HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜBER DIE EXTENSORRECHNUNG IN DEN VERALLGEMEINERTEN RÄUMEN VON FLÄCHENELEMENTEN HÖHERER ORDNUNG
Author(s)	Ohkubo, Takeo
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 11(1), 1-37
Issue Date	1946
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58081
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFS_HIU_v11n1-1.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

ÜBER DIE EXTENSORRECHNUNG IN DEN VERALLGEMEINERTEN RÄUMEN VON FLÄCHENELEMENTEN HÖHERER ORDNUNG

Von

Takeo OHKUBO

INHALT

SEITE

Einleitung 1
Kapitel I. Die N-dimensionale Mannigfaltigkeit von Flächenelementen höherer Ordnung $M_N(M; K)$ 4
§ 1. Die Mannigfaltigkeit $M_N(M; K)$ 4
§ 2. Einige Formeln 5
§ 3. Die erweiterte Koordinatentransformation 6
§ 4. Der Extensor 8
§ 5. Einige Sätze 10
§ 6. Die Operatoren $\overset{H}{\mathfrak{Z}}$ 11
§ 7. Die Operatoren $\overset{H}{\mathfrak{Y}}$ 13
§ 8. Die Überschiebungen der Exvektoren 15
Kapitel II. Übertragungslehre in dem metrischen Raume von K-dimensionalen Flächenelementen höherer Ordnung 18
§ 9. Der Fundamentalextensor 18
§10. Christoffelsche Symbole und ihre Beziehungen 20
§11. Die exkovariante Differentiation 24
Kapitel III. Die in einem L-dimensionalen euklidischen Raume eingebettete Mannigfaltigkeit 29
§12. Die Exfläche 29
§13. Die Exflächennormale 32
§14. Die Exflächen von der Klasse 2 35
Literaturverzeichnis 37

EINLEITUNG

Wir verstehen unter den verallgemeinerten Räume, die Mannigfaltigkeiten, in denen als Raumelement nicht der Punkt sondern das Linienelement, Hyperflächenelement oder noch allgemeinere Flächenelement von gewissen Dimensionen angekommen ist. Es sei eine K-dimensionale Fläche in der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit

mit Koordinaten x^i durch $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^K)$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $1 \leqq K \leqq N-1$ gegeben. Das Linienelement oder Flächenelement M-ter Ordnung wird durch $(x^i, x'^i, \ldots, x^{(M)i})$ (für $K = 1$) oder $(x^i, p_a{}^i, \ldots, p^i{}_{a(M)})$ dargestellt. Diese verallgemeinerten Räume sind also von Dimension $N\binom{K+M}{M}$.

Nun betrachten wir den Raum, in welchem ein K-faches Integral

$$S = \iint \cdots \int F(u, x, p_a, \ldots, p_{a(M)}) du^1 \ldots du^K, \quad 1 \leqq K \leqq N-1$$

die Geometrie beherrscht. Für $M = 1$, steht der Raum in der Mitte zwischen dem FINSLERschen Raume und CARTANschen. Für $K = 1$, reduziert sich nämlich der Raum zur direkten Verallgemeinerung des FINSLERschen und für $K = N-1$ tritt der CARTANsche als ein besonderer Fall auf. Für $M \geqq 2$ sind die Umstände schwerer. In diesem Falle hat der Verfasser[1] eine besondere N-dimensionale Mannigfaltigkeit untersucht, deren Geometrie durch ein K-faches Integral von der Form

$$\iint \cdots \int \left\{ A_i^{ab}(x, \partial x/\partial u) \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} + B(x, \partial x/\partial u) \right\}^{\frac{n-1}{2}} du^1 \ldots du^K$$

beherrscht wird, das die Oberfläche eines Hyperflächenstückes angibt ($K = N-1$, $M = 2$).

Die Theorie des FINSLERschen sowie CARTANschen Raumes verknüpft sich mit der Variationsrechnung eng. Die Extremalen $x^i = x^i(t)$ bzw. $x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$ des Variationsproblemes

$$\delta \int F(x, x')dt \quad \text{bzw.} \quad \delta \iint \cdots \int F(x, \partial x/\partial u) du^1 du^2 \ldots du^{n-1}$$

bei fester Berandung liefern uns diejenigen, welche wir die Bahnen (oder "paths") bzw. die minimalen Hyperflächen im FINSLERschen bzw. CARTANschen Raume nennen. Die ersten sind die Verallgemeinerung der geodätischen Linien im RIEMANNschen Raume und durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{0.1}$$

(1) T. OHKUBO [1]. Die Zahlen in eckigen Klammern bezeichne nsich auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Abhandlung.

gegeben. Die anderen sind die Verallgemeinerung der minimalen Hyperflächen im RIEMANNschen Raume, welche durch

$$(0.2) \qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} + \Gamma^i_{ab}\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0, \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, K)$$

gegeben sind. Die andere Verknüpfung mit der Analysis zeigen die Differentialgleichungen (0.1) und (0.2), daraus folgt das Problem, das gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungssystem geometrisch zu behandeln, d. h. die Geometrie von Bahnen (''paths'') oder von ''K-spreads'', die durch die Untersuchung der geodätischen Linien angeregt wären. Die Differentialgleichungssysteme (0.1) sowie (0.2) liefern uns das neue Problem, d. h. die Geometrisierung des gewöhnlichen bzw. partiellen Differentialgleichungssystems höherer Ordnung, die zuerst von E. CARTAN, A. KAWAGUCHI, H. HOMBU, S. HOKARI und T. SUGURI untersucht worden ist.

Ausserdem steht die Geometrie höherer Ordnung d. h. die Geometrie im Raume höherer Ordnung, in enger Beziehung mit dem ''sistema assoluto'' von G. VITALI(1) sowie mit der ''Geometria riemanniane di specie superiore'' von E. BOMPIANI(2) und E. BORTOLOTTI(3). Der Begriff von Extensoren, der zuerst von H. V. CRAIG(4) und sodann von A. KAWAGUCHI(5) aufgefasst worden ist, ist zur Untersuchung der Geometrie höherer Ordnung sehr zweckmässig und von einer grossen Bedeutung. Der Extensor ist offenbar ein geometrisches Objekt und wesentlich nichts anderes als ein besonderes von ''sistema assoluto'' von VITALI(6). Der Begriff von Extensoren wurde von A. KAWAGUCHI(7) auf den Fall von partiellen Ableitungen erweitert.

Das Hauptziel von den vorliegenden Abhandlung ist die Differentialgeometrie höherer Ordnung, d. h. die Geometrie in der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M_N(M; K)$ von Flächenelementen höherer Ordnung, zu behandeln. Zuerst möchte der Verfasser in Kapitel I als Vorbereitung einige Eigenschaften von verallgemeinerten Extensoren. Wir möchten uns in § 1 mit der Definition

(1) G. VITALI [1], [2].
(2) E. BOMPIANI [1].
(3) E. BORTOLOTTI [1], [2].
(4) H. V. CRAIG [1], [2], [3].
(5) A. KAWAGUCHI [1], [2], [3], [4].
(6) G. VITALI [1], [2].
(7) A. KAWAGUCHI [3].

der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M_N(M; K)$ von Flächenelement M-ter Ordnung beschäftigen. § 2 liefert die Erläuterung einiger nachträglich gebrauchten Identitäten und § 3 die erweiterten Transformationen von Koordinaten. Sodann definieren wir in § 4 die verallgemeinerten Exvektoren bzw. Extensoren, die kurz Exvektoren bzw. Extensoren heissen, und erwahnen in § 5 einige Sätze über die Exvektoren. Aus einem Exvektor können wir drei Arten von Exvektoren oder Pseudoexvektoren durch den Systeme von linearen Operatoren $\overset{H}{\mathfrak{S}}$ (§ 8), $\overset{H}{\mathfrak{Z}}$ (§ 6) und $\overset{H}{\mathfrak{Y}}$ (§ 7) erhalten. Es mag bemerkenswert sein, dass wir die Bestimmungszahlen des Exvektors $V^i{}_{a(s)}$ durch gewöhnlichen Vektoren $\overset{H}{V}{}^i{}_{b(H)}$ und ihre Ableitungen nach den Parametern darstellen können (§ 8). Wir skizzieren in Kapitel II die Übertragungslehre in dem metrischen Raume von K-dimensionalen Flächenelementen M-ter Ordnung. § 9 liefert die Erläuterung des Fundamentalextensors und § 10 die den CHRISTOFFELschen Symbolen. In § 11 wird eine exkovariante Differentiation eingeführt. Als besonderer Fall, nehmen wir den im L-dimensionalen euklidischen Raume eingebetteten Raum im Auge (Kapitel III). In diesem Kapitel, geben wir die Begriffe von Exfläche (§ 12) und Exflächennormale (§ 13). Die Exflächen werden in zweien Klassen klassifiziert (§ 14).

Hier möchte der Verfasser sich besonders für die lehrreichen Anweisungen des Herrn Prof. A. KAWAGUCHI herzlichst bedanken.

KAPITEL I. DIE N-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEIT VON FLÄCHENELEMENTEN HÖHERER ORDNUNG $M_N(M; K)$.

§ 1. *Die Mannigfaltigkeit* $M_N(M; K)$. Es sei X_N eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit, die auf ein System von N Koordinaten x^i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ bezogen ist, und unter einem Punkte verstehen wir ein System von N reellen Werten, welche N Variablen x^i annehmen. Wir führen K voneinander unabhängigen Parameter u^a $(a = 1, 2, \ldots, K)$ ein, die alle reellen Werte annehmen und vorläufig festgelegt sind. Dann wird jede Fläche in X_N mittels N passend gewählter Funktionen $x^i(u)$ dieser Parameter u^a durch die Gleichungen $x^i = x^i(u)$ gegeben. Einem Systeme der Werte u^a_o von u^a entspricht dann ein Punkt mit den Koordinaten $x^i(u_o)$ auf der Fläche.

In der vorliegenden Arbeit durchaus zu Vermeidung schwieriger analytischer Erörterung setzen wir voraus, dass die Funktionen $x^i(u)$ für alle Warte von den Parametern u^a in einem Bereich um die betreffenden Werte u_o^a von u^a analytisch regulär und die Werte der partiellen Ableitungen $\partial x^i/\partial u^a$ nicht alle verschwindend sind. In jedem Punkte der K-dimensionalen Fläche bestimmen die Grössen

$$(1.1)\quad \begin{cases} x^i = x^i(u), \quad p^i_a = \partial x^i/\partial u^a, \quad p^i_{a(2)} \equiv p^i_{a_1 a_2} = \partial^2 x^i/\partial u^{a_1}\partial u^{a_2}, \\ \ldots\ldots, \quad p^i_{a(M)} \equiv p^i_{a_1 a_2 \cdots a_M} = \partial^M x^i/\partial u^{a_1}\partial u^{a_2}\ldots\partial u^{a_M} \end{cases}$$

ein Flächenelement M-ter Ordnung. Adjungieren wir in jedem Punkte von X_N der $N\binom{K+M}{M}$ Werte von $x^i, p^i_a, \ldots, p^i_{a(M)}$, so kommt eine Mannigfaltigkeit $M_N(M;K)$ von Dimension $N\binom{K+M}{M}$ zustande, die aus allen K-dimensionalen Flächenelementen M-ter Ordnung $(x^i, p^i_a, \ldots, p^i_{a(M)})$ besteht. Die Menge von $N\binom{K+M}{M}$ Grössen $x^i, p^i_a, \ldots, p^i_{a(M)}$, welche mit einem Punkte x^i auf der Fläche assoziert werden, heisst die Koordinaten des erweiterten Punktes oder kurz Expunktes. Man legt dabei die Parameter u^a fest vor und lässt vorläufig seine Änderung nicht zu. Die Parameter u^a spielen somit hier eine wesentliche Rolle und sollen nicht durch anderen Parameter ersetzt werden. D. h. im allgemeinen verwandelt sich ein Flächenelement M-ter Ordnung bei einer Änderung der Parametrisierung in ein anderes Flächenelement M-ter Ordnung. In einem Punkte auf einer Fläche ergeben sich zwei Flächenelemente M-ter Ordnung entsprechend zwei verschiedenen Parametrisierungen.

§ 2. *Einige Formeln.* Einfachheitshalber schreiben wir die partiellen Ableitungen einer Funktion $F(u)$ von den Parametern u^a nach u^a in der Gestalt

$$F_{/a_1} = \frac{\partial F}{\partial u^{a_1}}, \quad F_{/a_1 a_2} \equiv F_{/a(2)} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^{a_1}\partial u^{a_2}}, \quad \ldots,$$

$$F_{/a_1 a_2 \cdots a_M} \equiv F_{/a(M)} = \frac{\partial^M F}{\partial u^{a_1}\partial u^{a_2}\ldots\partial u^{a_M}}\ ^{(1)}.$$

(1) Durch die geklammerte Zahl in einem Index (z. B. r in $a_{(r)}$) bezeichnen wir die Anzahl der voneinander verschiedenen Indizes, welche je einen zweiten Hilfsindex zu sich nehmen (z. B. $a_1, a_2, \ldots, a_r$). Danach schreiben wir so:

$$A_{(a_{(r)}B_{a_{(s)}}C_{a_{(t)}})} = A_{(a_1 a_2 \cdots a_r B_{a_r a_{r+1}} \cdots a_{r+s} C_{a_{r+s+1}} \cdots a_{r+s+t})}.$$

Da die Grösse $p^i_{a(t)}$ bezüglich $a_{(t)}$ symmetrisch sind, definieren wir den Operator $F^{a(s)}_{;i} = \dfrac{\partial F}{\partial p^i_{a(s)}}$, $s=0, 1, \ldots$ als $\dfrac{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_u!}{s!}\dfrac{\partial F}{\partial p^i_{a(s)}}$, wenn die Indizes $a_1, a_2, \ldots, a_s$ aus $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_u$ gleichen Indizes bestehen, während $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_u = s$. Noch allgemeiner

$$F^{a(s)}_{;\,i/b(t)} = \frac{\partial^t F^{a(s)}_{;\,i}}{\partial u^{b_1}\partial u^{b_2}\ldots\partial u^{b_t}} \quad \text{und} \quad F_{/a(s);\,i}^{\;\;b(t)} = \frac{\partial F_{/a(s)}}{\partial p^i_{b(t)}}$$

werden auch für eine Funktion F aufgenommen, wobei man setzt: $F^{a(0)}_{;\,i} = F^0_{;\,i} = F_{;i} = \dfrac{\partial F}{\partial x^i}$. So ist z. B. die folgende Schreibweise gestattet:

$$dF = \sum_{r=0}^{M} F^{a(r)}_{;\,i}\, dp^i_{a(r)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p^i_{a_1a_2\cdots a_r}}{\partial p^j_{b_1b_2\cdots b_r}} = \delta^i_j\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\ldots\delta^{b_r}_{a_r)} = \delta^i_j\delta^{b(r)}_{a(r)}\,.$$

Für späteren Zweck stellen wir einige einfache Formeln in unserer Schreibweise wieder vor, von denen die erste nichts anderes als die wohlbekannte LEIBNITZsche Formel ist. Seien A und B zwei beliebige Funktionen von u^a, so bestehen

$$(1.2)\qquad (AB)_{/a(r)} = \sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t} A_{/(a_1a_2\cdots a_{r-t}} B_{/a_{r-t+1}\ldots a_r)} = \sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t} A_{(a(r-t)} B_{/a(t))}$$

und

$$(1.3)\qquad AB_{/a(r)} = \sum_{t=0}^{r}(-1)^t\binom{r}{t}(A_{/(a(t)}B)_{/a(r-t)}\,.$$

Der Beweis dieser Formeln kann man leicht durch Induktion bezüglich r bekommen[1].

§ 3. *Die erweiterte Koordinatentransformation.* Wir führen eine Koordinatentransformation $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$ mit nicht verschwindender Determinante in die Mannigfaltigkeit X_N ein. Nach dieser Transformation, findet dann eine erweiterte Transformation für Flächenelemente z. B. M-ter Ordnung

$$(1.4)\qquad \begin{cases} x^\lambda = x^\lambda(x^i)\,,\ p^\lambda_{a_1} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\,p^i_{a_1}\,,\ p^\lambda_{a_1a_2} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\,p^i_{a_1a_2} + \dfrac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i\partial x^j}\,p^i_{a_1}p^j_{a_2}\,, \\ \ldots\,,\ p^\lambda_{a(M)} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\,p^i_{a(M)} + R^\lambda_{a(M)}(x,\, p_{(1)},\, \ldots,\, p_{(M-1)}) \end{cases}$$

(1) Vgl. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU [1], S. 24.

statt, bei welcher ein Flächenelement M-ter Ordnung $(x^i, p^i_{a_1}, \ldots, p^i_{a(M)})$ in das Flächenelement $(x^\lambda, p^\lambda_{a_1}, \ldots, p^\lambda_{a(M)})$ übergeht.

Über diese erweiterte Transformation (1.4) bestehen die folgenden Formeln[1] für $r \geqq t$:

$$\left(\frac{\partial p^\lambda_{a(r)}}{\partial x^i}\right)_{/b(t)} = \frac{\partial p^\lambda_{a(r)b(t)}}{\partial x^i}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r)}}{\partial p^i_{b(t)}} = \binom{r}{t}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\ldots\delta^{b_t}_{a_t)}\frac{\partial p^\lambda_{a_{t+1}\cdots a_r)}}{\partial x^i} = \binom{r}{t}\delta^{b(t)}_{(a(t)}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\right)_{/a_{(r-t)})} \tag{1.6}$$

und

$$\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r)}}{\partial p^i_{b(t)}} = \frac{r}{t}\delta^{b_1}_{(a_1}\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r-1))}}{\partial p^i_{b(t-1)}} = \frac{r!(t-u)!}{t!(r-u)!}\delta^{b(u)}_{(a(u)}\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r-u))}}{\partial p^i_{b(t-u)}}. \tag{1.7}$$

Da in (1.4) $p^\lambda_{a(r)}$ von höheren partiellen Ableitungen von x^i als r nicht abhängig ist, so ist

$$\frac{\partial p^\lambda_{a(r)}}{\partial p^i_{b(t)}} = 0 \qquad \text{für} \qquad t > r. \tag{1.8}$$

Die lineare Transformation mit der Koeffizientenmatrix $\left(\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r)}}{\bar\partial p^k_{b(t)}}\right)$ nennen wir die K-gliedrige erweiterte Transformation, wobei r, $t \leqq M$ und $\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r)}}{\bar\partial p^k_{b(t)}} = 0$ für $r < t$. Da die Determinante dieser erweiterten Transformation gleich der Potenz der Determinante $\left|\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\right|$ ist, so ist sie verschieden von Null. Deshalb existiert immer ihre umgekehrte Transformation mit der Koeffizientenmatrix $\left(\frac{\bar\partial p^k_{b(t)}}{\bar\partial p^\lambda_{a(r)}}\right)$. Es besteht dann

$$\frac{\bar\partial p^\lambda_{a(r)}}{\partial p^i_{b(t)}}\frac{\partial p^i_{b(t)}}{\partial p^\mu_{c(u)}} = \delta^\lambda_\mu\delta^{c(u)}_{a(r)}, \tag{1.9a}$$

wobei wir das Summationszeichen $\sum_{t=0}^{M}\sum_{b_1,b_2,\cdots,b_t=1}^{1,2,\ldots,K}\sum_{i=1}^{N}$ in der linken Seite auslassen. In dieser Arbeit lassen wir immer das Summationszeichen

(1) Vgl. A. KAWAGUCHI und H HOMBU [1], S. 26. In dem Falle $K = 1$ siehe H. V. CRAIG [1].

aus, wie üblich in der Tensor-analysis, wenn dieselben kleinen Buchstaben als Indizes gerade zweimal d. h. einmal oben und einmal unten erscheinen, insofern nichts anderes gesagt wird.

Ausserdem seien

$$x^{\mathfrak{i}} = x^{\mathfrak{i}}(x^{\lambda}), \qquad x^{\lambda} = x^{\lambda}(x^{\mathfrak{k}}),$$

dann besteht

$$\frac{\bar{\partial} p^{i}_{a(r)}}{\bar{\partial} p^{\mathfrak{k}}_{c(t)}} = \frac{\partial p^{i}_{a(r)}}{\partial p^{\lambda}_{b(s)}} \frac{\partial p^{\lambda}_{b(s)}}{\partial p^{\mathfrak{k}}_{c(t)}} . \tag{1.9b}$$

§ 4. *Der Extensor.* Unter dem K-gliedrigen Exvektor oder nur dem Exvektor verstehen wir den Vektor in Bezug auf die K-gliedrige erweiterte Transformation, z. B. die Komponenten des exkontra- bzw. exkovarianten Exvektor $V^{i}_{a(t)}$ bzw. $W^{a(t)}_{j}$ vom Grad M transformieren sich bei der K-gliedrigen erweiterten Transformation folgendermassen:

$$V^{\lambda}_{a(t)} = V^{j}_{b(s)} \frac{\bar{\partial} p^{\lambda}_{a(t)}}{\partial p^{j}_{b(s)}} \quad \text{bzw.} \quad W^{a(t)}_{\lambda} = W^{b(s)}_{j} \frac{\bar{\partial} p^{j}_{b(s)}}{\partial p^{\lambda}_{a(t)}},$$

$$s, t = 0, 1, \ldots, M; \; i, j = 1, 2, \ldots, N; \; a, b = 1, 2, \ldots, K.$$

Wir immer setzen voraus, dass $V^{i}_{a(r)}$ in Bezug auf die Zeigern $a_{(r)}$ symmetrisch ist. Z. B. die Bestimmungszahlen des gemischten Extensor $T^{i}_{a(t)}{}^{b(r)}_{j}{}_{k}$ dritter Stufe, der in Bezug auf $\binom{i}{a(t)}$ exkontravariant vom Grad G, auf $\binom{b(r)}{j}$ exkovariant vom Grad G' und auf k kovariant ist, werden nach der Regel transformiert:

$$T^{\lambda}_{a(t)}{}^{b(r)}_{\mu}{}_{\nu} = \frac{\bar{\partial} p^{\lambda}_{a(t)}}{\partial p^{i}_{c(s)}} \frac{\partial p^{j}_{d(p)}}{\partial p^{\mu}_{b(r)}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{\nu}} T^{i}_{c(s)}{}^{d(p)}_{j}{}_{k}, \tag{1.10}$$

$$t, s = 0, 1, \ldots, G; \quad r, p = 0, 1, \ldots, G'.$$

Für einen Extensor höherer Stufe ergibt sich somit mindestens eine grösste Gradzahl, die wir die Gradzahl des betreffenden Extensors nennen. Ein Extensor vom Grad Null ist nichts anderes als ein gewöhnlicher Tensor. Im allgemeinen werden die $N \prod_{\lambda=1}^{A} \binom{K+G_{\lambda}}{G_{\lambda}}$ $\times \prod_{\mu=1}^{B} \binom{K+G'_{\mu}}{G'_{\mu}}$ Grössen $T^{i_1 \; i_2 \; \ldots i_A \; b(s_1) \; b(s_2) \ldots b(s_B)}_{a(t_1) \; a(t_2) \ldots a(t_A) j_1 \quad j_2 \quad \ldots j_B}$ $(i_{\lambda}, j_{\mu} = 1, 2,$

$\ldots, N;\ t_\lambda = 0, 1, \ldots, G_\lambda;\ s_\mu = 0, 1, \ldots, G'_\mu$) die Bestimmungszahlen eines relativen gemischten Extensors $(A+B)$-ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$ genannt, der in Bezug auf $\binom{i_\lambda}{a(t_\lambda)}$ bzw. $\binom{b(s_\mu)}{j_\mu}$ exkontra- bzw. exkovariant vom Grad G_λ bzw. G'_μ ist, wenn bei jeder K-gliedrigen erweiterten Transformation sie sich transformieren folgendermassen:

$$T^{\lambda_1 \ldots \lambda_A \; b(s_1)\ldots b(s_B)}_{a(t_1)\ldots a(t_A)\mu_1 \ldots \mu_B} = \Delta^{-\mathfrak{k}} \prod_{\alpha=1}^{A} \frac{\partial \bar{p}^{\lambda_\alpha}_{a(t_\alpha)}}{\partial \bar{p}^{j_\alpha}_{c(t_\alpha)}} \prod_{\beta=1}^{B} \frac{\partial \bar{p}^{j_\beta}_{d(s_\beta)}}{\partial \bar{p}^{\mu_\beta}_{b(s_\beta)}} T^{j_1 \ldots j_A \; d(s_1)\ldots d(s_B)}_{c(t_1)\ldots c(t_A) j_1 \ldots j_B},$$

wobei $\Delta = \text{Det.} \left| \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \right|$ gesetzt ist[1].

Wenn die höchste Ordnung der partiellen Ableitungen, die in der Bestimmungszahlen des Extensors enthalten werden, M ist, heissen wir M die Ordnung des Extensors. Einfachheitshalber bezeichnet man den relativen Extensor $(A+B)$-ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, Grad G und der Ordnung M als den relativen Extensor mit der Charakteristik $(A+B, \mathfrak{k}, G, M)$[1].

Ein relativer Extensor mit der Charakteristik $(0, 0, 0, 0)$ ist nichts anderes als ein im Punkte x^i definierter Skalar und ein relativer Extensor mit der Charakteristik $(A+B, 0, 0, M)$ ist ein Tensor, der zum Flächenelemente M-ter Ordnung adjungiert ist.

$F^{a(s)}_{:i}$ bzw. $V^i/_{a(s)}$ sind die Bestimmungszahlen eines exko- bzw. exkontravarianten Exvektors, während F ein differenzierbarer Skalar ist und V^i die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen differenzierbaren Vektors sind. Aber $F^{a(r)\,b(s)}_{:i\;:j}$ sind nicht die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors zweiter Stufe, sondern transformieren sie sich folgendermassen unter der erweiterten Koordinatentransformation

$$F^{a(r)\,b(s)}_{:i\;:j} = F^{c(u)\,d(v)}_{:\lambda\;:\mu} \frac{\partial \bar{p}^{\lambda}_{c(u)}}{\partial \bar{p}^{i}_{a(r)}} \frac{\partial \bar{p}^{\mu}_{d(v)}}{\partial \bar{p}^{j}_{b(s)}} + F^{c(u)}_{:\lambda} \frac{\partial^2 \bar{p}^{\lambda}_{c(u)}}{\partial \bar{p}^{i}_{a(r)} \partial \bar{p}^{j}_{b(s)}}. \tag{1.11}$$

Das Eliminationsverfahlen der zweiten Ableitungen aus (1.11) werden mittels der Einführung irgendeiner affinen Übertragung ge-

(1) A. KAWAGUCHI [3].

führt wie im Tensorkalkül. Untersuchend (1.10) und zurückrufend dass $\frac{\bar{\partial} p^{j}_{d(p)}}{\bar{\partial} p^{\mu}_{b(r)}}$ verschwindet, wenn r grösser als p ist, ersehen wir dass die Bestimmungszahlen von $T^{\lambda}_{a(t)}{}^{b(s)}_{\mu\ \nu}$, für die s gleich zu oder grösser als S ist, abhängig sind nur von den analog bezettelten Bestimmungszahlen $T^{i}_{c(s)}{}^{d(p)}_{j\ k}$ d. h. von solchen, für die p nicht kleiner als S ist. Die Sammelung aller solcher Bestimmungszahlen nennen wir die Bestimmungszahlen eines Extensors mit der reduzierten Reihe. Der kovariante Vektor $F_{i}^{a(M)}$ ist ein Extensor mit der reduzierten Reihe ($S = M$) und auch die Grössen $F_{i}^{a(M-1)}$, $F_{i}^{a(M)}$ ($S = M-1$). Gleicherweise, kann die Reihe von der Überschrift reduziert werden. Nämlich, zurücksichtigend (1.10), bestätigen wir, dass die Grössen $T^{\lambda}_{a(t)}{}^{b(r)}_{\mu\ \nu}$, für die t gleich zu oder kleiner als A ist, nur von den entsprechenden Bestimmungszahlen $T^{i}_{c(s)}{}^{d(p)}_{j\ k}$ ($s \leqq A$) abhängig sind.

Ein besonderes Beispiel wird uns durch die Ableitungen von einem kontravarianten Vektor V^{i} liefert, d. h.

$$V^{i}_{/a(s-A)} = \sum_{r-A}^{M} V^{\lambda}_{/c(r-A)} \frac{\bar{\partial} p^{i}_{a(s-A)}}{\bar{\partial} p^{\lambda}_{c(r-A)}}, \qquad M \geqq s \geqq A .$$

Wenn A gleich M ist, ist die Reihe vollständig reduziert und wird die obere Gleichung eine Tensortransformation. Aber eine exkontravarianter Exvektor mit der reduzierten Reihe ist wesentlich nichts anders als ein exkontravarianter Exvektor.

Obgleich die Differentiation von (1.10) zweite Ableitungen hervorbringt, können wir dieses Verfahlen auf eine beschränkte Reihe verwenden, Extensoren mit reduzierten Reihe zu konstruieren. Zur Erklärung betrachten wir den folgenden Satz, der sogleich verallgemeinert ist.

Satz 1. Wenn $T^{i}_{a(r)}{}^{b(s)}_{j}$ die Bestimmungszahlen des Extensors mit der reduzierten Reihe ($r \leqq A$, $s \geqq B$) sind, dann konstruiert, für $t > A$ und $t > M-B$ gleichzeitig, die Menge der Grössen $T'^{i}_{a(r)}{}^{b(s)}_{j\ ;\ k}{}^{c(t)}$ einen Extensor mit der reduzierten Reihe.

§ 5. *Einige Sätze.* Für einen exkontravarianten Exvektor $V^{i}_{a(t)}$ vom Grad G und einen exkovarianten Exvektor $W^{a(t)}_{i}$ vom Grad G sind $\binom{K+G}{G}$ Arten der Überschiebungen vorhanden, während für die gewöhnlichen Vektoren nur eine Art der Überschiebung existiert. D. h.

Die Grösse

$$\rho^{a(t)} = \sum_{s=t}^{G} \binom{s}{t} V^{i}_{a(s-t)} W^{a(s-t)a(t)}_{i} \tag{1.12}$$

für $t = 0, 1, \ldots, G$ hat die Skalareigenschaft.

Die Existenz der Extensoren mit der reduzierter Reihe deutet uns auf die Möglichkeit der Konstruktion von den Invarianten und Extensoren durch Überschiebung auf einer reduzierten Reihe hin. In der Tat, z. B.

Satz 2. Wenn $T^{i}_{a(r)\,b(s-A)\,k}{}^{j}{}^{a(t)}_{l}$ die Bestimmungszahlen eines Extensors mit der reduzierten Reihe: $A \leqq s \leqq M$, $A \leqq t \leqq M$ sind, dann sind die Grössen

$$\sum_{s=A}^{M} \binom{s}{A} T^{i}_{a(r)\,b(s-A)\,k}{}^{j}{}^{b(s-A)b(A)}_{j}$$

die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors, der kovariant erster Stufe und exkontravariant erster Stufe ist.

Umgekehrt ist das Quotientengesetz für Überschiebung auf einer reduzierten Reihe folgendermassen erklärt:

Satz 3. Wenn, für einem beliebigen differenzierbaren Vektor V^{i}, die Grössen

$$\sum_{s=A}^{M} \binom{s}{A} T^{j\,a(r)\,b(A)}_{i\qquad k}{}^{b(s-A)} V^{k}_{/b(s-A)}$$

die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors von der durch freien Zeigern angegebenen Art sind, dann sind die $T^{j\,a(r)\,b(s)}_{i\qquad k}$ die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors dritter Stufe mit der reduzierten Reihe.

Satz 4. Die Menge der Grössen

$$Z^{a(r)}_{i} = \frac{1}{r} \sum_{s=r}^{M} (-1)^{s-r} F^{a(s)}_{i\,/a(s-r)}, \qquad 1 \leqq r \leqq M$$

konstruiert die Bestimmungszahlen eines Exvektors mit der reduzierten Reihe.

§ 6. *Die Operatoren* $\overset{H}{\beta}$.

Satz 5. $V^{i}_{a(t)}$ seien die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann definieren die Grössen

$$(1.13)\qquad \overset{H}{\mathfrak{Z}}V^{i}_{a(t)} \equiv \overset{H}{\mathfrak{Z}}{}^{i}_{a(t)}(V) = \sum_{r=0}^{t}\binom{t}{r}2^{Hr}(1-2^{H})^{t-r}V^{i}_{(a(r)/a(t-r))}\,,$$

$$t = 0,\quad 1,\quad \ldots,\quad G$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots$, einen exkontravarianten Exvektor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M+G)$.

Satz 6. Wenn die Grössen $W^{a(t)}_{i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ sind, so sind die Grössen

$$(1.14)\qquad \overset{H}{\mathfrak{Z}}W^{a(H)a(t)}_{i} \equiv \overset{H}{\mathfrak{Z}}{}^{a(H)a(t)}_{i}(W)$$

$$= \sum_{r=0}^{G-H-t}(-1)^{r}\binom{H-1+r}{H-1}W^{a(t)a(H+r)}_{i\quad /a(r)}\,,$$

$$t = 0,\quad 1,\quad \ldots,\quad G-H$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, G$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+G-H)$.

Beweis. Wir wollen zunächst den Satz für $H = 1$ beweisen. Für $H = 1$ ergeben sich die Rekursionsformeln

$$(1.15)\qquad \overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{a(1)a(t)}_{i}(W) = W^{a(1)a(t)}_{i} - (\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{a(1)a(t)c}_{i}(W))_{/c}\,,\quad t = 0, 1, \ldots, G-1.$$

Vorausgesetzt

$$(1.16)\qquad \overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{ab(t)}_{\lambda}(W) = \sum_{r=0}^{G-1}\frac{\partial p^{i}_{c(r)}}{\partial p^{\lambda}_{b(t)}}\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{ac(r)}_{i}(W)\,,$$

dann bekommt man durch Induktion bezüglich t

$$\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{ab(t-1)}_{\lambda}(W) = W^{ab(t-1)}_{\lambda} - (\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{ab(t-1)c}_{\lambda}(W))_{/c} = \frac{\partial p^{i}_{d(r-1)}}{\partial p^{\lambda}_{b(t-1)}}\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{ad(r-1)}_{i}(W)\,.$$

Wegen $W^{a(G)}_{i} = \overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{a\,a(G-1)}_{i}(W)$, ist es selbstverständlich klar, dass (1.16) für $t = G-1$ besteht. Deswegen sind $\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{a\,a(t)}_{i}(W)$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors vom Grad $G-1$. Zunächst beweisen wir den Satz für einen beliebigen Wert von H durch Induktion bezüglich H. Darum setzen wir voraus, dass $\overset{H}{\mathfrak{Z}}{}^{a(H)\,b(t)}_{i}(W)$ einen erkovarianten Exvektor vom Grad $G-H$ auf-

bauen, und ersetzen statt $W_i^{a(t)}$ in $\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{a\,b(t)}_{i}(W)$ die entsprechenden Bestimmungszahlen des exkovarianten Exvektors $\overset{H}{\mathfrak{Z}}{}^{a(H)\,b(t)}_{i}(W)$, dann ist

$$\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{a}_{H+1}\overset{H}{\mathfrak{Z}}W^{a(H)a(s)}_{i} = \sum_{r=0}^{G-H-s-1}(-1)^r(\overset{H}{\mathfrak{Z}}W^{a(H)a}_{i}{}_{H+1}{}^{a(s)a(r)})_{/a(r)}$$

$$= \overset{H+1}{\mathfrak{Z}}W^{a(H+1)a(s)}_{i},$$

die nach dem vorhergehenden Beweise die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors vom Grad $G-H-1$ sein müssen. Da $\overset{H}{\mathfrak{Z}}{}^{a(H)\,b(0)}_{i}(W)$ als die höchste partiellen Ableitung $p^{i}_{a(M\,G-H)}$ enthält, ist die Ordnung des Exvektors (1.14) bekanntlich $M+G-H$. W. z. b. z.

An Stelle von $W_i^{a(t)}$ in (1.14) setzt man $f_{;i}^{a(t)}$, wobei f eine Skalar von der Ordnung M andeutet, dann ergibt sich

Zusatz. *f sei ein Skalar von der Ordnung M, dann sind*

$$(1.17)\qquad \overset{H}{\mathfrak{Z}}f_{;i}^{a(H)a(s)} = \sum_{r=0}^{M-H-s}(-1)^r\binom{H-1+r}{H-1}f_{;i}^{a(H)a(s)a(r)}{}_{/a(r)}$$

$$= \sum_{u=H+s}^{M}(-1)^{u-H-s}\binom{u-s-1}{H-1}f_{;i/a(u-H-s)}^{a(u)},$$

$$H = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$$

die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, M-H, 2M-H)$.

Von (1.14) kann man die analogen Rekursionsformeln wie (1.16) herleiten:

$$(1.18)\qquad \overset{H}{\mathfrak{Z}}W^{a(H)a(s-1)}_{i} = \overset{H-1}{\mathfrak{Z}}W^{a(H-1)a}_{i}{}_{H}{}^{a(s-1)} - \overset{H}{\mathfrak{Z}}W^{a(H)a(s)}_{i}{}_{/a_s},$$

$$s = 0,\ 1,\ \ldots,\ G-H.$$

Wir haben ohne weiteres:

Satz 7. Die Operatoren $\overset{H}{\mathfrak{Z}}$ sind vertauschbar, linear und assoziativ.

§ 7. *Die Operatoren* $\overset{H}{\mathfrak{Y}}$. Ausser den linearen Operatoren $\overset{H}{\mathfrak{Z}}$ die im obigen eingeführt sind, wollen wir noch eine andere Art von linearen Operatoren $\overset{H}{\mathfrak{Y}}$ einführen, die auch auf jeden Exvektor an-

wendbar sind und die durch die folgenden zwei Sätze vorgestellt werden.

Satz 8. Die Grössen

$$(1.19)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} V^i_{a(s)} = s V_{(a(s-1)\overset{i}{/}a_s)} + (\bar{G}-s+1) V^i_{a(s)} & \text{für } s = 1, 2, \ldots, \bar{G}, \\ \mathfrak{H} V^i_0 = (\bar{G}+1) V^i_0, \quad \mathfrak{H} V^i_{a(\bar{G}+1)} = (\bar{G}+1) V_{(a(\bar{G})\overset{i}{/}a_{\bar{G}+1})} \end{cases}$$

definieren einen exkontravarianten Exvektor mit der Charakteristik $(1, 0, \bar{G}+1, M+1)$; während $V^i_{a(s)}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ sind, wobei $\bar{G} \leqq G$.

Nun können wir den folgenden Zusatz durch Induktion bezüglich H beweisen.

Zusatz. Die Grössen

$$(1.20)\quad \overset{H}{\mathfrak{H}} V^i_{a(s)} \equiv \overset{H}{\mathfrak{H}}{}^i_{a(s)}(V) = H! \sum_{r=0}^{H} \binom{s}{r} \binom{\bar{G}+H-s}{H-r} V^i_{(a(s-r)/a(r))}$$

$$\text{für } s = H, H+1, \ldots, \bar{G},$$

$$= H! \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} \binom{\bar{G}+H-s}{H-r} V^i_{(a(s-r)/a(r))}$$

$$\text{für } s = 0, 1, \ldots, H,$$

$$= H! \sum_{r=s-\bar{G}}^{H} \binom{s}{r} \binom{\bar{G}+H-s}{H-r} V^i_{(a(s-r)/a(r))}$$

$$\text{für } s = \bar{G}, \bar{G}+1, \ldots, \bar{G}+H$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, \bar{G}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, \bar{G}+H, M+H)$, wobei $\bar{G} \leqq G$.

Über den exkovarianten Exvektor können wir einen analogen Operator definieren. Nämlich erhält man den

Satz 9. Die Grössen

$$(1.21)\quad \mathfrak{H} W_i^{a(s)} \equiv \mathfrak{H}_i^{a(s)}(W) = (s+1)\{ W_i^{a(s)b}{}_{/b} + W_i^{a(s)} \},$$

$$s = 0, 1, \ldots, G$$

definieren einen exkovarianten Exvektor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M+1)$, während $W_i^{a(s)}$ die Bestimmungszahlen eines ex-

kovarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ sind, wobei $W^{a(G+1)} = 0$ gesetzt ist.

Nach der Definition von Operatoren $\overset{H}{\nabla}$, kann man auch ohne weiteres behaupten:

Satz 10. Die Operation $\overset{H}{\nabla}$ sind vertauschbar, linear und assoziativ.

Satz 11. Wenn $V^i_{a(s)}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Exvektors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ sind und f ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung M ist, so bilden die Grössen

$$(1.22)\quad \overset{H}{\nabla}{}^{*} V^i_{a(s)} = f \overset{H}{\nabla}{}_{a(s)}(f^{-1}V)$$
$$= \overset{H}{\nabla} V^i_{a(s)} - \sum_{l=1}^{H} \binom{s}{l} l! \binom{H}{l} f^{-1} f_{/(a(l)} \overset{H-l}{\nabla}{}^{*} V^i_{a(s-l))}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, G$ einen exkontravarianten relativen Exvektor mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G+H, M+H)$.

§ 8. *Die Überschiebungen der Exvektoren.* Aus einem exkontravarianten oder exkovarianten Exvektor können wir den Pseudoexvektor oder Exvektor vom niederen Grad mittels Differentiation nach dem Parameter u^a herleiten, d. h. haben wir den[1]

Satz 12. $V_{a(t)}$, $t = 0, 1, \ldots, G$, seien die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann definieren die Grössen

$$(1.23)\quad \overset{H}{\Im}{}^{i}_{a(H+s)}(V) \equiv \overset{H}{\Im} V^i_{a(H+s)} = \sum_{t=0}^{H} (-1)^{H-t} \binom{H}{t} V^i_{(a(s+t)/a(H-t))},$$
$$s = 0, 1, \ldots, G-H$$

einen exkontravarianten Pseudoexvektor mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+H)$ und von der Klasse H[1].

Zusatz. $V^i_{a(t)}$ seien die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann sind die Grössen

$$\overset{H}{\Im} V^i_{b(H)} \equiv \overset{H}{\Im}{}^{i}_{b(H)}(V) = \sum_{t=0}^{H} (-1)^{H-t} \binom{H}{t} V^i_{(b(t)/b(H-t))}$$

(1) Vgl. A. KAWAGUCHI [3] und T. SUGURI [1].

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen kontravarianten Vektors von der Ordnung $M+H$.

Satz 13. Wenn $W_i^{a(t)}$, $t = 0, 1, \ldots, G$, die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ sind, dann definieren die Grössen

$$(1.24)\quad \overset{H}{\mathfrak{S}} W_i^{a(s)} \equiv \overset{H}{\mathfrak{S}}{}_i^{a(s)}(W) = H! \sum_{t=0}^{H} (-1)^t \binom{s+t}{t} \binom{G-s-t}{G-H-s} W_i^{a(s)c(t)}{}_{/c(t)}$$

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ einen exkovarianten Exvektor mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+H)$.

Zusatz. $W_i^{a(t)}$ seien die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann sind die Grössen

$$\overset{H}{\mathfrak{S}} W_i^{a(G-H)} = \overset{H}{\mathfrak{S}}{}_i^{a(G-H)}(W) = H! \sum_{t=0}^{H} (-1)^t \binom{G-H+t}{t} W_i^{a(G-H)c(t)}{}_{/c(t)}$$

$$= (-1)^{G-H} H! \sum_{s=G-H}^{G} (-1)^s \binom{s}{G-H} W_i^{a(G-H)c(s-G+H)}{}_{/c(s-G+H)}$$

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen kovarianten Vektors von der Ordnung $M+H$.

Für einen exkontravarianten Exvektor $V^i_{a(s)}$ und einen exkovarianten Exvektor $W_i^{a(s)}$ mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, hat man $\binom{K+G}{G}$ Arten der Überschiebungen, d. h.

$$(1.12)\quad \rho^{a(T)} = \sum_{s=T}^{G} \binom{s}{T} V^i_{a(s-T)} W_i^{a(s-T)a(T)}, \quad T = 0, 1, \ldots, G.$$

Wir können beweisen, dass diese Skalar $\rho^{a(T)}$ durch die Skalarprodukte der aus den Exvektoren abgeleiteten Vektoren völlig ausdrückbar sind.

Aus einem exkovarianten Exvektor $V^i_{a(s)}$ mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ können wir $\binom{K+G}{G}$ kontravariante Vektoren $\overset{H}{V}{}^i_{b(H)}$ $(H = 0, 1, \ldots, G)$ mittels des Zusatzes von Satz 12 herleiten:

$$(1.25)\quad \overset{H}{V}{}^i_{b(H)} \equiv \overset{H}{\mathfrak{S}} V^i_{b(H)a(0)} = \sum_{t=0}^{H} (-1)^{H-t} \binom{H}{t} V^i_{(b(t)\,b(H-t))}.$$

Umgekehrt kann man die Bestimmungszahlen des Exvektors $V^i_{a(s)}$ durch diese Vektoren und ihre Ableitungen nach den Parametern

darstellen, d. h. wir haben den

Satz 14. Für einen exkontravarianten Exvektor $V^i_{a(s)}$ besteht

$$V^i_{a(s)} = \sum_{R=0}^{s} \binom{s}{R} (\overset{R}{V}{}^i_{(a(R))})_{/a(s-R))} . \tag{1.26}$$

Beweis. Wenn $\overset{R}{V}{}^i_{a(R)}$ auf der rechten Seite von (1.26) mit (1.25) ersetzt wird, dann erhält man

$$\sum_{R=0}^{s} \binom{s}{R} (\overset{R}{V}{}^i_{(a(R))})_{/a(s-R))} = \sum_{u=0}^{s} \left\{ \sum_{R=u}^{s} (-1)^{R-u} \binom{s}{R} \binom{R}{u} \right\} V^i_{(a(u)/a(s-u))} = V^i_{a(s)} ,$$

da $\sum_{R=u}^{s} (-1)^{R-u} \binom{s}{R} \binom{R}{u} = \delta^s_u$ ist.

Die analoge Formel besteht auch für den exkovarianten Exvektor $W^{a(s)}_i$. D. h. der Zusatz von Satz 13 liefert uns $\binom{K+G}{G}$ gewöhnliche kovariante Vektoren

$$\overset{H}{W}{}^{a(G-H)}_i = \frac{1}{H!} \overset{H}{\mathfrak{E}} W^{a(G-H)}_i \tag{1.27}$$

$$= \sum_{t=0}^{H} (-1)^t \binom{G-H+t}{t} W^{a(G-H)c(t)}_{i\ /c(t)} ,$$

$$H = 0, 1, \ldots, G$$

für jeden exkovarianten Exvektor $W^{a(s)}_i$ mit der Charakteristik (1, 0, G, M).

An Stelle von Satz 14 haben wir den

Satz 15. Die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors $W^{a(s)}_i$ sind folgendermassen ausdrückbar

$$W^{a(s)}_i = \sum_{r=0}^{G-s} \binom{s+r}{r} (\overset{G-s-r}{W}{}^{a(s+r)}_i)_{/a(r)} . \tag{1.28}$$

Nun haben wir den folgenden Satz.

Satz 16. Jeder Skalar $\rho^{a(r)}$, der für zwei Exvektoren $V^i_{a(s)}$ uud $W^{a(s)}_i$ durch (1.12) definiert wird, ist immer durch die Skalarprodukte der Vektoren $\overset{H}{V}{}^i_{a(H)}$ und $\overset{L}{W}{}^{a(G-L)}_i$ und ihre Ableitungen folgendermassen darstellbar:

$$(1.29)\quad \rho^{a(\Gamma)} = \sum_{r=0}^{G-\Gamma} \binom{I'+r}{r} V^{i}_{a(r)} W^{a(\Gamma+r)}_{i}$$

$$= \sum_{r=0}^{G-\Gamma} \sum_{u=r}^{G-\Gamma} \binom{I'+r}{r} \binom{\Gamma+u}{u-r} S^{a(\Gamma+u)}_{(a(r)}(r,\ G-I'+u)_{/a(u-r))}\ ,$$

wobei

$$S^{a(\Gamma+u)}_{a(r)}(r,\ G-I'-u) = \overset{r}{V}{}^{i}_{a(r)} \overset{G-\Gamma-u}{W}{}^{a(\Gamma+u)}_{i}$$

gesetzt ist.

KAPITEL II. DIE ÜBERTRAGUNGSLEHRE IN DEM METRISCHEN RAUME VON K-DIMENSIONALEN FLÄCHENELEMENTEN HÖHERER ORDNUNG.

§ 9. *Der Fundamentalextensor.* Die Geometrie, die so weit in der Entwicklung von der Exvektoranalysis untersucht worden ist, ist die Geometrie der Lage. In der Geometrie gibt es keine Basis für die Determination der Grösse noch für die Vergleichung der Richtungen auf zwei verschieden erweiterten Punkte (Expunkte). In dem vorliegenden Kapitel wollen wir die Grösse und den Parallelismus definieren und das Resultat dieser Definitionen entwickeln.

Wir nehmen als die Basis der Metrik vom Raume eine reelle fundamentale quadratische Differentialform

$$(2.1)\qquad ds^2 = g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\, dp^{i}_{a(r)} dp^{j}_{b(s)}\ ,$$

wobei die Grössen $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ die Funktionen von den Flächenelementen x^i, $p^i_{a(1)}$, ..., $p^i_{a(M)}$ sind und symmetrisch, d. h. $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} = g^{b(s)\,a(r)}_{j\quad i}$ und die Determinante $g = \text{Det.}\,|\,g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\,|$ nicht identisch verschwindend vorausgesetzt ist. Übrigens, in der $N\binom{K+M}{M}$-dimentionalen Determinante $|\,g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\,|$, laufen $^{a(r)}_{i}$ und $^{b(s)}_{j}$ über die Werte $^{a(0)}_{1}$, $^{a(0)}_{2}$, ..., $^{a(0)}_{n}$; $^{a(1)}_{1}$, $^{a(1)}_{2}$, ..., $^{a(1)}_{n}$; ...; $^{a(M)}_{1}$, $^{a(M)}_{2}$, ..., $^{a(M)}_{n}$ durch.

Da ds eine Invariante sein muss, folgt, dass die Grössen $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors zweiter Stufe sind. Deshalb führen wir die Definition ein:

Definition. Der Extensor $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ bzw. der Ausdruck $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} \times dp^{i}_{a(r)}\, dp^{j}_{b(s)}$ wird der metrische Extensor (oder der Fundamental-

extensor) bzw. die fundamentale quadratische Differentialform geheissen. Die Mannigfaltigkeit $M_N(M; K)$, in der die Metrik (2.1) eingeführt ist, wird durch $V_N(M; K)$ bezeichnet.

Die Bedeutung der Gleichung (2.1) ist, dass ds, die Länge des exkontravarianten Exvektors $dp^i_{a(r)}$ ist. Wenn $\lambda^i_{a(r)}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Exvektors vom Grad M sind, dann ist die Grösse λ, die durch

$$\lambda^2 = g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\lambda^i_{a(r)}\lambda^j_{b(s)} \tag{2.2}$$

gegeben wird, eine Invariante, welche als die Grösse des Exvektors definiert wird. Wenn wir das inverse System der $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ mit $g^{i\,j}_{a(r)\,b(s)}$ bezeichnen, dann erhalten wir

$$g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\,g^{k\quad j}_{c(t)\,b(s)} = \delta^k_i\,\delta^{a(r)}_{c(t)}. \tag{2.3}$$

Seien $\lambda^i_{a(r)}$ die Bestimmungszahlen eines beliebigen exkovarianten Exvektors, so bauen $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\lambda^i_{a(r)}$ einen beliebigen exkovarianten Exvektor, der mit $\mu^{b(s)}_j$ bezeichnet wird. Wegen (2.3) ergibt sich

$$g^{k\quad j}_{c(t)\,b(s)}\mu^{b(s)}_j = g^{k\quad j}_{(c)t\,b(s)}\,g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\lambda^i_{a(r)} = \lambda^k_{c(t)}.$$

Da $\mu^{b(s)}_j$ die Bestimmungszahlen eines beliebigen exkovarianten Exvektors sind, erhalten wir als das Resultat vom Satz 3 den Satz:

Wenn $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ die Bestimmungszahlen des symmetrischen exkovarianten Exvektors zweiter Stufe sind, so liefert das inverse System von $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ die Bestimmungszahlen des exkontravarianten Extensors. Es ist klar, dass in derselben Weise, wenn $g^{i\,j}_{a(r)\,b(s)}$ die Bestimmungszahlen des symmetrischen exkontravarianten Extensors zweiter Stufe sind, das inverse System von $g^{i\,j}_{a(r)\,b(s)}$ den exkovarianten Extensor zweiter Stufe baut.

Ohne weiteres erhält man die vom symmetrischen Extensor zweiter Stufe und seinem Konjugierten eingeführte Invariante

$$g^{i\quad j}_{a(r)\,b(s)}\,g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} = N\binom{K+M}{M}. \tag{2.4}$$

Vermöge dem symmetrischen exkovarianten Extensor $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$

und seinem Konjugierten $g^{i}_{a(r)\,b(s)}$, definiert man, wie üblich, das Hinauf- und Herunterziehen der Zeiger und dann kann man von exkontravarianten und exkovarianten Komponenten eines Exvektors sprechen u. s. f.

Von der Regel für Multiplikation der Determinante und von der Transformationsformel

$$g^{a(r)\,b(s)}_{\lambda\quad\mu} = g^{c(u)\,d(v)}_{i\quad j}\frac{\partial p_{c(u)}^{i}}{\partial p_{a(r)}^{\lambda}}\frac{\partial p_{d(v)}^{j}}{\partial p_{b(s)}^{\mu}} \tag{2.5}$$

folgt, dass

$$g' = g\left|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{\lambda}}\right|^{2\binom{K+M}{M}}, \tag{2.6}$$

während g' die Determinante $|\,g^{a(r)\,b(s)}_{\lambda\quad\mu}\,|$ ist.

Zuletzt, wenn $\lambda^{a(r)}_{i}$ die Bestimmungszahlen eines beliebigen exkovarianten Exvektors sind und $\lambda^{i}_{a(r)}$ solche des assoziierten Exvektors vermöge $g^{i}_{a(r)\,b(s)}$ sind, d. h. $\lambda^{i}_{a(r)} = g^{i}_{a(r)\,b(s)}\,\lambda^{b(s)}_{j}$, dann ergibt sich:

$$\lambda^{2} = g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\lambda^{i}_{a(r)}\lambda^{j}_{b(s)} = g^{i}_{a(r)\,b(s)}\lambda^{a(r)}_{i}\lambda^{b(s)}_{j}\,.$$

§ 10. *CHRISTOFFELLsche Symbole und ihre Beziehungen.* Wir beobachten den Fundamentalextensor zweiter Stufe $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ und den konjugierten Extensor $g^{i}_{a(r)\,b(s)}$ und definieren die zwei folgenden Ausdrücke, die in Zukunft sehr anwendbar sein werden. Sie sind

$$\begin{aligned}\left[{}^{a(r)\,c(t)}_{i\quad k},\,{}^{b(s)}_{j}\right] &\equiv \Gamma^{a(r)\,b(s)\,c(t)}_{i\quad j\quad k}\\ &= \frac{1}{2}\left\{g^{b(s)\,c(t)}_{j\quad k;\,i}{}^{a(r)} + g^{b(s)\,a(r)}_{j\quad i;\,k}{}^{c(t)} - g^{a(r)\,c(t)}_{i\quad k;\,j}{}^{b(s)}\right\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

und

$$\left\{{}^{a(r)}_{i}\;{}^{j}_{b(s)}\;{}^{c(t)}_{k}\right\} \equiv I'^{a(r)\,j\,c(t)}_{i\quad b(s)\quad k} = g^{j}_{b(s)\,d(u)}\,I'^{a(r)\,d(u)\,e(t)}_{i\quad l\quad k}\,. \tag{2.8}$$

Man bemerke, dass von der Definition $I'^{a(r)\,b(s)\,c(t)}_{i\quad j\quad k}$ und $I'^{a(r)\,j\,c(t)}_{i\quad b(s)\quad k}$ in Bezug auf $({}^{a(r)}_{i})$ und $({}^{c(t)}_{k})$ symmetrisch sind.

Definition. Das von (2.7) bzw. (2.8) definierte Symbol heisst das CHRISTOFFELsche Symbol erster bzw. zweiter Art.

Aus (2.8) und (2.3) ergibt sich

$$g^{b(s)\,d(v)}_{j\quad l}\Gamma^{a(r)\,l\,c(t)}_{i\quad d(v)\quad k} = I'^{a(r)\,b(s)\,c(t)}_{i\quad j\quad k}\,, \tag{2.9}$$

und von (2.7) erhält man

$$g^{a(r)\,c(t)}_{i\quad k\,;\,j}{}^{b(s)} = \Gamma^{a(r)\,c(t)\,b(s)}_{i\quad k\quad j} + \Gamma^{c(t)\,a(r)\,b(s)}_{k\quad i\quad j} . \tag{2.10}$$

Differenzierend (2.3) bezüglich $p^{l}_{d(u)}$, erhalten wir

$$g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j\,;\,l}{}^{d(u)} g^{k\quad j}_{c(t)\,b(s)} + g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} g^{k\quad j}_{c(t)\,b(s)\,;\,l}{}^{d(u)} = 0 .$$

Multiplizierend mit $g^{i\quad m}_{a(r)\,e(v)}$ und überschiebend bezüglich $(^{i}_{a(r)})$, bekommt man

$$g^{k\quad m}_{c(t)\,e(v)\,;\,l}{}^{d(u)} = -g^{i\quad m}_{a(r)\,e(v)} g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j\,;\,l}{}^{d(u)} g^{k\quad j}_{c(t)\,b(s)} .$$

Substituiert man in der rechten Seite von (2.10), erhält man vermöge Beziehung (2.8)

$$g^{k\quad m}_{c(t)\,e(r)\,;\,l}{}^{d(u)} = -\{g^{i\quad m}_{a(r)\,e(v)} \Gamma^{a(r)\quad k}_{i\quad c(t)\quad l}{}^{d(u)} + g^{k\quad j}_{c(t)\,b(s)} \Gamma^{b(s)\quad m}_{j\quad e(v)\quad l}{}^{d(u)}\} . \tag{2.11}$$

Von (2.4) durch die Differentiation findet man

$$g^{i\quad j}_{a(r)\,b(s)} g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j\,;\,k}{}^{e(t)} + g^{i\quad j}_{a(r)\,b(s)\,;\,k}{}^{e(t)} g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} = 0 . \tag{2.12}$$

Anwendend die Regel für die Differentiation der Determinanten, erhalten wir aus der Definition von $g^{i\quad j}_{a(r)\,b(s)}$

$$\begin{aligned} g^{e(t)}_{;\,k} &= g g^{i\quad j}_{a(r)\,b(s)} g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j\,;\,k}{}^{e(t)} \\ &= -g g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} g^{i\quad j}_{a(r)\,b(s)\,;\,k}{}^{c(t)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

vermöge (2.12). Ersetzt man (2.10) oder (2.11) in (2.13), so folgt

$$(\log \sqrt{g})^{e(t)}_{;\,k} = \Gamma^{a(r)\quad i}_{i\quad a(r)\quad k}{}^{e(t)} . \tag{2.14}$$

Wenn $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ bzw. $g^{c(t)\,d(u)}_{\lambda\quad\mu}$ die Bestimmungszahlen des gegebenen Fundamentalextensors im Koordinatensysteme x^i bzw. x^λ sind, folgt von (2.5) und (2.7)

$$\begin{aligned} \Gamma^{a(r)\,b(s)\,e(t)}_{i\quad j\quad k} = \Gamma^{e(u)\,f(v)\,g(w)}_{\lambda\quad\mu\quad\nu} \frac{\partial p^{\lambda}_{e(u)}}{\partial p^{i}_{a(r)}} \frac{\partial p^{\mu}_{f(v)}}{\partial p^{j}_{b(s)}} \frac{\partial p^{\nu}_{g(w)}}{\partial p^{k}_{e(t)}} \\ + g^{e(u)\,f(v)}_{\lambda\quad\mu} \frac{\partial p^{\mu}_{f(v)}}{\partial p^{j}_{b(s)}} \frac{\partial^2 p^{\lambda}_{e(u)}}{\partial p^{i}_{a(r)} \partial p^{k}_{e(t)}} . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Da diese Gleichungen nicht in der Form von (1.10) sind, folgt, dass die Funktionen $I'^{a(r)\,b(s)\,c(t)}_{i\;j\;k}$ nicht die Bestimmungszahlen des Extensors sind. Die Funktionen $I'^{a(r)\;j\;c(t)}_{i\;b(s)\;k}$ sind auch nicht die Bestimmungszahlen eines Extensors, sondern sie transformieren sich folgendermassen:

$$(2.16)\quad I'^{a(r)\;j\;c(t)}_{i\;b(s)\;k}\frac{\partial p^{\mu}_{f(v)}}{\partial p^{j}_{b(s)}} = I'^{d(u)\;\mu\;g(w)}_{\lambda\;f(v)\;\nu}\frac{\partial p^{\lambda}_{d(u)}}{\partial p_{a(s)}}\frac{\partial \bar{p}^{\nu}_{g(w)}}{\partial p^{k}_{c(t)}} + \frac{\partial^2 p^{\mu}_{f(v)}}{\partial p^{i}_{a(r)}\partial p^{k}_{c(t)}}\,.$$

Nun wollen wir (2.15) und (2.16) betrachten. Es ist bemerkenswert, dass die CHRISTOFFELschen Symbole erster Art im x^i-Systeme $I'^{a(r)\,b(s)\,c(t)}_{i\;j\;k}$ $(s \geqq S)$ unabhängig von den CHRISTOFFELschen Symbolen erster Art im x^λ-Systeme $I'^{d(u)\,e(v)\,f(w)}_{\lambda\;\mu\;\nu}$ $(\nu < S)$ sind. Auf dieselbe Weise sind die CHRISTOFFELschen Symbole jeder Art in x^i-Systeme z. B. $I'^{a(r)\;j\;c(t)}_{i\;b(s)\;k}$, für welche die Summe der symmetrischen Zeiger r und $t \geqq S$, unabhängig von der im x^λ-Systeme z. B. $I'^{d(u)\;\mu\;f(w)}_{\lambda\;e(v)\;\nu}$, für welche $u+w < S$. Darum haben wir die folgende

Definition. Die Menge der CHRISTOFFELschen Symbole erster Art $I'^{a(r)\,b(s)\,c(t)}_{i\;j\;k}$, für welche $s \geqq S$ und $r+t \geqq R$ $(R+S>0)$, wird CHRISTOFFELsche Symbole erster Art mit reduzierter Reihe geheissen.

Auf dieselbe Weise wird das Sammeln der CHRISTOFFELschen Symbole zweiter Art $I'^{a(r)\;j\;c(t)}_{i\;b(s)\;k}$, für welche $s \leqq S$ und $r+t \geqq R$ $(M-S+R>0)$, CHRISTOFFELsche Symbole zweiter Art mit reduzierter Reihe gesagt wird.

Überdies, da $\dfrac{\partial p^{\lambda}_{e(u)}}{\partial p^{i}_{a(r)}} = \dfrac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{i}}\,\delta^{a}_{e(M)}$ für $u=r=M$, $\dfrac{\partial p^{\lambda}_{e(u)}}{\partial p^{i}_{a(r)}} = 0$ für $r > u$ und $\dfrac{\partial^2 p^{\mu}_{f(v)}}{\partial p^{i}_{a(r)}\partial p^{k}_{c(t)}} = 0$ für $r+t > v$, bestätigen wir den folgenden

Satz 17. Die vollständig reduzierten CHRISTOFFELschen Symbole erster Art (d. h. jeder Zeiger in der Klammer gleich zu M) sind die Bestimmungszahlen des gewöhnlichen Tensors, während solche von jeder Art, für welche die symmetrische Summe grösser als M ist, die Bestimmungszahlen des Extensors sind. Auch wenn R beliebige Zahl der Menge $1, 2, \ldots, M$ ist, bestimmt das Sammeln der CHRISTOFFELschen Symbole zweiter Art $I'^{a(r)\;j\;c(t)}_{i\;b(s)\;k}$, für welche $s < R$ und $r+t \geqq R$, einen Extensor.

Wie in RIEMANNscher Geometrie, wenn in beliebigem Koordinaten-

systeme $g_{i}^{a(r)\,b(s)}{}_{j}$ die Konstanten sind, verschwinden die CHRISTOFFELschen Symbole in diesem Systeme und umgekehrt. Wenn der Fundamentalextensor von nur x^i abhängig ist, verschwinden alle CHRISTOFFELschen Symbole erster Art in x^i-Systeme, für welche jeder Zeiger $\geqq 1$, deshalb verschwinden alle Symbole (erster Art) in jedem Koordinatensysteme, für welche die symmetrische Summe $> M$ und die andere $\geqq 1$. Im allgemeinen erhalten wir den folgenden

Satz 18. Wenn $g_{i}^{a(r)\,b(s)}{}_{j}$ in x^i-Systeme von nur x^i, $p^{i}_{a(1)}, \ldots, p^{i}_{a(R)}$ abhängig sind, verschwinden in allen Koordinatensystemen die CHRISTOFFELschen Symbole erster Art, für welche jeder Zeiger grösser als R und die symmetrische Summe grösser als M ist ($R \geqq 1$).

Nun wollen wir den Fall betrachten, dass in der Gleichung (2.15) $r = s = M$ und $t = 0$. In diesem Falle führt das letzte Glied in rechter Seite von (2.15)

$$g^{e(u)\,f(v)}_{\lambda\quad\mu}\frac{\partial p^{\mu}_{f(v)}}{\partial p^{j}_{b(s)}}\frac{\partial^2 p^{\lambda}_{e(u)}}{\partial p^{i}_{a(r)}\partial p^{k}_{c(t)}} = g^{a(M)\,b(M)}_{\lambda\quad\mu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}$$

zurück und geht (2.15) zu

$$\Gamma^{a(M)\,b(M)\,c(0)}_{i\quad j\quad k} = \Gamma^{a(M)\,b(M)\,c(t)}_{\lambda\quad\mu\quad\nu}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial p^{\nu}_{c(t)}}{\partial x^{k}} + g^{a(M)\,b(M)}_{\lambda\quad\mu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}. \tag{2.17}$$

Für die festen Zeiger $a(M)$ und $b(M)$, sind $g^{a(M)\,b(M)}_{\lambda\quad\mu}$ die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen Tensors zweiter Stufe. Wenn nun die Determinante $|\,g^{a(M)\,b(M)}_{i\quad j}\,|$ nicht identisch verschwindet, können wir einen Übertragungsparameter, welche im Eliminationsverfahren von der zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}$ einen nützlichen Zweck hat, einführen.

Daher wenn die Symbole $\hat{g}_{a(M)\,b(M)}^{\lambda\qquad\mu}$ das inverse System der Grösse $g^{a(M)\,b(M)}_{\lambda\quad\mu}$ in der N-dimensionalen Determinante $|\,g^{a(M)\,b(M)}_{\lambda\quad\mu}\,|$ ($a(M)$ und $b(M)$ fest) bezeichnen, dann haben wir die folgende Beziehung:

$$\hat{\Gamma}^{a(M)\,\iota\quad 0}_{i\quad b(M)\,k}\frac{\partial x^{\xi}}{\partial x^{l}} = \hat{\Gamma}^{a(M)\,\xi\quad g(s)}_{\lambda\quad b(M)\,\nu}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{i}}\frac{\partial p^{\nu}_{g(s)}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial^2 x^{\xi}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}, \tag{2.18}$$

wobei

$$\hat{\Gamma}^{a(M)\,j\quad c(t)}_{i\quad b(M)\,k} = \hat{g}^{\,j}_{b(M)\,a(M)}\,\hat{\Gamma}^{a(M)\,\iota\quad b(M)\,c(t)}_{i\quad l\quad k}, \tag{2.19}$$

(nicht summiert bezüglich $a(M)$ noch $b(M)$) gesetzt ist.

Es ist offenbar, dass der Übertragungsparameter (2.18) von den in (2.16) durch Ersetzung von $r = v = M$, $t = 0$ erhaltenen Übertragungsparametern verschieden ist. Weiter für $t > 0$ transformieren die Grössen $\hat{\Gamma}^{a(M)}_{i\ b(M)\ k}{}^{c(t)}_{l}$ sich folgendermassen:

$$\hat{\Gamma}^{a(M)}_{i\ b(M)\ k}{}^{c(t)}_{j}\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \hat{\Gamma}^{a(M)}_{\lambda\ b(M)\ \kappa}{}^{g(s)}_{\nu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}\frac{\partial p^\nu_{g(s)}}{\partial p^k_{c(t)}}, \qquad t > 0\,. \tag{2.20}$$

§ 11. *Die exkovariante Differentiation.* Wegen dem wohl bekannten Verfahren von der Tensoranalysis, wird der Differentiationsprozess eingeführt durch (2.16) oder (2.18) mit (2.19). Wenigstens in einem Punkte sind die erhaltenen Ableitungen verschieden von solchen in gewöhnlicher Tensoranalysis. Es sind nämlich einige von den Bestimmungszahlen der Ableitungen nur eine Summe oder Differenz des Extensors. Seien $V^{a(r)}_i$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors, so ändern sie sich folgendermassen:

$$V^{a(r)}_{i} = V^{b(s)}_{\lambda}\frac{\partial p^\lambda_{b(s)}}{\partial p^i_{a(r)}},$$

daraus durch Differentiation nach $p^j_{c(t)}$ ergibt sich

$$V^{a(r)}_{i\ ;\ j}{}^{c(t)} = V^{b(s)}_{\lambda\ ;\ \mu}{}^{d(u)}\frac{\partial p^\lambda_{b(s)}}{\partial p^i_{a(r)}}\frac{\partial p^\mu_{d(u)}}{\partial p^j_{c(t)}} + V^{b(s)}_{\lambda}\frac{\partial^2 p^\lambda_{b(s)}}{\partial p^i_{a(r)}\partial p^j_{c(t)}}\,. \tag{2.21}$$

Multipliziert man (2.16) mit $V^{f(v)}_{\mu}$, so erhält man

$$\Gamma^{a(r)}_{i\ b(s)\ k}{}^{c(t)}_{j}V^{b(s)}_{\lambda} = \Gamma^{a(u)}_{\lambda\ f(v)\ \mu}{}^{g(w)}_{\nu}V^{f(v)}_{\mu}\frac{\partial p^\lambda_{a(u)}}{\partial p^i_{a(r)}}\frac{\partial p^\nu_{g(w)}}{\partial p^k_{c(t)}} + V^{f(v)}_{\mu}\frac{\partial^2 p^\mu_{f(v)}}{\partial p^i_{a(r)}\partial p^k_{c(t)}}\,. \tag{2.22}$$

Nun eliminiere man die zweiten Ableitungen zwischen (2.21) und (2.22), so erhält man exkovariante Ableitung von $V^{a(r)}_i$. Nämlich haben wir, dass die Ausdrücke

$$V^{a(r)}_{i\ ,\ j}{}^{c(t)} \equiv V^{a(r)}_{i\ ;\ j}{}^{c(t)} - \Gamma^{a(r)}_{i\ b(s)\ k}{}^{c(t)}_{j}V^{b(s)}_{k} \tag{2.23}$$

die Bestimmungszahlen des exkovarianten Extensors zweiter Stufe sind, während $V^{a(r)}_i$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Exvektors sind.

Es ist bemerkenswert, dass für $r+t>M$ (2.21) und (2.22) nichts anderes als Extensortransformationen der reduzierten Reihe sind. Analogens werden die exkovarianten Ableitungen eines exkontravarianten Exvektors $V^{i}_{a(r)}$ definiert durch

$$V^{i}_{a(r)},^{b(s)}_{j} \equiv V^{i}_{a(r)};^{b(s)}_{j} + \Gamma^{c(t)}_{k}{}^{i}_{a(r)}{}^{b(s)}_{j} V^{k}_{c(t)}\,, \tag{2.24}$$

welche für $r<s$ die Komponente der Summe des Extensors sind.

Es ist leicht zu sehen, dass die Sätze für die exkovarianten Ableitungen von der Summe, dem Produkte und der Überschiebung so wie in der Tensoranalysis sind. Offenbar besteht RICCIsches Lemma.

Lemma.

$$g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j},^{c(t)}_{k} = 0\,. \tag{2.25}$$

Weiter sind Produkte von KRONECKERschen Delta $\delta^{j}_{i}\delta^{a(r)}_{b(s)}$ die Bestimmungszahlen des Extensors zweiter Stufe und besteht

$$(\delta^{j}_{i}\delta^{a(r)}_{b(s)}),^{c(t)}_{k} = 0\,. \tag{2.26}$$

Kovariant differenzierte man beide Seiten von (2.3), so folgt aus (2.25) und (2.26)

$$g^{i}_{a(r)\,b(s)},^{c(t)}_{k} = 0\,. \tag{2.27}$$

Die vollständige Überschiebung $T^{i}_{a(r)}{}^{c(r)}_{c},^{c(t)}_{k}$ der exkovarianten Ableitung $T^{i}_{a(r)}{}^{b(s)}_{j},^{c(t)}_{k}$ reduziert offenbar zu der partiellen Ableitung der Invariante $T^{i}_{a(r)}{}^{a(r)}_{i}$, aber nicht besteht die entsprechende Reduktion im Falle der Überschiebung über reduzierte Reihe.

Wir wiederholen kurz den folgenden

Satz 19. Der Prozess, welcher durch

$$\begin{aligned} D^{c(t)}_{k} T^{i}_{a(r)}{}^{\cdots b(s)\cdots}_{\cdots\ j\ \cdots} &\equiv T^{i}_{a(r)}{}^{\cdots b(s)\cdots}_{\cdots\ j\ \cdots},^{c(t)}_{k} \\ &= T^{i}_{a(r)}{}^{\cdots b(s)\cdots}_{\cdots\ j\ \cdots};^{c(t)}_{k} + \Gamma^{d(u)}_{k}{}^{i}_{a(r)}{}^{c(t)}_{k} T^{h}_{d(u)}{}^{\cdots b(s)\cdots}_{\cdots\ j\ \cdots} + \cdots \\ &\quad - \Gamma^{b(s)}_{j}{}^{h}_{d(u)}{}^{c(t)}_{k} T^{i}_{a(r)}{}^{\cdots d(u)\cdots}_{\cdots\ h\ \cdots} - \cdots \end{aligned} \tag{2.28a}$$

definiert wird, ist so, dass (a) wenn es auf einen Extensor beliebiger Stufe angewandt wird, gibt es den zweiten Extensor um

eins höherer Stufe: (b) die Sätze für exkovarianten Ableitungen der Summe, des Produkts und der Überschiebung über vollständige Reihe sind genau so wie in der Tensoranalysis, aber die entsprechenden bestehen nicht für reduzierte Reihe; und (c) wenn er auf den Extensoren $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$, $g_{a(r)\,b(s)}^{i\quad j}$ und $\delta^i_j\,\delta^{b(s)}_{a(r)}$ angewandt wird, gibt es den Nullextensor.

Das exkovariante Differential eines Extensors wird durch

$$\text{(2.28b)}\quad \delta T_{a(r)}^{i\ \cdots\ b(s)}{}_{j\ \cdots} = dT_{a(r)}^{i\ \cdots\ b(s)}{}_{j\ \cdots} + \Gamma^{d(u)\ i\quad c(t)}_{h\quad a(r)\quad k}\, T_{d(u)}^{h\ \cdots\ b(s)}{}_{j\ \cdots}\, dp^{k}_{c(t)}$$
$$+ \cdots - \Gamma^{b(s)\ h\quad c(t)}_{j\quad d(u)\quad k}\, T_{a(r)}^{i\ \cdots\ d(u)}{}_{h\ \cdots}\, dp^{k}_{c(t)} - \cdots$$

gegeben.

In Bezug auf die anderen Übertragungsparameter (2.18), zeigt es sich bald, dass diese Beziehungen auf die exkovariante Differentiation des Tensors anwendbar sind. In der Tat, entwickeln wir einen Differentiationsprozess für beliebigen Vektor V_i, dessen Bestimmungszahlen die differenzierbare Funktionen von x^i, $p^i_{a(1)}$, ..., $p^i_{a(M)}$ sind. Differenziert man nach x^k die Beziehung

$$\text{(2.29)}\qquad V_j = V_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^j}\ ,$$

so folgt

$$\text{(2.30)}\qquad V_{i;\,k}^{\ 0} = V_{\lambda;\,\mu}^{\ a(r)} \frac{\partial p^\mu_{a(r)}}{\partial x^k} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} + V_\lambda \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^k}\ .$$

Andererseits, wenn man (2.18) mit V_ξ multipliziert, so gibt es

$$\text{(2.31)}\quad \hat{\Gamma}^{a(M)\ j}_{i\quad b(M)\quad k}\, V_j = \hat{\Gamma}^{a(M)\ \xi}_{\lambda\quad b(M)\quad \nu}\, p^{\nu\ g(s)}_{g(s)}\, V_\xi \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\partial p^\nu_{g(s)}}{\partial x^k} + V_\xi \frac{\partial^2 x^\xi}{\partial x^i \partial x^k}\ .$$

Infolgedessen eliminierend das Glied $V_\lambda \dfrac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^k}$ aus beiden Gleichungen (2.30) und (2.31), erhält man

$$\text{(2.32)}\qquad V_{i;\,k}^{\ 0} - \hat{\Gamma}^{a(M)\ j}_{i\quad b(M)\quad k}\, V_j^{\ 0}$$
$$= \left(V_{\lambda;\,\mu}^{\ g(r)} - \hat{\Gamma}^{a(M)\ \xi}_{\lambda\quad b(M)\quad \mu}\, p^{\mu\ g(r)}_{g(r)}\, V_\xi\right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\partial p^\mu_{g(r)}}{\partial x^k}\ .$$

Zunächst, wenn man (2.29) nach $p^k_{c(t)}$ $(t > 0)$ differenziert, bekommt man

$$V_{i\,;\,k}^{\ c(t)} = V_{\lambda\,;\,\xi}^{\ g(s)} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\bar\partial p^{\ \xi}_{g(s)}}{\bar\partial p^{\ k}_{c(t)}}\,, \tag{2.33}$$

während aus (2.30) folgt

$$\hat\Gamma^{a(M)}_{\ i}{}_{b(M)}^{\ j}\,{}^{c(t)}_{\ k} V_j = \hat\Gamma^{a(M)}_{\ \lambda}{}_{b(M)}^{\ \xi}\,{}^{g(s)}_{\ \nu} V_\xi \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\bar\partial p^{\ \nu}_{a(s)}}{\partial p^{\ k}_{c(t)}}\,, \qquad t > 0\,. \tag{2.34}$$

Darum haben wir den

Satz 20. Die Grössen

$$\hat D^{c(t)}_{\ k} V_i = V_{i\,;\,k}^{\ c(t)} - \hat\Gamma^{a(M)}_{\ i}{}_{b(M)}^{\ j}\,{}^{c(t)}_{\ k} V_j\,, \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots,\ M \tag{2.35}$$

sind die Bestimmungszahlen des gemischten Extensors (kovariant, exkovariant), wobei $V_i(x, p_{(1)}, \ldots, p_{(M)})$ die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen Vektors sind.

Zuletzt als das Beispiel für eine simultane Anwendung von (2.16) und (2.18), untersuchen wir das Problem, den Differentiationsprozess für einen gemischten Extensor $T_{i\,a(r)}^{\ \ j}$ zu konstruieren. Differenzierend die Transformationsformeln

$$T_{i\,a(r)}^{\ \ j} = T_{\lambda\,b(s)}^{\ \ \mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\bar\partial p^{\ j}_{a(r)}}{\partial p^{\ \mu}_{b(s)}}\,, \tag{2.36}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{i\,a(r)\,;\,k}^{\ \ j\ \ c(t)} = {} & T_{\lambda\,b(s)\,;\,\nu}^{\ \ \mu\ \ d(u)} \frac{\bar\partial p^{\ \nu}_{d(u)}}{\partial p^{\ k}_{c(t)}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\bar\partial p^{\ j}_{a(r)}}{\partial p^{\ \mu}_{b(s)}} \\ & + T_{\lambda\,b(s)}^{\ \ \mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\bar\partial^2 p^{\ j}_{a(r)}}{\partial p^{\ \mu}_{b(s)} \partial p^{\ \nu}_{d(u)}} \frac{\bar\partial p^{\ \nu}_{d(u)}}{\partial p^{\ k}_{c(t)}} + T_{\lambda\,b(s)}^{\ \ \mu} \frac{\partial p^{\ j}_{a(r)}}{\partial p^{\ \mu}_{b(s)}} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^k} \delta^t_0\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Wir setzen im zweiten Glied in der rechten Seite die von (2.16) eingeführte Beziehung

$$\frac{\bar\partial^2 p^{\ j}_{a(r)}}{\partial p^{\ \mu}_{b(s)} \partial p^{\ \nu}_{d(u)}} = \Gamma^{b(s)}_{\ \mu}{}_{e(v)}^{\ \ \xi}\,{}^{d(u)}_{\ \nu} \frac{\bar\partial p^{\ j}_{a(r)}}{\bar\partial p^{\ \xi}_{e(v)}} - \Gamma^{e(v)}_{\ l}{}_{a(r)}^{\ \ j}\,{}^{f(w)}_{\ h} \frac{\partial p^{\ l}_{e(v)}}{\partial p^{\ \mu}_{b(s)}} \frac{\bar\partial p^{\ h}_{f(w)}}{\bar\partial p^{\ \nu}_{d(u)}} \tag{2.38}$$

und im dritten die Beziehung (2.18) ein, dann besteht für $t = 0$

$$\begin{aligned} & T_{i\,a(r)\,;\,k}^{\ \ j\ \ 0} + \Gamma^{e(v)}_{\ l}{}_{a(r)}^{\ \ j}\,{}^{0}_{\ k}\, T_{i\,e(v)}^{\ \ l} - \hat\Gamma^{d(M)}_{\ i}{}_{e(M)}^{\ \ l}\,{}^{0}_{\ k} T_{l\,a(r)}^{\ \ j} \\ & \quad = \{ T_{\lambda\,b(s)\,;\,\nu}^{\ \ \mu\ \ g(u)} + \Gamma^{f(v)}_{\ \xi}{}_{b(s)}^{\ \ \mu}\,{}^{g(u)}_{\ \nu} T_{\lambda\,f(v)}^{\ \ \xi} - \hat\Gamma^{d(M)}_{\ \lambda}{}_{e(M)}^{\ \ \xi}\,{}^{g(u)}_{\ \nu} T_{\xi\,b(s)}^{\ \ \mu} \} \\ & \qquad \times \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \frac{\bar\partial p^{\ j}_{a(r)}}{\bar\partial p^{\ \mu}_{b(t)}} \frac{\partial p^{\ \nu}_{g(u)}}{\partial x^k} \end{aligned}$$

und für $t = 0$

$$(2.39)\quad T^{\ j}_{i\ a(r)\,;\,k}^{\ c(t)} + I^{\ b(s)}_{l\ a(r)}{}^{j}_{k}{}^{c(t)}\, T^{\ l}_{i\ b(s)} - \hat{I}^{d(M)}_{i\ e(M)}{}^{l}_{k}{}^{c(t)}\, T^{\ j}_{l\ a(r)}$$
$$= \{T^{\ \mu}_{\lambda\ b(s)\,;\,\nu}^{\ g(u)} + I^{f(v)}_{\xi\ b(s)}{}^{\mu}_{\nu}{}^{g(u)}\, T^{\ \xi}_{\lambda\ f(v)} - \hat{I}^{d(M)}_{\lambda\ e(M)}{}^{\xi}_{\nu}{}^{g(u)}\, T^{\ \mu}_{\xi\ b(s)}\}$$
$$\times \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{i}}\, \frac{\partial p_{a(r)}^{j}}{\partial p^{\mu}_{b(s)}}\, \frac{\partial p_{g(u)}^{\nu}}{\partial p^{k}_{c(t)}}\,.$$

Ohne Einschränkung ist deshalb die Gleichung (2.39) gültig, somit haben wir den folgenden Satz.

Satz 2.1. Wenn die Grössen $T^{\ j}_{i\ a(r)}$ die Bestimmungszahlen eines differenzierbaren gemischten Extensors sind, dann sind die Ausdrücke

$$T^{\ j}_{i\ a(r)\,;\,k}^{\ c(t)} + I^{b(s)}_{l\ a(r)}{}^{j}_{k}{}^{c(t)}\, T^{\ l}_{i\ b(s)} - \hat{I}^{d(M)}_{i\ e(M)}{}^{l}_{k}{}^{c(t)}\, T^{\ j}_{l\ a(r)}$$

die Bestimmungszahlen des Extensors, dessen Art durch freie Zeiger i, $(^{j}_{a(r)})$ und $(^{c(t)}_{k})$ gezeigt ist.

Nun wollen wir die besondere Eigenschaft, der kein Gegenstück in gewöhnlicher Tensoranalysis hat, vom $N\binom{K+M}{M}$-dimensionalen Gesichtspunkte aus untersuchen.

Erstens, wenn $V^{i}_{a(r)}$ aus dem Vektor V^{i} durch Differentiation formiert wird, d. h. $V^{i}_{a(r)} = V^{i}{}_{/a(r)}$, dann mag die hinzukommende Differentiation von V^{i} nur als Erweiterung der Reihe angesehen werden. Nämlich die Hinzusetzung der neuen Grössen $V^{i}_{a(M+1)}$, $V^{\lambda}_{b(M+1)}$ liefert uns die folgende Transformationsformel

$$V^{i}_{a(r)} = V^{\lambda}_{b(s)} \frac{\partial p^{i}_{a(r)}}{\partial p^{\lambda}_{b(s)}}\,, \quad r,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ M+1\,,$$

während die ursprüngliche Grösse $V^{i}_{a(r)}$, $r = 0, 1, \ldots, M$, sich folgendermassen transformieren:

$$V^{i}_{a(r)} = V^{\lambda}_{b(s)} \frac{\partial\, p^{i}_{a(r)}}{\partial p^{\lambda}_{b(s)}}\,, \quad r,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ M.$$

Deshalb, in diesem Falle, ist der besondere Differentiationsprozess vom wenigern Sinn als in der Tensoranalysis.

Die intrinsike Ableitung von $V^{i}_{a(r)}$ wird gegen durch

$$(2.40)\qquad \Gamma_{b} V^{i}_{a(r)} = V^{i}_{a(r)\ b} + V^{j}_{c(s)} I^{c(s)}_{j\ a(r)}{}^{i}_{k}{}^{d(t)}\, p^{k}_{d(t)b}\,,$$

die dieselbe Reihe der Zeiger hat.

Erstens ist es klar, dass die Grösse

$$\sum_{s=1}^{M} {}_sD_j^{b(s)} V_{a(r)}^i p_{b(s)}^j \tag{2.41}$$

die Extensoreigenschaft hat, da ${}_sp_{a(s)}^i$, $s = 1, 2, \ldots, M$, der Exvektor mit der reduzierten Reihe ist: denn

$$\sum_{s=1}^{M} {}_sp_{b(s)}^{\lambda} \frac{\partial p_{a(r)}^i}{\partial p_{b(s)}^{\lambda}} = {}_rp_{a(r)}^i . \tag{2.42}$$

Daraus folgt der

Hilfssatz. ${}_rp_{a(r)}^i$ sind die Bestimmungszahlen eines Exvektors mit der reduzierten Reihe.

Wegen des Hilfssatzes, wenn $T_i^{a(r)}$ die Bestimmungszahlen eines Exvektors sind, ist es offenbar, dass $\sum_{r=0}^{M} {}_rp_{a(r)}^i T_i^{a(r)}$ eine Invariante ist.

Nächstens können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 22. Die Ausdrücke

$$\sum_{r=1}^{M} {}_rp_{a(r)}^k T_{k\,:\,i}^{a(r)\;\;b(s)} + {}_sT_i^{b(s)} \tag{2.43}$$

sind die Bestimmungszahlen des Exvektors mit der reduzierten Reihe, während $T_i^{a(r)}$ die Bestimmungszahlen eines Exvektors mit der reduzierten Reihe $1 \leq r \leq M$ sind.

KAPITEL III. DIE IN EINEM L-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUME EINGEBETTETE MANNIGFALTIGKEIT.

§ 12. *Die Exfläche.* In dieser Kapitel wollen wir annehmen, dass in einem gegebenen L-dimensionalen euklidischen Raume die Mannigfaltigkeit X_N, in welcher jede Fläche durch $x^i = x^i(u^a)$ gegeben ist, eingebettet ist. Man zeigt die rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten des L-dimensionalen euklidischen Raumes E mit y^{ω}, $\omega = 1, 2, \ldots, L$ $(L > N)$. L gegebene Gleichungen

$$y^{\omega} = y^{\omega}(x^i, p_{a(1)}^i, \ldots, p_{a(M)}^i), \qquad \omega = 1, 2, \ldots, L \tag{3.1}$$

assoziieren offenbar mit jedem Expunkte $p^i_{a(r)}$ von X_N, ein Punkt von E, und mit jeder Fläche in parametrischer Form, eine Fläche in E, welche wir die "gekrümmte Fläche" heissen.

Definition. Die Gesamtheit der gekrümmten Flächen heisst eine "Exfläche." Diese ist offenbar eine Erweiterung des Begriffs "Fläche," weil ein Punkt y^ω der Exfläche durch einen Expunkt (anstatt eines Punktes) vom Basisraume X_N bestimmt ist. Z. B. mögen wir nehmen einen 3-dimensionalen euklidischen Raum als X_N und einen 4-dimensionalen euklidischen Raum als E, und die Gleichungen (3.1) als Krümmung der Basisfläche im 3-dimensionalen euklidischen Raume zur 4-dimensionalen euklidischen Raumfläche. Wenn M gleich Null ist, so reduziert die Exfläche zu einer Fläche. Es ist bemerkenswert, dass die Exfläche nicht nur die Menge der Punkte y^ω, sondern die Gesamtheit der gekrümmten Flächen ist. Die Punkte einer Exfläche mögen den ganzen Raum E füllen, während jede Fläche von E nicht immer eine zu der Exfläche gehörige Fläche ist.

Wir mögen die Gleichungen (3.1) in zwei Klassen klassifizieren.

Klasse 1. Einige y^ω sind nicht invariant in funktionaler Form bei den Parametertransformationen. In diesem Falle wenn F eine Basisfläche in X_N ist, ist das Bogenelement der zur F assoziierten gekrümmten Fläche F^* durch

$$ds^2 = \sum_{\omega=1}^{L} dy^\omega dy^\omega = g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} dp^i_{a(r)} dp^j_{b(s)} \tag{3.2}$$

gegeben, wobei

$$\sum_{\omega=1}^{L} \frac{\partial y^\omega}{\partial p^i_{a(r)}} \frac{\partial y^\omega}{\partial p^j_{b(s)}} = g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j} \tag{3.3}$$

gesetzt ist.

Wir beschränken uns auf die Basistransformationen und sehen die verschiedenen Punkte und die Bogenlänge als die geometrische Invariante an und die Funktionen wie y^ω und $y^\omega{}_{/b}$ als Skalare. Deshalb für jedem Werte von ω, sind $\partial y^\omega/\partial p^i_{a(r)}$ die Bestimmungszahlen eines Exvektors und daraus bestimmen die Grössen (3.3) einen exkovarianten Extensor zweiter Stufe. Nun formieren wir aus den Grössen $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ eine Determinante g. Nun beobachten wir, dass, wenn $L = N\binom{K+M}{M}$, die Determinante g gleich zu dem Quad-

rate der JACOBIschen Determinante $\left|\frac{\bar{\partial} y^{\omega}}{\bar{\partial} p^{i}_{a(r)}}\right|$ ist. Natürlich setzen wir voraus, dass die Funktionen (3.1) unter einander funktional unabhängig sind. Deswegen in diesem Falle verschwindet g nicht identisch. Hingegen wenn $L < N\binom{K+M}{M}$ ist g immer gleich Null. Weiter: aus dem wohl bekannten Satze in Matrizenalgebra folgt, dass, wenn $L > N\binom{K+M}{M}$, so die Determinante g gleich zur Summe der Quadrate der Determinanten von Ordnung $N\binom{K+M}{M}$ in der JACOBIschen Matrize ist. Also um die Exsistenz des inversen Systemes von $g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}$ zu sichern, ist es nötig, dass $L \geqq N\binom{K+M}{M}$ und dass die JACOBIsche Matrize den Rang $N\binom{M+K}{M}$ hat. Im Falle, dass diese Bedingungen bestehen, können wir (3.3) als den Fundamentalextensor, d. h. den metrischen Extensor in $M_N(M; K)$ nehmen.

Wenn $N\binom{K+M}{M}$ von den Gleichungen (3.1) eine einzige einwertige Lösung für $p^{i}_{a(r)}$ gestatten, sehen wir, dass zwei verschiedene Expunkte denselben Exflächenpunkt nicht bestimmen. Das Skalarprodukt zweier Exflächenexvektoren liefert uns ein Beispiel einer anderen metrischen Eigenschaft vom Fundamentalextensor. Es besteht nämlich der

Satz 23. Wenn zwei Basisflächen einen Expunkt P gemeinsam haben, dann ist das Skalarprodukt der tangenten Vektoren zur entsprechenden gekrümmten Fläche am gemeinsamen Punkte gegeben durch die Überschiebung vom metrischen Extensor und zwei tangenten Exvektoren am P.

Denn sei F_1 bzw. F_2 die Basisfläche, welche durch die Gleichungen $x^{i}_{1} = x^{i}_{1}(u^{a})$ bzw. $x^{i}_{2} = x^{i}_{2}(u^{a})$ gegeben ist. Da die beiden Flächen den Expunkt P gemeinsam haben, bestehen die Beziehungen: $x^{i}_{1}(u^{a}_{1}) = x^{i}_{2}(u^{a}_{2})$, $p^{i}_{1a(1)}(u^{a}_{1}) = p^{i}_{2a(1)}(u^{a}_{2})$, ..., $p^{i}_{1a(M)}(u^{a}_{1}) = p^{i}_{2a(M)}(u^{a}_{2})$. Auch schneiden die entsprechenden gekrümmten Flächen F^{*}_{1} und F^{*}_{2} und ist das Skalarprodukt der Vektoren dy^{ω}_{1} und dy^{ω}_{2} am Schnittpunkte durch

$$\sum_{\omega=1}^{L} dy^{\omega}_{1} dy^{\omega}_{2} = \sum_{\omega=1}^{L} \frac{\partial y^{\omega}_{1}}{\bar{\partial} p^{i}_{a(r)}} \frac{\partial y^{\omega}_{2}}{\partial p^{j}_{b(s)}} dp^{i}_{1a(r)} dp^{j}_{2b(s)} \tag{3.4}$$

gegeben. Da die Basisflächen F_1 und F_2 am Schnittpunkte einen Expunkt gemeinsam haben, an diesem Schnittpunkte ist der Wert von $\bar{\partial} y^{\omega}/\bar{\partial} p^{i}_{a(r)}$ identisch gleich für beide Flächen. Daraus stimmen

am Punkte die zu beiden Basisflächen assoziierten metrischen Extensoren miteinander überein und das Skalarprodukt ist durch die Überschiebung des metrischen Extensors mit zwei tangenten Exvektoren gegeben. Nämlich (3.4) wird folgendermassen umgeschrieben:

$$\sum_{\omega=1}^{L} dy_1^{\omega} dy_2^{\omega} = g_{i}^{a(r)\,b(s)} dp_{1a(r)}^{i}\, dp_{2b(s)}^{j} .$$

Die Exflächen von Klasse 1 werden in zwei Typen geteilt: $L > N\binom{K+M}{M}$ und $L = N\binom{K+M}{M}$. Typus I ist solches, in dem die Funktionen y^{ω} voneinander funktional abhängig sind und so die gekrümmten Flächen die Untermenge der Flächen vom RIEMANNschen Unterraume der Mannigfaltigkeit y^{ω} sind. In Typus II sind dagegen die Funktionen y^{ω} voneinander unabhängig und es gibt keine Einheitsnormal[1] im starken Sinne.

Ein wichtiges Beispiel für beide Typen ist durch die Exebene gegeben, die man definiert durch die Gleichungen vom Typus

$$y^{\omega} = A^{\omega}{}_{i}^{a(r)} p_{a(r)}^{i} + C^{\omega} , \tag{3.5}$$

wobei $A^{\omega}{}_{i}^{a(r)}$ und C^{ω} die Konstanten sind.

§ 13. *Die Exflächennormale.* Sei $P[y^{\omega}(p_{a(r)}^{i})]$ ein Punkt unserer Exfläche und τ^{ω} ein tangenter Vektor zur durch P gehenden gekrümmten Fläche, so ist τ^{ω} durch

$$\tau^{\omega} = y^{\omega}{}_{/b} A^{b} = \frac{\partial y^{\omega}}{\partial p_{a(r)}^{i}} p_{a(r)b}^{i} A^{b} \tag{3.6}$$

ausgedrückt, wobei A^{b} geeingnete Grössen sind. Der Vektor, der mit $P[y^{\omega}(p_{a(r)}^{i})]$ assoziiert wird, ist dann zum Vektor τ^{ω} normal, wenn

$$\sum_{\omega=1}^{L} \eta^{\omega} \frac{\partial y^{\omega}}{\partial p_{a(r)}^{i}} p_{a(r)b}^{i} = 0 . \tag{3.7}$$

Wenn $L = N\binom{K+M}{M} + 1$ und y^{ω} in Bezug auf $p_{a(r)}^{i}$ $(r \geqq 1)$ linear sind, d. h. y^{ω} die Form

$$y^{\omega} = \sum_{r=1}^{M} A^{\omega}{}_{i}^{a(r)} p_{a(r)}^{i} + A^{\omega}(x) \tag{3.8}$$

(1) Siehe § 13.

hat, gestatten die Gleichungen

$$\sum_{\omega=1}^{L} \eta^{\omega} \frac{\partial y^{\omega}}{\partial p^{i}_{a(r)}} = 0 \tag{3.9}$$

eine einfache Infinität der Lösungen, die die einzige Richtung am P definieren. P mag von der durch x^i gehenden Fläche abhängen, aber nicht dieser Richtung. Gerade zwei Einheitsvektoren (gegenständig orientiert) gestatten (3.9). Diese Einheitsvektoren sind zu allen gekrümmten Flächen normal, dessen Basisflächen durch den Punkt x^i gehen, am entsprechenden Exflächenpunkte P. Also haben wir die

Definition. Man sagt, dass im starken Sinne der Vektor η^{ω} zur Exfläche normal ist.

Wenn die Funktionen y^{ω} bezüglich $p^{i}_{a(r)}$, $r \geqq 1$, nicht alle linear sind, mögen die Bestimmungszahlen η^{ω} mit der durch x^i gehenden Basisfläche wechseln. Betrachtet man in solchem Falle die Menge der Basisflächen, welche durch den gegebenen Expunkt $p^{i}_{a(r)}$, $r = 0, 1, \ldots, M$, gehen, so erhält man, dass die Orthogonalitätsbedingungen sich zerlegen in:

$$\sum_{\omega=1}^{L} \eta^{\omega} \frac{\partial y^{\omega}}{\partial p^{i}_{a(M)}} = 0 \tag{3.10}$$

und

$$\sum_{\omega=1}^{L} \eta^{\omega} \sum_{r=0}^{M-1} \frac{\partial y^{\omega}}{\partial p^{i}_{a(r)}} p^{i}_{a(r)b} = 0 \,. \tag{3.11}$$

Es ist klar, dass (3.10) eine Tensorgleichung ist und dass (3.10) und (3.11) das Verschwinden von $\sum_{\omega=1}^{L} \eta^{\omega} y^{\omega}_{/b}$ invariant halten. Auf dieselber Weise aus der Gleichung (3.10) und $\sum_{\omega=1}^{L} \eta^{\omega} y^{\omega}_{/b} = 0$ folgt (3.11). Deswegen können wir schliessen, dass, wenn (3.10) und (3.11) in einem Koordinaten System x^i unserer Gruppe bestehen, in allem auch sie gültig sind. Also haben wir die

Definition. Der Vektor, der den Bedingungen (3.10) und (3.11) genügt, heisst, in schwachem Sinne: normal zu sein.

Wenn $L = N\binom{K+M}{M} + l$ und alle y^{ω} in Bezug auf $p^{i}_{a(r)}$, $r = 1, 2, \ldots, M$, linear sind, gibt es eine l-fache Infinität der Vektoren η^{ω}

und folglich ist ein l-dimensionaler normaler euklidischer Raum, der mit dem Basispunkte x^i assoziiert wird, bestimmt.

Nun gehen wir zur Exebene (3.5) zurück. Wenn die Exebene von Typus I ist, so sind seine Normalen η^ω von ihrem assoziierten Basispunkte unabhängig. Wenn für ein Koordinatensystem x^i in dem Basisraume andere Exebene durch die Gleic ungen vom Typus

$$y^\omega = A^{\omega\, a(r)}_{\cdot\cdot\, i}\, p^i_{a(r)} + D^\omega \tag{3.12}$$

definiert ist, folgt sogleich, dass zwei Exebene (3.5) und (3.12) gemeinsame Normalrichtungen haben. Also sagen wir, dass sie parallel sind.

Als letztes Beispiel betrachten wir die Exfläche, die für einige Koordinatensysteme x^i durch die Gleichungen vom Typus

$$y^\omega = f^\omega(x) + \sum_{r=1}^{M} A^{\omega\, a(r)}_{\cdot\cdot\, i}\, p^i_{a(r)} \tag{3.13}$$

definiert ist. Entwickelnd (3.13) in TAYLORschen Reihen in Umgebung von x^i_0, so hat man

$$y^\omega = f^\omega(x_0) + \frac{\partial f^\omega(x_0)}{\partial x^i}(x^i - x^i_0) + \sum_{r=1}^{M} A^{\omega\, a(r)}_{\cdot\cdot\, i}\, p^i_{a(r)} + [2]\,, \tag{3.14}$$

wobei wir durch [2] die Glieder, welche zweite oder höhere als zweite Potenz von $(x^i - x^i_0)$ enthalten, bezeichnen. Wenn man durch y^ω_P die Koordinaten des Punktes der Exebene

$$y^\omega_P = f^\omega(x_0) + \frac{\partial f^\omega(x_0)}{\partial x^i}(x^i - x^i_0) + \sum_{r=1}^{M} A^{\omega\, a(r)}_{\cdot\cdot\, i}\, p^i_{a(r)} \tag{3.15}$$

bezeichnet, erhält man

$$y^\omega = y^\omega_P + [2]\,. \tag{3.16}$$

Deshalb haben die Exebene (3.15) und die Exfläche (3.13) die gemeinsame Normale am Punkte x^i_0. Ferner, wenn F beliebige durch x^i_0 gehende Basisfläche ist und F^* bzw. F^*_P die entsprechende Exfläche bzw. Exebene ist, dann sind F^* und F^*_P parallel. Daraus haben wir die

Definition. Wir heissen (3.15) die tangente Exebene der Exfläche (3.13) am x^i_0.

§ 14. *Die Exflächen von der Klasse 2.* In § 12 haben wir die Gleichungen (3.1) in zwei Klassen klassifiziert. Die zweite Klasse ist charakterisiert durch: (a) jede Funktion $y^{\omega}(x^i, p^i_{a(r)})$ ist in funktionaler Form invariant unter der zulässigen Parametertransformation, (b) auf jeder Basisfläche besteht $\sum_{i=1}^{N} dx^i dx^i \neq 0$. Wir nehmen die Parametertransformation:

$$(3.17)\quad u^a = u^a(U^A),\ A = 1, 2, \ldots, K;\ \left(\frac{\partial(u^1 u^2 \ldots u^K)}{\partial(U^1 U^2 \ldots U^K)} > 0\right).$$

Wir zeigen das für u^a in $x^i(u)$ $u^a = u^a(U^A)$ substituiierende Ergebnis mit X^i und $X^i{}_{/U^1 U^2 \ldots U^r}$ mit $P^i_{A(\tau)}$. Dann ist die Bedingung (a) folgendermassen umgeschrieben:

Wenn wir u^a in $y^{\omega}(x, p_{a(r)})$ durch (3.17) ersetzen, ist das Ergebnis $y^{\omega}(X, P_{A(\tau)})$. D. h. die funktionale Relation zwischen $y^{\omega}(u)$ und ihren mittelbaren Argumenten $x^i, p^i_{a(1)}, \ldots, p^i_{a(M)}$ ist identisch dieselbe mit der funktionalen Relation zwischen $y^{\omega}(U)$ und ihren mittelbaren Argumenten $X^i, P^i_{A(1)}, \ldots, P^i_{A(M)}$ und für den entsprechenden Wert von u^a und U^A, $(u^a = u^a(U^A))$ haben wir $y^{\omega}(x, p_{a(r)}) = y^{\omega}(X, P_{A(\tau)})$.

Das ungelegene Ergebnis von der Bedingung (a) ist, dass (a) das Verschwinden der Determinante des metrischen Extensors ergibt. Wir wollen es untersuchen. Differenzierend die Identität

$$(3.18)\quad y^{\omega}(x^i, p^i_a, \ldots) = y^{\omega}(x^i, P^i_A U^A_a, \ldots) = y^{\omega}(X^i, P^i_A, \ldots),$$

$$U^A_a = \frac{\partial U^A}{\partial u^a}, \quad \ldots$$

nach $U^A_{a(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, M$, und setzend dann $U^A_a = \delta^A_a$, $U^A_{b(r)} = 0$, $r \geqq 2$, erhalten wir die wohlbekannten Bedingungen

$$(3.19)\qquad \sum_{r=s}^{M} \binom{r}{s} p^i_{b\,a(r-s)} y^{\omega}_{;\,i}{}^{c(s)a(r-s)} = 0, \qquad s \geqq 1.$$

Also wegen der Beziehungen (3.19) ist offenbar der Rang der Matrize

$$(3.20)\qquad (y^{\omega}_{;\,i}{}^{a(r)}), \qquad r = 0, 1, \ldots, M,$$

kleiner als $N\binom{K+M}{M}$. Folglich verschwindet die Determinante des durch (3.3) definierten Fundamentaltensors, und besteht der

Satz 24. Es ist unmöglich, dass die $N\binom{K+M}{M}$ funktional unabhängigen Funktionen $y^{\omega}(x, P_{a(r)})$ immer in funktionaler Form bei der Parametertransformation invariant sind $(M \geqq 1)$.

Als das letzte Ergebnis der Bedingung (a), haben wir den

Satz 25. Die Bestimmungszahlen des metrischen Extensors einer Exfläche von der Klasse 2 und von der Ordnung $M \geqq 1$ können nicht die Funktionen, die nur von x^i abhängen, sein.

Beweis. Im euklidischen Raume E, ist das Flächeninhaltelement durch

$$\sqrt{G}\, du^1 du^2 \ldots du^K \tag{3.21}$$

gegeben, wobei G die Determinante

$$G = |\, g^{a(r)\,b(s)}_{i\quad j}\, p^{\,i}_{a(r)c}\, p^{\,j}_{b(s)d}\,| \,, \qquad c,\ d = 1,\ 2,\ \ldots,\ K \tag{3.22}$$

bezeichnet. In diesem Falle ist das Integral

$$\iint \cdots \int \sqrt{G}\, du^1 du^2 \ldots du^K$$

bei der Parametertransformation invariant, somit muss G der folgenden Beziehung genügen.

$$\sum_{r=1}^{M+1} r\, p^{k}_{cd(r-1)}\, G_{;\ k}^{\ d(r-1)f} = 2\delta^f_c G \,. \tag{3.23}$$

Nach Berechnung aus (3.23) erhalten wir die folgende Identität

$$\sum_{s=0}^{M} s g^{d(s)\,b(t)}_{k\quad j}\, p^{\,k}_{d(s)c}\, p^{\,j}_{b(t)e}\, G^{fe} = 0, \qquad c,\ f = 1,\ 2,\ \ldots,\ K, \tag{3.24}$$

wobei wir die algebraische Komplemente von $g^{a(s)\,b(t)}_{k\quad j}\, p^{\,k}_{a(s)c}\, p^{\,j}_{b(t)d}$ mit G^{cd} bezeichnen. Da die Determinante G nicht verschwinden soll, muss auch die Determinante $|\, G^{cd}\,|$ verschieden von Null sein. Also haben wir die Identität

$$\sum_{s=0}^{M} s g^{a(s)\,b(t)}_{k\quad j}\, p^{\,k}_{a(s)c}\, p^{\,j}_{b(t)d} = 0 \,. \tag{3.25}$$

Daraus müssen alle $g^{a(s)\,b(t)}_{k\quad j}$ verschwinden. Das ist Widerspruch und die Behauptung des Satzes besteht.

LITERATURVERZEICHNIS

E. BOMPIANI

[1] Geometria riemanniane di specie superiore, Memoria della classe di scienze fisiche, matematiche e natureli, Reale Accademia d'Italia, 6 (1935), 269–520.

E. BORTOLOTTI

[1] Vedute generali sul calcolo di Vitali e sue estensioni, Rend. Lincei, 19 (1934), 777–781, 854–859.

[2] Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizato del Vitali, e applicazione alle geometria riemanniane di specie superiore, Parte I, Parte II, Rend. di Padova 2 (1931), 1–48, 164–206.

H. V. CRAIG

[1] On a generalized tangent vector, Amer. J. M., 57 (1935), 457–462.

[2] On tensors relative to the extended point transformation, Amer. J. M., 59 (1937), 764–774.

[3] On extensors and a Euclidean basis for higher order spaces, Amer. J. M., 61 (1939), 791–808.

A. KAWAGUCHI

[1] On the contractions of extensors, Proc. I. A. Tok., 14 (1938), 237–241.

[2] Einige Sätze über die Extensoren, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 17 (1938). 166–176.

[3] Eine Verallgemeinerung von Extensoren, Monatsh., 48 (1939), 329–339.

[4] Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren, J. F. S, Hok., 9 (1940), 1–152.

A. KAWAGUCHI und H. HOMBU

[1] Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, J. F. S. Hok., 6 (1937), 21–62.

T. OHKUBO

[1] A certain generalization of Cartan space, Tensor, 6 (1943), 45–48.

T. SUGŌRI

[1] The geometry of K-spreads of higher order, Memoirs Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 1 (1941), 143–166.

G. VITALI

[1] Geometria nello spazio Hilbertiano, Bologna, 1929.

[2] Nuovi Contributi alla nozione di derivazione covariante, Rend. di Padova, 1 (1930), 46–72.