経済学研究 55-4
北海道大学 2006.3

インフレーションと資本蓄積

工　藤　教　孝

1．はじめに

日本経済は1990年代のいわゆる「失われた十年」をようやく抜けようとしている状況であるが，90年代後半はデフレーションが加速し，いかにしてデフレを克服するかというのがマクロ経済の重要なテーマとなった。90年代という時代はマクロ経済学や貨幣理論にも大きな変化のあった時代であった。まず，サーチ理論という新しいツールが貨幣理論に応用され，貨幣についての理解が飛躍的に前進した。また，日本のデフレや超低金利政策などに触発され，「流動性のわな」やデフレーションなどというテーマが脚光を浴び，90年代は金融政策の理論分析が大いに盛り上がった時代でもある。

現実の経済ではデフレ克服のためのさまざまなアイデアが提示され，中でもインフレ目標についての議論は現在も続いている。デフレーション，つまり物価水準の継続的な下落が経済に悪影響を及ぼすという大前提で実際の政策の議論は行われている様子である。ところが，インフレが経済成長を促すことを理論的に示すのは案外と困難なのである。本稿ではインフレが資本蓄積を促進するかどうかというテーマで3つのモデルを紹介する。基本となるモデルは新古典派経済成長モデルで，そこに貨幣を導入するわけだが，貨幣のモデル化の方法によってインフレと資本蓄積の関係が全く異なることを示すのが本稿の目的である。

貨幣の役割として非常に有名なものとして『欲求の二重の一致』というものがある。それを簡潔に述べると以下の通りである。ある経済学者がコーヒーを飲みたいと思って喫茶店に行ったとしよう。経済学者は経済学の講義というサービスを売っており，喫茶店ではコーヒーを売っている。貨幣のない世界でこの経済学者がコーヒーを楽しむためには「経済学の講義」とコーヒーを交換してもらう必要がある。この取引が成立するためには双方がお互いの財やサービスを欲している必要があるのだが，経済学の講義を聴きたい喫茶店の店主を探すのはかなり困難であろう。ところが，もしも貨幣があれば，この経済学の講義を聴きたい人から貨幣を手に入れて，その貨幣を喫茶店に渡してコーヒーを購入できるので，欲求が一方通行でよいことになる。すなわち貨幣が取引の手間を大きく減らすことに貢献していると考えられる。

本来上記のような摩擦的な市場を詳細に描写した上で貨幣をモデル化すべきなのであるが，そのかわりに，市場取引に何らかの摩擦があり，貨幣を用いて取引を行うことでその摩擦を緩和できる，と「仮定」してみよう。本稿の前半ではその代表格ともいえる二つのモデルを紹介してその性質を分析する。その主な結論は，インフレは資本蓄積に対して中立となるか，または阻害要因となるかのどちらかである。では貨幣の役割をより詳細にモデル化したうえでインフレと資本蓄積の関係を調べるとどのような結論になるのだろうか。その場合にはインフレは資本蓄積を促進する可能性がある。つまり，同じ経済成長モデルを貨幣経済に拡張しても，貨幣のモデル化の違いによって

結論が大きく異なるのである。

2．MIUF モデル

貨幣を使うことには何らかの便益がある。だからこそ我々は貨幣を保有するのであるが，それを最も簡単に理論的に描写できるのが MIUF モデル（Money-in-the-utility function）というモデルである。その名のとおり，貨幣保有量が家計の効用関数に入るため，一般の財同様に需要関数を導出できるのがその強みである。ただし，貨幣理論としては，貨幣保有に効用が発生するというかなり手っ取り早い方法論であり批判も絶えない。しかし，その操作性の高さから現在も金融政策分析など数多くの応用研究に活用されている。MIUF モデルを使ってインフレと資本蓄積を最初に分析したのは Sidrauski（1967a，1967b）であるが，ここではその離散時間版のモデルを紹介する。後で述べるが，離散時間モデルにするとどのタイミングの貨幣保有量が効用関数に入るべきかについて注意が必要となる。

生産や資本蓄積については一部門新古典派経済成長モデルの設定に従うことにする。産出水準は $Y_t = F(K_t, N_t)$ で決定され，生産関数 F は収穫一定を仮定する。ここで K_t と N_t はそれぞれ資本ストックと労働投入である。単純化のため労働供給は一定とする。具体的には，各家計労働供給量を 1 とし，市場全体での労働供給量 N_t は労働人口に等しくなる。後に労働人口を 1 に基準化する。したがって人口成長はない。

この経済を代表する家計を考えよう。まず，経済全体の実質ベースでの予算制約は

$$C_t = \frac{M_{t+1}}{p_t} + K_{t+1} = F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t + \frac{M_t}{p_t} + \frac{H_t}{p_t} \tag{1}$$

である。ここで C_t は総消費量，M_t は第 t 期首における名目貨幣数量，p_t は物価水準，K_t は資本ストック，H_t は政府からの所得移転，最後に δ は資本減耗率である。この式を労働人口 N_t で割って一人当たりの予算制約式にすると

$$c_t + \frac{p_{t+1}}{p_t} m_{t+1} + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t + m_t + h_t \tag{2}$$

と表すことができる。ここで，全ての小文字の変数は一人当たり実質の単位になっている。家計は今期の生産 $f(k_t)$ を労働所得と資本所得の形で得て，前の期からの貨幣と資本の保有も今期処分可能であると仮定する。ただし資本は減耗してしまうので一部しか回収できない。政府からの所得移転は貨幣の形で行われる。これがいわゆるヘリコプター・ドロップである。家計は可処分所得を消費と貯蓄に振り分ける。貯蓄の手段は貨幣と資本である。貨幣は名目利子を生まないので，資本に比べると貯蓄手段としては劣位にある。にも関わらず人々が貨幣を保有するのは，貨幣が取引を円滑にすることを通じて我々に便益を与えているからに他ならない。

具体的に貨幣が果たす機能をモデル化するかわりに，MIUF モデルでは実質貨幣保有が家計に効用を与えていると仮定する。MIUF モデルにおける典型的な効用関数の形状は $U(c_t, m_t)$ である。ここで注意が必要なのは，家計が直接効用を得るのはどのタイミングでどのように測った貨幣保有からなのか，という問題である。ひとつの考え方は $U(c_t, M_{t+1}/p_t)$ で，もうひとつは $U(c_t, M_t)$ である。前者のような効用関数を用いることも可能であり，そして実は多くの分析で用いられてきた

が，家計の予算制約式から分かるように，このタイミングだと現時点の消費の後，つまり買い物が終わった時点で保有している実質貨幣保有量から効用を得ていることになる。貨幣が取引を円滑にしたことによって得られた効用とは呼びがたいのではないだろうか。むしろ，今ポケットに入れていること自体を喜んでいるかのようである。後者のモデル化だと，貨幣保有量をその購買力で調整をしていないので，紙切れを家においておくことで幸福だということになってしまう。「貨幣保有により取引が円滑になる」という部分をほんの少しでも描写するには，今日の取引に備えて昨日保有しておいた貨幣を今日の購買力で調整した量から便益を得る，という定式化が最も適切だと考えられる。このような MIUF モデルにおける効用発生のタイミングについての研究が出版されたのは実は意外と最近なのである。Carlstrom-Fuerst（2001）を参照のこと。

家計は制約条件(2)と初期値 m_0, k_0 の下で生涯効用 $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t, m_t)$ を最大化するように消費，貨幣保有，そして資本ストックを選ぶ。β は割引因子である。このような動学的最適化問題を分析するために本稿ではダイナミック・プログラミングを使うことにする。対応するベルマン方程式は

$$v(k_t, m_t) = \max_{c_t, k_{t+1}, m_{t+1}} \{U(c_t, m_t) + \beta v(k_{t+1}, m_{t+1})\} \tag{3}$$

で，制約条件は(2)で与えられる。$v(k_t, m_t)$ は価値関数（value function）と呼び，これは状態変数についての関数となっている。まず(2)を c_t について解いて $c_t = \phi(m_{t+1}, k_{t+1}; m_t, k_t)$ として，これを使ってベルマン方程式を書き換えると

$$v(k_t, m_t) = \max_{k_{t+1}, m_{t+1}} \{U(\phi(m_{t+1}, k_{t+1}; m_t, k_t), m_t) + \beta v(k_{t+1}, m_{t+1})\} \tag{4}$$

となる。選択変数 k_{t+1} と m_{t+1} に関する最大化一階の条件はそれぞれ

$$-U_1(c_t, m_t) + \beta v_1(k_{t+1}, m_{t+1}) = 0 \tag{5}$$

$$-U_1(c_t, m_t)\frac{p_{t+1}}{p_t} + \beta v_2(k_{t+1}, m_{t+1}) = 0 \tag{6}$$

である。包絡線条件（envelope conditions）は価値関数を状態変数 k_t と m_t に関して微分して得られるので

$$v_1(k_t, m_t) = U_1(c_t, m_t)[f'(k_t) + 1 - \delta] \tag{7}$$

$$v_2(k_t, m_t) = U_1(c_t, m_t) + U_2(c_t, m_t) \tag{8}$$

である。これらを書き換えると異時点間の最適化条件であるオイラー方程式

$$U_1(k_t, m_t) = \beta U_1(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] \tag{9}$$

と，貨幣と消費財の代替条件

$$U_1(c_t, m_t)\frac{p_{t+1}}{p_t} = \beta[U_1(c_{t+1}, m_{t+1}) + U_2(c_{t+1}, m_{t+1})] \tag{10}$$

が得られる。

均衡は最適化の条件式である(9)と(10)および予算制約式，そして貨幣供給が決まれば描写できる。貨幣はいわゆる k パーセントルールに従って供給されると仮定しよう。したがって σ を貨幣供給成長率とすると $M_{t+1}=\sigma M_t=M_t+H_t$ が成り立つ。すると均衡での予算制約は

$$c_t+k_{t+1}=f(k_t)+(1-\delta)k_t \tag{11}$$

となる。

定常状態に着目しよう。オイラー方程式(9)より

$$\beta^{-1}=f'(k)+1-\delta \tag{12}$$

が定常状態で成り立つことを確認できる。また，定常状態では $p_{t+1}/p_t=\sigma$，つまり貨幣供給の成長率が長期的にはインフレ率を決定していることになる。すると(10)も書き換えることができて

$$\frac{U_2(c,m)}{U_1(c,m)}=\frac{\sigma}{\beta}-1. \tag{13}$$

となる。ここで最も重要なのは(12)である。よく見るとこの式のみで定常状態における資本ストックが決まっている。そしてこの方程式には σ が含まれていない。つまり貨幣供給速度（つまりインフレ率）の変化が資本蓄積に全く影響を与えていないということを意味する。文献ではこれを貨幣の超中立性（superneutrality of money）と呼ぶ。

3．CIA モデル

この節では Stockman（1981）や Abel（1985）に従ってインフレーションと資本蓄積の関係について見ていく。MIUF モデルでは実質貨幣保有が何らかの役割を果たしそれが効用を生むと考えたが，ここではもうすこし具体的に貨幣の役割をモデル化する。ここでの仮定は，家計が財を購入するためには貨幣を使わなければならないというもので，さらにそのための貨幣は1期前に用意しておかなければならないと仮定する。このような制約を CIA（Cash-in-advance）制約と呼ぶ。また， CIA 制約を通じて貨幣需要を発生させるモデルは CIA モデルと呼ばれ，MIUF モデルとならび，金融政策の理論分析などに広く応用されている。

では前節と同様に代表的家計を考察しよう。家計の予算制約式は

$$c_t+\frac{p_{t+1}}{p_t}m_{t+1}+k_{t+1}=f(k_t)+(1-\delta)k_t+m_t+h_t \tag{14}$$

で，これは前節のもの(2)と同じである。家計はもう一つの制約，CIA（Cash-in-advance）制約に直面する。

$$c_t+\eta i_t\leq m_t \tag{15}$$

ここで $i_t=k_{t+1}-(1-\delta)k_t$ は投資財の購入量で，η は0か1の値をとる定数である。この CIA 制

約は通常のものよりも一般的な記述になっている。もしも $\eta=0$ の場合，家計は次の期の消費に十分な貨幣を保有していればよいことを意味し，$\eta=1$ だと CIA 制約が消費財だけでなく資本財の購入に対しても効力を持つことになる。家計は制約条件式(14)と(15)，そして初期値の m_0 と k_0 のもとで生涯効用 $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t)$ を最大化するように行動する。k_t, m_t が状態変数なので，ベルマン方程式は

$$v(k_t,m_t)=\max_{k_{t+1},m_{t+1}}\{U(\phi(m_{t+1},k_{t+1};m_t,k_t))+\beta v(k_{t+1},m_{t+1})\} \tag{16}$$

で，この最大化問題には不等号制約(15)がかかっている。λ_t をこの不等式についてのクーン・タッカー乗数とすると，最大化問題の一階の条件は

$$-U'(c_t)-\eta\lambda_t+\beta v_1(k_{t+1},m_{t+1})=0 \tag{17}$$

$$-U'(c_t)\frac{p_{t+1}}{p_t}+\beta v_2(k_{t+1},m_{t+1})=0 \tag{18}$$

$$[m_t-c_t-\eta(k_{t+1}-(1-\delta)k_t)]\lambda_t=0 \tag{19}$$

で，包絡線条件(envelope conditions)は

$$v_1(k_t,m_t)=U'(c_t)[f'(k_t)+1-\delta]+\eta(1-\delta)\lambda_t \tag{20}$$

$$v_2(k_t,m_t)=U'(c_t)+\lambda_t \tag{21}$$

である。

それではこの経済の均衡をみていこう。特に，CIA 制約が等号であるような貨幣均衡，Binding monetary equilibrium に焦点を当てる。(17)から(21)までを整理すると

$$U'(c_t)+\eta\lambda_t=\beta[U'(c_{t+1}[f'(k_{t+1})+1-\delta]+\eta(1-\delta)\lambda_{t+1}]$$

$$U'(c_t)\frac{p_{t+1}}{p_t}=\beta[U'(c_{t+1})+\lambda_{t+1}]$$

を得る。さらに，定常状態においては

$$U'(c)+\eta\lambda=\beta[U'(c)[f'(k)+1-\delta]+\eta(1-\delta)\lambda]$$

$$U'(c)\sigma=\beta[U'(c)+\lambda]$$

が成り立つ。Binding monetary equilibrium では $\lambda\neq 0$ なので，

$$\frac{U'(c)}{\lambda}+\eta=\beta[\frac{U'(c)}{\lambda}[f'(k)+1-\delta]+\eta(1-\delta)]$$

$$\frac{U'(c)}{\lambda}=\left(\frac{\sigma}{\beta}-1\right)^{-1}$$

と書き換えることができる。これらの式から$U'(c)/\lambda$ を消去してまとめると

$$1+[1-\beta(1-\delta)]\left(\frac{\sigma}{\beta}-1\right)\eta=\beta[f'(k)+1-\delta] \tag{22}$$

となる。(22)より，$dk/d\sigma<0$ となることを確認できる。したがって，$\eta=1$ のときにはインフレは資本蓄積に負の影響を与える。一方，$\eta=0$ のときは

$$\beta^{-1}=f'(k)+1-\delta$$

が成り立つ。つまり，CIA 制約が消費財の購入にのみかかっている場合にはインフレは資本蓄積に対して中立となる。

この結果は注目に値する。MIUF モデルはインフレは資本蓄積に中立であったのに対し，CIA モデルでは貨幣が資本蓄積を阻害する場合があるのだ。ただしその理由は非常に単純で，資本財を購入するために貨幣を使う必要があり，インフレが貨幣の購買力を減少させれば資本財の購入にも悪影響がでるというものである。したがって，CIA 制約が資本財の購入に対して効力がなければこのモデルでも貨幣は超中立的となるのである。

4．摩擦的市場における貨幣と資本蓄積

いままで見てきた MIUF モデルや CIA モデルはマクロ経済学，特に金融政策の理論分析に頻繁に活用されてきた。しかしながら，貨幣保有から効用が発生したり，財の購入に貨幣が必要だと仮定するなど，貨幣理論としてはミクロ的な基礎付けが不十分だと言わざるを得ない。

そもそも，新古典派成長モデルは貨幣のないモデルである。つまり貨幣が存在しなくても全ての取引が瞬時に達成されるような世界を想定しているわけで，その意味で MIUF モデルや CIA モデルは貨幣の必要ない経済に無理やり貨幣を導入したのである。貨幣をより正確にモデル化するならば，まずは貨幣がないと市場取引が滞るような，そんな「摩擦」のある市場をモデル化する必要があるのだ。

摩擦的市場をモデル化し，そこから貨幣理論の再構築を行ったのが Kiyotaki-Wright（1989，1991，1993）である。彼らはワルラス的市場の仮定を捨て，人々が確率的に一対一でのみ出会えるような環境を考えた。このような分野は一般にサーチ・モデル，またはマッチング・モデルと呼ばれ，労働市場や財市場，そして結婚市場などの分析に広く応用されている。このような環境のなかで取引を行う場合，もしも貨幣を保有していないと取引は全て物々交換を通じて行う必要がある。よく知られているように，物々交換が成立するためにはお互いがお互いの保有する財が欲しいという「欲求の二重の一致」が必要となる。このような経済環境をモデル化したうえで Kiyotaki-Wright は MIUF や CIA に頼ることなく貨幣需要が発生することを示した。

貨幣理論としてもう一つ重要な性質がある。それは貨幣が無価値となるような均衡の存在である。つまり，MIUF や CIA などの制約がない環境で人々が自発的に貨幣を保有しているモデルでは，当然貨幣の受け取りを拒否するという自由が認められていなければならない。自分が保有している財やサービスを手放して貨幣を手に入れたいと思う背後にあるのは「後に他の誰かが貨幣と交換に財やサービスを自分に提供してくれる」という予測または確信があって初めて自分自身も貨幣を受け取ることができるのである。Kiyotaki-Wright モデルにはこのような要素がしっかりと組み

込まれているのである。

ただし，このようなサーチ・モデルは経済成長などのマクロ経済モデルとの相性が非常に悪いことで知られている。実際，Kiyotaki-Wright モデルでは，各経済主体は 1 単位しか貨幣を保有できない。これでは貨幣供給速度を全くモデル化できないのである。

この節では Shi（1997，1999）のアイデアを紹介する。基本的な考え方は，新古典派成長モデルの枠組みを大きく変更することなく，そこにサーチやマッチングのエッセンスを持ち込もうというものである。Kiyotaki-Wright の世界をモデル化するためには無数の売り手と買い手が市場で確率的に一対一で出会うという状況が成長モデルの中で起きている必要があり，そこが難しい。そこで，Shi は無数の家族からなる家計を想定し，そのメンバーそれぞれが売り手や買い手として市場に出かけて他の家計のメンバーと取引を行う，という大変ユニークなモデルを考案した。以下ではそのモデルを解説し，Shi モデルにおけるインフレと資本蓄積の関係を分析する。

経済全体では H 種類の家計が存在していて H は十分に大きいとしよう。そしてそれぞれの家計には無数の家族がいて人数を 1 と基準化する。この経済に存在する消費財の種類も H であるとする。そのなかのひとつの家計を取り出してみよう。家計 h は第 h 財のみ消費するような選好を持っていて，第 $h+1$ 財を生産する能力しか持っていないと仮定しよう。この仮定があると欲求の二重の一致が起きないので物々交換を分析から排除することができる。あくまで単純化のためである。市場に行くと必ず誰かに会えるとしよう。すると $\alpha \equiv 1/H$ の確率で取引の機会が訪れることになる。

それぞれの家計は人口 1 の連続体で構成されているが，家計はそのメンバーのうち買い手の割合と売り手の割合を決め，残りのメンバーは余暇を楽しむと考えよう。あたかも個人が時間配分を決めるかのような分析が可能になるのである。買い手のサイズ（割合）を b_t，売り手のサイズを n（定数）とすると，市場に参加しない $1-n-b_t$ の人々は余暇を楽しむことになる。個々のメンバーは異なる活動をしていても，毎期毎期全ての成果は一度家計単位で集計され，メンバー全てが同じ効用を共有すると考えよう。無数の個人からなる家計でもあり，1 個人のようでもあるのだ。もちろん不自然な設定だが，ここまでしないとサーチ理論は新古典派理論と融合しないということなのだ。

さて，経済には H という数の家計がいるが，全ての家計は対称であると考えよう。したがって，特定の家計 h とその潜在的取引相手となる家計のみ描写すればよい。タイプ h の買い手にとっての潜在的な取引相手はタイプ $h-1$ の家計にいる売り手で，タイプ h の売り手にとっての潜在的な取引相手はタイプ $h+1$ の家計にいる買い手である。他の家計における買い手と売り手のサイズを B_t と N とすると，タイプ h の買い手が取引機会を得る確率は $\alpha N=N/H$ で，売り手にとっては αB_t である。

家計は資本と貨幣の二種類の資産を保有でき，それらの t 期首における保有量をそれぞれ k_t と m_t で表す。その他の家計については大文字を用いるものとする。各時点 t に家計が得る効用を u_1 で表して $\beta<1$ を割引率（時間選好因子）とすると，家計の生涯効用は $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u_t$ で表せる。家計は生涯効用を最大化させるように行動し，最大化された生涯効用を t 時点で評価して価値関数を用いて表現すると $v(k_t,m_t)$ となる。任意の t 時点の期首において資本ストックと貨幣保有量は所与，つまり先決変数となっている。つまり，k_1 および m_t は状態変数である。1 期先の価値関数を貨幣保有量で偏微分して割り引いたもの，$\omega_t\equiv\beta v_2(k_t,m_t)$，の経済学的意味は来期のための貨幣保

有を増やすことがその後の生涯効用にどう影響するかを測っているので，ここでは貨幣の限界価値とでも呼んでおこう。取引相手となる家計は貨幣の限界価値を Ω_t と認識しているとしよう。

生産活動は個々の売り手が行う。市場に参加する前ではなく，市場で取引相手を見つけた場合に限り生産を行い，そして瞬間的に生産が可能であると仮定する。生産関数はコブ－ダグラス型を仮定する。つまり，労働投入量 l_t と売り手一人当たりの資本 k_t/n から産出される消費財 $h+1$ の量は $F(l_t, k_t/n) = l_t^{\varepsilon}(k_t/n)^{1-\varepsilon}$ で，$\varepsilon \in (0,1)$ である。取引相手が得る財の量を Q_t として，l_t に関してこれを解くと，

$$l_t = Q_t^{1/\varepsilon}\left(\frac{k_t}{n}\right)^{1-1/\varepsilon} \tag{23}$$

となることがわかる。この式は，相手の要求 Q_t を満たすために必要な労働量はどれだけかを示している。

次に家計の選好について描写しよう。まず，消費から家計が得る効用は消費量に比例すると仮定する。つまり a を正の定数とすると $u(c_t) = ac_t$ である。当然 a は消費の限界効用となっている。生産活動からの不効用は $\Phi(l_t) = l_t^{\sigma}$ で $\sigma > 1$ である。この不効用は運良く売り手が取引機会を得たときのみかかるものである。取引機会の有無にかかわらず，市場に参加したかどうかにのみ依存する効用が余暇の部分である。分析を単純にするため，家計のメンバーが余暇を楽しむと一人当たり $\varphi > 1$ を得て，市場に参加する場合は余暇として1のみ効用を得るとする。他の設定でも構わないが，ここでは Shi（1999）の方法に従っている。

次に市場での取引について描写しよう。市場取引を行うのは分子のように小さなメンバーたちである。彼らが確率的に取引相手を見つけ，一対一で取引の条件を決めるので，新古典派成長理論の枠組みを借りているとはいえ，ワルラス的な市場均衡概念は使えない。そこで一対一で交渉ゲームに突入するのだが，交渉プロセスを描写するのは骨の折れる作業である。そこで，ここでは交渉ゲームのうち最も分析が簡単な「最後通告オファー型」の交渉ゲームを採用する。実は売り手が最後通告を行うような環境では貨幣が無価値になってしまうことが知られているので，ここでは常に買い手がオファーを出すと仮定する。家計 h に属する買い手のなかから取引相手のいる者を一人取り出して彼を買い手 j と呼ぶことにしよう。彼が取引相手に提示するのは財の数量 $q_t(j)$ とそれと交換に渡す貨幣の量 $x_t(j)$ の組で，それらは取引相手にとって取引を受け入れることと拒否することがちょうど無差別になるように選ばれるべきである。平たく言うと，「相手がぎりぎり売ってくれるような取引条件を提案する」ということである。実はもう一つ条件がある。買い手 j は市場に参加している間に貨幣保有量を変更できないので，自分がそのときに保有している貨幣量以上を提案できない。別の言い方をすると，保有している貨幣量が少ない時はそれに見合った量の買い物しかできない。つまり，個々の買い手は前節同様 CIA 制約に直面しているのである。それらの条件をまとめると以下のようになる。

$$x_t(j) \geq \frac{1}{\Omega_t}\,\Phi\left(q_t(j)^{1/\varepsilon}\left(\frac{K_t}{N}\right)^{1-1/\varepsilon}\right) \tag{24}$$

$$x_t(j) \leq \frac{m_t}{b_t} \tag{25}$$

簡単に証明しておこう。買い手 j は取引相手に対して $x_t(j)$ の貨幣と交換に数量 $q_t(j)$ の財を要求する。この提案を受け入れるとき，相手は

$$L_t = q_t(j)^{1/\varepsilon}\left(\frac{K_t}{N}\right)^{1-1/\varepsilon}$$

だけ労働投入が必要になる。その一方で貨幣数量の増加は家計に対して Ω_t の貢献があるので，相手が得る純利得は

$$\Omega_t x_t(j) - \Phi(L_t)$$

と 表すことができる。つまり，オファーを出すときはこの純利得がゼロまたはそれよりもほんのすこしでも大きければ相手は受け入れてくれる，ということになる。以後はこの条件が等号である場合に限定して分析する。二つ目の条件は，買い手一人当たりの貨幣保有量が m_t/b_t なので，自明である。

以上を踏まえて，今度は家計が直面する資源配分問題を考察しよう。タイプ h の家計が直面する予算制約式は

$$c_t + k_{t+1} = \alpha N b_t \cdot q_t + k_t \tag{26}$$

である。$\alpha N b_t q_t$ の消費財が手に入る。タイプ h の家計は財 h を消費できるだけでなく，それを資本に自由に変換することもできると仮定していることに注意して欲しい。なお，資本減耗はないと仮定している。貨幣数量の変化は以下のとおりである。

$$\alpha N b_t \cdot x_t + m_{t+1} = m_t + \tau_t + \alpha n B_t \cdot X_t \tag{27}$$

前の期から持ち越した貨幣数量に加えて政府から τ_t が注入される。さらに，売り手が獲得してきた貨幣の量が $\alpha n B_t X_t$ である。これらの貨幣の一部は買い手が持って行き，残りは来期のために持ち越される。

家計の単位で各期に得られる効用を集計すると

$$u_t = a c_t - \alpha n B_t \cdot \Phi(l_t) + (1-n-b_t)\cdot\varphi + (n-b_t)\cdot 1 \tag{28}$$

なので，家計 h の効用最大化問題を価値関数を用いて表現すると

$$v(k_t, m_t) = \max_{c_t, b_t, k_{t+1}, q_t, x_t} \{u_t + \beta v(k_{t+1}, m_{t+1})\} \tag{29}$$

で，この最大化問題は(23)－(28)の制約のもとで解く必要がある。また，この家計にとって $B_t, K_{t+1}, M_{t+1}, Q_t, X_t, L_t, \tau_t$ は所与である。

現時点では選択変数も制約式の数も多いので，変数の数を減らして問題を単純化させよう。まず，予算制約式(26)を目的関数(28)に代入して c_t を消去すると

$$u_t = a[\alpha Nb_t q_t + k_t - k_{t+1}] - \alpha nB_t \Phi\left(Q_t^{1/\varepsilon}\left(\frac{k_t}{n}\right)^{1-1/\varepsilon}\right) + (1-n-b_t)\varphi + n - b_t$$

$$\equiv U(b_t, k_{t+1}, q_t; k_t) \tag{30}$$

を得る。これにより，家計の目的関数を選択変数 b_t, k_{t+1}, q_t と状態変数 k_t の関数というところまで単純化できた。次に(24)と(27)から x_t を消去すると

$$m_{t+1} = m_t + \tau_t + \alpha nB_t X_t - \alpha Nb_t \frac{1}{\Omega_t}\Phi\left(q_t^{1/\varepsilon}\left(\frac{K_t}{n}\right)^{1-1/\varepsilon}\right)$$

$$\equiv z(b_t, q_t; m_t) \tag{31}$$

を得る。来期の貨幣保有量が選択変数 b_t, q_t と状態変数 m_t に依存することが分かる。貨幣保有に関する条件式は(24)と(25)より得られる。

$$\frac{1}{\Omega_t}\Phi\left(q_t^{1/\varepsilon}\left(\frac{K_t}{N}\right)^{1-1/\varepsilon}\right) \leq \frac{m_t}{b_t} \tag{32}$$

この不等号制約は CIA 制約から来たもので，取引機会を得た買い手のみに関わるものである。つまり，この制約に直面するメンバーは αNb_t ほどいる。

もう一度家計の問題を価値関数を用いて記述すると，

$$v(k_t, m_t) = \max_{b_t, k_{t+1}, q_t}\{U(b_t, k_{t+1}, q_t; k_t) + \beta v(k_{t+1}, z(b_t, q_t; m_t))\} \tag{33}$$

となり，最大化問題は不等号制約(32)の下で解く必要がある。この不等号制約にかかるクーン－タッカー乗数を λ_t とすると，クーン－タッカー条件は，$\lambda_t > 0$ でかつ(32)が等号で成り立っているか，または $\lambda_t > 0$ でかつ(32)が厳密な不等号，つまり制約がスラックになっているかのどちらかである。

残りの条件式を導出しよう。ダイナミック・プログラミングを使って動学的最適化を行う場合，選択変数に関する一階の条件と状態変数に関する包絡線条件(envelope conditions)の二種類必要である。まず，選択変数に関する条件を求めると，k_{t+1} に関しては

$$-a + \beta v_1(k_{t+1}, m_{t+1}) = 0 \tag{34}$$

で，q_t に関しては

$$a\alpha Nb_t - \beta v_2(k_{t+1}, m_{t+1})\alpha Nb_t \frac{1}{\varepsilon\Omega_t}\Phi'(L_t)\, q_t^{1/\varepsilon - 1}\left(\frac{K_t}{N}\right)^{1-1/\varepsilon}$$

$$-\lambda_t \alpha Nb_t \frac{1}{\varepsilon\Omega_t}\Phi'(L_t)\, q_t^{1/\varepsilon - 1}\left(\frac{K_t}{N}\right)^{1-1/\varepsilon} = 0 \tag{35}$$

を得る。b_t についての条件式は，内点解を仮定すると

$$a\alpha N q_t - \varphi + 1 - \beta v_2(k_{t+1}, m_{t+1})\alpha N \frac{1}{\Omega_t}\Phi(L_t) - \lambda_t \alpha N \frac{m_t}{b_t} = 0 \tag{36}$$

である。k_t と m_t についての包絡線条件（envelope conditions）はそれぞれ

$$v_1(k_t, m_t) = a - \alpha n B_t \Phi'(l_t)\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon n} Q_t^{1/\varepsilon}\left(\frac{k_t}{n}\right)^{-1/\varepsilon} \tag{37}$$

$$v_2(k_t, m_t) = \beta v_2(k_{t+1}, m_{t+1}) + \lambda_t \alpha N \tag{38}$$

である。

それではこのモデルの均衡を描写してその性質を調べてみよう。まず，不必要に議論を複雑化させないために，興味の対象となる均衡を絞り込もう。最初の絞込みの条件は対称性で，全ての家計が同一の資源配分問題に直面しているだけでなく，家計内でも全ての買い手と売り手がそれぞれ同一の行動をとる。つまり，提示する取引条件は買い手が誰であり，どのタイプの家計に属しているかに全く依存せずに決定できる。もう一つの条件は $\lambda_t > 0$ である。言い換えると，CIA 制約が等号で成り立っている，つまり不要な貨幣は持ち歩かない，ということである。

全ての家計が同じ状況に直面して同じ資源配分を行う，つまり対象性より，均衡では $k_t = K_t$，$b_t = B_t$，$n = N$，$q_t = Q_t$，$\omega_t = \Omega_t$，$l_t = L_t$，$x_t = X_t$，$m_t = M_t$，$c_t = C_t$ が成り立つ。最後に，このモデルを閉じるために金融政策についてモデル化しよう。各家計に毎期注入される貨幣は $\tau_t = (\gamma - 1)m_t$ のルールに従い，結果，$m_{t+1} = \gamma m_t$ となる。

この均衡を描写する動学方程式を導出しよう。まず。(36)式は q_t について解くことができて，

$$q_t = \frac{(\varphi-1)\sigma}{(\sigma-\varepsilon)\alpha N a} \equiv q_A$$

という定数であることが確認できる。したがって，(23)より

$$l_t = q_A^{1/\varepsilon}\left(\frac{k_t}{n}\right)^{1-1/\varepsilon} \equiv f(k_t)$$

となって k_t のみに依存することが分かる。すると，これを残りの条件式に代入してまとめると

$$k_t = \left[1 - \alpha n - \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\alpha n a q_A}{\Phi[f(k_{t+1})]}\right]\frac{\beta}{\gamma}k_{t+1} \equiv G(k_{t+1})$$

を導出できる。このまま関数 G の性質を調べても良いが，解説しやすいように，関数 G の逆関数を仮定して $k_{t+1} = G^{-1}(k_t) \equiv g(k_t)$ と書き換えよう。すると，一見極めて複雑だったモデルの均衡が k_t のみに関する一階の差分方程式で描写できたことになる。資本がゼロの均衡も存在するが，同時に資本が正の定常状態は一つで，かつ動学的に安定であることが確認できる。貨幣数量の変化率 γ は差分方程式の中で一箇所にしか現れないので比較静学は簡単である。γ の上昇は $g(k_t)$ のグラフを上に引き伸ばすので，長期均衡の資本を拡大させる。Shi（1999）はこの効果を extensive effect と呼んだ。

貨幣供給の速度を引き上げたときの資本蓄積に対する効果が正であるという結論はしばしばトー

ビン効果と呼ばれる。ソローモデルのように家計がモデル化されていない中で貨幣を入れてしまうと，貨幣は単に資本に向かうべき家計の資産の一部を奪うという意味で単に資本蓄積を邪魔する存在としてモデル化されてしまう。もちろん現実の世界でもそのような側面はあるかもしれないが，理論的にはあまりにも当然の結果がでてしまう。つまり，貨幣をどんどん刷ってその魅力を引き下げることによって家計の資産の多くを資本蓄積に再配分できるので産出が拡大するのである。最初から貨幣なんて持たないほうが世の中のためになるようなモデルから出発した帰結である。

すでに確認したように，MIUF モデルの場合，インフレは資本蓄積に対して中立で，CIA モデルでは資本蓄積を阻害する結果が出ている。実は Shi モデルにおいても同様の制約がかかっている。家計は資本財を手に入れるためにはまず消費財を購入してそれを資本に変換するので，現金取引を行わないと資本が手に入らない構造になっている。にもかかわらずインフレが資本蓄積を促すのはなぜなのか。その理由は，インフレによって貨幣価値，つまり資産価値が下がることを嫌う家計が貨幣をより早く使おうとして買い手の数 b_t を増やそうとするのである。この部分が従来の新古典派モデルにはなかった新しい効果なのである。さらに，貨幣成長率 γ がある値を超えると貨幣が無価値になってしまうことも示すことができ，その意味で Shi モデルは新古典派成長モデルの中に自発的な貨幣保有を導入することに成功したのである。

5．結論

本稿ではインフレと経済成長の関係を理論的に考察した。特に，経済成長モデルに貨幣を導入する 3 つの方法を紹介し，それらが全く異なる結論を導くことを指摘した。伝統的な手法である MIUF モデルや CIA モデルの場合，高い操作性を確保できる反面，貨幣は資本蓄積に対して中立または阻害要因であるという結論がでることになる。また，貨幣の役割を基礎からモデル化したサーチ理論アプローチの場合は経済成長モデルとの融合が極めて困難である。Shi はその困難な仕事に挑戦し，インフレが資本蓄積を促進すること，さらにインフレ率が高すぎると貨幣が流通しなくなることを同時に示したが，不自然な仮定も多く，しかもここからさらに拡張するにはややモデルが煩雑である。貨幣理論としての強い基礎があり，なおかつマクロ分析に耐えうるようなモデルは現時点ではまだ考案されておらず，今後もインフレーションと資本蓄積というのはマクロ経済学と貨幣理論のどちらにとっても重要なテーマであり続けるであろう。

参考文献

［1］ Andrew Abel (1985) "Dynamic Behavior of Capital Accumulation in a Cash-in-Advance Model," *Journal of Monetary Economics*, 16, pp. 55-71.

［2］ Charles Carlstrom and Timochy Fuerst (2001) "Timing and Real Indeterminacy in Monetary Models," *Journal of Monetary Economics*, 47, pp. 285-298.

［3］ Nobuhiro Kiyotaki and Randall Wright (1989) "On Money as a Medium of Exchange," *Journal of Political Economy*, 97, pp. 927-954.

［4］ —— and —— (1991) "A Contribution to the Pure Theory of Money," *Journal of Economic Theory*, 53, pp. 215-235.

［5］ —— and —— (1993) "A Search-Theoretic Approach to Monetary Economics," *American Economic Review*, 83, pp. 63-77.

［6］ Bernhard Rauch (2000) "A Divisible Search Model of Fiat Money: A Comment," *Econometrica*, 68, pp. 149-156.

［7］ Shouyong Shi (1997) "A Divisible Search Model of Fiat Money," *Econometrica*, 65, pp. 75-102.

［8］ ———— (1999) "Search, Inflation and Capital Accumulation," *Journal of Monetary Economics*, 44, pp. 81-103.

［9］ Miguel Sidrauski (1967a) "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *American Economic Review*, 57, pp. 534-544.

［10］ Miguel Sidrauski (1967b) "Inflation and Economic Growth," *Journal of Political Economy*, 75, pp. 796-810.

［11］ Alan Stockman (1981) "Anticipated Inflation and the Capital Stock in a Cash-in-Advance Economy," *Journal of Monetary Economics*, 8, pp. 387-393.