



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGEN DIE DER ERWEITERTEN TRANSFORMATIONSGRUPPE ANGEHÖREN II
Author(s)	Hokari, Shisanji
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 4(1), 41-50
Issue Date	1936
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58080
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFS_HIU_v4n1-41.pdf



ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGEN, DIE DER ERWEITERTEN TRANSFORMATIONS- GRUPPE ANGEHÖREN, II

Von

Shisanji HOKARI

In der letzten Arbeit⁽¹⁾ behandelten wir die Übertragungen, die der Transformationsgruppe⁽²⁾

$$(1) \begin{cases} \bar{y}^i = \bar{y}^i(y^1, \dots, y^m), & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x^{m+1}, \dots, x^{m+n}; y^1, \dots, y^m), & (\lambda = m+1, \dots, m+n) \end{cases}^{(3)}$$

angehören. Bei jener Gelegenheit haben wir als spezielle Fälle die Theorien von T. HOSOKAWA, A. WUNDHEILER, V. HLAVATÝ und E. CARTAN, indem wir die kontravarianten bzw. die kovarianten Vektoren definierten, eingeführt⁽⁴⁾. Wir konnten damals die kontravarianten Vektoren *natürlich* erhalten, jedoch die kovarianten Vektoren *unnatürlich*. In der vorliegenden Arbeit möchten wir diese Schwäche verbessern.

1. *Allgemeine Theorie.* Wir nehmen zunächst x^λ als die Koordinaten der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n an, und adjungieren jedem Punkte in X_n eine $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\bar{X}_{m+n}$,

-
- (1) S. HOKARI, Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Bd. 3 (1935), S. 15-26.
- (2) Diese Transformationsgruppe wurde erstens von Herrn Professor A. KAWAGUCHI in seiner Arbeit behandelt. Siehe: A. KAWAGUCHI, The Foundation of the Theory of Displacements, II, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 10 (1934), S. 45-48.
- (3) Die lateinischen, griechischen bzw. grossen lateinischen Indizes durchlaufen die Werte $(1, 2, \dots, m)$, $(m+1, \dots, m+n)$ bzw. $(1, 2, \dots, m+n)$.
- (4) Siehe: S. HOKARI, a. a. O.

die auf ein System von $m+n$ reellen Funktionen $v^1, \dots, v^{m+n}$ der m reellen Variablen $y^1, \dots, y^m$ bezogen ist. Selbstverständlich sollen alle Funktionen v^A vom adjungierten Punkte x^λ in X_n abhängen. Wir nennen *einen kontravarianten Punkt* in $\mathfrak{X}_{m+n}$ ein System von $m+n$ reellen Werten, welche $m+n$ Funktionen v^A annehmen. Wir setzen voraus, dass die Funktionen v^A sich bei den Transformationen (1) in folgender Weise transformieren:

$$(2) \quad \bar{v}^A = P_B^A v^B,$$

wobei

$$(3) \quad \begin{cases} P_j^i = \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j}, \\ P_\lambda^i = 0, & P_i^\lambda = 0, \\ P_\mu^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu}. \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Gleichungen (2) folgendermassen darstellen:

$$\bar{v}^i = P_j^i v^j,$$

$$\bar{v}^\lambda = P_\mu^\lambda v^\mu.$$

Nun erhalten wir nicht nur die zwei unverschwindenden Determinanten $|P_j^i|$ und $|P_\mu^\lambda|$, sondern auch die einfache Relation $|P_B^A| = |P_j^i| \cdot |P_\mu^\lambda|$.

Der auf diese Weise definierte kontravariante Punkt v^A ist eigentlich; mit anderen Worten der Punkt v^A hat die geometrische Invarianteigenschaft. Um den wahren Sachverhalt zu erfahren, nehmen wir die zwei folgenden Transformationen von (1):

$$\begin{cases} \bar{\bar{y}}^i = \bar{y}^i(\bar{y}) \\ \bar{\bar{x}}^\lambda = \bar{x}^\lambda(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \bar{y}^i = \bar{y}^i(y) \\ \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x, y) \end{cases}$$

an, nun lässt sich der kontravariante Punkt v^A folgendermassen transformieren:

$$\bar{v}^A = \bar{P}_B^A \bar{v}^B$$

und

$$\bar{v}^B = P_C^B v^C,$$

wobei die Funktionen $\bar{P}_B^A$ dieselben Bedingungen wie (3) erfüllen. Deshalb erhalten wir sofort bei der Transformation von (x, y) zu $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{v}^A = \bar{P}_C^A v^C,$$

wobei

$$\bar{P}_C^A = \bar{P}_B^A P_C^B.$$

Daraus ergibt sich sogleich, dass die Funktionen $\bar{P}_C^A$ dieselben Bedingungen wie (3) erfüllen.

Die ersten Gleichungen von (1) gibt uns

$$d\bar{y}^i = P_j^i dy^j.$$

Wir denken uns weiterhin für x^λ nur die folgenden Differentiale:

$$(4) \quad \delta x^\lambda = dx^\lambda + \mathfrak{M}_i^\lambda dy^i,$$

wobei $\mathfrak{M}_i^\lambda$ im allgemeinen die Funktionen von y^i und x^λ sind. Die geometrische Bedeutung von (4) wird folgendermassen erklärt: Jede Koordinate x^λ in X_n hängt von den Parametervariablen y^i ab und die Übertragung von x^λ bei der infinitesimalen Veränderung von y^i definiert sich durch (4). Deshalb stellt (4) dann und nur dann die Parallelverschiebung des Punktes x^λ dar, wenn alle Differentiale δx^λ gleich Null sind. Diese Verschiebung (4) heissen wir die Grundübertragung.

Nehmen wir die weitere Forderung an, dass die Funktionen $\mathfrak{M}_i^\lambda$ sich bei den Transformationen (1) in folgender Weise transformieren:

$$(5) \quad \bar{\mathfrak{M}}_j^\lambda P_j^i = \mathfrak{M}_j^\mu P_\mu^i + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial y^j},$$

so ergibt sich bei den Transformationen (1)

$$(6) \quad \delta \bar{x}^\lambda = P_\mu^\lambda \delta x^\mu ;$$

nun erkennen wir, dass $(dy^i, \delta x^\lambda)$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Punktes in $\mathfrak{X}_{m+n}$ sind.

Auf ähnliche Weise definieren wir *einen kovarianten Punkt* in $\mathfrak{X}_{m+n}$, d. h. wenn die Funktionen w_A von y^i und x^λ in folgender Weise sich transformieren

$$w_A = Q_A^B w_B ,$$

so stellt w_A einen kovarianten Punkt in $\mathfrak{X}_{m+n}$ dar, wobei

$$Q_j^i = \frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} ,$$

$$Q_\lambda^i = 0 , \quad Q_i^\lambda = 0 ,$$

$$Q_\mu^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} .$$

Wir erkennen nun gleich, dass zwischen den P_B^A und Q_C^B die gewöhnlichen Relationen entstehen :

$$P_B^A Q_C^B = \delta_C^A .$$

Definieren wir *die lineare Punktübertragung* in $\mathfrak{X}_{m+n}$ folgendermassen :

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta v^A &= dv^A + \Gamma_{BC}^A v^B \delta z^C \\ &= dv^A + (\Lambda_{Bi}^A dy^i + \Lambda_{B\lambda}^A dx^\lambda) v^B , \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta z^C &= dy^i \quad \text{für } C = i , \\ &= \delta x^\lambda \quad \text{für } C = \lambda \end{aligned}$$

und

$$(8) \quad \Lambda_{Bi}^A = \Gamma_{Bi}^A + \Gamma_{B\lambda}^A \mathfrak{M}_i^\lambda , \quad \Lambda_{B\lambda}^A = \Gamma_{B\lambda}^A ,$$

so transformieren sich die Parameter A_{BC}^A der Übertragung nach (1) in folgender Weise:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_{jk}^i = P_l^i \left(Q_j^m Q_k^n A_{mn}^l + Q_j^m \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k} A_{m\tau}^l + \frac{\partial Q_j^l}{\partial \bar{y}^k} \right), \\ \bar{A}_{\mu k}^i = P_l^i \left(Q_\mu^s Q_k^n A_{sn}^l + Q_\mu^s \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k} A_{s\tau}^l \right), \\ \bar{A}_{jk}^\lambda = P_\alpha^\lambda \left(Q_j^m Q_k^n A_{mn}^\alpha + Q_j^m \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k} A_{m\tau}^\alpha \right), \\ \bar{A}_{\mu k}^\lambda = P_\alpha^\lambda \left(Q_\mu^s Q_k^n A_{sn}^\alpha + Q_\mu^s \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k} A_{s\tau}^\alpha + \frac{\partial Q_\mu^\alpha}{\partial \bar{y}^k} \right), \\ \bar{A}_{j\nu}^i = P_l^i Q_j^m Q_\nu^\tau A_{m\tau}^l, \\ \bar{A}_{\mu\nu}^\lambda = P_\alpha^\lambda \left(Q_\mu^s Q_\nu^\tau A_{s\tau}^\alpha + \frac{\partial Q_\mu^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \right), \\ \bar{A}_{\mu\nu}^i = P_l^i Q_\mu^s Q_\nu^\tau A_{s\tau}^l, \\ \bar{A}_{j\nu}^\lambda = P_\alpha^\lambda Q_j^m Q_\nu^\tau A_{m\tau}^\alpha. \end{array} \right.$$

Wenn wir z^A anstatt y^i für $A = i$ und x^λ für $A = \lambda$ umschreiben, so haben wir nach (7)

$$(10) \quad \delta v^A = dv^A + A_{BC}^A v^B dz^C.$$

2. Der von T. HOSOKAWA, A. WUNDHEILER und V. HLAVATÝ betrachtete Fall. In der $\mathfrak{X}_{m+n}$ nehmen wir eine bestimmte n -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_n$ an, setzend die Bestimmungszahlen v^i bzw. w_i von kontravariantem bzw. kovariantem Punkte in der $\mathfrak{X}_{m+n}$ (für $i = 1, 2, \dots, m$) gleich Null; mit anderen Worten wir nehmen durch die Projektion von der $\mathfrak{X}_{m+n}$ eine neue kleine $\mathfrak{X}_n$ an, welche auf ein System von n reellen Funktionen v^λ der m reellen Variablen y^i und der n reellen Variablen x^λ bezogen ist.

Wir nennen also ein auf diese Weise erhaltenes System von n reellen Werten, welche n Funktionen v^λ bzw. w_λ annehmen, einen kontravarianten bzw. kovarianten Punkt in $\mathfrak{X}_n$. Diese Überlegungen führen uns dahin, folgende Definition aufzustellen:

Ein Wertsystem v^λ bzw. w_λ ist ein kontravarianter bzw. kovarianter Vektor im Punkte x^λ der Mannigfaltigkeit X_n , sobald v^λ bzw. w_λ ein kontravarianter bzw. kovarianter Punkt in $\mathfrak{X}_n$ ist.

Dieser kontravariante Vektor v^λ transformiert sich gemäss (1) folgendermassen :

$$\bar{v}^\lambda = P^\lambda_\mu v^\mu .$$

Gleichfalls transformiert sich dieser kovariante Vektor w_λ gemäss (1) in folgender Weise :

$$w_\lambda = Q^\mu_\lambda w_\mu .$$

Wir müssen aber bemerken, dass die Grössen v^λ , w_λ , P^λ_μ und Q^λ_μ alle von den Parametern y^i abhängig sind.

Wir beschäftigen uns weiter mit der Frage: Was die Grundübertragung

$$\delta x^\lambda = dx^\lambda + M^\lambda_i dy^i$$

bedeutet? Wenn alle Parameter y^i fest bleiben, so erhalten wir $\delta x^\lambda = dx^\lambda$; in diesem Falle sind nämlich die δx^λ den gewöhnlichen Differentialen dx^λ der Koordinaten gleich. Damit erklären wir die Grundübertragung folgendermassen: Wenn ein Punkt $P(x)$ in X_n in einem bestimmten Wertsystem von y^i gegeben ist, so wird bei infinitesimaler Veränderung von x^λ und y^i der Punkt $P(x)$ dem anderen Punkte $Q(x+\delta x)$ übertragen.

Die Grundübertragung bestimmt also bei gegebener infinitesimaler Veränderung von x^λ und y^i die Beschaffenheit der Veränderung des Punktes von dem Raume X_n .

Die Übertragung in X_n wird aus der allgemeinen Punktübertragung in $\mathfrak{X}_{m+n}$ in einfacher Weise eingeführt. Wenn wir die folgenden Bedingungen :

$$(11) \quad \Gamma^\lambda_{\lambda C} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma^\lambda_{iC} = 0$$

für $i = 1, 2, \dots, m$; $\lambda = m+1, \dots, m+n$; $C = 1, 2, \dots, m+n$ annehmen, so ergibt sich uns unmittelbar infolge (8) und (9)

$$\bar{\Gamma}_{\lambda C}^i = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_{iC}^\lambda = 0.$$

Deshalb sind diese Bedingungen (11) *eigentlich*. Da die Parameter Γ_{jC}^i in der allgemeinen Theorie (Nr. 1) hierbei nicht vorkommen, erhalten wir als die Transformationen der Parameter $\Gamma_{\mu C}^\lambda$ die folgenden zwei Gleichungssysteme:

$$(12) \quad \begin{cases} (a) \quad \bar{A}_{\mu k}^\lambda = P_\alpha^\lambda \left(Q_\mu^\beta Q_k^\alpha A_{\beta n}^\alpha + Q_\mu^\beta \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k} A_{\beta \tau}^\alpha + \frac{\partial Q_\mu^\tau}{\partial \bar{y}^k} \right), \\ (b) \quad \bar{A}_{\mu \nu}^\lambda = P_\alpha^\lambda \left(Q_\mu^\beta Q_\nu^\tau A_{\beta \tau}^\alpha + \frac{\partial Q_\mu^\tau}{\partial \bar{x}^\nu} \right). \end{cases}$$

Wir erhalten weiterhin die Übertragung in diesem Raume aus (7) und (10)

$$\begin{aligned} \delta v^\lambda &= dv^\lambda + \Gamma_{\mu C}^\lambda v^\mu \delta z^C \\ &= dv^\lambda + A_{\mu C}^\lambda v^\mu dz^C \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta w_\lambda &= dw_\lambda - \Gamma_{\lambda C}^\mu w_\mu \delta z^C \\ &= dw_\lambda - A_{\lambda C}^\mu w_\mu dz^C. \end{aligned}$$

Wir ersehen: *Die Geometrie von A. WUNDHEILER ist ein Spezialfall der hier betrachteten Geometrie:*

$$m = 1, \quad \bar{y} = y (= t).$$

Wenn wir die Parameter von A. WUNDHEILER mit A_{BC}^{*A} zeigen, so entstehen zwischen den A_{BC}^{*A} und unseren Parameter A_{BC}^A die Relationen

$$A_{\mu \nu}^{*\lambda} = A_{\mu \nu}^\lambda \quad \text{und} \quad A_\mu^{*\lambda} = A_{\mu 1}^\lambda.$$

Hieraus folgt ohne weiteres: *Die spezielle Punktkonnexion von V. HLAVATÝ ist ein Spezialfall der hier betrachteten Geometrie:*

$$m = 1, \quad \bar{y} = y (= t).$$

Die Parameter $\phi_{\mu 0}^\lambda$ von V. HLAVATÝ transformieren sich folgendermassen:

$$\bar{\phi}_{\mu 0}^\lambda = P_\alpha^\lambda \left(Q_\mu^\alpha \phi_{\beta 0}^\alpha + Q_\mu^\alpha \frac{\partial x^\tau}{\partial t} \phi_{\beta \tau}^\alpha + \frac{\partial Q_\mu^\alpha}{\partial t} \right).$$

Deshalb erkennen wir

$$\phi_{\mu \nu}^\lambda = A_{\mu \nu}^\lambda \quad \text{und} \quad \phi_{\mu 0}^\lambda = A_{\mu 1}^\lambda.$$

Bemerkung. Wir sehen, dass in dieser Übertragung sich die Bestimmungszahlen

$$K_{\lambda \mu \nu}^\omega = \frac{\partial A_{\lambda \nu}^\omega}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_{\lambda \mu}^\omega}{\partial x^\nu} + A_{\mu \rho}^\omega A_{\lambda \nu}^\rho - A_{\nu \rho}^\omega A_{\lambda \mu}^\rho$$

nach (12. b) untereinander transformieren und also einen Affinor bilden.

Das obige erhaltene Ergebnis zeigt uns *nicht nur*, dass *viele Parameter y^i eintreten dürfen, sondern auch*, dass die Transformationsregel von y^i *nicht identisch sein kann*.

3. *FINSLERScher Raum.* In Nr. 1 nahmen wir x^λ als die Koordinaten der Mannigfaltigkeit X_n an, und adjungierten jedem Punkte in X_n eine $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_{m+n}$. Es mögen x^λ und y^i vertauscht werden, d. h. wir deuten nun y^i als die Koordinaten in einem m -fach ausgedehnten Raume Y_n , und adjungieren jedem Punkte in Y_m eine $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}_{m+n}$, die auf ein System von $m+n$ reellen Funktionen v^A der n reellen Variablen x^λ bezogen ist.

Alle Relationen, welche wir für $\mathfrak{X}_{m+n}$ erklärten, entstehen gleichfalls für die neue $\mathfrak{Y}_{m+n}$.

Wir setzen voraus, dass *alle Grössen in $\mathfrak{Y}_{m+n}$ nur von dem Verhältnis der Variablen x^λ abhängen, und ferner $m = n$* . Wir nehmen

eine bestimmte n -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}_n$ an, setzend v^λ bzw. w_λ von kontravariantem bzw. kovariantem Punkte in $\mathfrak{Y}_{m+n}$ für $\lambda = m+1, \dots, m+n$ gleich Null; mit anderen Worten die $\mathfrak{Y}_n$ wird durch die n Bestimmungszahlen v^i bezogen, und $\mathfrak{Y}_n$ entspricht der gewöhnlichen tangentialen Mannigfaltigkeit, welche im Punkte y^i von Y_n adjungiert wird. Wir definieren v^i , welches der kontravariante Punkt in $\mathfrak{Y}_n$ ist, als *kontravarianten Vektor im Punkte y^i der Mannigfaltigkeit Y_n* . Den kovarianten Vektor w_i definieren wir ebenso wie den kontravarianten.

Denken wir uns x^λ als *das ausgezeichnete Linienelement*, welches im Punkte y^i adjungiert wird, so erhalten wir *einen FINSLERSchen Raum Y_n* . In diesem Falle sind x^λ die Bestimmungszahlen eines Vektors, und deshalb transformieren sie sich folgendermassen:

$$\bar{x}^\lambda = P_{\mu-n}^{\lambda-n} x^\mu.$$

Nehmen wir noch weitere Bedingungen

$$(13) \quad \Gamma_{iC}^\lambda = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{\lambda C}^i = 0$$

für $i = 1, 2, \dots, n$; $\lambda = n+1, \dots, 2n$; $C = 1, 2, \dots, 2n$ an, so haben wir gemäss (10) als kovariantes Differential eines kontravarianten Vektors v^i bzw. eines kovarianten Vektors w_i

$$\begin{aligned} \delta v^i &= dv^i + \Gamma_{jC}^i v^j \delta z^C \\ &= dv^i + A_{jC}^i v^j dz^C \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (14) \quad \delta w_i &= dw_i - \Gamma_{iC}^j w_j \delta z^C \\ &= dw_i - A_{iC}^j w_j dz^C. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (13) sind *eigentlich*, d. h. wir haben nämlich aus (9) und (13)

$$\bar{\Gamma}_{iC}^\lambda = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_{\lambda C}^i = 0.$$

Da die Parameter $\Gamma_{\mu C}^\lambda$ in der allgemeinen Theorie (Nr. 1) hierbei nicht vorkommen, so erhalten wir als die Transformationen der Parameter Γ_{jC}^i die folgenden zwei Gleichungssysteme:

$$A_{jk}^i = P_l^i \left(Q_j^m Q_k^n A_{mn}^l + Q_j^m \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} A_{m\gamma}^l + \frac{\partial Q_j^l}{\partial y^k} \right),$$

$$A_{j\nu}^i = P_l^i Q_j^m Q_\nu^\gamma A_{m\gamma}^l.$$

In diesem Falle gibt uns die Grundübertragung

$$\delta x^\lambda = dx^\lambda + \mathfrak{M}_i^\lambda dy^i$$

die Übertragung des ausgezeichneten Linienelementes x^λ .

Schreiben wir genau die Gleichungen (14), so erhalten wir

$$\delta w_i = \left(\frac{\partial w_i}{\partial y^k} - \frac{\partial w_i}{\partial x^\nu} \mathfrak{M}_k^\nu - \Gamma_{ik}^j w_j \right) dy^k + \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^\nu} - \Gamma_{i\nu}^j w_j \right) \delta x^\nu.$$

Also können wir das Ergebnis aufstellen: *Wenn wir in unserem Raume geeignete Metrik einführen und die Relationen zwischen $\mathfrak{M}_i^\lambda$ und Γ_{jC}^i versuchen, so erhalten wir die CARTANSche Übertragung im FINSLERSchen Raume.*

Zum Schlusse möchte ich mich besonders für die lehrreichen Anweisungen des Herrn Professors A. KAWAGUCHI herzlichst bedanken.

25. Juli 1935.

Mathematisches Seminar,
Universität zu Sapporo.