HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	On the GIT moduli of semistable pairs consisting of a plane cubic curve and a line [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	黒田, 匡迪
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第11797号
Issue Date	2015-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58587
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Masamichi_Kuroda_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　黒　田　　匡　迪

学 位 論 文 題 名

On the GIT moduli of semistable pairs consisting of a plane cubic curve and a line
（平面三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライについて）

本論文の目的は，平面三次曲線 C と直線 L からなる半安定な組 (C, L) の GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ の研究である．以下，標数が 2，3 でない代数閉体 k 上で考える．はじめに $\overline{P}_{1,3}$ の定義を与える．射影平面 $\mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, x_1, x_2])$ 上の一次斉次多項式全体 $k[x_0, x_1, x_2]_1$ の双対空間を V とする．S^3V を V 上の三次の対称代数，すなわち，三次斉次多項式全体 $k[x_0, x_1, x_2]_3$ の双対空間とし，$\mathrm{Sym}(V)$，$\mathrm{Sym}(S^3V)$ をそれぞれ V，S^3V 上の対称代数とする．このとき，$\mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(V))$，$\mathbb{P}(S^3V) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(S^3V))$ はそれぞれ $\mathbb{P}^2_k$ に含まれるすべての直線，三次曲線からなる空間を表している．なぜならば $\mathbb{P}(V)$，$\mathbb{P}(S^3V)$ の各点はそれぞれ $S \in V^\vee = k[x_0, x_1, x_2]_1$，$F \in (S^3V)^\vee = k[x_0, x_1, x_2]_3$ の零点集合 $V(S)$, $V(F)$ と同一視できるからである．$\mathbb{P}^2_k$ 内の平面三次曲線と直線からなる組全体を表すファイバー積 $\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$ 上に，三次射影線型群スキーム $\mathrm{PGL}(3)$ の $\mathbb{P}^2_k$ への自然な作用から誘導される作用を定める．すなわち，任意の $g \in \mathrm{PGL}(3)$，$(C, L) = (V(F(x)), V(S(x))) \in \mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$ に対し，$g \cdot (C, L) := \left(V\left(F\left(g^{-1} \cdot x\right)\right), V\left(S\left(g^{-1} \cdot x\right)\right)\right)$ とする．この作用による半安定な組全体 $\left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss}$ の GIT-商を $\overline{P}_{1,3}$ とする：

$$p : \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss} \longrightarrow \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss} /\!/ \mathrm{PGL}(3) =: \overline{P}_{1.3}.$$

ここで，GIT-商の詳細な定義は省略するが，任意の z_1，$z_2 \in \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss}$ に対して，GIT-商の定義から直ちに次が従う：

$$p(z_1) = p(z_2) \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{PGL}(3) \cdot z_1} \cap \overline{\mathrm{PGL}(3) \cdot z_2} \cap \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss} \neq \emptyset. \qquad (1)$$

従って，GIT-商 $\overline{P}_{1,3}$ は集合としては半安定な組の閉軌道全体のなす空間と等しい．

次に，組 (C, L) の安定性を調べる判定法を紹介する．それは D. Hilbert 氏と D. Mumford 氏による数値的判定法である．一次一般線型群スキーム $\mathbb{G}_m = \mathrm{GL}(1)$ から $\mathrm{PGL}(3)$ への射 λ を $\mathrm{PGL}(3)$ の 1 変数部分群という．$r_0 \geq r_1 \geq r_2$, $r_0 + r_1 + r_2 = 0$ を満たす整数 r_i を用いて $\lambda(t) = \mathrm{Diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2})$ とかけるとき，λ は正規化された 1 変数部分群と呼ばれる．以下，λ はすべて正規化された 1 変数部分群とする．C, L の定義方程式をそれぞれ $F = \sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x_0^{3-(i+j)} x_1^i x_2^j$, $S = \sum_{0 \leq k \leq 2} b_k x_k$ とし，$H(x, y) := F(x)S(y)$ とする．任意の λ に対し，$\mu(H, \lambda) := \max\left\{(3 - i - j)\, r_0 + i r_1 + j r_2 + r_k \mid a_{ij} b_k \neq 0\right\}$

とする．このとき，組 (C, L) はあらゆる λ に対して $\mu(H, \lambda) \geq 0$ となるとき半安定であり，$\mu(H, \lambda) > 0$ となるとき安定である．半安定でないものを非安定と呼ぶ．

上記の数値的判定法を用いて，半安定な組の幾何学的な条件を調べたいが，λ は無数に存在するので，半安定な組を直接分類するのは困難である．そのため，ある λ に対して $\mu(H, \lambda) < 0$ となる，すなわち，非安定となる $H(x, y) = F(x)S(y)$ の係数の条件を決定する．この条件と同値な (C, L) の幾何学的な条件を求めることで，非安定な組の幾何学的な分類が得られる．この幾何学的な条件を否定することで，半安定な組の幾何学的な分類が得られる．さらに，この半安定な条件に加えて，ある λ に対して $\mu(H, \lambda) = 0$ となることを仮定して，同様の操作を行うことで，半安定な組と安定な組を分類することが出来る．

本論文では，上記の手法による，非安定，半安定あるいは安定な組の幾何学的な分類を完全に与えている．また，半安定な組の $\overline{P}_{1,3}$ における (1) による非自明な同一視，すなわち，PGL(3) の作用では移りあわないが，閉軌道が交わるものを与えている．以上が第三章までの内容である．

第四章では $\overline{P}_{1,3}$ と V. Alexeev 氏により構成された完備モジュライ空間 $\overline{AP}_{1,3}$ との比較を与えている．$\overline{AP}_{1,3}$ は高々，結節点を持つ三次曲線 C と C の特異点を通らない直線 L からなる組 (C, L) のモジュライである．どちらのモジュライも三次元なので，密接な関係が期待される．実際，簡単な計算により，双有理写像 $f : \overline{P}_{1,3} \to \overline{AP}_{1,3}$ で，f の基点集合は，尖点三次曲線 C と C の尖点を通らない直線 L の組からなり，f^{-1} の基点集合は，既約三次曲線 C と C に三重で接する直線 L の組からなるものが構成できる．さらに，いずれの基点集合も $\mathbb{P}^1_k$ と同型であることがわかる．

第五章では二つのモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の構造を調べる為に，$X := SQ_{1,3} \times \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^2_k$ のあるブローアップから $\overline{AP}_{1,3}$，$\overline{P}_{1,3}$ への自然な写像を構成している．ここで，$SQ_{1,3}$ は中村郁氏による Hesse の三次曲線のモジュライであり，$\mathbb{P}(V)$ は上で述べた $\mathbb{P}^2_k$ 内の直線全体がなす空間である．X の各点は Hesse の三次曲線 C と直線 L からなる組に対応するので，X の一般の点から $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定まるが，C が三角形をなし，かつ L が C の特異点を通るときに $\overline{AP}_{1,3}$，$\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できず，L が C に三重で接するときに $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できない．これらの写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると，対応する点列は $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ の点に収束することがわかる．従って，写像が定義できない部分集合を中心に適当なブローアップを行うことで，例外集合からこの極限への写像を構成することが出来る．実際，前者の定義できない部分集合を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\tilde{X}$ から $\overline{AP}_{1,3}$ への写像 $\varphi : \tilde{X} \to \overline{AP}_{1,3}$ が構成でき，さらに，$\tilde{X}$ における後者の定義できない部分集合の強変換を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\hat{X}$ から $\overline{P}_{1,3}$ への写像 $\psi : \hat{X} \to \overline{P}_{1,3}$ が構成できる．特に $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の (粗い) 構造が得られる．加えて，後者のブローアップ $p : \hat{X} \to \tilde{X}$ が上記の双有理写像 $f : \overline{P}_{1,3} \to \overline{AP}_{1,3}$ に対応することも容易に確かめられる，すなわち，f が定義できる部分集合上で $f \circ \psi = \varphi \circ p$ が成り立つ．