経済学研究 52-4
北海道大学 2003. 3

主観確率及び期待効用の概念

——平成14年度　北海道大学経済学部公開講座　講義録より——

園　　信太郎

この講義の内容：
1.「確率，Probability」とは何か？
2. 対人的な枠組における「損か得か」の判断。
3.「確率」の加法法則。
4.「くじ」及び「確率」の「定義」の再考。
5. 条件つき「確率」及び乗法法則。
6. 以上の議論への注意及び問題点。
7.「効用，Utility」とは何か？
8. 期待効用の概念。
9. より一般的な期待効用。
10. ある問題点。
11. 幾つかの文献と経済行動への問題提起。
参考文献。

1.「確率，Probability」とは何か？

AとBとの相撲の試合を考えてみよう。試合は正に「その場」の「一回」限りであり，「引き分け」は「あり得ない」とする。すると「結果」は，「Aが勝ち，Bが負ける」か，「Bが勝ち，Aが負ける」かの一方のみであり，しかもこれら以外には「あり得ない」こととなる。この場合，「Aが勝ち，Bが負ける」ことへの「あなた」の「確からしさ」，つまり「確率」とは，はたしていかなる「もの」であろうか？

今，「「Aが勝つ」が「通用する」場合には「この千円札」を「あなた」に進呈する」という一つの「くじ」を「私」が「あなた」へと提示した場合，但し，「私」が「くじ」の約束を誠実に履行することを前提とした上でだが，「あなた」はこの「くじ」をはたして幾らに「見積る」であろうか？このばあいの「「見積り」の結果」とは，結局，「あなた」はこの「くじ」を幾らまでの金銭を出して「購入する」覚悟があるのかという「問い」への，「あなた」の（自身を欺くことのない）「正直な答え」に他ならない。つまり，「見積りの額」とは，「「その」くじ」に対する，「あなた」自身が定める「「その」値段」であり，この「「個人的な」値段」が，「Aが勝つ」という「できごと」（あるいは「事象」）に関わる（「あなた」自身の）「不確定性，uncertainty」に対する，「あなた」自身の「見積り」なのである。

そこで，「「その」値段」と「「その」千円」との比率を，「Aが「その」試合に勝つ」ことへの「あなた」の「確率」であると，「定義する」こととしよう。そこでもし「あなた」が，「「その」値段」を「354円である」と見積るのならば，「あなた」にとっての問題の「確率」は「0.354」となる。もちろん，「あなた」とは別の「個人」が別の「値」を自身の「確率」としても，それは何ら異様ではない。本来の「確率」とは正に「個人的な「もの」」なのである。

2. 対人的な枠組における「損か得か」の判断

ところで，「あなた」の「確率」は「個人的な「もの」」なのであるが，一方では，「あなた」と「私」との間の「取引」（あるいは「売買」）という対人的な枠組があり，「あなた」も「私」も「「明白に」損である」取引には応じないはずであり，従って，「あなた」が決める「「その」値」には，緩やかではあっても何らかの「制約」が

あるはずである。つまり例えば，「あなた」が問題の値を「1003円」と決めたとすると，Aの「勝ち負け」に関わらず「私」は「あなた」から「その1003円」を受け取るが，「あなた」は，「Aが勝つ」場合にのみ「私」から「1000円」を受け取り，「負け」の場合には何も得られず，結局，「「少なくとも」3円」を「必ず」失うこととなるのである。従って，「あなた」が通常の「損か得か」の判断を尊重する限り，「あなた」自身が定める「値」は「1000円を越えることがない」のである。一方，「あなた」が問題の「値」を例えば「－2円」と主張すれば，これは「私」が「あなた」に，Aが「負け」ならば「2円」を，Aが「勝ち」ならば「1002円」を渡すことを意味するので，「私」は「「少なくとも」2円」を「必ず」失うこととなり，当然取引に応じることは出来ない。つまり取引が成立するためには，「あなた」が定める「値段」が，「0円以上であり1000円以下である」ことが「必要」なのである。従って，「あなた」の「確率」は，「0以上かつ1以下」でなければ「ならない」のである。

さらにBに対しても同様の「くじ」を導入するとどうなるであろうか。つまり，「Bが勝つ」ならば1000円を，「Bが負ける」ならば0円を，「私」が「あなた」に渡すという「くじ」を考えるのである。しかも「あなた」は，この「くじB」の「あなた」にとっての「値段」と，先の「くじA」の（やはり「あなた」にとっての）「値段」とを，個別的にではなしに「共に」（もし「時」の利用を認めるのならば，言わば「同時的に」），つまり「結合的に」，考察するものとしよう。そこで「あなた」が，例えば，「「くじA」は自分にとっては554円であり，しかも「くじB」は自分にとっては445円である」と見積ったとする。この取引に「私」が「仮に」応じたとすると，「私」は「あなた」から合計で999円を受け取るが，「Aが勝ち」か「Bが勝ち」かのいずれであっても，「私」は「あなた」に1000円を支払うのであるから，結局いずれが勝ったとしても「私」は差し引きで「1円の損」となる。つまり，問題の取引に「私」が応じるのならば「「必ず」1円を失う」のであるから，「私」は問題の取引には「応じない」こととなる。一方「あなた」が，「仮に」だが，「くじA」及び「くじB」を各各556円及び446円に見積るのならば，「あなた」は「私」に1002円を支払い，しかし，AかBかのいずれか一方しかも一方のみが「勝つ」のであるから，「あなた」は「私」から1000円を受け取ることとなり，結局「あなた」は，いずれが勝っても「「必ず」2円を失う」こととなり，「556円及び446円」という自身の見積りの「まま」では，取引に応じては「ならない」はずである。つまり取引が成立するためには，「「くじA」及び「くじB」に対する「あなた」の「付け値」の合計が1000円である」ことが「必要」なのである。従って，「「Aが勝つ」及び「Bが勝つ」への「あなた」の「確率」の総和は1でなければ「ならない」」のである。

3．「確率」の加法法則

以上の議論を少しく一般化してみよう。「あなた」はとにかく一つの「世界」に直面しており，この「世界」は「空」ではないとする。この場合，事象A及びBが「「世界」の分割」であるとは，互いに排反でしかも悉皆的であることを言う。ここで「互いに排反である」とは，A及びBの内のいずれか一つが「通用する」のならば他は「通用しない」と言うことであり，「悉皆的である」とは，A及びBの内の少なくとも一つが「通用する」ということである。つまり，「「世界」の分割」であるとは，A及びBの内の一つしかも一つのみが「「必ず」起る」ということである。同様にして，事象がA，B，及びCの三つの場合にも「「世界」の分割」という概念が定義できる。また事象Aの「余事象」とは，「Aの否定」ということであり，これは「Aが通用しない場合，かつその場合に限って通用する事象」であり，これは例えば$\sim A$

などと表記される。事象A及び$\sim A$が常に分割であることは注意すべきである。事象A及びBの「合併」とは,「AかBかの少なくとも一方が通用する場合,かつその場合に限って通用する事象」であり,(A or B)と表記される。また,A及びBの「共通部分」とは,「AとBとが共に通用する場合,かつその場合に限って通用する事象」であり,(A and B)と表記される。三つ以上の事象に対しても同様にして「合併」及び「共通部分」が定義できる。

ところで,事象Aに対する「あなた」の「確率」を$P(A)$と表記すると,上の節で得た結論は,「A及びBが「あなた」にとって「世界」の分割であれば,$P(A)+P(B)=1$でなければ「ならない」」と一般的に表される。この式は,$P(A)+P(\sim A)=1$と表現することもできる。さらに同様の議論によって,「A,B,及びCが「あなた」にとって「世界」の分割であれば,$P(A)+P(B)+P(C)=1$でなければ「ならない」」が従う。これらは言わば「世界」の分割に関する「公式」だが,ここでは「分割の法則」と呼んでおく。この「分割の法則」から,$P(A)+P(B)=1-P(C)$となるが,一方やはり「分割の法則」から,$1-P(C)=P(\sim C)$。さらに(「世界」の)分割の定義により,$\sim C$と(A or B)とは事象として同一である。従って,$P(A)+P(B)=P(A$ or $B)$となる。これによって次の「加法法則,addition rule」を得る。

「確率」の加法法則:「A及びBは互いに排反であると仮定する。すると次が従う。

$P(A$ or $B)=P(A)+P(B)$。」

特に,$P(A$ or $\sim A)=P(A)+P(\sim A)=1$。ここで前半及び後半の等号は各各加法法則及び「分割の法則」による。ここで事象(A or $\sim A$)は「「常に」通用する」事象であり,このような事象の「確率」は1なのである。さらに,例えば「「明日の午前6時にここで雨が降っている」のならば「明日の午前6時にここは晴れではない」」のように,「AならばB」が成立する事象A及びBに対して,常に$P(A)\leq P(B)$となる。実際,A及び(($\sim A$) and B)は互いに排反であり,Bと(A or (($\sim A$) and B))とは「同じ」事象であり,加法法則により$P(B)=P(A)+P((\sim A)$ and $B)$となるが,「確率」は負にはならないので,右辺の第二項は0以上であり,$P(B)\geq P(A)$となる。

4.「くじ」及び「確率」の「定義」の再考

上の第2節では,「「Aが勝つ」場合には1000円を「私」から「あなた」に手渡すが,「負け」の場合には0円を手渡す」という「くじ」を想定したが,任意の事象Aと任意の値cとに対して,「Aが通用する場合には,またその場合に限って,予め指定されている金額cを「私」から「あなた」に手渡す」と言う「くじ」を導入できるはずである。ここで値cが負であれば,Aが通用する場合に$-c$円が「あなた」から「私」へと手渡されることとなる。そこで,「Aに依存する金額c」に対する言わば「交換の比率」pで,cが「いかなる」値であれ,「あなた」は「Aに依存する金額c」と金額cpとを「交換する」覚悟があると言うような,値pの「存在」を仮定しておいて,このpを,「あなた」の事象Aに対する「確率」と呼ぶこととする。このpの「存在」は自明ではないが,少なくとも「あなた」は,自身が問題とする各事象に対してこのような「交換の比率」を定めることが「できる」と,「仮定する」のである。つまり「あなた」は,「賞金」1円当りの自身にとっての,しかし問題となっている事象に依存する,だが「賞金」の特定の額には依存しない,自身にとっての「値段」p円を定めることができ,この「値段」と1円との比率pが,「あなた」にとっての「その事象」の「確率」に他ならない。

5. 条件つき「確率」及び乗法法則

ここで条件つきの「くじ」を考えてみよう。

「明日の午前９時にはその競技場で雨は降っていない」という事象を A とし，「明日の午前９時に行われるその競技場での100ｍ走の決勝で，「あなた」のチームの選手の誰かが一位となる」という事象を B とする。そこで，「B が通用する場合には「私」から「あなた」に c 円進呈するが，他の場合には何も進呈しない」という「くじ」を考える。だがここで，この「くじ」は「A が通用する場合に限って有効である」と規約するのである。つまり，「A が通用しない」場合には，「「あなた」が差し出す「この「くじ」に参加するための料金」は「あなた」へと差し戻され，「わたくし」は B が通用するか否かにかかわらず，賞金を手渡すことはなく，この「くじ」は成立しない」のであり，「A が通用する」場合には，通常通りに「くじ」が成立するのである。このような「条件つきの「くじ」」を $B\mid A$ と表記して，「A が与えられている場合の「くじ」B，B given A」と呼ぶこととする。この条件つきの「くじ」に対して，賞金 c 円が「いかなる」値であれ，「あなた」が「私」に代金として cp 円を支払う覚悟があるのならば，この「交換の比率」p を，「あなた」にとっての「A が与えられている場合の，B の条件つき確率」と「定義する」のである。なお，賞金が c 円である条件つきの「くじ」を $(B\mid A,\ c)$ と表記し，一方 $(A,\ c)$ で，事象 A に依存する（賞金が c 円である）通常の「くじ」を表すこととしておく。

三つのくじ $(B\mid A,\ c_1)$，$(A,\ c_2)$，及び $(A$ and $B,\ c_3)$ に対する「あなた」の「確率」を，各各 p，q，及び r とすると，「確率」の「定義」によって，p，q，及び r は賞金 c_1，c_2，及び c_3 の金額には依存しない。そこで「世界」の分割，$\sim A$，$(A$ and $\sim B)$，及び $(A$ and $B)$ を考えて，各場合に対応する「あなた」の収入を算出してみよう。「$\sim A$ が通用する」場合の「あなた」の収入 g_1 は，

$$g_1=-c_2q-c_3r$$

となる。「$(A$ and $\sim B)$ が通用する」場合の「あなた」の収入 g_2 は，

$$g_2=-c_1p+c_2(1-q)-c_3r$$

となる。「$(A$ and $B)$ が通用する」場合の「あなた」の収入 g_3 は，

$$g_3=c_1(1-p)+c_2(1-q)+c_3(1-r)$$

となる。これらの等式を行列で表現すると，

$$\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-q&-r\\-p&1-q&-r\\1-p&1-q&1-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

となり，ここで右辺の３×３行列を A としておく。仮に，「あなた」が定めた「確率」p，q，及び r が，「賞金の額 c_1，c_2，及び c_3 を「私」が「うまく」選ぶことによって，「あなた」の全ての可能な収入 g_1，g_2 及び g_3 を悉く負にできる」という性質を満たすのならば，三つの場合のいずれに対しても「あなた」の収入は負であるのだから，「あなた」は「「必ず」損をする」こととなり，結局「あなた」は，この $(p,\ q,\ r)$ という「確率」の対を「修正」しなければ「ならない」はずである。ところで，線形代数における基本的な命題によれば，行列 A の行列式 $\det A$ が０ではないのならば，「私」は g_i，$i=1,2,3,$ の全てが負になるように c_i，$i=1,2,3,$ を選ぶことが「できる」のであるから，「あなた」の「確率」p，q，及び r が「あなた」自身に「損をもたらさない」ためには，$\det A$ が０となることが必要である。ところが，$\det A=0$ と $r=qp$ とは同値である。従って，「あなた」が定める三つの「確率」は，$r=qp$ を満たさなければ「ならない」こととなる。

ここで $p,q,$ 及び r の各各を $P(B|A)$，$P(A)$，及び $P(A$ and $B)$ と表記すると，次の「乗法法則，multiplication rule」が従う。

「確率」の乗法法則：「事象 A 及び B を任意の事象とし，「A が与えられている場合の，B の条件つき確率」を $P(B|A)$ と表記すると，次が従う。

$$P(A \text{ and } B)=P(A)P(B|A)\ 。」$$

これより，「$P(A)$ が 0 でないのならば，$P(B|A)=P(A \text{ and } B)/P(A)$」が従うが，この式は，左辺の「条件つき確率」を右辺の「確率」の比で「定義している」のではなく，あくまでも乗法法則の系である。ところで，$0 \leqq P(A \text{ and } B) \leqq P(A)$ は常に成立しているので，「$P(A)$ が 0 でないのならば，$0 \leqq P(B|A) \leqq 1$」が従う。しかし，$P(A)=0$ の場合には，「あなた」は事象 A を「実際上不可能，virtually impossible」と見なしているのであり，実は，「条件つきの「交換の比率」」$P(B|A)$ は符号を含めて任意の値を取り得るのである。

だがここで，事象 A が「あなた」にとって「実際上不可能である」とは，いかなる状況を（「あなた」の「行為」との関りにおいて）意味しているのかを明確にしなければならない。そこで，A が通用する場合には賞金 c_1 が，$\sim A$ が通用する場合には賞金 c_2 が，「あなた」へともたらされる「くじ」を $L(A)$ として，この「くじ」が「あなた」へと無料で差し出されている場合，「あなた」は，この $L(A)$ と「自身の「その現状，the status quo」を維持する」という選択肢とのいずれを選ぶこととなるのかという「問い」を考えてみよう。賞金 c_1 及び c_2 がともに負の場合に「くじ」を受け取れば，「あなた」は，「くじ」の規約を尊重する限り，いずれの場合でも（例え僅かではあっても）正の金額を「くじ」の提供者に手渡さねばならないのであるから，「現状の維持」を選択するであろう。また，これらの賞金が共に正の場合には，「あなた」は，いずれの場合でも（例え僅かではあっても）正の金額を無料で受け取ることができるのであるから，$L(A)$ を選択することであろう。そこで，c_1 が負で c_2 が正の場合を考えてみると，c_1 がもたらす損失がいかに巨額（例えば 1 兆円の損失）であろうとも，また c_2 がもたらす利益がいかに微小（例えば 0.0001 円の収入）であろうとも，「あなた」が（「現状の維持」よりも）$L(A)$ を（平然として）「常に」選ぶのならば，事象 A は「「あなた」にとって実際上不可能である」と言い表すこととするのである。つまりこの場合「あなた」は，A に依存する損失や利益に「全く」無関心でいられるわけである。だが，この「不可能性」の「定義」が，「個人」の「内的な直観」によるのではなく，「その不確定性」に直面している「個人」の，自身にとっての損か得かの（冷静な）判断に基づいていることには，十分に注意すべきである。

ところで，乗法法則の系として「Bayes の公式，Bayes' formula」が従う。つまり，「$P(B)=0$ ではない」ことを仮定すると，$P(A|B)=P(A)P(B|A)/P(B)$ が従うのである。実際，$P(A \text{ and } B)=P(B \text{ and } A)$ だが，乗法法則により，左右の辺は各各 $P(A)P(B|A)$ 及び $P(B)P(A|B)$ に等しく，一方「$P(B)$ は 0 ではない」ので，この両辺を $P(B)$ で割れば結果が従う。また，加法法則及び乗法法則によって，次の「分割公式，partition formula」が従う。つまり，A_i，$i=1, \cdots, n$，を「世界」に対する「有限的な」分割とすると，任意の事象 B に対して，$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$ が成立する。

6．以上の議論への注意及び問題点

以上の議論で注意すべきなのは，「あなた」が「その「くじ」」に対して見積る言わば「付け値」に基づいて「「その」事象」に対する「あなた」の「「その」確率」が「定まる」ということなのであり，つまり，「確率」は「不確定性」に直面している「あなた」自身の「行為」によって「定義される」のである。従って，この「確率」は，「未知ではあるが固定されている「客観的な」確率」などではなく，特に，「「類似する」試行の「無限的な」系列がもたらし得

る」諸結果から成る「無限的な」系列に基づく，相対的な頻度の「「極限」のようなもの」では元来ないのである。「「その」事象」がもたらす「結果」というものは，あくまでも「「その」一回限り」のものであり，「類似する」試行の系列がもたらす「であろう」諸「結果」の系列も，「「その」試行の系列」に関する「「一つの」事象」に対応する「その「一つの」結果」に他ならない。「事象」とは本来「できごと」であり，その「生起」は当然「「その」一回限り」のものであり，「確率」とは，この「一回限りの生起」に対する「あなた」自身の「見積り」なのである。

一方，「確率」の計算に関する「法則」は，「「「私」がうまく「くじ」の賞金（負や零の場合もあり得る）を選択することによって，その「くじ」のどの「結果」がもたらされようとも，常に「あなた」が「損をする」ようにできる」という状況を，「あなた」はとにかく回避しなければ「ならない」」という「原則」に従って，導出されたのである。この「原則」は，「あなた」の「見積り」が（損か得かの判断において）言わば「整合的である，coherent」ことを要請するものであり，「あなた」が（通常の意味での）「自身の損失」を回避しようと欲する限り，従わざるを得ないはずの「要請」である。そこで，この「整合性，coherence」の要請が満たされるための必要条件として，「確率」の加法法則及び乗法法則が「証明された」のであり，これらの「法則」は「あなた」の「見積り」が満たさなければ「ならない」言わば「規範」である。ところで前節で注意したように，この「規範的な」考察からすれば，「確率」を（零でない）「確率」で割ることによって「条件つき「確率」」を天下り式に「定義してしまう」という「慣例」は，（「規範」として正当化される）乗法法則の系として得られる「等式」によって，正当に置き換えられてしまうのである。

だが，以上の議論にはかなり明白な問題点がある。それは第 4 節でのべた「値」p の「存在」に関するものである。つまり，「「事象 A に依存する賞金 c」の「あなた」にとっての「交換の比率」p が，いかなる c に対しても「共通の」値として「定まる」」という「想定」である。例えば，一枚のコインを「私」が一度だけ投げ上げるという試行を想定して，さらにこの試行で，「その」コインが「裏」か「表」かのいずれを見せるのかは，「あなた」にとって「実際上無差別である」としてみよう。ここで，「「裏」の場合には「あなた」に 100 円を進呈するが，「表」ならば何も渡さない」という「くじ」を「私」が「あなた」に差し出す場合，「あなた」がこの「くじ」の（自身にとっての）「値段」を「50 円である」と見積るとしても，多分「異常」ではあるまい。だが，「私」が賞金を 100 円から 20 万円へ格上げした場合に，「あなた」がこの格上げされた「くじ」と「自分自身の 10 万円の現金」とを平然と交換するであろうとは，どうも「私」には思われないのである。恐らくは，この格上げされた「くじ」の「あなた」にとっての「値段」は，「通常は」10 万円よりも下がるはずであろう。つまり，「あなた」にとっての「賞金に対する「効用」」が，「あなた」の「見積り」に影響を及ぼすのであり，「共通」の p などは「存在しない」のである。結局，上の議論を説得力のあるものにするには，「賞金の額の絶対値が「適度に」小である」という「制約」を導入する必要があるであろう。だが，このような「制約」が「うまく機能する」ためには，「「制約」の範囲内での「賞金」」に対応する（「あなた」の）「効用」が「賞金の額」に「ほぼ」比例していることが必要であり，結局（「あなた」と「私」とが）いかなる「制約」を設定するに至るのかは，少なくとも，「あなた」の「賞金に対する効用」の原点の周りでの挙動に依存することとなるはずである。

従って，「確率」についてのさらなる「真剣な」考察を遂行しようとすれば，「確率」と「効用」との関りを明確に捕えなければ「ならない」こととなるのである。

7．「効用，Utility」とは何か？

何らかの「くじ」の「賞」として（「あなた」へと）もたらされ得る（金銭的とは限らない）幾つかの「対象」の「あなた」にとっての「価値」を「合理的に」見積ることは，少なくとも原理上は可能であろうか？ここでは，「あなた」の「選好，preference」とある種の「標準的な「確率」，canonical probabilities」とに基づいて，この「見積り」を考えてみよう。ここで「選好」とは，「あなた」の（損か得かの判断に基づく）「選択の様式」のことであり，「あなた」が対象 a よりも対象 b を「選好する」とは，（いずれを選ぶのかは全く「あなた」のみの判断によるとして）「a よりも b を「より得である」として選ぶ」ということである。例えば，「通常の」状況では，「あなた」は，16 円の賞金よりも 103 円の賞金を「選好する」はずである。ところで，a 及び b が「異なる」対象ではあっても，「あなた」がそれらに対して「意味のある」序列を設定できず，「a と b とは無差別である」と判断する状況も無視できないのである。つまり，「あなた」にとって「a と b とが無差別である」とは，「a か b かの選択」を他の（「あなた」にとっては未知の）「誰か」に任せたとしても，またその「誰か」がいずれを選ぼうとも，その（未知の）「誰か」の選択に従うことにおいて，自身にとっては「何の損失もない」と「あなた」自身が判断していることなのである。このように考えると，「賞」となり得る対象に対する「あなた」の「選好」とは，「数」の間の「通常の」順序に「似た」ある種の序列であるように見なされ得るであろう。そこで例えば，「a と b とが無差別である」場合をも考慮して，「a の選好は b 以下である」とか，「b の選好は a 以上である」というような表現を利用し得るであろう。

ところで，「その「くじ」」が「賞」としてもたらし得る対象の全体において，「あなた」にとって「最も損な」対象と「最も得な」対象とが含まれていると想定しても，それほど不当ではないであろう。さらにまた「あなた」自身が，「その「くじ」」がもたらし得る対象のいずれよりも選好が「以下である」対象 c_* と，やはりそれらのいずれの対象よりも選好が「以上である」対象 c^* とを設定し得て，しかも「c_* よりも c^* の方が選好が上である」とできるとしても良いであろう。例えば，いずれの「賞」も（「あなた」にとっては）「－16 円」から「593 円」までの範囲内にあると（「あなた」によって）判断される場合には，「あなた」は c_* 及び c^* を，例えば，各各「－100 円」及び「1000 円」と設定し得るわけである。以下では，「あなた」の「効用」を測定するために，このような対象 c_* 及び c^* を「結果」としてもたらすある「標準的な「くじ」」を利用することとなるのであり，これら c_* 及び c^* は言わば「基準となる「結果」」である。

次に，「標準的な「確率」」を「個人」の「想像上の実験」によって導入する。一つの「壷」の中に例えば 100 個の「同形かつ同質の」ボールが入っており，それらに順に 1 から 100 までの番号が一つずつ打たれているものとしよう。この「壷」から一個のボールを取り出すのだが，この取り出し方は次の様式において（その「個人」にとっては）「ランダム，random」である。つまり，「番号が i であるボールが抽出されるのならば，「当り」賞である c^* が自身へともたらされ，他のボールの場合には「はずれ」賞 c_* がもたらされる」という「くじ」は，その「個人」にとって，番号 i が 1 から 100 までのいずれであっても皆無差別である。従って，抽出の様式がランダムであれば，例えば，「i が 1 である「くじ」」と「i が 99 である「くじ」」と「i が 74 である「くじ」」とは，その「個人」にとって無差別なのである。このような（個人的に「ランダム」な）抽出実験を想定して「標準的な実験」と呼ぶこととする。そこで「標準的な「確率」」とは，この「標準的な実験」において，（i を 1 から 100 までの任意の数とし

て)「1番から i 番までのボールのいずれかが抜き出される「確率」」のことである。ここで，1番から100番までの任意の番号 j 及び k に対して，ランダム性の「仮定」により，その「個人」にとっては，「j 番目が抜き出される「確率」」と「k 番目が抜き出される「確率」」とは「等しい」はずである。ところが，「標準的な実験」が行われることを前提とすれば,「1番から100番までのボールのいずれか一つ，しかも一つのみが，抽出される」のであるから，「いずれか一つが抽出される「確率」」は1である。そこで加法法則により，「j 番目が抜き出される「確率」」は100分の1であり，また「標準的な「確率」」は各 i に対して $i／100$ である。また，「標準的な実験」が行われることを前提とすれば,「どのボールも抜き出されない「確率」」は0であり，これは「標準的な「確率」」の i を0で置き換えることによって得られる値であり,「標準的な「確率」」と見なして良いであろう。さらにまた「標準的な実験」においては，「壷」の中の i 個のボールを予め指定しておくと，これら i 個の内のいずれかが抽出される「確率」は $i／100$ となる。

さらに，「1番から i 番までのボールのいずれかが抜き出される場合には「当り」賞 c^* が，他のボールの場合には「はずれ」賞 c_* がもたらされる「くじ」」を「標準的な「くじ」」と呼ぶこととして，これを $L\langle i\rangle$ と表記し，さらに $L\langle 0\rangle$ は，(「当りボール」がない)「はずれ」賞のみがもたらされる「くじ」としておく。すると，「$j<k$ ならば，その「個人」は $L\langle j\rangle$ よりも $L\langle k\rangle$ を選好するに至る」ことは，前者の「当りボール」を後者の「当りボール」が（強い意味で）含んでいることを考慮すれば，多分「当然」であろう。この「標準的な「くじ」」の（「個人」の）選好による序列は，「くじ」に対応する「当り」の「確率」，つまり「標準的な「確率」」の，「通常の」意味での（「数」の）大小順に一致しているのである。

以上の「標準的な実験」及び「標準的な「確率」」の議論においては，個人的な無差別性（あるいはランダム性）の「仮定」が本質的なのであって，「壷」の中の2個以上のボールの総数が結局幾つに設定されるのかは本質的ではない。しかし，「「効用」の測定」を試みる場合には，「標準的な「確率」」が「大まかに過ぎる」と多分困難が生じるので，上ではボールの総数を100にしておいたのである。

そこで「「効用」の測定」である。「その「くじ」」が「あなた」へともたらし得る「賞」たちの全てを間に挟む「基準となる「結果」」c_* 及び c^* を「あなた」は設定し得るのであった。そこで任意の「賞」c に対する「あなた」の「効用」を次の様に「測定」するのである。まず，c_* 及び c^* を各各「はずれ」及び「当り」賞とする「標準的な「くじ」」$L\langle i\rangle$ と，「壷」からどのボールが抜き出されようとも「常に」c をもたらす「くじ」$\langle c\rangle$ とを導入する。$L\langle 0\rangle$ 及び $L\langle 100\rangle$ は各各「常に」c_* 及び c^* をもたらす「くじ」であるので，「あなた」の選好は「$\langle c\rangle$ は $L\langle 0\rangle$ 以上でしかも $L\langle 100\rangle$ 以下である」を満たすはずである。そこで，$L\langle i\rangle$ の番号 i を0から順に100まで増加させて行くと，「あなた」の選好は，$L\langle 0\rangle$，$L\langle 1\rangle$，$L\langle 2\rangle, \cdots$，という系列に従って（強い意味で）増大して行くのであるから，そこで，$\langle c\rangle$ を挟む，即ち「$L\langle j\rangle$ 及び $L\langle j+1\rangle$ は各各 $\langle c\rangle$ 以下及び以上であり，ここで「以下」及び「以上」の少なくとも一方からは「無差別性の場合」を排除できる」を満たす，ある番号 j が（一意的に）存在するはずである。(もし $j=100$ ならば，$\langle c\rangle$ と $L\langle 100\rangle$ とは無差別となり，c と c^* とは「あなた」にとっては結局「同じ」価値を持つこととなる。）ここで「標準的な「くじ」」の「当り」の「確率」，つまり「標準的な「確率」」を用いて，もし $\langle c\rangle$ が $L\langle j\rangle$ と無差別であれば，「「あなた」にとっての c の「効用」は $j／100$ である」と，また $L\langle j+1\rangle$ と無差別であれば，「「あなた」にとっての c の「効用」は $(j+1)／100$ である」と，表現することとし，さらにこれら

の無差別性が（「あなた」にとっては）成立しないのならば，その状況を，「「あなた」にとってのcの「効用」は，j／100より大であり(j＋1)／100より小である」と言い表すのである。この最後の場合は，c_*及びc^*に基づいて「cに対する「あなた」の「効用」」を捕える際には，「標準的な「確率」」の「精度」が言わば「少し粗い」ということなのである。そこで，「壷」の中のボールの総数を増大させて，例えば1000個にして，同様の考察を行うのである。すると，「標準的な「確率」」に基づく「cの「効用」」の「見積り」は，幅が1000分の1の唯一の（しかも以前の区間に（強い意味で）含まれる）区間へと限定されるのである。それでもなお無差別性が成立しないのならば，さらにボールの総数を例えば10000へと増大させて「測定」を遂行することとなる。しかし「「実際上の」あなた」は，1000分の1という「日常的には」微小な「確率」をさらに分割して自身の選好の「微小な」変化を的確に捕えることに，相当な困難を覚えるはずである。だが，原理上は，「あなた」による無限的な「「精度」の向上の過程」が（正に「あなた」によって）想定「できる」のであり，結局，区間から成る（幅が「限りなく」0へと近づく）「(強い意味で）減少する」ある無限的な系列が「収束する」唯一の点を，「あなた」は「指定する」に至るのである。この唯一の点は，「標準的な「確率」」の「極限」であり，0以上で1以下の「実数」である。この唯一の「実数」が，「「あなた」にとってのcの「効用」」に他ならない。

結局，「「あなた」にとってのcの「効用」」は，「標準的な「確率」」か，その「極限」によって「得られる」のだが，しかしもし「標準的な実験」を，単位区間［0，1］からの「「ランダムな」一点の抽出」として設定「できる」のならば，「標準的な「確率」」は「連続的な」ものとなり，「効用」は全て「標準的な「確率」」によって「測定される」はずである。

このような（「個人」の「想像上の実験」に基づく）「「効用」の測定」を踏まえた上で，cに対応するこの「確率」を，「「あなた」にとってのcの「効用」」であると「定義する」のである。この「効用」の値は「基準となる「結果」」c_*及びc^*に依存するが，これらを指定すれば，それは「確率」によって唯一「定まる」のである。つまり，「効用」は「確率」によって「表現」される。

8．期待効用の概念

前節で導入した「標準的な「くじ」」を僅かに一般化してみよう。「壷」の中のボールの総数を例えば600個とし，「この「壷」から「ランダムに」一つのボールを抜き出す」という「標準的な実験」を想定するのだが，例えば，「1番から100番までのボールの一つが抜き出される」という事象をA，「101番から300番までのボールの一つが抜き出される」という事象をB，さらに，「301番から600番までのボールの一つが抜き出される」という事象をCとして，これらA，B，及びCが「通用する」場合において，各各「賞」c_1，c_2，及びc_3が「あなた」へともたらされるものとするのである。つまり，「標準的な実験」を「行う」ことは前節と同様なのだが，「壷」の中のボールはA, B, 及びCによって分割されており，この分割の各事象に依存して「賞」がもたらされるのである。この「実験」が行われることを前提とすれば，A, B, 及びCの内の一つしかも一つのみが「通用する」こととなる。このような「くじ」を(A，B，C；c_1，c_2，c_3)と表記しておこう。

そこで，この「くじ」の「「あなた」にとっての「価値」」をいかにして「見積るべき」なのかが問題となるのである。つまり，この「価値」を「見積る」ための「正当な」様式とは結局いかなるものなのかと言うことである。既に前節で述べたように，c_1，c_2，及びc_3を間に挟む「基準となる「結果」」c_*及びc^*を「あなた」自身が設定し，さらに「あなた」自身の「標準的な「確率」」を利用することによって，c_1，c_2，

及びc_3の各各に対する「効用」u_1, u_2, 及びu_3を「あなた」は「定める」のであった。即ち，c_i は「c_*及びc^*を各各「確率」$1-u_i$ 及びu_i でもたらす「くじ」」と無差別なのであり，この「くじ」を$c(u_i)$と表記しておく。すると$(A, B, C; c_1, c_2, c_3)$は，「くじ」を「賞」としてもたらす「くじ」$(A, B, C; c(u_1), c(u_2), c(u_3))$と無差別なはずである。そこで（$c_i$を$c(u_i)$によって「置き換える」ことによって得られる）この「くじ」を「見積る」こととする。議論の様式を簡単にするために，「くじ」$c(u_i)$は，100個のボールを含む「壷」U_i において1番目から$100u_i$ 番目までのボールが抜き出される場合にはc^*を，他の場合にはc_*をもたらす「標準的な「くじ」」であるとしよう。すると，次のような（「二段階の抽出」に基づく）「くじ」が問題となって来る。つまり，600個のボールを含む元の「壷」をUとすると，このUから「ランダムに」一つのボールを抜き出し，そのボールがA, B, 及びCのどれに属するのかを「観察」し，例えばBに属するのならば，「壷」U_2からの「ランダムな」抽出を行い，抜き出されるボールが$100u_2$番目までならば「賞」c^*を，$100u_2$番目を越えていれば「賞」c_*を，「あなた」が受け取ると言う「くじ」である。このような「くじ」では，「結果」はc^*かc_*であり，しかも「あなた」にとって，c^*の選好はc_*よりも上なのであるから，c^*が得られる（「あなた」にとっての）「確率」が，この「くじ」の（「あなた」にとっての）「効用」，つまり「「価値」の指標」となるはずである。そこでこの「確率」を見積るために，各「壷」U_i を元の「壷」Uに「組み込み」，（「二段階の抽出」に基づく）「くじ」を（「Uからの抽出」に基づく）「くじ」へと「変形する」こととしよう。そこで例えばU_2を「組み込む」場合には，事象Bに対応する101番から300番までのボールに対して，101番から$100+200u_2$番までには各各ラベル「c^*」を一つずつ，他のボールにはラベル「c_*」を一つずつ記すこととするのである。この「組み込み」によって，（「二段階の抽出」に基づく）「くじ」は，「Uから一つのボールを「ランダムに」抜き出し，そのボールの番号と「ラベル」とを「観察」して，その「ラベル」に対応する「賞」を「あなた」に与える」という「くじ」に「変形される」のである。ここで抽出の「ランダム性」によって，「ボールの番号が例えばBに属する場合には，記されているラベルが「c^*」となる（「あなた」にとっての）「確率」はu_2となる」として良いであろう。すると「あなた」にとっては，この「変形された「くじ」」は，元の（「二段階の抽出」に基づく）「くじ」と無差別となるはずである。ところでこの「変形された「くじ」」においては，ラベル「c^*」を持つボールの総数は$100u_1+200u_2+300u_3$個であり，他はラベル「c_*」が記されている。従って，「当り」が得られる「標準的な「確率」」は$(100u_1+200u_2+300u_3)/600$となり，これが「あなた」にとっての「変形された「くじ」」の「効用」に他ならない。一方，$(A, B, C; c_1, c_2, c_3)$と$(A, B, C; c(u_1), c(u_2), c(u_3))$とは無差別で，しかも後者と「変形された「くじ」」とは無差別であるから，$(A, B, C; c_1, c_2, c_3)$と「変形された「くじ」」とは「あなた」にとって無差別なはずである。つまり$(A, B, C; c_1, c_2, c_3)$の「効用」は，「あなた」にとっては$(100u_1+200u_2+300u_3)/600$となる「べき」なのである。一方，「壷」Uに関する「標準的な実験」を想定しているのであるから，分数100／600，200／600，及び300／600は各各A, B, 及びCに対応する「標準的な「確率」」$P(A)$, $P(B)$, 及び$P(C)$に等しい。従って，問題の「効用」は$P(A)u_1+P(B)u_2+P(C)u_3$と表現される。各u_iは（i番目の事象が「通用する」場合にもたらされる）「賞」c_iの「あなた」にとっての「効用」であるから，問題の「効用」は，分割(A, B, C)に基づく「あなた」にとっての「期待効用，expected utility」に他ならない。つまり，（一般化された）「標準的な「くじ」」の「価値」はその「期

待効用」によって「見積られる」のである。

以上の考察から次の「自身の行為に対する規範」が得られる。つまり，幾つかの（一般化された）「標準的な「くじ」」から，「あなた」が（自身にとっての損か得かの判断に基づいて，より得な）一つの「くじ」を選択する状況においては，（「あなた」にとっての）「期待効用」が最大となる「くじ」を，「あなた」自身は正に選択しなければ「ならない」。従って，「期待効用最大化の原理」が，「個人」が自身の「行為」に対して課する「規範」として，少なくとも（一般化された）「標準的な「くじ」」の間での選択に対して，「正当化される」こととなるのである。

9．より一般的な期待効用

前節では（「壷」からの「ランダムな」抽出に基づく）「標準的な実験」における「事象」に関してのみ，「期待効用」を問題としたのである。しかしこの「事象」とは，実は「その「壷」」に含まれる幾つかのボールから成る「集合」によって表現されるものであった。そこで「通常の」意味での（つまり「できごと」としての）「事象」が問題となる状況では，「期待効用」による「「価値」の見積り」の正当性は従うのであろうか？

まず「通常の」事象に対する「あなた」の「確率」が，「標準的な実験」における（ボールの集合として表現される）「事象」，つまり「標準的な「事象」」に対する，「あなた」の「確率」によって，つまり「標準的な「確率」」によって，「見積られる」ことに注意しよう。つまり，「通常の」事象 A に対して，「A が通用する場合には「当り」賞 c^* が，$\sim A$ が通用する場合には「はずれ」賞 c_* が，「あなた」へともたらされる「くじ」」$(A,\ c^*)$ の「あなた」にとっての「価値」を，（この c^* 及び c_* を「結果」としてもたらす）「標準的な「くじ」」で（「あなた」が）見積る作業を想定するのである。例えば100個のボールから成る「壷」に対する「標準的な実験」の遂行を想定すると，「標準的な「くじ」」の系列，$L\langle 0\rangle$，$L\langle 1\rangle$，$L\langle 2\rangle$，…，$L\langle 100\rangle$，が導入できるが，すると，番号 j で「$(A,\ c^*)$ の「あなた」にとっての選好が，$L\langle j\rangle$ 以上でしかも $L\langle j+1\rangle$ 以下であり，ここで「以上」及び「以下」の少なくとも一方からは「無差別性の場合」が排除できる」を満たすものが一意的に定まるはずである。（もし $j=100$ ならば，$(A,\ c^*)$ は，「常に「当り」をもたらす「くじ」」$L\langle 100\rangle$ と（「あなた」にとっては）「同等」となる。）ここで，$(A,\ c^*)$ と例えば $L\langle j\rangle$ とが無差別ならば，A に対する「あなた」の「確率」を，「標準的な「確率」」$j/100$ に等しいと「見積る」こととするのである。もし無差別性が成立しないのならば，「壷」の中のボールを例えば1000個へと増大させて，「より精密な「測定」」を遂行するのである。すると，第7節の「「効用」の測定」で述べた「極限的な」過程によって，0以上で1以下のある「実数」p が唯一定まることとなり，この p を事象 A に対する「あなた」の「確率」であると「定義する」のである。この「定義」は実は，「単位区間［0，1］から「ランダムに」一点を抽出する」という「標準的な実験」を「仮に」認めるのならば，「この「標準的な実験」によって区間［0，p］の点が抽出される場合には c^* が，他の場合には c_* が，「あなた」にもたらされる」という「くじ」と $(A,\ c^*)$ とが「あなた」にとって無差別であれば，「あなた」は，A に対する「あなた」の「確率」を p と見積るべきであると言う主張と，「実質において同等である」と恐らくは見なし得るであろう。つまり「通常の」事象 A の「確率」は，「標準的な実験」の「標準的な「確率」」によってとにかく「測れる」のである。

次に A 及び B は「通常の」事象であるが，（「あなた」にとって）互いに排反かつ悉皆的であるとする。（例えば冒頭の節で述べた「相撲の試合」を想起して頂きたい。）そこで「くじ」$(A,\ B\ ;\ c_1,\ c_2)$ の「価値」を「あなた」が見積るの

である。まず「あなた」は，「賞」c_1及びc_2を間に挟む「基準となる「結果」」c^*及びc_*を導入した上で，c_1及びc_2の「効用」を各各u_1及びu_2と「見積る」に至るものとする。ここで，u_1及びu_2は「効用」と呼ばれているが，実は「当り」の「確率」である。また$u_1 \geqq u_2$と仮定しておく。また議論を簡単にするために，極めて多数のN個のボールを含む「壷」Uに関する「標準的な実験」を想定しておいて，「賞」c_iは「標準的な「くじ」」$L\langle Nu_i \rangle$と無差別であると仮定しておく。そこで次の（二段階の「観察」に基づく）「くじ」L(U，A，B)を導入してみよう。つまり，まずA及びBの内のいずれが「通用する」のかを「観察」し，例えばBが「通用する」のならば，次に「壷」Uからのボールの抽出を行ってそのボールの番号がNu_2以下か否かを「観察」し，Nu_2以下ならばc^*を，しからざればc_*を，「あなた」は受け取る，と言う「くじ」である。この「くじ」L(U, A, B)は，例えばAが「通用する」場合には,「あなた」は「標準的な「くじ」」$L\langle Nu_1 \rangle$に直面し，（u_1の「定義」により）この「くじ」はc_1と無差別なのであるから，全体としては「くじ」（A，B；c_1，c_2）と無差別なはずである。

そこで「くじ」L(U，A，B)を次のように「読み直す」こととする。つまりまず，「壷」Uの中のN個のボールを1番からNu_2番まで，Nu_2＋1番からNu_1番まで，そしてNu_1＋1番からN番までの各各V_2，V_1，及びV_0へと分割する。（もし$u_1=u_2$ならば，V_1は空となる。）さらに，Uから「ランダムに」抜き出されるボールがどのV_iに属するのかを「観察」する。次に，A及びBのいずれが「通用する」のかをやはり「観察」する。そこで，ボールがV_2に属する場合には，A及びBのいずれが通用してもc^*を，V_1に属する場合には，Aが通用すればc^*を，Bが通用すればc_*を，V_0に属する場合には，いずれが通用してもc_*を，「あなた」は受け取るのである。この「読み直し」において，Aが「通用する」場合においてc^*が得られる「確率」は（V_2及びV_1に対応する）u_1であり，Bが「通用する」場合においてc^*が得られる「確率」は（V_2に対応する）u_2であり，L(U，A，B)とその「読み直し」とは「あなた」にとって無差別なはずである。

さらにA及びBに対する「あなた」の「確率」を各各p_1及びp_2として（ここで第3節での加法法則を前提とすれば$p_1+p_2=1$である），L(U，A，B)の「読み直し」を次の様に変形する。多数のボールを含む「ある壷」において，全体でp_1及びp_2の割合を占めるボールたちに対して，各各A及びBのラベルを（重複することなしに）記して，この「ある壷」に対する「標準的な実験」を想定した上で，次の様な（二段階の「観察」に基づく）「くじ」を考えるのである。つまり，「壷」Uの「標準的な実験」においてV_2のボールが「観察」される場合には，次にA及びBのいずれのラベルが「観察」されてもc^*が，またV_1のボールが「観察」される場合には，次にラベルAが「観察」されればc^*が，Bが「観察」されればc_*が，V_0のボールが「観察」される場合には，次にA及びBのいずれのラベルが「観察」されてもc_*が，「あなた」へともたらされるとするのである。この「「読み直し」の変形」をL(U, p_1, p_2)とすると，「壷」UでV_2が「通用する」場合には，（加法法則を前提とすれば）「読み直し」とL(U, p_1, p_2)とは（「あなた」にとって）無差別なはずであり，V_1の場合には，この節の二番目の段落での「「確率」の測定」に関する議論により，やはり「読み直し」とL(U, p_1, p_2)とは無差別なはずであり，V_0の場合には，（加法法則を前提とすれば）やはりまた無差別なはずである。従って，「読み直し」とL(U, p_1, p_2)とは（「あなた」にとって）無差別なはずなのである。このL(U, p_1, p_2)をさらに次の様に「Uへの組み込み」によって変形する。つまり，V_2のp_1及びp_2の割合の（重複していない）ボールたちにラベルc^*を記し（従って，加法法則を前提とすれば全てがラベルc^*となる），V_1の

p_1 の割合のボールたちにラベル c^* を，他は c_* を記し，V_0 のボールには皆 c_* を記すのである。そこで，U から抜き出されるボールのラベルが c^* か c_* かに従って，対応する「賞」が「あなた」にもたらされるものとする。この「組み込み」変形の「くじ」は，U から「ランダムに」一つのボールが抜き出されることを考慮すると，(「あなた」にとって，加法法則を前提とすれば) $L(\mathrm{U},\ p_1,\ p_2)$ と無差別なはずである。

ところで，この「組み込み」変形の「くじ」においてラベル c^* を持つボールの総数は，

$$Nu_2(p_1+p_2)+N(u_1-u_2)p_1$$

であり，これは $N(u_1p_1+u_2p_2)$ に等しい。「壷」U のボールの総数は N であるのだから，「あなた」が「賞」c^* を得る (「あなた」にとっての)「確率」は，$u_1p_1+u_2p_2$ に他ならず，これが「組み込み」変形の「くじ」の「あなた」にとっての「価値」(の指標) であり，つまり「効用」である。一方，「くじ」$(A,\ B\ ;c_1,\ c_2)$ は (「あなた」の選好の無差別性を保つ) 一連の「変形」によって，この「組み込み」変形の「くじ」に至ったのであるから，元の $(A,\ B\ ;c_1,\ c_2)$ の「効用」は $u_1p_1+u_2p_2$ によって見積られる「べき」なのである。つまり，「くじ」$(A,\ B\ ;c_1,\ c_2)$ の「あなた」にとっての「価値」は，

$$u_1p_1+u_2p_2$$

によって表現されるのである。ここで u_i は「賞」c_i の「効用」であり，p_i は c_i に「対応する」事象の (c_1 及び c_2 が「異なる」のならば，c_i を「もたらす」事象の)「確率」であり，この「価値」の指標は，「くじ」$(A,\ B\ ;c_1,\ c_2)$ に対する「あなた」の「期待効用」に他ならないのである。つまり，「通常の」事象に基づく「くじ」に対しても，その「価値」は，「あなた」の「期待効用」によって「測定される」こととなるのである。

そこで次が従う。つまり，「通常の」事象に基づく「くじ」たちの間での選択において，「あなた」は，(自身の選好を「欺く」ことがない限り) 最大の「期待効用」を持つ「くじ」を選択しなければ「ならない」。従って，「あなた」は自身に対して「期待効用最大化の原理」を「規範」として課すのである。

10. ある問題点

上の第 7 節から第 9 節の議論においては，「「壷」の中のボールたちを「ランダムに」抜き出す」という「標準的な実験」が利用されているのであり，ここで「ランダム性」は，各ボールに依存する，しかし「賞」は同一である，一連の「くじ」たちの間の無差別性によって「定義される」のである。だが，「個人」はいかなる (合理的な) 根拠に基づいて，多くの「標準的な実験」における「これらの無差別性」を導入し得るのであろうか？ つまり，「その個人」が (「確率」や「効用」の)「測定」の際に「想定する」，一連の「標準的な実験」の「その存在」は，「その個人」にとってのいかなる「「合理的な」規範」によって「正当化され得る」のであろうか？ 不確定性に直面している「その個人」の「合理的な」行動様式によって，「確率」及び「効用」を「基礎づける」という立場を「徹底して行く」のならば，「標準的な「確率」」の「存在」は，「「標準的な実験」の「存在」」という「想定」に基づくのではなく，正に (「個人」の行動様式の「合理性」を規定する)「規範」によって「証明されなければ「ならない」」はずのものである。つまり，「標準的な実験」に基づく「確率」及び「効用」の基礎づけは，従って，「期待効用最大化の原理」の正当性も，より「根本的な」立場から省察されなければならないのである。

11. 幾つかの文献と経済行動への問題提起

上の第 1 節から第 6 節までの議論は，de Finetti (1937) の「主観確率，subjective probability」に関する議論の「前半」に基づいている。また第7節から第9節までの議論は，Pratt, Raiffa, and Schlaifer (1995) の第2章の「判断確率，judgmental probability」に関する議論に基づいている。なお同書の第2及び第3章では，「確率」の加法法則及び乗法法則が著者らの「判断確率」の立場から「正当化」されている。(なお彼らの議論は，Pratt, Raiffa, and Schlaifer (1964) で既に提示されている。) 一方，「個人」の「合理的な」行動様式によって（「個人」にとっての）「確率」及び「効用」の「存在」及び（実質的な）「一意性」を基礎づけるという着想は，極めて簡潔な様式においてではあるが，既に Ramsey (1926) で提示されている。だが Ramsey は夭逝し，自身の着想を成熟させることができなかったのである。

ところで，米国の統計学者 Leonard Jimmie Savage は，（彼の「基礎論」，即ち）Savage (1954) において，de Finetti (1937) 及び Ramsey (1926) を（自身の「個人論的見解，personalistic views」に基づいて，深く）省察し，「個人」の「確率」及び「効用」の「存在」及び（実質的な）「一意性」を（「個人」が自身に対して課する「規範」としての）七つの「公準，postulates」を導入することによって「証明」し，その副産物として，18世紀以来の懸案であった「期待効用最大化の原理」の規範的な正当化に成功したのであった。さらにまた彼は，自身の公準系に基づいて，「個人的確率，personal probability」に基づく「統計学」を展開しようと試みたのである。Savage はこの貢献によって，「主観確率に基づくベイズ統計学，subjective Bayesian statistics」の定礎を行った人物と見なされている。なおここで注意すべきなのは，上の第6及び第10節で述べた問題点が，彼の公準系においては「解決」されているということであり，特に彼の公準系においては，例えば「「公正な，fair」コイン」の「存在」などを「想定する」必要はないのである。(なお上の第10節の論点については，園 (2002年9月) を参照して頂ければ幸いである。また，Savage (1954) の公準系の概説として園(2001年12月) の第1章を勧める。)

だが「統計学の基礎づけ」においては，さらに，「「未知ではあるが固定されている「確率」」が「存在する」とはいかなることなのか？」という「問い」を真剣に考察しなければならない。しかし de Finetti は既に，彼の「主観確率」の立場から，de Finetti (1937) の「後半」において（今日での確率変数列の「交換可能性，exchangeability」を利用して）この「問い」への明晰な「答え」を提示しているのである。(なお de Finetti によるこの考察については，Savage (1954) の第3章第7節の議論及び園 (2001年12月) の第4章を参照されると良いと思う。)

結局，「確率」に関する「主観主義」の立場から相当に論理的な一貫性が保持されている「統計学の基礎づけ」が遂行できるようなのだが，この「主観主義」とは元来，「不確定性」に直面している「個人」の行動様式を「合理的に」規定することによって，「個人」にとっての「確率」及び「効用」とは「どうあるべきか」を（できるかぎり）明確にすると言う，かなり一般的な役割を荷っているのである。そこで「主観主義」は，経済行動に関わる諸分野に対してある種の「問題の提起」をもたらすこととなる。つまり「主観主義」からすれば，「効用」とは（「個人」の）「主観確率」によって「測定される」ものであり，「常に」定量的である。また「主観主義」からすれば，「不確定性」とは「主観確率」によって「測定される」ものであり，（個人的な「測定」が）容易か否かの程度の差はあっても，「不確定性」は「常に」定量化が「可能」である。さらに「主観主義」からすれば，「期待効用最大化の原理」とは，膨大な経験的事例によって「検証されなければ「ならない」」仮説ではなく，「個人」の「選好」を統制する公準系によってもたらされる「確率」（及び「効用」）の「理論」の（論理的な）副産物であり，

従ってこの「原理」は規範としての性格を持っており，結局，自身の「期待効用」を最大化する選択肢を敢えて回避する「個人」は，例えば自然数の計算において，「13×17=221」という等式を敢えて拒否する「個人」と「似た「錯誤」」に陥っていると見なされ得るのである。ところで，「期待効用」とは，「結果」の「効用」u_i とその「結果」がもたらされる「確率」p_i との積の総和 $\sum_i u_i p_i$ であるから，それは「「結果」の「効用」」の「重みつきの平均」であり，「価値」の指標としては「極めて」特殊（かつ単純）なように思われるかもしれない。しかし，p_i は「個人」の「主観確率」であり，u_i は「結果」に対する（「主観確率」によって表現される，その「個人」による）「価値」の見積りであり，従って p_i 及び u_i の系列は，その「個人」の「主観確率」に関する「法則」に合致する様式で結合されなければ「ならない」のである。そこで結果としては，「期待効用」とは異なる「価値」の指標の可能性が（論理的に）排除されるに至るのである。

2002年10月 9 日(水)

付　記.

以上は，2002年10月17日(木)に筆者が担当した北海道大学経済学部公開講座の講義録であり，同講座は全員で 7 名が担当し，筆者は第 3 回目の分担であった。また，この講義録はコピーが作製されて，少なくとも当日の出席者全員に配られた。だが，恐らくは（結果としては）「一般向け」の講演とはかなり傾向が異なるものとなったのである。しかし筆者は，「フォーマルな状況と，そのような状況よりも「まえ」の状況との，境界的な世界に着眼する」という自身の流儀によって，「主観確率及び期待効用の概念」への「一般向け」の導入的な講義を企図したつもりなのである。一方この講義録は，暗黙の内に，経済行動に関わる諸分野を学ぶ(大学院生を含む)学生の教育（及び学問）についての問題提起を含んでいる。つまり，「確率」を教授する際には，教授する側は，この「確率」という言葉が結局「何を」意味しているのかを「明確にする」作業を，つまり「確率」に対する（本来の意味での）「「定義」の試み」を，学生に対してぜひとも例示すべきである，と言うことなのである。「合理的な」行動を規定する際に「期待効用」を利用するのならば，なぜこの「「期待効用」の利用」が「合理的な」行動に通じるのかを（説得的に）説明しなければ「ならない」はずである。つまり，（不確定性に関わる）経済行動の「合理性」を規定する際には，「「確率」とは「何を」意味するのか？」という「問い」を回避することは「できない」はずなのである。

2002年11月26日(火)

参考文献

de Finetti, Bruno, “La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives,” *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, 1 - 68, 1937. Translated in Kyburg and Smokler (1964, 1980). この論文は Henry E. Kyburg, Jr., によって仏語から英語へと翻訳されたのだが，その標題は，*Foresights: Its Logical Laws, Its Subjecive Sources*, である。この英訳は，*Breakthroughs in Statistics, Volume I, Foundations and Basic Theory*, edited by Samuel Kotz and Norman L. Johnson, Springer, New York, 1992, にも，134頁から174頁にかけて収められており，その127頁から133頁に R. E. Barlow による簡略な説明がある。

de Finetti はこの古典的な論述において，「個人」の「主観的な」見積りが「整合的である，coherent」ことの必要条件として「加法法則の成立」及び「乗法法則の成立」を導くが，さらに，「加法法則の成立」が「整合的である」ためには十分であることをも示し，さらに，「乗法法則の成立」も「整合性」にとって十分であることを，Chapter I の末尾から四番目の段落の冒頭の文で注意している。だが，この十分性の証明を提示しているわけではない。また Chapter I の冒頭の段落において，「同等に確からしい，equally probable」と（「個人」によって）判断される事象たちへと「世界」が分割され，しかもこの分割が「「任意に」細かく」できるのならば，その「個人」は（自身にとっての）任意の事象に対して「定量的な「確率」」を配分できる，との趣旨の発言をしているが，

この主張を明確な様式において証明しているわけではない。(従って選択公理に対する彼の「態度」は不明である。)

さらに彼はChapter Ⅲにおいて,(交換可能な事象列に対する)「de Finettiの表現定理」を証明する。彼は,遅くとも1928年にはこの結果を得ており,Bolognaの国際数学者会議で報告しているのである。彼はこの「表現定理」を利用することによって,本来の「主観主義」からすればその「存在」を容認できないはずである「未知ではあるが固定されている「確率」」という「客観主義的な」概念を,「主観確率」によって明晰に分析し,「主観確率」が「未知固定の確率」が呼び出される「傾向にある」状況に対しても,正当に対応し得ることを示したのである。「未知固定の確率」の「存在」に関わるこの「重い」論点については,Savage (1954) の第3章第7節及び園 (2001年6月)(あるいは園 (2001年12月) の第4章) を参照されることを勧める。

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Wiley, New York, 1964.

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Krieger, New York, 1980. このKrieger版はWiley版とはかなり内容が相違するが,Ramsey (1926) 及びde Finetti (1937) の英訳は引き続き収められている。

Pratt, John W., Howard Raiffa, and Robert Schlaifer, "The foundations of decision under uncertainty: An elementary exposition," *Journal of the American Statistical Association*, 59, 353 - 375, 1964.

Pratt, John W., Howard Raiffa, and Robert Schlaifer, *Introduction to Statistical Decision Theory*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

Ramsey, Frank Plumpton. 1903.2.22 − 1930.1.19. "Truth and Probability" (1926), and "Further considerations" (1928), in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, edited by R. B. Braithwaite, Routledge and Kegan Paul Ltd, London, 1931, Harcourt, Brace and Co., New York, 1931, The Humanities Press, New York, 1950. 1926年のこの古典的な論述はRamseyの生前には出版されなかったのだが,同年の末に書かれたものであり,その大部分はthe Moral Science Club at Cambridgeで読まれたものである。一方1928年の論述は,同年の春に書かれた覚書をBraithwaiteがまとめて補足したものである。この覚書の表題を順に上げると,A. Reasonable degree of belief, B. Statistics, C. Chance, である。また(今日では広く知られている) 1926年の論述は,Kyburg and Smokler (1964, 1980) に収録されている。一方,Braithwaiteが編集したこの論文集の再版が2000年に,*The International Library of Philosophy:56 Volumes* 内の *Philosophy of Logic and Mathematics: 8 Volumes* 中の一冊として,Routledge, London, から出版されている。なお,*June and December*, 1930. と年月が記されているBraithwaiteの4頁にわたる序文の前に,2頁にわたって*December* 1930. と年月が記されているGeorge Edward Mooreによる前書がある。さらに,ここの末尾に掲示した『ラムジー哲学論集』も出ている。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954. *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. これは「基礎論」であり,統計学へのサヴェジ氏の偉大な貢献である。なお,園 (2000年6月)(あるいは園 (2001年12月) の第2章) にサヴェジ氏の略伝がある。

Savage, Leonard Jimmie, *The Writings of Leonard Jimmie Savage — A Memorial Selection*, prepared by a Committee (W. H. DuMouchel, W. A. Ericson (chair), B. Margolin, R. A. Olshen, H. V. Roberts, I. R. Savage and A. Zellner) for the American Statistical Association and the Institute of Mathematical Statistics, Washington, D. C., 1981. サヴェジ氏の論文集である。

園 信太郎,「サヴェジ氏の略伝」,『経済学研究』(北海

道大学)，第50巻第1号，164(164)－180(180)，2000年6月。これはサヴェジ氏の論文集(1981)に基づく「略伝」だが，彼の人柄を知る助けになるかもしれない。

園　信太郎，「コインの投げ上げに関する未知固定の確率について」，『経済学研究』(北海道大学)，第51巻第1号，37(37)－55(55)，2001年6月。「未知かつ固定されている確率の「存在」」に関する古典的な議論の確認作業であり，交換可能性に関する「de Finettiの表現定理」と，この定理のKolmogorov systemによる表現を議論している。

園　信太郎，『サヴェジ基礎論覚書』，岩波出版サービスセンター，東京，2001年12月20日。「基礎論」への要約，注釈，及び「読み」を提示している。また，上の園(2000年6月)及び(2001年6月)が各各第2及び第4章として収められている。

園　信太郎，「なぜサヴェジ氏はオフィシャルな確率を避けたのか？」，『経済学研究』(北海道大学)，第52巻第2号，73(229)－81(237)，2002年9月。

ラムジー，F. P.，著，D. H. メラー編，伊藤　邦武，橋本　康二　訳，『ラムジー哲学論集』，勁草書房，東京，1996年5月15日。この書物は，Ramsey, F. P., *Philosophical Papers*, edited by D. H. Mellor, Cambridge University Press, 1990, の全訳であり，Ramsey (1926, 1928) の訳が収められている。