HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	The lifespan of solutions to initial value problem for nonlinear wave equations [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	若狭, 恭平
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第11800号
Issue Date	2015-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/58786
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Kyouhei_Wakasa_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士 (理学)　　氏名　若狭　恭平

学 位 論 文 題 名

The lifespan of solutions to initial value problem
for nonlinear wave equations
(非線形波動方程式に対する初期値問題の解の最大存在時間)

本学位論文では, 非線形波動方程式に対する初期値問題の滑らかな解が存在する最大時刻 (最大存在時間) に対する解析を行う. まず次のような非線形波動方程式に対する初期値問題を考える：

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = F(u) & \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x),\ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & \text{for } x \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $n \geq 1$ は空間次元, f, g はコンパクトな台をもつ滑らかな関数で, $F(u) = |u|^p$ または $F(u) = |u|^{p-1}u$ $(p > 1)$ であり, $\varepsilon > 0$ はパラメータである. この初期値問題に対しては, 次のような結果が知られている. まず, $n = 1$ のときには, 上記の非線形項について, 任意の $p > 1$ に対して (1) の滑らかな解は時間大域的に存在しないことが知られている. $n \geq 2$ のときは, Strauss による次の予想がよく知られている (1981). 「$p_0(n)$ を 2 次方程式 $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ の正根とする. このとき, $p > p_0(n)$ ならば ‘ 十分小さい ’ ε に対して, (1) の解は時間大域的に存在し, 他方, $1 < p \leq p_0(n)$ ならば, (1) の解は時間大域的には存在しない.」現在では, 多くの研究者によってこの予想が解決されている. (この歴史的背景については, 学位論文の第 2 章 1 節を参照のこと.)

本学位論文は, 主に Takamura & Wakasa [1] と Wakasa [2] による結果で構成されている. [1] では, (1) に関係した積分方程式を考察の対象としている. 通常, (1) の解の存在等を示す場合には, 対応する積分方程式の解に対する逐次近似法が有効であるが, 高次元空間 $(n \geq 4)$ の場合には, 非線形項に対する微分が作用される項と作用されない項が積分方程式に現れる. 微分が作用される項に解の減衰評価を代入すると, 減衰が良くなるという考え方は自然であるが, [1] では, 非線形項に対する微分が作用されない主要部と思われる項のみを取り出した積分方程式を解析した. 結果として, そのような積分方程式を解析したとしても, 解の存在等を示すのには状況は変わらないことが示された. [2] では, (1) で $n = 1$ とした場合の, 空間遠方で減衰するような重みをもつ非線形項に対する問題を考察した. このような問題を考える動機は, 重みがない場合には, 前述の結果から, どんな非線形冪に対しても解が時間大域的に存在しないため, 非線形項に重み関数を導入することで, 時間大域解を得ようとすることである. 実際には, 非線形項と初期値がある種の対称性を

みたすときに時間大域解が得られるが, [2] ではそれらの仮定を崩した場合に時間大域解は得られないことを示し, 同時に, 最大存在時間の最適な評価が得られることを示した.

以下では, [1] と [2] の結果について上述の内容を詳しく紹介する. 本学位論文の第 2 章は [1] による. 次のような (1) に関係した積分方程式を考える:

$$u(x,t) = u^0(x,t) + L(F(u))(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,\infty), \tag{2}$$

ここで, u^0 は斉次波動方程式の解, すなわち (1) で $F \equiv 0$ とした場合の解である. さらに,

$$L(F(u))(x,t) = \frac{1}{2m-1}\int_0^t (t-\tau) M(F(u(\cdot,\tau)))|x,t-\tau)d\tau,$$

で, $\phi \in C(\mathbf{R}^n)$ と $m \in \mathbf{N}$ に対して,

$$M(\phi|x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_{|\omega|=1} \phi(x+r\omega)dS_\omega & \text{for } n = 2m+1, \\ \dfrac{2}{\omega_{n+1}}\displaystyle\int_{|\xi|\le 1} \dfrac{\phi(x+r\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi & \text{for } n = 2m, \end{cases}$$

である. ここで, $r = |x|$ であり, ω_n は $\mathbf{R}^n$ における単位球面の表面積である.

$n \ge 4$ かつ $F(u) = |u|^p$ のとき, 先行研究で, $p > p_0(n)$ ならば (2) の解が時間大域的に存在することが示されている. [1] では, $1 < p \le p_0(n)$ ならば (2) の解は時間大域的には存在しないことを示し, (2) の解 $u \in C^1(\mathbf{R}^n \times [0,T])$ の最大存在時間の評価を得た. そこで得られた最大存在時間の評価は, (1) で $F(u) = |u|^p$ かつ $1 < p \le p_0(n)$ とおいた場合の評価とほぼ同様である. さらに, (2) の解 u が C^2 級で, 適切な正則性を f, g, F に課すと u は, ある種の非線形波動方程式をみたす事もわかる.

本学位論文の第 3 章は [2] による. (1) で, $n = 1$, $F(u) = |u|^{p-1}u/(1+x^2)^{(1+a)/2}$ とした問題を考察する. ここで, $a \ge -1$, $p > 1$ である. 先行研究では (f,g) が奇関数で, ε が ‘十分小’ ならば $p > 1$ かつ $pa > 1$ に対して, (1) は時間大域解をもつことを示されている. また, その先行研究で, (f,g) が奇関数でない場合に (1) の解が時間大域的に存在しないことを示し, その解の最大存在時間の上からの評価を得ている. [2] では, 先行研究で得られていた解の最大存在時間の上からの評価を改良し, その評価が最適であることを示すために最大存在時間の下からの評価も導いた.

最後に, 付録では斉次波動方程式に対する解の表現公式を与えた. 始めに, 空間奇数次元における表現公式をフーリエ変換の方法によって示し, 次に, Hadamard による次元低減法を用いて, 空間奇数次元における表現公式から空間偶数次元の場合の表現公式を得た.

参考文献

[1] H.Takamura and K.Wakasa, Nonlinear Analysis, TMA, **109** (2014), 187-229.

[2] K.Wakasa, arXiv:1409.5877 (Submitted).