経済学研究 53-1
北海道大学 2003. 6

# 統計学の基礎に関するサヴェジ氏の再考について

園　　信太郎

## 1．はじめに

ここでは，Savage, Leonard Jimmie, "The foundations of statistics reconsidered," pp. 575－586 in *Volume I of Proceedings of the Fourth* [1960] *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, edited by Jerzy Neyman and E. L. Scott, University of California Press, Berkeley, 1961 b, を読み取ることとする。既にサヴェジ氏は彼の「基礎論」，つまり，Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954, *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972, の前半において，彼の「個人論的見解, personalistic views」に基づいて，「個人的確率, personal probability」及び個人的「効用，utility」の「存在」の規範的な基礎づけを遂行し，その副産物として「期待効用最大化の原理」の（不確定性に直面している「その個人」にとっての）規範的な正当性を導出したのである。だが，統計学的方法に対する（「基礎論」の後半部分での，個人論的な）省察は序論的なものであり，統計学的な実践に対する彼自身の態度は徹底した様式では提示されてはいないのである。しかしサヴェジ氏は「基礎論」以後も，統計学における諸議論を真剣に学ぶ一方で，統計学の基礎と実践とに対する自身の思索をさらに深化させて行ったのである。上の「再考」は，1960年に開かれた第4回*Berkeley Symposium*で公表されたものであるが，当時の彼の「態度」を端的に物語る論述に他ならない。

なおこの「再考」は，「論文集」Savage (1981) の296頁から307頁にかけて収められているのだが，ここでは「論文集」の頁を角括弧つきで示し，例えば586[307]は，原文の586頁及び「論文集」の307頁への言及であり，また例えば575[296]－577[298]は，原文の「575頁から577頁まで」及び「論文集」の「296頁から298頁まで」への言及であるとする。

## 2．頻度論者の背景

「再考」の第2節（575[296]－577[298]）の標題はOur frequentist backgroundだが，そこでサヴェジ氏は，なぜ頻度論的な統計学が巨大な勢力を持つに至ったのかを，歴史的な背景に着眼しつつ彼なりに分析しているのである。まず彼は，20世紀の前半に「統計学，statistics」において，「大爆発，great burst」とでも表現すべき大きな変化及び進展がなされたこと，さらに当時の統計家らもまた，「「確率」とは結局「何を」意味するのか」という「問い」に（いかに答えるかで）悩んでいたことを，認めるのである。そして，有力なさらには多くの統計家が採用するに至った「確率」に対する見解とは，「「類似する」試行から成る無限的な系列を想定して，さらにその系列がもたらす諸結果の無限的な系列を想定して，さらにまた任意に特定されている「結果」がもたらされる「相対的な頻度」からなる無限的な系列を想定して，そこで，この「相対的な頻度」から成る無限的な系列の「「極限」のような「もの」」を想定して，この「「極限」のような「もの」」を，その特定されている「結果」がもたらされる「確率」と呼ぶ」という「見解」であった。実際には「特定の「結果」」として，しばしば（驚くべきことに）「「特

定の「事象」」の生起」が持ち出されるのである。また，サヴェジ氏が注意しているように，R. A. Fisher は「無限的な系列」に言及するかわりに，ある種の「集団」に言及しているのである。しかしとにかく，この「頻度論的な見解」が「新しい」統計学において「大勢」を占めるに至ったのである。

ところでサヴェジ氏は，このような「頻度論的な見解」の「優越」は，有力な対立候補が「なかった」ことからもたらされたのであろうと推測している次第である。実際，第 2 節の 2 番目の段落を（末尾の三つの文を除いて）引用すると次である。

It is completely understandable that a frequentist concept of probability should have come to the fore. The best known alternative concept when the modern renaissance of statistics was beginning was one I call the “necessary” concept of probability. Traditionally, this concept − apparently inspired by games of chance − represents an attempt to define probability of events in terms of the symmetry of the context in which they arise. In some modern views, probability is a logical relationship between one proposition (regarded as background evidence) and another. According to such a view, to say that the probability of $A$ on the evidence of $B$ is 3/4 is much like saying that the proposition $A$ is three quarters implied by $B$. I have called such views necessary because according to them the probability of $A$ on the evidence $B$ is a logical necessity to be deduced from the logical structure of the propositions $A$ and $B$. This sort of view had been thoroughly and effectively criticized. It was utterly uncongenial to statisticians of the early part of the century, and so far as I know, nothing has happened to make it more congenial to us today.

ここでサヴェジ氏は，「基礎論」の第 1 章第 2 節 3 頁の 5 番目の段落で「必要性的見解，necessary views」と呼んでいる事柄に言及しているのである。これは，「チャンスが関るゲーム」を行う際に利用される器具や仕組みに潜在しているのだと（恐らくは比較的多くの「個人」によって）なぜか判断される「（近似的な）対称性」に基づいて，「ゲーム」の各結果がもたらされる「確率」を「定義する」という営みに源を持ち，今日の流儀によれば，$B$ という「証拠」に基づく $A$ の「確率」を，それらの「命題」$A$ 及び $B$ の論理的な構造に基づいて，しかも論理的な「必然性」を保ちつつ，導出して行こうとする「見解」なのである。この「見解」によれば，「確率」とは（通常の論理における）含意関係の一般化であり，例えば「「証拠」$B$ に基づく $A$ の「確率」は 3/4 である」という「主張」は，「「証拠」$B$ によって $A$ が 3/4 程度まで含意される」とでも言うような内容を持ち，「個人」がこのような「主張」を正当化する際には，その「個人」は，$A$ 及び $B$ の論理的な構造と論理的な「必然性」とによってこの「主張」を演繹しなければならないのであり，このような演繹の過程の「存在」が想定される状況においては，その状況に関っている「個人」は，皆この「主張」を認めざるを得ないこととなるのである。サヴェジ氏はこの「見解」が，20 世紀の前半において，多くの統計家の需要を満たすものではなかったことを認めており，しかも当時は，「頻度論的な見解」に対立する候補が事実上この「必要性的見解」だけであったことをも認め，結局多くの統計家は「頻度論的な見解」以外のものを実際上は選ぶことができなかったのであろうと推測している。

なおサヴェジ氏は，この段落の末尾の三つの文において，哲学者の Rudolph Carnap が「必要性的見解」を強く支持していることに言及し，さらに，Harold Jeffreys がこの「見解」に基づいて（今日の objective Bayesian inference に相当する）統計的推論を既に展開しているこ

とを的確に評価し，それにもかかわらず，この「見解」には問題があるとしている。(なお彼は，参考文献欄のCarnapの二冊の書物を［2］，［3］として言及しているが，これは［3］，［4］とすべきである。)

さらに彼は次の(576［297］の2番目の)段落で，「基礎論」の第1章第2節3頁の4番目の段落で「個人論的見解，personalistic views」と呼んでいる立場に言及している。これを引くと次である。

The other main view of probability, competing with frequentist and necessary views, is the personalistic view, but the concept of personal probability has not, until recently, been ripe for acceptance by statisticians. In the personalistic concept, probability is an index — in an operational sense that will be explained later — of a person's opinion about an event. At first glance, such a concept seems to be inimical to the ideal of "scientific objectivity," which is one major reason why we statisticians have been slow to take the concept of personal probability seriously. Another reason is this. No matter how neat modern operational definitions of personal probability may look, it is usually possible to determine the personal probabilities of important events only very crudely, and the overhasty conclusion that such crude determinations are of little worth is often drawn.

つまり，「頻度論的な見解」及び「必要性的見解」に対立するものとして「個人論的見解」があるのだが，この「見解」に基づく「個人的確率」が，統計家らになんとか受け入れられるであろうような程度に成熟したのは，恐らくは「基礎論」以後なのである。しかも，「「確率」とは「事象」に対する「「個人」のオピニオン(の指標)」に他ならない」と主張する「個人論的見解」は，その「確率」の「定義」がいくら「操作的，operational」ではあっても，「科学における客観性の貫徹」という理想に甚だしく反しているように思われるのである。つまり「科学」に関る多くの統計家にとって，「個人的確率」はむしろ忌避すべきもののように思われても不思議ではないのである。しかも，「個人的確率」の現代的な「定義」が(理論的な様式においては)明晰かつ操作的ではあっても，実際に統計家が，自身にとって重要である「事象」の「個人的確率」を定めようとすると，通常は，極めて大まかな値をなんとか定めることができると言うに過ぎないわけである。そこで，そのような大まかな値に基づいてまともな統計的推論を遂行できるわけがないという，一見すると当然な，しかし「早すぎる」決断が下されてしまうのである。

そこで(「必要性的見解」も「個人論的見解」も当てにならないので)大部分の統計家は頻度論者にならざるを得なかったのだが，しかし，「頻度論的な見解」に基づいて統計学を展開しようとすると，その「見解」に忠実である限り，統計家は極めて不自由かつ不自然な状況に置かれるのである。実際，「科学」や他の領域において(恐らくは誰もが)出合うこととなる多くの重要な「不確定性，uncertainties」を「確率」で測定することができなくなるのである。例えば，「仮説」と呼ばれる特定の命題が実際に通用する「確率」を頻度論者が導入することは「あり得ない」こととなる。実際例えば，「蛇の咬み傷をウィスキーで処置することはむしろ有害である」という命題の真偽を知らないことを自覚している統計家は，「頻度論的な見解」に忠実である限りにおいて，いかに多くの現実の証拠が堆積したとしても，例えば「ウィスキーによる処置が良い結果をもたらすことよりも，むしろ有害であることの方が，少なくとも自身にとっては「より確からしい」」などとは，決して主張できないのである。つまり本来の頻度論者には，「自身が問題としている不確定な命題

たちが通用する「確率」」を（自身の研究及び調査の結果に基づいて）計算するという作業ができないのであり，元来そのような「確率」の「存在」を彼は認めないのである。従って技法上は，頻度論者は，「「「もと」の確率」と「新しく得られた「関りのある」証拠」とに基づいて，自身が問題としている命題たちに対する「「新しい」確率」を算出する」という「ベイズの定理，Bayes' theorem」が明晰に表現する手順から，言わば切り離されているのである。つまり彼は「ベイズの定理」の実に多くの応用を自身の手で遂行することができないのである。「この「新しい」データは私に対していかなる「信念の程度」をもたらすのか」という自然な問い掛けは，本来の頻度論者にとっては元来無意味である。彼は，「ベイズの定理」（の形式）において明晰に（しかも自然に）表現されている，「もたらされる「証拠」」という概念や「その「証拠」に対する（自身による）適正な反応」という事柄に一切言及することなしに，しかもこれらに対応する概念を捜し求めなければならなくなるのである。

サヴェジ氏は，「「自身の信念の程度」に対する「ベイズの定理」の応用」という（統計的推論における）自然な道筋を捨て去ったが故に，「頻度論的な統計学」は多くの困難な問題を作り上げるに至ったと見るのである。そこでの「難問」は，「確率」に対する「頻度論的な見解」の不適切さの現れであり，「頻度論的な統計学」のどうしようもない行き詰まりを端的に示す「証拠」なのである。実際，577 [298] の冒頭の段落の末尾の二文を引くと次である。

For the moment, suffice it to say that a problem which after so many years still resists solution is suspect of being ill formulated, especially since this is a problem of *conceptualization*, not a technical mathematical problem like Fermat's theorem or the four−color problem. We Bayesians believe that the dilemma to which the frequentist position has led, along a natural and understandable path, is insoluble and reflects what is no longer a tenable position about the concept of probability.

なおサヴェジ氏は，「頻度論的な統計学」とは言っても，頻度論者の間でも「確率」に対する態度に相違があり，特に R. A. Fisher の立場と the school of Jerzy Neyman and Egon Pearson との間に大きな溝があることを承知しているのである。だが彼らは，「ベイズの定理」によって明晰に表現される「統計的推論の基本的な形式」を最大限に活用する道筋を自ら捨て去ったが故に，この「形式」によって統一的に為すべき事柄を個個の状況において，言わば ad hoc なやり方で，処理しなければならないこととなったのである。「推論の普遍的な形式」を利用しようとすれば，自身らが立脚している「頻度論的な見解」を棄てなければならないのである。

### 3．行動論的な接近

第 3 節（577 [298] −578 [299]）の標題は The behavioralistic approach である。ここでサヴェジ氏は「頻度論的な統計学」のある変遷に言及しており，つまりある種の頻度論者が，「帰納的な推論，inductive inference」よりも「帰納的な行動，inductive behavior」を重視することの方が統計学と呼ばれる領域をより実り豊かなものにするのだと主張し始めたことを，注意するのである。（なお彼はここで Neyman の論文に言及しているが，その際の文献番号 [22] は [23] とすべきである。）つまり，不確定性に直面している「個人」が何を「信じる」のかではなく「いかに行動するのか」に着眼した方が得策なのだというのが，この主張なのだが，これは economic−theoretic approach を統計学に導入することに他ならない。サヴェジ氏は，この流儀が特に Abraham Wald によって精力的に追究されたことに言及し，かつて自分自身も Wald の影響

下で研究を行ったことを率直に認めている。だが彼は，一方で特にR. A. Fisherが，執拗にこのような「行動論的な接近」に反対し続けたことに触れて，「推論」かそれとも「行動」かという問いは，いまだに統計学における激しい論点であることを注意している。はたしてR. A. Fisherらがしきりと主張するように，「科学」の「高く自由な」目的に役立つのは「帰納的な推論」であって，「帰納的な行動」は，つまり統計学的諸問題の「経済的な」分析は，かろうじて「世間的な」仕事に役立ち得るかもしれない程度のものなのであろうか。なおサヴェジ氏は，統計学における「推論」から「行動」への転換を極めて重視しており,「行動論的な見方」を統計学に導入することの意義を深く評価している。実際，この節の 2 番目の段落の末尾の二文を引くと次である。

Personally, emphasis on behavior has seemed to me an unmitigated advantage, and I believe it to be a stimulating framework for all parts of statistics. Whether the conclusion is found valid or not, there are surely many interesting, practical problems for which the behavioralistic point of view is distinctly advantageous.

ところでサヴェジ氏は,「行動」と対立するものとしての「推論」という考え方は，オピニオンと「価値」との間の区別に源があるのではないのかと推測しているようである。だがとにかく,「個人的確率」に立脚する「統計学」の唱道者らが，つまり（サヴェジ氏自身を含む）狭義のベイジアンらが，諸事象に対する「個人的確率」の導入を通して，統計学と呼ばれる領域におけるオピニオンの復権を唱えていることは紛れもない事実なのである。またベイジアンの立場からすれば,「帰納的な推論」とは,「自身のオピニオンを新たに得られた「証拠」に基づいて，ベイズの定理に従って，自身の新たなオピニオンへと変換する作業」以外の何者でもないのである。結局，ベイジアンにとっての統計学的分析とは次の二段階に他ならない。つまり第一には,「もとの」分布及び問題となっているデータによって誘導されることとなる「新しい」分布をとにかく計算することであり，第二には，その「新しい」分布と「最終的な行為たち，terminal actions」に関る「経済的な」諸事実とを利用することによって，現段階において最も高い期待効用を持つ「最終的な行為」の一つを選択することなのである。さらにまた「実験の計画」に対しては，全ての可能な実験を調べ尽くすのだが，その際各実験に対して（その実験に対する）「最適な最終的決定, optimal terminal decision」を対応させ，さらに最終的行為の全体的な「期待収入，expected income」とその実験の「期待費用，expected cost」とを勘定に入れて，最も高い期待収入を持つ実験の一つを選択するという流儀で臨むのである。なおサヴェジ氏は，このような「合理的な「実験の選択」」を現実に遂行することが，ベイジアンの立場からしても，決して容易ではないことを充分承知しているのである。

## 4．客観性及び主観性

第 4 節（578 [299] − 579 [300]）の標題は Objectivity and subjectivity である。ここでサヴェジ氏は，統計学における客観性及び主観性の相互の関りに着眼するのである。通常の頻度論者は，自分らは「客観的な「確率」」を獲得するように努力しており，さらには「客観的な「確率」」を既に所有しているのだと言う態度をとるようである。一方「個人論者，personalist」らは,「確率」とは元来「主観的な」量なのだと宣言するのであるから，結局，頻度論者及び個人論者を各各「客観論者，objectivist」及び「主観論者，sujectivist」と呼ぶことは自然なようである。サヴェジ氏自身もこの「自然な」傾向に敢えて逆らうわけには行かないのだが，しかし彼は，実際上は，頻度論者は「主観」に対してベイジアンよりも非常に多くの役目を割

り当てていると，注意するのである。とにかく，統計学的研究が進展して（調査や実験の計画に関る）さらにより複雑な状況に対応できるようになり得るとしても，「調査や実験の様式をあらかじめ計画する作業」が主観的な選択及び判断に広く依存するであろうことは，否定し難いことである。しかもより重大なことは，頻度論者が提示する通常の理論においては，問題のデータが入手されて最終的な行為（あるいは分析）が為されるであろう正にその状況においても，「主観的な」選択の余地が非常に広い範囲に渡って残されたままであるということである。かりに頻度論者が本来の「客観主義」を目指すのであれば，この広すぎる「主観的な」選択の余地を，「客観的に」狭めるように努力せざるを得ないはずである。

R. A. Fisher は fiducial probability と彼が呼ぶ「何か」を導入して，「客観的な」統計的推論を展開しようと試みたのだが，これは，（統計学的な分析における）主観的な選択の役割を非常に広い範囲に渡って認める通常の頻度論者の流儀からすれば，例外的な試みである。なおサヴェジ氏はこの R. A. Fisher の（苦しい）試みを，a bold attempt to make the Bayesian omelet without breaking the Bayesian eggs と，端的に表現している。一方 Wald らが展開した minimax theory だが，これは統計学的な分析から，（主観的な価値判断を認める一方で）主観的なオピニオンをほとんど完全に除去する試みなのである。しかし minimax rule というものは，例えば Savage (1951 a) で指摘されているように，「帰納的な行動」のための普遍的な原理として採用するにはかなり問題があるのである。（なおサヴェジ氏は，「基礎論」の第 10，11，及び 13 章で，minimax rule を「「個人」の集団」に対する group minimax rule として捕え直すことによって，この rule を（説得力のある様式で）擁護しようと試みている。但し，「再考」での「基礎論」への言及が文献番号［24］で為されているが，これは［25］とすべきである。）サヴェジ氏自身もかつてはこの minimax rule を真剣に考察したのであった。しかし彼はこの rule に失望したのである。実際この節の 3 番目の段落の末尾の文（578［299］−579［300］）を引くと次である。

Studies of the minimax rule have been stimulating for statistics, and modifications and outgrowths of the rule may prove of great value, but those of us who, twelve or thirteen years ago, hoped to find in this rule an almost universal answer to the dilemma posed by abstinence from Bayes' theorem have had to accept disappointment.

ところで，「未知かつ固定されている母数が取り得る全ての値に対して同時的に改良することが可能である統計的な手順は，採用するには不満足なものである」という「許容可能性の原理，the principle of admissibility」を，頻度論者はとにかく認めるのである。この「原理」によっては除去できない手順が「許容可能な」手順なのだが，通常の頻度論者は，任意の「許容可能な」手順は「ある個人」が選好する手順となり得るのであるから，まともな（統計学における）理論が，どれであれ「許容可能な」手順をあらかじめ除去してしまうなどということはあり得ないはずだと，主張するのである。ベイジアンは頻度論者のこのような見解に同意する。さらに，「ある個人」が選好し得る手順としての「許容可能な」手順はあらかじめ除去されたりはしないのだが，自身の行為の選択の問題に直面している「その個人」に対して，秩序のある（自身が満足できる）様式において自身の選択を為すように，「助言，suggestions」を与えることは可能なはずだということについても，両者の見解は一致するのである。

しかしこの後の両者の道筋は異なる。頻度論者は問題の「助言」を行うために，自身が「良い性質，nice properties」と呼びたくなるよう

な事柄を作り上げるのである。このような「性質」としては，例えば，不偏性とか，最小平均平方誤差とか，対称性(あるいは不変性)とか，与えられている有意水準とかがある。(なおサヴェジ氏はstringencyにも言及しているが，筆者にはその内容が分からない。）とにかく頻度論者らはこれらの性質を少なくともある程度は「良い」と感じる。そこで彼らは，「許容可能な」諸手順がいかなる「良い性質」を満たすのかを探求することが，「その個人」が自身の選択を定める際の助けになるであろうと考えるのである。

だがベイジアンは，「その個人」が自身に対して「問題の統計的な手順がいかなる定性的な諸性質を満たすことを欲しているのか」を尋ねることを求めるのではなく，統計学の理論そのものを一歩前進させることを望むのである。つまり「その個人」に対して，自身の行為を一般に統制し得る程の説得力を持つ「選択の整合性に関するいくつかの原理，the principles of coherence」を（自身の了解の下に）自身に対して課すことを要請するのである。しかも，この「整合性に関する原理」を尊重する個人は，(「仮説」と呼ばれる命題を含む）自身が直面している全ての事象に対してあたかも「確率」が対応しているかのように自身の行為を選択するに至るのである。つまり彼は，自身の期待効用を最大化するように行動する。ここで注意すべきは，「整合性の原理」そのものは不確定性に直面している「その個人」の選択の様式としての「選好，preference」に関するものであって，「個人的確率」そのものには言及していないことである。従って，(「個人的確率」の「存在」を認めない）頻度論者がこの（説得力のある)「整合性の原理」を受け入れるとしても何ら不思議ではない。しかし実は，「整合性の原理」を受け入れる個人は，「諸事象に自身の「個人的確率」を対応させることに基づく（自身の）期待効用の最大化を遂行するに至る」と「解釈される」のである。つまり，「仮説」に対して「個人的確率」を配分することをなぜか拒絶している個人が，一方で「整合性の原理」を受け入れるとすれば，その個人は実は，自身の「個人的確率」と「ベイズの定理」とによって統計的推論及び決定を終に行うに至るのだと，正当に「見なされる」のである。ここで第4節末尾の段落の末尾の三つの文（579 [300]）を引けば次である。

These principles can easily be communicated to a frequentist with no reference to any kind of probability that he does not believe in. But, in fact, a person who succeeds in conforming to the principles of coherence will behave as though there were a probability measure associated with all events in terms of which his preference among statistical procedures is such as to maximize expected utility under this measure. In particular, he will behave in accordance with Bayes' theorem as applied to his personal probability measure.

つまり（「整合性の原理」を受け入れる）個人は，彼がたとえ「個人的確率」の「存在」を認めないとしても，結局は，（自身がその「存在」を認めてはいないはずの）「自身の「確率」」に基づく「合理的な」行動を追求するに至るのである。

## 5. 単純二分岐

第5節の標題はSimple dichotomyである。単純二分岐の問題とは，「対立する二つの「仮説」の内のいずれかが通用すると仮定する場合，いずれを選択すべきなのか」というものなのである。このような状況は，決定に関する諸問題の内でも極めて単純化されたものであり，これは「個人」が直面している「世界」の全体に関るというよりも，言わばmicrocosmにおける問題である。しかし「頻度論的な統計学」においては，単純二分岐的な状況は基本的な役割

を荷っているのであり，実際，「第一種及び第二種の過誤」及びこれらに対応する「確率」$\alpha$ 及び $\beta$ は，この状況において導入されるのである。ここで「許容可能性の原理」によれば，$\alpha$ 及び $\beta$ を変化させる場合に，いずれの値も増加しない変化は「良い」変化であるということが従う。さらにこの二つの「仮説」に関る「実験」が設定されているとして，いわゆる「仮説の検定」が問題となる場合，「許容可能な手順」つまり「許容可能な検定」は，Neyman–Pearson の補題によれば「尤度比検定，likelihood-ratio tests」で与えられることとなるのである。しかしすると，「「個人」は利用可能な多くの尤度比検定から「いかにして」一つの検定を選ぶべきなのか」という問いが，当然生じてくるはずである。なおサヴェジ氏は，典型的かつ極めて有能な頻度論者であるE. L. Lehmannがこの問題を議論していることをことわっている。

なおこの「問い」に対してベイジアンは，「二つの過誤」に関る二つの「確率」から成る可能な対 $(\alpha, \beta)$ の全体を含む（単位区間 $[0, 1]$ を辺とする）単位正方形において，それらの $(\alpha, \beta)$ に対する「個人」の「選好の様式，preference scheme」がいかなるものであるのかを調べることを試みるのである。Lehmannもこのような「選好の様式」を簡潔に考察しているのだが，結局彼は，「問題の「選好の様式」を記述する無差別曲線らは，大体北西から南東方向へと走っている曲線群であり，この一般的な傾向を満たしている限り，「実際上は任意である」と言って良い程に多様な曲線群が「個人」の無差別曲線群となり得る」という，（問題の「問い」の答えには実際上はなっていない）結論を導いているのである。しかし実は，「理想的に整合的な個人，an ideally consistent person」の無差別曲線群は平行な直線群であることが，簡潔で明晰な議論から従うのである。このことは，二つの「実験及び検定」から成る対に対して「その個人」が無差別であれば，それらの「実験及び検定」の内の一つをランダムに選んで遂行するという「手順」も，そのランダムな選択が問題の単純二分岐的な状況と「関りなく」為されるのであれば，「その個人」にとっては，もとの「実験及び検定」の各各と無差別であるという，「事実」から従うのである。（なお，平行な無差別直線群を導くこの議論は，Lindley–Savage argument と呼ばれるものだが，これについてはSavage（1962）及び園（1994年3月）を参照すると良いかもしれない。）つまり「その個人」は，一見すると，極めて多様な曲線群から「自由に」自身の曲線群を選んでも良いようだが，実は彼は，自身の無差別直線群の勾配に負の符号を付けた唯一つの実数によって，自身の「選好の様式」を表現することができるし，またそうすべきなのである。さらに，この直線群によって自身の「選好の様式」を表現する「個人」は，（問題の状況に関る「任意の」実験に対して）尤度比検定の「境界の，critical」値として，その直線群の勾配に負の符号を付けた唯一の値を採用すべきことが従う。

つまり，単純二分岐的な状況に直面している「個人」に対しては，実は彼自身が $\alpha$ 及び $\beta$ の間でのある一つの「交換の比率，rate of exchange」を持っているのだと（論理的に）説得できる余地が，かなりあるのである。彼は，$\alpha$ 及び $\beta$ の一方を減少させる代りに他方を増加させることを受け入れるのだが，一方の減少に対してどこまでの他方の増加を受け入れるのかを，自身に対する冷静な尋問によって定めるのである。そこで彼は，この「境界の」交換率を，問題の単純二分岐的な状況における「任意の」実験に対する尤度比検定の，「境界の」尤度比として採用することを欲するはずなのである。

ここで注意すべきなのは，Lehmannが展開しているような典型的な頻度論的接近においては，「問題となっている「その」単純二分岐的な状況に関り得る（多様な尤度比検定に付随する）「過誤たち」がいかなるものであれ，また問題となっている「実験」の規模がいかなるものであれ，「個人」は（「その」単純二分岐的な

状況に対する）ある固定された（境界の）尤度比を持つ」という「結論」が，論理的に従うわけではないようだという事実なのであり，一方この「結論」は，ベイジアンの立場からは正に従うのである。実際，「その」単純二分岐的な状況に直面している「個人」が持つに至る唯一の「比率」に立脚した推論や決定を，頻度論者が喧伝したためしなどないはずである。だが（サヴェジ氏を含む）あるベイジアンらは，この一つに定まる「比率」に基づく（決定のための）「規則，rule」を長年議論してきたのであり，結局彼らは，この「規則」は批判と反例（による攻撃）とに充分に耐え得た頑丈なものであるとの結論に達したのである。

ベイジアンの立場からの分析をさらに少しだけ進めると，第一種及び第二種の過誤が各各数値によって表される損失を引き起こすのだと想定することとなる。すると，固定されている一つの「境界の」尤度比を採用するに至る「個人」は，自身があたかも第一及び第二の「仮説」の各各に和が 1 となる「確率」を配分しているかのように行動することとなるのである。（なお，$(\alpha, \beta)$ に対する「その個人」の無差別直線群の勾配に負の符号を付けたものは，第一及び第二の「仮説」に対する「その個人」の「事前の」個人的確率の比率に他ならない。）つまり，ある統計家が，「個人的確率」の「存在」を認めない立場から単純二分岐的な状況を考察し始めたとしても，彼は，自身の「選好の様式」を冷静に「測定する」作業を通して，結果としては「「仮説」の対」に対する「確率」の配分に基づいていると（正当に）解釈される，（決定のための）「規則」の採用に至るのである。

以上の議論から伺えることは，頻度論者の（問題に対する）接近方法よりもベイジアンの方がより客観主義的なのだということである。実際後者の方が，決定を下そうとする「個人」に関る主観的な要素に対してより多くの「秩序，order」を課そうとしているのである。だが実際のベイジアンは，決定を下そうとする人物に対して「何を為さねばならないのか」を宣告するのではなく，（多くの人人にとって）充分に受容が可能であると思われる「整合性の原理」がいかなるものであるかをまず明瞭に述べて，この「整合性の原理」に彼が合意するのならば，その「原理」に従うように奮闘することを彼に勧めるのである。

なおサヴェジ氏は，単純二分岐に関する上の議論は1955年の春に Dennis Victor Lindley との協同によって得られたものであり，その際 Lindley（1953）から良い刺激を受けたとことわっている。

## 6．個人的確率

第 6 節（581 [302]－582 [303]）の標題は Personal probability である。その 2 番目の段落（581 [302]）を引くと次である。

If I offer to pay you $ 10.00 if any one horse of your choosing wins a given race, your decision tells me operationally which you consider to be the most probable winner. Working out the theory of this economically defined concept of “more probable than for Mr. So-and-so”on the assumption that Mr. So-and-so is ideally free of contradictory and self-negating behavior leads to the conclusion that his preference scheme is governed by an ordinary probability measure on the class of all events. Details and references may be found in [25].

「このレースで「あなた」が選んだ馬が勝つのならば，「あなた」に 10 ドルを進呈しよう」という私の申し出に「あなた」が真剣に応じるのならば，しかも私が自身の申し出による取決めを勝手に改変することなどあり得ないとすると，「あなた」の選択は，「自身にとっての「最も勝ちやすい」馬」を指し示すこととなるであろう。つまり，各馬に対して「その馬が勝つ」という「事象」を対応させると，「自身にとっ

て「最も確からしい」」事象が対応する「その馬」を「あなた」は正に選ぶのだと「解釈する」ことは，正当であるだろう。つまり，「あなた」が選ぶ「その馬」は，他の馬よりも，「そのレースに勝つ」ことに関して「「あなたにとって」より確からしい」のである。この「自身にとってより確からしい，more probable than for me」という（「事象」の間の）関係は「経済的に定義される概念，the economically defined concept」だが，このような（不確定性に直面している）「個人」の「選好の様式」に着眼することによって，個人的確率の理論を構築することができるのである。その際，ある種の理念的な「個人」を導入するのだが，この「個人」は，論理的な過ち（つまり矛盾）や，「自己」を欺き，あるいは否定するような行為には，一切関りがない，従って一切の数学的な諸計算において過ちを犯すことがない，理想的な「その個人，the person」なのである。サヴェジ氏は「基礎論」において，「その個人」の行動様式として「合理的である」と（多分多くの人人によって）判断されるであろう幾つかの規範を探査し，これらの規範を（「その個人」の「選好の様式」を統制する）公準系として集約した。「その個人」とは，結局，自身が関る「全て」の事象に対して，（自身の個人的確率として解釈される，従って自身の「選好の様式」を統制する，唯一の）有限加法的な確率測度を定めるに至る理念的な「存在」なのである。（なお末尾の文は「基礎論」への言及であり，原文では[24] となっているが [25] とすべきである。また原文では，末尾から 2 番目の文の behavior と leads との間にコンマがあるが多分誤植であろう。）

サヴェジ氏はこれに続く段落で，賭けの「勝ち目，odds」によって個人的確率を「測定する」流儀に簡略に触れており，このやり方は，厳格に構成された個人的確率の理論を受け入れた後には，vivid and useful だと評価しているのだが，しかし，逆に「勝ち目」に基づいて個人的確率の理論を厳格に構成することには困難が伴うと注意している。なお彼は，段落の末尾で「基礎論」の 176 頁に言及しているが，そこの[24] も [25] とすべきである。しかしとにかく，この個人的確率の概念こそ（個人の）「オピニオン」という概念に対する卓越したモデルを与えるものなのであり，サヴェジ氏は（「基礎論」において）この「確率」の理論を厳格に構築したのである。

なお 582 [303] の 2 番目の段落で，彼は個人的確率に対する自身の信念を率直に語っているので，これを引く。

For the purpose of using the concept of personal probability to put statistics a bit forward, it is enough to understand the concept to concede that it has some sense and promise, and to explore the consequences for statistics with imagination and temperance. I will confess, however, that I and some other Bayesians hold this to be the only valid concept of probability and, therefore, the only one needed in statistics, physics, or other applications of the idea. In particular, we radical Bayesians claim to demonstrate that all that is attractive about the frequency theory of probability is subsumed in the theory of personal probability. Before challenging that as preposterous, one ought at least study the chapter on equivalent events in de Finetti's paper [6] or in section 3.7 of [25], which is derived from that chapter. A less radical position was recently taken by Good [15].

つまり「確率」についての思索を深め，しかもその利用と真剣に取り組むことによって，「確率」についての唯一の適切な見解としての個人的確率の概念にたどり着くのである。実際，既に de Finetti（1937）（これは上の引用中の論文［6］である）が示しているように，「頻度論的

な見解」は，「交換可能な（無限的な）事象列」（これは上の引用中の equivalent events である）を利用することによって，個人的確率の立場において正当に定式化され，従って，個人的確率の理論に組み込まれてしまうのである。（この「組み込み」の状況については，上の引用中にあるように「基礎論」の第 3 章第 7 節（50 頁から 55 頁）が参考になるが，さらに園（2001 年 6 月）（あるいは園（2001 年 12 月 b）の第 4 章）を通読すると良いであろう。）一見すると「複数の」見解が並立するように思われるかもしれない「確率」に関する諸議論は，冷静かつ論理的な思索と実践とを通して，どうも個人的確率へと集約されてしまうようなのである。サヴェジ氏は，自身の深い思索と多様な統計学的実践とを通じて，このような（多数派から見れば）多分ラディカルな帰結が，実は正当なのだという信念を持つに至ったのである。（なお，末尾の文の [15] とは Good（1959）であり，末尾から 2 番目の文の ought の後には to が現れていないが，原文のままとした。）

サヴェジ氏はこの自身の信念を端的に告白した後，個人的確率の歴史に簡略に触れている。つまり，個人的確率の概念をフォーマルに述べた最初の人物は，多分 Frank Plumpton Ramsey であり，彼の見解は Ramsey（1926）において簡潔に提示されている。そこで彼は，個人的確率の理論と効用の理論とを言わば同時的に展開しているのである。一方 Bruno de Finetti は Ramsey とは独立に（多分少し遅れて）個人的確率を考察し，しかも彼の「主観確率の概念」を詳細に展開したのである。なおサヴェジ氏は，de Finetti の古典的な講義録である de Finetti（1937）を読むことを勧めており，さらにイタリア語の（但し，今日では英訳がある）de Finetti（1959）にも言及している。なお，サヴェジ氏は de Finetti が Ramsey よりも遅れて出発したとしているが，de Finetti 自身は遅くとも 1928 年には「交換可能な（無限的な）事象列」に関する「de Finetti の表現定理」に（自身の「主観確率の立場」から）到達しており，両者の遅速に関する判断は多分慎重を要する。またさらに Koopman（1940 a, b）があるが，サヴェジ氏は Koopman は既に de Finetti（1937）を少しは知っていたとしている。だが Koopman は，この de Finetti の古典的な講義録に直接には言及していない。

ここで注意すべきなのは，Ramsey，de Finetti，そして Koopman は，統計家らが実際に行っている諸議論に対しては距離を保っていることであり，従って，自身が唱える「確率」概念の統計学への応用の可能性についてはほとんど追求していないのである。だがやがて，個人的確率と統計学との関りを取り扱った Irving John Good の簡潔な書物 Good（1950）が現れ，さらに 1954 年にはサヴェジ氏の「基礎論」が出版されるのである。サヴェジ氏は「個人的確率の理論」を厳格に構成する一方で，個人的確率に基づく（従来の）統計学的な手法の論理的な正当化を試みたのだが，この「正当化」は終に達成されずに，むしろ彼は，従来の手法の「有用性」に対して強い疑念を抱くようになるのである。だがより徹底した個人論的統計学を展開するには，Good もサヴェジ氏自身も「頻度論者の」伝統に余りにもきつく囚われていたようである。なお，この節の末尾から 2 番目の段落の 2 番目及び 3 番目の文を引くと次である。

I. J. Good in 1950 published a small book [14] on personal probability with special reference to statistics, and I published a book in 1954 [25]. In my judgment, Good and I were both too deeply in the grip of frequentist tradition—he much less than I—to do a thorough job.

だがその後 1959 年に Robert O. Schlaifer が，ベイジアンの立場に徹底して立脚した初等的だが重要な（統計学の）教科書を出版するに至るのである。（さらに 1961 年には，Howard Raiffa

及びSchlaiferの共著であるベイズ統計学の教科書が公刊される。）だがここで敢えて読者の注意を促したいことがある。サヴェジ氏は「基礎論」で自身の「個人的確率の理論」を展開する際に，言わばオフィシャルな「確率」を直接導入してしまう流儀を避けているのである。これは「確率」に対する彼の思索の深さの現われなのだが，しかし一方例えば，Pratt, Raiffa, Schlaifer（1964）におけるように，例えば単位正方形から，「無差別に」点を抽出する「標準的な，canonical」実験の「存在」を（従ってオフィシャルな「確率」の「存在」を）「あらかじめ」認める流儀もあるのであり，実は今日のベイズ統計学では（何らかの「一様な」分布の「存在」を「あらかじめ」認める）このようなやり方が通常のようである。しかしむしろ筆者は，「安直な」有用性とは妥協せずに，「本質」を敢えて問うサヴェジ氏の態度に強く引かれる。なおこの微妙な論点については，園（2002年 9 月）を通読して頂ければ幸いである。

なおサヴェジ氏は末尾の段落でHarold Jeffreysの二冊の書物に言及している。Jeffreysは今日の「客観的ベイズ推論，objective Bayesian inference」の事実上の創始者であり，彼は「確率」に関する「必要性的見解」の保持者であるが，統計学での「ベイズの定理」の積極的な応用を実践する彼は，紛れもなく（広い意味での）ベイジアンであり，彼の書物は，個人論的なベイジアンにとっても極めて価値あるものなのである。

## 7．ベイジアンの観点がもたらす事柄

第 7 節（582 [303] －584 [305]）の標題はImplications of the Bayesian viewである。はたしてベイジアンの観点は統計学にいかなる帰結をもたらすのであろうか。ベイジアンの観点とは結局「コモン・センス，common sense」を磨き上げたものであり，そこからもたらされる重要な諸結果はどれであれ紛れもなくコモン・センスに対応するであろうと期待しても，不当ではないのである。この観点からの「頻度論的な」統計学への批判と言うものは，大体が以前から問題となっていた事柄に関るものであり，だがベイジアンが提示する批判はより積極的な性格を持っている。つまり，従来から問題となっている事柄を（統一的で）組織的な様式で捕え，問題の本質を明晰な形式で表現し，さらにより積極的な（個人的確率の理論に基づく）解決策を提示するのである。

ところで，ベイジアンの立場がもたらす普遍的で価値ある帰結の一つに「尤度原理，the likelihood principle」がある。この原理はベイズ統計学においてはほとんど自明な原理なのだが，サヴェジ氏によれば，最初はGeorge A. Barnard（1947）が伝統的な立場から唱えたものであり，R. A. Fisherがそれを支持しているのである。しかし通常の「頻度論的な」統計学における諸手法は，正にこの「原理」に反するのである。（従って頻度論者としてのR. A. Fisherは，「尤度原理」への支持を唱える「内なる「誰か」」とは，少なくとも表面上は，（諸方法に対する選択の様式において）矛盾している。）

「尤度原理」とは「尤度関数，likelihood function」に関するものであり，尤度関数は「最小の」十分統計量として良く知られているのだが，しかしこの「原理」は，実験の結果が既に得られてしまい，その結果として尤度関数がもたらされれば，問題の実験に関る他の（つまり，この尤度関数以外の）いかなる事柄も以後の統計的推論には「かかわりがない，irrelevant」ことを主張するのである。従って，その実験の「計画」がいかなるもので「あった」かとか，その実験から（実際に得られたデータとは異なる）いかなるデータが「もたらされ得た」であろうかとか，「利用された」統計量の利用される「まえ」の（「問題となっている母数」の可能な値が与えられている場合の）分布とはいかなるもので「あった」かとか，とにかくこのような事柄の一切は，既に「その」尤度関数が得られて「しまった」からには，以後の統計的推論には

「無縁」なのである。(ところでこの「原理」は，(個人的確率に基づく）ベイジアンにとっては正に「ベイズの定理」から直ちに従うのだが，しかし実はサヴェジ氏は，「基礎論」を執筆した段階ではこの「原理」に気づいてはいなかったのである。「「なぜ」彼は気づかなかったのか」については，園（2001年12月 a）に一つの詮索がある。)

なおサヴェジ氏は，「尤度原理」の応用例として，二項的なデータに関る良く知られている例に言及している。つまりある研究者が，特定の種に属するハエの全体から成る「母集団」を想定して，この「母集団」における赤色眼の個体の比率 $p$ を推定しようとして，その「母集団」に対して「ランダムな」（あるいは「無作為な」）抽出を行い，赤色眼及び非赤色眼の個体を各各 $r$ 及び $n$ 匹得たとするのである。この場合，問題の「母集団」が「充分に」大であると想定される状況では，「未知かつ固定されている「確率」$p$ で赤色眼がもたらされる「試行」」の「独立な」繰り返しとして，問題の「ランダムな」抽出の過程を解釈することが通常為されるのだが，さらに，問題の標本 $(r, n)$ がこの「抽出の過程」からもたらされるであろう「確率」は，ある一般的な状況で，但し，$(r, n)$ のみに依存する定数 $k(r, n)$ を利用して，$k(r, n) p^r(1-p)^n$ と表現されるのである。この表現を $p$ の関数と見なすと，それは（「観察」の結果である $(r, n)$ が与えられている場合の）$p$ の尤度関数の一例を与えることとなる。ここで尤度関数とは，密度関数において「「観察」の結果が与えられている場合に定数となる因子の役割」を無視することによって得られる「「母数」の関数」の総称であり，従って，この例では $(r, n)$ が与えられているのであるから，尤度関数の「本質的な」部分は $p^r(1-p)^n$ という $p$ の関数に他ならない。つまり「尤度原理」によれば，「赤色眼及び非赤色眼の個体が各各 $r$ 及び $n$ 匹得られた」という「「観察」の結果」の（「母数」に関る）内容の「全て」は，この関数に含まれているのであり，「この内容，the import」には，例えば「そのデータ」が得られる「まえ」に「計画されたかもしれない」実験の様式などは，つまり「定数」$k(r, n)$ の様式などは，関りがないのである。つまり「その研究者」は，$r+n$ 回の抽出を「はじめ」に計画したかもしれないし，あるいは，$r$ 匹の赤色眼が得られるまで抽出しようと「意図した」かもしれないし，自身の疲労や時間切れのために「実験」を停止したかもしれないのだが，しかし一旦尤度関数が「得られた」ならば，彼は，「「実験」に関する自身の「かつて」の意図」とは一切関りなく，「その」尤度関数に基づいて「自身の」推論を行えばそれで「良い」のである。(なおサヴェジ氏は，$k(r, n) p^r(1-p)^n$ という様式の密度関数が現れる一般的な状況を議論している論文として，Girshick, Mosteller, and Savage (1946) に言及しているが，だが自身が関ったこの種の議論に対して，彼は終に強い疑念を持つに至ったのである。)

この「尤度原理」は，当然ながら「頻度論的な」統計学の大部分とは両立しない。例えばある実験者が，自身のオピニオンが正当なものであるはずだということを他の実験者に対して説得するために，「この説得がうまく行く程の「充分な」データが得られるまで標本の抽出を行い，そのような標本が終に得られてしまえば，その場合に限って標本の抽出を停止する」という「計画」を実行するとしても，「尤度原理」によれば，問題の「実験」がもたらすデータの「内容」の全ては，「その実験」がもたらす尤度関数に「正当に」表現されているのであるから，その実験者は，自身が実行する「抽出に対する「任意の停止，optional stopping」」に関しては，何ら批難には値しないのである。しかし，「頻度論的な」流儀によれば，「極めて高い有意水準が達成されるまで抽出を続けて，達成されれば直ちに抽出を停止する」というやり方は，自身が望む（「検定」の）結果を「意図的に」達成するために利用され得るであろうから，当然

「批難に値する」のであり，結局それは排除されるべきなのである。しかし「尤度原理」を認める立場からすれば，特にベイジアンにとっては，「任意の停止」には何の「罪，sin」もないのであり，むしろ，「獲得される有意水準によって「そのデータ」に対して判断を下す」という手順の方こそが，人を「過ち」に導きやすいのである。事後的な有意水準あるいは「限界水準，critical level」，つまり今日の $P$ 値を，「他の」情報なしに利用して判断を下すというやり方がかなり危険であることは，頻度論者自身が承知しているはずのことである。しかし，この危険な状況を組織的に処理する様式を，多くの頻度論者は終に獲得し得なかったのである。

「尤度原理」は，従来の統計学的手法の多くとは両立し得ない「驚くべき」帰結をもたらすので，当然多くの議論を引き起こすこととなった。だが，この「原理」が不当なものであることを明瞭に示す反例は終に提示されることはなく，むしろ個個の例が，この「原理」の正当性を確かなものとして来たのである。サヴェジ氏は，多くの試練に耐え得たこの「原理」とベイジアンの立場とが両立することを重く見ており，ベイジアンの立場への確信を深めているようである。(なお，「尤度原理」に関する書物として Berger and Wolpert (1988) がある。)

また一方，ベイジアンの観点からは，「精密測定の原理，the principle of precise measurement」，あるいは「安定推定の原理，the principle of stable estimation」と呼ばれるある一般的な「近似の様式」が従うのである。(なお，この「近似の様式」のフォーマルな導出は，Edwards, Lindman, and Savage (1963) の 201 頁の左から 203 頁の全てにかけて提示されている。また，この論文はサヴェジ氏の「論文集」の 450 頁から 499 頁にかけて収録されている。) サヴェジ氏は，この「近似の様式」が大きな実践的な価値を持つと見ている。つまりこの「近似」は，統計的推論が持ち得るであろう「実際上の「客観性，objectivity」」の根拠を (個人的確率に基づいて) 説明していると，彼は判断するのである。つまりこの「近似」は，「母数」$\omega$ に対する「事前の，prior」オピニオンを表現する密度関数を $\rho(\omega)$ とし，$\omega$ が与えられている場合のデータ $D$ の「確率」を $P\{D|\omega\}$ とすると，「ベイズの定理」によって，$D$ が与えられている場合の $\omega$ の「事後の，posterior」密度は ($D$ に依存し得る (「正準化，normalization」のための) 定数 $k$ を用いて) $\rho(\omega|D)=kP\{D|\omega\}\rho(\omega)$ と表現されるが，もし $\rho(\omega)$ が尤度関数 $P\{D|\omega\}$ との比較において「緩やかに，gently」振る舞うのならば，$\rho(\omega|D)$ は，$\omega$ の可能な値の全体における「関心のある部分，the interesting part」において，(正準化のための定数 $k'$ を伴った) 関数 $k'P\{D|\omega\}$ によって「近似される」ことを，主張するのである。ここで $k'$ の逆数は ($\omega$ の可能な値の全体にわたる) 積分 $\int P\{D|\omega\}d\omega$ で与えられるのであるから，この「近似」は，この積分の存在を仮定しているのである。ところで，この「近似」が通用する状況では「個人」の事後密度が正準化された尤度関数で近似されるのであるから，異なる「個人」が，問題の「事後的な」状況を表現する尤度関数を共有していると見なせる場合には，彼らの事後密度が事実上一致していると判断して良い場合が充分存在し得ることとなる。この場合，両者の事前密度は (彼らは「異なる」のであるから) 当然異なっているが，事後の彼らのオピニオンは事実上一致するのであり，このような事後的な「合意の形成」を通して統計的推論における事実上の「客観性」がもたらされるに至る，というのがサヴェジ氏の見解なのである。

さらに彼はある大まかな例によって「精密測定の原理」の使い方を説明している。つまり「あなた」は，幾つかのジャガイモが入っている「その袋」の重さに関心があるものとする。「その重さ」に関する「あなた」のオピニオンは，「可能な」重さから成るある「かなりもっともらしい，reasonable」区間においては，半ポンド程度の値のずれに対しては「鈍感である，insensitive」とする。さらに「あなた」は,「その袋」の重さを測ることができるのだが, この測定に利用する器具には「誤差」があり,「誤差」は標準偏差が 1 オンス（16 分の 1 ポンド）の正規分布に従うことがわかっている。すると,「精密測定の原理」によれば, 測定後の「あなた」のオピニオンは, 測定によってもたらされる値を中心とする標準偏差が 1 オンスの正規分布に, ほとんど「近く」なるであろうことが従うのである。つまり「あなた」の事後密度は, 少なくとも「その区間」においては, この正規分布で表現されると見なして良いのである。そこで実際にもたらされる測定値を中心にして,（この正規分布の）例えば 95% の「確率」を荷う区間を求めれば,「その重さ」がこの区間に属する「あなた」にとっての（事後の）「確率」は,（ほとんど）95% となるのである。この区間は従来の「信頼係数が 95% の信頼区間」にたまたま一致するが, 頻度論的な枠組においては, この事後的に定まる「その区間」に「未知かつ固定されている「その値」」が属する「確率」を真剣に議論することは許されないのであり, 結局頻度論者は, 95% という値が（事後的に定まる）「その区間」に対して持つ「意味」を「客観的に」議論することができないのである。しかし, 個人的確率に関する「精密測定の原理」によって得られる「その区間」には,「信頼区間による推定」のこの（恐らくは異様な）「欠陥」はなく, 95% という値は,「その重さ」が「その区間」に属する「あなた」にとっての「その確率」の近似値に他ならない。

なお実は, 事前密度 $\rho(\omega)$ が $f(\omega)\ g(\omega)$ という様式をしていて, $f(\omega)$ は尤度関数と比較して「緩やか」だが $g(\omega)$ はそうとは限らない場合でも「精密測定の原理」が成立し得るのであり, 実際このような「近似」は, 未知の分散を持つ正規分布による測定の繰り返しに基づく「事後の」オピニオンを, $t$ 分布で近似する際に用いられるのである。「精密測定の原理」は,「「個人」のオピニオンと尤度関数とに関るある状況においては,「事前の」オピニオンが「もっともらしい「母数」の全体」上で「一様である」としても実際上の不都合が起らない」ことを主張しているのであるが, ここで注意すべきなのは, この「一様分布に基づく近似」の様式は,「母数」を表すパラメータをどのように選ぶかに依存していることなのである。例えば, 未知の標準偏差 $\sigma$ に対して直接「精密測定の原理」を当てはめることが困難であっても, $\ln \sigma$ には当てはめ得るのである。

ところでサヴェジ氏は, いわゆる Behrens–Fisher problem に言及しており, R. A. Fisher によるこの問題への解決策の「根拠」が大部分の統計家にとっては不可解であること, 及び R. A. Fisher が提示している「分布」が「精密測定の原理」から得られる「近似的な」事後分布に一致すること, さらにまた Jeffreys が,（今日の objective Bayesian inference の立場から）「同じ」分布に到達していることを注意している。なお彼は,「精密測定の原理」は Jeffreys が実質的に既に了解しかつ表現していたと見なしているようである。「精密測定の原理」は, コモン・センスに対する（個人的確率に基づく）表現の重要な一角である。

## 8．現在の見解

末尾の節である第 8 節（584 [305] − 585 [306]）の標題は One present view だが, この 2 及び 3 番目の段落（585 [306]）を引くと次である。

Personal probability at present provides an excellent base of operations from which to criticize and advance statistical theory.

The theory of personal probability must be explored with circumspection and imagination. For example, applying the theory naively one quickly comes to the conclusion that randomization is without value for statistics. This conclusion does not sound right; and it is not right.

Closer examination of the road to this untenable conclusion does lead to new insights into the role and limitations of randomization but by no means deprive randomization of its important function in statistics.

サヴェジ氏は既に，自身が立脚する個人論的見解への堅い信念に到達しており，「個人的確率の理論」に基づく統計学の構築という作業が，統計学と呼ばれる独特の領域を本質的に進展させるはずだとの態度を持つに至っている。しかし彼は一方で，「個人的確率の理論」を冷静に観察しており，この「理論」が，統計学において広く利用されている「無作為化，randomization」の作業の有用性を正当化し難いことを承知しているのである。結局，「無作為化」の有用性は誇張され過ぎているのではなかろうかとの疑念が生じるのだが，彼は個人的確率に基づく議論をより慎重かつ精密に展開することで，「「無作為化」の有用性」の正当化がある程度まではできるであろうと判断しているようである。(なお，ベイジアンの立場から「無作為化」の意義を論じたものとして，例えばKadane and Seidenfeld (1990) がある。)

## 9．補遺
### ―1958年のEdinburghでの簡潔な説明―

以上でサヴェジ氏の1961年の「再考」は終了しているが，ここでさらにSavage (1960) に触れておく。これは全部で五つの節から成る簡略な論述なのだが，内容は1958年にScotlandのEdinburghで開催された第8回国際数学者会議での彼のan expository talkであり，標題はRecent tendencies in the foundations of statisticsである。なおこの論述は，「論文集」の289頁から293頁にかけて収められている。また，今までと同様の様式で原文の頁に言及する。

第1節はIntroductionであり，「統計学の基礎づけ」が，「科学の基礎づけ」という作業を極めて広く捕えるのならば，その一部とみなして良いということ，及び，「統計学の基礎」の研究が，原理上は「数学」に属するものではなく，またこの独特の領域への重要な貢献の悉くが数学者によって為されたのだというわけでもないことが注意されている。しかし一方，数学的な訓練及び見方が，「統計学の基礎」の研究に重大な進展をもたらしたことも指摘されている。なお標題のRecent tendenciesとは，20世紀の，特に第二次世界大戦の期間から当時までの，「傾向」を指しているのである。540[289]。

第2節はMeanings of ‘statistics’であり，‘statistics’という言葉が，元来「国家，state」に関る数値的なデータに関るものであり，今日でも多くの専門的な「統計家，statisticians」が，「国勢調査, census」がもたらすデータや，経済に関する諸統計や，出生，死亡，そして種種の病気に関する記録から成る諸統計などの，編集及び解釈に従事していることが注意されている。540[289]−541[290]。しかし一方では，「統計学」という言葉が，科学などの多様な分野での調査や研究の進展に伴って，「不確定性に関する定量的な考察, quantitative thinking about uncertainty」との連関で使用されるようにもなったのである。「「帰納的な」あるいは「統計的な」推論」と呼ばれる事柄が問題となるのは，このような状況においてである。なおサヴェジ氏は，「帰納的な推論」に関する考察の歴史が18世紀の初期のJames Bernoulliや(少し遅れて)Thomas Bayesによる偉大な貢献にまで溯り，19世紀にはLaplace及びGaussらによってその考察が推進され，さらに20世紀の20年代の初期からの(熱情的とも呼び得る)「統計学」の急激な変化及び進展の時代が到来したことを，簡潔に注意しており，しかも彼は，特にRonald Aylmer Fisherの一連の業績がこの「統計学」の激動に大きく貢献したことを認めている。541[290]。

第3節はInductive inference and inductive behaviorであり，サヴェジ氏によれば，ここ二三十年での「統計学」における(中心的な問題の捕え方に関る)大きな変化は，不確定性に直

面している状況において何を「主張し」あるいは「信じる」のかという「問い」から，そのような状況において「結局何を「為す」のか」という「問い」への推移であり，この傾向は「経済的な，economic」様式で「統計学」の諸問題を捕える流儀を生むに至っている。彼は，「誤った決定に伴うコスト，the costs of wrong decision」に着眼するやり方が，遅くともGaussによる（19世紀後半の）考察にまで溯ることを指摘し，しかし，「帰納的な行動，economic behavior」という表現と共に（「統計学」における）「決定」の重視を前面に押し出したのは（20世紀前半における）Neymanの論述であり，またその後Abraham Waldが，あくまでも頻度論的な枠組においてだが，このような見方を熱心かつ（数学的に）精密に追究かつ展開したことを注意している。しかし，このような「経済的な」流儀に対しては根強い反発があり，実際BarnardやR. A. Fisherは，「経済的な」流儀は，「真理のための真理の探究，finding out the truth for the truth's sake」を心掛けるべき「科学」においては相応しくないと批判したのである。しかし，点推定の誤差がもたらす「損失」が，あるもっともらしい状況において，「誤差の平方」によって「近似される」というような（Gaussにまで溯る）考察は，「「純粋な」科学」にとってもかなり有益なものではなかろうか。しかも，「科学」における「誤った」決定には，極めて微妙ではあるかもしれないが，（「率直に「経済的な」」問題と同様に）何らかのコストが伴うはずなのである。541 [290]－542 [291]。

さらにサヴェジ氏は，「経済的な」決定は，「価値」や「機会」というような周囲の状況と共に通常は変化するものだが，「科学」における「推論」とは，与えられているデータから導き出される普遍的かつ一意的なものであるべきだという批判があることにも触れている。しかし彼は，「経済的な」見方が「統計学」にとって極めて重要かつ有益であるとの自身の信念を堅持しているのである。542 [291]。

第4節はObjectivism and subjectivismである。ここでまずサヴェジ氏は，20世紀の第2四半期に起った「統計学」のthe great renaissanceの歴史上の性格に注意を促している。実はこの激変以前は，不確定性はいかなるものであれ「確率」で表現されると信じられていたのであり，従って例えば研究者が，自身が問題としている諸「仮説」にその「確からしさ」を表す「確率」を配分することは何ら異様ではなく，「統計的な推論」はBayes' theoremに立脚して組織的に行われていたのである。ところが問題の激変期においては，「かけ」を行う器具のような（「確率」に関する「頻度論的な」解釈と結びつくように「なぜか」思われてしまう）事柄に関る極めて特殊な「不確定性」のみが，「確率」で測定され得るのだと見なされるようになり，諸「仮説」の「確からしさ」を表現する「確率」は忌避され，「ベイズの定理」に基づく古典的な推論の枠組は（論難され）捨て去られたのである。すると，本来は「ベイズの定理」を利用することで組織的に「解かれる」はずの基本的な諸問題が，「別の解き方」が為されなければならない「新しい」問題となってしまい，実に多くの諸概念や手法が生み出されるに至ったのである。結局問題の激変以後は，統計家の多くが，「「ベイズの定理」を利用すれば組織的に「解ける」はずだが，その利用は（「頻度論的な」立場から）禁じられているので，「新しい」解き方を苦心して「創出」しなければ「ならない」」という，独特の「苦境，dilemma」に置かれることとなったのである。つまり問題の激変は，統計的諸問題の「定式化」の激変と多数の「難問」の「創出」とをもたらしたのである。サヴェジ氏は，このような「苦境」において幾つかの「価値ある」概念が生み出されたことを否定はしていない。しかし彼は，信頼限界に基づく推定や「鋭敏に指定されている諸「仮説」，narrow hypotheses」に対する検定などの手法が，充分に合理的な根拠に支えられているなどとは決して見なしていないのであり，むし

ろそれらの「価値」に強い不信感を持っているのである。542 [291]－543 [292]。

統計的な実践においては,(「価値」と同様に)「事実」に関る主観的な判断が基本的な役割を演じることは,少なくとも実践的な統計家にとっては否定し難い事実のはずである。例えばある統計家が,どのような種類の「実験」や「調査」をどの程度の「規模」で行うのかを現実に決めなければ「ならない」状況に直面するのならば,彼は(最終的には)正に自身による「主観的な」判断を下さなければならないはずである。つまり,「「実験」や「調査」の計画」に関る統計学的な考察においては,現実を無視しない限り,「主観的な」要素が重要な役割を演じることとなるのである。また(頻度論的な)「データの分析」においても,検定力曲線の選択は正に「主観的に」為されるはずなのである。つまり,統計的な実践における「主観」の役割の重要性は否定し難いのである。なおサヴェジ氏は,いわゆるminimax theoryが,統計的な決定における(「価値」に関する判断以外の)主観的な判断の役割を,結局は「個人の」オピニオンの役割を,消去しようと試みたことに言及し,自身もかつて関ったこの理論が,結局は満足できる成果をもたらさなかったことを注意している。543 [292]。

主観確率というものは,Ramsey (1926) が既に定式化しているように,またde Finetti (1937) がより詳細に議論しているように,決して「神秘的な,mysterious」ものではなく,むしろそれは「操作的な,operational」概念である。しかも主観確率の理論は,「「確率」の解釈」に関る諸問題を(論理的な一貫性を保ちつつ)統一的に分析できるのであり,この理論の「統計学の基礎」への貢献は実に大きい。この理論によれば,不確定性はいかなるものであれ(原理上は)「確率」によって測られるのであり,この「確率」は,「情報が示すパターン」のみでなく,正に一人一人のオピニオンにも依存するのである。サヴェジ氏は,主観確率に関する自身の経験に基づいて,この概念が,「統計学」の客観的及び主観的諸相を理解するための健全な枠組を提示することを堅く信じるに至っている。

末尾の第5節はDoes it matter?である。これは「基礎づけ」に真剣に取り組むことが,実際上の何らかの有用性に貢献し得るのであろうかという率直な(多分多くの人人が抱く)疑念の表明である。この節の冒頭の段落(543 [292]－544 [293])を引くと次である。

As is often said, and with much truth, the explicit study of the foundations of a subject is usually of relatively little practical importance, for common sense and experience over the course of time develop a science more securely than it could possibly be built up by direct application of abstract principles. None the less, I believe that present-day discussions about inference and behavior, about subjectivism and objectivism, are stimulating practical advances in statistics. The evidences of this are widely scattered, but I shall mention only two examples.

つまり,(どれであれ,研究の対象である)分野の「基礎づけ」を(明白な様式において)真剣に考究するという作業が,実際上重要であるとされる何らかの事柄に直結する成果をもたらすことは,まずないのである。現実の科学的な分野は,抽象的な諸原理の直接的な適用によって構築されるのではなく,またそのような(論理的かつ抽象的な)構築が仮に可能であると想定しても,そのような概念的な構築よりもはるかに安全に,時の経過と共に蓄積し涵養される「経験」とコモン・センスとによって進展するのである。サヴェジ氏は現実の多様な諸分野に活発に関って来たのであり,「経験」及びコモン・センスのどうしようもない重要性を実際の体験を通して承知しているのである。だが彼

は，主観確率の理論が日日の統計学的な実践に対して重要な見地を与えると判断しており，実際に彼は，推論，行動，客観主義，そして主観主義に関する（主観確率に基づく）議論が，統計学の実践に対しても本質的な影響を持つと見ているようである。(なお原文では，2 番目の文の objectivism と are との間にはコンマがないが，ここでは補うこととした。)

ところで末尾の文の「二つの例」だが，一つは David Wallace が主観確率の観点から Behrens–Fisher problem に対して注目すべき考察を行っていることへの簡略な言及であり，もう一つは「尤度原理」に関するものだが，これは既に上の第 7 節で言及している。なお筆者は，David Wallace による考察がいかなるものなのか確認できないでいる。ぜひとも読者の御教示を賜りたいのである。

## 10.　おわりに

Savage (1960)，(1961 b) 及び Savage et al. (1962) を通読してみると，サヴェジ氏は「基礎論」を書き上げた後にほぼ五年の歳月をかけて，地道な思索及び学習の帰結として，主観確率（特に自身が唱道する個人的確率）に基づくベイズ統計学が「正しい」道であり，このベイズ統計学によって統計学の諸概念及び諸手法に対する正当な理解及び評価がもたらされるに「違いない」という，堅い信念に到達したようである。また，Savage (1961 a)，(1962)，及び Edwards, Lindman, and Savage (1963) に見られるように，彼は，ベイズ統計学の実践に対しても何とか貢献しようと苦心したのである。だが彼は一方で，Savage (1967 a)，(1967 b)，(1971)，(1977)，及び未公表の (1966) に見られるように，自身の立場に対する厳しい省察を持続しており，自身の（既成の）枠組を越えた「統計学の全般」に対して，学び理解し冷静に批判して行く態度を常に保持し続けたのである。彼は，表層的な議論に安住できないタイプであり，（自身に対して）さらに「本質」を厳しく「問う」のである。彼が唱道する個人論的見解は，「一人(いちにん)」が自身に対して（冷静に）課す「合理性」によって，即ち対自己的検束によって，「一人」の「確率」を捕える試みなのだが，この「見解」を実践するには，「自己」に対する尋常でない磨錬及び学習が不可欠なのである。サヴェジ氏は，自身の「哲学」に（恐ろしい程に）忠実である。

2003 年 2 月 18 日(火)

### 参考文献

Barnard, George A., "A review of 'Sequential Analysis' by Abraham Wald," *Journal of the American Statistical Association*, 42, 658-664, 1947. (Savage (1961 b) では，左の頁数 664 が 669 となっているが当然修正すべきである。) これは，Wald, Abraham, *Sequential Analysis*, Wiley, New York, 1947, への書評である。ここで Barnard は「尤度原理」を支持しているというのがサヴェジ氏の見方である。この書評の 659 頁の末尾の段落の 2 番目から 8 番目の文を引くと次である。(なお，冒頭の文中の is のイタリックは原文のままである。) What, after all, *is* a simple statistical hypothesis? What does it do for us? It enables us to attach a number to experimental results—the likelihood of such results, on the hypothesis in question. The connection between a simple statistical hypothesis $H$ and observed results $R$ is entirely given by the likelihood, or probability function $L(R|H)$. If we make a comparison between two hypotheses, $H$ and $H'$, on the basis of observed results $R$, this can be done only by comparing the chances of, getting $R$, if $H$ were true, with those of getting $R$, if $H'$ were true. Mathematically, if $L(R|H)=L$, and $L(R|H')=L'$ then our decision about $H$ and $H'$ in the light of data $R$, must depend on the value of some function $f(L, L')$. Furthermore, this function $f$ must be a function of the ratio, $L'/L$, only. この部分は今日の「尤度原理」への支持のように解釈できるかもしれない。しかし筆者には，「尤度原理」そのものへの支持とはどうも思えない。

なお，下の Fisher (1956) も参照して頂きたい。

Berger, James O., and Robert L. Wolpert, *The Likelihood Principle, Second Edition*, Lecture Notes-Monograph Series, Series Editor, Shanti S. Gupta, Volume 6, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988. 第 1 版は 1984 年に出ている。

de Finetti, Bruno, "La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, 1-68, 1937. Translated in Kyburg and Smokler (1964, 1980). この論文は Henry E. Kyburg, Jr., によって仏語から英語へと翻訳されたのだが，その標題は，*Foresights : Its Logical Laws, Its Subjecive Sources*, である。この英訳は，*Breakthroughs in Statistics, Volume I, Foundations and Basic Theory*, edited by Samuel Kotz and Norman L. Johnson, Springer-Verlag, New York, 1992, にも，134 頁から 174 頁にかけて収められており，その 127 頁から 133 頁に R. E. Barlow による簡略な説明がある。

de Finetti はこの古典的な論述において，「個人」の「主観的な」見積りが「整合的である，coherent」ことの必要条件として「加法法則の成立」及び「乗法法則の成立」を導くが，さらに，「加法法則の成立」が「整合的である」ためには十分であることをも示し，さらに，「乗法法則の成立」も「整合性」にとって十分であることを，Chapter I の末尾から四番目の段落の冒頭の文で注意している。だが，この十分性の証明を提示しているわけではない。また Chapter I の冒頭の段落において，「同等に確からしい，equally probable」と（「個人」によって）判断される事象たちへと「世界」が分割され，しかもこの分割が「「任意に」細かく」できるのならば，その「個人」は（自身にとっての）任意の事象に対して「定量的な「確率」」を配分できる，との趣旨の発言をしているが，この主張を明確な様式において（従って選択公理に対する彼の「態度」は不明である）証明しているわけではない。

さらに彼は Chapter III において，（交換可能な事象列に対する）「de Finetti の表現定理」を証明する。彼は，遅くとも 1928 年にはこの結果を得ており，Bologna の国際数学者会議で報告しているのである。彼はこの「表現定理」を利用することによって，本来の「主観主義」からすればその「存在」を容認できないはずである「未知ではあるが固定されている「確率」」という「客観主義的な」概念を，「主観確率」によって明晰に分析し，「主観確率」が「未知固定の確率」が呼び出される「傾向にある」状況に対しても，正当に対応し得ることを示したのである。「未知固定の確率」の「存在」に関わるこの「重い」論点については，Savage (1954) の第 3 章第 7 節及び園（2001 年 6 月）（あるいは園（2001 年 12 月 b）の第 4 章）を参照されることを勧める。

de Finetti, Bruno, "La probabilità e la statistica nei rapporti con l'induzione, secondo i diversi punti di vista," *Centro Internationale Matematico Estivo* (C. I. M. E.), Cremonese, Rome, 1959. なお，Savage (1961 b) の文献表ではこの出典が，*Induzione e Statistica* , Rome, Istituto Matematico dell'Università, 1959, となっている。イタリア語によるこの論述は Mrs. Isotta Cesari 及びサヴェジ氏によって英訳されて，下の de Finetti (1972) の第 9 章に収められている。

de Finetti, Bruno, *Probability, Induction and Statistics*, Wiley, New York, 1972. この 147 頁から 227 頁の Chapter 9, "Probability, statistics, and induction : Their relationship according to the various points of view" で，de Finetti は「帰納」の問題に言及したがっている雰囲気なのである。

Edwards, Ward, Harold Lindman, and Leonard Jimmie Savage, "Bayesian statistical inference for psychological research," *Psychological Review*, 70, 193-242, 1963. Reprinted in *Readings in Mathematical Psychology*, Vol. II, (R. D. Luce, R. R. Bush and E. Galanter, eds.), Wiley, New York, 519-568, 1965. さらにこの論文は，*Breakthroughs in Statistics, Volume I, Foundations and Basic Theory*, edited by Samuel Kotz and Norman L. Johnson, Springer-Verlag, New York, 1992, の 531 頁から 578 頁にかけて収録されており，そこの 519 頁から 530 頁にかけて William H. DuMounchel の簡略な説明があ

る。

Fisher, Ronald Aylmer, Sir, *Statistical Methods and Scientific Inference*, Hafner, New York, 1956 ; *Second Edition, revised*, 1959 ; *Third Edition, revised and enlarged*, 1973. Sir Ronald は 1890 年 2 月 17 日に生まれて 1962 年 7 月 29 日に没しているが，第 3 版には，彼がこの書物の改訂のために残しておいた文書に基づき，多くの新しい題材が取り入れられている。(なお，サヴェジ氏の言及は第 1 版。) また第 1 及び第 2 版による次の訳注がある。フィシャー，R. A.，著，渋谷政昭，竹内啓(けい)訳，『統計的方法と科学的推論』，岩波書店，東京，1962 年 11 月 26 日。ところで，「R. A. Fisher はこの書物において「尤度原理」を支持している」というのがサヴェジ氏の見方である。同書の第 3 章第 6 節の 4 番目の段落の末尾の文（第 3 版の 73 頁）を引くと次である。In the theory of estimation[2] it has appeared that the whole of the information supplied by a sample, within the framework of a given sampling method, is comprised in the likelihood, as a function known for all possible values of the parameter. ここで estimation の上つきの 2 は，1925 年の Fisher 自身の論文への言及である。「「「与えられている標本抽出の方法」という枠組において（1 組の）標本がもたらすに至る」情報の全体が，「母数の可能な値の全体の上で定義されている（その標本が与えられると既知となる）尤度関数」の値たちによって表現される，「尤度，likelihood」に含まれている」というこの主張は，「尤度原理」への支持であると解釈しても不当ではない。なお，1925 年の論文は，Fisher, Ronald Aylmer, "Theory of statistical estimation," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 22, Pt. 5, 700 - 725, 1925, であり，その第 5 節の 3 番目の段落の末尾の二つの文を引くと次である。 *Likelihood* in this sense is not a synonym for probability, and is a quantity which does not obey the laws of probability; it is a property of the values of the parameters, which can be determined from the observations without antecedent knowledge. An exact knowledge of the likelihood of different values of *m* tells us nothing whatever about the probability that *m* will fall in any given range. ここで冒頭のイタリックは原文のままであり，2 番目の文の *m* は Cauchy 分布の未知の位置母数に対応するパラメータである。この論文は最尤推定量に関する論文だが，少なくとも「尤度」に関するこの二文からは，今日「尤度原理」と呼ばれている主張に対する Fisher の支持を読み取ることは多分無理である。

M. A. Girshick, Frederick Mosteller, and Leonard Jimmie Savage, "Unbiased estimates for certain binomial sampling problems with applications," *Annals of Mathematical Statistics*, 17, 13-23, 1946.

Good, Irving John, *Probability and the Weighing of Evidence*, Charles Griffin and Co., London, and Hafner Publishing Co., New York, 1950. この書物の簡略な書評として Savage (1951 b) がある。

Good, Irving John, "Kinds of probability," Science, 129, 443-447, 1959.

Jeffreys, Harold, Sir, *Scientific Inference*, Cambridge University Press, 1931; *Second Edition*, 1957; *Third Edition*, 1973. サヴェジ氏の言及は第 2 版。

Jeffreys, Harold, Sir, *Theory of Probability*, The Clarendon Press, Oxford, 1939 ; *Second Edition*, 1948 ; *Third Edition*, 1961. サヴェジ氏の言及は第 2 版。

Kadane, Joseph B., Mark J. Schervish, and Teddy Seidenfeld, *Rethinking the Foundations of Statistics*, Cambridge University Press, 1999.

Kadane, Joseph B., and Teddy Seidenfeld, "Randomization in a Bayesian perspective," *Journal of Statistical Planning and Inference*, 25, 329-345, 1990. この論文誌は Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, から出ている。またこの論文は，Kadane, Schervish, and Seidenfeld (1999) の第 3．4 章（293 頁から 313 頁）に収められている。

Koopman, Bernard Osgood, "The axioms and algebra of intuitive probability," *Annals of Mathematics*, Series 2, 41, 269-292, 1940 a, "The bases of probability," Bulletin of the American Mathematical Society, 46, 763-774, 1940 b, "Intuitive probabilities and sequences," *Annals of Mathematics*, Series 2, 42, 169-187, 1941. サヴェジ氏はこの論文に対して，「基礎論」第一版の文献表277頁で，These three papers present the personalistic view that Koopman holds along with an objectivistic one. と記している。なお，この内の1940 bはKyburg and Smokler (1964, 1980) に収録されている。

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Wiley, New York, 1964. Savage (1961 b)が入っている。

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Krieger, New York, 1980. このKrieger版はWiley版とはかなり内容が相違するが，Ramsey (1926), de Finetti (1937)の英訳，及びKoopman (1940 b)は引き続き収められている。また，Savage (1961 b)は外されて，代りにSavage (1971)が入っている。

Lindley, Dennis Victor, "Statistical inference," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 15, 30-76, 1953. この論文についてサヴェジ氏は，「基礎論」第一版の文献表の278頁で，Excellent reading in connection with Chapters 14-17 of this book. Unfortunately, I did not see the paper in time to reflect its contents in those chapters. と注意している。

Pratt, John W., Howard Raiffa, and Robert Schlaifer, "The foundations of decision under uncertainty : An elementary exposition," *Journal of the American Statistical Association*, 59, 353-375, 1964.

Raiffa, Howard, and Robert Schlaifer, *Applied Statistical Decision Theory*, Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston, MA, 1961. この書物はWiley Classics Library Edition Published 2000として (2000年に) John Wiley & Sons, Inc., New York, から再版されている。

Ramsey, Frank Plumpton. 1903. 2. 22-1930. 1. 19. "Truth and Probability" (1926), and "Further considerations" (1928), in The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, edited by R. B. Braithwaite, Routledge and Kegan Paul Ltd, London, 1931, Harcourt, Brace and Co., New York, 1931, The Humanities Press, New York, 1950. 1926年のこの古典的な論述はRamseyの生前には出版されなかったのだが，同年の末に書かれたものであり，その大部分はthe Moral Science Club at Cambridgeで読まれたものである。一方1928年の論述は，同年の春に書かれた覚書をBraithwaiteがまとめて補足したものである。この覚書の表題を順に上げると，A. Reasonable degree of belief, B. Statistics, C. Chance, である。また (今日では広く知られている) 1926年の論述は，Kyburg and Smokler (1964, 1980)に収録されている。一方，Braithwaiteが編集したこの論文集の再版が2000年に，*The International Library of Philosophy : 56 Volumes* 内の *Philosophy of Logic and Mathematics : 8 Volumes* 中の一冊として，Routledge, London, から出版されている。なお，*June and December*, 1930. と年月が記されているBraithwaiteの4頁にわたる序文の前に，2頁にわたって *December* 1930. と年月が記されているGeorge Edward Mooreによる前書がある。さらに，ここの末尾に掲示した『ラムジー哲学論集』も出ている。なお，1926年の論述の第5節The Logic of Truthの7番目の段落の冒頭に，「先験的な，*a priori*」確率を「自然淘汰，natural selection」との関りで捕えようとする一文があることは多分注意すべきである。

Savage, Leonard Jimmie, "The theory of statistical decision," *Journal of the American Statistical Association*, 46, 55-67, 1951 a.「論文集」Savage (1981)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, Review of I. J. Good's *Probability and the Weighing of Evidence*, *Journal of the American Statistical Association*, 46, 383-384, 1951 b.

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954. *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. これは「基礎論」であり，統計学へのサヴェジ氏の偉大な貢献である。なお，園（2000年6月）（あるいは園（2001年12月b)の第2章）にサヴェジ氏の略伝がある。

Savage, Leonard Jimmie, "Recent tendencies in the foundations of statistics," *Proceedings of the 8 th International Congress of Mathematicians* [Edinburgh, 1958], 540-544, Cambridge University Press, 1960.「論文集」Savage(1981)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, "The subjective basis of statistical practice," mimeographed notes, University of Michigan, July, 1961 a. これは未完の原稿であり，「論文集」Savage(1981)の63頁から70頁にかけての彼の著作の一覧には掲示されていない。筆者がこの原稿の存在を知ったのは，Edwards, Lindman, and Savage(1963)の末尾から2番目の節の末尾の段落（239[496]-240[497]）で言及されているWolfowitz, Jacob, "Bayesian inference and axioms of consistent decision," *Econometrica*, Vol. 30, No. 3, 470-479, July, 1962, の文献表によるのであり，Wolfowitzは番号[6]によってこのサヴェジ氏の原稿に言及している。そこでこの原稿に目を通そうと思い，北海道大学附属図書館相互利用掛に（University of Michiganからの取り寄せについて）相談したところが，当掛の尽力によって，問題の原稿の複製が慶應義塾図書館（三田）に保管されていることがわかった。これはサヴェジ氏がMultilithで印刷して配布したものの一冊であり，なぜ慶應義塾図書館にあるのか良くわからない。だがとにかく筆者は通読したのである。サヴェジ氏は，主観確率に基づくベイズ統計学が「正しい」道であるとの堅い信念に達しているようであり，ベイズ統計学への実践的な書物を企図していたのだが，しかし終に「その書物」は完成しなかったのである。(なお，この原稿の末尾にはJune 14, 1961と日付がある文献表があり，そこには1番から206番までの文献が掲示されている。)

Savage, Leonard Jimmie, "The foundations of statistics reconsidered," *Proceedings of the Fourth* [1960] *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume I*, edited by Jerzy Neyman and E. L. Scott, University of California Press, Berkeley, 575-586, 1961 b.「論文集」Savage(1981)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, "Bayesian statistics," pp. 161-194 in *Recent Developments in Decision and Information Processes*, edited by Robert E. Machol and Paul Gray, Macmillan Co., New York, 1962.「論文集」Savage(1981)に収録されている。ここではLindley-Savage argumentが紹介されている。なお，園（1994年3月）（あるいは園（2001年12月b)の第5章）を参照して頂ければ幸いである。

Savage, Leonard Jimmie, "Draft of Afterword for reprinting of *the Foundations of Statistics*," June 1, 1966. この「未公表の後書」への注釈として園（2000年12月）がある。

Savage, Leonard Jimmie, "Difficulties in the theory of personal probability," *Philosophy of Science*, Vol. 34, No. 4, 305-310, Dec. 1967 a.「論文集」Savage(1981)に収録されている。なお注釈として園（2001年9月）がある。

Savage, Leonard Jimmie, "Implications of personal probability for induction," *Journal of Philosophy*, 64, 593-607, 1967 b.「論文集」Savage(1981)に収録されている。なお注釈として園（2002年6月）がある。

Savage, Leonard Jimmie, "Elicitation of personal probabilities and expectations," *Journal of the American Statistical Association*, 66, 783-801, 1971.「個人的確率の抽出」に関する規範的な考察であり，「確率」に関する古典的傑作である。「論文集」Savage(1981)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, "The shifting foundations of statistics," *Logic, Laws and Life : Some Philosophical*

*Complications*, edited by Robert G. Colodny, *Volume 6, University of Pittsburgh Series in the Philosophy of Science*, 3-18, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, PA, 1977. サヴェジ氏は1917年11月20日に生まれて1971年11月1日に急逝しているので没後の出版である。内容は，ピッツバーグ大学の the Center for Philosophy of Science が招待した講演者の一人として，1971年にサヴェジ氏が行った公開の講義であり，彼の最晩年の態度が伺われるのである。「論文集」Savage(1981)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, *The Writings of Leonard Jimmie Savage－A Memorial Selection*, prepared by a Committee(W. H. DuMouchel, W. A. Ericson(chair), B. Margolin, R. A. Olshen, H. V. Roberts, I. R. Savage and A. Zellner) for the American Statistical Association and the Institute of Mathematical Statistics, Washington, D. C., 1981. サヴェジ氏の論文集である。

Savage, Leonard Jimmie, et al., *The Foundations of Statistical Inference : A Discussion*, Wiley, New York, 1962. 但し，London では，同年に同じ標題で，Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics の1冊として，Methuen から出版されている。この Part Ⅰとして，"Subjective probability and statistical practice"という標題のサヴェジ氏の（1959年の）レクチャーが（多少の内容の拡充を受けた上で）収録されている。またその注釈として，園（2001年3月）がある。

Schlaifer, Robert, *Probability and Statistics for Business Decisions*, McGraw-Hill, New York, 1959.

園　信太郎,「サヴェジ,レオナルド　ジミィ,による1961年の講義における個人的確率について」,『経済学研究』(北海道大学), 第43巻第4号, 176(603)-187(613), 1994年3月。この講義の内容は Savage(1962)として公表されている。拙論は，サヴェジ氏が個人的確率に対する限界代替率的な捕え方に基づいて個人的確率の概念をわかりやすく説明している講演へのさらなる注釈である。なお,「レオナルド」は「レナード」とすべきであったと筆者は反省している。これは園（2001年12月b)の第5章に収められている。

園　信太郎,「サヴェジ氏の略伝」,『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第1号, 164(164)-180(180), 2000年6月。これはサヴェジ氏の論文集（1981）に基づく「略伝」だが，彼の人柄を知る助けになるかもしれない。これは園（2001年12月b)の第2章に収められている。

園　信太郎,「客観論的見解の三つの問題点」,『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第2号, 99(279)-105(285), 2000年9月。「確率」の定義及び解釈,「条件つき確率」の定義及び解釈，そして「変量をその実現値で置き換える作業」を議論している。これは園（2001年12月b)の第3章に収められている。

園　信太郎,「サヴェジ氏の未公表の後書について」,『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第3号, 32(384)-55(407), 2000年12月。ここで筆者が構成した文献表は，サヴェジ氏の関心の広さを示唆していると思う。なお彼が Le Blanc, 1962 としていた書物は，その後，Leblanc, Hugues, *Statistical and Inductive Probabilities*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962, であることがわかった。著者の姓の綴りの（サヴェジ氏による）誤りに気づかなかったために，当時は不明としてしまった。

園　信太郎,「サヴェジ氏による1959年のレクチャーについて」,『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第4号, 101(623)-143(665), 2001年3月。

園　信太郎,「コインの投げ上げに関する未知固定の確率について」,『経済学研究』(北海道大学), 第51巻第1号, 37(37)-55(55), 2001年6月。「未知かつ固定されている確率の「存在」」に関する古典的な議論の確認作業であり，交換可能性に関する「de Finetti の表現定理」と，この定理の Kolmogorov system による表現を議論している。これは園（2001年12月b)の第4章に収められている。

園　信太郎,「サヴェジ氏が指摘している個人的確率に関する幾つかの難点について」,『経済学研究』(北海道

大学)，第51巻第2号，51(197)-72(218)，2001年9月。Savage(1967 a)に関する注釈である。

園　信太郎，「なぜサヴェジ氏は1954年に尤度原理に気づかなかったのか？」，『経済学研究』(北海道大学)，第51巻第3号，127(399)-134(406)，2001年12月a。

園　信太郎，『サヴェジ基礎論覚書』，岩波出版サービスセンター，東京，2001年12月20日b。「基礎論」への要約，注釈，及び「読み」を提示している。また，上の園(1994年3月)，(2000年6月)，(2000年9月)，(2001年6月)が収められている。

園　信太郎，「サヴェジ氏の帰納法に関する見解について」，『経済学研究』(北海道大学)，第52巻第1号，37(37)-83(83)，2002年6月。Savage(1967 b)への注釈である。

園　信太郎，「なぜサヴェジ氏はオフィシャルな確率を避けたのか？」，『経済学研究』(北海道大学)，第52巻第2号，73(229)-81(237)，2002年9月。

ラムジー，F. P.，著，D. H. メラー編，伊藤　邦武，橋本　康二訳，『ラムジー哲学論集』，勁草書房，東京，1996年5月15日。この書物は，Ramsey，F. P.，*Philosophical Papers*，edited by D. H. Mellor，Cambridge University Press, 1990, の全訳であり，Ramsey(1926, 1928)の訳が収められている。