



Title	非回転系における内部重力波の分散性
Author(s)	磯田, 豊
Citation	北海道大学水産科学研究彙報, 65(2), 77-91
Issue Date	2015-08-20
DOI	https://doi.org/10.14943/bull.fish.65.2.77
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/59784
Type	departmental bulletin paper
File Information	bull.fish.65.2.77.pdf



非回転系における内部重力波の分散性

磯 田 豊¹⁾

(2015 年 2 月 20 日受付, 2015 年 5 月 7 日受理)

Dispersion properties of internal gravity waves in the non-rotational system

Yutaka ISODA¹⁾

Abstract

In a continuously stratified fluid, the frequency of internal gravity waves depends only on the angle that the wavenumber makes with horizontal, i.e., the polarization relation in the non-rotational system. That is, the group velocity of internal wave is at right angles to the wavenumber vector, and hence its propagation characteristics are studied by “theory of ray-tracing”. On the other hand, under the restriction on vertical scale, the behavior of internal wave can be frequently discussed by using “theory of decomposed mode-waves” or “two-layer approximate model”. I try to do the original interpretation as for the physical relationship between these three theories.

Key words : Internal gravity waves, Non-rotational system, Ray-tracing, Mode-waves, Two-layer model

諸 言

中緯度海域における長期係留観測の結果、成層期 (Fig. 1(a) の模式図) において、水温変動に同期した流速変動の周期が数分 (プラントバイサラ周波数 N) から 20 時間前後 (慣性周波数 f) の範囲にあれば、その変動は内部波によるものと推測する場合が多い。内部波と断定するためには、観測された変動の時空間構造が内部波理論の物理特性をどれだけ反映しているのかを考察しなければならない。この考察に用いられる内部波の線形理論には次の 3 つがある。1 つ目は位相速度 C と群速度 C_g が直交する内部波のビーム方向 (斜めに傾いたエネルギー伝播方向) を追う「Ray-tracing の理論 (Fig. 1(b)(以下, Ray 理論と呼ぶ))」, 2 つ目は成層と上下境界条件により決まる可符番無限個の鉛直方向モード解 ($n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots$) を求め、水平伝播 (位相速度 C_n ・群速度 C_{g_n}) する個々のモード波の重ね合わせとして理解する「モード波の理論 (Fig. 1(b))」, 3 つ目は密度躍層を 1 つの内部境界面で近似し、還元重力加速度を用いた平面波として理解する「2 層流体モデルの理論 (Fig. 1(c))」である。どの理論を使用するかは研究者の考え方に依存するが、どれを用いても観測された変動は同じ内部波として説明できなければならない。すなわち、3 つの理論は同じ内部波を対象とするが、物理的解釈の記述が異なる。長い歴史をもつ内部波研究において、これらの線形理論はすでに確立されており、本研究に新しい知見

はない。海洋観測データの中に埋もれている海洋現象 (本論では内部波) をどうにか抽出したと願っている私のような資料解析 (観測) 屋にとって、内部波理論の物理的解釈の違いを認識した上での理論選択が必要となる。そこで、本研究では 3 つの理論の物理的関係に注目し、独自の解釈にもとづき、内部波の分散性についてのレビューを試みたい。

本論では水平方向に x 軸をとり、鉛直方向を z 軸とし、 x - z 面の密度成層流体に存在する非回転系の内部波を考える (よって、理論的に扱うことができる内部波の変動周期は数時間以下に限定される)。簡単化のため、成層は一定の密度勾配を有する連続成層を仮定し、プラントバイサラ周波数を $N = -(g/\rho_0)(d\rho_0/dz))^{1/2}$ (g は重力加速度, $\rho_0(z)$ は基本場の密度成層) とする。このとき、付録 A の導出手順に従い、鉛直流速 $w(x, z, t)$ に関する内部波の偏微分方程式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

で与えられる。 x, z 成分の波数を k, m , 周波数を σ とし、解を $w(x, z, t) \propto \exp(i(kx + mz - \sigma t))$ と仮定して (1) 式に代入して整理すると、次式の分散関係式 ($\sigma > 0$ のみを表示) を得る。

$$\frac{\sigma}{N} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} = \cos \varphi \quad (2)$$

¹⁾ 北海道大学大学院水産科学研究院海洋環境科学分野
(Laboratory of Marine Environmental Science, Graduate School of Fisheries Sciences, Hokkaido University)

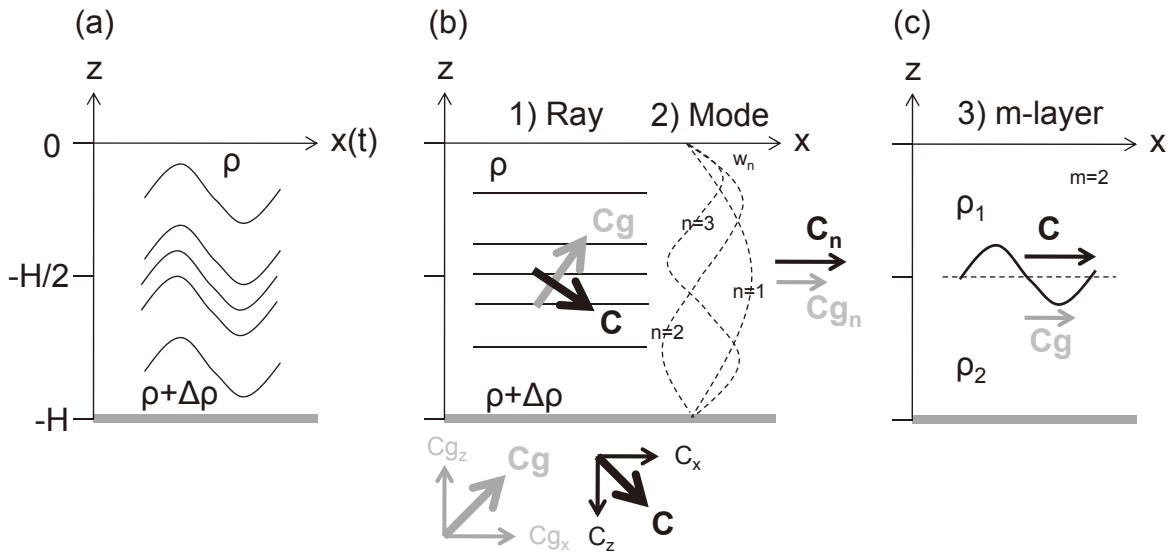


Fig. 1. (a) Schematic view of internal wave in the ocean. (b) 1) Theory of ray-tracing and 2) theory of decomposed mode waves. (c) 3) Internal wave for two-layer approximate model.

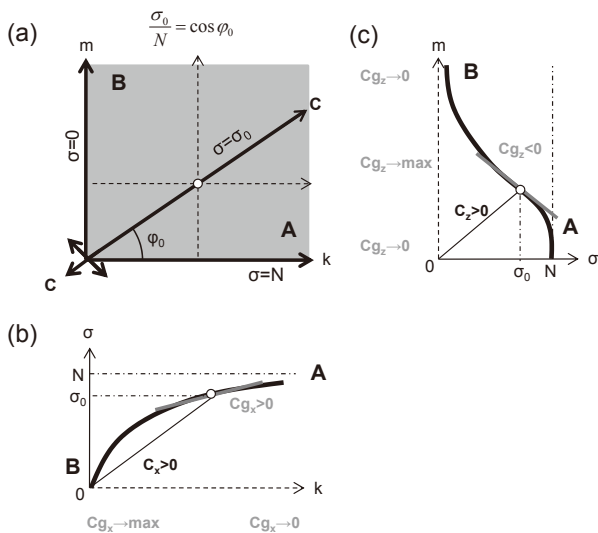


Fig. 2. (a) For internal waves (no rotation), the surface of constant frequency $\sigma = \sigma_0$ in wavenumber space ($m-k$) has the angle of ϕ_0 . Schematic dispersion curves (b) for the relation between frequency: σ and horizontal wavenumber: k , and (c) for the relation between frequency: σ and vertical wavenumber: m .

この分散関係は $\sigma < N$ のときのみ内部波の存在が可能であり、その周波数 σ は水平 x 軸に対する角度 ϕ に依存すること (斜めに傾いた伝播) を示す。Fig. 2(a) は (2) 式を用いて $k-m$ 波数空間における周波数を表した分散曲線図である。 $\sigma = N$ の内部波は水平方向、 $\sigma = 0$ の内部波は鉛直方向に伝播し、任意の周波数 $\sigma = \sigma_0$ の内部波は (2) 式から計算される傾き ϕ_0 で斜め方向に伝播する。Fig. 2(b)(c) は一方の波数を固定した他方の波数に対する周波数の関係を表示した分散曲線図である。これらの図には、後述

する位相速度 C と群速度 C_g の傾き (符号) を模式的に示している。

まず、位相速度 C の x, z 成分は (2) 式を変形して、それぞれ、

$$C_x = \frac{\sigma}{k} = \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2}} > 0 \quad (3a)$$

$$C_z = \frac{\sigma}{m} = \frac{Nk}{m\sqrt{k^2 + m^2}} > 0 \quad (3b)$$

となり、どちらも同符号 (正の値) となる。一方、群速度 C_g の x, z 成分は (2) 式を波数で偏微分して導出されるが、 z 成分 C_{g_z} のみ位相速度 C_z と符号が異なる。すなわち、

$$C_{g_x} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} > 0 \quad (4a)$$

$$C_{g_z} = \frac{\partial \sigma}{\partial m} = -\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} < 0 \quad (4b)$$

となる。それゆえ、波数と群速度の内積を計算すると

$$k \frac{\partial \sigma}{\partial k} + m \frac{\partial \sigma}{\partial m} = 0 \quad (5)$$

の零値となり、位相速度と群速度の方向は互いに直交することがわかる。このような応用数学による解の性質、言い換えれば、(2) 式の分散関係式を認めさえすれば、内部波の挙動を理解できる。しかし、内部波がなぜこのような分散性を示すのかという問いに対し、(2) 式が導出された (1) 式の偏微分方程式の物理的意味を理解していなければ答えられないと思う。

内部波は基本的に浮力を復元力とした波である。では、(1) 式の偏微分方程式のどこに浮力項が表現され、上述した特異な分散性 (特に、 $C_z > 0$ のとき $C_{g_z} < 0$) がなぜ生じるのであろうか。本論では連続成層流体における浮力の影響に注目しながら、(1) 式と同じ偏微分方程式を導き、そ

の導出過程において偏微分方程式が示す物理的意味について考えることから始める。

方法および考察

浮力の考察による偏微分方程式の導出

水深 z にあった水粒子が微小な距離 Δz だけ上方に動かされた場合の浮力 $F = \rho_0(\Delta w/\Delta t)$ を考えると (w は鉛直流速, Δt は単位時間),

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\Delta w}{\Delta t} &= \rho_0(z + \Delta z)g - \rho_0(z)g \\ &= \left(\rho_0 + \frac{d\rho_0}{dz} \Delta z + \dots \right) g - \rho_0 g \\ &\approx \frac{d\rho_0}{dz} \Delta z g \\ &= \frac{d\rho_0}{dz} w \cdot \Delta t g\end{aligned}\quad (6)$$

となる。この式を整理すると

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta t^2} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w = 0 \quad (7)$$

となり, プラントパイサラ周波数 N を用いて, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^2 w = 0 \quad (8)$$

を得る。この (8) 式は周波数 N の単振動 (これを浮力振動という) を示すが, 移動させた水粒子周辺の密度成層は基本場のままである。一般に, 内部波は水平・鉛直構造をもつ。極端な例として, $k \rightarrow 0$ (水平スケールが無限大) の極限を考えた場合, $x = -\infty \sim \infty$ における全ての水粒子が Δz だけ上昇することになり, 密度成層全体が上昇するだけなので浮力は働かず, 内部波は発生しない (ただし, $k \rightarrow 0$ で $\sigma \rightarrow 0$ となる関係は, (2) 式の分散関係式とも矛盾しないため, 周期が無限大の内部波である, とも言える)。これらの両極限の中間スケールに, 周波数 $0 < \sigma < N$ の内部波が存在している。

ある任意の地点 $[x, z]$ における対象水粒子が微小な距離 Δz だけ上方に動かされることは上記の状況と同じであるが, その周辺 $[x + \Delta x, z]$ の水粒子も同様に上方に移動している場合を考える。単位時間 Δt における上方移動量 $w(x, z)\Delta t$ と $w(x + \Delta x, z)\Delta t$ が異なる場合, 地点 $[x, z]$ における正味の浮力は両地点間の浮力差になる。これは, 先にも述べたように, 両地点の上方移動量が全く同じならば, 浮力が働かないことから理解できる。対象水粒子と周辺水粒子の浮力は, 先に示した (6) 式の関係式で表現すると, それぞれ

$$\rho_0(x, z + \Delta z)g - \rho_0(x, z)g = \frac{d\rho_0}{dz} w(x, z) \cdot \Delta t g \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\rho_0(x + \Delta x, z + \Delta z)g - \rho_0(x + \Delta x, z)g \\ = \frac{d\rho_0}{dz} w(x + \Delta x, z) \cdot \Delta t g\end{aligned}\quad (10)$$

となる。ここで, 両式の右辺に関して, (9) 式-(10) 式の浮力差 (対象水粒子に働く正味の浮力) を計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_0}{dz} w(x, z) \cdot \Delta t g - \frac{d\rho_0}{dz} w(x + \Delta x, z) \cdot \Delta t g \\ = \left[w(x, z) - \left(w(x, z) + \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \Delta x + \dots \right) \right] \frac{d\rho_0}{dz} \Delta t g \\ \approx - \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \frac{d\rho_0}{dz} \Delta x \Delta t g\end{aligned}\quad (11)$$

を得る。一方, 地点 $[x, z]$ にある対象水粒子の浮力 (9) 式の左辺は, (6) 式と同じであり

$$\frac{d\rho_0}{dz} w(x, z) \cdot \Delta t g = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (12)$$

で置き換えることができる。また, 地点 $[x, z]$ の対象水粒子の浮力に対する周辺 $[x + \Delta x, z]$ の水粒子の浮力の影響は, 下記の静水圧平衡を介し, 周辺圧力場の変化として寄与する。

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g \quad (13)$$

すなわち, 周辺 $[x + \Delta x, z]$ の水粒子の浮力 (10) 式の左辺は

$$\begin{aligned}\rho_0(x + \Delta x, z + \Delta z)g - \rho_0(x + \Delta x, z)g \\ = - \frac{dp_0(x + \Delta x, z + \Delta z)g}{dz} + \frac{dp_0(x + \Delta x, z)g}{dz} \\ = \frac{d}{dz} \left[- \left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z + \dots \right) \right. \\ \left. + \left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \dots \right) \right] \\ \approx - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \right) \\ \approx - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (14)$$

で表現することができる。このように, 周辺 $[x + \Delta x, z]$ の水粒子の浮力は $[x, z]$ の対象水粒子に対して圧力の鉛直勾配として作用し, 対象水粒子の鉛直加速 $\partial w / \partial t$ を抑えるセンスに働く。これら (11) (12) (14) 式を一つにまとめると,

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \Delta x \Delta t g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (15)$$

となる。なお, 付録 A に示した (A1) の関係式を用いれば, (15) 式の右辺第 1 項は $-\rho g$ の形にも書き換えることもでき, この式は付録 A に示した (A5) 式の鉛直方向の運動方程式と同じになる。ここでは, その (A5) 式の物理的意味を浮力の考察から説明したことになる。

基本場の密度勾配を N^2 に置き換えて, (15) 式の両辺を x と t で偏微分すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -N^2 \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (16)$$

となる。次に、付録 A に示した (A4) 式の運動方程式を用いて、圧力の水平勾配を水平流速 u 成分に置き換えると次式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (17a)$$

上述の導出手順より明らかなように、(17a) 式の左辺第 2 項は対象水粒子が受ける正味の浮力項である。この浮力の大きさは、対象水粒子に対する周辺水粒子の位置関係を表した「鉛直流速 w の水平構造: $\partial w / \partial x$ 」に依存していることを意味する。また、(17a) 式の左辺第 1 項は y 軸方向の渦度成分 ($\zeta_y = -(\partial u / \partial z - \partial w / \partial x)$)、すなわち、 x - z 面内の渦度の時間変化項であるため、(17a) 式は次式の形で表現される。

$$\frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial t^2} - N^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (17b)$$

このように、(17a, b) 式で表現される内部波は、「浮力 (鉛直流速 w の水平勾配) により渦度 ζ_y が生成される渦波」として解釈することもできる。

(1) 式と同じ偏微分方程式を得るには、(17a) 式の両辺を x でさらに偏微分し、付録 A に示した (A6) 式の連続式を用いて u 成分を w 成分に置き換えればよい。その結果、鉛直流速 w のみに関する偏微分方程式である (1) 式が得られ、数学的にはきれいな形の方程式になる。しかし、内部波の物理的意味合いを理解するには、最大 4 階の偏微分項を含む (1) 式よりも、私はその導出の途中過程にあった (17a) 式の利用価値が高いと考える。なお、(1) 式における浮力項は 2 階の偏微分で表現されているが、 $\partial w / \partial x$ 項を含む左辺第 2 項である。

連続成層流体における内部波の分散性の理解

本節では (1) 式の偏微分方程式の導出過程に現れた (17a) 式を用いて、内部波の分散性についての定性的な説明を試みる。ここでは、対象とする内部波の水平スケールを $L_x (\sim 2\pi/k)$ 、鉛直スケールを $L_z (\sim 2\pi/m)$ とし、変動周期との関係を調べる。よって、観測される内部波の波長 L は $(1/L)^2 = (1/L_x)^2 + (1/L_z)^2$ の関係式を満たし、ある空間スケールの内部波が x - z 平面を斜め方向に伝播する様子を考える。

$L_x \ll L_z (k \gg m)$ の極限の内部波は水平方向に伝播する波となり、 $\partial w / \partial x - \partial u / \partial z$ の渦度は浮力項と同じ形の $\partial w / \partial x$ で近似され、(17a) 式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + N^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

となる。この (18) 式を x で積分すると、周波数 N の単振動を表わす (8) 式と同じになる。すなわち、この極限では浮力項が非常に大きく ($\partial w / \partial x \rightarrow \infty$)、 $\sigma \rightarrow N$ の短周期変動となる。

逆の極限 $L_x \gg L_z (k \ll m)$ では、内部波はほぼ鉛直方向

に伝播する波となり、 $\partial w / \partial x - \partial u / \partial z$ の渦度は $-\partial u / \partial z$ で近似され、(17a) 式は

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

となる。いま、 $L_x \gg L_z$ なので、 N^2 との積である $\partial w / \partial x$ は $\partial w / \partial x \rightarrow 0$ 、すなわち、浮力項は小さくなり、左辺第 2 項は比較的小さな値となる。一方、この項にバランスする左辺第 1 項は $L_x \gg L_z$ より $\partial u / \partial z \rightarrow \infty$ となるので、 $\partial^2 / \partial t^2 \rightarrow 0$ でなければならない。すなわち、この極限では $N \gg \sigma \rightarrow 0$ の長周期変動となる。長周期となる理由は、水粒子の移動量が水平的にはほぼ同様ならば ($\partial w / \partial x \rightarrow 0$) 浮力が小さくなること (復元力が小さいこと) から直感的に理解できる。

以上の極限状態を周期に対する水平・鉛直スケールの関係としてまとめると、Fig. 3 に示した模式的な状態 A と状態 B のようになる (灰色領域は上向き鉛直流となる領域)。状態 A は $L_x \ll L_z (k \gg m)$ の極限であることから、短い水平スケールで符号を変える鉛直流 w が支配的となり、 $\sigma \rightarrow N$ の短周期変動する。状態 B は $L_x \gg L_z (k \ll m)$ の極限であることから、短い鉛直スケールで符号を変える水平流が支配的となり、 $\sigma \rightarrow 0$ の長周期変動する。

これらの極限状態から、中間スケールにおける内部波の水平・鉛直成分それぞれの位相速度と群速度の関係及び分散関係を定性的に推測することができる。まず、内部波の水平波長 L_x と周期の定性的な関係は、水平長波長ほど長周期 (状態 B: $k \rightarrow 0$ で $\sigma \rightarrow 0$)、水平短波長ほど短周期 (状態 A: $k \rightarrow \infty$ で $\sigma \rightarrow N$) となり、この関係は位相速度と群速度が同符号になること ($C_x > 0$ のとき $C_g > 0$) を意味する。一方、内部波の鉛直波長 L_z と周期の定性的な関係は、鉛直長波長ほど短周期 (状態 A: $m \rightarrow 0$ で $\sigma \rightarrow N$)、鉛直短波長ほど長周期 (状態 B: $m \rightarrow \infty$ で $\sigma \rightarrow 0$) となり、この関係は位相速度と群速度が異符号になること ($C_z > 0$ のとき $C_g < 0$) を意味する。この鉛直成分は「浮力振動」(無限小の水平波長に対して、無限大の鉛直波長をもつ) と定性的に同じ特徴を有し、これが波のエネルギー伝播方向に直交した位相変化の原因となり、内部波の分散性を理解する鍵となる。

このような分散性の視覚的な理解を目的に、簡単な数値実験を行った。計算領域は深さ 100 m、水平距離 1,000 m の閉じた矩形鉛直 2 次元空間とし、(1) 式を $\Delta x = 10$ m と $\Delta z = 1$ m で差分化した。矩形領域の境界条件は全て $w = 0$ である。基本場の密度成層は $N^2 = 1.96 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ (周期は約 7.5 分) 一定の密度勾配をもつ連続成層である。ここでは、あらゆる周波数の内部波が同時に励起される Impulse 応答問題を考える。具体的には、計算領域の左下角である $[x, z] = [0 \text{ m}, -100 \text{ m}]$ の格子点において、初期値 (時刻 $t = 0$) として振幅 1 の鉛直流 w を上向き与え、その後は全く強制しない計算である。Impulse の強制後、時刻 $t = 1/4, 1(1/4), 2(1/4)$ 時間後の w 分布 (負の値を灰色表示) を Fig. 4,

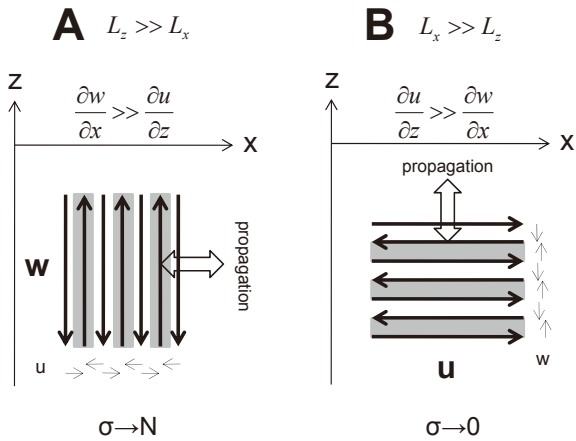


Fig. 3. The propagation of internal waves in the limit condition of A ($L_z \gg L_x$) and B ($L_x \gg L_z$), illustrated by the behavior of horizontal : u and vertical : w velocities.

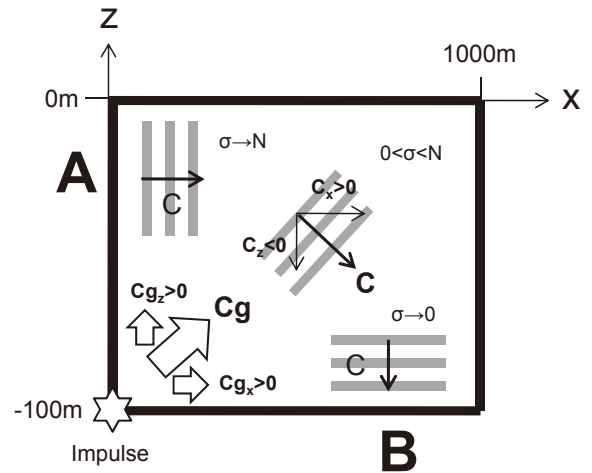


Fig. 5. Sketch showing in a vertical plane the phase distribution for a progressive internal wave to understand the model results shown in Fig. 4.

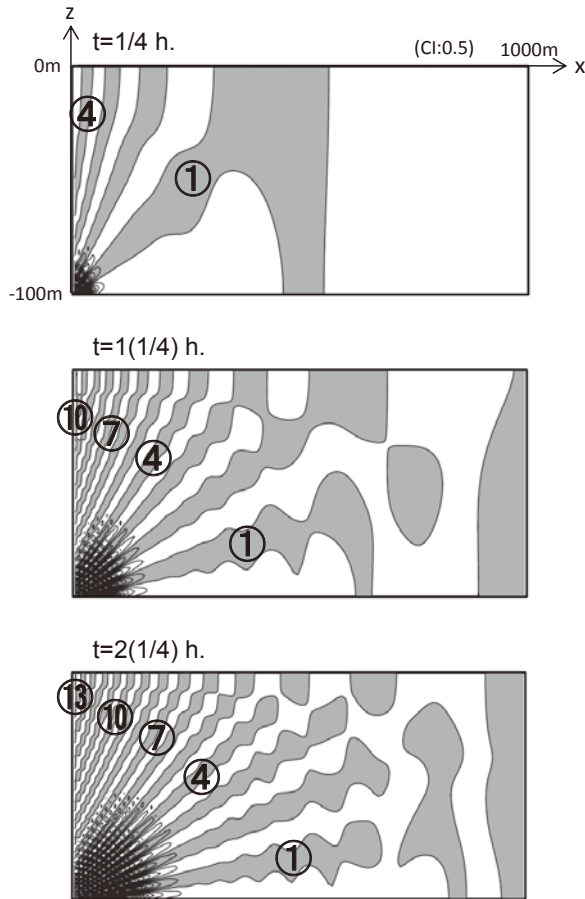


Fig. 4. Temporal variations in the vertical planes of vertical velocity : w at $t=1/4$, $1(1/4)$ and $2(1/4)$ hours after the impulse forcing at $t=0$ and $[x, z] = [0 \text{ m}, -100 \text{ m}]$.

この結果の説明図を Fig. 5 に示す。時間の経過とともに、振幅の大きな領域（エネルギーが大きな領域）は左下角（強制点）から放射状に拡がり（Fig. 4）、これは群速度 C_g ($C_{gx} > 0$ および $C_{gz} > 0$) の方向（Fig. 5 を参照）を示す。一方、正負

の縞模様は位相変化を示し、例えば、①で印した初期の位相擾乱は左下角（強制点）を原点に時計回りに回転している。このような位相擾乱は左端境界から次々に現れ、やはり時計回りに回転している（④・⑦・⑩・⑬印を参照）。Fig. 5 に示すように、このような時計回りの位相変化 C は、鉛直成分の上向き $C_{gz} > 0$ に対して逆符号の下向き $C_z < 0$ となり、水平成分の右向き $C_{gx} > 0$ に対して同符号の右向き $C_x > 0$ となることで説明される。左下角の原点から延びる放射線上で説明すれば、鉛直に立った放射線（左端境界）では短周期の w 変動 ($\sigma \rightarrow N$: 浮力振動)、水平に寝た放射線（下境界）では長周期の w 変動 ($\sigma \rightarrow 0$: 変動しない) が観察される。それらの中間域で斜めに傾いた放射線上では傾き角度 ϕ に従って、ある特定周期 ($0 < \sigma < N$ の範囲) の変動が観察されることになる。

連続成層流体におけるモード波の解釈

海洋の場合、海面と海底の境界 ($z=0$ と $-H$ で $w=0$) が必ず存在する。それゆえ、海洋成層流体中で内部波が励起・伝播し、十分な時間が経過したならば、鉛直方向の内部波成分は上下の境界条件を満たす定在波として扱えるようになる。このような状態になれば、鉛直方向の波形は可符番無限個のモードに分解可能となり（Fig. 1(b) を参照）、特定の変動周波数に関して、各鉛直モードに対応した水平方向の内部波成分が求まる。鉛直密度勾配が一定な場合におけるモード解の導出手順を付録 B に示す。

いま、特定の変動周波数を σ_F とする。モード分解の分散関係 (B8) 式は、水平波数 k -周波数 σ 空間における分散曲線図として表現され（Fig. 6(a) の灰色直線）、周波数 σ_F の内部波はとびとびの鉛直波数 m_i ($i=1, 2, \dots$) に対応した水平波数 k_i のモード波となる（Fig. 6(a) の黒丸印）。Ray 理論において上下境界がない場合、(2) 式の分散関係は波数空間 k - m で周波数 σ_F の内部波の伝播方向 C として

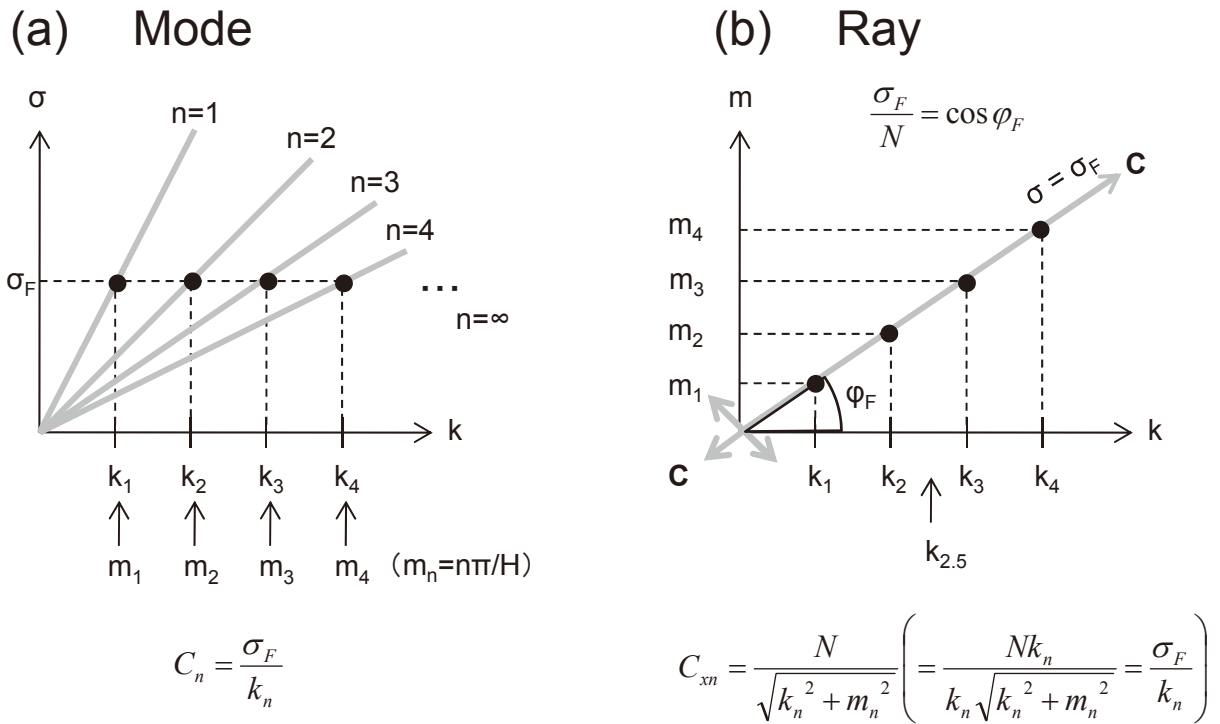


Fig. 6. (a) The solutions of mode waves ($n=1, 2, 3$ and 4) with a forcing frequency σ_F in the σ - k space. (b) Internal wave with a forcing frequency $\sigma = \sigma_F$ in wavenumber space (m - k) has the angle of ϕ_F .

表現される (Fig. 6(b) の灰色矢印)。そして、モード分解に対応した Ray 理論の分散関係は、この伝播方向において k - m の関係を満たすとびとびの値となる (Fig. 6(b) の黒丸印)。このとき、Ray 理論の位相速度の水平成分 C_m (波数の逆数に比例) はモード分解の位相速度 C_n に一致する (付録 B を参照)。このように両者の分散関係式 (または応用数学の解) には矛盾はなく、どちらの解析方法を用いても観測結果を解釈できることがわかる。ここでは前節と同じ数値モデルを用いて、両者が一致する物理的意味を視覚的に理解することを試みる。

Ray 理論とモード分解の解が一致するためには、先にも述べた (1) 上下の境界条件, (2) 鉛直方向の定常状態, (3) 特定の変動周波数という条件が必要である。それゆえ、前節で扱ったような非定常な Impulse 問題をモード分解の手法で扱うことはできない。一方、Ray 理論は Impulse 問題の拡張から理解することができる。Impulse 応答 (Fig. 4 の計算結果) は全ての波数-周波数空間に存在する内部波成分の集合として理解された。そこで、この Impulse 応答を単位応答関数 $w_l(x, z, t)$ と呼ぶことにする。いま、ある特定の強制周波数を σ_F としたとき、その線形解 $w_p(x, z, t)$ は単位応答関数 $w_l(x, z, t)$ と強制周期変動 $\sin(\sigma_F t)$ のたたみ込み積分の形として表わすことができる。すなわち、

$$w_p(x, z, t) = \int_0^t w_l(x, z, t-\tau) \sin(\sigma_F \tau) d\tau \quad (20)$$

この (20) 式は $w_l(x, z, t)$ と $\sin(\sigma_F t)$ の内積とみることができ、

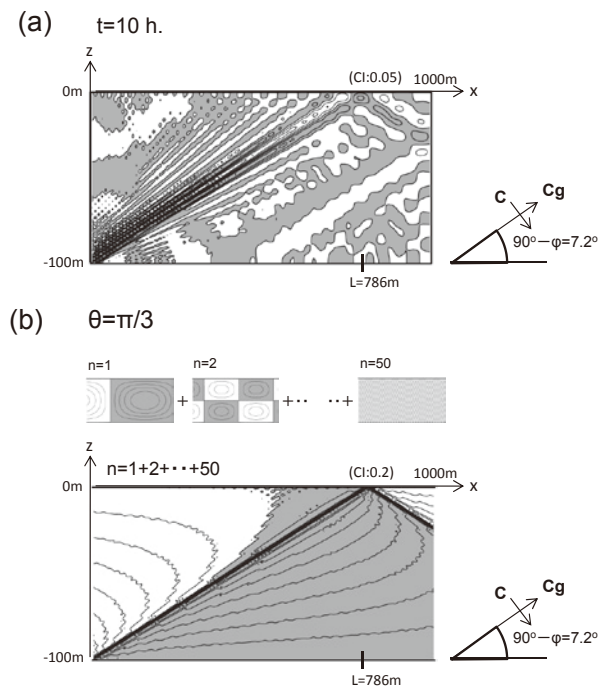


Fig. 7. (a) A vertical plane of vertical velocity : w 10-hours later for the periodical forcing (1 hour period) at $[x, z] = [0 \text{ m}, -100 \text{ m}]$. (b) The same as Fig. 7(a), but the theoretical result of summation from $n=1$ to $n=50$ mode waves.

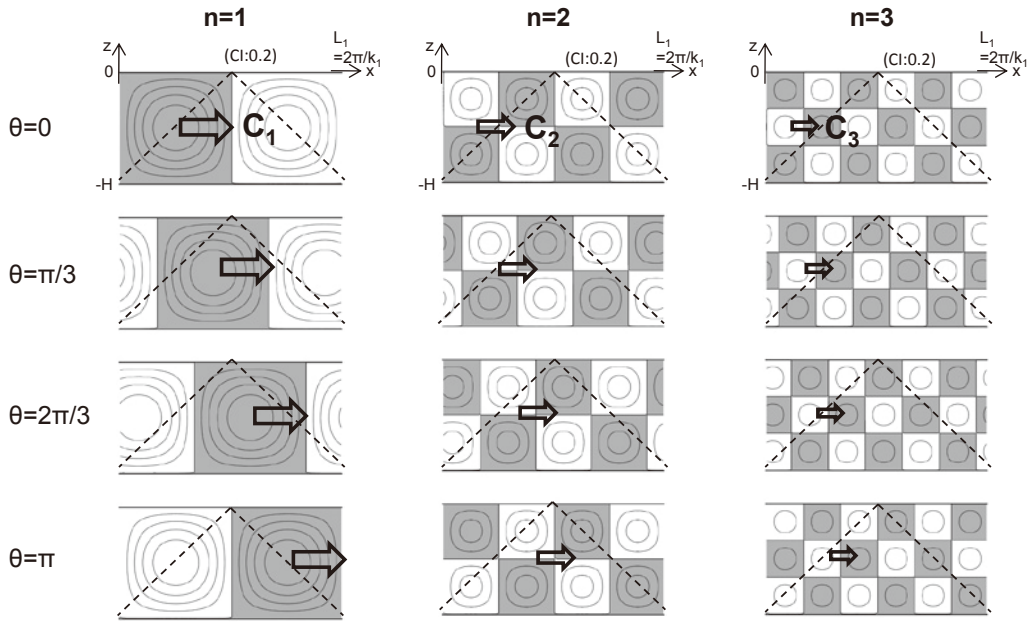


Fig. 8. The vertical planes of vertical velocity : w at the phases of $\theta=0, \pi/3, 2\pi/3$ and π for each $n=1, 2$ and 3 mode wave.

単位応答関数の中で強制周波数 σ_F と一致しない内部波成分は、時間の経過に伴って次第にキャンセルされ、強制周波数 σ_F の内部波成分だけが残ることが予測される。一例として、前節と同じ矩形鉛直 2 次元モデルを用いて周期強制を与え、10 周期後 (時刻 $t=10h$) の計算結果を Fig. 7(a) に示した。強制場所は Impulse 強制と同じ左下角 $[x, z] = [0 \text{ m}, -100 \text{ m}]$ の格子点とし、鉛直流速 w の強制は振幅 1 で 1 時間周期の正弦波関数を与え続けている。この内部波のエネルギー伝播方向 (群速度の方向) は (2) 式の分散関係式から予測される角度 $90^\circ - \phi = 7.2^\circ$ に一致し、この角度の方向に振幅の大きな領域のビーム構造として現れる。ここでは時間変化は示さないが、放射状に延びるビーム周辺には強制周波数 σ_F 近傍の内部波が存在するため、Impulse 応答問題でもみたように、ビームに直交する時計回り方向の位相変化が観察される。また、このビームは強制場所から水平方向に距離 $L=786 \text{ m}$ 付近で海面 ($z=0 \text{ m}$) に接し、そこで反射し始めていることがわかる。この数値計算に対応したモード解 (付録 B に示した (B11) (B12) 式) を用いて、モード n 毎の振幅比をモード n の逆数 $1/n$ と仮定し、 $n=1 \sim 50$ までのモード解を重ね合わせた結果 (位相時刻 $\theta=\pi/3$ の例) を Fig. 7(b) に示した。モード解の重ね合わせにより、Ray 理論のビーム構造が表現されていることがわかる。しかし、なぜ、水平波長が離散的であり、水平方向にしか伝播しないモード波の重ね合わせで、斜めに傾いたビーム構造が表現されるのだろうか。まず、この疑問からモード分解の物理的意味について考えてみよう。

例として、 $n=1 \sim 3$ のモード波の伝播を水平距離 $L_1=2\pi/k_1$ (k_1 はモード $n=1$ の波数) の範囲、位相時刻 $\theta=0 \sim \pi$ における w 分布を Fig. 8 に示した。なお、上凸三

角形の波線はモード解の重ね合わせから得られるビーム線 (群速度の方向) を示している。各モード解は異なる水平波長で異なる位相速度のモード波として個々に水平伝播しているが、ビーム線上ではどのモードの空間位相も全て同じであることがわかる。それゆえ、全てのモードで空間位相が一致するビーム線上に限り、モード波を重ね合わせても振幅が減じられることはなく、逆に、空間位相が一致しないビーム線以外の領域では、モード波の重ね合わせにより振幅が減じられることが予測される。このようなモードの重ね合わせによる振幅分布変化の様子を Fig. 8 と同じ空間範囲及び位相時刻において、モード $n=1+2$, $n=1+\dots+5$, $n=1+\dots+50$ の 3 ケースを例として Fig. 9 に示す。低次モードの重ね合わせ ($n=1+2$) ほど視覚的に理解し易いが、どのケースも振幅が増加する方向はビーム線上にあり (群速度 C_g の方向)、位相変化の方向はビーム線に直交 (位相速度 C の方向) していることがわかる。以上の結果から、各モード解は Ray 理論から求められるビーム方向の空間位相が一致するようにモード分解され、可符番無限個のモード波の重ね合わせでビーム構造が表現されている、と理解される。逆に、ビーム構造は可符番無限個のモード波の集合体である、とも言える。

上記の強制例の場合、海洋中ではビーム構造は観測されるが、特定のモード波構造は陽に観測されないことになる。しかし、現場の海洋観測からは鉛直方向の位相変化を根拠にモード波の存在がしばしば指摘されている。海洋における内部波の励起方法の一つとして、例えば、潮汐流が海底地形の起伏によって強制的に鉛直流が生じ、成層による平衡状態が破れて内部 (潮汐) 波が発生するという機構がある。この場合、凸海底地形の上流側では上向き鉛直流、下流側では下向き鉛直流となり、有限水平

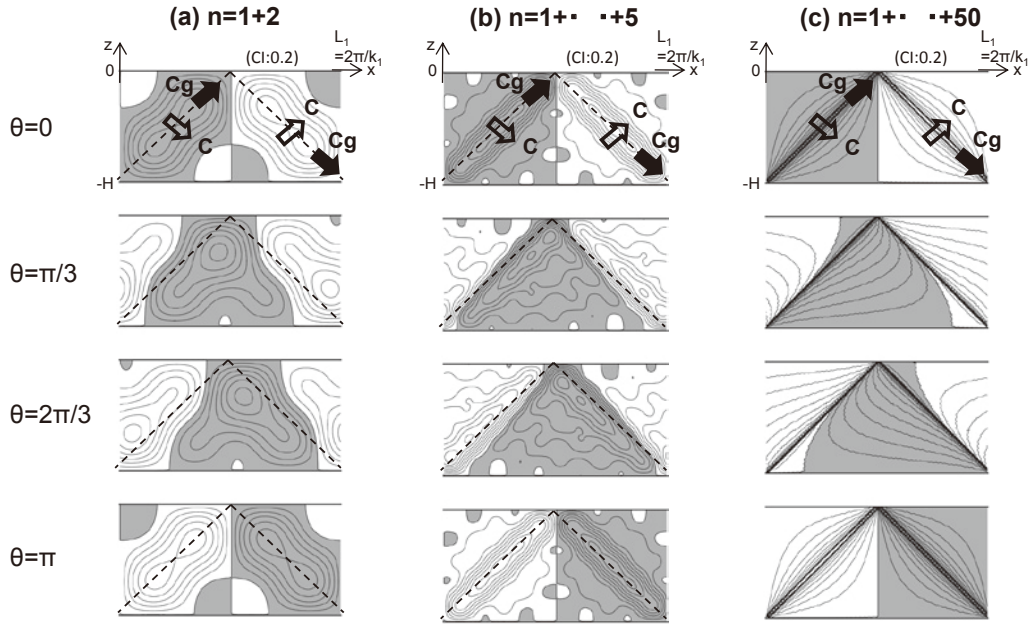


Fig. 9. The same as Fig. 8, but three types of summation (a) $n=1+2$, (b) $n=1+\dots+5$ and (c) $n=1+\dots+50$ mode waves.

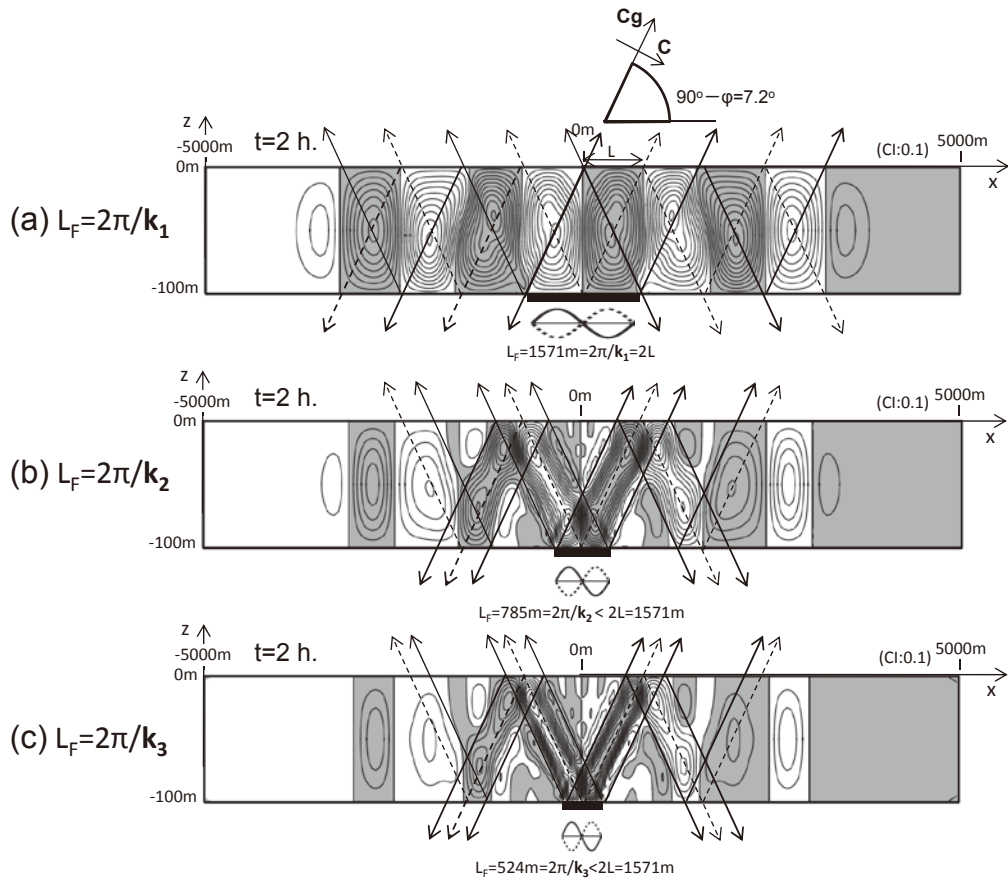


Fig. 10. The vertical planes of vertical velocity : w 2-hours later for the periodical forcing (1 hour period) with the sinusoidal wave of one wave-length (a) $2\pi/k_1=1,571$ m, (b) $2\pi/k_2=785$ m and (c) $2\pi/k_3=524$ m.

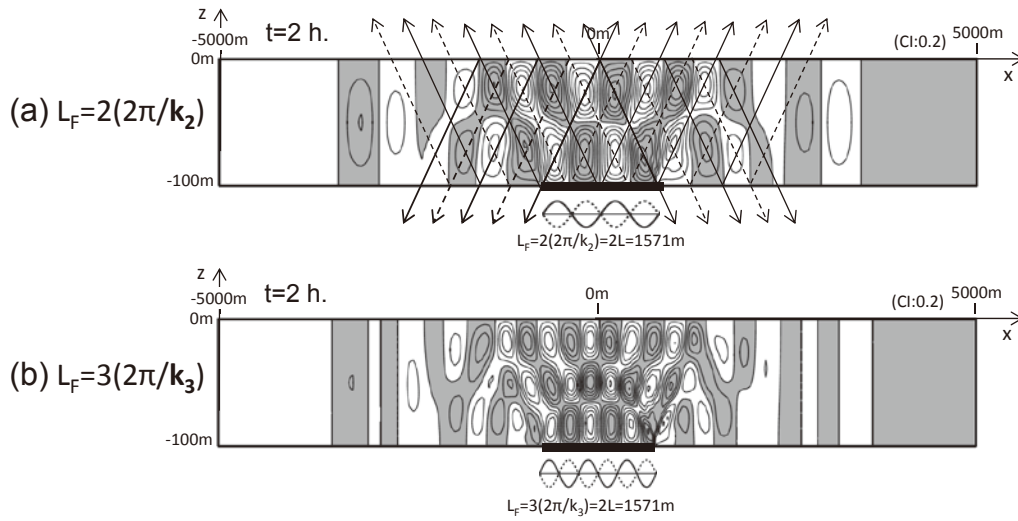


Fig. 11. The same as Figs. 10(b)(c), but the forcing sinusoidal wave of (a) two wave-lengths of $2(2\pi/k_2)=1,571$ m and (b) three wave-lengths of $3(2\pi/k_3)=1,571$ m.

スケールの浮力項 $N^2 \partial w / \partial x$ が励起源となる。いま、強制周波数を (20) 式と同じ σ_F とし、起伏回数 m 回の海底地形変化を正弦関数 $\sin(k_F x)$ で近似すれば、その線形解 $w_s(x, z, t)$ は (20) 式の周期応答関数 $w_p(x, z, t)$ と強制空間構造 $\sin(k_F x)$ のたたみ込み積分の形として、下記のように表わすことができる。

$$w_s(x, z, t) = \int_{-m\pi/k_F}^{+m\pi/k_F} w_p(x-\chi, z, t) \sin(k_F \chi) d\chi \quad (21)$$

この (21) 式は、もし、強制空間波数 k_F が n モード波の水平波数にたまたま近ければ、ビーム構造を形成する可符番無限個のモード波の集合体の中から n モードの内部波成分だけが選択され、このモード波が卓越して観測されることを示唆している。ただし、局所的な励起場所を想定したとき、ビーム構造が特定の傾きをもつため、内部波の重ね合わせが生じない空間領域が存在する場合があることに注意が必要である。数値モデルを用いて、そのような例を以下に示す。

先のモデルと比べて、計算領域を水平方向に拡大し、真中に原点 ($x=0$ m) をとり、その左右に $\pm 5,000$ m の水平距離をとる。成層は先の計算と同じ一定値 $N^2=1.96 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ とし、左右上下の境界は閉境界とした。強制空間構造は起伏回数が $m=1$ 回の局所的な海底地形を想定し、その強制水平距離はモード $n=1 \sim 3$ の波長にちょうど等しい $L_F=2\pi/k_n$ を選び、その範囲 (以下、強制区間幅と呼ぶ) の海底境界において振幅 1、周期 1 時間の $\sin(\sigma_F t) \sin(k_F x)$ 関数の強制を与えた。Fig. 10 は強制 $t=2$ 時間後 (2 周期終了後) の結果である。図中の矢印の方向は、周期 1 時間のビーム方向 (群速度の方向) であり、反射波も考慮して描いてある。この計算例の場合、モード波が現れるのは $L_F=2\pi/k_1$ ($n=1$) のケースだけである。 $L_F=2\pi/k_2$ と $L_F=2\pi/k_3$ ($n=2$ と 3) の計算結果は強制区間幅をもったビーム構造

だけとなり、ビーム幅の違い以外、両者の区別はつかない。水平距離 L で水深 H に至るようなビームの傾きであるとき、 $n=1$ モードの強制区間 L_F (ビーム幅) は $2L$ にちょうど等しく、反射波同士は完全に重なり合うことができる。すなわち、(21) 式に従って、ビーム構造を形成する可符番無限個のモード波の集合体の中から $n=1$ モードの内部波成分だけが選択され得る。一方、 $n>2$ モードの強制区間 L_F (または、ビーム幅) は $2L$ よりも小さく、反射波は上下境界付近でしか重なり合うことができない。すなわち、(21) 式に従った特定モード波の選択は行われず、(可符番無限個のモード波の集合体である) ビーム構造が残ったままとなる。 $n=1$ モードの結果から類推すれば、 $n=2$ モードの起伏回数を $m=2$ 回、 $n=3$ モードの起伏回数を $m=3$ 回として、強制区間幅 L_F を $2L$ に等しくするように都合よく強制すれば、全水深に渡って重ね合わせが可能となるはずである。この強制条件における計算結果を Fig. 11 (強制 2 時間後) に示した。Fig. 10(b)(c) の $n=2$ と $n=3$ の計算結果では似たようなビーム構造にみえたが、両者のビーム幅のわずかな違いにより、それぞれ $n=2$ と 3 のモード波がきれいに選択されていることがわかる。しかし、現場海域で観測された高次モード波が複数回の海底起伏によって、都合よく選択されたとは考えられない。

沖合のどこかで励起された内部波は沿岸境界に達し、この側壁境界で水平方向に反射されてビームの伝播方向が逆向きとなるようなビーム構造の重ね合わせが期待される。そこで、Fig. 10 の計算をさらに続け、 $x=\pm 5,000$ m の側壁境界で反射が生じ始めるころ (10 周期終了後) の計算結果を Fig. 12 に示した。 $L_F=2\pi/k_1$ ($n=1$) の結果は、 $t=2$ 時間後の結果と同様に $n=1$ のモード波だけが現れている。 $L_F=2\pi/k_2$ と $L_F=2\pi/k_3$ ($n=2$ と 3) の結果は、 $x=0$ m の強制場所付近では上下境界で反射するビーム構造のままであるが、側壁反射が期待される $x=\pm 5,000$ m の両端付近

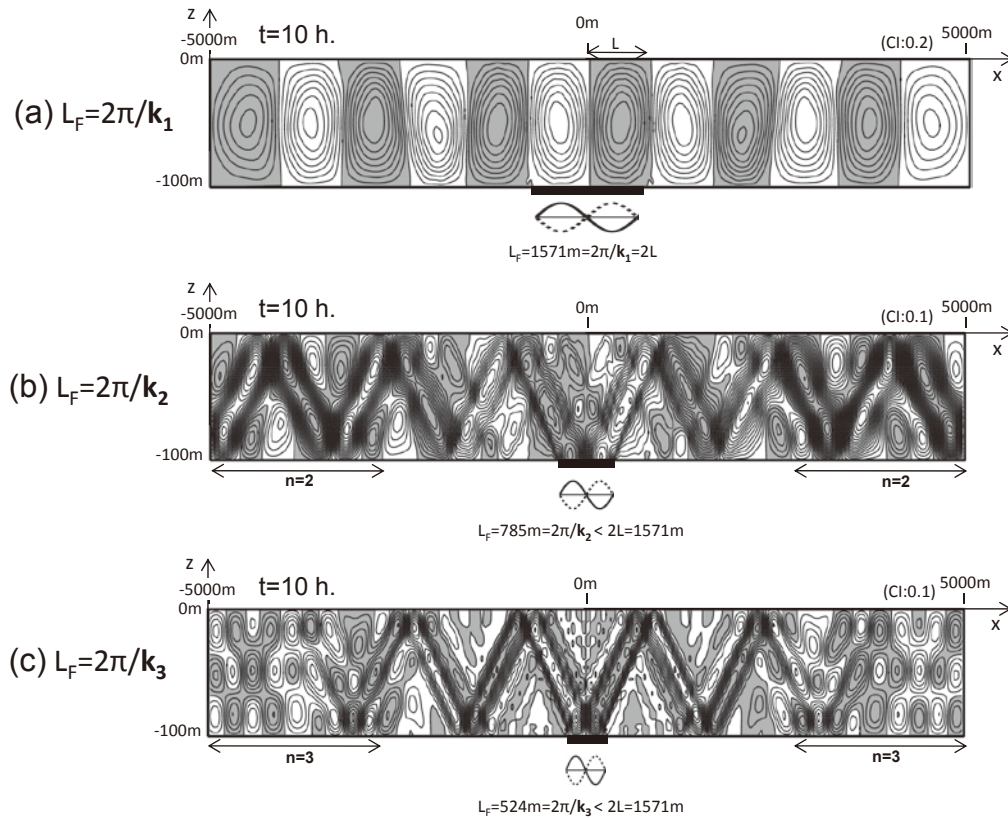


Fig. 12. The same as Fig. 10, but the model results 10-hours later.

ではそれぞれ $n=2$ と 3 のモード波が現れている。この計算結果は、沿岸境界の存在はモード波が観測される条件の一つである可能性を示唆している。

また、沿岸に接近するにつれて水深が浅くなるのが一般的であろう。そのような例として階段地形変化を想定し、 $L_F=2\pi/k_3$ ($n=3$ のモード波が励起) の計算結果を Fig. 13(a) ($t=10$ 時間後) に示す。階段地形は浅瀬領域で $n=2$ と $n=1$ のモード波が選択される水深を設定しており、確かに、そのようなモード構造となっていることがわかる。それぞれの浅瀬領域で $n=2$ と $n=1$ のモード波が観測されたとしても、この内部波を励起した強制区間幅はあくまでも $L_F=2\pi/k_3$ である。この結果は、岸沖方向に水深変化している海域において、ある地点でモード n の内部波が観測されても、この海域 (断面) 全体で共通するモード波として認識することは危険であることを示している。例えば、沖合域で $n=2$ のモード波が観測されても、その内部波が伝播してきた沿岸域でも同じ $n=2$ のモード波が観測された、とは安易に解釈できないことになる。

以上の計算は、強制区間幅としてモード $n=1\sim3$ の波長にちょうど等しい $L_F=2\pi/k_n$ を都合よく選択したが、現実の強制区間幅は任意である。一例として、モード $n=2$ と $n=3$ の中間の強制区間 $L_F=2\pi/k_{2.5}$ で強制したときの $t=9(3/4)$ 時間後と $t=10$ 時間後の計算結果を Fig. 13(b) に示した。二つの時刻を表示した理由は、位相時刻によっ

て $n=2$ と $n=3$ のモード波が側壁両端付近で交互に出現するためである。これは $n=2.5$ という中途半端なモードは上下境界の境界条件を満たさないために生ずる現象と考えられる。ここでは示さないが、 $L_F=2\pi/k_{1.5}$ では $n=1$ と $n=2$ のモード波が交互に出現する。このように、任意の強制区間幅が隣り合うモード波の波長の間にあるならば、2つのモード波が交互に観測されることになる。本結果と先に述べた水深変化によるモード変化を考慮したとき、現場で観測された内部波のモード構造から内部波の起源やモード選択性について議論することは非常に難しいことが理解される。本論の議論をもとにすれば、成層領域に存在する内部波の本質は Ray 理論のビーム構造にあり、モード波はあるビーム幅を有するビーム構造の重ね合わせでその姿を現す、と解釈される。

次の最後の節では、成層領域が鉛直方向のある狭い範囲に集中して存在する状態 (これを密度躍層と呼ぶ) における内部波を考える。我々は、このような状態を1つの内部境界面を有する2層流体に近似して理解することが多い。2層流体ならば内部モードは1つだけとなり (注意: 連続成層流体の $n=1$ モード波とは異なる)、この内部波は水平方向に伝播するだけである。すなわち、重力加速度 g を還元重力加速度 g^* に置き換えた平面波と同様な扱いが可能となり、理解し易い。確かに理解し易いものの、現場をよく近似できているかどうかは別問題である。それ

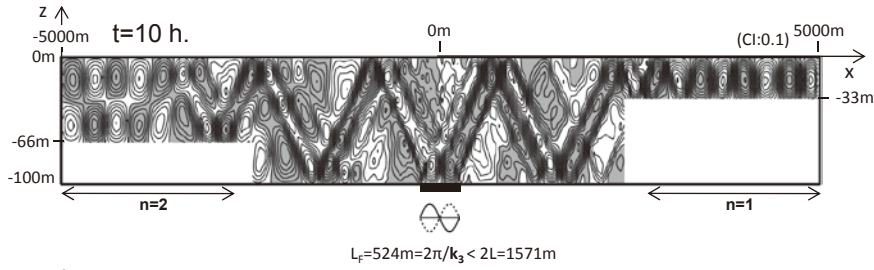
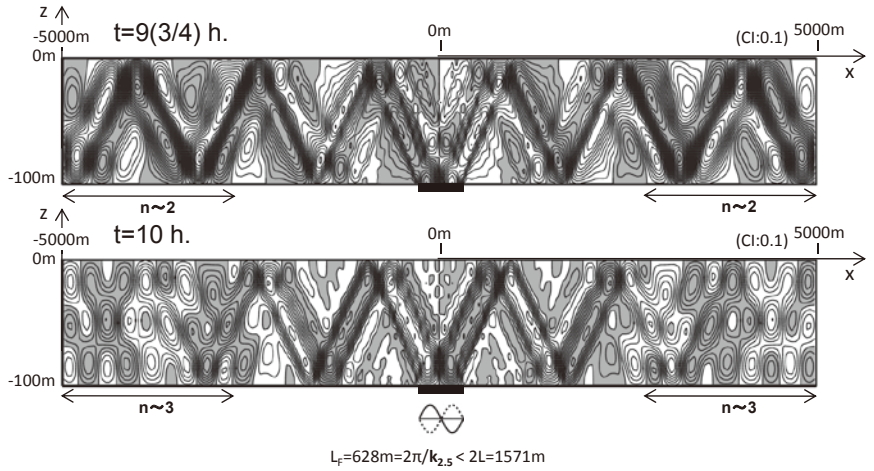
(a) Topographic variation & $L_F=2\pi/k_3$ (b) $L_F=2\pi/k_{2.5}$ 

Fig. 13. (a) The same as Fig. 12(c), but setting the step-like topographic variation. (b) The vertical planes of vertical velocity : w at two times of $9(3/4)$ and 10-hours later for the periodical forcing (1 hour period) with the sinusoidal wave of middle wave-length between $n=2$ and 3, i.e., $2\pi/k_{2.5}=628$ m.

ゆえ、ビーム構造が本質である内部波から内部境界面の上下変動で表現される内部波への近似とは、どのような近似手続きを行ったことになるのか、を理解しておくことは重要と考える。

2層流体長波近似の内部波の解釈

Fig. 14(a) に示すように、 z 軸の原点を水深に中間にとり、そこから微小距離 $+\varepsilon > z > -\varepsilon$ 間のみ $\Delta\rho_0/\Delta z$ の連続成層、それ以外の $+H/2 > z > +\varepsilon$ と $-\varepsilon > z > -H/2$ の領域は非成層 (密度一様の混合層) とする。微小距離ではないが、 $\varepsilon = 10$ m とした数値計算結果を Fig. 14(b) に示す。計算領域は水深 100 m、水平距離 1,000 m の閉境界矩形とし、連続成層部分はこれまでの計算例と同じ一定値 $N^2 = 1.96 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ とした。強制周期は 1 時間、強制場所は左端の $x=0$ m にあり、水深全体に渡って振幅 1 の正弦波関数を与えた。Fig. 14(b) の結果は、 $x=1,000$ m の側壁境界からの反射波の影響がまだ小さい時刻 $t=5(1/4)$ 時間の鉛直流 w 分布である。まず、上下の非成層領域内では内部波は伝播できないので、 $x=0$ m の強制近傍のみ大きな値が現れている。中間水深にある成層領域内では上下対称なビーム構造の内部波がみられ、このビームが $\varepsilon = \pm 10$ m にある内部境界面で何度か反射を繰り返している。この反射地点では鉛直流 w の位相が変化し、位相変化した鉛直流

w は非成層内では次第に減少して $z = \pm H/2$ の $w=0$ に至る様子が観察される。それゆえ、ビーム構造の上下対称が保障されるのであれば、非成層領域の鉛直流 w の位相は上下層で同位相 (水平流は逆位相) となる。もし、このような成層状態において、上下層の非成層領域内で流速観測したとしても、流速計には上下層で逆位相の水平流が捉えられ、2層流体を想定した水平流とも矛盾しない観測結果が得られるであろう。ただし、流速計がたまたま成層領域内に位置していれば、非成層領域の水平流の位相とは一致しない非常に複雑な流れ場が観察されると思われる。

成層領域の内部波を支配する方程式は (1) 式であるが、上下層の密度差が一定ならば、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で $N^2 \rightarrow \infty$ となる。よって、この極限で (1) 式が成立するためには $\partial^2 w / \partial x^2 \rightarrow 0$ にならなければならない。すなわち、成層領域 $+\varepsilon > z > -\varepsilon$ を支配する偏微分方程式は、長波近似された次式となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

非成層領域では内部波が存在できないので、Evanescent モードのポテンシャル流となり、長波近似のもとでは

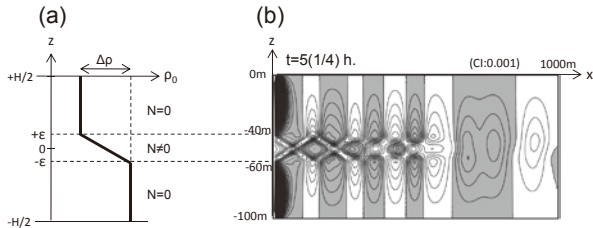


Fig. 14. (a) The vertical profile of density for two-layer approximate model. (b) The vertical plane of vertical velocity: w 5(1/4)-hours later for the periodical forcing (1 hour period) along the left-hand side boundary.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

の方程式に支配される。

いま、狭い成層領域 ($\Delta z \rightarrow 0$) は $N^2 \rightarrow \infty$ であるので群速度も大きくなり ((4a) (4b) 式を参照), さらに鉛直方向の伝播距離も十分に短い ($\varepsilon \rightarrow 0$) ため, 十分時間が経過しなくても, 成層内はビーム構造を呈することが容易に推測される。先に議論した連続成層流体の場合と同様に, 上下境界を有するビーム構造はモード波の重ね合わせとして表現される。それゆえ, 付録 B と同様な導出手順に従い, 解を $w(x, z, t) = W(z)G(x)\exp(i\sigma t)$ とおく。この解を (22) 式に代入し, 分離定数 λ を用いて水平・鉛直方向の方程式に分離すると

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda^2 N^2} G = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda^2} W = 0 \quad (25)$$

となる。まず, (24) 式に $G(x) \sim \exp(ikx)$ の解 (k は水平波数) を代入して整理すると, 水平方向の位相速度 C は次式で表わされる。

$$C^2 = \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 = \lambda^2 N^2 \quad (26)$$

次に, 成層領域の鉛直構造 $W_\varepsilon(z)$ の一般解は, (25) 式より

$$W_\varepsilon(z) = A \cos\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B \sin\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad (27)$$

となり, 非成層領域の鉛直構造 $W_0(z)$ の一般解は, (23) 式より

$$W_0(z) = Dz + E \quad (28)$$

となる。成層状態は上下対称なので, $z > 0$ 側の接続条件 ($z = \varepsilon$) と境界条件 ($z = 0, H/2$) を示すと

$$\frac{dW_\varepsilon(0)}{dz} = 0 \quad (29)$$

$$W_\varepsilon(\varepsilon) = W_0(\varepsilon) \quad (30)$$

$$\frac{dW_\varepsilon(\varepsilon)}{dz} = \frac{dW_0(\varepsilon)}{dz} \quad (31)$$

$$W_0(H/2) = 0 \quad (32)$$

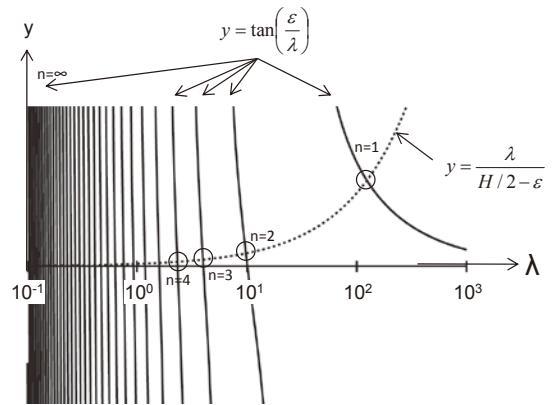


Fig. 15. The discrete functions of $y = \tan(\varepsilon/\lambda)$ and one-function of $y = \lambda/(H/2 - \varepsilon)$.

となる。

境界条件 (29) より $B=0$ が得られ, 境界条件 (32) より $E = -DH/2$ が得られるので, A と D の二つの振幅係数が未知となる。よって, 接続条件 (30)(31) を用いれば, 下記の関係式が与えられる。

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) & \frac{H}{2} - \varepsilon \\ -\frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

振幅係数 A と D は零でないことから, 次式の関係式を得る。

$$\tan\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{H/2 - \varepsilon} \quad (34)$$

(34) 式の両辺をそれぞれ y の関数として表現すれば, 両関数の交点が (34) 式を満たす λ 値となる。ここでは一例として, $\varepsilon = 10\text{ m}$ としたときの y - λ 関係を Fig. 15 に示す。○印の交点で示される λ 値は離散的に可符番無限個存在する。このように ε が小さくても有限な場合, 内部波はモード波に分解された形で表現される。なお, 成層領域の上下境界 $z = \pm\varepsilon$ で $w=0$ ではないため, 付録 B に示した連続成層のモード解とは異なる点に注意して欲しい。

ここで, 改めて $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限 (成層領域の厚さを無限小) をとれば, $\tan(x) \rightarrow x$ で近似されるので, (34) 式は

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\lambda}{H/2} \quad (35)$$

となり, モード解にはならない。それゆえ, 分離定数 λ は次式で求めることができる。

$$\lambda^2 = \frac{H}{2} \varepsilon \quad (36)$$

位相速度を示す (26) 式に, この (36) 式を代入して順に整理すれば

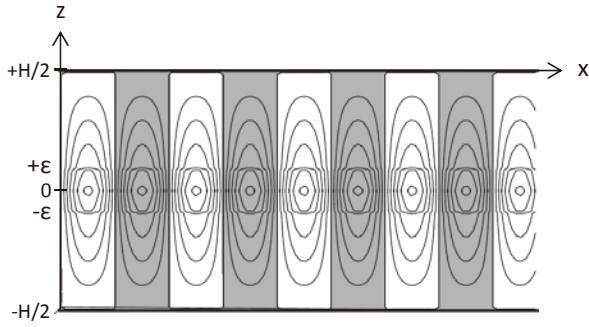


Fig. 16. The theoretical solution of internal wave for two-layer approximate model.

$$\begin{aligned}
 C^2 &= \lambda^2 N^2 \\
 &= \left(\frac{H}{2} \varepsilon \right) \left(-\frac{g}{\rho_0} \frac{(-\Delta \rho)}{\varepsilon} \right) \\
 &= \frac{H}{2} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} g \right) \\
 &= \frac{H}{2} g^*
 \end{aligned} \quad (37)$$

となり (g^* は還元重力加速度), C の値は2層流体の内部波の位相速度 (非分散であるため, 群速度とも等しい) に一致する。また, 本解析から得られた鉛直流速 w の水平鉛直分布 (時刻 $t=0$) の定性的な形状を, ε 領域を拡大して Fig. 16 に示しておく。 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において, 成層領域と非成層領域の位相は同位相となり, 有限幅 ε をもつ Fig. 14(b) の計算例とは異なることがわかる。

上記の2層流体近似の内部波の導出は, (1) 式の偏微分方程式 (もしくは長波近似した (22) 式) を用いた応用数学的な説明である。一方, 内部波の物理的意味を表現した (17a) 式を用いれば, 2層流体近似の意味を直感的に理解することもできる。(17a) 式を長波近似した方程式は, 先に導出した (19) 式であるが, 改めて下記に示す。

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

微小距離 ε 内の成層領域における鉛直流速 w を微小な内部境界面 η の時間変位に置き換えれば

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad (38)$$

となり, 両辺を t で積分すると

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

となる。この場合, 正味の浮力項の $\partial w / \partial x$ は, 内部境界面変位の水平勾配 $\partial \eta / \partial x$ で表現されている。ここで,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\Delta u}{\varepsilon} \quad (40)$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\varepsilon} = -\frac{g^*}{\varepsilon} \quad (41)$$

なので, (40) 式と (41) 式を (39) 式に代入すれば ε が消去されて, 下記の2層流体におけるシア一流 $\Delta u = u_1 - u_2$ (u_1 と u_2 は上下層の水平流速) の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = -g^* \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (42)$$

この (42) 式と2層流体の連続式を組み合わせれば, (37) 式と同じ分散関係を得ることができる。

ここで, (42) 式の意味について考える。この式は内部境界面において水平流速が不連続に変わり, 水平シア (大きな過渡) を伴う渦面になっていることを示す。 $\varepsilon \rightarrow 0$ ほど水平シアは強くなり, 現場海域を想定すれば, この渦面ではケルビン・ヘルムホルツ不安定波に代表される鉛直混合が活発に生じることが推測される。鉛直混合が進めば $\varepsilon \rightarrow 0$ から有限な ε 値へと変化し, 水平シアは次第に小さくなり, 不安定性は解消されるであろう。よって, 2層流体近似の成層状態 ($\varepsilon \rightarrow 0$) よりも, 局所的な成層領域が存在する有限な ε 値をもつ方がより安定な成層状態であり, むしろ現実的であると考えられる。局所的な成層領域 (有限幅の密度躍層) を有する成層状態でも2層流体近似の内部波として理解できる理由は, Fig. 14(b) をみて記述したように, 成層領域におけるビーム構造の上下対称性が保障されていることにある。

ま と め

本論ではまず, 連続成層流体における内部波の浮力に関する独自の考察をもとに, 内部波の鉛直・水平スケール依存した特異な周期特性 (分散性) について説明した。まず, 内部波は「浮力 (鉛直流速 w の水平勾配) により過渡 ζ_y が生成される渦波」として解釈することができる。そして, 内部波の分散性を理解する鍵は「最小周期である浮力振動が理論上, 無限小の水平波長をもつ」に対し, 無限大の鉛直波長をもつ」という性質にある。変動周期と強制場所が固定されたときに励起される内部波は, 成層流体中を角度 ϕ (変動周期の関数) の斜め方向に伝播するビーム構造 (群速度の方向) を示し, これは Ray 理論で説明される。次に, このようなビーム構造は, 水平伝播する可符番無限個のモード波の重ね合わせであるモード波理論でも表現できることを示した。一方, 現場海域ではビーム構造が観測されることはほとんどなく, むしろ, 鉛直方向のモード構造が捉えられる場合が多い。すなわち, 任意のモード波が選択されているようにみえる。このようなモード波は, 有限空間スケールの強制域を設定したときに出現する。その理由は, 強制により有限ビーム幅をもったビームが海面境界もしくは側壁境界で反射して, 波の重ね合わせが生じたとき, 設定したビーム幅の空間スケールに一致したモード波のみが重ね合わせでも消えないためである。2層流体の内部境界面は, 実際には有限幅を有する密度躍層である。この考え方をもとに,

上下に混合層を有する密度躍層内ではビームまたはモード構造が形成されることを示し、この躍層幅が零となる極限をとれば長波近似の2層モデルの平面波と一致することを示した。このように、観測された内部波をモード波や2層モデルの平面波を用いて説明しても、その物理的本質にはRay理論のビーム構造があると考えられる。

なお、本論で扱った内部波は非回転系線形波であり、数時間以上の変動周期をもつ内部波を扱う場合には回転系(非)線形波への理論拡張が必要である。例えば、回転系長波の極限は $\sigma \rightarrow f$ (慣性周波数)の慣性振動流になること(本論で扱った非回転系長波の極限である $\sigma \rightarrow 0$ は正しくない)、有限振幅の内部波ではモード波間の相互作用によるカスケードが生じること、移流効果を考慮すれば内部波周期の変調が生じること等が知られている。

付 録 A

以下の導出手順はGill(1982)の教科書に従っている。安定成層の密度場を $\rho_0(z)$ とし、 z 軸を鉛直上方にとれば $d\rho_0/dz < 0$ となる。 x 方向の水平流速 $u(x, z, t)$ 、 z 方向の鉛直流速 $w(x, z, t)$ をもつ海水運動に伴う密度変化を $\rho(x, z, t)$ とし、線形近似すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad (\text{A1})$$

を得る。この式は固定点の密度変化は基本場の鉛直移流により生じること示す。基本場の圧力を p_0 とすれば、海水運動に伴う圧力 P は

$$P(x, z, t) = p_0(z) + p(x, z, t) \quad (\text{A2})$$

となり、基本場の圧力は

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g \quad (\text{A3})$$

の静力学平衡を満たす。水平・鉛直方向の運動方程式と連続式は、それぞれ

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A4})$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A6})$$

となる。まず、(A5)式を t で偏微分し、この式に(A1)式を代入して ρ を消去すると、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^2 w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} \quad (\text{A7})$$

を得る。ここで $N = -(g/\rho_0)(d\rho_0/dz)^{1/2}$ はブラントバイサラ周波数である。次に、(A4)式を x で偏微分し、この式に(A6)式を代入して u を消去すると、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (\text{A8})$$

を得る。(A7)式と(A8)式から p を消去すると、 w に関する次式が求まる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A9})$$

この式が本文中の(1)式であり、非回転系の内部波を支配する方程式となる。

付 録 B

以下の導出手順は宇野木(1993)の教科書を参考にして、まず、変数分離型の解を $w(x, z, t) = W(z)G(x)\exp(i\sigma t)$ と仮定する(σ は周波数)。この解を(1)式に代入し、分離定数 λ を用いて、水平・鉛直方向の方程式に分離すると

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} G = 0 \quad (\text{B1})$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{N^2 - \sigma^2}{\lambda^2} W = 0 \quad (\text{B2})$$

となる。まず、(B1)式に $G(x) \sim \exp(ikx)$ の解を代入して整理すると、水平方向の位相速度は次式で表わされる。

$$C_x = \frac{\sigma}{k} = \lambda \quad (\text{B3})$$

次に、成層領域の鉛直構造 $W(z)$ の一般解は、(B2)式より

$$W(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z) \quad (\text{B4})$$

ここで、

$$\alpha^2 = \frac{N^2 - \sigma^2}{\lambda^2} \quad (\text{B5})$$

とおいた。海面の境界条件 $W(0)=0$ より $A=0$ が得られ、海底の境界条件 $W(-H)=0$ より $\sin(\alpha H)=0$ になる。よって、

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{H} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (\text{B6})$$

はとびとびのモード値となり、可符番無限個の内部波が存在し得る。よって、分離定数 λ や位相速度もモード解となり、

$$C_{xn} = \frac{\sigma}{k_n} = \lambda_n = \frac{H\sqrt{N^2 - \sigma^2}}{n\pi} \quad (\text{B7})$$

の値をもつ。(B7)式より σ と k_n との分散関係は

$$\sigma = \frac{Nk_n}{\sqrt{k_n^2 + (n\pi/H)^2}} \quad (\text{B8})$$

となり、 x 軸方向の群速度は

$$C_{gxn} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_n} = \frac{(n\pi/H)^2 N}{(k_n^2 + (n\pi/H)^2)^{3/2}} \quad (\text{B9})$$

となる。ここで、 $n\pi/H$ を鉛直波数 m に置き換えれば、(B7)の位相速度は(3a)式、(B8)の分散関係式は(2)式、(B9)の

群速度は (4a) 式と同じになる。なお、 $\sigma \ll N$ または $k_n \ll n\pi/H$ の長波近似が成り立つ場合、位相速度を示す (B7) 式は

$$C_{xn} = \frac{NH}{n\pi} = Cg_{xn} \quad (\text{B10})$$

となる。これは各モードの位相速度 C_{xn} は水平波数 k_n の関数ではなくなり、非分散波になることを示す。最後の節における連続成層流体から 2 層流体への変換では、この長波近似が成される。

このような解に基づき、 x の正の方向に進む内部波は、全てのモード解の重ね合わせである次式で表現される。

$$w(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin\left(\frac{n\pi}{H}(H+z)\right) \sin(k_n x - \sigma t) \quad (\text{B11})$$

ここで、水平波数 k_n は (B7) 式を変形した

$$k_n = \frac{n\pi\sigma}{H\sqrt{N^2 - \sigma^2}} \quad (\text{B12})$$

から求まり、各モードの振幅値 w_n は強制の仕方によって決まる。

参 考 文 献

- Gill, A.E. (1982) Chapter 6, Adjustment under gravity of a density-stratified fluid, p. 117-188. In *Atmosphere-Ocean Dynamics*, edited by Williams, L.D., Academic Press, New York.
- 宇野木早苗 (1993) 第 8 章：成層海域の波と潮汐, 329-395 頁. 沿岸の海洋物理. 東海大学出版.