HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Abnormal geodesics in generalized subriemannian geometry [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	行野, 亘
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第11799号
Issue Date	2015-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58766
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Wataru_Yukuno_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士 (理学)　氏 名　行 野　亘

学 位 論 文 題 名

Abnormal geodesics in generalized subriemannian geometry

(一般化されたサブリーマン幾何学における異常測地線)

1 研究背景

Bonnard, Kupka は, ドリフト項と制御項をそれぞれ 1 つずつ持つジェネリックなアファイン制御系において, 全ての特異陪極値線 · 特異制御は良い性質を持つ, すなわち,“極小次数的”でかつ “余階数 1 ”であることを, [1] で示した。その後, Chitour, Jean, Trélat は彼らの結果を, [2] で一般化した。特に,Chitour,Jean,Trélat は, ジェネリックなドリフト項がないアファイン制御系における特異制御の性質を研究し,“極小次数的”及び “余階数 1 ”の概念を導入し, 次の結果を得た: ジェネリックな一次独立であるドリフト項がないアファイン制御系において, 非自明な特異軌道を持つ任意の特異陪極値線は極小次数的であり, かつ, 非自明な特異軌道を持つ任意の特異制御は余階数 1 である。その後, 彼らはこの結果を一般化し, 一次独立とは限らない場合でも, 成り立つことを [3] で示した: $(X_1, \cdots, X_m), 2 \leqq m \leqq n$ を n 次元多様体 M 上の C^∞ ベクトル場のジェネリックな系とし, ドリフト項のないアファイン制御系とみなす。そのとき, 非自明な特異軌道を持つ任意の特異陪極値線は必ず極小次数的であり, かつ, 非自明な特異軌道を持つ任意の特異制御は余階数 1 である。

ところが, この結果は, 誤った定理 ([3] Theorem 2.13) を利用して証明している。実際に，この誤った定理の反例を [4] で具体的に与え, Chitour, Jean, Trélat で与えられた “極小次数的”とは異なる定義をし, 新しい概念である “独立軌道”を定義して, 主結果の定理 1 と定理 2 を示した。

さて, ドリフト項のないアファイン制御系における特異制御は, 異常極値的曲線とも呼ばれる。Pontryagin の最大値原理を使うことにより, サブリーマン構造に関する全ての最短曲線は, 正常極値的曲線または異常極値的曲線であることがわかる。学位論文では,Bellïaiche が考案した一次独立とは限らないベクトル場に対して定義される一般化されたサブリーマン構造について考え, 主結果の定理 3 を証明した。

また, 学位論文では, 多項式ベクトル場から成る系についても考え, 証明を与えた。

2 主結果

$\mathrm{VF}(M)^m$ を n 次元 C^∞ 多様体 M 上の m 個の C^∞ ベクトル場の組からなる空間とし, $\mathrm{VF}(M)^m$ にはホイットニー C^∞ 位相が入っているものとする。Ω を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合と

する。$(X_1, \cdots, X_m) \in \mathrm{VF}(M)^m$ に対して, $(u_1, \cdots, u_m) \in \Omega$ を制御パラメータとするドリフト項を持たないアファイン制御系:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$$

について考える。そのとき, 次の定理が成り立つ:

定理 1 $2 \leqq m \leqq n$ と仮定する。そのとき, $\mathrm{VF}(M)^m$ の開かつ稠密な部分集合 G_1 が存在して, もし, $X = (X_1, \cdots, X_m)$ が G_1 に含まれ, $z : [0, T] \to T^*M$ が X-陪極値線で, かつ, $x = \pi \circ z : [0, T] \to M$ が非自明かつ独立ならば, z は必ず極小次数的である。ここで, $\pi : T^*M \to M$ は, M の余接束からの自然な射影である。

定理 2 $2 \leqq m \leqq n$ と仮定する。そのとき, $\mathrm{VF}(M)^m$ の開かつ稠密な部分集合 G_2 が存在して, もし, $X = (X_1, \cdots, X_m)$ が G_2 に含まれ, 与えられた初期点 $x_0 \in M$ に関して $u : [0, T] \to \Omega$ が X-特異制御で, かつ, 対応する特異軌道 $x : [0, T] \to M$ が非自明かつ独立ならば, u は必ず余階数 1 である。

さらに, ドリフト項を持たないアファイン制御系に関して, 初期点と終点を固定した X-特異制御全体で定義されたエネルギー汎関数:

$$e(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} u_i^2$$

を最小にする最適制御問題を考える. この最適制御問題のハミルトニアン関数 $H : (T^*M \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, $(z, u; p_0) = (x, p, u; p_0) \in (T^*M \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}$ に対して,

$$H(x, p, u\,;\, p_0) = \sum_{i=1}^{m} \langle p, u_i X_i(x) \rangle + \frac{1}{2}\, p_0 (\sum_{i=1}^{m} u_i^2)$$

によって与えられる。ここで, (x, p, u) は, T^*M の正準座標 (x, p) を持つ, $T^*M \times \mathbb{R}^m$ の局所座標である。この定式化は通常の意味でのサブリーマン幾何における正常陪極値線のハミルトン形式と一致していることに注意する。そのとき, 次の定理が成り立つ:

定理 3 $2 \leqq m \leqq n$ と仮定する。そのとき, $\mathrm{VF}(M)^m$ の開かつ稠密な部分集合 G_3 が存在して, もし, $X = (X_1, \cdots, X_m)$ が G_3 に含まれ, $x : [0, T] \to M$ が初期点 $x_0 \in M$ に関する X-異常極値線すなわち X-特異制御ならば, x は必ず強異常である。

参考文献

[1] B.Bonnard, I.Kupka, *Generic properties of singular trajectories*, Ann. Inst. H. Poincare Anal.Non Lineaire,14 (1997), pp 167-186.

[2] Y.Chitour, F.Jean, and E.Trélat, *Genericity results for singular curves*, J. Differential Geom., 73 (2006), pp. 45-73.

[3] Y.Chitour, F.Jean, and E.Trélat, *Singular trajectories of control-affine systems*, SIAM J.Control Optim.,Vol.47, No.2 (2008), pp.1078-1095.

[4] W.Yukuno, *Singular controls with non-trivial independent trajectory of generic drift-less control-affine systems*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu,(2014).