestalt wie (15) ausgedrückt, sondern hat die Form

$$\delta f^{x} = {}'F^{x}\,\delta\bar{f}'^{x} + \int_{0}^{x} {}'F^{x}_{y}\,\delta\bar{f}'^{y}\,dy^{(2)}\,,$$

wenn $F^{(x)}_{x} \neq 0$, wo f'^{x} die Ableitung von f^{x} in bezug auf x bedeutet. Alle solchen Transformationen (14) bilden somit nicht eine Gruppe und es wäre deshalb viel schwerer, ihre Invariantentheorie zu entwickeln. Es ist noch mehr kompliziert, wenn der Kern F^{x}_{y} identisch Null für $x = y$ oder singulär ist.

§ 2. KOMPLEXFUNKTIONEN.

9. Um alle Formeln in einfacher Form darzustellen und daraus viele neue Ergebnisse abzuleiten, führen wir neue Symbole $\delta^{[t]}_{rs}$, $\delta^{rs}_{[t]}$,

(1) V. VOLTERRA, Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, 1930, S. 43. Die Integralgleichung (14) ist von allgemeinerer Form als die sogenannte VOLTERRAsche Integralgleichung zweiter Art und reduziert sich zu diejenige für $F^{(x)}{}_{,x} = 1$. Unter *einer speziellen* VOLTERRAschen *Transformation* bzw. *einer speziellen* VOLTERRAschen *Gruppe* verstehen wir sodann die Transformation (14) für $F^{(x)}{}_{,x} = 1$ bzw. die Gruppe, die von allen speziellen VOLTERRAschen Transformationen gebildet ist.

(2) Siehe V. VOLTERRA, a. a. O.

$\delta_s^{r[t]}$(1) ein, welche durch die folgenden Forderungen gekennzeichnet werden:

(I) *Symmetrieeigenschaft.* $\delta_{rs}^{[t]}$, $\delta_{[t]}^{rs}$, $\delta_s^{r[t]}$ sind alle gleich Null für $r \neq s$ ebenso wie das KRONECKERsche Delta; dagegen haben sie keine reellen Bedeutungen und sind nur imaginäre Symbole für $r = s$ so wie $i = \sqrt{-1}$.

(II) *Symmetrieeigenschaft für Produkt.* $\delta_{rs}^{[t]}\,\delta_{tu}^{[v]}$ sowie $\delta_{[t]}^{rs}\,\delta_{[v]}^{tu}$ sind in bezug auf drei Indizes r, s, u symmetrisch:

$$\delta_{rs}^{[t]}\,\delta_{tu}^{[v]} = \delta_{ru}^{[t]}\,\delta_{ts}^{[v]} = \delta_{us}^{[t]}\,\delta_{tr}^{[v]}\,,$$

$$\delta_{[t]}^{rs}\,\delta_{[v]}^{tu} = \delta_{[t]}^{ru}\,\delta_{[v]}^{ts} = \delta_{[t]}^{us}\,\delta_{[v]}^{tr}$$

und analog

$$\delta_{[t]}^{rs}\,\delta_u^{t[v]} = \delta_u^{r[t]}\,\delta_t^{s[v]} = \delta_u^{s[t]}\,\delta_t^{r[v]}\,,$$

$$\delta_{rs}^{[t]}\,\delta_t^{u[v]} = \delta_r^{u[t]}\,\delta_{ts}^{[v]} = \delta_s^{u[t]}\,\delta_{tr}^{[v]}\,.$$

(III) *Produktseigenschaft.* Für beliebige Funktionen f_t und φ_t gelten

$$\delta_{rs}^{[t]}\,\delta_u^{r[v]} f_t\,\varphi_v = \delta_{su}^{[t]}\,f_t\,\varphi_t\,,$$

$$\delta_{[t]}^{rs}\,\delta_r^{u[v]} f^t\,\varphi_v = \delta_{[t]}^{su} f^t\,\varphi_t\,,$$

$$\delta_s^{r[t]}\,\delta_r^{u[v]} f_t\,\varphi_v = \delta_s^{u[t]} f_t\,\varphi_t\,,$$

$$\delta_{[t]}^{rs}\,\delta_{ru}^{[v]} f^t\,\varphi_v = \delta_u^{s[t]} f^t\,\varphi_t\,.$$

(IV) *Erste Integraleigenschaft.* Wenn wir das Produkt von $\delta_{rs}^{[t]}\,\varphi_t$ und f^r in bezug auf r über den Bereich B integrieren, dann

(1) Wir können diese Symbole als Funktionen mit drei Variablen ansehen, aber jedes von ihnen ist keine eigentliche Funktion, sondern kann nur als ein Limes einer Funktionenfolge betrachtet werden. In der Tat befriedigen z.B. die Funktionen

$$\delta_{rs}^{[t]} = \delta_r^t\,\delta_s^t\,, \quad \delta_{[t]}^{rs} = \delta_t^r\,\delta_t^s\,, \quad \delta_s^{r[t]} = \delta_t^r\,\delta_s^{(t)}$$

die sämtlichen Forderungen, wobei

$$\delta_r^t = \delta\,(t-r)$$

die sogenannte DIRACschen δ-Funktion bedeutet, welche durch

$$\lim_{h\to\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(t-r)^2}$$

definiert wird.

erhalten wir das Produkt von φ_s und f^s (nicht in bezug auf s integriert) usw.:

$$\delta^{[t]}_{rs}\,\varphi_t f^r = \varphi_s f^{(s)}\,, \qquad \delta^{rs}_{[t]} f^t\,\varphi_r = \varphi_s f^{(s)}\,,$$
$$\delta^{s[t]}_{r}\,\varphi_t f^r = \varphi_s f^{(s)}\,, \qquad \delta^{r[t]}_{s}\,\varphi_t f_r = \varphi_s f_s\,,$$

während φ_s bzw. f^r eine Funktion von der Variablen s bzw. r ist.

(V) *Zweite Integraleigenschaft.* Wir bezeichneten $\delta^{r[t]}_{r}$, in bezug auf das Index r integriert, mit ι, welches keine reelle Bedeutung hat, sondern nur imaginäres Symbol ist, dann ist ι von dem Index t unabhängig und wird wie Konstante behandelt.

Es folgt wegen (V) ohne weiteres

$$(1) \qquad \delta^{r[t]}_{r}\,\varphi_t = \iota \int \varphi_t\,dt = \iota\, e^t\,\varphi_t\,,$$

wobei e^t eine Funktion bedeutet, welche identisch gleich eins. Wegen (III) ergeben sich

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\delta^{[t]}_{rs}\,\varphi_t\,\delta^{rs}_{[u]} f^u = \delta^{r[t]}_{r}\,\varphi_t f^t = \iota\,\varphi_t f^t\,,\\ &\delta^{r[t]}_{s}\,\varphi_t\,\delta^{s[u]}_{r} f_u = \delta^{r[t]}_{r}\,\varphi_t f_t = \iota\, e^t\,\varphi_t f_t\,. \end{aligned}$$

Wenn wir

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\int \delta^{[t]}_{rs}\,dt = \delta^{[t]}_{rs}\,e_t = \delta_{rs}\,,\\ &\int \delta^{rs}_{[t]}\,dt = \delta^{rs}_{[t]}\,e^t = \delta^{rs}\,,\\ &\int \delta^{s[t]}_{r}\,dt = \delta^{s[t]}_{r}\,e_t = \delta^{s}_{r} \end{aligned}$$

setzen, folgt aus (IV)

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\delta_{rs} f^r = f^s\,, \qquad &&\delta^{rs} f_r = f_s\,,\\ &\delta^{r}_{s} f_r = f_s\,, \qquad &&\delta^{s}_{r} f^r = f^s \end{aligned}$$

bzw.

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\iint \delta^{[t]}_{rs}\,dr\,dt = \int \delta_{rs}\,dr = 1\,,\\ &\iint \delta^{rs}_{[t]}\,dr\,dt = \int \delta^{rs}\,dr = 1\,,\\ &\iint \delta^{r[t]}_{s}\,dr\,dt = \int \delta^{r}_{s}\,dr = 1\,,\\ &\iint \delta^{s[t]}_{r}\,dr\,dt = \int \delta^{s}_{r}\,dr = 1\,, \end{aligned}$$

setzend $\varphi_t \equiv 1$ bzw. $\varphi_t \equiv f_t \equiv 1$. Durch Integrierung in bezug auf v und r, können wir die folgenden Relationen aus (II) ableiten:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \int \delta^{[t]}_{rs}\,\delta_{tu}\,dr &= \int \delta^{[t]}_{ru}\,\delta_{ts}\,dr = \delta_{us}\,, \\ \int \delta^{rs}_{[t]}\,\delta^{tu}\,dr &= \int \delta^{ru}_{[t]}\,\delta^{ts}\,dr = \delta^{us}\,, \\ \int \delta^{rs}_{[t]}\,\delta^{t}_{u}\,dr &= \int \delta^{r[t]}_{u}\,\delta^{s}_{t}\,dr = \delta^{s}_{u}\,, \\ \int \delta^{[t]}_{rs}\,\delta^{u}_{t}\,dr &= \int \delta^{u[t]}_{r}\,\delta_{ts}\,dr = \delta^{u}_{s}\,. \end{aligned}$$

(III) gibt uns für $f_t \equiv \varphi_t \equiv 1$

$$(7)\qquad \begin{aligned} \delta_{rs}\,\delta^{r}_{u} &= \delta_{su}\,, & \delta^{rs}\,\delta^{u}_{r} &= \delta^{su}\,, \\ \delta^{r}_{s}\,\delta^{u}_{r} &= \delta^{u}_{s}\,, & \delta^{rs}\,\delta_{ru} &= \delta^{s}_{u}\,. \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, dass die fünf Forderungen (I)—(V) sich nicht widersprechen.

10. Es sei Φ_{rs} eine Funktion von zwei Variablen und Φ_t dieselbe von einer Variablen, dann führen wir eine neue Funktion $\boldsymbol{\Phi}_{rs}$ von zwei Variablen von dieser Funktionen aus:

$$(8)\qquad \boldsymbol{\Phi}_{rs} = \Phi_{rs} + \delta^{[t]}_{rs}\,\Phi_t\,.$$

Die Funktion $\boldsymbol{\Phi}_{rs}$ ist eigentlich von derselben Bedeutung wie das System von zwei Funktionen Φ_{rs} und Φ_t, und wir nennen die Funktion $\boldsymbol{\Phi}_{rs}$ *die Komplexfunktion mit zwei Indizes.* Auf dieselbe Weise ergeben sich Komplexfunktionen anderer Art mit zwei Indizes $\boldsymbol{\Phi}^{rs}$ und $\boldsymbol{\Phi}^{r}_{s}$, welche je $\delta^{rs}_{[t]}$ und $\delta^{r[t]}_{s}$ entsprechen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^{rs} &= \Phi^{rs} + \delta^{rs}_{[t]}\,\Phi^{t}\,, \\ \boldsymbol{\Phi}^{r}_{s} &= \Phi^{r}_{s} + \delta^{r[t]}_{s}\,\Phi_t\,. \end{aligned}$$

Auf Grund von (I) definieren wir Gleichheit von zwei Komplexfunktionen derselber Art wie folgt:

Wenn und nur wenn z.B. Φ_{rs} gleich Ψ_{rs} und gleichzeitig Φ_t gleich Ψ_t sind, sind die zwei Komplexfunktionen $\boldsymbol{\Phi}_{rs}$ und $\boldsymbol{\Psi}_{rs}$ gleich, d.h.

$$\Phi_{rs} + \delta^{[t]}_{rs}\,\Phi_t = \Psi_{rs} + \delta^{[t]}_{rs}\,\Psi_t\,,$$

und Analoges besteht für Komplexfunktionen anderer Art.

Wegen dieser Definition bedeutet

$$\Phi_{rs} = \varphi_{rs}$$

dass

$$\varphi_t \equiv 0 ,$$

deswegen dürfen wir eine Funktion von zwei Variablen als eine Komplexfunktion mit zwei Indizes ansehen.

11. Aus (I) folgt, dass

$$\delta^{[s_1]}_{r_1 r_2}\delta^{[s_2]}_{s_1 r_3}\delta^{[s_3]}_{s_2 r_4}\cdots\cdots\delta^{[t]}_{s_{n-1}\,r_{n+1}} \equiv \delta^{[t]}_{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}} \tag{10}$$

in bezug auf die Indizes $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ symmetrisch ist, davon die Komplexfunktionen mit mehreren Indizes wie Folgendes definiert werden können.

Die allgemeinste Komplexfunktion mit drei Indizes ist z.B.

$$\begin{aligned}\Phi_{rst} &= \varphi_{rst} + \delta^{[\alpha]}_{rs}\overset{(12)}{\varphi}_{\alpha t} + \delta^{[\alpha]}_{st}\overset{(23)}{\varphi}_{\alpha r} + \delta^{[\alpha]}_{tr}\overset{(31)}{\varphi}_{\alpha s} + \delta^{[\alpha]}_{rst}\varphi_\alpha \\ &= \varphi_{rst} + \delta^{[\alpha]}_{rs}\overset{(12)}{\Phi}_{\alpha t} + \delta^{[\alpha]}_{st}\overset{(23)}{\Phi}_{\alpha r} + \delta^{[\alpha]}_{tr}\overset{(31)}{\Phi}_{\alpha s} ,\end{aligned} \tag{11}$$

wo φ_{rst}, $\overset{(ij)}{\varphi}_{\alpha t}$, φ_α Funktionen sind, von welchen die Zahl von Variablen drei, zwei oder eins der Zahl der Indizes gemäss sind. Wir setzen dabei

$$\overset{(ij)}{\Phi}_{\alpha t} = \overset{(ij)}{\varphi}_{\alpha t} + \frac{1}{3}\,\delta^{[\beta]}_{\alpha t}\varphi_\beta , \tag{12}$$

welches auch Komplexfunktion mit zwei Indizes ist. Somit ist eine Komplexfunktion mit drei Indizes nichts anderes als ein System von fünf Funktionen, von welchen eine von drei und drei von zwei Variablen und die übrigen von einer Variablen sind.

Im allgemeinen wird eine Komplexfunktion mit n Indizes durch

$$\Phi_{r_1 r_2 \ldots r_n} = \varphi_{r_1 r_2 \ldots r_n} + \sum_{(kl)} \delta^{[\alpha]}_{r_k r_l}\overset{(kl)}{\Phi}_{\alpha r_1 \ldots r_{k-1} r_{k+1} \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_n} \tag{13}$$

dargestellt, wo $\Phi_{r_1 r_2 \dots r_n}$ eine Funktion von n Variablen und $\overset{(kl)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{n-2}}$ Komplexfunktion mit $n-1$ Indizes sind. $\sum_{(kl)}$ bedeutet dabei Summation über alle Kombinationen ohne Wiederholung von je zwei von $(1, 2, \dots, n)$. Eine Komplexfunktion mit n Indizes ist mit einem Systeme von Funktionen equivalent. Die Zahl σ_n dieser Funktionen ist

$$(14)\qquad \sigma_n = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2!} & \frac{2}{3!} & \frac{3}{4!} & \dots & \frac{n-2}{(n-1)!} & \frac{n^n}{n!} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2!} & \frac{2}{3!} & \dots & \frac{n-3}{(n-2)!} & \frac{(n-1)^n}{(n-1)!} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{n-4}{(n-3)!} & \frac{(n-2)^n}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}^{(1)},$$

denn wir können leicht die Formel für die Zahl ρ_i der Funktionen mit i Variablen auffinden:

$$\rho_i + \rho_{i-1} + \frac{1}{2!}\rho_{i-2} + \dots + \frac{1}{(i-2)!}\rho_2 + \frac{1}{(i-1)!}\rho_1 = \frac{i^n}{i!}$$

und

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \rho_i .$$

Wir betrachten auf dieselbe Weise Komplexfunktionen anderer Art:

$$(15)\qquad \Phi^{r_1 r_2 \dots r_n} = \Phi^{r_1 r_2 \dots r_n} + \sum_{(kl)} \delta^{r_k r_l}_{[\alpha]} \overset{(kl)}{\Phi}{}^{\alpha r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_n},$$

$$(16)\qquad \Phi^{s_1 s_2 \dots s_m}_{\cdot\cdot \quad \dots \cdot r_1 r_2 \dots r_n} = \Phi^{s_1 s_2 \dots s_m}_{\cdot\cdot \quad \dots \cdot r_1 r_2 \dots r_n} + \sum_{(kl)} \delta^{[\alpha]}_{r_k r_l} \overset{(kl)}{\Phi}{}^{s_1 \dots s_m}_{\cdot \quad \dots \cdot \alpha r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_n}$$

(1) $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 2,\ \sigma_3 = 5,\ \sigma_4 = 15,\ \sigma_5 = 52, \dots\dots$

$$+\sum_{(kl)}\delta^{s_k s_l}_{[\alpha]}\underset{(kl)}{\Phi}{}^{\alpha s_1\ldots s_{k-1}s_{k+1}\ldots s_{l-1}s_{l+1}\ldots s_m}_{\cdot\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot r_1\ldots r_n}$$

$$+\sum_k\sum_l\delta^{s_k[\alpha]}_{r_l}\underset{k}{\overset{l}{\Phi}}{}^{\cdot s_1\ldots s_{k-1}s_{k+1}\ldots s_m}_{\alpha\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot r_1\ldots r_{l-1}r_{l+1}\ldots r_n}\,.$$

Die Komplexfunktion $\Phi^{r_1 r_2\ldots r_n}$ sowie $\Phi^{s_1\ldots s_m}_{\cdot\ldots\cdot r_1\ldots r_{n-m}}$ sind je mit einem Systeme von σ_n Funktionen equivalent ebenso wie $\Phi_{r_1 r_2\ldots r_n}$. Die zwei Komplexfunktionen derselben Art mit derselben Zahl von Indizes sind gleich, wenn und nur wenn die entsprechenden Systeme von Funktionen miteinander gerade übereinstimmen.

12. Wenn wir das Produkt von zwei Komplexfunktionen von verschiedener Art mit zwei Indizes z. B. Φ_{rs} und Φ^{rt} in bezug auf r integrieren, dann bekommen wir wegen (III) und (IV) auch eine Komplexfunktion mit zwei Indizes Ψ^t_s, da

$$\begin{aligned}\Phi_{rs}\Phi^{rt} &= (\Phi_{rs}+\delta^{[\alpha]}_{rs}\Phi_\alpha)(\Phi^{rt}+\delta^{rt}_{[\beta]}\Phi^\beta)\\ &= \Phi_{rs}\Phi^{rt}+\Phi_s\Phi^{(s)t}+\Phi_{ts}\Phi^{(t)}+\delta^{[\alpha]}_{rs}\delta^{rt}_{[\beta]}\Phi_\alpha\Phi^\beta\\ &= \Psi^t_s+\delta^{t[\alpha]}_s\Psi_\alpha = \Psi^t_s\end{aligned}\tag{17}$$

ist, wobei

$$\begin{aligned}\Psi^t_s &= \Phi_{rs}\Phi^{rt}+\Phi_s\Phi^{(s)t}+\Phi_{ts}\Phi^{(t)},\\ \Psi_\alpha &= \Phi_\alpha\Phi^{(\alpha)}\,.\end{aligned}\tag{18}$$

Auf analoge Weise können wir schliessen, dass

$$\begin{aligned}\Phi_{rs}\Phi^r_t &= \Psi_{st}\,,\\ \Phi^{rs}\Phi^t_r &= \Psi^{st}\,,\\ \Phi^r_s\Phi^t_r &= \Psi^t_s\end{aligned}\tag{19}$$

alle Komplexfunktionen mit zwei Indizes sind.

Für zwei Komplexfunktionen $\Phi^{\cdot s_1\ldots s_i}_{r\cdot\ldots\cdot t_2\ldots t_j}$, $\Phi^{rs_{i+1}\ldots s_{n-1}}_{\cdot\cdot\ldots\cdot t_{j+1}\ldots t_m}$, ist im allgemeinen

$$\Phi^{\cdot s_1\ldots s_i}_{r\cdot\ldots\cdot t_2\ldots t_j}\Phi^{rs_{i+1}\ldots s_{n-1}}_{\cdot\cdot\ldots\cdot t_{j+1}\ldots t_m} = \Psi^{s_1\ldots s_{n-1}}_{\cdot\ldots\cdot t_2\ldots t_m}\tag{20}$$

auch eine Komplexfunktion mit $n+m-2$ Indizes. Unter einer Komplexfunktion mit keinem Index bzw. mit einem Index verstehen wir dabei einen bestimmten Zahlenwert bzw. eine gewöhnliche Funktion einer Variablen.

13. Wegen (V) erhalten wir für eine Komplexfunktion mit zwei Indizes $\boldsymbol{\Phi}^r_s$

$$\boldsymbol{\Phi}^r_r = \Phi^r_r + \iota\, e^r\, \Phi_r \,. \tag{21}$$

Wir heissen in Nachfolgenden Φ^r_r den reellen Teil von $\boldsymbol{\Phi}^r_r$ und dagegen $e^r\Phi_r = \int \Phi_r\, dr$ den idealen Teil von demselben. Wenn wir $\iota = 1$ ansehen, dann wird $\boldsymbol{\Phi}^r_r$ die Summe beider Teile, welche der absolute Betrag von demselben genannt wird. Der absolute Betrag von $\boldsymbol{\Phi}^r_r$ wird durch $|\boldsymbol{\Phi}^r_r|$ dargestellt und der reelle bzw. ideale Teil durch $R(\boldsymbol{\Phi}^r_r)$ bzw. $I(\boldsymbol{\Phi}^r_r)$.

Im allgemeinen ist $\boldsymbol{\Phi}^{r_1 \dots\, r_i\, t_1 \dots\, t_{n-i}}_{r_1 \dots\, r_i\, s_1 \dots\, s_{m-i}}$ ein Polynom i-ter Ordnung von ι und jeder seiner Koeffizienten auch eine Komplexfunktion mit $n+m-2i$ Indizes, während $\boldsymbol{\Phi}^{r_1 \dots\, r_i\, t_1 \dots\, t_{n-i}}_{u_1 \dots\, u_i\, s_1 \dots\, s_{m-i}}$ eine Komplexfunktion mit $n+m$ Indizes z. B.

$$\boldsymbol{\Phi}^{rs}_{\cdot\cdot r} = \overset{0}{\Phi}{}^s + \iota\, \overset{1}{\Phi}{}^s$$

und

$$\boldsymbol{\Phi}^{rs}_{\cdot\cdot rs} = \overset{0}{\Phi} + \iota\, \overset{1}{\Phi} + \iota^2\, \overset{2}{\Phi} \,,$$

wobei

$$\overset{0}{\Phi}{}^s = \Phi^{rs}_{\cdot\cdot r} + \overset{(12)}{\Phi}{}^{(s)}_{\cdot\, s} + \overset{(23)}{\Phi}{}^{\cdot\,(s)}_{s} \,,$$

$$\overset{1}{\Phi}{}^s = \overset{(13)}{\Phi}{}^{\cdot\, s}_{\alpha}\, e^\alpha + \Phi^s \,,$$

$$\overset{0}{\Phi} = \Phi^{rs}_{\cdot\cdot rs} + \overset{(12)}{\Phi}{}^{r}_{\cdot\, rr} + \underset{(12)}{\Phi}{}^{\cdot\, rr}_{r} + \overset{2}{\underset{1}{\Phi}}{}^{\cdot\, r}_{r\cdot\, r} + \overset{1}{\underset{2}{\Phi}}{}^{\cdot\, r}_{r\cdot\, r} \,,$$

$$\overset{1}{\Phi} = \overset{1}{\underset{1}{\Phi}}{}^{\cdot\, s}_{\alpha\cdot\, s}\, e^\alpha + \overset{2}{\underset{2}{\Phi}}{}^{\cdot\, r}_{\alpha\cdot\, r}\, e^\alpha + \overset{1,2}{\underset{2,1}{\Phi}}{}_{\alpha\alpha}\, e^\alpha + \overset{(12)}{\underset{(12)}{\Phi}}{}^{\alpha}_{\alpha} + \overset{(12)}{\underset{1}{\Phi}}{}_{\alpha\alpha}\, e^\alpha + \overset{(12)}{\underset{2}{\Phi}}{}_{\alpha\alpha}\, e^\alpha$$
$$+ \overset{1}{\underset{(12)}{\Phi}}{}_{\alpha\alpha}\, e^\alpha + \overset{2}{\underset{(12)}{\Phi}}{}_{\alpha\alpha}\, e^\alpha \,,$$

$$\overset{2}{\Phi} = \overset{1,2}{\underset{1,2}{\Phi}}{}_{\alpha\beta}\, e^\alpha e^\beta + \Phi_\alpha\, e^\alpha \,.$$

Somit ersehen wir wegen Nr. 12, dass i Komplexfunktionen mit $n+m-2i$ Indizes herausgehen, wenn das Produkt von zwei Komplexfunktionen, eine mit n Indizes und die andere mit m Indizes, in bezug auf dieselben i Variablen integriert wird, z. B.

$$(22) \qquad \Phi^{r_1 \dots r_i s_1 \dots s_{n-i}} \Phi_{r_1 \dots r_i t_1 \dots t_{m-i}} = \sum_{j=0}^{i-1} \iota^j \overset{j}{\Phi}{}^{s_1 \dots s_{n-i}}_{\cdot \dots \cdot t_1 \dots t_{m-i}} .$$

Wir heissen dabei $\overset{0}{\Phi}{}^{s_1 \dots s_{n-i}}_{\cdot \dots \cdot t_1 \dots t_{m-i}}$ *den reellen Teil* und $\overset{j}{\Phi}{}^{s_1 \dots s_{n-i}}_{\cdot \dots \cdot t_1 \dots t_{m-i}}$ für $j>0$ *den idealen Teil j-ten Grades.* Der reelle Teil wird durch $R(\Phi)$ und der ideale Teil j-ten Grades durch $I_j(\Phi)$ dargestellt. Unter *dem absoluten Betrag* $|\Phi|$ verstehen wir ferner die Summe des reellen und aller idealen Teile:

$$(23) \qquad |\Phi| = R(\Phi) + \sum_{j=1}^{i-1} I_j(\Phi) .$$

14. Es ist klar, dass die Summe sowie die Differenz von zwei Komplexfunktionen mit denselben Indizes und von derselben Art auch eine Komplexfunktion mit denselben Indizes und von derselber Art sind.

Das Produkt (nicht integriert) von zwei Komplexfunktionen ist auch eine Komplexfunktion, deren Indizes von allen Indizes der beiden Komplexfunktionen entstehen. Aber solche Komplexfunktion ist nicht die allgemeine, sondern einige ihrer Funktionen verschwinden identisch, z. B. für $\Phi_{rst} = \Phi_{rs} \Psi_t$ ersehen wir sogleich

$$\overset{(23)}{\Phi}_{\alpha r} \equiv \overset{(31)}{\Phi}_{\alpha r} \equiv \Phi_{\alpha} \equiv 0 .$$

Deswegen können wir nicht schliessen, dass jede Komplexfunktion auf ein Produkt von zwei Komplexfunktionen mit wenigen Indizes reduziert werden könne.

Im allgemeinen, *für das Produkt von zwei Komplexfunktionen*

$$\Phi_{r_1 \dots r_n s_{n+1} \dots s_m} = \Phi_{r_1 \dots r_n} \Psi_{s_{n+1} \dots s_m} ,$$

ergibt sich

$$\Phi_{r_1 \dots r_n s_{n+1} \dots s_m} = \Phi_{r_1 \dots r_n s_{n+1} \dots s_m} + \sum_{(kl)} \delta^{[\alpha]}_{r_k r_l} \overset{(kl)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_n s_{n+1} \dots s_m} + \sum_{(kl)} \delta^{[\alpha]}_{s_k s_l} \overset{(ki)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_n s_{n+1} \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_{l-1} s_{l+1} \dots s_m} \tag{24}$$

und $\overset{(kl)}{\Phi}_{\chi r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_n s_{n+1} \dots s_{l-1} s_{l+1} \dots s_m}$ *verschwinden alle identisch.*

Bemerkung. Wir dürfen folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} &\overset{(kl)}{\Phi}_{\chi r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_n s_{n+1} \dots s_m} \\ &\qquad = \overset{(kl)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_n} \\ &\qquad \times \left(\Psi_{s_{n+1} \dots s_m} + \frac{1}{2} \sum_{(ij)} \delta^{[\beta]}_{s_i s_j} \overset{(ij)}{\Psi}_{\beta s_{n+1} \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{j-1} s_{j+1} \dots s_m} \right), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(kl)}{\Phi}_{\chi r_1 \dots r_n s_{n+1} \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_{l-1} s_{l+1} \dots s_m} \\ &\qquad = \left(\Phi_{r_1 \dots r_n} + \frac{1}{2} \sum_{(ij)} \delta^{[\beta]}_{r_i r_j} \overset{(ij)}{\Phi}_{\beta r_1 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_{j-1} r_{j+1} \dots r_n} \right) \\ &\qquad \times \overset{(kl)}{\Psi}_{\chi s_{n+1} \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_{l-1} s_{l+1} \dots s_m} . \end{aligned}$$

15. Wir greifen zunächst die gebräuchlichsten heraus, die symmetrische und die schiefsymmetrische Komplexfunktion. Wir heissen die Komplexfunktion mit zwei Indizes *symmetrisch*, wenn für sie die Beziehung

$$\Phi_{rs} = \frac{1}{2} (\Phi_{rs} + \Phi_{sr}) \equiv \Phi_{(rs)} \tag{26}$$

für beliebige Wert von r und s in B gilt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Komplexfunktion mit zwei Indizes Φ_{rs} symmetrisch sein soll, ist, dass

$$\Phi_{rs} = \Phi_{(rs)} \tag{27}$$

für alle Werte von r und s in B.

Die *schiefsymmetrische* Komplexfunktion mit zwei Indizes wird dagegen durch

$$\Phi_{rs} = \frac{1}{2} (\Phi_{rs} - \Phi_{sr}) \equiv \Phi_{[rs]} \tag{28}$$

definiert. (28) ist wegen (I) mit den zwei Beziehungen

$$\Phi_{rs} = \Phi_{[rs]}\,, \qquad \Phi_t = 0 \tag{29}$$

equivalent.

Wenn die Komplexfunktion mit drei Indizes Φ_{rst} in bezug auf jede zwei Indizes symmetrisch ist, so nennen wir die Komplexfunktion symmetrisch. Für die symmetrische Komplexfunktion mit drei Indizes Φ_{rst} ergibt sich ohne weiteres

$$\Phi_{rst} = \frac{1}{3!}\sum \Phi_{rst} \equiv \Phi_{(rst)}\,, \tag{30}$$

wo $\sum$ Summierung über sämtliche Permutationen der Indizes bedeutet. (30) kann in die folgenden Beziehungen der Funktionen umgeschrieben werden:

$$\Phi_{rst} = \Phi_{(rst)}\,, \quad \overset{(12)}{\Phi}_{rs} = \overset{(23)}{\Phi}_{rs} = \overset{(31)}{\Phi}_{rs}\,. \tag{31}$$

Im allgemeinen definieren wir Symmetrität einer Komplexfunktion mit n Indizes $\Phi_{r_1 \dots r_n}$ durch

$$\Phi_{r_1 \dots r_n} = \frac{1}{n!}\sum \Phi_{r_1 \dots r_n} \equiv \Phi_{(r_1 \dots r_n)}\,, \tag{32}$$

daraus können wir sogleich schliessen:

Die charakteristische Eigenschaft der symmetrischen Komplexfunktion mit n Indizes ist, dass ihre Funktion von n Variablen in bezug auf sämtliche Variablen symmetrisch ist und ihre anderen Funktionen in bezug auf sämtliche Variablen, bis auf die erste Variable, symmetrisch sind, von denen diejenigen mit derselben Zahl von Variablen alle miteinander übereinstimmen, d. h.

$$\begin{aligned}
&\Phi_{r_1 r_2 \dots r_n} = \Phi_{(r_1 r_2 \dots r_n)}\,,\\
&\overset{(12)}{\Phi}_{\alpha(r_1 \dots r_{n-2})} = \overset{(12)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{n-2}} = \overset{(23)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{n-2}} = \dots\,,\\
&\overset{(123)}{\Phi}_{\alpha(r_1 \dots r_{n-3})} = \overset{(123)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{n-3}} = \overset{(234)}{\Phi}_{\alpha r_1 \dots r_{n-3}} = \dots\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,\\
&\overset{(1\cdots n-2)}{\Phi}_{\alpha(r_1 r_2)} = \overset{(1\cdots n-2)}{\Phi}_{\alpha r_1 r_2} = \overset{(2\cdots n-1)}{\Phi}_{\alpha r_1 r_2} = \dots\,,\\
&\overset{(1\cdots n-1)}{\Phi}_{\alpha r} = \overset{(2\cdots n)}{\Phi}_{\alpha r} = \dots\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

Unter der schiefsymmetrischen Komplexfunktion mit drei Indizes verstehen wir diejenige, welche in bezug auf jede zwei benachbarten Indizes schiefsymmetrisch ist. Die schiefsymmetrische Komplexfunktion wird dann durch

$$\Phi_{rst} = \frac{1}{3!}\left(\sum{}' \Phi_{rst} - \sum{}'' \Phi_{rst}\right) \equiv \Phi_{[rst]} \tag{34}$$

charakterisiert, wo $\sum'$ bzw. $\sum''$ Summierung über sämtliche gerade bzw. ungerade Permutationen der Indizes bedeutet. Im allgemeinen definieren wir Schiefsymmetrität einer Komplexfunktion mit n Indizes durch

$$\Phi_{r_1 \dots r_n} = \frac{1}{n!}\left(\sum{}' \Phi_{r_1 \dots r_n} - \sum{}'' \Phi_{r_1 \dots r_n}\right) \equiv \Phi_{[r_1 \dots r_n]} . \tag{35}$$

Wegen (35) und Definition von Gleichheit können wir ohne Schwierigkeit schliessen:

Die schiefsymmetrische Komplexfunktion mit n Indizes ist nichts anderes als eine Funktion von n Variablen, welche in bezug auf sämtliche Variablen schiefsymmetrisch ist.

Wir können ferner von Symmetrie bzw. Schiefsymmetrie in bezug auf einen Teil von Indizes reden, d. h. eine Komplexfunktion ist in bezug auf einen Teil von Indizes symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, wenn sie in bezug auf jede zwei benachbarten Indizes des Teils symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist, für die wir haben z.B

$$\Phi_{r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m} = \Phi_{(r_1 \dots r_n) s_1 \dots s_m} \tag{36}$$

bzw.

$$\Phi_{r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m} = \Phi_{[r_1 \dots r_n] s_1 \dots s_m} . \tag{37}$$

Es ist nicht schwer, die folgenden Sätze zu beweisen:

Wenn eine Funktion einer in bezug auf einen Teil von Indizes symmetrischen Komplexfunktion einige von den Indizes des Teils als Variablen enthält, dann ist sie in bezug auf diese Variablen symmetrisch.

Eine in bezug auf einen Teil von Indizes schiefsymmetrische Komplexfunktion entsteht nur aus derartigen Funktionen, die wenigstens $m-1$ Indizes des Teils als Variablen enthalten und in bezug auf sie schiefsymmetrisch sind, wo m die Zahl von Indizes des Teils andeutet.

$\boldsymbol{\Phi}_{rst}$ sei z. B. eine Komplexfunktion mit drei Indizes, welche in bezug auf r, s symmetrisch bzw. auf s, t schiefsymmetrisch ist, dann erhalten wir

$$\boldsymbol{\Phi}_{rst} = \Phi_{(rs)t} + \delta^{[\alpha]}_{rs} \overset{(12)}{\Phi}_{\alpha t} + \delta^{[\alpha]}_{st} \overset{(23)}{\Phi}_{\alpha r} + \delta^{[\alpha]}_{tr} \overset{(23)}{\Phi}_{\alpha s} + \delta^{[\alpha]}_{rst} \Phi_{\alpha} \tag{38}$$

bzw.

$$\boldsymbol{\Phi}_{rst} = \Phi_{r[st]} + \delta^{[\alpha]}_{st} \overset{(23)}{\Phi}_{\alpha r} - \delta^{[\alpha]}_{tr} \overset{(23)}{\Phi}_{\alpha s} . \tag{39}$$

Wegen (38) und (39) entsteht $\boldsymbol{\Phi}_{rst}$ nur aus einer Funktion Φ_{rst}, wenn sie gleichzeitig beide obengenannten Eigenschaften enthält, und die Funktion Φ_{rst} in bezug auf r, s symmetrisch und auf s, t schiefsymmetrisch ist.

Die Symmetrität bzw. die Schiefsymmetrität einer Komplexfunktion anderer Art wird auf analoge Weise definiert. Doch sei das hier nicht ausgeführt.

Es sei $\boldsymbol{\Phi}_{r_1 \dots r_n}$ eine allgemeine Komplexfunktion mit n Indizes, so nennen wir $\boldsymbol{\Phi}_{(r_1 \dots r_n)}$ bzw. $\boldsymbol{\Phi}_{[r_1 \dots r_n]}$ den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von $\boldsymbol{\Phi}_{r_1 \dots r_n}$, der eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische Komplexfunktion ist.

16. Wenn wir

$$\mathfrak{F}^x_y = F^x_{\ y} + \delta^{x[\alpha]}_{y} F^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{40}$$

ansetzen, dann ist $\mathfrak{F}^x_y$ eine Komplexfunktion mit zwei Indizes und die PICARDsche Transformation (2) in § 1 wird eben in der Form

$$\delta \bar{f}^x = \mathfrak{F}^x_y \delta f^y \tag{41}$$

dargestellt. Die inverse Transformation von (41) hat dann die Gestalt

$$\delta f^x = {}'\mathfrak{F}^x_y \, \delta \bar{f}^y , \tag{42}$$

ansetzend

$$'\mathfrak{F}_y^x = 'F_y^x + \delta_y^{x[\alpha]}\,'F^{\alpha}{}_{,\,\alpha}\,. \tag{43}$$

$'\mathfrak{F}_y^x$ ist auch eine Komplexfunktion mit zwei Indizes, und die Beziehungen (9) in § 1 werden hierbei gerade in einem Ausdrucke

$$\mathfrak{F}_y^x\,'\mathfrak{F}_z^y = \delta_z^x \tag{44}$$

zusammengefasst, wo

$$\delta_z^x = \delta_z^{x[\alpha]}\,e_\alpha\,.$$

Es ist klar, dass (44) in (6) und (7) in § 1 übergeht, wenn wir $F^{(\alpha)}{}_{,\,x} = 1$ voraussetzen.

§ 3. VEKTORIALEN UND TENSORIALEN.

17. Wir möchten erstens die PICARDschen Transformationen zugrund legen, damit die Vektorialen sowie Tensorialen in einem Tangentialraume des Funktionalraums $\mathfrak{P}$ definiert werden können.

Der Punkt f^x sei derjenige, am welchem der Tangentialraum den Funktionalraum $\mathfrak{P}$ tangiert. *Das kontravariante Vektorial* $\mathfrak{v}^x$ im Tangentialraume erklärt sich dann als eine Funktion von einer Variablen x, welche von f^x abhängig ist und bei der PICARDschen Transformation am Punkte f^x genau so wie δf^x sich transformiert;

$$\bar{\mathfrak{v}}^x = \mathfrak{F}_y^x \mathfrak{v}^y\,. \tag{1}$$

Der Index x eines kontravarianten Vektorials $\mathfrak{v}^x$ wird immer oben geschrieben, wie üblich bei dem Tensorkalkül.

Andererseits verstehen wir unter *dem kovarianten Vektorial* $\mathfrak{w}_x$ im Tangentialraume eine Funktion von einer Variablen x, welche von f^x abhängig ist und bei einer PICARDschen Transformation am Punkte f^x folgendermassen sich transformiert:

$$\bar{\mathfrak{w}}_x = '\mathfrak{F}_x^y\,\mathfrak{w}_y\,. \tag{2}$$

Der Index x eines kovarianten Vektorials $\mathfrak{w}_x$ wird immer unten geschrieben.

Die Summe bzw. die Differenz von zwei kontravarianten (kovarianten) Vektorialen $\mathfrak{v}^x \pm \mathfrak{w}^x$ ist, infolge der Linearität der PICARDschen Transformation, wiederum ein kontravariantes (kovariantes) Vektorial.

Es sei $H[f^x]$ ein Funktional von f^x, welches bei der PICARDschen Transformation sich nicht verändert, dann ist die funktionale Ableitung H_x von $H[f^x]$ ein kovariantes Vektorial, denn

$$\delta\bar{H}[\bar{f}^x] = \bar{H}_x \delta\bar{f}^x = \bar{H}_x (\mathfrak{F}^x_y \delta f^y) = (\bar{H}_x \mathfrak{F}^x_y)\, \delta f^y$$

und andererseits

$$\delta\bar{H}[\bar{f}^x] = \delta H[f^x] = H_y \delta f^y ,$$

daraus folgt

$$\bar{H}_x \mathfrak{F}^x_y = H_y , \quad \text{d.h.} \quad \bar{H}_x = {}'\mathfrak{F}^y_x H_y .$$

18. Es sei $\mathfrak{v}^x$ bzw. $\mathfrak{w}_x$ ein kontravariantes bzw. kovariantes Vektorial, dann lautet gemäss (44) in § 2 nach (1) und (2)

$$\bar{\mathfrak{v}}^x \bar{\mathfrak{w}}_x = \mathfrak{F}^x_y {}'\mathfrak{F}^z_x \mathfrak{v}^y \mathfrak{w}_z = \delta^z_y \mathfrak{v}^y \mathfrak{w}_z = \mathfrak{v}^y \mathfrak{w}_y ,$$

d.h. $\mathfrak{v}^x \mathfrak{w}_x$ bleibt bei jeder PICARDschen Transformation unverändert. Ein Funktional von f^x heissen wir *ein Skalarial* oder *eine Invariante*, wenn es bei jeder PICARDschen Transformation unverändert bleibt. $\mathfrak{v}^x \mathfrak{w}_x$ ist somit ein Beispiel von Skalarial. Jedes Skalarial hat eine invariante Bedeutung für die PICARDsche Gruppe, bedeutet folglich eine geometrische Eigenschaft im PICARDschen Raume.

Trivialerweise gilt das Assoziativgesetz für die Operation $\mathfrak{v}^x \mathfrak{w}_x$:

$$(\mathfrak{v}^x \pm \mathfrak{w}^x)\, \mathfrak{x}_x = \mathfrak{v}^x \mathfrak{x}_x + \mathfrak{w}^x \mathfrak{x}_x , \tag{3}$$

$$\mathfrak{v}^x (\mathfrak{w}_x + \mathfrak{x}_x) = \mathfrak{v}^x \mathfrak{w}_x + \mathfrak{v}^x \mathfrak{x}_x . \tag{4}$$

19. Das allgemeine Produkt von zwei kontravarianten Vektorialen $\mathfrak{v}^x \mathfrak{w}^y$, welches das Produkt von zwei Funktionen von den Vektorialen bedeutet, transformiert sich bei der PICARDschen Transformation

$$\bar{\mathfrak{v}}^x \bar{\mathfrak{w}}^y = \mathfrak{F}^x_t \mathfrak{F}^y_z \mathfrak{v}^t \mathfrak{w}^z . \tag{5}$$

Im allgemeinen nennen wir eine Komplexfunktion $\mathfrak{u}^{xy}$ mit zwei Indizes *das kontravariante Tensorial zweiten Grades* im Tangentialraume, wenn sie vom Punkte f^x abhängig ist und bei der PICARDschen Transformation genau so wie (5) sich transformiert:

$$(6) \qquad \bar{\mathfrak{u}}^{xy} = \mathfrak{F}^x_t \mathfrak{F}^y_z \mathfrak{u}^{tz} .$$

Auf Darstellung in Funktionenrelationen geht (6) über:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{xy} &= F^x_t F^y_z u^{tz} + F^{(x)}, _x F^y_z u^{xz} + F^x_t F^{(y)}, _y u^{ty} + F^{(x)}, _x F^{(y)}, _y u^{xy} \\ &\quad + F^{(x)}, _x F^y_x u^x + F^x_y F^{(y)}, _y u^y + F^x_z F^y_z u^z , \\ \bar{u}^t &= F^{(t)}, _t F^{(t)}, _t u^t , \end{aligned} \qquad (7)$$

wobei $\mathfrak{u}^{xy} = u^{xy} + \delta^{xy}_{[t]} u^t$ ist.

(7) zeigt uns, dass für jedes kontravariante Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{u}^{xy}$ die Beziehung $u^t = 0$ bei der PICARDschen Transformation von invarianter Bedeutung ist, d.h. dass ein Tensorial, für das $u^t = 0$ ist, bei der PICARDschen Transformation wiederum zu dem gleichartigen Tensorial übergeht.

Wenn die Komplexfunktion $\mathfrak{u}^{xy}$ symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist, nennen wir das Tensorial $\mathfrak{u}^{xy}$ zweiten Grades auch *symmetrisch* bzw. *schiefsymmetrisch*. Die Symmetrität sowie die Schiefsymmetrität des Tensorials zweiten Grades sind bei der PICARDschen Transformation die invarianten Eigenschaften des Tensorials, wie wir wegen (7) erkennen können.

Es seien $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{w}_x$ die kovarianten Vektorialen und $\mathfrak{u}^{xy}$ ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades, dann ist infolge (6)

$$(8) \qquad \mathfrak{u}^{xy} \mathfrak{v}_x \mathfrak{w}_y = u^{xy} v_x w_y + u^x v_x w_x^{(1)}$$

ein Skalarial. Umgekehrt, ist $\mathfrak{u}^{xy}$ ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades, wenn $\mathfrak{u}^{xy} \mathfrak{v}_x \mathfrak{w}_y$ ein Skalarial ist und wenn $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{w}_x$ die kovarianten Vektorialen sind.

(1) Wir setzen dabei $\mathfrak{v}_x = v_x$, $\mathfrak{w}_x = w_x$ an. Im allgemeinen benützen wir die deutschen Buchstaben für Vektorialen oder Tensorialen und die lateinischen für gewöhnliche Funktionen oder Funktionalen.

Auf analoge Weise, erkennen wir, dass $\mathfrak{u}^{xy}\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{u}^{xy}\mathfrak{w}_y$ beide die kontravarianten Vektorialen sind, unter derselben Bedingung wie oben. Somit können wir sofort schliessen, dass $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{w}_x$ beide die kontravarianten Vektorialen sind, wenn $\mathfrak{u}^{xy}$ ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades und $\mathfrak{u}^{xy}\mathfrak{v}_x\mathfrak{w}_y$ ein Skalarial ist.

20. *Das kovariante Tensorial zweiten Grades* im Tangentialraume erklärt sich als eine Komplexfunktion $\mathfrak{u}_{xy}$ mit zwei Indizes, welche bei der PICARDschen Transformation am betreffenden Punkte folgendermassen transformiert wird:

$$\bar{\mathfrak{u}}_{xy} = {}'\mathfrak{F}_x^t\,{}'\mathfrak{F}_y^z\,\mathfrak{u}_{tz}\ . \tag{9}$$

Das allgemeine Produkt von zwei kovarianten Vektorialen ist somit ein kovariantes Tensorial zweiten Grades. (9) fasst die folgenden Beziehungen zusammen:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{xy} &= {}'F_x^t\,{}'F_y^z\,u_{tz}+{}'F^{(x)},_x\,{}'F_y^z\,u_{xz}+{}'F_x^t\,{}'F^{(y)},_y\,u_{ty}+{}'F^{(x)},_x\,{}'F^{(y)},_y\,u_{xy}\\ &\quad+{}'F^{(x)},_x\,{}'F_y^x u_x+{}'F_x^y\,{}'F^{(y)},_y\,u_y+{}'F_x^z\,{}'F_y^z\,u_z\ ,\\ \bar{u}_t &= {}'F^{(t)},_t\,{}'F^t,_t\,u_t\ ,\end{aligned} \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{u}_{xy}=u_{xy}+\delta_{xy}^{[t]}u_t$ ist. Für jedes kovariante Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{u}_{xy}$ wird die Beziehung $u_t=0$ auch bei irgendeiner PICARDschen Transformation nicht zerstört, und überdies geht das allgemeine Produkt von zwei kovarianten (sowie kontravarianten) Vektorialen wiederum in ein allgemeines Produkt von zwei gleichartigen Vektorialen über. Wir können auch Symmetrität bzw. Schiefsymmetrität eines kovarianten Tensorials zweiten Grades $\mathfrak{u}_{xy}$ durch Symmetrität bzw. Schiefsymmetrität der Komplexfunktion mit zwei Indizes $\mathfrak{u}_{xy}$ definieren, welche bei der PICARDschen Transformation nicht zerstört wird.

Es ist nicht schwer die folgenden Sätzen zu beweisen:

(i) Wenn $\mathfrak{u}_{xy}$ bzw. $\mathfrak{w}^{xy}$ ein kovariantes bzw. kontravariantes Tensorial zweiten Grades ist, dann ist

$$\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy} = u_{xy}w^{xy}+u_x w^{xx}+u_{xx}w^x+\iota\,u_x w^x \tag{11}$$

eine Invariante, wobei $\mathfrak{u}_{xy} = u_{xy} + \delta^{[t]}_{xy} u_t$ und $\mathfrak{w}^{xy} = w^{xy} + \delta^{xy}_{[t]} w^t$. Die Behauptung ist auch Wahrheit, wenn $\mathfrak{w}^{xy}$ ein allgemeines Produkt von zwei kontravarianten Vektorialen ist. Umgekehrt ist $\mathfrak{u}_{xy}$ ein kovariantes Tensorial zweiten Grades, wenn $\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy}$ bzw. $\mathfrak{w}^{xy}$ eine Invariante bzw. ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades ist. Das Gleiche gilt bei Vertauschung von $\mathfrak{u}_{xy}$ und $\mathfrak{w}^{xy}$.

(ii) $\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{v}^x$ und $\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^y$ sind beide kovariante Vektorialen, wobei $\mathfrak{v}^x$ und $\mathfrak{w}^y$ beide kontravariante Vektorialen sind.

(iii) Wenn $\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{v}^x\mathfrak{w}^y$ eine Invariante und $\mathfrak{u}_{xy}$ ein kovariantes Tensorial zweiten Grades sind, dann sind $\mathfrak{v}^x$ und $\mathfrak{w}^y$ beide die kontravarianten Vektorialen.

Der reelle bzw. ideale Teil von $\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy}$:

$$R(\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy}) = u_{xy}w^{xy} + u_x w^{xx} + u_{xx} w^x \tag{12}$$

bzw.

$$I(\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy}) = u_x w^x \tag{13}$$

ist bei der PICARDschen Transformation einzeln invariant, wie wir wegen (11) sofort erkennen. Somit ist der absolute Betrag $|\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy}|$ natürlich auch so. Deshalb erhalten wir immer zwei voneinander unabhängige[1] invariante Grössen $R(\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy})$ und $I(\mathfrak{u}_{xy}\mathfrak{w}^{xy})$ aus zwei Tensorialen zweiten Grades, eine kovariante und eine kontravariante.

Die Transformationsregeln (7) und (10) stellen uns vor, dass die Funktion einer Variablen $u_x w^{(x)}$ für zwei Tensorialen zweiten Grades $\mathfrak{u}_{xy}$ und $\mathfrak{w}^{xy}$ bei der PICARDschen Transformation auch invariant ist[2].

21. Die Komplexfunktion $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$[3], welche bei der PICARDschen Transformation am betreffenden Punkte f^x genau so wie das Produkt

(1) "Voneinander unabhängige" bedeutet, dass jede der Grössen aus der anderen keineswegs ohne weitere Bedingungen abgeleitet werden kann.

(2) Es wird bemerkenswert sein, dass in unserem Falle zwei voneinander unabhängige invariante Grössen und eine invariante Funktion einer Variablen aus zwei Tensorialen zweiten Grades $\mathfrak{u}_{xy}$ und $\mathfrak{w}^{xy}$ abgeleitet werden, während nur eine invariante Grösse $v^{\lambda\mu}w_{\lambda\mu}$ aus zwei gewöhnlichen Tensoren zweiten Grades $v^{\lambda\mu}$ und $w_{\lambda\mu}$, einem kontravarianten und einem kovarianten, erhalten werden kann.

(3) δ^x_y geht bei jeder PICARDschen Transformation in sich über, so stellt δ^x_y ein gemischtes Tensorial zweiten Grades dar. Aber δ_{xy} bzw. δ^{xy} stellt kein Tensorial dar, denn es bleibt bei PICARDschen Transformationen unverändert.

von den kontravarianten und kovarianten Vektorialen $\mathfrak{v}^x\, \mathfrak{w}_y$ sich transformiert, nennen wir *das gemischte Tensorial zweiten Grades*, das in bezug auf dem Index x kontravariant und auf dem y kovariant ist:

$$\bar{\mathfrak{u}}^x_{\cdot y} = \mathfrak{F}^x_t\, \mathfrak{F}^z_y\, \mathfrak{u}^t_{\cdot z} \,. \tag{14}$$

Die obere Beziehung stellt das:

$$\begin{aligned} \bar{u}^x_{\cdot y} = {} & F^x_t F^z_y u^t_{\cdot z} + F^{(x)}_{,\,x} F^z_y u^x_{\cdot z} + F^x_t F^{(y)}_{,\,y} u^t_{\cdot y} + F^{(x)}_{,\,x} F^{(y)}_{,\,y} u^x_{\cdot y} \\ & + F^{(x)}_{,\,x} F^x_y u_x + F^x_y F^{(y)}_{,\,y} u_y + F^x_z F^z_y u_z \,, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\bar{u}_t = u_t \,,$$

wobei $\mathfrak{u}^x_{\cdot y} = u^x_{\cdot y} + \delta^{x[t]}_y u_t$ ist. Daraus erkennen wir, dass *die Funktion einer Variablen u_t eines gemischten Tensorials zweiten Grades bei der* PICARDschen *Transformation unverändert bleibt*[1].

Die Grösse

$$\mathfrak{u}^x_{\cdot x} = u^x_{\cdot x} + \iota\, u_x\, e^x \tag{16}$$

ist infolge (14) eine Invariante und somit ist die Grösse $u^x_{\cdot x}$ bei der PICARDschen Transformation invariant. Es seien $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ und $\mathfrak{w}^x_{\cdot y}$ beide die gemischten Tensorialen zweiten Grades, dann ist

$$\mathfrak{u}^x_{\cdot y}\, \mathfrak{w}^y_{\cdot x} = u^x_{\cdot y}\, w^y_{\cdot x} + u^x_{\cdot x}\, w_x + u_x\, w^x_{\cdot x} + \iota\, u_x\, w_x\, e^x \tag{17}$$

auch eine Invariante, daher ist der reelle Teil von $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}\, \mathfrak{w}^y_{\cdot x}$

$$R(\mathfrak{u}^x_{\cdot y}\, \mathfrak{w}^y_{\cdot x}) = u^x_{\cdot y}\, w^y_{\cdot x} + u^x_{\cdot x}\, w_x + u_x\, w^x_{\cdot x}$$

invariant. Die Invarianz des idealen Teiles $I(\mathfrak{u}^x_{\cdot y}\, \mathfrak{w}^y_{\cdot x})$ wird trivialerweise bewiesen, denn u_t sowie w_t sind sich selbst invariant.

Die folgenden Sätzen werden leicht bewiesen:

(i) Wenn $\mathfrak{v}_{xy}$ bzw. $\mathfrak{w}^{xy}$ ein kovariantes bzw. kontravariantes Tensorial zweiten Grades ist, dann sind $\mathfrak{v}_{xy}\, \mathfrak{w}^{yz}$ und $\mathfrak{v}_{xy}\, \mathfrak{w}^{zx}$ beide die gemischten Tensorialen zweiten Grades, und umgekehrt.

(1) Auf die Reihenfolge der Indizes ist hier aufs strengste zu achten, und im allgemeinen braucht $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ durchaus nicht gleich $\mathfrak{u}^{\cdot x}_y$ zu sein.

(ii) Wenn $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ und $\mathfrak{x}^x_{\cdot y}$ die gemischten Tensorialen zweiten Grades sind, dann ist $\mathfrak{v}^x_{\cdot y}\,\mathfrak{x}^y_{\cdot z}$ wiederum ein gemischtes Tensorial zweiten Grades und umgekehrt.

(iii) $\mathfrak{v}_{xy}$, $\mathfrak{w}^{xy}$, $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ seien wie oben, dann ist $\mathfrak{v}_{xy}\,\mathfrak{u}^x_{\cdot z}$ bzw. $\mathfrak{w}^{xy}\,\mathfrak{u}^z_{\cdot y}$ ein kovariantes bzw. kontravariantes Tensorial zweiten Grades, und umgekehrt.

22. Wir wenden uns jetzt zur Definition der allgemeinen Tensorialen[1], wobei auch die PICARDsche Gruppe zugrund gelegt wird. Die bis jetzt betrachten Tensorialen treten dabei wiederum als Spezialfall auf.

Wir nennen eine Komplexfunktion mit n Indizes $\mathfrak{T}^{r_1 \cdots r_n}$ *ein kontravariantes Tensorial n-ten Grades*, wenn sie sich bei der PICARDschen Transformation genau so wie das allgemeine Produkt von n kontravarianten Vektorialen transformieren:

$$\overline{\mathfrak{T}}^{r_1 \cdots r_n} = \mathfrak{F}^{r_1}_{s_1} \cdots \mathfrak{F}^{r_n}_{s_n}\, \mathfrak{T}^{s_1 \cdots s_n} \quad (2)\,. \tag{18}$$

(1) A. Kawaguchi [1] und [2].

(2) (18) fasst ja im allgemeinen σ_n Beziehungen zwischen den Funktionen der Tensorialen $\overline{\mathfrak{T}}^{r_1 \cdots r_n}$, $\mathfrak{T}^{r_1 \cdots r_n}$ zusammen, z. B. für ein Tensorial dritten Grades $\mathfrak{g}^{xyz} = g^{xyz} + \delta^{xy}_{[\alpha]}\overset{(12)}{g}{}^{\alpha z} + \delta^{yz}_{[\alpha]}\overset{(23)}{g}{}^{\alpha x} + \delta^{zx}_{[\alpha]}\overset{(31)}{g}{}^{\alpha y} + \delta^{xyz}_{[\alpha]} g^{\alpha}$ gibt (18) uns in der Tat

$$\begin{aligned}
(18')\quad \overline{g}^{xyz} &= g^{rst} F^x_r F^y_s F^z_t + g^{(x)st} F^x{}_{,x} F^y_s F^z_t + g^{r(y)t} F^x_r F^y{}_{,y} F^z_t \\
&\quad + g^{rs(z)} F^x_r F^y_s F^z{}_{,z} + g^{(x)(y)t} F^x{}_{,x} F^y{}_{,y} F^z_t + g^{(x)s(z)} F^x{}_{,x} F^y_s F^z{}_{,z} \\
&\quad + g^{r(y)(z)} F^x_r F^y{}_{,y} F^z{}_{,z} + g^{(x)(y)(z)} F^x{}_{,x} F^y{}_{,y} F^z{}_{,z} \\
&\quad + \overset{(12)}{g}{}^{\alpha t} F^x_\alpha F^y_\alpha F^z_t + \overset{(12)}{g}{}^{(y)t} F^x_y F^y{}_{,y} F^z_t + \overset{(12)}{g}{}^{(x)t} F^x{}_{,x} F^y_x F^z_t \\
&\quad + \overset{(12)}{g}{}^{\alpha(z)} F^x_\alpha F^y_\alpha F^z{}_{,z} + \overset{(12)}{g}{}^{(y)(z)} F^x_y F^y{}_{,y} F^z{}_{,z} + \overset{(12)}{g}{}^{(x)(z)} F^x{}_{,x} F^y_x F^z{}_{,z} \\
&\quad + \overset{(23)}{g}{}^{\alpha r} F^x_r F^y_\alpha F^z_\alpha + \overset{(23)}{g}{}^{(y)r} F^x_r F^y{}_{,y} F^z_y + \overset{(23)}{g}{}^{(z)r} F^x_r F^y_z F^z{}_{,z} \\
&\quad + \overset{(23)}{g}{}^{\alpha(x)} F^x{}_{,x} F^y_\alpha F^z_\alpha + \overset{(23)}{g}{}^{(y)(x)} F^x{}_{,x} F^y{}_{,y} F^z_y + \overset{(23)}{g}{}^{(z)(x)} F^x{}_{,x} F^y_z F^z{}_{,z} \\
&\quad + \overset{(31)}{g}{}^{\alpha s} F^x_\alpha F^y_s F^z_\alpha + \overset{(31)}{g}{}^{(x)s} F^x{}_{,x} F^y_s F^z_x + \overset{(31)}{g}{}^{(z)s} F^x_z F^y_s F^z{}_{,z} \\
&\quad + \overset{(31)}{g}{}^{\alpha(y)} F^x_\alpha F^y{}_{,y} F^z_\alpha + \overset{(31)}{g}{}^{(x)(y)} F^x{}_{,x} F^y{}_{,y} F^z_x + \overset{(31)}{g}{}^{(z)(y)} F^x_z F^y{}_{,y} F^z{}_{,z} \\
&\quad + g^{\alpha} F^x_\alpha F^y_\alpha F^z_\alpha + g^{(z)} F^x_z F^y_z F^z{}_{,z} + g^{(y)} F^x_y F^y{}_{,y} F^z_y + g^{(x)} F^x{}_{,x} F^y_x F^z_x\,, \\
\overset{(12)}{\overline{g}}{}^{\alpha z} &= (\overset{(12)}{g}{}^{(\alpha)t} F^z_t + \overset{(12)}{g}{}^{(\alpha)(z)} F^z{}_{,z} + g^{(\alpha)} F^z_\alpha)\, F^\alpha{}_{,\alpha} F^\alpha{}_{,\alpha}\,, \\
\overset{(23)}{\overline{g}}{}^{\alpha y} &= (\overset{(23)}{g}{}^{(\alpha)s} F^y_s + \overset{(23)}{g}{}^{(\alpha)(y)} F^y{}_{,y} + g^{(\alpha)} F^y_\alpha)\, F^\alpha{}_{,\alpha} F^\alpha{}_{,\alpha}\,, \\
\overset{(31)}{\overline{g}}{}^{x} &= (\overset{(31)}{g}{}^{(\alpha)r} F^x_r + \overset{(31)}{g}{}^{(\alpha)(x)} F^x{}_{,x} + g^{(\alpha)} F^x_\alpha)\, F^\alpha{}_{,\alpha} F^\alpha{}_{,\alpha}\,, \\
\overline{g}^{\alpha} &= g^{(\alpha)}\, F^\alpha{}_{,\alpha} F^\alpha{}_{,\alpha} F^\alpha{}_{,\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Die Beziehungen für das Tensorial höheren Grades sind sehr kompliziert.

Die Reihenfolge der Indizes ist dabei auch wesentlich.

In analoger Weise werden *die kovarianten Tensorialen n-ten Grades* definiert, deren Transformationsregel bei der PICARDschen Transformation durch

$$\bar{\mathfrak{T}}_{r_1 \dots r_n} = {}'\mathfrak{F}_{r_1}^{s_1} \cdots {}'\mathfrak{F}_{r_n}^{s_n} \mathfrak{T}_{s_1 \dots s_n} \tag{19}$$

dargestellt wird[1], wobei $\mathfrak{T}_{r_1 \dots r_n}$ eine Komplexfunktion mit n Indizes ist.

Wenn die Komplexfunktion eines kontravarianten oder kovarianten Tensorials n-ten Grades symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist, nennen wir das Tensorial *symmetrisch* bzw. *schiefsymmetrisch*. Die Symmetrität sowie die Schiefsymmetrität eines Tensorials ist sinnvoll, denn sie wird bei der PICARDschen Transformation nicht zerstört, welches sich gemäss Linearität der Transformation leicht beweist. Aus Nr. 15 lautet der Satz:

Ein schiefsymmetrisches (kontravariantes oder kovariantes) Tensorial n-ten Grades ist nichts anderes als eine Funktion von n Variablen, welche in bezug auf sämtliche Variablen schiefsymmetrisch ist.

Wir können auch den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil eines Tensorials definieren, der der symmetrische bzw. schiefsymmetrische Teil der Komplexfunktion des Tensorials ist. Dann geht der symmetrische bzw. schiefsymmetrische Teil eines Tensorials bei der PICARDschen Transformation in denjenigen des neuen Tensorials über, wie sofort bewiesen wird. Überdies ist der symmetrische bzw. schiefsymmetrische Teil auch ein Tensorial.

Ein gemischtes Tensorial n-ten Grades ist eine Komplexfunktion mit n Indizes, die sich bei der PICARDschen Transformation wie das Produkt von n Vektorialen transformiert, von denen $m\,(<n)$ kontravariant und die übrigen $n-m$ kovariant sind:

$$\bar{\mathfrak{T}}^{r_1 \dots r_m}_{\cdot \dots \cdot r_{m+1} \dots r_n} = \mathfrak{F}_{s_1}^{r_1} \cdots \mathfrak{F}_{s_m}^{r_m} {}'\mathfrak{F}_{r_{m+1}}^{s_{m+1}} \cdots {}'\mathfrak{F}_{r_n}^{s_n} \mathfrak{T}^{s_1 \dots s_m}_{\cdot \dots \cdot s_{m+1} \dots s_n}. \tag{20}$$

(1) Wir können z. B. die Ausdrücke der Transformationsregel in Beziehungen zwischen den Funktionen für ein kovariantes Tensorial dritten Grades aus (18′) erhalten, indem wir jedem F' einen Strich hinzufügen und alle oberen bzw. unteren Indizes nach unten bzw. oben herziehen.

Das gemischte Tensorial bekommt m obere und $n-m$ untere Indizes[1].

Aus dieser Definition erhalten wir sofort den Satz:

Die einzige Funktion einer Variablen jedes gemischten Tensorials, das dieselbe Zahl von kontravarianten und kovarianten Indizes bekommt, bleibt bei der PICARDschen *Transformation unverändert*[2].

Wir nennen ein Tensorial *in bezug auf einen Teil seiner Indizes symmetrisch* bzw. *schiefsymmetrisch*, wenn die Komplexfunktion des Tensorials in bezug auf den entsprechenden Teil der Variablen symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist.

23. Aus einem kontravarianten Vektorial $\mathfrak{v}^x$ und einem kovarianten Vektorial $\mathfrak{w}_x$ lässt sich eine Invariante $\mathfrak{v}^x \mathfrak{w}_x$ durch Integration über den Bereich B bilden, wie wir in Nr. 18 zeigen. Die Operation, dass ein Tensorial[3] in bezug auf zwei gleiche Indizes, einen kontravarianten und einen kovarianten, über den Bereich B integriert wird, heisst *die Überschiebung* oder *die Faltung*. Die Überschiebung ist schon vielmal zur Anwendung gebracht worden, d. h. in (8), (11), (16), (17). Während (8) uns nur eine Invariante gibt, bekommen wir in (11), (16), (17) doch zwei Invarianten, den reellen Teil und den idealen Teil. Im allgemeinen können wir den Satz beweisen:

Aus einem gemischten Tensorial 2m-ten Grades, m kontravariant und die übrigen m kovariant, erhalten wir im allgemeinen ein Polynom von ι durch m-fache Überschiebungen. Die Ordnung des Polynoms ist höchstens m, und der reelle Teil und die m idealen Teile sind alle Invarianten. Wenn das Tensorial aus vielen Tensorialen niedrigen

---

(1) MICHAL heisst das Tensorial den absoluten funktionalen Tensor. Er definiert denselben als eine Reihe von Koeffizienten einer absoluten funktionalen Form in Vektorialen. A. D. MICHAL [4].

(2) Es sei in der Tat $\mathfrak{T}^{r_1 \cdots r_m}_{\cdots\cdots\cdots s_1 \cdots s_m}$ das Tensorial $2m$-ten Grades, m kontravariant und die übrigen m kovariant, dann geht seine Funktion einer Variablen T^t bei der PICARDschen Transformation über:

$$\overline{T}^t = (F^{(t)}, t)^m ({}'F^{(t)}, t)^m \, T^t = T^t ,$$

denn

$$F^{(t)}, t \, {}'F^t, t = 1 .$$

(3) Wir sehen dabei das Produkt vom mehren Tensorialen auch als ein Tensorial an, denn das Produkt ist tatsächlich ein Tensorial gemäss der Definition des Tensorials.

Grades als Produkt sich bilden lässt, kann der Fall auftreten, dass die Ordnung des Polynoms niedriger als m ist.

Aus dem in Nr. 13 erwähnten Grund lautet auch der Satz, der den oben-erwähnten Satz als einen speziellen Fall enthält:

Ein gemischtes Tensorial $(m+n)$-ten Grades, m kontravariant und die übrigen n kovariant, verändert sich durch i-fache Überschiebungen in ein Polynom i-ter Ordnung von ι, dessen Koeffizienten jedenfalls einzeln Tensorialen $(m+n-2i)$-ten Grades sind, die $m-i$ kontravariante und $n-i$ kovariante Indizes haben.

24. Die Pseudovektorialen und die Pseudotensorialen können nun als den Pseudovektoren und den Pseudotensoren im gewöhnlichen Tensorkalkül entsprechend definiert werden.

Eine Komplexfunktion mit einem Index $\mathfrak{v}^x$ bzw. $\mathfrak{w}_x$, die sich bei der PICARDschen Transformation folgendermassen transformiert:

$$\bar{\mathfrak{v}}^x = \tau^k \frac{\partial x}{\partial y} \mathfrak{v}^y \tag{21}$$

bzw.

$$\bar{\mathfrak{w}}_y = \tau^k \frac{\partial x}{\partial y} \mathfrak{w}_x , \tag{22}$$

heisst *kontravariantes* bzw. *kovariantes Pseudovektorial von der Klasse k*, wobei τ ein beliebiges Funktional von f^x ist. Der in τ^k auftretende Index k ist eine nicht verschwindende ganze Zahl und bedeutet einen Exponent.

Ein Funktional $\mathfrak{p}$, das sich bei der PICARDschen Transformation folgendermassen transformiert:

$$\bar{\mathfrak{p}} = \tau^k \mathfrak{p} , \tag{23}$$

heisst *Pseudoinvariante von der Klasse k.*

Kovariante, kontravariante und *gemischte Pseudotensorialen* entstehen aus den Pseudovektorialen in derselben Weise, wie gewöhnliche Tensorialen aus gewöhn ichen Vektorialen. Sie unterscheiden sich also von den gewöhnlichen Tensorialen nur durch das Auftreten eines Faktors bei der Transformation.

Dass Summierung von zwei gleichartigen Pseudovektorialen oder Pseudotensorialen und Multiplikation von zwei Pseudovektorialen

oder Pseudotensorialen[1] wiederum zu einem Pseudovektorial oder einem Pseudotensorial führen, ist evident.

Wir können auch für Pseudotensorialen Symmetrität und Schiefsymmetrität definieren und die Überschiebung anwenden. Es ist klar, dass jedes Pseudotensorial bzw. Pseudovektorial von der Klasse k sich als Produkt eines gewöhnlichen Tensorials bzw. Vektorials mit einer Pseudoinvariante von der Klasse k schreiben lässt.

25. *Relative Invarianten, relative Vektorialen* bzw. *relative Tensorialen vom Gewichte k* erklären sich als Pseudoinvarianten, Pseudovektorialen bzw. Pseudotensorialen von der Klasse k, für die

$$\tau = D[\mathfrak{F}_y^x] \tag{24}$$

ist. Unter $D[\mathfrak{F}_y^x]$ verstehen wir dabei die FREDHOLMsche Determinante von Funktion $\frac{F_y^x}{\sqrt{F^{(x)}_{,x}\,F^{(y)}_{,y}}}$ multipliziert mit $e^{\int \log|F^x_{,x}|\,dx}$

$$D[\mathfrak{F}_y^x] = D\left[\frac{F_y^x}{\sqrt{F^{(x)}_{,x}\,F^{(y)}_{,y}}}\right] e^{\int \log|F^x_{,x}|\,dx}, \tag{25}$$

welche wir *die Determinante der PICARDschen Transformation* nennen wollen. Dagegen heisst $D\left[\frac{F_y^x}{\sqrt{F^{(x)}_{,x}\,F^{(y)}_{,y}}}\right]$ *die M-Determinante* der Transformation, und wir bezeichen sie mit $M[\mathfrak{F}_y^x]$[2]. Die Pseudoinvarianten, die Pseudovektorialen bzw. die Pseudotensorialen für

$$\tau = M[\mathfrak{F}_y^x]$$

heissen *die M-relativen Invarianten, die M-relativen Vektorialen* bzw. *M-relativen Tensorialen.*

Die M-Determinante der PICARDschen Transformation $M[\mathfrak{F}_y^x]$ *ist gleich* $D\left[\frac{F_y^x}{F^{(x)}_{,x}}\right]$, *welches nicht identisch verschwindet.*

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir erstens beweisen, dass die FREDHOLMsche Determinante einer Funktion K_y^x gleich derjenigen

(1) Wir ordnen dabei den gewöhnlichen Tensorialen die Klasse 0 zu.
(2) Diese Determinante hat zuerst MICHAL und PETERSON eingeführt.

von Funktion $K_y^x \frac{L_{(y)}}{L_{(x)}}$ ist, während L_x eine beliebige Funktion einer Variablen bedeutet. Es ist nach der Definition

$$D[K_y^x] = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} K_{x_1 \dots x_i}^{x_1 \dots x_i},$$

wobei

$$K_{x_1 \dots x_i}^{x_1 \dots x_i} = \begin{vmatrix} K_{x_1}^{x_1} & K_{x_2}^{x_1} & \dots & K_{x_i}^{x_1} \\ K_{x_1}^{x_2} & K_{x_2}^{x_2} & \dots & K_{x_i}^{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1}^{x_i} & K_{x_2}^{x_i} & \dots & K_{x_i}^{x_i} \end{vmatrix}.$$

Auf ähnliche Weise ist

$$\begin{aligned} D\left[K_y^x \frac{L_{(y)}}{L_{(x)}}\right] &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} K_{x_1 \dots x_i}^{x_1 \dots x_i} \frac{L_{x_1} \dots L_{x_i}}{L_{x_1} \dots L_{x_i}} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} K_{x_1 \dots x_i}^{x_1 \dots x_i} \\ &= D[K_y^x]. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$K_y^x = \frac{F_y^x}{\sqrt{F^{(x)}{}_{,x} F^{(y)}{}_{,y}}} \quad \text{und} \quad L_x = \sqrt{F^{(x)}{}_{,x}},$$

dann folgt die Behauptung des Satzes ohne weiteres.

Wir werden im nächsten Kapitel ersehen, dass die Determinante eines kontravarianten bzw. kovarianten Tensorials zweiten Grades eine relative Invariante vom Gewichte 2 bzw. -2 ist.

26. Nun schliessen wir uns im FREDHOLMschen Raume ein, dann treten nur die FREDHOLMschen Transformationen auf, für die $F^{(x)}{}_{,x}=1$. Somit lautet der folgende Satz unmittelbar:

Die einzige Funktion einer Variablen jedes Tensorials bleibt bei der FREDHOLMschen Transformation unverändert.

Eine Komplexfunktion mit n Indizes heisst *FREDHOLMsches Tensorial n-ten Grades,* wenn sie sich bei der FREDHOLMschen Transformation wie ein Tensorial n-ten Grades transformiert. Für $n = 1$ erhalten wir *FREDHOLMsches Vektorial* und für $n = 0$ *FREDHOLMsche Invariante.*

Wir erhalten infolge des oben-erwähnten Satzes:

Die einzige Funktion einer Variablen jedes FREDHOLMschen Tensorials ist eine FREDHOLMsche Invariante.

Ein FREDHOLMsches Tensorial n-ten Grades heisst *ein funktionaler Tensor*(1), wenn alle seine Funktionen bis auf diejenige von n Variablen identisch verschwinden. Ein z. B. kontravarianter funktionaler Tensor n-ten Grades ist also eine Funktion von n Variablen, welche sich bei der FREDHOLMschen Transformation folgendermassen transformiert:

$$\bar{T}^{r_1 \cdots r_n} = \mathfrak{F}^{r_1}_{s_1} \cdots \mathfrak{F}^{r_n}_{s_n} T^{s_1 \cdots s_n} . \tag{26}$$

Unter *funktionalem Vektor* verstehen wir FREDHOLMsches Vektorial. Somit bekommen wir keine idealen Teile aus funktionalen Tensoren durch Überschiebung und nur reelle Teile treten tatsächlich auf, wovon die Theorie in diesem Falle ziemlich einfach ist.

§ 4. TENSORIALEN ZWEITEN GRADES.

27. Wir betrachten ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades u^{xy}, dessen Funktion einer Variablen u^t nicht identisch verschwunden ist. Die FREDHOLMsche Determinante von Funktion $\frac{u^{xy}}{\sqrt{u^{(x)}\,u^{(y)}}}$ multipliziert mit $e^{\int \log |u^x| dx}$(2), wird dann *die Determinante des Tensorials*

(1) Funktionaler Vektor und Tensor sind sich schon von vielen Autoren definiert worden. Die Autoren lassen aber nur Fredholmsches Tensorial zweiten Grades, dessen Funktion einer Variablen identisch gleich eins ist, jedoch nicht höheren Grades, in funktionalen Tensoren begriffen sein. A. D. MICHAL [2], G. C. MOISIL [1], F. CONFORTO [4].

(2) Wir setzen hierbei natürlich die Existenz von $\int \log |u^x| dx$ voraus.

u^{xy} genannt und mit $D[u^{xy}]$ bezeichnet. Für die Determinante entsteht der Satz:

Die Determinante eines kontravarianten Tensorials zweiten Grades ist eine relative Invariante vom Gewichte 2.

Beweis. Ersetzend

$$a^{xy} = \frac{u^{xy}}{\sqrt{u^{(x)}\,u^{(y)}}} \quad \text{und} \quad K^x_y = \frac{F^x_y}{F^{(x)}_{,\,x}}\sqrt{\frac{u^{(y)}}{u^x}}\,,$$

transformiert a^{xy} sich wegen (7) in §3 folgendermassen:

$$(1) \qquad \bar{a}^{xy} = K^x_t K^y_z a^{tz} + K^y_z a^{xz} + K^x_t a^{ty} + a^{xy} + K^y_x + K^x_y + K^x_z K^y_z e^z\,.$$

Der letzte Ausdruck wird leicht umgeschrieben:

$$(2) \qquad \bar{a}^{xy} = K^y_x + b^{xy} + K^y_z b^{xz}\,,$$

wobei

$$(3) \qquad b^{xy} = a^{xy} + K^x_y + K^x_t a^{ty}\,.$$

Gemäss der Multiplikationsregel der FREDHOLMschen Determinanten ergeben sich aus (2) und (3)

$$D[\bar{a}^{xy}] = D[K^y_t]\,D[b^{xy}]\,,$$

$$D[b^{xy}] = D[a^{xy}]\,D[K^x_y]\,,$$

daraus folgt

$$D[\bar{a}^{xy}] = D[K^y_x]\,D[K^x_y]\,D[a^{xy}]\,.$$

Andererseits können wir auf analoge Weise wie in Nr. 25 beweisen:

$$D[K^y_x] = D[K^x_y] = D\left[\frac{F^x_y}{F^{(x)}_{,\,x}}\right] = M[\mathfrak{F}^x_y]\,.$$

Die letzte Gleichung von (7) in §3 gibt uns

$$e^{\int \log|\bar{u}^t|\,dt} = e^{2\int \log|F^t{}_{,t}|\,dt}\, e^{\int \log|u^t|\,dt}\,.$$

Somit ergibt sich

$$(4) \qquad D[\bar{\mathfrak{u}}^{xy}] = D^2[\mathfrak{F}^x_y]\, D[\mathfrak{u}^{xy}] .$$

Auf ähnliche Weise nennen wir die FREDHOLMsche Determinante von Funktion $\frac{u_{xy}}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}}$ bzw. $\frac{u^x{}_y}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}}$ multipliziert mit $e^{\int \log |u_x|\, dx}$ *die Determinante des kovarianten bzw. gemischten Tensorials zweiten Grades* $\mathfrak{u}_{xy} = u_{xy} + \delta^{[t]}_{xy}\, u_t$ bzw. $\mathfrak{u}^x{}_y = u^x{}_y + \delta^{x[t]}_y\, u_t$ und bezeichnen sie mit $D[\mathfrak{u}_{xy}]$ bzw. $D[\mathfrak{u}^x{}_y]$, wobei $u_t \neq 0$ vorausgesetzt wird. Dann können wir, auf analoge Weise wie oben, den Satz beweisen:

Die Determinante eines kovarianten bzw. gemischten Tensorials zweiten Grades ist eine relative Invariante vom Gewichte −2 bzw. eine gewöhnliche Invariante.

Die M-Determinante eines kontravarianten, kovarianten bzw. gemischten Tensorials zweiten Grades $\mathfrak{u}^{xy}$, $\mathfrak{u}_{xy}$ bzw. $\mathfrak{u}^x{}_y$ definiert sich als die FREDHOLMsche Determinante von Funktion $\frac{u^{xy}}{\sqrt{u^{(x)}\, u^{(y)}}}$, $\frac{u_{xy}}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}}$ bzw. $\frac{u^x{}_y}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}}$ und wird mit $M(\mathfrak{u}^{xy})$, $M(\mathfrak{u}_{xy})$ bzw. $M(\mathfrak{u}^x{}_y)$ bezeichnet. Der Satz von MICHAL besteht dann für die M-Determinante:

Die M-Determinante eines kontravarianten, kovarianten bzw. gemischten Tensorials zweiten Grades ist eine M-relative Invariante vom Gewichte +2, −2 bzw. eine gewöhnliche Invariante[1].

28. Wir wollen erstens den folgende Hilfssatz beweisen:

Ist $\mathfrak{u}^{xy} = u^{xy} + \delta^{xy}_{[t]}\, u^t$ *eine Komplexfunktion mit zwei Indizes, für die die FREDHOLMsche Determinante* $D\left[\frac{u^{xy}}{\sqrt{u^{(x)}\, u^{(y)}}}\right]$ *nicht verschwunden ist, so ist jede Komplexfunktion mit zwei Indizes* $\mathfrak{w}_{xy} = w_{xy} + \delta^{[t]}_{xy}\, w_t$ *identisch gleich Null, wenn sie die Beziehung*

$$(5) \qquad \mathfrak{u}^{xz}\, \mathfrak{w}_{zy} = 0$$

erfüllt.

Beweis. Die letzte Gleichung von (19) in § 2 gibt uns unmittelbar infolge (5) $w_t = 0$, und die erste

(1) A. D. MICHAL und T. S. PETERSON.

$$u^{xz} w_{zy} + u^{(x)} w_{xy} = 0 \,. \tag{6}$$

Andererseits erkennen wir, dass die Integralgleichung

$$u^{xz} f_z + u^{(x)} f_x = 0$$

eine einzige Lösung $f_x = 0$ hat, da

$$D\left[\frac{u^{xy}}{\sqrt{u^{(x)}\,u^{(y)}}}\right] = D\left[\frac{u^{xy}}{u^{(x)}}\right] \neq 0$$

ist. Somit soll w_{xy} in (6) gleich Null sein.

Wegen dieses Hilfssatzes erhalten wir:

Es sei $\mathfrak{u}^{xy}$ *ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante, dann ergibt sich ein und nur ein kovariantes Tensorial zweiten Grades* $\mathfrak{u}_{xy}$, *das die folgende Beziehung befriedigt:*

$$\mathfrak{u}^{xz}\,\mathfrak{u}_{zy} = \delta^x_y \,. \tag{7}$$

Das Gleiche gilt auch bei Vertauschung von $\mathfrak{u}^{xy}$ und $\mathfrak{u}_{xy}$. Diese beiden Tensorialen $\mathfrak{u}^{xy}$ und $\mathfrak{u}_{xy}$ werden zueinander *konjugiert* zu sein gesagt.

Beweis. Ist $D_{xy}[a^{rs}]$ ein erster Minor der FREDHOLMschen Determinante von

$$a^{rs} = \frac{u^{rs}}{\sqrt{u^{(r)}\,u^{(s)}}} \,, \tag{8}$$

so ist

$$a_{xy} = -\frac{D_{xy}[a^{rs}]}{D[a^{rs}]} \tag{9}$$

der resolvente Kern von a^{xy}, und zwischen diesen beiden Funktionen besteht die Relation

$$a^{xz}\,a_{zy} + a^{xy} + a_{xy} = 0 \,, \tag{10}$$

d.h.

$$u^{xz}\frac{a^{zy}}{\sqrt{u^{(x)}\,u^{z}}} + u^{xy}\frac{1}{\sqrt{u^{(x)}\,u^{(y)}}} + a_{xy} = 0 \,. \tag{11}$$

Setzen wir

$$u_{xy} = \frac{a_{xy}}{\sqrt{u^{(x)}\,u^{(y)}}} \quad \text{und} \quad u_x = \frac{1}{u^x}\,, \tag{12}$$

dann wendet (11) sich durch Multiplikation mit $\sqrt{u^x/u^y}$

$$u^{xz}\,u_{zy} + u^{xy}\,u_{(y)} + u^{(x)}\,u_{xy} = 0\,,$$

d. h.

$$\mathfrak{u}^{xz}\,\mathfrak{u}_{zy} = \delta^x_y\,,$$

während

$$\mathfrak{u}_{xy} = u_{xy} + \delta^{[t]}_{xy}\,u_t\,. \tag{13}$$

Es ist leicht zu beweisen, dass $\mathfrak{u}_{xy}$ ein kovariantes Tensorial zweiten Grades ist. In der Tat, ist bei der PICARDschen Transformation

$$\overline{\mathfrak{u}}^{xz}\,\overline{\mathfrak{u}}_{zy} = \mathfrak{u}^{tw}\,\overline{\mathfrak{F}}^x_t\,\overline{\mathfrak{F}}^z_w\,\overline{\mathfrak{u}}_{zy} = \mathfrak{u}^{xw}\,\mathfrak{u}_{wy} = \overline{\mathfrak{F}}^x_t\,\mathfrak{u}^{tz}\,\mathfrak{u}_{zw}\,{}'\overline{\mathfrak{F}}^w_y\,,$$

so ist

$$\mathfrak{u}^{tw}\,\overline{\mathfrak{F}}^x_t\,(\overline{\mathfrak{F}}^z_w\,\overline{\mathfrak{u}}_{zy} - \mathfrak{u}_{wu}\,{}'\overline{\mathfrak{F}}^u_y) = 0\,,$$

daraus folgt mit Hilfe des Hilfssatzes sogleich

$$\overline{\mathfrak{F}}^z_w\,\overline{\mathfrak{u}}_{zy} = \mathfrak{u}_{wu}\,{}'\overline{\mathfrak{F}}^u_y\,,$$

d. h.

$$\overline{\mathfrak{u}}_{xy} = {}'\overline{\mathfrak{F}}^t_x\,{}'\overline{\mathfrak{F}}^w_y\,\mathfrak{u}_{tw}\,.$$

Somit ersehen wir, dass wenigstens ein zu $\mathfrak{u}^{xy}$ konjugiertes kovariantes Tensorial $\mathfrak{u}_{xy}$ immer existiert. Es soll nun gezeigt werden, dass nur ein solches sich ergibt und nicht zwei. Es seien $\mathfrak{u}_{xy}$ und $\overset{*}{\mathfrak{u}}_{xy}$ hingegen zwei verschiedene kovariante Tensorialen, die beide die obengenannte Eigenschaft besitzen, dann soll

$$\mathfrak{u}^{xz}\,(\mathfrak{u}_{zy} - \overset{*}{\mathfrak{u}}_{zy}) = 0$$

aus (5) folgen. Der Hilfssatz lehrt uns also $\mathfrak{u}_{xy} = \overset{*}{\mathfrak{u}}_{xy}$, das der Voraussetzung widerspricht. Der Satz ist nun völlig bewiesen.

Wir erkennen somit, dass zwischen den zueinander konjugierten Tensorialen zweiten Grades vollständige Reziprozität besteht. Aus-

serdem wird gezeigt, dass das konjugierte Tensorial eines symmetrischen Tensorials auch symmetrisch ist.

Auf ganz analoge Weise definieren wir zu jedem gemischten Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{u}^x_{\cdot y} = u^x_{\cdot y} + \delta^{x[t]}_y u_t$ $(u_t \neq 0)$, konjugiertes gemischtes Tensorial zweiten Grades, das die Bedingung erfüllt

$$\mathfrak{u}^x_{\cdot z}\, {}'\mathfrak{u}^z_{\cdot y} = \delta^x_y .$$

Wenn die Determinante $D[\mathfrak{u}^x_{\cdot y}]$ *von Null verschieden ist, ergibt sich ein und nur ein konjugiertes gemischtes Tensorial zweiten Grades* ${}'\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$, *das zum vorgegebenen gemischten Tensorial zweiten Grades* $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ *konjugiert ist.*

Diesen Satz können wir auch auf dieselbe Weise wie oben beweisen und erhalten

$$(14) \qquad {}'\mathfrak{u}^x_{\cdot y} = \frac{D^x_y\left[\dfrac{u^x_{\cdot y}}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}}\right]}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}\; D\left[\dfrac{u^x_{\cdot y}}{\sqrt{u_{(x)}\, u_{(y)}}}\right]} + \delta^{x[t]}_y \frac{1}{u_t} .$$

29. Ein kontravariantes Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{u}^{xy}$ entspricht in eindeutiger Weise einer Transformation, die die kovarianten Vektorialen in die kontravarianten übergehen lässt:

$$(15) \qquad \mathfrak{v}^x = \mathfrak{u}^{xy}\, \mathfrak{w}_y .$$

Ist die Determinante des $\mathfrak{u}^{xy}$ nicht Null, so existiert die umgekehrte Transformation:

$$(16) \qquad \mathfrak{w}_x = \mathfrak{u}_{xy}\, \mathfrak{v}^y ,$$

wo $\mathfrak{u}_{xy}$ das konjugierte kovariante Tensorial des $\mathfrak{u}^{xy}$ ist.

Ein gemischtes Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ steht in eindeutiger Beziehung erstens zu einer Transformation vom PICARDschen Typus der kontravarianten Vektorialen:

$$(17) \qquad \mathfrak{v}^x = \mathfrak{u}^x_{\cdot y}\, \mathfrak{w}^y ,$$

zweitens zu derjenigen der kovarianten Vektorialen

$$\mathfrak{w}_x = \mathfrak{u}^y_{\cdot x}\,\mathfrak{v}_y \,. \tag{18}$$

Es stellt sich also heraus, dass $\mathfrak{F}^x_y$ und $'\mathfrak{F}^x_y$ der PICARDschen Transformation im PICARDschen Raume zueinander konjugierte gemischte Tensorialen zweiten Grades sind. Dem gemischten Tensorial δ^x_y entspricht die identische Transformation. Soll ein bestimmtes Vektorial $\mathfrak{v}^x$ bei der Transformation (17) nur mit einem konstanten Faktor $\frac{1}{\lambda}$ multipliziert werden, so muss die Gleichung die Form haben:

$$\frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{v}^x = \mathfrak{u}^x_{\cdot y}\,\mathfrak{v}^y \tag{19}$$

oder

$$(\lambda\,\mathfrak{u}^x_{\cdot y} - \delta^x_y)\,\mathfrak{v}^y = 0 \,. \tag{20}$$

Diese lineare homogene Integralgleichung lässt aber nur dann eine Lösung zu, wenn die Determinante verschwindet

$$e^{-\int \log|\lambda u_x - 1|\,dx}\, D[\lambda\,\mathfrak{u}^x_{\cdot y} - \delta^x_y] \equiv D\left[\frac{\lambda\,u^x_{\cdot y}}{\sqrt{(\lambda\,u_{(x)}-1)(\lambda\,u_{(y)}-1)}}\right] = 0 \,. \tag{21}$$

Die Wurzeln der Gleichung (21) λ heissen *Hauptwerte* des Tensorials $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ und die einem Eigenwerte entsprechenden Lösungen $\mathfrak{v}^x$ von (20) *kontravariante Hauptvektorialen* des $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$. Es kann der Fall eintreten, dass keine Hauptwerte vorhanden sind. Wenn λ ein Hauptwert ist und wenn der Rang der Determinante $D[\lambda\,\mathfrak{u}^x_{\cdot y} - \delta^x_y]$ r ist, so hat die Gleichung (20) r und nur r linear unabhängige Lösungen[1], und die kontravarianten Hauptvektorialen lassen sich durch diese Lösungen linear darstellen.

(1) Weil die Gleichung (20) in der Form umgeschrieben wird:

$$\mathfrak{v}^x = \frac{\lambda\,u^x_{\cdot y}}{\lambda\,u_x - 1}\,\mathfrak{v}^y \,.$$

Nun nehmen wir die Funktion $\frac{\lambda\,u^x_{\cdot y}}{\lambda\,u_x - 1}$ als Kern K^x_y an, dann ist die Gleichung eine homogene FREDHOLMsche Integralgleichung mit verschwindender Determinante, daraus folgt unsere Behauptung.

Unter *kovarianten Hauptvektorialen* des $u^x_{\cdot y}$ verstehen wir die kovarianten Vektorialen $\bar{v}_x$, die für einen Wert λ die Gleichung erfüllen:

$$(\lambda u^y_{\cdot x} - \delta^y_x)\,\bar{v}_y = 0\,. \tag{22}$$

Dann muss λ eine Wurzel der Gleichung (21), d.h. ein Hauptwert sein, denn es ist

$$D[\lambda u^y_{\cdot x} - \delta^y_x] \equiv D[\lambda u^x_{\cdot y} - \delta^x_y]\,. \tag{23}$$

Ausserdem können wir schliessen, dass für einem Hauptwert die beiden Determinanten $D[\lambda u^y_{\cdot x} - \delta^y_x]$ und $D[\lambda u^x_{\cdot y} - \delta^x_y]$ von demselben Rang r sind. In diesem Falle nennen wir den Hauptwert λ von r-tem Rang. Einem Hauptwert r-ten Ranges entspricht somit ein lineares System r-ter Dimension von kontravarianten Hauptvektorialen und ein entsprechendes von kovarianten Hauptvektorialen. Ein linear unabhängiges System von r kontravarianten oder kovarianten Hauptvektorialen heisst *ein Hauptsystem.*

Ein kontravariantes Hauptvektorial v^x *und ein kovariantes Hauptvektorial* $\bar{v}^x$, *die zu verschiedenen Hauptwerten gehören, erfüllen die Beziehung:*

$$v^x \bar{v}_x = 0\,. \tag{24}$$

Beweis. Es sei

$$v^x = \lambda u^x_{\cdot y} v^y\,, \qquad \bar{v}_x = \mu u^y_{\cdot x} \bar{v}_y\,,$$

wobei $\lambda \neq \mu$ ist. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\bar{v}_x$ und integrieren nach x, so erhalten wir

$$v^x \bar{v}_x = \lambda u^x_{\cdot y} v^y \bar{v}_x$$

und ebenso, wenn wir die zweite mit v^x multiplizieren und nach x integrieren:

$$v^x \bar{v}_x = \mu u^y_{\cdot x} v^x \bar{v}_y$$

oder wenn wir auf der rechten Seite x mit y vertauschen:

$$\mathfrak{v}^x \bar{\mathfrak{v}}_x = \lambda \mathfrak{u}^y_{\cdot x} \mathfrak{v}^x \bar{\mathfrak{v}}_y .$$

Die beiden Gleichungen können für $\lambda \neq \mu$ nicht gleichzeitig bestehen, sofern nicht $\mathfrak{v}^x \bar{\mathfrak{v}}_x = 0$.

Weiterhin können wir schliessen:

Wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die nach nicht abnehmendem absoluten Betrag geordneten Hauptwerte des Tensorials $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ sind, und r_h der Rang von λ_h ist, so lässt sich eine Folge von kontravarianten Hauptvektorialen

$$\underset{11}{\mathfrak{v}^x}, \underset{12}{\mathfrak{v}^x}, \ldots, \underset{1r_1}{\mathfrak{v}^x}, \underset{21}{\mathfrak{v}^x}, \ldots, \underset{2r_2}{\mathfrak{v}^x}, \ldots .$$

und von kovarianten Hauptvektorialen

$$\underset{11}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \underset{12}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \ldots, \underset{1r_1}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \underset{21}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \ldots, \underset{2r_2}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \ldots .$$

angeben, die zwei biorthogonale Systeme bilden, so dass jedes zu dem Hauptwert λ_h gehörige Vektorial $\mathfrak{v}^x$ oder $\bar{\mathfrak{v}}_x$ eine lineare Kombination von $\underset{h1}{\mathfrak{v}^x}, \ldots, \underset{hr_h}{\mathfrak{v}^x}$ bzw. $\underset{h1}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \ldots, \underset{hr_h}{\bar{\mathfrak{v}}_x}$ ist.

Unter zwei biorthogonalen Systemen verstehen wir zwei endliche oder unendliche Vektorialensysteme, die in erstem Falle aus einer gleichen Anzahl von Elementen bestehen sollen:

$$\underset{1}{\mathfrak{v}^x}, \underset{2}{\mathfrak{v}^x}, \ldots\ldots\ldots; \underset{1}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \underset{2}{\bar{\mathfrak{v}}_x}, \ldots\ldots\ldots,$$

wenn

$$\underset{i\ j}{\mathfrak{v}^x \bar{\mathfrak{v}}_x} \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq j \\ \neq 0 & \text{für } i = j . \end{cases} \tag{25}$$

Ist $\lambda = \infty$ kein Hauptwert des $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$, d. h. $D[\mathfrak{u}^x_{\cdot y}]$ nicht Null, so existiert die umgekehrte Transformation, die in eindeutiger Beziehung zu einem zweiten gemischten Tensorial $'\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ steht:

$$\mathfrak{w}^x = {}'\mathfrak{u}^x_{\cdot y} \mathfrak{v}^y , \qquad \mathfrak{v}_x = {}'\mathfrak{u}^y_{\cdot x} \mathfrak{w}_y . \tag{26}$$

Das Tensorial $'\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ ist wiederum der Minor der Determinante $D[\mathfrak{u}^x_{\cdot y}]$, dividiert durch die Determinante, und es besteht die Beziehung

$$\mathfrak{u}^x_{\cdot y}\,'\mathfrak{u}^y_{\cdot z} = \mathfrak{u}^y_{\cdot z}\,'\mathfrak{u}^x_{\cdot y} = \delta^x_z\,. \tag{27}$$

Es kann der Fall eintreten, dass die Komplexfunktion $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ eines gemischten Tensorials zweiten Grades in bezug auf x und y symmetrisch ist. Es ist aber zu beachten, dass diese Symmetrie bei einem gemischten Tensorialen im Gegensatz zu den rein kontravarianten und rein kovarianten Tensorialen keine von der PICARDschen Transformationsgruppe unabhängige Bedeutung hat. Sie verschwindet im allgemeinen bei einer PICARDschen Transformation. Nun ein Vielfaches des Tensorials δ^x_y macht hier eine Ausnahme.

§ 5. DIE MASSBESTIMMUNG.

30. Wir wollen nun eine Massbestimmung einführen. Darum betrachten wir ein kovariantes symmetrisches Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{g}_{xy}$ mit nicht verschwindender Determinante, das *das kovariante Fundamentaltensorial* genannt wird. Wir setzen weiterhin voraus, dass das Tensorial $\mathfrak{g}_{xy}$ beschränkt[1] und eigentlich positiv definit[2] ist, d.h.

$$\mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{v}^x\,\mathfrak{v}^y > 0 \tag{1}$$

für jeder beliebigen Funktion $\mathfrak{v}^x$, für die $\int (\mathfrak{v}^x)^2\,dx \neq 0$ ist, und dass die Funktion einer Variablen von $\mathfrak{g}_{xy}$ im Bereich B nicht verschwindet: $g_t \neq 0$. Das zu dem $\mathfrak{g}_{xy}$ konjugierte kontravariante Tensorial $\mathfrak{g}^{xy}$ heisst *das kontravariante Fundamentaltensorial:*

$$\mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{g}^{yz} = \delta^z_x\,. \tag{2}$$

Die Länge $\mathfrak{v}$ eines kontravarianten Vektorials $\mathfrak{v}^x$ ist dann durch die Gleichung

(1) "Beschränkt" bedeutet hierbei, dass eine derartige positive Zahl M existiert, dass $|g_{xy}|, |g_x| < M$ über den ganzen Bereich B bis auf eine Nullmenge ist.

(2) $\mathfrak{g}_{xy}$ ist ein vollstetigen positiven HERMITEscher linearer Operator für $\mathfrak{v}^x$.

$$(3) \qquad \mathfrak{v} = \sqrt{\mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{v}^x\,\mathfrak{v}^y}\ ^{(1)}$$

gegeben, und diejenige $\mathfrak{w}$ eines kovarianten Vektorials $\mathfrak{w}_x$ durch

$$(4) \qquad \mathfrak{w} = \sqrt{\mathfrak{g}^{xy}\,\mathfrak{w}_x\,\mathfrak{w}_y}\ .$$

Wir definieren den Winkel zwischen zwei kontravarianten bzw. kovarianten Vektorialen $\mathfrak{v}^x$, $\mathfrak{w}^x$ bzw. $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{w}_x$ mit Hilfe der Gleichung

$$(5) \qquad \cos(\mathfrak{v}^x, \mathfrak{w}^x) = \frac{1}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}}\,\mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{v}^x\,\mathfrak{w}^y$$

bzw.

$$(6) \qquad \cos(\mathfrak{v}_x, \mathfrak{w}_x) = \frac{1}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}}\,\mathfrak{g}^{xy}\,\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{w}_y\ .$$

Danach sind $\mathfrak{v}^x$ und $\mathfrak{w}^x$ *senkrecht* zueinander, wenn

$$(7) \qquad \mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{v}^x\,\mathfrak{w}^y = 0$$

ist. Bei Einführung des Fundamentaltensorials $\mathfrak{g}_{xy}$ sind das Herauf- und das Herunterziehen der Indizes möglich, d.h. einem kontravarianten bzw. kovarianten Vektorial $\mathfrak{v}^x$ bzw. $\mathfrak{w}_x$ ist stets ein bestimmtes kovariantes bzw. kontravariantes Vektorial in eindeutiger Weise zugeordnet:

$$(8) \qquad \mathfrak{v}_x = \mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{v}^y \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{w}^x = \mathfrak{g}^{xy}\,\mathfrak{w}_y\ ,$$

und das Gleiche besteht auch für Tensorialen. Somit verlor sich der Unterschied zwischen kontravarianten, kovarianten und gemischten Tensorialen bei fest gegebenem Fundamentaltensorial, und es bleibt nur der Unterschied zwischen kontravarianten, kovarianten und gemischten Eigenschaften von Komplexfunktionen der Tensorialen.

31. Wir heissen eine Komplexfunktion mit zwei Indizes $\mathfrak{v}^x_t$ *kontravariante Vektorialenschar*[2], wenn sie sich bei der PICARDschen Transformation genau so wie ein kontravariantes Vektorial mit Index x transformiert:

(1) Wenn gleichmässig $|\bar{\mathfrak{v}}^x - \mathfrak{v}^x| \to 0$, dann ist $\sqrt{\mathfrak{g}_{xy}(\bar{\mathfrak{v}}^x - \mathfrak{v}^x)(\bar{\mathfrak{v}}^y - \mathfrak{v}^y)} \to 0$, aber nicht umgekehrt.

(2) MICHAL hat Vektorialenschar "Infinitude" genannt. A. D. MICHAL [5].

$$(9) \qquad \overset{t}{\bar{\mathfrak{v}}}^x = \mathfrak{F}^x_y \overset{t}{\mathfrak{v}}^y$$

und wenn die Determinante $D[\overset{t}{\mathfrak{v}}^x]$ nicht verschwindet, wobei t wie ein von der Transformation unabhängiger Parameter angesehen werden kann[1].

Aus der Definition erhalten wir sofort, dass $\overset{t}{\mathfrak{v}}^x \mathfrak{w}_x$ eine Invariante ist, sofern $\mathfrak{w}_x$ ein beliebiges kovariantes Vektorial ist, und dass die Determinante $D[\overset{t}{\mathfrak{v}}^x]$ eine relative Invariante vom Gewichte 1 ist[2].

Unter *kovarianter Vektorialenschar* verstehen wir eine Komplexfunktion mit zwei Indizes $\overset{t}{\mathfrak{v}}_x$, die sich bei der PICARDschen Transformation folgendermassen transformiert:

$$(10) \qquad \overset{t}{\bar{\mathfrak{v}}}_x = {}'\mathfrak{F}^y_x \overset{t}{\mathfrak{v}}_y$$

und die nicht verschwindende Determinante $D[\overset{t}{\mathfrak{v}}_x]$ hat. Die Determinante $D[\overset{t}{\mathfrak{v}}_x]$ ist eine relative Invariante vom Gewichte -1.

Es sei eine kontravariante Vektorialenschar $\overset{t}{\mathfrak{u}}^x$, dann verschwindet nicht die Determinante von Komplexfunktion

$$(11) \qquad \mathfrak{g}_{xy} \overset{t}{\mathfrak{u}}^x \overset{s}{\mathfrak{u}}^y = \underset{ts}{\mathfrak{d}} \equiv d_{ts} + \delta^{[u]}_{ts} d_u ,$$

da

$$D[\underset{ts}{\mathfrak{d}}] = D[\mathfrak{g}_{xy}]\, D[\overset{t}{\mathfrak{u}}^x]\, D[\overset{s}{\mathfrak{u}}^y] \neq 0$$

ist. Setzen wir

$$(12) \qquad \begin{aligned} \overset{p}{\underset{ts}{\mathfrak{d}}} &= \underset{ts}{\mathfrak{d}} && \text{für} \quad t, s \leqq p \\ &= \delta^{[u]}_{ts} d_u && \text{für} \quad t = s = p \\ &= 0 && \text{für} \quad t \text{ oder } s > p \end{aligned}$$

---

(1) Wir dürfen die kontravariante Vektorialenschar ansehen als ein System von unendlich (Kontinuum) vielen und voneinander linear unabhängigen kontravarianten Vektorialen. Sie entspricht in der Tat einem System von n linear unabhängigen Vektoren im n-dimensionalen Raume.

(2) A. D. MICHAL [5].

und setzen voraus, dass die Determinante $D[\overset{p}{\mathfrak{d}}_{ts}]$ in bezug auf t und s nicht verschwindet[1] und dass $d_u > 0$. Dann ergibt sich eine einzige Komplexfunktion $\overset{ts}{\mathfrak{d}}_{p}$ für jeden Werte von p, die den Beziehungen genügt:

$$\overset{p}{\mathfrak{d}}_{ts}\overset{su}{\mathfrak{d}}_{p} = \delta_t^{u[v]}\sqrt{d_v} \quad \text{für} \quad u, t \leqq p \tag{13}$$

integriert nach s, aber nicht nach p, und

$$\begin{aligned} \overset{su}{\mathfrak{d}}_{p} &= \delta^{su}_{[t]}\frac{1}{\sqrt{d_t}} && \text{für} \quad s = u = p \\ &= 0 && \text{für} \quad s \text{ oder } u > p^{(2)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir wollen zunächst beweisen, dass die Determinante von $\overset{su}{\mathfrak{d}}_{s}$ (nicht integriert nach s) von Null verschieden ist. Darum setzen wir einfachheitshalber, ohne Schaden an Allgemeinheit, $d_u = 1$ voraus, dann ist

$$D[d^{su}] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\cdots\int \begin{vmatrix} d^{x_1x_1} & d^{x_1x_2} & \cdots & d^{x_1x_n} \\ d^{x_2x_1} & d^{x_2x_2} & \cdots & d^{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d^{x_nx_1} & d^{x_nx_2} & \cdots & d^{x_nx_n} \end{vmatrix} dx^1 \ldots dx^n, \tag{15}$$

---

(1) Wir können tatsächlich die Komplexfunktion $\overset{x}{\mathfrak{u}}_{t}$ so bilden, dass diese Voraussetzung sich befriedigt.

(2) Der Beweis ist nicht so schwer. Setzend $\overset{p}{\mathfrak{d}}_{st} = d^p_{st} + i^{[u]}_{st}\, d_u$, ergibt sich stets der resolvente Kern D^{su} von $\frac{d^p_{st}}{d_s}$ für $s, t \leqq p$, da nach der Voraussetzung $e^{\int \log|d_t|\, dt} D\left[\frac{d^p_{st}}{d_t}\right] = D[\overset{p}{\mathfrak{d}}_{st}] \neq 0$ ist, und

$$D^{su} + \frac{d^p_{su}}{d_{(u)}} + D^{st}\frac{d^p_{tu}}{d_{(u)}} = 0.$$

Damit erfüllt die folgende Komplexfunktion $\overset{su}{\mathfrak{d}}_{p}$ wirklich die betreffenden Beziehungen (13) und (14):

$$\overset{su}{\mathfrak{d}}_{p} = \frac{1}{\sqrt{d_{(s)}}} D^{su} + \tilde{c}^{su}_{[t]}\, dt,$$

während

$$\begin{aligned} D^{su} &= 0 \text{ für } u \text{ oder } s > p, \\ dt &= \frac{1}{\sqrt{d_t}} \quad \text{für} \quad t \leqq p \\ &= 0 \quad \text{für} \quad t > p. \end{aligned}$$

wobei

$$\overset{su}{\underset{s}{\mathfrak{d}}} = d^{su} + \delta^{su} \quad \text{und} \quad d^{su} = 0 \quad \text{für} \quad u \geqq s \,. \tag{16}$$

Für jedes Wertesystem von n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, existiert immer der grösste Wert z.B. $x_h \geqq x_1, x_2, \ldots, x_n$, dann ist nach (16)

$$d^{x_h x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Deshalb ersehen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} d^{x_1 x_1} & d^{x_1 x_2} \ldots . & d^{x_1 x_n} \\ d^{x_2 x_1} & d^{x_2 x_2} \ldots . & d^{x_2 x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ d^{x_n x_1} & d^{x_n x_2} \ldots . & d^{x_n x_n} \end{vmatrix} = 0$$

für jedes Wertesystem von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diese Determinante integriert nach $x_1, x_2, \ldots., x_n$ verschwindet danach auch identisch. Daraus folgt wegen (15)

$$D[d^{su}] = 1 \,, \tag{17}$$

d.h. unsere Behauptung ist bewiesen.

Da $\underset{su}{\mathfrak{d}}$ eine Invariante ist, ist $\overset{su}{\underset{s}{\mathfrak{d}}}$ auch so. Damit muss

$$\underset{s}{\mathfrak{i}}^x = \overset{su}{\underset{s\ u}{\mathfrak{d}}}\, \underset{u}{\mathfrak{u}}^x \qquad \text{(integriert nach } u\text{)} \tag{18}$$

bei PICARDschen Transformation wie ein kontravariantes Vektorial für jeden Wert von s transformiert werden, und die Determinante $D[\underset{s}{\mathfrak{i}}^x]$ ist von Null verschieden, denn es ist $D[\underset{s}{\mathfrak{i}}^x] = D[\overset{su}{\underset{s}{\mathfrak{d}}}]\, D[\underset{u}{\mathfrak{u}}^x] \neq 0$. Deswegen soll $\underset{s}{\mathfrak{i}}^x$ eine kontravariante Vektorialenschar sein.

Eine kontravariante Vektorialenschar heisst *normal orthogonal*, wenn die Beziehung

$$\mathfrak{g}_{xy}\, \underset{s}{\mathfrak{u}}^x\, \underset{t}{\mathfrak{u}}^y = \delta_{st} \tag{19}$$

besteht. Dann lautet der Satz:

Die oben-erwähnte kontravariante Vektorialenschar ist normal orthogonal.

Denn wegen (13) und (14) erhalten wir mit Hilfe von (39) für $t \leqq s$

$$\begin{aligned}(20)\qquad \mathfrak{g}_{xy}\,\overset{s}{\mathfrak{i}}{}^{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{y} &= \mathfrak{g}_{xy}\,\overset{su}{\mathfrak{d}}_{s\ u}\,\mathfrak{u}^{x}\,\overset{tv}{\mathfrak{d}}_{t\ v}\,\mathfrak{u}^{y} = \overset{su\,tv}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}}_{uv\,s\,t} \\ &= \overset{s\,su\,tv}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}^{(1)}}_{uv\,s\,t} = \delta_{v}^{s[u]}\sqrt{d_u}\,\overset{tv}{\mathfrak{d}}_{t} \\ &= d^{ts}\sqrt{d_s} + \delta_{[u]}^{ts}\sqrt{d_u}\,\frac{1}{\sqrt{d_u}} = \delta^{ts}\,,\end{aligned}$$

wobei $\overset{ts}{\mathfrak{d}}_{t} = d^{ts} + \delta_{[u]}^{ts}\dfrac{1}{\sqrt{d_u}}$ und $d_{ts} = 0$ für $t \leqq s$ ist.

Aus der Tatsache, dass $\mathfrak{u}^{x}_{t}$ beliebig ist, erkennen wir sofort die Existenz von unendlich vielen, normal orthogonalen kontravarianten Vektorialenscharen. Auf analoge Weise wird die normal orthogonale kovariante Vektorialenschar $\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}$ aus beliebiger Vektorialenschar $\overset{t}{\mathfrak{u}}_{x}$ konstruiert:

$$(21)\qquad \mathfrak{g}^{xy}\,\overset{s}{\mathfrak{i}}_{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{y} = \delta^{st}\,.$$

Ausserdem ist

$$(22)\qquad \overset{t}{\mathfrak{i}}_{x} = \mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{i}^{y}_{t}$$

auch eine normal orthogonale kovariante Vektorialenschar, während $\mathfrak{i}^{x}_{t}$ eine normal orthogonale kontravariante Vektorialenschar ist. Denn

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{xy}\,\overset{s}{\mathfrak{i}}_{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{y} &= \mathfrak{g}^{xy}\,\mathfrak{g}_{xz}\,\mathfrak{i}^{z}_{s}\,\mathfrak{g}_{yu}\,\mathfrak{i}^{u}_{t} \\ &= \delta_{z}^{y}\,\mathfrak{g}_{yu}\,\mathfrak{i}^{z}_{s}\,\mathfrak{i}^{u}_{t} \\ &= \mathfrak{g}_{zu}\,\mathfrak{i}^{z}_{s}\,\mathfrak{i}^{u}_{t} = \delta_{st}\,.\end{aligned}$$

Die Vektorialenschar $\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}$ ist die $\mathfrak{i}^{x}_{t}$ *konjugiert*:

$$(23)\qquad \overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}\,\mathfrak{i}^{x}_{s} = \delta^{t}_{s}\,.$$

---

(1) $\overset{su}{\mathfrak{d}}_{s} = 0$ für $u > s$, somit ist $\overset{s\,su\,tv}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}}_{uv\,s\,t} = 0$ für u oder $v > s$.

Jedes kontravariante oder kovariante Vektorial kann immer mit Hilfe von einem Paar konjugierter Vektorialenscharen z.B. $\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{x}$ und $\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}$ in der Form ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{v}^{x} = \overset{t}{\mathfrak{v}}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{x}, \quad \mathfrak{w}_{x} = \overset{t}{\mathfrak{w}}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x} \qquad \text{(integriert nach } t\text{)}. \tag{24}$$

Die Funktion $\overset{t}{\mathfrak{v}}$ bzw. $\overset{t}{\mathfrak{w}}$ ist eine Invariante. Wir erhalten eben dieselbe $\overset{t}{\mathfrak{v}}$ für die kontravariante oder kovariante Komplexfunktion des Vektorials und

$$\overset{t}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}^{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}, \quad \overset{t}{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}_{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{x}, \tag{25}$$

welche *die orthogonale Komplexfunktion* des Vektorials genannt wird. Das Gleiche gilt auch für Tensorialen, z.B.

$$\mathfrak{T}^{xy}_{\cdot\cdot z} = \mathfrak{T}^{tu}_{\cdot\cdot v}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{x}\,\overset{u}{\mathfrak{i}}{}^{y}\,\overset{v}{\mathfrak{i}}_{z}, \tag{26}$$

wobei

$$\mathfrak{T}^{tu}_{\cdot\cdot v} = \mathfrak{T}^{xy}_{\cdot\cdot z}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}\,\overset{u}{\mathfrak{i}}_{y}\,\overset{v}{\mathfrak{i}}{}^{z} \tag{27}$$

ist. Für das Fundamentaltensorial erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{xy} &= \delta_{ts}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}\,\overset{s}{\mathfrak{i}}_{y} = \int \overset{t}{\mathfrak{i}}_{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}_{y}\,dt, \\ \mathfrak{g}^{xy} &= \delta^{ts}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{x}\,\overset{s}{\mathfrak{i}}{}^{y} = \int \overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{x}\,\overset{t}{\mathfrak{i}}{}^{y}\,dt. \end{aligned} \tag{28}$$

Die orthogonale Komplexfunktion des Fundamentaltensorials $\mathfrak{g}_{xy}$ ist also δ_{xy}.

Wenn zwei kontravariante (oder kovariante) Vektorialen $\mathfrak{v}^{x}$, $\mathfrak{w}^{x}$ senkrecht sind, dann sind ihre orthogonalen Komplexfunktionen $\overset{t}{\mathfrak{v}}$ und $\overset{t}{\mathfrak{w}}$ *orthogonal:*

$$\int \overset{t}{\mathfrak{v}}\,\overset{t}{\mathfrak{w}}\,dt = 0 \tag{29}$$

und umgekehrt.

32. Betrachten wir eine Transformation, indem z.B. ein kontravariantes Vektorial wiederum einem kontravarianten entspricht:

$$\bar{\mathfrak{v}}^x = \mathfrak{u}^x_{\cdot y}\,\mathfrak{v}^y \,. \tag{30}$$

Die Transformation (30) führt das Fundamentaltensorial $\mathfrak{g}^{xy}$ in

$$\bar{\mathfrak{g}}^{xy} = \mathfrak{u}^x_{\cdot t}\,\mathfrak{u}^y_{\cdot s}\,\mathfrak{g}^{ts}$$

über. Wenn die Transformation das Fundamentaltensorial $\mathfrak{g}^{xy}$ nicht verändert, wenn also die Gleichung $\mathfrak{g}^{xy} = \bar{\mathfrak{g}}^{xy}$ stattfindet, nennen wir sie die *orthogonale Transformation*, für die

$$\int \overset{x}{\underset{t}{\mathfrak{u}}}\,\overset{y}{\underset{t}{\mathfrak{u}}}\,dt = \delta_{xy} \tag{31}$$

besteht, wobei $\overset{x}{\underset{t}{\mathfrak{u}}}$ die orthogonale Komplexfunktion des gemischten Tensorials $\mathfrak{u}^x_{\cdot y}$ ist[1]. Die Determinante der orthogonalen Transformation $D[\mathfrak{u}^x_{\cdot y}]$ ist gleich 1 oder -1, und die Gesamtheit der orthogonalen Transformationen bildet eine Gruppe. Die Gruppe der orthogonalen FREDHOLMschen Transformationen (die Gruppe von *Drehungen*) ist eine Untergruppe dieser Gruppe.

Ein symmetrisches Tensorial zweiten Grades $\mathfrak{f}_{xy}$ steht in eindeutiger Beziehung zur Transformation von Vektorialen:

$$\bar{\mathfrak{v}}_x = \mathfrak{f}_{xy}\,\mathfrak{v}^y \,. \tag{32}$$

Da nach Einführung eines Fundamentaltensorials der Unterschied zwischen kontravariant und kovariant verschwindet, können wir *Hauptwerte* und *Hauptvektorialen* des symmetrischen Tensorials $\mathfrak{f}_{xy}$ in analoger Weise wie in Nr. 29 definieren. Es sei bemerkt, dass die Gleichung

$$(\lambda\,\mathfrak{f}_{xy} - \mathfrak{g}_{xy})\,\mathfrak{v}^y = 0 \tag{33}$$

(1) Die orthogonale Transformation lässt die Länge eines Vektorials d.h. die Norm der orthogonalen Komplexfunktion des Vektorials invariant. (31) stellt dar:

$$v^x_y + v^x_y \pm \int u^x_t\,u^y_t\,dt = 0 \quad \text{und} \quad u_t = \pm 1\,,$$

während $\overset{x}{\underset{t}{u}} = u^x_t + c^{x[u]}_t\,u_u$. Die orthogonale Transformation mit $u_u = 1$ ist also eine orthogonale FREDHOLMsche Transformation. Siehe z.B. G. KOWALEWSKI [2].

an die Stelle von (20) in § 4 tritt, oder in orthogonalen Komplexfunktionen

$$\int_t (\lambda \mathfrak{f}_{st} - \delta_{st})\, \mathfrak{v}\, dt = 0 . \tag{34}$$

Hier treten auch zwei Arten von Hauptvektorialen auf, für deren erste die Gleichung (33) und für die zweite

$$(\lambda \mathfrak{f}_{xy} - \delta_{xy})\, \mathfrak{v}^x = 0$$

besteht. Aber die beiden Hauptvektorialen stimmen nach Symmetrität des Tensorials $\mathfrak{f}_{xy}$ tatsächlich miteinander überein.

Wir behaupten weiterhin:

Jede zwei Hauptvektorialen des symmetrischen Tensorials $\mathfrak{f}_{xy}$, die verschiedenen Hauptwerten gehören, sind zueinander orthogonal:

$$\mathfrak{g}_{xy}\, \mathfrak{v}^x\, \mathfrak{w}^y = 0 . \tag{35}$$

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g}_{xy}\, \mathfrak{v}^y = \lambda \mathfrak{f}_{xy}\, \mathfrak{v}^y, \quad \mathfrak{g}_{xy}\, \mathfrak{w}^y = \mu \mathfrak{f}_{xy}\, \mathfrak{w}^y ,$$

wobei $\lambda \neq \mu$ ist. Dann erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$\mathfrak{g}_{xy}\, \mathfrak{v}^y\, \mathfrak{w}^x = \lambda \mathfrak{f}_{xy}\, \mathfrak{v}^y\, \mathfrak{w}^x$$

und aus der zweiten

$$\mathfrak{g}_{xy}\, \mathfrak{w}^y\, \mathfrak{v}^x = \mu \mathfrak{f}_{xy}\, \mathfrak{w}^y\, \mathfrak{v}^x ,$$

oder wegen Symmetrität von $\mathfrak{g}_{xy}$ und $\mathfrak{f}_{xy}$, wenn wir x mit y vertauschen,

$$\mathfrak{g}_{xy}\, \mathfrak{v}^y\, \mathfrak{w}^x = \mu \mathfrak{f}_{xy}\, \mathfrak{v}^y\, \mathfrak{w}^x .$$

Die beiden Gleichungen zeigen, dass (35) bestehen soll.

Ein symmetrisches Tensorial hat keine komplexen Hauptwerte.

Beweis. Es sei im Gegenteil $\lambda = \alpha + i\beta$ ein komplexer Hauptwert des symmetrischen Tensorials $\mathfrak{f}_{xy}$ und $\mathfrak{v}^x$ ein zugehöriges Hauptvektorial, dann soll $\mathfrak{v}^x$ auch ein komplexes Vektorial $\mathfrak{a}^x + i\,\mathfrak{b}^x$ sein, da sonst wegen (33) gleichzeitig

$$(\alpha \mathfrak{f}_{xy} - \mathfrak{g}_{xy})\, \mathfrak{v}^y = 0 \quad \text{und} \quad \beta \mathfrak{f}_{xy}\, \mathfrak{v}^y = 0 ,$$

folglich $\mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{v}^y = 0$ bestehen müssen, was unmöglich ist, sofern nicht $\mathfrak{v}^x = 0$. Wegen (33) bekommen wir

$$(\alpha\,\mathfrak{a}^x - \beta\,\mathfrak{b}^x)\,\mathfrak{f}_{xy} - \mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{a}^x = 0\,,$$

$$i\,(\beta\,\mathfrak{a}^x + \alpha\,\mathfrak{b}^x)\,\mathfrak{f}_{xy} - i\,\mathfrak{g}_{xy}\,\mathfrak{b}^x = 0\,.$$

Subtrahierend die zweite Gleichung von der ersten, geht hervor

$$\{(\alpha - i\,\beta)\,\mathfrak{f}_{xy} - \mathfrak{g}_{xy}\}\,(\mathfrak{a}^x - i\,\mathfrak{b}^x) = 0\,,$$

d.h. $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ist auch ein Hauptwert und $\bar{\mathfrak{v}}^x = \mathfrak{a}^x - i\,\mathfrak{b}^x$ ein zugehöriges Hauptvektorial. Nach dem zuletzt erwähnten Satz ist, da $\bar{\lambda} \neq \lambda$,

$$\mathfrak{g}_{xy}\,\bar{\mathfrak{v}}^x\,\mathfrak{v}^y = 0\,,$$

oder in orthogonalen Komplexfunktionen

$$\int \bar{\mathfrak{v}}^t\,\mathfrak{v}^t\,dt = 0\,,$$

was unmöglich ist.

Wenn λ_1, λ_2, ... die nach nicht abnehmendem absolutem Betrag geordneten Hauptwerte des symmetrischen Tensorials $\mathfrak{f}_{xy}$ sind, und r_h der Rang von λ_h ist, so lässt sich eine Folge von Hauptvektorialen

$$\underset{11}{\mathfrak{v}^x},\ \underset{12}{\mathfrak{v}^x},\ \ldots\ldots,\ \underset{1r_1}{\mathfrak{v}^x},\ \underset{21}{\mathfrak{v}^x},\ \ldots\ldots,\ \underset{2r_2}{\mathfrak{v}^x},\ \ldots\ldots \tag{36}$$

finden, die ein orthogonales System bildet, so dass jedes zu dem Hauptwert λ_h gehörige Vektorial $\mathfrak{v}^x$ eine lineare Kombination von $\underset{h1}{\mathfrak{v}^x}, \ldots, \underset{hr_h}{\mathfrak{v}^x}$ ist.

33. Es ist viel zweckmässiger und natürlicher, in unserer Theorie die Hauptvektorialenschar anstatt des Systems von Hauptvektorialen (36) einzuführen. Die *Hauptvektorialenschar* $\underset{t}{\mathfrak{v}^x}$ eines symmetrischen Tenscrials $\mathfrak{f}_{xy}$ definiert sich durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{f}_{xy} - \rho_t\,\mathfrak{g}_{xy})\,\underset{t}{\mathfrak{v}^y} = 0\,, \tag{37}$$

wobei ρ_t eine passend zu erwählende Invariante mit einem Parameter t ist. Die Gleichung (37) gibt uns

$$(38) \qquad (s_{xy}-\rho_t g_{xy})\, v_t^y + (s_x-\rho_t g_x)\, v_t^{(x)} + (s_{xt}-\rho_t g_{xt})\, v_t = 0$$

und

$$(39) \qquad (s_t-\rho_t g_t)\, v_t = 0^{(1)} ,$$

während

$$\overset{t}{\mathfrak{f}}_{xy} = s_{xy} + \delta_{xy}^{[t]} s_t \quad \text{und} \quad \overset{t}{\mathfrak{v}}^y = v_t^y + \delta_t^{y[u]} v_u .$$

Da $v_t \neq 0$ und $g_t \neq 0$, können wir ρ_t wegen (39) bestimmen:

$$(40) \qquad \rho_t = \frac{s_t}{g_{(t)}}$$

und v_t wird hier so gewählt, dass $g_t v^2{}_t = 1$ ist. Für jeden festen Wert von t ist die Gleichung (38) in bezug auf v_t^x lösbar[2], sobald $\frac{1}{\rho_t}$ kein Hauptwert von $\overset{t}{\mathfrak{f}}_{xy}$ ist und $s_x-\rho_t g_x$ in keinem Unterbereich B' identisch verschwindet[3]. Für $\rho_t \neq \rho_u$ erkennen wir aus (37) gleichzeitig

---

(1) Es sei bemerkt:

$$\rho_t \overset{t}{\mathfrak{d}}_{xt}^{[u]} v_u = \overset{t}{\mathfrak{d}}_{xt}^{[u]} \rho_u v_u .$$

(2) Siehe E. PICARD, Sur les équations intégrales de troisième espèce, Annales de l'École Norm. Supér., (3) 28 (1911), S. 459–472.

(3) Im Falle $s_t \equiv 0$, ist $s_x-\rho_t g_x \equiv 0$ wegen (40). (37) wird hier $\overset{t}{\mathfrak{f}}_{xy}\overset{t}{\mathfrak{v}}^y = 0$, d.h. $s_{xy} v_t^y + s_{xt} v_t = 0$. Dafür, dass die Funktion s_{xy} dieser Gleichung genügt, muss die Determinante $D[\overset{t}{\mathfrak{v}}^y]$ gleich Null sein. Die Hauptvektorialenschar existiert also nicht. Aber die Funktion s_{xy} kann mit Hilfe von Hauptvektorialen $\overset{t}{\mathfrak{v}}{}_\mu^x$ folgendermassen entwickelt werden:

$$s_{xy} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\mu} \overset{t}{\mathfrak{v}}{}_\mu^x \overset{t}{\mathfrak{v}}{}_\mu^y ,$$

wenn die Reihe auf der rechten Seite gleichmässig konvergiert, wobei λ_μ ein Hauptwert und $\overset{t}{\mathfrak{v}}{}_\mu^x$ das entsprechende Hauptvektorial ist.

Wenn $\rho_t = \rho$ im ganzen Bereich B konstant ist, so ist $\rho \overset{t}{\mathfrak{f}}_{xy} = \mathfrak{g}_{xy}$ notwendig und hinreichend dafür, dass eine Vektorialenschar $\overset{t}{\mathfrak{v}}{}^x$ existieren soll, die (37) genügt. Denn (38) wird hiermit

(41) $$\int_{t\ u}^{xy} \mathfrak{v}^x \mathfrak{v}^y = 0$$

und

(42) $$\mathfrak{g}_{xy} \mathfrak{v}^x_t \mathfrak{v}^y_u = 0\,,$$

d.h. $\mathfrak{v}^x_t$ und $\mathfrak{v}^x_u$ sind orthogonal, somit sind

(43) $$\mathfrak{g}_{xy} \mathfrak{v}^x_t \mathfrak{v}^y_u = \delta_{tu}$$

und

(44) $$\int_{t\ u}^{xy} \mathfrak{v}^x \mathfrak{v}^y = \delta^{[v]}_{tu} \frac{s_v}{g_v}\,.$$

$$(s_{xy}-\rho\, g_{xy})\, v^y_t + (s_{xt}-\rho\, g_{xt})\, v_t = 0\,,$$

somit muss $s_{xy}-\rho\, g_{xy} = 0$ sein, da $D\left[\frac{v^y_{(t)}}{v_t}\right] \neq 0$ ist.

Wenn $s_x-\rho_t g_x$ in einem echten Unterbereich B' identisch gleich Null ist, so muss $\rho_t = \frac{s_t}{g_{(t)}}$ in B' konstant sein. Einfachheitshalber benützen wir hierbei die orthogonalen Komplexfunktionen, dann wird (38) in folgende drei Gleichungen umgeschrieben:

(i) $s_{xy}\, v^y_t + (s_x-\rho_t)\, v^{(x)}_t + s_{xt} = 0$ für $t \subset B-B'$, $x, y \subset B$,

(ii) $s_{xy}\, v^y_\tau + s_{x\alpha}\, v^\alpha_\tau + (s_x-\rho_\tau)\, v^{(x)}_\tau + s_{x\tau} = 0$

(iii) $s_{\beta y}\, v^y_\tau + s_{\beta\alpha}\, v^\alpha_\tau + s_{\beta\tau} = 0$

} für $x, y \subset B-B'$, $\alpha, \beta, \gamma \subset B'$.

(i) hat stets eine Lösung v^x_t für $t \subset B-B'$, sobald ρ_t kein Hauptwert von $\int_{xy}$ ist. (ii) gibt uns

(iv) $$v^x_\tau = -\frac{1}{s_{(x)}-\rho_{(\tau)}} (s_{x\tau} + s_{x\alpha}\, v^\alpha_\tau) - \bar{s}^{xy}_\tau (s_{y\tau} + s_{y\alpha}\, v^\alpha_\tau)\,,$$

während $\bar{s}^{xy}_\tau$ der resolvente Kern von $\frac{s_{xy}}{(s_{(x)}-\rho_\tau)}$ ist. Ersetzend (iv) in (iii), erhalten wir

(v) $$-\Phi_{\alpha\tau\tau} = \Phi_{\alpha\beta\tau}\, v^\beta_\alpha\,,$$

wobei

$$\Phi_{\alpha\beta\tau} = s_{\alpha\beta} - s_{\alpha y}\left(\frac{s_{y\tau}}{s_y-\rho_\tau} + \bar{s}^{yx}_\tau\, s_{x\tau}\right)$$

ist. Deshalb existiert hierbei auch eine Hauptvektorialenschar nur, wenn (v) nicht nur lösbar ist, aber auch die Determinante der von (i), (v) und (iv) bestimmten Komplexfunktion $\mathfrak{v}^x_t$ nicht gleich Null ist.

Wenn $\rho_t = \rho_u$ für $t < u$ ist, ist der Punkt u ein Häufungspunkt solcher konvergenten Punktfolge $\{u_i\}$ im Bereich B, so dass $\rho_t \neq \rho_{u_i}$ für $i = 1, 2, \ldots$. Dann können wir irgendeine von Limesfunktionen der Komplexfunktionenfolge $\{\underset{u_i}{\mathfrak{v}^x}\}$ als $\underset{u}{\mathfrak{v}^x}$ wählen, die auch die Beziehung (42) d.h. (43) erfüllt. Denn, wenn $\lim_{i\to\infty} s_{xu_i} = s_{xu}$ und $\lim_{i\to\infty} g_{xu_i} = g_{xu}$ gleichmässig sind, so ist $\lim_{i\to\infty} \underset{u_i}{\mathfrak{v}^x} = \underset{u}{\mathfrak{v}^{x(1)}}$ gleichmässig. Somit bekommen wir schliesslich eine Hauptvektorialenschar des $\mathfrak{f}_{xy}$, die (43) über ganz B genügt. Aber es fehlt hierbei noch $\underset{t}{\mathfrak{v}^x}$ entsprechend solchen Werten von t, für die $\frac{1}{\rho_t}$ die Hauptwerte von $\mathfrak{f}_{xy}$ sind. Ergänzen wir den Fehler durch das orthogonale System von Hauptvektorialen (36), dann ergibt sich eine Hauptvektorialenschar $\underset{t}{\mathfrak{v}^x}$ über ganz B ohne Ausnahme, die die Beziehung (43) für $t \neq u$ erfüllt, da aus (33) und (37) folgen

$$\mathfrak{g}_{xy}\,\underset{t}{\mathfrak{v}^x}\,\underset{t}{\mathfrak{v}^y} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{f}_{xy}\,\underset{t}{\mathfrak{v}^x}\,\underset{t}{\mathfrak{v}^y} = 0\,.$$

---

(1) Aus (38) folgen

$$(s_{xy}-\rho_u g_{xy})\,u^y_u + (s_x-\rho_u g_x)\,u^{(x)}_u + (s_{xu}-\rho_u g_{xu}) = 0\,,$$
$$(s_{xy}-\rho_{u_i} g_{xy})\,u^y_{u_i} + (s_x-\rho_{u_i} g_x)\,u^{(x)}_{u_i} + (s_{xu_i}-\rho_{u_i} g_{xu_i}) = 0\,,$$

wobei $u^y_u = \dfrac{v^y_u}{v_{(u)}}$ ist. Subtrahierend die erste Gleichung von der letzten, gelingt es

$$(s_{xy}-\rho_u g_{xy})(u^y_{u_i}-u^y_u) + (s_x-\rho_u g_x)(u^{(x)}_{u_i}-u^{(x)}_u) - (\rho_{u_i}-\rho_u)(g_{xy}\,u^y_{u_i} + g_x\,u^{(x)}_{u_i})$$
$$+ (s_{xu_i}-s_{xu}) - \rho_u(g_{xu_i}-g_{xu}) - (\rho_{u_i}-\rho_u)\,g_{xu_i} = 0$$

zu finden. Somit soll die Funktion $w^y_u = \lim_{i\to\infty}(u^y_{u_i}-u^y_u)$ der Gleichung genügen:

$$(s_{xy}-\rho_u g_{xy})\,w^y_u + (s_x-\rho_u g_x)\,w^{(x)}_u = 0\,,$$

wenn die Funktionen s, g und u alle in B beschränkt sind. Daraus wissen wir $w^y_u = 0$, d.h. $\lim_{i\to\infty} u^y_{u_i} = u^y_u$, da die Determinante

$$D\left[\frac{s_{xy}-\rho_u g_{xy}}{s_{(x)}-f_{(u)}\,g_{(x)}}\right] \neq 0$$

ist. Die Punkte u, an denen für keine Folge $\left\{s_{xu_i}\right\}$ $\lim_{i\to\infty} s_{xu_i} = s_{xu}$ ist, sind höchstens abzählbar viel.

Die Determinante $D[\underset{t}{\mathfrak{v}}^x]$ verschwindet hierbei nicht wegen (43), sobald alle den Hauptwerten entsprechenden Punkte in B eine Nullmenge bilden. Somit können wir nach (44)

$$\int_{xy} \underset{t}{\mathfrak{v}}^x \underset{u}{\mathfrak{v}}^y = \delta^{[v]}_{tu} \frac{s_v}{g_v} \quad (45)$$

schliessen, folglich

$$\int_{xy} = \overset{t}{\mathfrak{v}}_x \overset{u}{\mathfrak{v}}_y \delta^{[v]}_{tu} \frac{s_v}{g_v} = \frac{s_t}{g_t} \overset{t}{\mathfrak{v}}_x \overset{t}{\mathfrak{v}}_y , \quad (46)$$

bis auf eine Nullmenge in B, wobei $\underset{t}{\mathfrak{v}}^x$ eine *normal orthogonale Hauptvektorialenschar* von $\int_{xy}$ heisst. Wir können also behaupten:

Es existiert wenigstens eine normal orthogonale Hauptvektorialenschar eines symmetrischen Tensorials $\int_{xy}$ bis auf eine Nullmenge in B, wenn $s_t/g_{(t)}$ in einem echten Unterbereich B'[2] nicht konstant ist und wenn alle den Hauptwerten von $\int_{xy}$ entsprechenden Punkte in B eine Nullmenge bilden.

Das konjugierte kontravariante Tensorial $\int^{xy}$ von $\int_{xy}$ stellt sich durch

$$\int^{xy} = \frac{s^t}{g^t} \underset{t}{\mathfrak{v}}^x \underset{t}{\mathfrak{v}}^y = \frac{g_t}{s_t} \underset{t}{\mathfrak{v}}^x \underset{t}{\mathfrak{v}}^y \quad (47)$$

dar. (46) bzw. (47) ist eine Lösung des Hauptachsenproblems in unserem Raume.

34. Wir wollen nun eine wichtige Bemerkung über den Tangentialraum hinzufügen. Die Mannigfaltigkeit von kontravarianten Vektorialen an einem Punkte ist nämlich der tangentiale PICARDsche Raum, den wir mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Der Raum $\mathfrak{P}$ hat die folgenden Eigenschaften, wie wir leicht ersehen können:

---

(1) Es sei bemerkt: Wenn $t = u$ und $\frac{g_t}{s_{(t)}}$ ein Hauptwert von $\int_{xy}$ ist, so ist die rechte Seite von (45) gleich $\frac{s_t}{g_{(t)}}$ und nicht $\delta^{[v]}_{tu} \frac{s_v}{g_v}$ für $t = u$.

(2) Ein echter Unterbereich B' bedeutet hier selbstverständlich eine Punktmenge in B, welcher Mass nicht gleich Null ist.

(1) $\mathfrak{P}$ ist linear, d.h. es gibt die Addition u^x+v^x von den beiden Elementen u^x, v^x und die skalare Multiplikation cu^x für Element u^x, während c eine beliebige Konstante ist.

(2) $\mathfrak{P}$ ist vollständig, d.h. für eine Folge von Vektorialen $\underset{n}{v^x}$ folgt aus $|\underset{m}{v^x}-\underset{n}{v^x}|\to 0$ für $m, n\to\infty$ die Existenz eines Vektorials v^x derart, dass $|v^x-\underset{n}{v^x}|\to 0$ für $n\to\infty$.

(3) $\mathfrak{P}$ ist separabel, d.h. es enthält eine abzählbare, überall dichte Teilmenge.

(4) $\mathfrak{P}$ enthält beliebige viele linear unabhängige Vektorialen.

Bei Einführung des Fundamentaltensorials g_{xy} wie in Nr. 30, wird $\mathfrak{P}$ ein metrischer Raum $\mathfrak{H}$. Dann wird der Betrag $||v||$ eines Vektorials v^x durch $\sqrt{g_{xy}v^xv^y}$ definiert und die Winkel zweier u^x, v^x durch $\cos\theta=\frac{\sqrt{g_{xy}u^xv^y}}{||u||\cdot||v||}$. Der Raum $\mathfrak{H}$ ist auch nicht nur vollständig, sondern auch separabel bezüglich der Metrik, d.h. eben wenn wir an Stelle der Bedingung $|\underset{m}{v^x}-\underset{n}{v^x}|\to 0$ die Bedingung $||\underset{m}{v^x}-\underset{n}{v^x}||=\sqrt{g_{xy}(\underset{m}{v^x}-\underset{n}{v^x})(\underset{m}{v^y}-\underset{n}{v^y})}\to 0$ setzen. Daraus ersehen wir, dass der Raum $\mathfrak{H}$ nichts anderes als ein (abstrukter) HILBERTscher Raum ist. Diese Tatsache zeigt sich auch noch klar bei Benützung von orthoganalen Komplexfunktionen, dabei ist

$$g_{xy}u^xv^y=\delta_{xy}\overset{x}{u}\overset{y}{v}=\int\overset{x}{u}\overset{x}{v}\,dx\,,$$

das das innere Produkt von zwei Elementen u^x, v^x im gewöhnlichen HILBERTschen Raum ist. Somit ist der Raum $\mathfrak{H}$ zum gewöhnlichen HILBERTschen Raum isomorph.

Dezember 1934.

Literaturverzeichnis.

G. ALIPRANDI: [1] Sulle evolute delle curve, Bolletino Uni. mat. ital., 7 (1928), 142–147.

[2] Sopra le normali principale (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano, Rendiconti dei Lincei, (6) 8 (1928), 273–276.

[3] Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico, Rendiconti dei Lincei, (6) 8 (1928), 356–359.

V. AMBARZUMIAN: Zur linearen Geometrie des Funktionenraumes, Zeitschrift für Physik, 55 (1929), 801–805.

G. ASCOLI: Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, Annali di Mat., (4) 10 (1932), 33–81, 203–232.

I. A. BARNETT: On a relation between conformal and projective groups in function space, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 15 (1929), 96–102.

I. A. BARNETT und D. NATHAN: Sphere geometry and the conformal group in function space, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 18 (1932), 400–403.

L. BIEBERBACH: Eine singularitätsfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum, Comment. math. helv., 4 (1932), 248–255.

P. BORTOLOZZI: [1] Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano, Rendiconti dei Lincei, (6) 9 (1929), 48–49.

[2] Sulla equazione delle asintotiche di una V_2 col σ_2 a tre dimensioni, Rendiconti dei Lincei, (6) 14 (1931), 487–489.

F. CONFORTO: [1] Metrica e fondamenti di calcolo differenziale assoluto in uno spazio funzionale continuo, Rendiconti dei Lincei, (6) 12 (1930), 547–552.

[2] Parallelismo negli spazi funzionali continui, Rendiconti dei Lincei, (6) 13 (1931), 173–178.

[3] Formalismo matematico in uno spazio funzionale continuo retto da un elemento lineare di seconda specie, Rendiconti dei Lincei, (6) 13 (1931), 562–568.

[4] Sopra il calcolo differenziale assoluto negli spazi funzionali continui, Annali di Scuola norm. super. Pisa, (2) 2 (1933), 309–324.

J. DELSARTE: [1] Sur les transformations linéaires fonctionnelles et les rotations fonctionnelles non euclidiennes, Comp. Rend. Paris, 186 (1928), 415–416.

[2] Sur certains groupes de rotations fonctionnelles non euclidiennes, Comp. Rend. Paris, 186 (1928), 1095–1096.

[3] Sur un groupe de rotations fonctionnelles à un paramètre et sur certaines équations intégro-différentielles qui y sont attachées, Comp. Rend. Paris, 186 (1928), 1412–1414.

[4] Sur un groupe de rotations fonctionnelles à un paramètre et sur les équations aux dérivées fonctionnelles qui y sont attachées, Comp. Rend. Paris, 186 (1928), 1513–1614.

[5] Les rotations fonctionnelles, Annales Toulouse, (3) 20 (1928), 47–127.

[6] Mémoire sur les groupes finis de rotations fonctionnelles, Rendiconti di Palermo, 53 (1929), 135-216.

[7] Sur les transformations de Fredholm invariant une fonctionnelle quadratique, Comp. Rend. Paris, 188 (1929), 1280–1282.

[8] Le groupe de la géométrie conforme dans l'espace des fonctions de carré sommable, Comp. Rend. Paris, 188 (1929), 1591–1593.

L. L. DINES: Projective transformation in function space, Trans. of Amer. Math. Soc., 20 (1919), 45–65.

M. FRÉCHET: Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, Nouvelles Annales de Math., (4) 8 (1908), 91–126, 289–317.

L. INGOLD: [1] Functional differential geometry, Trans. of Amer. Math. Soc., 13 (1912), 319–341.

[2] Geometry of a set of n functions, Annals of Math., (2) 27 (1926), 494–510.

A. KAWAGUCHI: [1] Sur les différentes connexions de l'espace fonctionnel, Comp. Rend. Paris, 189 (1929), 189–191.

[2] Über Übertragungen im Funktionenraume, Comptes Rendus du premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa, 1929, 329–334.

[3] The foundation of the theory of displacements, Proc. Imp. Acad., 9 (1933), 351–354.

[4] The foundation of the theory of displacements, II. (Application to the functional manifolds.), Proc. Imp. Acad., 10 (1934), 45–48.

L. S. KENNISON: A fundamental theorem on one-parameter continuous groups of projective functional transformations, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 16 (1930), 607–609.

M. KERNER: L'extremum dans l'espace hilbertien, Annali di Mat., (4) 10 (1932), 183–202.

G. KOWALEWSKI: [1] Les formules de Frenet dans l'espace fonctionnel, Comp. Rend. Paris, 151 (1910), 1338–1340.

[2] Über Funktionenräume, Wiener Sitzungsberichte, 120, Abt. IIa (1911), 77–109, 1435–1472.

[3] Sur une propriété des transformations de Volterra, Comp. Rend. Paris, 153 (1911), 931–933.

[4] Sur une classe de transformations infinitésimales de l'espace fonctionnel, Comp. Rend. Paris, 153 (1911), 1452–1454.

A. D. MICHAL: [1] Integro-differential expressions invariant under Volterra's group of transformations, Annals of Math., (2) 26 (1924–25), 181–201.

[2] Affinely connected function space manifolds, Amer. Journal of Math., 50 (1928), 473–517.

[3] The group manifold of finite continuous point and functional transformation groups, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 14 (1928), 746–754.

[4] Differential geometries of function space, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 16 (1930), 88–94.

[5] The differential geometry of a continuous infinitude of contravariant functional vectors, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 16 (1930), 162–164.

[6] Projective functional tensors and other allied functionals, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 16 (1930), 165–168.

[7] Function space-time manifolds, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 17 (1931), 217–225.

[8] One-parameter linear functional groups in several functions of two variables, Bulletin of Amer. Math. Soc., 37 (1931), 100–104.

A. D. MICHAL und L. S. KENNISON: Quadratic functional forms in a composite range, Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A., 16 (1930), 617–619.

A. D. MICHAL und T. S. PETERSON: The invariant theory of functional forms under the group of linear functional transformations of the third kind, Annals of Math., (2) 32 (1931), 431–450.

S. MINETTI: Sur le concept de coordonnées homogènes dans la géométrie des holoespaces, Bulletin de Sci. Math., (2) 58 (1934), 112–117.

G. C. MOISIL: [1] Sur les variétés fonctionnelles, Comp. Rend. Paris, 187 (1928), 796–798.

[2] Sur les groupes fonctionnels. Comp. Rend. Paris, 188 (1929), 691–692.

[3] La mécanique analitique des systèmes continus, Théses Bucarest, 1928.

[4] Sur les repères mobiles dans l'espace fonctionnel, Rendiconti dei Lincei, (6) 10 (1929), 497–501.

[5] Sur le calcul différentiel absolu des variétés plongés dans l'espace fonctionnel, Annales Sci. Univ. Jassy, 16 (1931), 375–382.

M. PASTORI: Le identità di Veblen nel calcolo assoluto generalizzato del Vitali, Bolletino Uni. mat. ital., 10 (1931), 202–205.

T. S. PETERSON: [1] A class of invariant functionals of quadratic functional forms, Amer. Journal of Math., 51 (1929), 417–430.

[2] The analogue of Weyl's conformal curvature tensor in a Michal functional geometry, Annali di Mat., (4) 13 (1934), 55–62.

E. PINTE: [1] Sur les congruences de droites et les surfaces paralléles dans l'espace hilbertien, Comp. Rend. Paris, 193 (1931), 1309–1311.

[2] Sur les dévelopées des courbes dans l'espace hilbertien, Rendiconti dei Lincei, (6) 14 (1931), 244–248.

[3] Sur les développables de normales à une variété à n dimensions dans l'espace hilbertien, Comp. Rend. Paris, 193 (1931), 630–632.

F. RIESZ: Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, Comp. Rend. Paris, 144 (1907), 1409–1411.

I. SACILOTTO: I simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato, Rendiconti dei Lincei, (6) 9 (1929), 213–217.

H. E. STELSON: Double function space, Tohoku Math. Journal, 34 (1931), 297–320.

E. SIMONETTO: Sopra alcune varietà dello spazio hilbertiano, Bolletino Uni. mat. ital., 10 (1931), 14–16.

A. TONOLO: [1] Una proprietà delle varietà minime dello spazio hilbertiano, Giornale di Mat., 67 (1929), 172–176.

[2] Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni, Rendiconti dei Lincei, (6) 9 (1929), 598–602, 713–718, 853–857.

E. VESSIOT: [1] Sur les groupes fonctionnels et les équations intégro-différentielles linéaires, Comp. Rend. Paris, 154 (1912), 571–573.

[2] Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires, Comp. Rend. Paris, 154 (1912), 682–684.

G. VITALI: [1] Geometria nello spazio hilbertiano, Bologna 1929.

[2] Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie, Annales de la Soc. Polonaise de Math., 7 (1928), 43–67.

[3] Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo σ_2, Annales de la Soc. Polonaise de Math., 7 (1928), 242–252.

[4] Geometria nello spazio hilbertiano, Atti d. Istituto Veneto, 87 (1928) 349–428.

[5] Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato, Rendiconti dei Lincei, (6) 7 (1928), 626–629.

[6] Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato, Rendiconti dei Lincei, (6) 9 (1929), 190–192.

[7] Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà, Rendiconti dei Lincei, (6) 9 (1929), 391–394.

[8] Sulle relazioni lineari fra gli elementi di un ricciano, Bolletino Uni. mat. ital., 10 (1931), 265–269.

[9] Le varie derivazioni covarianti nel calcolo assoluto considerate come casi particolari di una medesima operazione, Prace mat. fiz., 39 (1932), 131–134.

[10] Sulle derivazioni covarianti, Rendiconti Semin. mat. Univ. Padova, 3 (1932), 16–27.

[11] Proiettività nello spazio hilbertiano, Annali di Mat., (4) 11 (1932), 155–179.