



Title	初等トポス理論の射程 : 集合・圏・論理 [論文内容及び審査の要旨]
Author(s)	深山, 洋平
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(文学)
Dissertation Number	甲第12041号
Issue Date	2015-12-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/60483
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Yohei_Fukayama_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称：博士（文学）

氏名： 深 山 洋 平

学位論文題名

初等トポス理論の射程：集合・圏・論理

本論文では、初等トポスの射程について、集合から始め、圏論、トポスをへて、論理へと考察が進行する。以下、章立てにそって要旨を述べていく。第 1 章では超限集合論の祖であるカントール(G. Cantor)の集合概念が検討される。彼の素朴集合論では、「多様体」(Mannigfaltigkeit)や「全体者」(Inbegriff)、「集合」(Menge)という語が用いられる。これらの語が指す諸概念を詳細に検討し、それらの不一致が確認される。彼の集合(Menge)の概念には集合論のパラドクスに至る原理が含まれていることが見出される。第 2 章ではカントールが集合の概念を用いて生み出した数の領域に目を向ける。彼は性質を捨象された要素から成る集合としての基数の概念を生み出した。しかしながら、そのような要素を互いに識別して数多性を生じさせることがいかにして可能か、という問題が生じる。ローヴェア (F. W. Lawvere) は基数が成す圏と、基数が抽象されて生じるものとなる空間の圏を対置し、互いを随伴関手で結ぶことで問題の現象を説明した。彼の説明は問題の解決でなく説明・記述に留まるが、しかし対象に関する情報を増やしつつ探求できる点で有用であることを指摘する。第 3 章ではカントールに先立つ数学者ボルツァーノ (B. Bolzano) もまた種々の集まりの概念を有していたことが示される。それらの中でも「総体」(Inbegriff)はもっとも規定が少ない、それゆえもっとも多様な構造を含みうる集まりの概念として、彼の主著『知識学』において導入される。ボルツァーノにとって、「集合」(Menge)は「総体」よりも規定が多い概念であり、それゆえ「集合」が「総体」よりも下位の概念となることを明確にする。第 4 章では圏論と初等トポス理論の入門的な諸概念を導入し、前章で論じたボルツァーノの集まりの諸概念の体系と、初等トポス理論との比較を行う。トポスの公理系は、公理の付加によって、より規定の多い、一般性が失われたトポスを扱うものとなる。そうして生じるトポス同士の概念的上下関係とボルツァーノの集まりの概念的上下関係を比較する。結果として、両者の上下関係同士の類似が見いだされる一方で、トポスにおける「部分」と「全体」のそのままの対応物は、ボルツァーノの体系には見出せないことが分かる。第 1 章から第 4 章までがトポスによって導入される、規定が少ない、一般化された集合概念に関わるのに対して、第 5 章と第 6 章はトポスが内包する論理に関わる。第 5 章は“the two wise girls puzzle”という論理パズルを取り扱う。このパズルにおいては二つの主体が視覚情報や問答によって知識を変化させながら推論を行う。Yasugi and Oda (2002) は、知識を表現するための様相演算子を含む文論理の形式的体系によって、その推論の過程を記述できることを示した。5 章では様相演算子を含む部分構造論理(substructural logic)の形式的体系を用いて同じパズルを分析する。先行研究よりもきめの細かい分析によって、当該のパズルの推論過程を記述するには弱化(weakening)の右規則の使用が本質的であることを指摘する。第 6 章では前章で取り上げた様相部分構造論理の形式的体系に対して可能世界意味論を展開するためにトポスを使うことを試みる。様相部分構造論理に対する代数的意味論(Watari et al. 1999)や代数的意味論を介した可能世界意味論(Ono and Komori 1985)に対して、トポスを用いて直接に可能世界意味論を与えようとするものである。様相述語論理の意味論を求める Shehtman and Skvortsov(1990)および Awodey and Kishida(2008)のように位相ブール代数上の層(sheaf)の概念を用いるアプローチが存在する。本論文では圏論の言語を用いてより容易に記述できる前層(presheaf)の概念を用いて意味論を与えることが追求される。その記述の仕方は Moerdijk and van Oosten (2007) を参考に行っている。結果として、前順序集合 $\mathbf{W} = \langle \mathbf{W}, R \rangle$ が解釈のフレームとして与えられたとき、原子文への付値に関して $\mathbf{W}$ 上の前層のトポスは有用で

あることが見出される。その一方で、トポスを用いて当該の様相を解釈することと、推論の際にリソースの数や順序に配慮しなければならない結合子を含む文の真理条件を記述することに関しては、未解決の問題が見出される。