初等トポス理論の射程：集合・圏・論理

課程博士学位申請論文

北海道大学大学院文学研究科思想文化学専攻博士後期課程
深山　洋平

目次

序章

本論文の目的は，現代数学の一分野である初等トポス理論（elementary topos theory）が示唆を持ちうる数学の哲学および論理学の問題領域を提示することにある．初等トポス理論は圏論（category theory）の一部である．圏論の対象である圏とは，集合の全体，群の全体，位相空間の全体といった数学的対象の各種の全体を，それぞれ関数の全体，群準同型の全体，連続写像の全体といった適切な写像の全体と合わせて考えたものである．初等トポス理論は圏論の一階の言語で書かれた公理系を持ち，集合の圏はそれを充足する主要な例の一つである．初等トポス理論が記述するもの，すなわちトポスは，集合の圏が持つ多くの内部構造（直積とそこからの射影，真理値を値とする特性関数等）の対応物を持つ．こうして集合の圏はトポスの例であり，反対にトポスは集合の圏を一般化したものと見ることができる．こうして得られる一般化された集合概念は既存の集合概念とどのような点で異なり，またそれを用いることでどのようなことが可能となるのか．それらがこの論文の根底にある問題意識である．

第 1 章では超限集合論の祖であるカントール（Georg Cantor，1845–1918）の集合概念を検討する．彼はものの集まりに関して「多様体」（Mannigfaltigkeit）や「全体者」（Inbegriff），「集合」（Menge）という語を用いる（Cantor 1882）．我々はそれらの語が指す諸概念を詳細に検討し，それらの不一致を確認する．特に，彼の集合（Menge）の概念には集合論のパラドクスに至る原理が含まれていることが見出される．第 2 章ではカントールが集合の概念を用いて生み出した数の領域に目を向ける．彼は性質を捨象された要素から成る集合としての基数の概念を生み出した．しかしながら，そのような要素を互いに識別して数多性を生じさせることがいかにして可能か，という問題が生じる．ローヴェア（F. William Lawvere，1937–）は基数が成す圏と，基数が抽象されて生じるもととなる空間の圏を対置し，互いを随伴関手で結ぶことで問題の現象を説明した（Lawvere 1994）．彼の説明は問題の解決でなく説明・記述に留まるが，しかし対象に関する情報を増やしつつ探求できる点で有用であることを指摘する．

第 3 章ではカントールに先立つ数学者ボルツァーノ（Bernard Bolzano，1781–1848）もまた種々の集まりの概念を有していたことが示される．それらの中でも「総体」（Inbegriff）

はもっとも規定が少ない，それゆえもっとも多様な構造を含みうる集まりの概念として，彼の主著『知識学』（Bolzano 1837/1987）において導入される．彼において「集合」（Menge）が「総体」よりも規定が多い概念であり，それゆえ「集合」が「総体」よりも下位の概念となることを明確にする．第 4 章では圏論と初等トポス理論の入門的な諸概念を導入し，前章で論じたボルツァーノの集まりの諸概念の体系と，初等トポス理論との比較を行う．トポスの公理系は，公理の付加によって，より規定の多い，一般性が失われたトポスを扱うものとなる．そうして生じるトポス同士の概念的上下関係とボルツァーノの集まりの概念的上下関係を比較する．結果として，両者の上下関係同士の類似は見いだされ，一方でトポスにおける「部分」と「全体」のそのままの対応物がボルツァーノの体系には見出せないことが分かる．

第 1 章から第 4 章までがトポスによって導入される，規定が少ない，一般化された集合概念に関わるのに対して，第 5 章と第 6 章はトポスが内包する論理に関わる．第 5 章は"the two wise girls puzzle"という論理パズルを取り扱う．このパズルにおいては二つの主体が視覚情報や問答によって知識を変化させながら推論を行う．Yasugi and Oda（2002）は，知識を表現するための様相演算子を含む文論理の形式的体系によって，その推論の過程を記述できることを示した．この章では様相演算子を含む部分構造論理（substructural logic）の形式的体系を用いて同じパズルを分析する．先行研究よりも精緻な分析によって，当該のパズルの推論過程を記述するには弱化（weakening）の右規則の使用が本質的であることを指摘する．第 6 章では前章で取り上げた様相部分構造論理の形式的体系に対して可能世界意味論を展開するためにトポスを使うことを試みる．様相部分構造論理に対する代数的意味論（Watari et al. 1999）や代数的意味論を介した可能世界意味論（Ono and Komori 1985）に対して，トポスを用いて直接に可能世界意味論を与えようとするものである．様相述語論理の意味論を求める Shehtman and Skvortsov（1990）および Awodey and Kishida（2008）のように位相ブール代数上の層（sheaf）の概念を用いるアプローチが存在する．我々は圏論の言語を用いてより容易に記述できる前層（presheaf）の概念を用いて意味論を与えることを追求する．その記述の仕方は Moerdijk and van Oosten（2007）を参考にしている．結果として，前順序集合 $\mathbf{W} = \langle W, R \rangle$ が解釈のフレームとして与えられたとき，原子文への付値に関して $\mathbf{W}$ 上の前層のトポスは有用であることが見出される．その一方で，トポスを用いて我々の様相を解釈することと，推論の際にリソースの数や順序に配慮しなければならない結合子を含む文の真理条件を記述することに関しては，未解決の問題が見出される．

第 2 章は深山（2006）に加筆・修正を施したものである．第 5 章は Kitamura et al.（2007）の，第 6 章は Fukayama et al.（2013）の邦訳にそれぞれ加筆・修正を施したものである．後者の二篇について収録を快諾してくださった共著者の北村久博士と中戸川孝治博士に感謝を申し上げたい．

第 1 章

カントールの集まりの諸概念とラッセルのパラドクス

本章では超限集合論の祖であるカントールの集合概念を検討する．彼はものの集まりに関して「多様体」（Mannigfaltigkeit）や「全体者」（Inbegriff），「集合」（Menge）という語を用いる（Cantor 1882）．我々はそれらの語が指す諸概念を詳細に検討し，それらの不一致を確認する．特に，彼の集合（Menge）の概念には集合論のパラドクスに至る原理が含まれていることが見出される．本章でパラドクスから矛盾を導く議論では文論理に対する自然演繹を用いている．採用している体系については前原 （1967, 第 2 章）を参照されたい．ただし「ならば」の記号として $\rightarrow$ の代わりに $\supset$ を，両方向の「ならば」の記号として $\rightleftarrows$ の代わりに $\equiv$ を，矛盾の記号として人の代わりに $\perp$ を用いている．

1.1　カントールの集合概念

カントールは （Cantor 1882, pp.114–115）において集合概念を以下のように規定している．

> 任意の概念領域に属する諸要素の多様体（全体者[1]・集合）を，私は次のようなときによく**定義されている**（*wohldefinirten*）と呼ぶ．それは，それが持つ定義を根拠として，そして排中律という論理的原理の帰結において，その同じ概念領域に属する何らかの対象が，思考された多様体に要素として属するか否かが，ならびに，集合に属する二つの対象が，存在の与えられ方における形式的相違にもかかわらず，互

[1] Inbegriff の訳．Inbegriff は訳が分かれ，後に引用するボルツァーノの邦訳において翻訳者藤田は「集合体」なる語を用いている（Bolzano 1851/1975，邦訳，p.4）．ここでは集合（Menge）との差を明確にするため，Cantor（1885/1966）の邦訳に倣って「全体者」の訳語を用いた．

> いに同一であるか否かが，**内的に確定されている**（*intern bestimmt*）と見なされざるをえないときである．（強調原文）

この定義中に現れるいくつかの概念に対する本論文における理解を明確にすることから始めなければならない．「概念領域」「多様体」「全体者」「集合」はいずれもものの集まりを指しているが，それらは意味において異なっている

1.1.1　概念領域

「概念領域（Begriffssphäre）」なる語は，議論や探求の対象となるものがなす領域として理解する[2]．Cantor （1882, p. 116）の以下のような記述が参考になる[3].

> 多様体の理論は，ここでそれに対して与えられる解釈によると，我々が当面他の概念領域を保留して数学的な概念領域だけを考慮するならば，算術，関数論，幾何学の領域を含んでいる．

ここから概念領域が漠然とした広がりを持つのではなく，ある程度の特定化を許すものであることが分かる．例えば実数に関する理論を構築しようとするとき，その概念領域は個々の実数が為す領域である．但し，そのとき実数の領域自体についての性質，たとえば有理数である，といった事柄は問われえない．そのような問いや探求は実数という概念を対象にできるような，より広い領域において可能である．上の引用からカントールは数学的でない概念領域をも認めていることが読み取られるが，後にカントールの概念領域は「我々の直観または我々の思惟の対象」という広がりを持つに至る（Cantor 1885/1966, p.282）．この領域は実数や自然数の領域と異なり，その外枠を確定できない．それを確定することは領域の外，すなわち我々の思考の外側においてのみ可能であり，しかしながら我々は自らの思考を完全に対象化しえないからである．カントールはそのような概念領域に対しても平然と排中律を適用する．このことは後に見るようにパラドクスの主たる要因となる．

1.1.2　多様体と全体者・集合

「多様体（全体者・集合）」の原文における表現は “Eine Mannichfaltigkeit(ein Inbegriff, eine Menge)” である．単純な解釈はこれら 3 つを並列的と見なし，互いに言い換え可能な概念とすることだが，このことは以下のような理由から困難を含んでいる．村田は

[2] この理解は Young and Young （1972, pp. 145–146），Hallett （1984, pp. 45–46），Tait （2000, p. 5）による．

[3] 但し Hallett （1984, p. 46）による英訳引用からの訳である．

Cantor（1885/1966）の邦訳に収録されているカントールとデデキント（Richard Dedekind, 1831–1916）の往復書簡に対する註（p. 122）で次のように書いている．

> ‘Inbegriff’ は,（たとえば「実数」のような）或る概念領域の対象全体を示す言葉として，おそらく B. ボルツァーノの影響の下で，カントルが初期に（1874 年の論文で）用いた術語であり，カントルの論文においては，むしろ ‘Menge’, ‘Mannigfaltigkeit’ 以上に「集合」と訳すのが最もふさわしい言葉である．

しかしながらカントールが理論の中枢に置いた集合がボルツァーノの全体者だとは必ずしも言えない．ボルツァーノは全体者に関して以下のように述べている[4]．

> 同じ部分を持つという点では一致し，しかしながら異なる側面から，あるいは異なる概念の下で見られたときには異なるものとして現出する全体者が存在し，我々はこの種の差異を「本質的」と呼ぶ．例えば，飲み物の器として考えられる，割れていないコップと割れて破片となったコップである．我々はそのような二つの全体者の間の差異の基礎を，それらの**結合の様式**または**配列の様式**と呼ぶ．ある全体者であって，その基本的な概念が部分に関心を払わず，従ってその部分の順が何ら本質的な差異を生み出さないとき，私はその全体者を集合と呼ぶ．（強調原文）

カントールがボルツァーノから集合や全体者の概念に関して影響を受けているとすると，カントールにおいてはボルツァーノの言う「部分」が「要素」に置き換わっている．これは最も根本的な関係が，全体と部分という関係から，集まりとそれに属するものという関係に置き換わったことを意味している．このことによって理論としての差異も生じる．Tait （1996, pp. 32–33）は上記引用箇所に対して以下のように述べている．

> ……ボルツァーノですら集合の概念を全体者の概念から分離しなかった，と言うことが公正である．特に彼は単元集合を受け入れられなかった．§3 において彼は「なぜなら，もし A が B と同一だとしたら，対象 A と B で構成される全体者について語ることは当然不合理だからである」と書いている．さらに，ボルツァーノは「部分」なる語で集合の要素を指し，要素と集合の関係を部分と全体の関係から完全には区別されないことをも示唆している．

全体と部分という対立において考えるならば，全体を一つの部分に分けたものは，その全体と変わらない．しかし，カントールにおいては要素を一つしか持たない集合とその要素は別のものである．これは明確な差異と言える．そして，この引用の最後の文は問題とな

---

[4] Tait （1996, p. 32）による英語引用からの訳．原著該当箇所は Bolzano（1851/1975，p.3）にある．この訳文は同書の藤田訳とは異なる．

る．確かに要素関係の根底にユークリッド以来の部分と全体の区別を位置付けることはできるかもしれないが，そのためにはボルツァーノとカントールの間の詳細な影響関係を明確にする必要がある．我々はこの問いに関して踏み込まない．当面は以下の事実で十分である．すなわち，ボルツァーノにおいて全体者と集合は区別でき，それをやや変形して，すなわち部分と全体の関係を要素と集合の関係に置き換えて引き継いだカントールにおいても，全体者と集合は区別できる，ということである．区別の基準はそれぞれの同一性の基準であり，集合はその要素の相等であり，全体者はそれに加えて要素の配列の相等までもが要求される．翻って「多様体（全体者・集合)」なる表現を考えれば，全体者と集合を単純な言い換えとして見ることはできない．

多様体（Mannigfaltigkeit）は数学の用語として使われており，それは単純な「集合」の意味ではない．この語の扱いに関して，Cantor（1885/1966）の邦訳で村田が与えている脚註（p.21）には以下のようにある．

> Mannigfaltigkeit は現在では「多様体」と訳されている．これは Riemann が『幾何学の基礎をなす仮説について』(1854）の中で初めて導入した概念で，現行の「多様体」もそこに源をもつものであるが，カントルはこの同じ言葉を，最も一般的な意味での「集合」を示すのに使った．

「最も一般的」の意味するところを「多様体（全体者・集合)」なる表現と合わせて考えれば，既に述べたような差異を持つ全体者と集合を区別なく指す，という解釈が可能である．本論文ではこの解釈を採用する．従って，カントールの集合の定義において多様体に言及される部分は全体者にも集合にも言及されているものと考えることにする．

1.1.3　カントールの集合概念

ここまでの準備を踏まえて，冒頭に挙げたカントールの集合概念への考察にとりかかる．引用した箇所は，もしそれを定義として読むならば，幾分循環的である．規定しようとしているものが多様体がよく定義されている（well-defined）と言える条件であるにもかかわらず，その規定の中に「多様体」「集合」という語が含まれるのは好ましくない．集合概念がなお還元されうるとすれば，せいぜい何らかの性質を満たす「集まり」という概念までであろう．我々は多様体を集合概念よりも広い外延を持つものと考えることにしたので，それを最も基本的な意味での「集まり」と考えることもできるが，敢えてその点に執着することはしない．我々はカントールにおいて集合の定義が精密なものなのかを問い詰めることよりも，循環を恐れず，カントールの言明から，集合と単なる集まりを分かつ性質がいかなるものかを抽出し，それを集合論の原理として明示することを試みる．

カントールの集合概念の規定は以下のようなことを要求している．（1）概念領域に属す

るものが，（2）定義と排中律によって，（2-1）要素として多様体へ帰属することと（2-2）存在の与えられ方と無関係にその要素の同一性が保証されることが，内的に確定されていることである．

（1）に関しては，既に概念領域について見解を述べているので，それに従えば，例えば実数直線上のある一つの実数 r を取り上げてみればよい．

（2）において「定義」と呼ばれるものは，例えば[5]「ある数が超越数であるとは，それが有理整数係数の代数方程式の解にならないことである[6]」といったものと考えられる．すると我々は，r は超越数であるか否か，という問いを立てることができる．カントールはここで排中律を用いる．すなわち，概念領域の至るところで r は超越数であるか否かのどちらかである．このことによって概念領域内から超越数を残らず集めた「超越数の多様体」を構成することができる．もっとも，超越数であるか否かが明確でない実数も存在する．例えば π はカントールの執筆当時は超越数であるか否かが明確ではなかった[7]．しかしカントールの集合概念の規定に従えば，そのことは問題ではない．π が超越数か否かのどちらかであることが重要なのであって，それは排中律によって保証されるから，π が実際に超越数であるか否かは必要条件ではない．このことが（2-1）に関する内的な確定性である．（2-1）が満たされることで一つの多様体が定まる．

（2-2）は，多様体が集合であるための条件として読まれる．これは概念領域に属するものの同一性が明らかならば，当然成り立つように思われる．例えば各実数は同一性を持つから，そこから超越的な実数の多様体を定めてもその要素である実数は同一性を保つだろう．しかし，既に述べたボルツァーノ的な全体者の観点に立てば，これは当然のことではない．コップの破片はそれ自体の同一性を持つ．しかし，それらの破片を要素とし，結合や配列を考慮して多様体を形成したとき，もともと破片であったものは，もはや破片とは言えない．部分同士が結合や配列を考慮して結びついたものは，何らかの秩序を持った新たな一つの部分となっているから，集合のように単純に個々のものの同一性を語ることができない．従って，多様体であって要素の同一性が言えるものは集合であることになる．この議論は具体的な個々の多様体に言及しないから，集合の要素の同一性は内的に確定されていると言える．

以上から，二つのことを集合論の原理として抽出することができる．（2-1）は，ある定義が与えられたとき，概念領域内のものからその定義を満たすようなものの多様体が構成される，という内容を持っていた．このことを**包括原理**と呼ぶ．（2-2）は集合の要素は同一性を持つことを主張していた．すると我々は要素に対して，重複しないように名前をつ

[5] 超越数の例は Young and Young （1972, p. 146），Fraenkel （1953, pp. 17–18）に見られる．
[6] 日本数学会 （1985, p. 759）による．
[7] Young and Young （1972, p. 146）による．尚，日本数学会 （1985, p. 759）によると π の超越性が証明されたのは 1882 年のことである．

けることができる．大抵は概念領域で呼ばれていたように呼ばれるだろうが，必要に応じて変更することもあるかもしれない．さらに要素の名前に言及した形で集合にも名前をつけることができる．要素 $a, b, c, \ldots$ を持つ集合を $\{a, b, c, \ldots\}$ で表す．すると，定義が異なるにもかかわらず要素は等しい複数の集合が見出される．例えば，2 と 3 の公倍数の集合と 6 の倍数の集合は共に $\{6, 12, 18, \ldots\}$ で表される．これを基に，定義の異なる集合は，それらに同じ要素が属しているならば等しいことにする．このことを**外延性原理**と呼ぶ．

二つの原理に論理式による表現を与えておく．$x, y, z, \ldots$ は我々が取り扱っているもの全体，すなわち概念領域及びその領域上の集合全体を走る変項とする．定義は普通「x が〜であることを x が……であることとして定義する」という形で語られる．集合を構成するに当たって，その要素が満たすべき条件は，定義項すなわち「x が……である」ことである．集合を確定する条件「x が……である」を一般に $\varphi(x)$ と書く．概念領域内のもの m が集合 M に属することを $m \in M$ と書く．集合間の相等には等号 $=$ を用いる．これらの語彙によって，包括原理と外延性原理は以下のように書ける．

包括原理（Comprehension principle）

$$\exists y \forall x (x \in y \equiv \varphi(x))$$

外延性原理（Extensionality principle）

$$\forall x \forall y (x = y \equiv \forall z (z \in x \equiv z \in y))$$

1.2　ラッセルのパラドクス

包括原理によって存在が主張される y が一意的に定まることを証明する．$\forall x(x \in b \equiv \varphi(x))$ と $\forall x(x \in b' \equiv \varphi(x))$ の二つの前提から $b = b'$ が導出される．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{a \in b} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(x \in b \equiv \varphi(x))}{a \in b \equiv \varphi(a)}}{a \in b \supset \varphi(a)}}{\varphi(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(x \in b' \equiv \varphi(x))}{a \in b' \equiv \varphi(a)}}{\varphi(a) \supset a \in b'}}{a \in b'}}{a \in b \supset a \in b'}\ 1$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[a \in b']^{2}$}
\AxiomC{$\forall x(x \in b' \equiv \varphi(x))$}
\UnaryInfC{$a \in b' \equiv \varphi(a)$}
\UnaryInfC{$a \in b' \supset \varphi(a)$}
\BinaryInfC{$\varphi(a)$}
\AxiomC{$\forall x(x \in b \equiv \varphi(b))$}
\UnaryInfC{$a \in b \equiv \varphi(a)$}
\UnaryInfC{$\varphi(a) \supset a \in b$}
\BinaryInfC{$a \in b$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$a \in b' \supset a \in b$}
\UnaryInfC{$a \in b \equiv a \in b'$}
\UnaryInfC{$\forall x(x \in b \equiv x \in b')$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall w \forall u(w = u \equiv \forall x(x \in w \equiv x \in u))$}
\UnaryInfC{$\forall u(b = u \equiv \forall x(x \in b \equiv x \in u))$}
\UnaryInfC{$b = b' \equiv \forall x(x \in b \equiv x \in b')$}
\UnaryInfC{$\forall x(x \in b \equiv x \in b') \supset b = b'$}
\UnaryInfC{$b = b'$}
\end{prooftree}
$$

こうして包括原理によって存在が主張される y は φ 毎に一意的に定まるから，我々は一変数関数記号 $\{\_|\varphi(\_)\}$ を導入し，y を $\{z|\varphi(z)\}$ と書くことができる．すなわち，

$$\forall x(x \in \{z|\varphi(z)\} \equiv \varphi(x))$$

が常に成り立つ．

ここで φ を $\_ \notin \_$ とすると

$$\forall x(x \in \{z|z \notin z\} \equiv x \notin x)$$

が得られる．さらに以下の推論を行う．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x(x \in \{z|z \notin z\} \equiv x \notin x)$}
\UnaryInfC{$\{z|z \notin z\} \in \{z|z \notin z\} \equiv \{z|z \notin z\} \notin \{z|z \notin z\}$}
\end{prooftree}
$$

簡潔のために $\{z|z \notin z\}$ を R とすると，上の推論で得られたのは $R \in R \equiv R \notin R$ である．さらに $R \in R$ を α とおくと，$R \in R \equiv R \notin R$ は $\alpha \equiv \neg\alpha$ と書ける．ここから矛盾 $\alpha \wedge \neg\alpha$ が導かれる．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\alpha]^{1}$}
\AxiomC{$[\alpha]^{1}$}
\AxiomC{$\alpha \equiv \neg\alpha$}
\UnaryInfC{$\alpha \supset \neg\alpha$}
\BinaryInfC{$\neg\alpha$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\AxiomC{$\alpha \equiv \neg\alpha$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \supset \alpha$}
\BinaryInfC{α}
\AxiomC{$[\alpha]^{2}$}
\AxiomC{$[\alpha]^{2}$}
\AxiomC{$\alpha \equiv \neg\alpha$}
\UnaryInfC{$\alpha \supset \neg\alpha$}
\BinaryInfC{$\neg\alpha$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\BinaryInfC{$\alpha \wedge \neg\alpha$}
\end{prooftree}
$$

矛盾にいたる過程で立てられた仮定は全て破棄されているから，この矛盾は包括原理と外延性原理という集合論の原理にのみ依存している．

$R \in R \equiv R \notin R$ は，その発見者ラッセル（Bertrand Russell，1872–1970）にちなんで**ラッセルのパラドクス**と呼ばれる．このパラドクスは，その出自からは集合論のパラドクスとは言いにくい面を持つ．ラッセルがパラドクスを見出したのはフレーゲ（Gottlob Frege，1848–1925）の形式論理体系に対してであった．ラッセルはフレーゲへ手紙（Russell 1967, pp. 124–125）によってパラドクスの発生を伝えた．そこではフレーゲの体系におけるパラドクス導出の概略と共に，集合論におけるパラドクス導出の概略も書かれているが，導出のために必要な包括原理や外延性原理が集合論の原理として明示されていない点で不完全である．我々はカントールの集合概念の規定から議論をしてきたので，ラッセルのパラドクスを集合論のパラドクスとして引き受けることができる．

1.3 公理系 MK

ラッセルのパラドクスを始めとする様々なパラドクスが 1900 年前後に相次いで発見され，それらを回避できるように集合論の改訂が進められた[8]．ツェルメロ（Ernst Zermelo，1871–1953）の著作（Zermelo 1908/1967）に始まるそのような改訂はカントールの集合概念を制限し，包括原理を弱める方向性を持っていた．

カントールにおいては概念領域に属するいかなるものも，定義が与えられれば，その定義から構成される集合の要素であるか否かのどちらかであることが排中律によって確定していた．しかしカントール自身もパラドクスを認識し[9]，異なる主張をするようになる．以下の引用は 1899 年のカントールからデデキントへの書簡の一部である（Cantor（1885/1966）邦訳付録（pp.122–123）からの引用）.

> われわれが，いくつかの物（Ding）からなる一個の確定した多者（eine bestimmte Vielheit）（一個のシステム（ein System），一個の全体者（ein Inbegriff））という概念から事を始めるとき，私は二種類の多者（私は常に，確定した多者というつもりですが）を区別する必要を認めます．
>
> つまり一方の多者は，その**すべての**要素の„一括共存 (Zusammensein)“という仮定が矛盾を導く，というふうな性質をもちうるもので，その結果，この多者を一つの一者（Einheit）として把握すること，つまり„一つの完結した物 (ein fertig Ding)“として，把握することはできません．このような多者を，私は**絶対無限的多者**（*absolut unendliche Vielheit*）または**非整合的多者**（*inkonsistente Vielheit*）と名づけます．
>
> 容易に分るように，たとえば„一切の思考可能なものの全体者 (Inbegriff)“はその

[8] 各パラドクスに関する歴史的な記述は Fraenkel and Bar-Hillel（1958, 第 1 章）に詳しい．
[9] Cantor（1885/1966）邦訳所収の村田による解説（pp. 155–156）による．

ような多者の例ですし，なお別の例もやがて出てきます．

　これに反して，或る多者の要素の全体が矛盾なしに„一括共存する (zusammen-seiend)“と考えられ，したがって，その多者を„**一つの物** (Ding)“にまとめて把えることが可能なとき，私はその全体を**整合的多者**（*konsistente Vielheit*）または„集合 (Menge)“と名づけます．（フランス語，イタリア語では，この概念は „ensemble“, „insieme“と表されていますが，この表現は適切です．）（強調原文）

カントールはここで集合概念を制限しており，その条件は要素の一括共存が矛盾を導かないことである．ツェルメロ以降の公理的集合論の流れは，このカントールの思想を基にしながら大きく分けて 2 つに分かれる．ツェルメロとフレンケル（Abraham Fraenkel, 1891–1965）の名を冠する公理系 **ZF** は，新たな意味での集合のみを対象として取り扱うことができるように公理を設定する．他方，フォン＝ノイマン（John von Neumann, 1903–1957）・ベルナイス（Paul Bernays, 1888–1977）・ゲーデル（Kurt Gödel, 1906–1978）の名を冠する公理系 **vNBG** は対象として整合的・非整合的を問わない一般的な多者，現在**クラス**（*classes*）と呼ばれるものをとる．新たな意味での集合はクラスの一種として導入される．

　本節では集合論のパラドクスを回避するために採られた方法の実例として，Kelley（1955）が補遺で発表した公理系 **MK** を紹介する[10]．但し，本論に必要な範囲での説明であり，かつ **MK** を基に書かれた Monk （1969）を参考にして簡略化を計っている箇所もある．まず **MK** の特徴と未定義のまま用いる記号群を導入し，次いで公理群と諸定義を必要な範囲で導入する．最後に我々は前章で実際に行った仕方でラッセルのパラドクスの再現を試み，それが成功しないことを見る．

1.3.1　公理，公理図式，定義

　MK は公理系 **vNBG** の系列にあり，それらに共通する特徴は，変項の値が集合と区別されたクラスの領域を走ることである．その系列内における **MK** の特徴は，有限個の公理に加えて公理図式を持つことである．変項として我々は $x, y, z, \ldots$ を用いるが，これらはクラスの名を代入しうるものとして理解する．我々は以下の記号を未定義で用いることにする．すなわち，論理演算子，$=$，$\in$ である．$=$ と $\in$ は，その両側にクラスの名が置かれる何らかの二項関係の記号である．これらに対して我々は読み方を与える．それぞれ $=$ は「～は……に等しい」，$\in$ は「～は……に属する」と読むことにする．

　$=$ の使われ方は以下の公理で規定される．

[10] Kelley （1955）の謝辞によると，この公理系は A. P. Morse の未発表論文から許諾の上収録された．**MK** の名はこのことに由来する．

外延性公理（**Axiom of Extent**）

$$\forall x \forall y(x = y \equiv \forall z(z \in x \equiv z \in y))$$

vNBG 系の集合論では集合はクラスの一種として定義される．「〜は集合である」という述語を M(_) で表すことにすると，それは以下のように定義される．

定義（M(_)）

$$\forall x(\mathrm{M}(x) \equiv \exists y(x \in y))$$

すなわち，クラスが集合である条件は，そのクラスが何らかのクラスに属することである．この定義はカントールの集合概念を弱めている．カントールにおいては，概念領域内のいかなるものも，それが何らかの性質を満たすか否か，互いに区別されるか否かがそれぞれ明確であれば，それを要素とする集合が存在すると主張された．しかし集合が上のように定義されると，集合でないクラス，すなわちそれが属しうるクラスが存在しないクラスを考えることができる．そのようなクラスは**真クラス**（*proper classes*）と呼ばれる．真クラスの具体的な例は本節の最後に現れる．

次の公理図式が **MK** には本質的である．

クラス化公理図式（**Classification Axiom Scheme**）

$$\exists y \forall x(x \in y \equiv \mathrm{M}(x) \land \varphi(x))$$

これは公理図式であるから，φ を一つ定める毎にクラス化公理が一つ定まる．性質 φ を扱い，そこから集合ないしはクラスが構成されることが保証される点で，包括原理とクラス化公理図式は共通性を持つ．包括原理において存在が保証された集合が外延性原理によってその一意性を証明できたように，クラス化公理図式によってその存在を保証されたクラスは外延性公理を用いてその一意性を証明できる．一変数関数記号 $\{\_|\varphi(\_)\}$ を導入し，$\{z|\varphi(z)\}$ でそのクラスを指すことにする．これを先の公理図式に戻すと，

$$\forall x(x \in \{z|\varphi(z)\} \equiv \mathrm{M}(x) \land \varphi(x))$$

が得られる[11].

[11] このクラス化公理図式の導入の仕方はモンクによる．ケリーは $\{\_|\varphi(\_)\}$ を公理系における未定義記号として導入し，クラス化公理図式をその記号の使用を規定するものとして位置付けているように読める（Kelley 1955, p. 253）．ケリーのようなアプローチは，Quine （1969, pp.15–21）に見られるようにクラスの存在にコミットせずに理論を構成するといった意図の下では有効であろう．もっとも，ケリーは量化可能な変項の値としてクラスを考えている（Kelley 1955, p.252）．議論を単純に，かつ前章の内容との比較を容易にするため，Monk （1969, pp. 16–17）のアプローチを採用した．この差異がパラドクス回避の仕方に影響を与えることはない．

この公理図式の導入に際してケリーは以下のように述べている[12].

> この公理図式は確かに通常の直観的なクラスの構成だが，それは「u は集合である」という要求を除いてである．この要求は極めて明確に不自然であり直観的にまったく望ましくない．しかしながら，それが無ければある矛盾が外延性公理を基礎とするだけで構成されうる．……集合の存在に関するごくわずかな技術的な作業を必要とする，厄介なこの問題は，単に明確な不整合を避けるために払われる対価である．明確な不整合はかなり少なくできる．

ケリーが感じている不自然さは，クラスを構成するものが，なぜ変項が表すクラスでなく集合でなければならないのか，ということである．しかし事実，後に見るようにラッセルのパラドクスの **MK** における回避の核心はこの公理図式にある．カントールの集合論において包括原理から集合の共通部分や和，差などが定義されたように，クラス化公理図式からはクラスの共通部分や和，差などが定義され，さらに他の公理と合わせて集合の代数が可能になるが，包括原理からラッセルのパラドクスが導かれることは我々は既に見ている．クラス化公理図式もその一見不自然である部分を取り除けばパラドクスに陥るというケリーの言明が確かなものであることは次節で明示される．

本論の目的には以上の公理及び公理図式で十分であるが，以下に **MK** の全ての公理と公理図式を列挙しておく．変項と論理演算子，=，∈，既に定義した $\{\_|\varphi(\_)\}$ と M 以外の記号は，それらの記号から定義される[13].

外延性公理	$\forall x \forall y(x = y \equiv \forall z(z \in x \equiv z \in y))$
クラス化公理図式	$\exists x \forall y(y \in x \equiv \mathrm{M}(y) \wedge \varphi(y))$
部分集合公理	$\forall x(\mathrm{M}(x) \supset \exists y(\mathrm{M}(y) \wedge \forall z(z \subseteq x \supset z \in y)))$
和集合公理	$\forall x(\mathrm{M}(x) \supset \forall y(\mathrm{M}(y) \supset \mathrm{M}(x \cup y)))$
置換公理	$\forall f(\mathrm{Fnc}(f) \wedge \mathrm{M}(\mathrm{dom}(f)) \supset \mathrm{M}(\mathrm{ran}(f)))$
合併公理	$\forall x(\mathrm{M}(x) \supset \mathrm{M}(\bigcup x))$
正則性公理	$\forall x(x \neq \emptyset \supset \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$
無限公理	$\exists y(\mathrm{M}(y) \wedge (\emptyset \in y \wedge \forall x(x \in y \supset x \cup \{x\} \in y)))$
選択公理	$\exists c(\mathrm{Fnc}(c) \wedge \forall x(x \in \mathcal{U} - \{\emptyset\} \supset c(x) \in x))$

[12] 引用中「u は集合である」とあるのは，公理図式における $\forall x$ を u で例化したものに対して言及しているためである．

[13] 西村・難波（1985, p. 12）は公理のいくつかを推論規則として導入している．ここではその方法は避け，推論規則は前節のものと揃えている．

1.3.2　MK におけるラッセルのパラドクスの回避

クラス化公理図式が包括原理と類似性を持つことは既に述べた．この事実から **MK** においてラッセルのパラドクスの再現を試みることができる．クラス化公理図式において φ を $\_ \notin \_$ とすると，クラス化公理

$$\forall y(y \in \{x|x \notin x\} \equiv \mathrm{M}(y) \land y \notin y)$$

が得られる．さらに以下の推論を行う．

$$\dfrac{\forall y(y \in \{x|x \notin x\} \equiv \mathrm{M}(y) \land y \notin y)}{\{x|x \notin x\} \in \{x|x \notin x\} \equiv \mathrm{M}(\{x|x \notin x\}) \land \{x|x \notin x\} \notin \{x|x \notin x\}}$$

簡潔のために $\{x|x \notin x\}$ を R と書けば，上の推論で得られた結論は $R \in R \equiv \mathrm{M}(R) \land R \notin R$ と書ける．前章同様に $R \in R$ を α と置けば，$R \in R \equiv \mathrm{M}(R) \land R \notin R$ は $\alpha \equiv \mathrm{M}(R) \land \neg\alpha$ となる．そしてここからは矛盾が導かれない．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\mathrm{M}(R)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{\alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{\alpha} \qquad \dfrac{\alpha \equiv \mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}{\alpha \supset \mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}}{\mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}}{\neg\alpha}}{\bot}}{\neg\alpha}\,1}{\mathrm{M}(R) \land \neg\alpha} \qquad \dfrac{\alpha \equiv \mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}{\mathrm{M}(R) \land \neg\alpha \supset \alpha}}{\alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{\alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{\alpha} \qquad \dfrac{\alpha \equiv \mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}{\alpha \supset \mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}}{\mathrm{M}(R) \land \neg\alpha}}{\neg\alpha}}{\bot}}{\neg\alpha}\,2}{\dfrac{\bot}{\neg\,\mathrm{M}(R)}\,3}$$

この推論図から，クラス化公理図式の「不自然」な部分の効用を見ることができる．クラス化公理図式の中に $\mathrm{M}(\_)$ の部分が無ければ，クラスの領域においてラッセルのパラドクスが発生する．我々の推論によって最終的に得られたのは，R が集合でないクラス，すなわち真クラスとなることである．この結果から，ラッセルのパラドクスが発生する領域が真クラスの領域に限られ，新たに定義された集合の領域には一つの安全性が確保されたことになる．

以上が公理的集合論においてラッセルのパラドクスが回避されることの一つの実例である．しかし，このような議論ではパラドクスが回避されているとは言えない，という反論はありうる．カントールの集合論においてラッセルのパラドクスを発生させた手順に従うと **MK** ではパラドクスが起こらない，ということが言えただけであって，いかなる手段によっても起こらないという保証は無いではないか，という反論である．しかし，ある体系においてある論理式—— たとえば $R \in R \equiv R \notin R$—— が証明できない，ということは，その体系の内部では証明できない．この限界によって，体系の外部へと飛躍しない限り，我々の議論による回避は一つの割り切りに留まらざるをえない．この困難は体系の外部でも十分には解消されない[14]．この意味でラッセルのパラドクスは，パラドクスとしての意義を失わない．発見から 100 年を過ぎた今もなおパラドクスと言われつづけているのは，まさに上のような返答できない反論が可能なためであると言える．

1.4　まとめ

本章ではまずカントールの集合概念を詳細に検討した．カントールの「集合」は一般的な集まりである「多様体」であってその要素について同一性が言えるものであった．次いで我々はカントールの集合概念の特徴からパラドクスが生じることを確認し，公理的集合論においてパラドクスの発生がブロックされていることを見た．カントールの集合の領域は基数の領域が生じるもととなる．このことは第 2 章において圏論の言語による記述を与えられる．また「集合」より一般的な集まりの概念についてはさらにボルツァーノのものを第 3 章で検討することになる．

[14] Mendelson（1997, p. 287）によれば **MK** の無矛盾性は “a risker gamble” である．これは，包括原理よりは弱くとも，依然として強力なクラス化公理図式によるのであろうが，その意味するところを詳細に理解することは後の課題としたい．

第 2 章

随伴関手による基数概念の理解について

本章ではカントールが集合の概念を用いて生み出した数の領域に目を向ける．彼は性質を捨象された要素から成る集合としての基数の概念を生み出した．しかしながら，そのような要素を互いに区別して数多性を生じさせることがいかにして可能か，という問題が生じる．ローヴェアは基数が成す圏と，基数が抽象されて生じるもととなる空間の圏を対置し，互いを随伴関手で結ぶことで問題の現象を説明した（Lawvere 1994）．彼の説明は問題の解決でなく説明・記述に留まるが，しかし対象に関する情報を増やしつつ探求できる点で有用であることを指摘する．

なお本章で用いる圏論の語彙のうち，圏と関手，随伴等については 4.1 に定義を記した．その一方で集合論と位相空間論の基本的な語彙に関しては説明を割愛してある．

2.1　カントールの基数概念と，基数の単位をめぐる問題

基数（cardinal number / Kardinalzahl）とは，「一つ，二つ，……」とものの数を数えるときに用いられる数であり，「一番目，二番目，……」とものを順序づけるときに用いられる（順）序数（ordinal number / Ordnungszahl）と対比される．カントールは 1895 年から 1897 年にかけて発表された「超限集合論の基礎に対する寄与」で，冒頭で集合の概念を導入した後に，集合から基数を定義する．カントールは集合 M の基数を以下のように導入する（Cantor 1895/1966，p. 282）．

> 我々はある一般概念を「濃度」または「基数」と名づける．その一般概念は，我々の能動的な思考力を用いて，集合 M から，その様々な元 m の性質と，それらが置かれてある順序が抽象されることによって生ずる．

> この二重の抽象作用の結果である M の基数または濃度を，我々は $\bar{\bar{M}}$ で表記する[1].

ここで基数は，当該の集合の各々の元が有する属性と，各々の元が他の元との間で担う関係とを捨象することによって，その集合の元たちの間の質的差異を失わせることによって，量的差異のみを際立たされたものとして定義されている．このプロセスを，カントールに倣って「二重の抽象」と呼ぶことにする．二重の抽象を経て質的差異を捨象された元は，集合に対応づけられる量を表現するための単位（unit / Eins）として扱われる．単位が一つしかない集合，つまり任意の一点集合の基数は 1 と呼ばれ，任意の一点集合に単位を一つ付けくわえた集合の基数は 2 と呼ばれる．このようにして，順次集合から基数が定義される．

ローヴェアは，このプロセスによって生ずる次のような現象に注目する（Lawvere 1994, pp. 5–6）．カントールは基数もまた単位のみから成る集合と考えている（Cantor 1895/1966，p. 283）．彼は基数の定義に先立って与える集合の定義の中で，集合の元はよく区別された（wohlunterschiedenen）ものとしているので（Cantor 1895/1966，p. 282），基数の単位は互いに区別されるはずである．しかしながら，そのとき各点が区別される根拠は何であろうか．基数の定義からして，その元である単位は互いを区別する性質を捨象されている．「性質によって識別できないものは同一である」という原理を退けない限りは，それら単位どもは一致すると言わざるをえない．したがって，基数の単位は，互いに区別されるが各々を識別できないという，矛盾めいた性質を有することになる．

ローヴェアはこの性質を「生産的な意味での矛盾（contradiction in a productive sense）」（Lawvere 1994, p. 6）と考え，ツェルメロ以降の公理的集合論におけるように敢えて「単位」に言及せずに基数を特徴付ける手法に批判的な態度をとる．現在の集合論で基数を特徴付ける仕方は，たとえば公理的集合論 ZFC において順序数を導入した後で特殊な順序数として基数を定義する手法などがある[2]．しかし，基数の定義の本質は，集合 M と N が与えられたときにそれらの基数が同一であることを M と N の間に全単射が存在することとして特徴付けられることにあるため，基数を定義する手法そのものは複数あってよい．それにもかかわらずローヴェアが敢えてカントールの手法をとりあげるのは，カントールが基数の概念を考案した背景に圏論の発想の萌芽を見るからである．彼のまとめによると，カントールは様々な幾何学的対象の間に成立しうる同形の概念から自身の基数の概念へと至っている（Lawvere 1994, pp. 6–7）．これは上で述べたような現在の集合論におけ

---

[1] 引用先では得られる基数の表記が $\bar{\bar{M}}$ でなく M となっているが，これは著作集収録時のミスと思われる．

[2] いわゆる initial ordinal としての定義．順序数 a が基数であることは，a より小さいすべての順序数と a の間に全単射が存在しないこととして定義される．そして集合 M の基数は，M との間に全単射が存在するような基数として定義される．Fraenkel and Bar-Hillel（1958, pp. 95–98）は，この手法を含めた複数の定義の仕方をまとめている．

るアプローチでは見られない事柄である．ローヴェアはこのことを，カントールの意味での基数が成す圏が様々な幾何学的対象が成す圏に関わると解釈し，それゆえ基数が有する性質をそれら二つの圏に言及しながら記述する．つまり，現在用いられる基数の特徴付け方――「単位」に言及せずに基数を特徴付ける手法――に対する彼の態度は，そのような特徴付けがカントールの意図を的確に表現できておらず，その一方で圏論はカントールの意図を表現するのに適しているというものである．したがってカントールによる基数の定義に付随する矛盾めいた性質もローヴェアにとっては的確に記述すべき事柄であり，忌避すべきものではない．このような意味でローヴェアはカントールの側に立ち，カントールより後の集合論者と距離をとっていると見られる．

2.2　随伴関手を用いた基数の表現

この節では，前節で述べた基数の矛盾めいた性質を，ローヴェアが圏論の諸概念を用いて記述した方法の概観を与える（Lawvere 1994, pp. 7–10）．彼が用いる主な道具立ては，二つの圏と，それらの圏の間の三つの関手である[3]．

圏 **M** は二重の抽象を経る**前の**集合の圏である．したがって **M** の対象は，何らかの意味で豊かな構造を有する集合である．そこに入るべき構造に関して，彼はいくつかの例を挙げるに留めている．ここでは，挙げられた例の中から位相空間と連続写像の圏を念頭に置いて議論を進めることにする．

二重の抽象を経る前の集合の圏である **M** に対して，圏 **K** は二重の抽象を経た**後の**集合つまり基数の圏である．両者は構造の複雑さにおいて異なるにせよ「集合」を対象とする圏であるから，混乱を防ぐために両者の対象に異なる呼び名を与えておく．以後，**M** の対象は「空間」と呼び，**K** の対象はそのまま「基数」と呼ぶことにする[4]

上に述べた言い方を用いると，二重の抽象とは各空間に対してその空間の基数を対応させる働きと言うことができる．ローヴェアはこの働きを **M** から **K** への関手 points として表現する．つまり points は **M** の各対象 M に対して M の基数を割りあて，**M** の各写像に

[3] 圏と関手の詳細な定義は 4.1 を参照されたい．本章で扱われる範囲では，圏（category）とは，構造が入った集合と，それら集合間の，構造を保存する関数とを共に考えたものである．このとき前者は当該の圏の対象（object），後者は当該の圏の射（arrow）あるいは写像（mapping）と呼ばれる．たとえば，群と群準同形写像，半順序集合と単調写像は圏を成す．構造が入っていない集合も，空虚な構造が入っていると見なすことで，関数と共に圏を成すと考えられる．この場合，関数が保存する構造は，元の同一性であると考えられる．（X と Y を集合とし，f を X から Y への関数とすると，X の任意の元 x_1 と x_2 に対して，$x_1 = x_2$ ならば $f(x_1) = f(x_2)$ は自明に成りたつ．）関手（functor）とは，圏と圏の間に与えられる射である．たとえば，群の圏から集合の圏に対して，各群から群の構造を取り除く関手を考えることができる．また，構造が入っていない集合の圏から半順序集合の圏に対して，構造を増やす自明な関手を考えることができる．（集合 S の元 s_1 と s_2 に対して $s_1 \leq s_2 \iff s_1 = s_2$ で二項関係 $\leq$ を定義すると，$\leq$ は半順序となる．）

[4] ローヴェアは当該の論文において **M** の対象を *Menge* と呼び，**K** の対象を *Kardinal* と呼ぶ．

対しては，その同じ写像を集合間の関数として割りあてる．

さらに，**K** から **M** への二つの関手 discrete と chaotic が導入される[5]．関手 discrete は **K** の各対象 K に対して離散位相空間 $(K, \mathcal{P}(K))$ を割りあて，**K** の各関数に対しては，その同じ関数を連続写像として割りあてる[6]．このように定めた関手 discrete は，上に述べた関手 points の左随伴関手（left adjoint functor）となる．すなわち，**M** の対象 M と **K** の対象 K が与えられたとき，discrete(K) から M へのすべての連続写像から成る集合と，K から points(M) へのすべての関数から成る集合との間に一対一対応が存在する．ここで空間 M が与えられたとしよう．points(M) は基数なので，上の一対一対応の K に代入できる．そうして特に points(M) 上の恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathrm{points}(M)}$ に対応する **M** の射を考えると，連続写像 discrete(points(M)) $\longrightarrow M$ が得られる．この射は後の議論で用いられる．

続いてローヴェアは関手 chaotic を導入する．関手 chaotic は **K** の各対象 K に対して密着位相空間 $(K, \{\emptyset, K\})$ を割りあて[7]，**K** の各関数に対しては，その同じ関数を連続写像として割りあてる．このように定めた関手 chaotic は，関手 points の右随伴関手（right adjoint functor）となる．すなわち，**M** の対象 M と **K** の対象 K が与えられたとき，points(M) から K へのすべての射から成る集合と，M から chaotic(K) へのすべての射から成る集合との間に一対一対応が存在する．前の段落で行った議論と同様に，空間 M が与えられたとし，K に基数 points(M) を代入することで，恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathrm{points}(M)}$ に対応する **M** の射 $M \longrightarrow$ chaotic(points(M)) が得られる．この射もまた後の議論で用いられる．

ここで各関手の定め方からして，合成関手 points $\circ$ discrete と points $\circ$ chaotic は，共に **K** の恒等関手と同形になる．先の二つの各段落の最後に得た射に points を作用させることで，最終的に以下の二つの一対一対応が得られる．

$$\mathrm{points}(\mathrm{discrete}(\mathrm{points}(M))) \simeq \mathrm{points}(M)$$
$$\mathrm{points}(M) \simeq \mathrm{points}(\mathrm{chaotic}(\mathrm{points}(M)))$$

これは所与の空間 M の基数がさらに二つの表現を有することを示している．discrete(points(M)) は離散位相空間なので，points(discrete(points(M))) はその離散位相空間の点の集まりである．したがって，前者の一対一対応は M の基数がある離散位相空間の基数で表現されることを主張する．他方で後者は M の基数がある密着位相空間の基数で表現されることを主張する．ローヴェアはこれら二つの表現それぞれに，ある含意を見て取る．彼によると「離散位相空間では点が区別され，その一方で連結であるよう

[5] これら二つの関手についてローヴェアは定義を明確に述べていないため，以下の記述は彼の議論を整合的に理解するための再構成を含む．

[6] $\mathcal{P}(K)$ は K のべき集合 $\{K' \mid K' \subseteq K\}$ である．割りあてられる写像の連続性は，そのドメインに離散位相が入っていることから直ちに出てくる．

[7] ローヴェアは関手 chaotic が codiscrete とも呼ばれると述べており（Lawvere 1994, p. 9），彼の議論においてはそれらが混在している．本稿では使用頻度が高い chaotic で表記を統一した．

な chaotic space においては点は区別できない」（Lawvere 1994, p. 9）[8]．両者の違いは "cohesion" の程度の差として説明される．"cohesion" は「変化」（variation）とともに，圏の対象が有する構造の複雑さに言及する際にローヴェアが用いる語である．

圏の対象どもが有する構造の複雑さに応じて，その対象の元を識別できるか否かに影響が出る，という論点に対して直観的な理解を得るには，次のような簡単な例でも有効である．ある対象が有する構造の複雑さは，対象間の射の数に制限を生む．構造が入っていない集合の圏の場合は，射は関数であればよい．しかし，たとえば群と群準同形写像の圏を考えると，その圏の射は関数であるのみならず，群準同形写像としての性質を有するものでなければならない．したがって，任意の群の間の準同形写像は単なる関数よりも数的に少なくなる．圏論では対象の元を射で表現するので[9]，射の数が減ることは，元が減ることを意味する．事実，任意の群には元が一つしかないことになる．ローヴェアは chaotic な空間に対して「cohesion の度が過ぎている」（Lawvere 1994, p. 9），すなわちその空間の構造が非常に複雑なものであると言っているので，それゆえに元の同定が妨げられていると考えられる．この一方で，離散的な空間では，射に課される制限に影響されることなく空間の各元を指定できるので[10]，その各元は区別されると言ってよい．かくして，M の基数，discrete(points(M)) の基数，chaotic(points(M)) の基数はみな「同じ」であるにもかかわらず，discrete(points(M)) の基数の単位は区別され，chaotic(points(M)) の基数の単位は区別できないことが結論される．

2.3　ローヴェアの方法の意義

この節では，上で見たローヴェアの方法論の意義を検討する．元々の問題は，基数の単位が互いに区別されるとともに区別できない，という点にあった．その状況を記述するために彼が行ったことの核心は，基数の圏 **K** の内部だけで問題を考えずに，より複雑な構造を有する集合を対象とする圏 **M** を引きあいに出したことである．互いに随伴関係に置かれる三つの関手を設定することと，それらを用いて **M** のある対象 M の基数に複数の異なる表現を与えることは，**M** の設定があってはじめて可能である．

M が果たしている役割を一言で言えば，それは所与の基数に関する情報を増加させることであろう．彼の議論の流れを振り返ると，**K** において基数の単位の識別可能性が疑

[8] 我々は chaotic space として密着位相空間を想定しており，密着位相空間は連結である．

[9] ある圏が与えられたとき，その圏の任意の対象からちょうど一つの射が存在する対象を，その圏の終対象（terminal object）と呼ぶ．たとえば，構造が入っていない集合と関数の圏の終対象は任意の一点集合であり，群と群準同形写像の圏の終対象は単位元のみから成る群である．ある対象の元は，終対象をドメインとし，その対象をコドメインとする射として定義される．詳しくは 4.1.4 節および 4.1.6 節を参照．

[10] 一点集合に入る位相は一種類だけ存在し，それは離散位相である．この一点空間からの任意の離散空間への任意の関数は連続写像なので，その射を用いて空間の元を指定すればよい．

われている，という状況が与えられている時に，その識別可能性が明確に現れている（**K** の対象と異なり，その元を区別することができたりできなかったりする）ような適切な圏 **M** に言及し，再び議論の舞台を **K** に戻すという議論の組みたてが為されている．M の基数 points(M) は，**K** から二通りの経路で **M** を経て **K** へと写像されて帰ってくるが，そのときには各々が異なった情報を付加されており，それにもかかわらず，写像される前のものを含めた三者は「同じ」ものであることが帰結される．こうして増加された情報によって，問題となっていた事柄の記述を得るのが，ここまで述べてきたローヴェアの方法論であると言える．

このように彼の方法論を総括することで，これを利用して集合論の基礎を問う方法を考えることができる．以下，構造が入っていない集合を「抽象的集合」と呼ぶことにしよう [11]．集合の本性への問いは，抽象的集合の本性への問いを含んでいる．抽象的集合の圏をローヴェアの議論に現れる **K** と同一視すると[12]，ローヴェアが基数の単位に対して試みた探求は，そのまま抽象的集合の元の性質に対する探求となり，そして彼の方法は，随伴関係にある複数の関手を用いて抽象的集合の元に関する情報を増やすものと理解できる．付加される情報の種類は用いられる関手に依存し，用いられる関手がどのようなものであるかは **M** のとり方に依存するから，結局のところ関心は複雑な構造を有する対象から成る圏 **M** に向けられる．つまり，どのような **M** が抽象的集合のどのような性質を明らかにするのか，というアプローチが可能であると考えられる．ローヴェアが注目した性質は「基数の単位は互いに区別されるとともに区別できない」という，矛盾した性質であり，彼の方法はその興味深い状況を記述するという目的に対して有効に働いていると見てよい[13]．

2.4　まとめ

ローヴェアがカントールの基数の単位の同一性に関して与えている圏論による記述を取り上げ，そこで使われている方法を見た．彼が用いた方法の核心は，複雑な構造を有する対象から成る圏を考え，その圏と基数の圏とを結ぶ，随伴関係に置かれた複数の関手の働きによって，基数について述べうる情報を増やすことにあると言える．基数の領域はより複雑な対象からなる領域への言及を通して，より豊かに語ることができる．これは異なる数学の領域を結びつける圏論の手法が数学の基礎の議論において使われた一例と言える．

[11] 抽象的集合（abstract set）はローヴェアが様々な著作で用いる語であり，“cohesive set” や “variable set” と対置される．

[12] この同一視が常に可能というわけではないことをローヴェアは強調しているが（Lawvere 1994, p. 12），その条件については本稿では扱わない．

[13] Rosebrugh and Wood（1995）は，ここで示したローヴェアの方法を 2 圏（定義は Mac Lane（1998, p.272）を参照）の中で扱うことを考えている．

第 3 章

ボルツァーノの集まりの諸概念

本章ではカントールに先立つ数学者ボルツァーノ（B. Bolzano）もまた種々の集まりの概念を有していたことが示される．それらの中でも「総体」（Inbegriff）[1]はもっとも規定が少ない，それゆえもっとも多様な構造を含みうる集まりの概念として，彼の主著『知識学』（Bolzano 1837/1987）において導入される．彼において「集合」（Menge）が「総体」よりも規定が多い概念であり，それゆえ「集合」が「総体」よりも下位の概念となることを明確にする．

テキストは『知識学』（*Wissenschaftslehre*）§82 から §86 と，『無限の逆説』（*Paradoxien des Unendlichen*）（Bolzano 1851/1975）§3 と §4 を用いる．『知識学』の参照ページは全集（Berg 1987）のものである．

3.1　総体と部分

はじめに総体の概念が導入される．総体とは「複合をもつもの」であり，その複合の仕方がどのようであるかは問われない．次いで総体の概念から部分の概念が導入される．部分とは総体を成す諸対象である．具体的にそれらの諸概念がどのように導入されるかを見ていくことにする．

3.1.1　総体

ボルツァーノは総体（Inbegriff）を次のように定義する（Bolzano 1837/1987，§82.1，pp. 197–198）．

> ……諸事物の総体というもので，それらの結合（Verbindung）あるいは合一（Ver-

[1] ボルツァーノの意に沿うように訳語を与えた．

> einigung），共存（Zusammenseyn），それら諸事物が部分（Theile）として現れる全体（Ganzes）などの語でも表現できるものと全く同じものを理解する．しかも，総括される諸事物がここでいかなる順序と連なりで現れるのか，つまり，一般にそれらの下には唯一つのそのような順序しかなく，かつそれしかありえないのかは，単なる総体の表象においては未だ決して確定されるべきでない．この概念が単純であるか，ことによると部分から成るのか，私はここでも確信を持って断定しようとは思わない．私はしかし，それは完全に単純なのではなく，ごく少数の部分から成る概念だと考える．**総体**（*Inbegriff*）とはすなわち，私には，複合をもつものに他ならないと思われる．しかし私がここで**複合**（*Zusammengesetztheit*）という語で表現する，この抽象的なもの，言い換えれば概念は，さらなる分析がほぼ不可能であると思われる．（強調原文）

ここで「順序」（Ordnung）と並記される「連なり」（Aufeinanderfolge）なる語が何を示しているかは明示されていないが，後に引用する箇所との関連で，諸々の構成部分が直接的に結びついているか，間接的に結びついているかの別を示すと解する．例えば三つの対象 A，B，C に関して，A と B，B と C の間にそれぞれ結びつきがあるとすれば，A と C の間に直接的な結びつきがないとしても，B を介した間接的な結びつきがあると言いうる．しかしそれらの総体を考えるときは，結びつきに関する直接的・間接的の区別はしない．つまり，A，B，C が総体を成していることから理解されるべきなのは，単にこの三者が結びついている，ということだけである．また彼はここで「複合」という語が示す概念が分析不可能であることを示唆しているが，これは後の著書『無限の逆説』では，「我々の理性がもつ最も単純な概念の一つ」であり，接続詞「と」（und）の基礎にある概念として言及される（Bolzano 1851/1975，§3，p.2）．つまり我々が二つの対象 A，B について「A と B」などと口にするときには，我々は既にそれらからなる総体を考えていることになる．我々がよく考える総体として，ボルツァーノは「名前で示された（namentlich angegebener）諸対象 A，B，C，D，……の総体」を取り上げる（Bolzano 1837/1987，§82.2，p.198）．この総体を考えることと，個々の対象 A，B，C，D，……を別々に考えること，あるいはそれらを同時に考えることは異なると言われる．これは後者のいずれにも，総体の要件である複合の概念が含まれていないからだろう．さらに，その総体が「A と B」，「A と B と C」，「A と B と C と D」，……という仕方で順次複合の概念を伴いつつ成立するという考えも退けられる．彼は次のように述べる（Bolzano 1837/1987，§82.2，p.199）．

> ……表象 A，B，C，D，……のうち各々二つの間の結合の概念が現れるとしたら，そのような各総体の個別諸部分の間に位置を占めるつながりは，結びつけられた対象のうち唯一つのもののみ，例えば A が唯一の第二のもの B と，そしてそれらの両者から成る総体は再び唯一の第三のもの C とのみ，等々，直接に結びつくような

> 仕方でなければならないだろう．しかしそうではなく，単に我々が対象 A，B，C，D，……がまとめられた総体を表象することによっては，そのつながりがどのようであるか，つまりどのような順序でそれらが結びつけられるか，それらのうちのどれが直接につながり，どれが間接的にのみつながるか，が決定されない．それゆえ私が思う所むしろ，A，B，C，D，……の集合がどれほど大きくなったとしても，結合の概念はおよそ「**A，B，C，D，……の総体**」という言語表現が暗示するように，そのような表象の中に常に一度だけ現れ，その表象全体は一般に，まさにその総体の概念と，その総体がその上に存立すべき諸表象 A，B，C，D，……のみを含む．（強調原文）

これは先に述べた総体の定義のほぼ繰り返しである．「A，B，C，D，……の総体」という表現は，どの二つの構成部分間のつながりにも言及せず，単に諸対象 A，B，C，D，……の全てがつながりをもつということだけを示す．従って，ある諸対象が総体を成すことだけから，「A と B」，「A と B と C」，「A と B と C と D」，……などという構成法を見てとることはできない．さらに，もはや明らかだが，我々が表現として「A，B，C，D，……の総体」を用いたからといって，この総体において A，B，C，D，……がそのような順序をもつか否かは判断できない．かくして，表現や，その表現から引き起こされる主観的な表象に現れる総体の諸部分の結びつき方から，総体がそれ自体でもつ諸部分の結びつき方を見て取ることはできない．

なお上の引用には後に定義される「集合」（Menge）の語が既に使われている．英訳書の中には敢えてこの “Menge” を “quantity” すなわち「量」と訳すものもあるが（Bolzano 1837/1987，英訳，p.126），ここではその必要性はさほど感じられない．それは，この語の使われ方が，すぐ後で述べる彼の集合概念の規定によく沿っているからである．この点に関しては集合概念と若干の具体例を見てから改めて確認することにする．

3.1.2　部分

総体の定義の冒頭において，諸事物の総体が，それら諸事物が部分として現れる全体とみなされてもよいことが示唆されていた．しかし既に見たように総体の定義そのものには部分の概念が含まれていないので，総体の概念を用いて循環なく部分の概念を導入することができる．ボルツァーノは以下のように部分の概念を導入する（Bolzano 1837/1987，§83.1，p.200）．

> もし我々が時折，いくつかの名を挙げられた諸対象 A，B，C，D，……の総体を考えていると自覚するならば，そのときにはそれら諸対象のいくつか，例えば A や B を，その総体に現れている部分として表象している．例えばもし，三人の人物カー

> ユスとセンプロニウスとティートゥスの各々がある持ち場を管理する能力をもつと主張するならば，表象「人物カーユスとセンプロニウスとティートゥスの各々」は，カーユスとセンプロニウスとティートゥスが共につくる総体の，一つの（各々任意に選ばれた）部分の表象である．私がこのように同定する表象は，列挙された諸事物の総体の表象と，部分という語が意味する表象とから成る．ただし私は部分を，ある総体がそれによって成るところの各々の対象と考える．

総体が複合をもつものであるのに対して，部分は総体を成す諸対象であるから，部分は総体から定義され，しかもその定義は循環を含まないことが分かる．この部分の定義は，総体がそれを成す諸部分に一意に分解できることを保証する．定義に厳密に従えば，「ある総体をそこから構成したと考える個別の対象の各々だけを部分と見なしてもよい」のであって，「それ自体が単に当の部分の部分であるようなもの，同様に，既にそのような部分の総体全体であるようなものは，そのように［部分として］命名される権利を全くもたない」（Bolzano 1837/1987，§83.2，p.201，角括弧内は引用者の補足）．従って，上述の三人の総体を考えている際，例えばカーユスの腕や，カーユスとセンプロニウスの総体は部分として認められない．後者を排除する意味ではボルツァーノの部分の概念は現在の集合論で言う部分集合よりむしろ要素に近い．集合 $\{a, b, c\}$ の要素は a，b，c であるのに対して，その部分集合は $\emptyset$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{b, c\}$，$\{c, a\}$，$\{a, b, c\}$ の八通り考えられるからである．かくして，カーユスとセンプロニウスとティートゥスの総体の部分は，カーユスとセンプロニウスとティートゥス以外ではありえないことになる．

尚，上に引用した箇所から分かるように，ボルツァーノはある対象が単に部分の部分であるというだけで，元の総体の部分と認めてよいとは考えない．これはボルツァーノにおいて部分と全体の関係が一般には推移的でないことを意味する．例外，つまり部分の部分が再びその部分となるような総体は次に述べる集合の例の一つとして言及されるが（Bolzano 1837/1987，§84.2，p.203），それについては，次の小節において集合の例として取り上げる[2]．

3.2　総体の下位概念：集合，列，内包的に定義される総体

総体は一般に「複合をもつもの」であったが，その複合の仕方がどのようであるかは問われなかった．その複合の仕方がどのようなものであるかに言及することによって，様々な種類の総体について語ることができる．ボルツァーノは諸々の種類の総体の内，集合と

[2] 三平（2003, p.133）によると，フレーゲは部分と全体の関係が推移的であることを根拠に，部分から形成された全体が分解の一意性をもたず，従って数の担い手にはなりえないと主張しているという．この点でボルツァーノの総体と部分の間の関係は一般には推移的でなく，さらに分解の一意性をもつので，フレーゲの批判の対象にはならないと考えられる．

列，そして内包的に定義される総体に触れている．集合と列は総体の構成部分の順序が重要でないと見なされるか，順序が本質的であるか，という違いをもつ総体である．また何らかの性質をもつもの全てから成る総体も考えられ，これは集合の内包的定義を思わせる．ここではそれらがどのように導入されるかを見ることにする．

3.2.1　集合

集合に関してボルツァーノは以下のように述べる（Bolzano 1837/1987，§84.1，pp.202–203）．

> 今まで見てきた総体表象では，想定された総体を成立させる個別の部分がどのような結合でそこに現れるかが未決のままであった．今このことに関しても何事かが確実にされるべきだとすれば，一層複合的な表象が現れてこなければならないことは容易に認められる．その最も単純な場合は，まさに**諸部分間の結合の仕方が重要でないと見なされるべきであること**（*daß die Art der Verbindung zwichen den Theilen als etwas Gleichgültiges angesehen werden solle*）だけが決定されるときに生じる．……私は，任意の総体の各々を，それらの諸部分の結合の仕方が重要でないと見なされるべきであれば，その総体が部分をごくわずかだけ，実に二つしか含んでいなくとも，敢えて**集合**（*Menge*）と呼ぶ．（強調原文）

“Menge” は集合論で扱われる集合を指す語として現在も使われる．そのため研究者によっては先入観を排除するため敢えて「集合（set）」以外の訳語をあてることもある[3]．本稿では文脈的に誤解は生じないと思われるので，慣例に従って訳語として「集合」をあてることにする．

この引用箇所でボルツァーノは構成諸部分の結合の仕方が幾分明らかになった総体の一つとして集合を特徴付けようとしている．集合を単なる総体から区別する基準は，諸部分の結合の仕方が重要視されなくともよい，ということである[4]．しかしそれだけでは具

[3] Simons（1997, pp. 95–96）と Behboud（1997, p. 112）は “multitude” をあてている．尚 Berg（1992, p. 34）は “B-set” なる語を造り用いているが，これはボルツァーノの意味での集合のうち，部分の部分が元の全体の部分でなく，さらに外延性原理によって同一性が定義されるものである．

[4] この集合概念の導入には別の読み方もあるように思われる．引用に現れる「見なされるべきである」という部分に重きを置いて解釈するならば，「『諸部分間の結合の仕方が重要でないと見なされるべきであること』だけが決定されるときに」という条件は，ある総体がもつ複合の仕方の制約と言うより，むしろ，依然として不問である複合の仕方に対して，我々の側にそれを重要視すべきでないという外的要求が存する，という我々の側の条件を言っているように思われる．つまり，上に挙げた引用は，総体から集合を区別する原理がその総体の側に存するのではなく，我々の側に存すると言っていると考えられる．すると，集合の概念は確かに総体の概念を介して導入されてはいるが，集合概念が総体概念の下位概念である，という述べ方をすれば，それは若干強すぎる主張となろう．そのように主張するには総体であって集合でないものを少なくとも一つ挙げねばならず，それは直ちに，いかなる外的要因によっても複合の仕方を無視

体的にどのような総体が集合であるのか分かりにくいので，いくつか例を挙げて，ボルツァーノがどのようなものを集合と考えていたかを見ることにする．まずは次のようなものである（Bolzano 1837/1987，§84.1，p.203）．

> 例えば，一まとまりの金銭の授受に際して，その一まとまりを成立させる個別の貨幣がどの順序にあるかは我々には重要でない．我々は，幾多の団体の成員を枚挙する際，そこで人々に言及する順序が全く重要でないと見なしうること，彼らの間に決して順位を認めないこと，等々を明確に断っておきたくなる．

二つの例に共通して現れるのは順序（Ordnung）あるいは順位（Rangordnung）なる概念である．類似したことが後年の『無限の逆説』では次のように言われる（Bolzano 1851/1975，§4, pp.3–4）．

> 諸部分 A，B，C，D，……を含むにもかかわらず我々がそれらを把握する観点（概念）によっては**異なっている**（我々はそのことを本質的に異なっていると言うが）ように見せる総体がある．例えば一個のグラス全体と割れて破片になったグラスである．……我々が，部分の配列が重要でない概念であると見なす（それゆえ，たとえその配列だけが変わっても我々にとって本質的なものは何ら変わらない）総体を，私は集合と呼ぶ．（強調原文）

ここでグラスは集合でない総体の例になっていることに注意する．同じ一つのグラスという総体であっても，それがまさにグラスの形を成しているのと，割れて破片になっているのでは，総体をなす諸部分の配列の仕方は異なっており，その相違によって，一方はグラスとしての用を為し，もう片方は用を為さないという違いが生じる．このような違いが生じないものをボルツァーノは集合と呼んでいる．先ほどの「順序」「順位」という表現に対応するものがここでは配列（Anordnung）であることが見て取られるだろう．金を勘定する順序，人を数える順序という一次元的な順序よりも次元の高い配列という言い方にはなっているが，いずれも構成部分の並びに言及していることに変わりはない．従って，集合の定義において「部分の結合の仕方が重要でないと見なされる」と述べられていることの内容は，結合されている諸部分の順序を変えても本質的なこと（貨幣の金額，人々の人数，破片であること）が変わらないことであると理解できる．例えば ZF 集合論において任意の a, b に対して $\{a, b\} = \{b, a\}$ が定理として得られる[5]ことを考えれば，構成部分の順

できないような総体を少なくとも一つ挙げることである．しかしながら，集合の例に見るように，その総体の構成部分の数や，それら構成部分の数に対応して決定される数を求めることが要求されるような場面では，いかなる総体も集合と呼ばれる可能性をもつのではないか，という疑念を捨てきれないからである．このような解釈を完全に排除する要因は無いと思われるが，ここではテキストに対してより素直な本文での解釈をとる．

[5] 対集合公理 $\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \iff x = a \lor x = b)$ の “$\lor$” の性質に帰着する．

序を変えても本質的な変化が生じないという意味で，ボルツァーノの集合は現在の集合論で言う集合と共通点をもつことを指摘することができる．しかし決定的な違いとして残るのは，ボルツァーノにおいては集合が総体の特殊なものとして導入され，従って集合がそれを構成するものと結ぶ関係もまた総体から定義されたものであること，つまり集合が概念としてもっとも基礎にあるものとされていないことである[6]．

総体と部分の間の関係に関わる例も存在する．既に述べたようにその関係は一般に推移性をもたないので，単にある総体の部分の部分であるからといって元の総体の部分であるとは限らない．しかしその「部分の部分」が，仲介する「部分」と無関係に元の総体の部分となっていれば，部分の部分が再びその総体の部分となることが帰結されてもよいだろう．ボルツァーノはそのような性質をもつ集合を**和**（*Summe*）と呼ぶ（Bolzano 1837/1987，§84.2，p. 203）．その例は直線の長さで与えられる．直線を成す各部分の，さらにその部分を成す直線を考えれば，当然それは元の直線の部分になっている．そして，長さを本質的なものと考える限り，この直線という総体は部分の順序を変えても本質的な違いを生じない．従って，直線はその構成部分の和であると言える．

最後に，総体の説明中に集合という語が先取りされて用いられたことを思い出そう．その使われ方は「それゆえ私が思う所むしろ，A，B，C，D，……の集合がどれほど大きくなったとしても，結合の概念は……」というものだった．ここで本質的な事柄は A，B，C，D，……の総体の大きさ，つまりは構成部分の数であり，それは構成部分 A，B，C，D，……の順序を変えても変化するものではない．従ってここで使われている集合という語は，彼の集合概念からして適切な使われ方をしていると言って差し支えないことが分かる．

3.2.2　列

集合と異なる種類の総体として，列の概念がある．それは次のような仕方で導入される（Bolzano 1837/1987，§85，p.204）．

> 私が諸対象……K，L，M，N，O，……の総体をが列を構成すると言うのは，その総体の中の各々の対象 M に対して同じ総体の中の別の対象 N が存在して，その総体全体に対して**一様に当てはまる**（*gleichlautenden*）法則によって，N が M から決定されるか，M が N から決定されるかのどちらかであるとき，すなわち，それら諸対象のあるものを，ある他のものと担う**関係**（*Verhältniß*）のみによって決定できるときである．（強調原文）

[6] このことから，ボルツァーノの総体と集合の関係を，**vNBG** 集合論で言うクラス（class）と集合（set）の関係に重ねる見解もありうると思われる．3.3.1 節で改めて触れるが，本論文ではそのような集まりのサイズに関わる解釈はとらない．

ここで主に念頭に置かれているのは，例えば現在我々が数列と呼ぶものである．$1, 2, 3, 4, \cdots$ という数列を考えると，その全ての項は例えば「1 小さい」という関係で結ばれている．この「1 小さい」という関係はこの数列の任意の項 m に対して一意の項 $m+1$ を与え，また m 自身は一意の項 $m-1$ によって与えられる．つまり上の引用で「一様に適用される法則」あるいは「関係」と言われるのは，この数列の例では隣り合う項の左の項が右の項より「1 小さい」という関係である．また列はある項と，二項の関係を定める構成規則によって特徴付けられることも示唆されるので（Bolzano 1987, §85, p. 205），この数列を「初項 1，各項 m の次の項は $m+1$」と特徴付けても差し支えない．このことはボルツァーノの項の概念を一層現在の数列に引き付けて解釈することを許す[7]．

3.2.3 内包的に定義される総体

ボルツァーノは内包的に定義される総体も考えている．彼はまず単位（Einheit）という概念を導入する． a を性質，A を「a をもつもの」（Etwas, das a hat）という表象として，彼は表象 A で表される対象，つまり性質 a をもつ対象を，**種類 *A* の具体的単位**（*eine concrete Einheit von der Art A*），**（一つの）*A***（*ein A*）などと呼ぶ（Bolzano 1837/1987，§86.1，p.209）[8]．この概念を用いて，「各 A がその部分として現れ，かつ各部分が A であるような総体」として**全ての *A* の総体**（*der Inbegriff aller A*）と呼ばれる概念が定義される（Bolzano 1837/1987，§86.3，p.210）．ここで A は性質 a から定義される表象「a をもつもの」なので，全ての A の総体とは，性質 a をもつもの全ての総体である[9]．以後はこのように性質に言及する言い方を主に用いることにする．

既に見た総体の下位概念，つまり集合の概念と列の概念は，その構成部分の結合の順序

[7] 『無限の逆説』の邦訳では “Reihe” は「数列」と訳されている（Bolzano 1851/1975，邦訳，p.6）．また Berg （1992, p. 34） はボルツァーノの “Reihe” を「順序集合（ordered set）」と訳し，諸部分のいかなる置換の下でも不変でない総体として特徴付ける．このように列を特徴付けることで，Berg は列の概念を集合の概念と対置させようとしていると思われる．事実彼は同じ箇所でボルツァーノの “Menge” を「非順序集合（non-ordered set）」と訳し，諸部分の置換の下で不変である総体として特徴付けている．ただし他の箇所では同じ “Reihe” を “sequence” と訳して数列として扱っているので，それ程強い思い入れは無いのかも知れない．順序集合として理解するにせよ，数列として理解するにせよ，次のような留意点がある．ボルツァーノの定義において各項間を支配する「法則」あるいは「関係」の概念が抜け落ちてしまう可能性がある．なぜなら，ある集合上の順序は単にその集合の要素から成る順序対の集合の特殊なものであり，その任意性を考えれば全ての順序が「法則」と呼ぶに値するとは思えない．同様に数列に関しても，集合 A 上の数列を自然数の集合 $\mathbb{N}$ から A への関数と考えるならば，A のどの要素をどの自然数に割り当てるかは全く任意であって，全てのそのような関数が「法則」と呼ぶに値するとは思えない．事実ボルツァーノは列の定義の周辺において，「$1, 2, 4, 8, 16, \cdots$」，「$1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots$」，「$1^0, 1^1, 1^2, 1^3, \cdots$」など，その列を特徴付ける法則が明確であるようなものを扱っている．

[8] 種類 A の具体的単位に対応する抽象的単位（eine abstracte Einheit von der Art A）も考えられ，それは「ある事物がそれによって種類 A の具体的単位と見なされる，あるいはその事物がそれによって表象 A に対象として従いうるところの性質」と定義される（Bolzano 1837/1987，§86.1，p.210）．

[9] この理解は Berg （1992, p. 35）に負う．

に言及する仕方で区別されていた．しかしここで導入された種類の総体の定義では，順序以外の側面から結合の仕方に対する言及がなされている．このことから，ある性質をもつもの全ての総体の概念と集合の概念とはどのような関係にあるか，あるいは列の概念とはどのような関係にあるか，などと問うことができる．とりわけ興味を引くのは，ある性質をもつもの全ての総体の概念が，集合の概念に含まれるのではないか，ということである．我々は 3.2.1 節で，ボルツァーノの意味での集合が，その構成諸部分の配列を変えても本質的な変化が生じないような総体であることを見た．ある性質 a をもつもの全ての総体にとって本質的なことは，まさにその各構成部分が性質 a をもつことであろう．それは構成諸部分の配列には関係しない．従って先の問いには肯定的に答えることができると思われる．するとこのような総体は例外なく集合であり，従って上で与えられた定義は総体の概念に下位区分を与えていると解するよりも，むしろ集合の概念に下位区分を与えていると解する方が精密で妥当ではないか，という疑いが生ずる．

しかしそのような理解は彼の章立ての仕方から見ると奇異な印象を受ける．彼は総体に関係する諸概念を複数の節にわたって導入しているが，それらの記述は節が進むに従って比較的単純な概念から複雑な概念へと進むよう順序が考慮されている．事実『知識学』では総体と部分の定義，集合の定義，列の定義，単位および単位から成る総体という順で扱われる．集合の一種である和は集合と同じ節で取り上げられること，列の概念が集合の概念よりも構成部分の結合の仕方に関して強い制約をもつという意味で複雑であることを考えれば，列の概念の後に集合の概念の一種が新たに置かれることは考えにくい．この事情を考慮に入れると，ある性質をもつもの全ての総体という概念を安易に集合の概念の下に位置付けることに抵抗が生ずる．よって本稿ではそのような強い理解の仕方はせず，確かに集合の概念と関わりをもつが，概念としてはテキスト通り，集合や列と同様に総体の下位概念の一つとして扱うことにする．

3.3　総体の体系を現在の集まりの諸理論の中に位置付ける

以上ではボルツァーノの総体の概念及びその周辺の諸概念を見てきた．ここではボルツァーノの総体の体系が現在の集まりの諸理論の中でどのように位置付けられるかを考察する．具体的にはボルツァーノの総体の体系を，現代の集合論ならびに部分と全体の理論と重ね合わせ，どの程度ボルツァーノの体系の特徴を再現できるかを見る．

3.3.1　vNBG 集合論との比較

我々はボルツァーノの意味での集合と現代の意味での集合との間に共通点が存在することを見てきた．具体的には，集合とそれを構成するものとの間に，集合論の $\in$ のような関

係が結ばれることであり，集合を構成するものの順序が問題にならないことであり，内包的な定義が可能であることであった．これらは素朴集合論や ZF 集合論で存在主張される集合でほぼ満たされる[10]．しかしボルツァーノの体系において集合が総体の下位概念として定義されることも含めて考えるならば，むしろ **vNBG** との比較を試みるべきである．

vNBG 集合論はクラス（class）なるものと，クラス間の関係 $\in$ の振る舞いを公理によって定め，クラスの一種として集合（set）を定義する[11]．具体的には，X, Y をクラスの変項とすると，X が集合（set）と呼ばれるのは $X \in Y$ なる Y が存在するときである．このような対象の階層化は ZF 集合論では為されない．例えば **vNBG** 集合論において Y をクラスの変項，x を集合の変項[12]とすると，諸公理によってクラス $\{x|x \in x\}$ の存在を主張でき，「$\{x|x \in x\}$ は集合か」と問うことができる．そしてその答えは「$\{x|x \in x\}$ は集合でない」である（Mendelson 1997, p. 240）．それに対して ZF では，そのような形式の集合の存在をそもそも主張することができない．

vNBG 集合論がもつこのような特質を利用して，**vNBG** 集合論の意味でのクラスと集合の区別を，ボルツァーノの体系における総体と集合との区別に重ねることが考えられる．もちろんこの考え方は上で述べた我々の基本的要求に応える．つまり，集合の上位概念であるクラスの間に関係 $\in$ が用意されており，その関係は集合とクラス，集合と集合の間にも用いることができる（Mendelson 1997, p. 225）．また，x, y を集合の変項とすると $\{x, y\}, \{y, x\}$ という集合の存在をそれぞれ主張することが可能であり，それらが一致することを公理から証明できる（pp. 228–229）．そして，クラスを内包的に定義することもできる（pp. 232–235）．これらの論証については割愛する．

しかしこのような考え方には困難が存在する．一つには，この考え方ではボルツァーノの体系における総体と集合の関係を再現することができたとしても，総体の下位区分のうち列のように集合と並行的に導入されるものをどのように **vNBG** の側で特徴付けてよいかが問題となる．また，より根源的なこととして，**vNBG** 集合論においてあるクラスが集合であることの定義は，それが要素となるようなクラスが存在することだった．他方でボルツァーノの体系においてある総体が集合と呼ばれるのは，その総体の構成部分の結合の順序を変えても本質的な変化が生じないことだった．この二者が同じことを言っているとは思われない．従って，結果として二つの体系がある程度の共通性をもつとしても，その根本的な思想においては異なると言わなければならない．するとボルツァーノの総体の体

---

[10] **ZF** 集合論の場合内包的に定義される集合は何らかの集合の部分集合でなければならない（松村 1966, p. 121）．

[11] 以後 **vNBG** 集合論に関しては Mendelson（1997, 4 章）の記述を参考にした．

[12] **vNBG** 集合論において集合の変項はクラスの変項を介して導入される．メンデルソンはアルファベットの大文字をクラスの変項のため，小文字を集合の変項のために用い，例えば φ を一項述語とすると $(\forall x)\varphi(x)$ は $(\forall X)(X$ は集合である $\Rightarrow \varphi(X))$ を意味し，$(\exists x)\varphi(x)$ は $(\exists X)(X$ は集合である $\wedge \varphi(X))$ を意味する（Mendelson 1997, p. 227）．

系と **vNBG** 集合論とを重ねることは，ボルツァーノの体系を現代風に再構成することであり，そうして再構成されたものは最早彼のものとは言いにくい．従って，二つの体系の比較を目的とするならば，**vNBG** 集合論では不十分である．

ここまで敢えて触れなかったが，**ZF** 集合論であれ **vNBG** 集合論であれボルツァーノの総体の体系との重なりを見ようとする際に問題となるのが，空集合と一点集合の扱いである．3.2.1 節の冒頭で引用した箇所でボルツァーノは「その総体が部分をごくわずかだけ，実に二つしか含んでいなくとも，敢えて集合と呼ぶ」と述べていた．これはボルツァーノの意味での集合には少なくとも二つの構成部分が必要であることを示唆している．また「複合をもつもの」という総体の定義はより強い示唆を与えるだろう．つまり集合に限らず総体は一般に少なくとも二つの構成部分を必要とする．これらの事実はボルツァーノの総体の体系を決定的に集合論と相性の悪いものにし，そして部分と全体の理論に近しいものであると思わせる．上で行った，集合論との重なりを見る試みはこの点を度外視しているが，これはボルツァーノの体系における総体とその構成部分との間に結ばれる関係に集合論における集合と要素との間の関係 $\in$ との類似を見たことに起因する．**vNBG** 集合論との比較に不徹底を見たのと同じ理由で，空集合や一点集合を認める集合論との比較を無意味として退けることは可能だろうが，集まりの理論を特徴付ける際に，集まりとそれを構成するものとの間に結ばれる関係に着目することは無意味ではないであろう．このことから集合論との比較の意義もまた失われるものではないと考える．

3.3.2　部分と全体の理論との比較

3.1.1 節冒頭に挙げた引用箇所において，総体が「諸事物が部分として現れる全体」と言い換え可能とされていること，および「複合をもつもの」という総体の定義によって空虚な総体や一つだけのものからなる総体が排除されることは，ボルツァーノの総体の体系を集合論よりむしろ部分と全体の理論に引き付けて理解させようとする．しかし 3.1.2 節で見たように，ボルツァーノの体系における総体とその構成部分との間に結ばれる関係は集合論における集合と要素の関係に近いものだった．部分と全体の理論の研究者の中には，このことを重大に受け止め，これを克服するような理論を作ろうとする方向性もある．ここではそのようなアプローチの一つとして Behboud（1997）の見解を紹介する．

ベーバウドはボルツァーノの体系において総体と構成部分の関係が推移的でないことを重く受け止める．彼は部分と全体の関係と集合論の要素関係を区別する指標として，その関係が推移的であるか否かを考えるので，ボルツァーノの体系において総体と構成部分の関係が推移的でないことは，彼にとってはボルツァーノの総体が集合に，そして総体の構成部分が集合の要素として理解されることを意味する．その意味で彼は「我々は『集合としての総体観』（collections as sets view）に戻ることになるのか」と自問する（Behboud

1997, p. 110）．

彼はその総体観を退けるために，総体と構成部分の間に結ばれる関係を細分化し，その細分化で得られた関係に推移性を求めようとする．我々が 3.1.2 節でボルツァーノから引いた例を用いると，カーユスとセンプロニウスとティートゥスの総体の部分はカーユスとセンプロニウスとティートゥスであり，例えばカーユスの腕はその総体の部分ではなかった．ベーバウドは部分と全体の関係の意味を特定の観点（の役割をする表象）に相対化する．彼の言い方では，x を総体として，所与の表象 v に対して，x の v 部分（v-part of x）とは，x の部分でかつ「表象 v の下にある」（stands under the idea v）ものである．ここで v がついていない「部分」はその最も一般的な意味で理解されるという（Behboud 1997, pp. 110–111）．「表象 v の下にある」という言い回しはこの場合「v という概念で表される対象である」と読み替えても差し支えないと思われる．

ここでベーバウドの狙いが成功することを確かめる．先の例で，例えば三人の総体の「人物部分」を考えれば，例えばカーユスは三人の総体の部分で，かつ「人物」という表象の下にある．他の二人に関しても同様である．また同じ総体の「身体部分」を考えれば，例えばカーユスの右腕は三人の総体の部分であり，かつ「身体」という表象の下にある．同様にカーユスの右ひじも同じ総体の身体部分である．ここでカーユスの右腕を一つの総体と見てその身体部分を考えれば，カーユスの右ひじはカーユスの右腕の身体部分である．かくして，三人とカーユスの右腕の間に，そしてカーユスの右腕とカーユスの右ひじの間にそれぞれ身体部分関係が成り立ち，さらに三人とカーユスの右ひじの間に身体部分関係を考えても特に問題は無さそうである．ベーバウドの狙いはこのような仕方で成功する．

ベーバウド自身は総体と構成部分の関係から曖昧さを排除する目的で，相対化された関係を用いることを提案している（Behboud 1997, p. 110）が，これは我々が 3.1.2 節で見た関係よりも相当に強いものになっている．それは我々の 3.1.2 における理解では一つの総体の部分は一意に特定されたのに対し，ベーバウドの考えによれば，総体と構成部分の間には，観点ごとに多様な関係が考えられるからである．この意義は後に再び触れる．

ベーバウドはさらに進んで，この相対化された関係を用いてボルツァーノの意味での集合を特徴付ける（Behboud 1997, p. 113）．彼はある総体が集合であることを，その総体 x と，その総体上の部分関係を相対化する表象 v と，x の v 部分の「無理のない」（legitimate）任意の配置換えで得られる総体を表す表象 w の三項関係で捉える．これは彼が挙げる具体例を見る方が分かりやすい．x を硬貨の総体，v を硬貨，w を硬貨の山とすると，「無理のない」配置換えは単純に硬貨の場所の入れ替えと考えられる．すると，硬貨の総体はその部分である各硬貨の場所を入れ替えても，依然一山の硬貨である．確かにボルツァーノの総体の体系において，そのような総体は集合と考えられた．つまりベーバウドによる集合の定義は，ボルツァーノによる集合の定義において構成部分の配置に言及

していた点を v に相対化された部分の配置への言及に置き換え，さらにその総体にとって本質的な事柄を w として明示したものと読める．

彼はこの相対化された総体と構成部分の関係を用いて，集合に止まらず，他の総体の下位区分である和や列の定義を書き直すことも検討しているようである（Behboud 1997, p. 114）．このようなベーバウドの考えは，ボルツァーノの総体を集合論的に解釈することを拒むならば有力な手段となるように思われる．しかしその代償として，ボルツァーノが念頭に置いていた部分の概念よりも強い概念を導入していた．**vNBG** 集合論との重ね合わせを試みた際にも同様に論じたように，これはボルツァーノの体系が部分と全体の理論であるという確信を保持するための再構成である．しかしベーバウドはダフィット・ヒルベルト（David Hilbert, 1862–1943）に倣って最後に次のように述べる（Behboud 1997, pp. 114–115）．

> 現代の集合論のような，我々が歴史的テキストの再構成のために利用できる素晴らしい道具を用いることを避けたとしたら，それはボクサーから拳を奪うようなものである．しかしそのとき我々は，ボルツァーノの考えを自ら再構成することと，その歴史的に忠実な解釈とを混同してはならない．

これは集合論を用いたボルツァーノのテキスト解釈の試みが再構成に尽きてしまいかねないことへの戒めであろう．しかしベーバウドの見解もまた，テキストに負荷をかけて再構成するという意味では差はないと思われる．

3.3.3　総体の体系の積極的位置付けの可能性

ボルツァーノの体系を集合論と部分と全体の理論の各々と重ね合わせた際に，ある程度の有望さが得られるものの，やはり元の体系の忠実な理解には困難が伴うことを見た．もちろん両者の立場から各々一つの考え方を取り上げただけなので，より負担が少ない理論が見出されることは否定されない．しかし我々が取り上げた二つの立場は，ボルツァーノの体系を理解する際の一つの論点を明確にする．それは総体とその構成部分との間に結ばれる関係であり，つまりは総体を要素からなる集合に近づけて解釈するか，部分から成る全体に近づけて解釈するか，という論点である．ボルツァーノの総体は両者の中間に位置する．言い換えれば，どちらに近づけて解釈しようとしても無理が出る．これはボルツァーノの総体の特徴付けの一つのあり方ではあるが，これは言わば他の諸理論と異なるという意味で消極的な位置付けである．我々により積極的な位置付けを試みることはできないだろうか．一つの考え方は以下のようなものだろう．ボルツァーノの総体の体系の位置付けが不安定であることの原因を辿れば，結局は彼の総体の定義に行き着く．「複合をもつもの」という彼の総体概念は様々な複雑さをもつ集まりを表すことができる．従っ

て，ボルツァーノにおいて集まりの体系を成す諸概念の最も根本的なものが総体であることから，その体系が様々な複雑さをもつ集まりを念頭に置いて構築されていると見てもよいだろう．集まりの体系を構築する際のこの発想は，我々が集合論を用いて複雑な集まりを考える仕方と対照的である．集合論の場合の複雑な集まり，言い換えれば構造が入った集合は，抽象的な集合とその集合上の構造という，より単純な二つの構成要素から成る．つまり単純な集合なしに複雑な構造をもつ集合が成立することはない．二つの考え方は共に様々な複雑さをもつ集まりに関わりながらも，その前提の相違から，前者は下位区分の設定，後者は構造が入った集合の構築という関わり方の違いをもつ．つまり我々は下位区分を設定するという考え方自体に，少なくとも集合論に吸収されない意義を与えられるかもしれない．

ただしこのような位置付けを行うには，ボルツァーノが「結合の仕方」などと呼ぶものに対して拡張を強いることになるかもしれない．集合の例をいくつか見た中で順序（Ordnung）に関係する語が現れていたことを思い出せば，ボルツァーノが念頭に置いていた結合の仕方が文字通り一次元的順序や二次元ないしは三次元的配列に限られていた可能性があり，構造が入った集合の中にはそのような幾何学的なイメージを許さないものもあるから，ボルツァーノの総体の体系の方が対象が少ないという事態が生じうる．この点は課題として残される．ただし総体の構成諸部分がもつ結合の仕方を，幾何学的イメージが許されない演算等に拡張することにさほど問題があるとは考えられない．そのような拡張が「複合をもつもの」という総体の定義に反するとは思われないからである．

3.4　まとめ

本章ではボルツァーノの総体の体系を概観した。ボルツァーノの総体の体系は，「複合をもつもの」という定義だけをもつ総体の概念にさらに制約を加えることで得られる様々な下位概念から成るものだった。その中には現在の集合論で言う集合の概念に近い下位概念も存在した。しかし「複合をもつもの」という総体の定義は，総体には少なくとも二つの対象が必要であるという条件を含意し，空集合と一点集合を認める集合論と相容れない。また，ボルツァーノが念頭に置いている部分と全体の関係は集合論における要素関係に近く，部分と全体の理論の研究者の中にはその点を乗り越えようとする動きもある。ボルツァーノの体系はそれら両理論のどちらとも完全にはなじまない。そこで積極的な意義付けとして，複雑な構造をもつ集まりに対する関わり方において，集合論的アプローチと異なるものを見出した．それは複雑な集まりの領域に規定を加えることで下位区分を設けるという，集合論的構築の発想とは反対のものであった．結果として得られる集まりの概念の上下関係を現代数学の枠組みで捉えられるか，というのが第 4 章の問題意識となる．

第 4 章

圏論と初等トポス理論

本章では圏論と初等トポス理論の入門的な諸概念を導入し，前章で論じたボルツァーノの集まりの諸概念の体系と，初等トポス理論との比較を行う．トポスの公理系は，公理の付加によって，より規定の多い，一般性が失われたトポスを扱うものとなる．そうして生じるトポス同士の概念的上下関係とボルツァーノの集まりの概念的上下関係を比較する．結果として，両者の上下関係同士の類似は見いだされ，一方でトポスにおける「部分」と「全体」のそのままの対応物がボルツァーノの体系には見出せないことが分かる．

4.1　諸定義

この節では圏論およびトポス理論関連の初歩的な諸概念を導入する．使用した主なテキストは Lawvere and Rosebrugh （2003）と McLarty （1995）である．標準的なテキストである Awodey （2010）および Mac Lane （1998） も適宜参考にしている．導入される概念には他の章で必要になるものも含まれるので，必要に応じてこの節を参照されたい．

まずは圏と関手，自然変換，随伴という圏論の基本概念を導入する．次いで集合の直積や直和，関数空間をそれぞれ例に持つ，極限・余極限・冪の概念を導入する．その後圏論の観点から記述された元（element）と一般元（generalized element），対象の部分（part），要素関係（membership），包含関係（inclusion）の諸概念が導入され，そして圏の一種であるトポス（topos）を特徴付ける部分対象類別子（subobject classifier）が導入される．

4.1.1　圏と関手，自然変換

圏（*category*）は「**対象**」（*object*）と，ある対象から別の対象への「**射**」（*arrow*）から成る[1]．中心となる概念は対象よりむしろ射である．矢印で書かれる射はその末尾と先端に対象を持つ．末尾の対象を**ドメイン**（*domain*），先端の対象を**コドメイン**（*codomain*）と呼ぶ．射 f のドメインが A，コドメインが B であるとき「f は A から B への射である」と言い，

$$f\colon A \to B$$

あるいは

$$A \xrightarrow{f} B$$

と書く．

f が A から B への射で g が B から C への射であるとき，A から C への**合成射**（*composition*）$g \circ f$ が存在する．つまり

$$f\colon A \to B \text{ かつ } g\colon B \to C \text{ ならば } g \circ f\colon A \to C$$

である．二つの射のコドメインとドメインが一致していなければ射を合成することはできない．二つの射が合成可能であるとき，それらの射の間に「合成が定義されている」とも言う．

圏の公理は合成に関して以下の二つのことを求める．第一に，合成は結合的（associative）でなければならない．すなわち，

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

ならば

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立たねばならない．このような射に関する等式は，よく以下のような図式を用いて表現される．

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[r, "h"] & D \\
A \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "g"'] \arrow[ur, "h\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

[1] 射は写像（mapping），モルフィズム（morphism）などとも呼ばれる．関数（function）の語は集合論の文脈に限って用い，一般的な圏の射と同じ意味には用いない．

この図式は，等式の左辺と右辺がそれぞれどのような射の合成によって得られているかを表現している．図式が表現する射の等式が成り立つとき，この図式は**可換図式**（*commutative diagram*）であると言う．

もう一つの公理は，対象 A ごとに A 上の**恒等射**（*the identity arrow on A*）という特別な射が存在することを求める．A 上の恒等射は A から A への射であり，id_A や 1_A と書かれる[2]．公理は以下のようである．f が B から A への射ならば

$$\mathrm{id}_A \circ f = f$$

が成り立ち，かつ g が A から C への射ならば，

$$g \circ \mathrm{id}_A = g$$

が成り立たねばならない．つまり，ある射に対して恒等射を左から合成しても右から合成しても，元の射のままである．これは数学的構造である群などが備える単位元の公理に類似している．その観点からは，恒等射の公理は合成という演算に単位元が存在することを求めていると言ってもよい．

圏の公理は合成が結合的であることと各対象に恒等射が存在することのみであるから，様々なものが圏を成すことを示すことができる．例えば，集合全体と関数全体は集合の圏 **Set** を成す．合成は関数の合成であり，恒等射は恒等関数である．位相空間の全体と連続関数の全体は位相空間の圏 **Top** を成す．群の全体と群準同型の全体は群の圏 **Grp** を成す．**Top** と **Grp** における合成と恒等射の定め方は **Set** と同様である．これらは皆ある種の数学的対象どもと，それらの間で構造を保存する関数どもから成る圏である．これに加えて，単一の数学的対象がしばしば圏と見なされる．この論文の 6.2 節で，その例である前順序集合を詳しく取り上げる．

圏の公理は射に関する等式で書かれていた．射とともに圏を成す対象の同一性は，射の観点から弱い形で特徴付けられる．A と B をある圏の対象とし，f を A から B への射とする．このとき，B から A への射 g が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つとき，f は**同型射**（*isomorphism*）であると言う．そのような g が存在すれば f に対して一意に定まるので，f の**逆射**（*inverse*）と呼んで f^{-1} などと書く．逆射が存在する射は**可逆**（*invertible*）であると言う．

A から B への同型射が存在するとき，それら A と B は**同型**（*isomorphic*）であると言い，$A \simeq B$ と書く．同型射の定義から，この関係が同値関係であることが知られる．圏の対象の同一性は，この同型性まで問われるのが普通である．たとえば集合の圏を念頭に置くと，異なる二つの一点集合 $\{a\}$ と $\{b\}$ が与えられると，これらの間には自明な同型射

[2] A から A への射は A 上の恒等射以外にも存在しうる．A 上の恒等射は A から A への射であって，かつ所定の公理を満たす特別な射である．

が存在し，したがってこれらは同型である．一点集合の元がそれぞれ何であるか，ということよりも，それらが一点集合として他の集合とどのような関係を担うか，ということが関心事となるため，厳密な意味での同一性よりむしろ同型性が注目される．また特に，集合の圏においては同型射と一対一対応（one-to-one correspondence）あるいは全単射（bijection）が一致する．

関手（*functor*）は圏から圏への射である．ある集合 A から別の集合 B への関数が B の元を A の元に割り当てるように，圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手は $\mathbf{D}$ の射を $\mathbf{C}$ の射に割り当てる．もっとも射はドメインおよびコドメインとして対象を伴うので，関手は $\mathbf{D}$ の対象も $\mathbf{C}$ の対象に割り当てる．したがって関手を一つ定めるには対象の割り当てと射の割り当ての両方を定めればよい．関手 F によって $f\colon A \to B$ に割り当てられる射を $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ のように書く．

関手は射の合成と恒等射を保存しなければならない．すなわち F が $\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}$ への関手であるには，まず $\mathbf{C}$ の合成可能な二つの射

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

に対して $F(g \circ_{\mathbf{C}} f) = F(g) \circ_{\mathbf{D}} F(f)$ が成り立つことが求められる．ここで $\circ_{\mathbf{C}}$ と $\circ_{\mathbf{D}}$ はそれぞれ $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ 上の合成演算である．混乱が生じる恐れがなければこの添字は省略される．さらに，$\mathbf{C}$ の対象 C 上の恒等射 id_C に対して $F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$ が成り立たねばならない．

関手の中で，射を割り当てる際に射の向きを反転させるものがある．そのような関手は反変関手（*contravariant functor*）と呼ばれる．その定義を述べるために圏 $\mathbf{C}$ の逆圏（*the opposite category of* $\mathbf{C}$）$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の概念を導入しよう．$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の対象は $\mathbf{C}$ の対象である．そして $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の射は $\mathbf{C}$ の射の向きを反転させたものである．$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の概念を使うと，関手の定義を煩雑にすることなく反変関手を定義することができる．すなわち，圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への反変関手とは，$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{D}$ への関手である．$\mathbf{C}$ において対象 A から対象 B へのものである射は $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ においては B から A への射であり，$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{D}$ への関手 F はこれに対して $F(B)$ から $F(A)$ への射を割り当てるから，結果として A から B への $\mathbf{C}$ の射が反転され，それに対して $F(B)$ から $F(A)$ への $\mathbf{D}$ の射が割り当てられることになる．これが逆圏を用いた反変関手の定義である[3]．なお，反変関手でない関手を共変関手（*covariant functor*）と呼ぶことがある．

一方，逆圏を用いずに反変関手を定義することもできる（Lawvere and Rosebrugh 2003, p.237）．その場合，上記の関手の定義は共変関手の定義とし，反変関手には上記の意味での関手とは異なる定義を与える．すなわち，圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への反変関手 F は $\mathbf{C}$ の射

[3] ドメインに逆圏を用いる代わりにコドメインに逆圏を用いてもよい．つまり圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への反変関手を $\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}^{\mathrm{op}}$ への関手と定めることもできる．

$f\colon A \to B$ に対して $\mathbf{D}$ の射 $F(f)\colon F(B) \to F(A)$ を割り当てるものであり，二つの条件を満たさねばならない．一つは合成の保存に関わるもので，合成可能な $\mathbf{C}$ の射 f と g に対して共変関手が満たすべき条件が $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である一方，反変関手については $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ が成り立たねばならない．恒等射の保存に関しては共変関手と同様に，$\mathbf{C}$ の対象 C 上の恒等射 id_C に対して $F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$ が成り立つことが求められる．この定義は逆圏を用いないため，ある圏の射に別の圏の射を反転させつつ割り当てるという反変関手の考え方を端的に表現する．その代わりに，第一の定義では関手が満たすべき条件が共変関手も反変関手も同じであったけれども，第二の定義では両者の条件は別々のものになる．この論文では第一の定義を採用し，共変的なものも反変的なものも等しく従う関手の定義を定めた上で，$\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}$ への反変関手は $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{D}$ への関手であると考える．

関手は射の一種であるから合成を考えることができる．$\mathbf{C}$，$\mathbf{D}$，$\mathbf{E}$ を圏とし，

$$\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \xrightarrow{G} \mathbf{E}$$

を関手とする．このとき F と G の**合成関手**（*composite functor*）$G \circ F$ は，$\mathbf{C}$ の対象 A に対して $\mathbf{E}$ の対象 $G(F(A))$ を割り当て，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon A \to B$ に対して $\mathbf{E}$ の射 $G(F(f))\colon G(F(A)) \to G(F(B))$ を割り当てる．つまり関手 $G \circ F$ の働きは合成可能な二つの関手 F と G をその順序で適用するというものである．

圏の対象にその上の恒等射が定義されていたように，圏の上で恒等射の働きをする関手を考えることができる．$\mathbf{C}$ を圏とする．このとき，$\mathbf{C}$ **上の恒等関手**（*the identity functor on* $\mathbf{C}$）とは，ドメインとコドメインが $\mathbf{C}$ であり，$\mathbf{C}$ の各対象にその対象を，各射にその射を割り当てる関手である．$\mathbf{C}$ 上の恒等関手は $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ などと書かれる．

4.1.2 自然変換と関手圏

ある圏からもう一つの圏への関手どもの全体は，関手から関手への適切な射を定めることで圏を成す．そのような射は**自然変換**（*natural transformation*）と呼ばれる．圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手 F と G が与えられているとする．自然変換 $\nu\colon F \to G$ は，C を $\mathbf{C}$ の対象として $\mathbf{D}$ の射 $\nu_C\colon F(C) \to G(C)$ を C に沿って集めた族 $\{\nu_C\}_C$ である．ただし各 ν_C は $\mathbf{C}$ の各射 $f\colon C \to C'$ に対して以下の図式を可換にしなければならない．

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\nu_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\nu_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd}$$

ν_C を自然変換 ν の C **成分**（*C-component*）と呼ぶことがある．

自然変換の合成は成分ごとに定義される．圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手 F，G，H と，自然変換

$$F \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\nu} H$$

が与えられているとする．このとき合成された自然変換 $\nu \circ \mu$ は，C を $\mathbf{C}$ の対象として，その C 成分 $(\nu \circ \mu)_C$ が μ の C 成分 μ_C と ν の C 成分 ν_C の合成 $\nu_C \circ_{\mathbf{D}} \mu_C$ であるものとして定義される．射のつながり方を図示すると以下のようである．

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[rr, bend right, "(\nu\circ\mu)_C"'] & G(C) \arrow[r, "\nu_C"] & H(C) \end{tikzcd}$$

関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 上の**恒等自然変換**（*identity transformation*）id_F は F から F への自然変換であって，$\mathbf{C}$ の対象 C に対して C 成分 $(\mathrm{id}_F)_C$ が，$\mathbf{D}$ の対象 $F(C)$ 上の恒等射 $\mathrm{id}_{F(C)}$ であるものとして定義される．

あらためて関手どもが作る圏を導入しよう．$\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ を圏とする．**関手圏** $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ の対象は $\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}$ への関手であり，対象 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ から $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ への射は F から G への自然変換である．射の合成と恒等射は，それぞれ上述の自然変換の合成と恒等自然変換である．

関手圏における同型射は**自然同型**（*natural isomorphism*）と呼ばれる．これはその各成分が同型射であるような自然変換に他ならない．したがって関手圏 $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ の対象である関手 F と G の間に同型

$$F \simeq G$$

が与えられているならば，$\mathbf{C}$ の各対象 C に対して $\mathbf{D}$ における同型

$$F(C) \simeq G(C)$$

もまた与えられる．

4.1.3　随伴

F を圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手とし，G を $\mathbf{D}$ から $\mathbf{C}$ への関手とする．このとき，F が G の**左随伴である**（*F is left adjoint to G*）あるいは G が F の**右随伴である**（*G is right adjoint to F*）とは，$\mathbf{C}$ の対象 C と $\mathbf{D}$ の対象 D に対して，$F(C)$ から D への射全体の集合 $\mathbf{D}(F(C), D)$ と，C から $G(D)$ への射全体の集合 $\mathbf{C}(C, G(D))$ との間に一対一対応が存在することを言う．ただしこの一対一対応は「C と D において自然（natural in C and D）でなければならない」と言われる．このことを順を追って説明しよう．

まず $\mathbf{D}(F(C), -)$ を $\mathbf{D}$ から $\mathbf{Set}$ への共変関手と見る．この関手は $\mathbf{D}$ の対象 D に対して $F(C)$ から D への射全体の集合 $\mathbf{D}(F(C), D)$ を割り当て，射 $g\colon D \to D'$ に対して

$\mathbf{D}(F(C), D)$ から $\mathbf{D}(F(C), D')$ への関数 g_* を割り当てる．この g_* は $\mathbf{D}(F(C), D)$ の元 $k\colon F(C) \to D$ に対して $\mathbf{D}(F(C), D')$ の元 $g \circ k\colon F(C) \to D'$ を割り当てる．すなわち

$$g_*(k) = g \circ k$$

である．この準備によって「自然性」の条件の一つを述べることができる．その条件は，$\mathbf{D}$ の任意の対象 D，D' と任意の射 $k\colon D \to D'$ に対して，下図が可換になることである．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(F(C), D) \arrow[r] \arrow[d, "k_*"'] & \mathbf{C}(C, G(D)) \arrow[d, "(G(k))_*"] \\
\mathbf{D}(F(C), D') \arrow[r] & \mathbf{C}(C, G(D'))
\end{tikzcd}$$

次いで $\mathbf{C}(-, G(D))$ を $\mathbf{C}$ から $\mathbf{Set}$ への**反変**関手と見る．この関手は $\mathbf{C}$ の対象 C に対して C から $G(D)$ への射全体の集合 $\mathbf{C}(C, G(D))$ を割り当て，射 $f\colon C' \to C$ に対して $\mathbf{D}(C, G(D))$ から $\mathbf{D}(C', G(D))$ への関数 f^* を割り当てる．この f^* は $\mathbf{D}(C, G(D))$ の元 $h\colon C \to G(D)$ に対して $\mathbf{D}(C', G(D))$ の元 $h \circ f\colon C' \to G(D)$ を割り当てる．すなわち

$$f^*(h) = h \circ f$$

である．この準備によって「自然性」の条件のもう一つを述べることができる．その条件は，$\mathbf{C}$ の任意の対象 C，C' と任意の射 $h\colon C' \to C$ に対して，下図が可換になることである．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(F(C), D) \arrow[r] \arrow[d, "(F(h))^*"'] & \mathbf{C}(C, G(D)) \arrow[d, "h^*"] \\
\mathbf{D}(F(C'), D) \arrow[r] & \mathbf{C}(C', G(D))
\end{tikzcd}$$

以上が $\mathbf{D}(F(C), D)$ と $\mathbf{C}(C, G(D))$ の間の一対一対応が満たすべき条件であり，その一対一対応が「C と D において自然」と言われる意味である．

4.1.4　極限と余極限

極限と余極限はそれぞれ対象同士の積の概念と和の概念に関わる．まず極限の概念を導入しよう．$\mathbf{C}$ を圏とする．我々は $\mathbf{C}$ の射のつながり方に言及する仕組みとして圏 $\mathbf{J}$ と $\mathbf{J}$ から $\mathbf{C}$ への関手 D を用いる．$\mathbf{J}$ は $\mathbf{C}$ の射と対象に対する添字の集まりとして，また D は添字を付ける作用として機能する．このような見方をされたときの $\mathbf{J}$ を**添字圏**（*index category*），D を $\mathbf{J}$ **型の図式**（*a diagram of type* $\mathbf{J}$）と呼ぶ．

$\mathbf{J}$ の対象は $i, j, \ldots$ といった小文字で表される．また，それらに対して関手 D が割り当てる $\mathbf{C}$ の対象 $D(i), D(j), \ldots$ は $D_i, D_j, \ldots$ と表される．同様に，$\mathbf{J}$ の射 α に対して D が

割り当てる $\mathbf{C}$ の射 $D(\alpha)$ は D_α と表される．つまり $\mathbf{J}$ 型の図式 D は $\mathbf{J}$ の射

$$i \xrightarrow{\alpha} j$$

に対して $\mathbf{C}$ の射

$$D_i \xrightarrow{D_\alpha} D_j$$

を割り当てる関手である．

次に錐（すい）の概念を導入する．$\mathbf{C}$ と $\mathbf{J}$ を圏とし，D を $\mathbf{C}$ における $\mathbf{J}$ 型の図式とする．このとき **D に対する錐**（*a cone to D*）とは $\mathbf{C}$ の対象 C と，C から D_j（j は $\mathbf{J}$ の対象）への $\mathbf{C}$ の射 c_j どもの族の対 (C, c_j) であって．$\mathbf{J}$ のすべての射 $\alpha\colon i \to j$ に対して $D_\alpha \circ c_i = c_j$ が成り立つものである[4]．

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

極限は特別な錐として導入される．再び $\mathbf{C}$ と $\mathbf{J}$ を圏とし，D を $\mathbf{C}$ における $\mathbf{J}$ 型の図式とする．**D に対する極限**（*a limit for D*）とは D に対する錐 (L, p_j) であって，次の条件を満たすものである．すなわち，D に対する任意の錐 (C, c_j) に対して，$\mathbf{J}$ の任意の対象 j について $p_j \circ u = c_j$ となる射 $u\colon C \to L$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rrr, dashed, "u"] \arrow[dr, "c_i"'] \arrow[drrr, "c_j" near start] & & & L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[d, "p_j"] \\ & D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

以上が極限の定義である．

定義に現れる条件の中で (C, c_j) として D に対するもう一つの極限 (L', p'_j) をとり，また逆に (L', p'_j) の定義に現れる任意の錐として (L, p_j) をとることで，L と L' が同型であることが分かる．したがって，同じ図式に対する極限は同型まで一致する．

極限は図式に対して定義されるから，図式に応じて様々な種類の極限が存在し，重要な例は名前を持つ．$\mathbf{J}$ は互いに結びつきのない二つの対象 1 と 2 だけからなる圏であり，図式 D は $\mathbf{C}$ の中で以下のようであるとする．

$$D_1 \qquad\qquad\qquad D_2$$

---

[4] この対はより厳密には $(C, \{c_j\}_{j\in J})$ などと書かれるべきである．しかしここでは Awodey（2010, p.102）による簡便な表記に従った．

この図式に対する極限 $(L, \{p_1, p_2\})$ は下図のようになる．C, c_1, c_2, u は極限の条件に現れる対象と射である．

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "c_2"] & \\
D_1 & L \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

極限の条件は以下のようになる：D に対する任意の錐 $(C, \{c_1, c_2\})$ に対して，$p_1 \circ u = c_1$ かつ $p_2 \circ u = c_2$ となる射 $u: C \to L$ がただ一つ存在する．この種の極限は D_1 と D_2 の**積**（*product*）あるいは**二項積**（*binary product*）と呼ばれ，$D_1 \times D_2$ と書かれる．**Set** における積は集合の直積である．**Grp** における積は群の直積であり，**Top** における積は位相空間の積である．いずれの場合も p_j は各々の積の元である順序対を構成する成分を取り出す関数であり，それは一般に**射影**（*projection*）と呼ばれる．

次に $\mathbf{J}$ が対象として $1, 2, 3$ を持ち，さらに 1 から 3 への一つの射 α と，2 から 3 への一つの射 β がある場合を考えよう．図式 D は $\mathbf{C}$ の中で以下のようであるとする．

$$\begin{tikzcd}
 & D_2 \arrow[d, "D_\beta"] \\
D_1 \arrow[r, "D_\alpha"'] & D_3
\end{tikzcd}$$

この図式に対する極限について考える前に錐について考えよう．この図式に対する錐 $(C, \{c_1, c_2, c_3\})$ は下図のようになる．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "c_2"] \arrow[d, "c_1"'] \arrow[dr, "c_3"] & D_2 \arrow[d, "D_\beta"] \\
D_1 \arrow[r, "D_\alpha"'] & D_3
\end{tikzcd}$$

ここで錐の定義によって，

$$D_\alpha \circ c_1 = c_3 = D_\beta \circ c_2$$

が成り立たねばならない．このことは，錐の構成要素である c_3 が他の射どもの合成によって書くことができ，したがってそれを省くことができることを示唆している．ただし

$$D_\alpha \circ c_1 = D_\beta \circ c_3$$

は維持されねばならない．このことを踏まえると，先の図式に対する極限は $(L, \{p_1, p_2\})$

は下図のようになる．C, c_1, c_2, u は極限の条件に現れる対象と射である．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "c_2"] \arrow[ddr, bend right, "c_1"'] & & \\
& L \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & D_2 \arrow[d, "D_\beta"] \\
& D_1 \arrow[r, "D_\alpha"'] & D_3
\end{tikzcd}$$

極限の条件は以下のようになる：D に対する任意の錐 $(C, \{c_1, c_2\})$ に対して，$p_1 \circ u = c_1$ かつ $p_2 \circ u = c_2$ となる射 $u\colon C \to L$ がただ一つ存在する．この種の極限は D_1 と D_2 の**引き戻し**（*pullback*）あるいは**ファイバー積**（*fibred product*）と呼ばれる．**Set** における関数の逆像（inverse image）が重要な例である．**Set** において D_2 をドメインとする射 D_β が後に 4.1.7 節で述べる意味で D_3 の部分であるとき，D_α による D_2 の逆像 $L = \{x \in D_1 | D_\alpha(x) \in D_2\}$ は D_α と D_β の引き戻しになる．このとき p_1 は L をそのまま D_1 に埋め込む関数であり，p_2 は D_α のドメインを L に制限した関数である．

最後の例として添字圏 **J** が対象も射もまったく持たない空虚な圏である場合を考える．このときも図式 D が **J** から **C** への自明な関手として存在して，それに対する錐を考えることができる．D は **J** の対象や射を **C** の中に写さない．そのような図式に対する錐は **C** の任意の対象である．したがって極限は **C** の対象 L であって，以下の条件を満たすものである：任意の対象 C に対して，射 $u\colon C \to L$ がただ一つ存在する．この種の極限である対象は**終対象**（*terminal object*）と呼ばれ，1 と書かれることが多い．**Set** において終対象は任意の一点集合である．**Grp** においては単位元だけから成る任意の自明な群が，**Top** においては一点のみから成る任意の空間が終対象である．これまで見てきたような，**J** に対象も射も有限個しか無い場合の極限を**有限極限**（*finite limit*）と呼ぶ．

余極限（*colimit*）とは極限の双対概念，すなわち，極限の定義に現れる射をすべて反転させて得られる概念である．例えば積の定義を説明するために用いた図に現れる射をすべて反転させると**余積**（*coproduct*）の図が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
D_1 \arrow[ur, "c_1"] \arrow[r, "i_1"'] & L \arrow[u, dashed, "u"'] & D_2 \arrow[ul, "c_2"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

この図は $(L, \{i_1, i_2\})$ が積を導入した時と同じ図式 D に対する余積であることを示している．$(L, \{i_1, i_2\})$ が余積であるための条件は以下のようである：D に対する任意の錐 $(C, \{c_1, c_2\})$ に対して，$u \circ i_1 = c_1$ かつ $u \circ i_2 = c_2$ となる射 $u\colon L \to C$ がただ一つ存在す

る．**Set** において D_1 と D_2 の余積はそれらの直和

$$D_1 + D_2 = \{\langle x, 1\rangle | x \in D_1\} \cup \{\langle x, 2\rangle | x \in D_2\}$$

である．L に付随する関数 $i_1 \colon D_1 \to L$ と $i_2 \colon D_2 \to L$ は直和への入射（injection）であり，D_1 と D_2 それぞれの元 x に対して $i_1(x) = \langle x, 1\rangle$，$i_2(x) = \langle x, 2\rangle$ で定義される．**Grp** や **Top** においても余積は直和に適切な構造を入れたものである．

こうして様々な余極限を極限から定義することができる．しかし，ある圏にある種の極限が存在すればそれに双対な余極限が存在するとは限らず，またその逆も成り立つとは限らない．例えば 0 以下の整数の全体は，$m < n$ なる整数の順序対 $\langle m, n\rangle$ を m から n への射とすることで圏を成す．この圏においては最大元の 0 が終対象である．しかしこの集合には最小元が存在しないので，終対象に対して双対な余極限である**始対象**（*initial object*）は存在しない．また，0 以上の整数の全体は反対に始対象を持つが終対象を持たない圏と見ることができる．このように，極限と余極限の一方が存在しても，他方が存在するとは限らない．

4.1.5　冪（べき）

数同士の冪（べき）が数同士の積から定義されるように，圏の対象同士の冪の概念は対象同士の積から定義される．A と B をある圏の対象とする．A と B の冪（an exponential of A and B）とは当該の圏の対象 B^A と射 $\epsilon \colon B^A \times A \to B$ の対 (B^A, ϵ) で，以下の条件を満たすものである：任意の対象 C と任意の射 $f \colon C \times A \to B$ に対して，$\epsilon \circ (u \times \mathrm{id}_A) = f$ を満たす射 $u \colon C \to B^A$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \\ C \arrow[u, dashed, "u"] & C \times A \arrow[u, "u \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $u \times \mathrm{id}_A$ は $B^A \times A$ の性質によって次の手順で定義される射である．積を導入した際に見たように，一種の極限としての積には射影が伴う．$B^A \times A$ に伴う射影を $p_1 \colon B^A \times A \to B^A$，$p_2 \colon B^A \times A \to A$ とし，$C \times A$ に伴う射影を $p'_1 \colon C \times A \to C$，$p'_2 \colon C \times A \to A$ とする．

$$B^A \xleftarrow[p_1]{} B^A \times A \xrightarrow[p_2]{} A \qquad C \xleftarrow[p'_1]{} C \times A \xrightarrow[p'_2]{} A$$

積 $(B^A \times A, \{p_1, p_2\})$ の定義によると，同じ図式に対する任意の錐（ここでは積）$(X, \{c_1, c_2\})$ に対して，$p_1 \circ v = c_1$ かつ $p_2 \circ v = c_2$ となる射 $v \colon C \to X$ がただ一つ存在する．ここで

X として $C \times A$ を，c_1 として $u \circ p'_1$ を，c_2 として $\mathrm{id}_A \circ p'_2$ をとると，$p_1 \circ v = u \circ p'_1$ かつ $p_2 \circ v = \mathrm{id}_A \circ p'_2$ となる射 $v\colon C \times A \to B^A \times A$ がただ一つ存在する．

$$
\begin{tikzcd}
A & C \times A \arrow[l, "p'_1"'] \arrow[r, "p'_2"] & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
B^A \arrow[from=u, "u"'] & B^A \times A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "u \circ p'_1"'] \arrow[d, dashed, "v"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \circ p'_2"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A
\end{tikzcd}
$$

この v が $u \times \mathrm{id}_A$ と命名されて，冪を定義する図で使われている．

Set において，冪がある集合から他の集合への関数全体の集合を例に持つことを示そう．冪の定義は，射 $f\colon C \times A \to B$ に対して特定の性質を持つ射 $u\colon C \to B^A$ が一意に存在することを主張している．ここで特に C として終対象 1 をとる．

$$
\begin{tikzcd}
B^A \\
1 \arrow[u, dashed, "u"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \\
1 \times A \arrow[u, "u \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

積の定義から $1 \times A$ が A と同型であることを導けるので，上述の射の対応関係は実質的に $f\colon A \to B$ と $u\colon 1 \to B^A$ の対応関係となる．4.1.6 節で詳述するように **Set** において 1 をドメインとする射はそのコドメインである集合の元と同一視できるので，結果として $f\colon A \to B$ と $u\colon 1 \to B^A$ の対応関係は $f\colon A \to B$ と B^A のある元の対応関係となる．それゆえ B^A は A から B への関数を格納したものと見ることができる．

4.1.6　一般元と元

続いて元と一般元の概念を導入する．本章のここからは元（element）という語と要素（member）という語を区別して用い，引用箇所を除いては，元という語は以下に定義する意味でしか用いられない．後の章でそれらの語を用いる場合は特別な区別は念頭に無く，通常の数学の議論で用いる集合論の用語として使う．

任意の圏 $\mathbf{C}$ において，T, A は $\mathbf{C}$ の対象，x は $\mathbf{C}$ の射で $a : T \to A$ であるとき，a は T 上で定義された A の一般元である（*a is a generalized element of A defined over T*）と言われる．また特に T が $\mathbf{C}$ の終対象であるとき，a は A の元である（*a is an element of A*）と言われる．言い換えれば，T 上で定義された A の一般元とは T から A への射であり，A の元とは $\mathbf{C}$ の終対象から A への射である．これらは，任意の圏の対象を（一般には構造が入った）集合と類比的なものとして理解するよう促す役割をもつ．とりわけ集合と関数の圏 **Set** において，ここに定義される「元」は各集合の元によく対応する．それは，集合と関数の圏において終対象は任意の一点集合であり，一点集合から任意の集合への関数

は，そのコドメインの元の個数と同じだけ存在しうるため，コドメインの各元は，その元を一点集合の元へと割り当てる関数と同一視することができるからである．しかし圏一般ではこのような見方は成立しない．モノイドとモノイド準同形写像の圏を例とすると，その圏の終対象は単位元だけから成る任意の一点モノイドである．モノイド準同形写像はドメインの単位元にコドメインの単位元を割り当てねばならないので，各一点モノイドから任意のモノイドへの準同形写像は丁度一つ存在することになる．しかし後者のモノイド，つまり準同形写像のコドメインを成すモノイドの元の個数は様々でありうるから，一点モノイドからの準同型写像をコドメインの元と同一視することはできない．

対照的に，一般元はモノイドのような対象に対しても複数ありうる．しかしその代わりに，単なる射が一般元という名を与えられることは説明を要する事柄となる．ローヴェアは T 上で定義された A の一般元を **T 上で変化する A の可変元**（*a variable element of A varying over T*）とも呼び，以下のようにこの点を説明する．

> 例えば，人々が気温について語る仕方を考えると，彼らは気温の集合の元と思しき特定の気温（*the* temparature）について語り，その表現によってその実際の気温を意図している．他方，その気温は昨日何らかの値であったし，今日は別の値である．それは移り変わってはいるが，依然として特定のものである（it is still *the*）．T を日付の集合と見なせば，各日付に対して定的な意味での元（an element in the constant sense）が存在する．その日の実際の気温はある射の値であり，その射そのものは気象予報士が語る気温である．その気温は移り変わってはいるが，依然として一つの存在者（one entity），一つの「元」（one "element"）と見なされる．（Lawvere and Rosebrugh 2003, p. 16）

ここでは集合と関数の圏が念頭に置かれ，日付の集合上で変化する，気温の集合の可変元が考えられている．気温（より厳密には，例えば日ごとの平均気温）は日付ごとに定まった値をとる．この「定的な意味での元」という概念は先に我々が述べた元の概念にほぼ等しい．可変元はこれら個別の確定した対応関係，すなわち諸々の元を一括して表現するものとして考えられていると言える．

しかしこの説明は元の概念に大きく依存しているため，先に述べたモノイドなどの圏における一般元のイメージを与えてはくれない．むしろ一般の圏において一般元という呼称の根拠を見るには，一般元を用いた議論において，それがあたかも通常我々が用いる意味での元のように振る舞うことを見るのが有益と考えられる．例えば次の命題である．

命題 1. $\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A, B は $\mathbf{C}$ の対象，f, g は $\mathbf{C}$ の射で $f, g : A \to B$ とする．このとき，$\mathbf{C}$ の任意の対象 T と任意の射 $a : T \to A$ について $f \circ a = g \circ a$ が成り立つならば，$f = g$ が成り立つ（McLarty 1995, p. 17）．

証明は脚注[5]．この命題の逆が成り立つことは自明である．従って，任意の圏において，同じドメインとコドメインをもつ二つの射が同一であることは，それぞれの射が各一般元においてとる値が一致することと同値である．これは集合論における同様の事実，つまり，関数の同一性が，定義域の任意の元において各関数がとる値の同一性に帰されることと類比的である．このことは一般元という呼称が正当であることの一つの根拠に過ぎないが，これから導入する諸概念との関わりにおいて同様の類比を見ることができる．それらに共通するのは，他の射がもつ何らかの性質を特徴付ける際に一般元が用いられることである．つまり，一般元という呼称の正当性は他の射との関わりにおいて求められると言える．

4.1.7　対象の部分

我々の議論において中心を成すのは対象の部分あるいは部分対象の概念，包含関係，そして要素関係である．これらは全て射の性質あるいは射間の関係として定義される．

はじめに単射（injection）の概念を定義する．$\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A, U は $\mathbf{C}$ の対象，i は $\mathbf{C}$ の射で $i : U \to A$ とする．i **が一般元に関して単射である**（*i is injective on generalized elements*）と言われるのは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 T と任意の射 $u_0, u_1 : T \to U$ に対して，$i \circ u_0 = i \circ u_1$ が成り立つならば $u_0 = u_1$ が成り立つときである．特に T が終対象 1 のとき，同様のことが成り立つならば i は単射である（i is injective）と言われる[6]．以後，射が一般元に関して単射であるときは記号 $\hookrightarrow$ で表すことにする．

対象の部分の概念は一般元に関する単射と密接に関わる．$\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A を $\mathbf{C}$ の対象，i を $\mathbf{C}$ の射とする．i **が** A **の部分である**（*i is a part of A*），あるいは A **の部分対象**（*a subobject of A*）**である**と言われるのは，i のコドメインが A であり，かつ i が一般元に関して単射であるときである．定義に現れる i はドメインを指定されていないので，各対象は一般に複数の部分をもちうる．特に各対象の恒等射は一般元に関して単射なので，その対象の部分である．従って，任意の圏において各対象は恒等射をもつので，各対象は少なくとも一つの部分をもつ．

この概念は通常の部分集合，部分群などの概念にほぼ一致する．集合と関数の圏を例とする．集合論的な関数においては，一般元に関して単射であることと単射であることは一致する．ある集合から部分集合を取り出したとき，取り出された部分集合から元々の集合に対して自らをそのまま埋め込むような関数を定義でき，それは単射である．従って，

---

[5] 証明は以下のようである．T として A を，$a : A \to A$ として 1_A をとり，$f \circ 1_A = g \circ 1_A$ が成り立つと仮定すると，$f = f \circ 1_A = g \circ 1_A = g$ より $f = g$ が成り立つ．

[6] Lawvere and Rosebrugh（2003, p. 8, p. 32）はここで定義した一般元に関する単射を “monomapping” あるいは “monomorphism” と呼び，単射を “injection” と呼ぶ．Mac Lane（1998, p.19）は一般元に関する単射に対してモニック射（monic arrow）の語を用いている．

定義からそのような関数はそのコドメインの部分であると言える．しかし，例えば集合 $\{a, b\}$ と $\{c, d, e\}$ を考えれば，前者は後者の部分集合ではないが単射は定義できる．従って定義される各単射は後者の集合の部分であると言える．

4.1.8 要素関係と包含関係

一般元と対象の部分の間には要素関係（membership）が定義される．任意の圏 $\mathbf{C}$ において A, T, U は $\mathbf{C}$ の対象，a と i は $\mathbf{C}$ の射で $a : T \to A$，$i : U \hookrightarrow A$ とする．**a が i の要素である**（*a is a member of i*）と言われるのは，T から U への射 $\bar{a}$ が存在して $a = i \circ \bar{a}$ が成り立つときである．要素関係は $a \in_A i$ などと表記される．本節の冒頭で元という語と要素という語を区別すると宣言したので，引用箇所を除いては，要素という語はここに定義したようにしか用いられない．この定義は，ある対象の一般元がその対象の部分の要素であることの条件を定めている．ある対象上の一般元と部分との関係であるという点を除いて，この要素関係は部分の概念との関わりにおいて，あたかも通常我々が用いる意味での要素関係のように振る舞う．しかしそのことを見るには次のような関係を導入しておかなければならない．

同じ対象の諸部分間には包含関係（inclusion）が定義される．任意の圏 $\mathbf{C}$ において A, U, V は $\mathbf{C}$ の対象，i と j は $\mathbf{C}$ の射で $i : U \hookrightarrow A$，$j : V \hookrightarrow A$ とする．**i が j に含まれる**（*i is included in j*）と言われるのは，U から V への射 k が存在して $i = j \circ k$ が成り立つときである．包含関係は $i \subseteq_A j$ などと表記される．

集合論では任意の二つの集合に対して，一方が他方の部分集合であるか否か，つまりそれらの間に包含関係が成り立つか否かを問うことができる．しかしここに定義される包含関係は，ある対象の部分間にしか成り立ちえない．前者の部分集合やそれに類似する概念は，むしろ上述の部分対象の概念に近い．つまり，ここまでのように諸概念を定義する場合，部分と全体の関係が二種類定義されることになる．

二つの関係がこのように定義されることで，同じ記号を用いて表される集合論的事実が証明される．例えば次のことが成り立つ．

命題 2. $\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A, T, U, V は $\mathbf{C}$ の対象，a, i, j は $\mathbf{C}$ の射で $a : T \to A$，$i : U \hookrightarrow A$，$j : V \hookrightarrow A$ とする．このとき，$a \in_A i$ と $i \subseteq_A j$ が成り立つならば $a \in_A j$ が成り立つ（Lawvere and Rosebrugh 2003, p. 35）．

証明. $a \in_A i$ と $i \subseteq_A j$ を仮定すると，定義より二つの射 $\bar{a} : T \to U$ と $\bar{i} : U \to V$ が存在して $a = i \circ \bar{a}$ かつ $i = j \circ \bar{i}$ が成り立つ．$\bar{i} \circ \bar{a} : T \to U$ かつ $a = i \circ \bar{a} = j \circ \bar{i} \circ \bar{a}$ なので，定義から $a \in_A j$ が成り立つ． □

つまり，ある部分の要素は，より大きな部分の要素でもある．さらに言い換えれば，二

つの部分の間に包含関係が成り立てば，小さな部分の要素は大きな部分の要素である．これは集合論的な要素関係と包含関係との間に成り立つ事柄をよく反映している．しかしその一方で要素という語に伴う直観に反しうるような次の事柄も成り立つ．

命題 3. $\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A, U は $\mathbf{C}$ の対象，i は $\mathbf{C}$ の射で $i : U \hookrightarrow A$ とする．このとき，$i \in_A i$ が成り立つ（Lawvere and Rosebrugh 2003, p. 36）（McLarty 1995, p. 40）．

証明. $1_U : U \to U$ かつ $i = i \circ 1_U$ から $i \in_A i$ が成り立つ． □

この命題は要素関係が関わる諸命題を証明する際によく用いられる．この命題が示すことが要素という語の直観に反したとしても，この命題で得られた $i \in_A i$ を包含関係の定義に従って $i \subseteq_A i$ と書けば違和感を感じることは無い．つまりこの命題は包含関係が反射的であるというありふれた事柄を示しているに過ぎない．また命題 2 において，射 $a : T \to A$ を任意のものから一般元に関する単射まで弱めると，実質的に次の命題が得られる．

命題 4. $\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A, U, V, W は $\mathbf{C}$ の対象，i, j, k は $\mathbf{C}$ の射で $i : U \hookrightarrow A$，$j : V \hookrightarrow A$，$k : W \hookrightarrow A$ とする．このとき，$i \subseteq_A j$ と $j \subseteq_A k$ が成り立つならば $i \subseteq_A k$ が成り立つ．

証明. 命題 2 と同様． □

つまり包含関係は推移性をもつ．ただし一つの射は一組のドメインとコドメインしかもたないので，$i \subseteq_A j$ かつ $j \subseteq_B k$ などということはありえない．従って，推移律は同じ対象の部分間の包含関係にしか成り立ちえない．ここに挙げた二つの事柄は，既に我々がもっている集合論の知識に合致する結果を圏論の言葉を介して得る際に，集合論においては明確に区別される要素関係と包含関係とを重なりをもつものとして理解することが有意味であることを示している[7]．

包含関係を用いて，同じ対象の諸部分間に弱い意味での「等しさ」を定義することができる．A をある圏の対象，i と j を A の部分とし，$i \subseteq_A j$ と $j \subseteq_A i$ が成り立つとき，**i と j は同等である**（*i and j are equivalent*）と言われ，$i \equiv_A j$ などと表記される．この関係が同値関係であることは包含関係が反射性と推移性をもつことから出る．この関係は定義からして集合の同一性に類似するが，そのことは一般元との関わりにおいて一層明確となる．次の命題はそのことを示している．

[7] 二つの関係の類似に関して，ローヴェアらはデデキント（Richard Dedekind，1831–1916）やバナッハ（Stefan Banach，1892–1945）ら多くの数学者たちが歴史的に二つの関係の両方に同じ記号 $\subseteq$ を用いてきたと述べている（Lawvere and Rosebrugh 2003, p. 37）．

命題 5. $\mathbf{C}$ を任意の圏とし，A, U, V は $\mathbf{C}$ の対象，i, j は $\mathbf{C}$ の射で $i : U \hookrightarrow A$，$j : V \hookrightarrow A$ とする．このとき，以下の二つの事柄は同値である（McLarty 1995, p. 40）．

（a）$i \equiv_A j$.
（b）$\mathbf{C}$ の任意の対象 T 上で定義された各一般元 $a : T \to A$ について，$a \in_A i \iff a \in_A j$.

証明は脚注[8]．つまり，対象の部分はその要素によって，同等なものを除いて区別できる．ある対象 A の諸部分の間の同値関係 $\equiv_A$ を導入した際に触れたように，この関係は外延的に規定される集合の同一性のように振る舞う．

4.1.9 部分対象類別子とトポス

一般の圏からトポスと呼ばれる圏を区別する特徴として，それが部分対象類別子（subobject classifier）をもつことが挙げられる．部分対象類別子は以下のように定義される．終対象 1 をもつ任意の圏 $\mathbf{C}$ において，Ω は $\mathbf{C}$ の対象，t は $\mathbf{C}$ の射で $t : 1 \to \Omega$，つまり Ω の元とする．**Ω と t が部分対象類別子である**（*Ω and t is a subobject classifier*）と言われるのは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 A の任意の部分 $i : U \hookrightarrow A$ に対して，同じく任意の対象 T 上で定義された各一般元 $a : T \to A$ について $a \in_A i \iff \chi \circ a = t \circ !_T$ が成り立つような唯一の射 $\chi : A \to \Omega$ が存在するときである[9]．A の部分 i に応じて存在が主張される χ は **i の特性射**（*the characteristic mapping of i*）あるいは**類別射**（*classifying arrow*）と呼ばれ，χ_i などと書かれる．

以後 Ω で当該圏の部分対象類別子を指すことにする．定義によると，圏に部分対象類別子が存在することは，その圏の任意の対象の各部分に対して，その部分を特徴付けるような射が存在することを意味している．逆に，同一の特性射が同等なものを除いて唯一の部分を類別することも示すことができる（McLarty 1995, p. 117）[10]．この意味で，ある

---

[8] 証明は以下のようである．（a）が成り立つと仮定する．部分の同等性の定義から $i \subseteq_A j$ かつ $j \subseteq_A i$．命題 2 を用いると，この前者と $a \in_A i$ からは $a \in_A j$ が，後者と $a \in_A j$ からは $a \in_A i$ がそれぞれ得られる．逆に（b）が成り立つと仮定する．T として U を，$a : U \to A$ として i をとる．命題 3 から $i \in_A i$ が成り立つので $i \in_A j$ が成り立つ．i は A の部分なのでこれは $i \subseteq_A j$ に等しい．$j \subseteq_A i$ も同様に得られる．

[9] 混乱を防ぐため量化子を用いて書くと，

$$(\forall A)(\forall U)(\forall i : U \hookrightarrow A)(\exists ! \chi : A \to \Omega)(\forall T)(\forall a : T \to A)(a \in_A i \iff \chi \circ a = t \circ !_T)$$

となる．

[10] $i, i' : U \hookrightarrow A$ として，$\chi_i = \chi_{i'}$ が成り立つときに $i \equiv_A i'$ が成り立つことを示せばよい．A の任意の一般元 $a : T \to A$ をとり，$a \in_A i$ を仮定すると，

$$a \in_A i \iff \chi_i \circ a = t \circ !_T \iff \chi_{i'} \circ a = t\,!_T \iff a \in_A i'$$

であるから，$a \in_A i'$ が成り立つ．同様に $a \in_A i'$ を仮定すると $a \in_A i$ が成り立つ．従って命題 5 から

対象の部分とその特性射とは一対一対応をもつ．

しばしば Ω は**真理値対象**（*the truth value object*）と呼ばれ，その元 t は真理値「真」と同一視される．マクラーティはさらに象徴的に，我々が $\chi_i \circ a = t \circ !_T$ と書くところを "$\chi_i \circ a$ is *true*" と言い換えることもある（McLarty 1995, p. 118）．このとき $\chi_i \circ a$ は真偽が割り当てられる文のように，そして χ_i は述語のように考えられていると思われる．この見解を基にすれば，射 χ が対象 A の部分 i の特性射であることは，任意の対象 T 上で定義された各一般元 a について「a が i の要素である $\iff$ a が性質 χ をもつ」が成り立つこととして理解される．このことから，i はその要素が性質 χ をもつという条件によって類別された A の部分として理解される．

部分対象類別子をもつとともに，その対象間で積や和，冪などの特定の演算が可能となるように公理が整備された圏は**トポス**（*topos*）と呼ばれる．より正式な述べ方をすれば，それは圏であって，以下の要件を満たすものである（Lawvere and Rosebrugh 2003, pp. 111–112）．

- すべての有限極限を持つ．
- すべての有限余極限を持つ．
- 任意の二つの対象に対してそれらの冪が存在する．
- 部分対象類別子が存在する．

4.2　トポス $\mathbf{T}$ の構築と幾つかの帰結

以後，以下の二つの公理を満たすトポスを $\mathbf{T}$ と呼ぶことにする[11]．

（**T**1）　A, B は $\mathbf{T}$ の対象，f, g は $\mathbf{T}$ の射で $f, g : A \to B$ とする．このとき $f = g$ であるか，または A の元 $c : 1 \to A$ が存在して $f \circ c \neq g \circ c$ が成り立つ．

（**T**2）　$1 \neq 0$.

これら二つの公理から集合論において成り立つ様々な事柄が証明されるが，本稿ではこれまである対象の一般元を用いて述べられた事柄のいくつかが，同じ対象の元を用いて述べられることを見る．議論は主に（**T**1）を用いて行われるが，その前に（**T**2）が公理とされる根拠の一つに触れる．

$i \equiv_A i'$ が成り立つ．

[11] これらの諸公理はマクラーティの **Set** の諸公理（McLarty 1995, p. 211）を参考にしている．ローヴェアの公理系 **S** はこれら二つの公理を含意するものだが（Lawvere and Rosebrugh 2003, pp. 111–114），元や一般元，要素関係，包含関係に注目するという我々の目的には，マクラーティの公理の方が適していると判断した．またマクラーティの **Set** もローヴェアの **S** も数論を可能にする公理を含むが，同じ理由でその公理も除外してある．

終対象と始対象が同形でないのは自明でない．モノイドとモノイド準同形写像の圏において，任意の一点モノイドから各モノイドには準同形写像が丁度一つだけ存在することは既に見たが，これは一点モノイドがその圏の始対象であることを示している．また任意のモノイドから各一点モノイドには準同形写像が丁度一つだけ存在するので，一点モノイドはその圏の終対象でもある．従ってモノイドとモノイド準同形写像の圏では終対象と始対象は一致する．事実，終対象 1 と始対象 0 をもつ任意の圏で $1 \simeq 0$ を仮定すると，各対象が元を唯一つもつことになる（Lawvere and Rosebrugh 2003, pp. 17–18）[12]．（**T**2）はこのような事態を明示的に防ぐので，**T** の対象は元を全くもたないこともあれば，複数の元をもつこともある．特に 0 は元をもたない[13]．

（**T**1）から次の事柄が成り立つ．

命題 6. A, B は **T** の対象，f, g は **T** の射で $f, g : A \to B$ とする．このとき A の任意の元 $c : 1 \to A$ について $f \circ c = g \circ c$ が成り立つならば，$f = g$ が成り立つ．

証明は脚注[14]．つまり **T** の射は，ドメインの各元においてとる値によって定まる．このことから，次のことが成り立つ．

命題 7. A, U は **T** の対象，i は **T** の射で $i : U \to A$ とする．このとき，i が一般元に関して単射ならば i は（元に関して）単射である（Lawvere and Rosebrugh 2003, p. 32）（McLarty 1995, p. 212）．

ある対象の部分は，その対象をコドメインとする射でかつ一般元に関して単射であるものとして定義されたので，命題 7 を用いるとその定義をより強い形で述べ直すことができる．つまり **T** においてある対象の部分とは，その対象をコドメインとする単射である．

最後に，対象の部分は要素として属する元によって（同等なものを除いて）定まる．

命題 8. A, U, V は **T** の対象，i, j は **T** の射で $i : U \hookrightarrow A$，$j : V \hookrightarrow A$ とする．このとき以下の二つの事柄は同値である（McLarty 1995, p. 212）．

---

[12] 参照箇所でローヴェアは証明を与えていないが，証明は以下のようであろう．終対象 1 と始対象 0 をもつ任意の圏 **C** において，**C** の任意の対象 T に対して，1 から T への射が丁度一つ存在することを示す．$1 \simeq 0$ を仮定すると，1 から 0 への同形射 f が存在する．始対象の定義から，0 から T への唯一の写像 $!_T$ が存在する．合成によって $!_T f : 1 \to T$ を得る．唯一性を示すために $t : 1 \to T$ を仮定する．f は同形射なので逆射 $f^{-1} : 0 \to 1$ が存在する．合成によって $t \circ f^{-1} : 0 \to T$ を得るが，始対象の性質から $t \circ f^{-1} = !_T$ が成り立つ．従って $t = t \circ f^{-1} \circ f = !_T \circ f$ が成り立ち，唯一性も示された．

[13] 0 が元 $o : 1 \to 0$ をもつと仮定する．始対象の定義あるいは終対象の定義から唯一の射 $! : 0 \to 1$ が存在する．これらを合成すると $! \circ o : 1 \to 1$ と $o \circ ! : 0 \to 0$ を得るが，それぞれ終対象の定義と始対象の定義から $! \circ o = 1_1$ かつ $o \circ ! = 1_0$ が成り立つ．これは $1 \simeq 0$ を示しているので（**T**2）と矛盾する．

[14] 証明は以下のようである．（**T**1）を用いるために，$f \circ c_0 = g \circ c_0$ を満たすような $c_0 : 1 \to A$ があると仮定する．これは直ちに前提と矛盾する．矛盾からは何を導いてもよいので $f = g$．ここで（**T**1）を用いると，仮定に依らず $f = g$ が成り立つことが分かる．

（a）$i \equiv_A j$.

（b）A の任意の元 $a : 1 \to A$ について，$a \in_A i \iff a \in_A j$.

結果として，対象の部分に関わる諸概念は元に言及する形で述べ直すことができる．

ここに挙げた結果は **T** の公理によってもたらされるものの一部である．**T** の公理と同等の公理を含むトポスを，ローヴェアらは抽象集合と任意射の圏（a category of abstract sets and arbitrary mappings）**S** と呼び，マクラーティは **Set** と呼ぶ．ローヴェアらの呼称に見られるように，この立場では当の圏の対象は集合と呼ばれ，射は集合間の写像すなわち関数と呼ばれるが，そのような命名は正当化を必要とする．以下に見るように，上に示した諸結果はその根拠の一部となる．

命題 6 は例えばモノイドとモノイド準同形の圏との間に区別を生む．一点モノイドから任意のモノイドへの準同形写像，つまり元は一つしかない．準同形写像は集合論の関数の一種として理解できるので，二つの射の等しさを調べようとすれば，それら二つの射がドメインの各元でとる値が一致しているか否かを調べなければならない．しかしここまで使ってきた用語法に従えば各モノイドに元は単位元一つしかなく，二つの射が単位元でとる値は準同形の定義から一致してしまうので，結局モノイドの元は二つの射を区別する役に立たない．集合論の関数にモノイド準同形写像がもつような制約は無いので，一点集合から任意の集合への関数はそのコドメインである集合の元を正確に表す．従って集合の元を用いて二つの射を区別あるいは同定することができる．命題 6 が成り立つことはこの意味で **T** が「集合と関数の圏」であることの根拠となる．

命題 6 の帰結である命題 7 も命題 8 も同様の観点から **T** が「集合と関数の圏」であることを根拠づける．つまり **T** において一般元を用いて述べられた事柄を，元を用いて述べ直すことができたことは，対象と射に対して課せられる制約（上の例では対象がモノイドであることと，射がモノイド準同形であること）を無視できることを示している．その意味で **T** の対象は構造が入っていない集合，ローヴェアの言い方では「抽象集合」と見なされ，それらの間の射は関数と見なすことができる．

4.3　ボルツァーノの体系との比較

以上の準備によって，当初の目的であったボルツァーノの総体の体系とトポス理論との比較を試みることができる．我々は総体とトポスの対象を，ボルツァーノの意味での集合とトポス **T** の対象をそれぞれ重ね合わせる．対比に入る前に，3.3.1 節で触れた，ボルツァーノの総体が少なくとも二つの対象を必要とすることは，この時点で既に影響を及ぼす．ボルツァーノの総体が少なくとも二つのものを構成部分とするならば，それと重ね合わされるトポスの対象も少なくとも二つの部分をもつことが望まれる．しかし，始対象 0

は自分自身以外に部分をもたない．従ってこの試みもボルツァーノの体系の厳密な理解を試みるものとは言いがたいが，それでもこの比較によって総体と集合の違いがトポス理論のうちに実現されることが，一つの結果として得られることは確かである．

総体とトポスの対象に共通するのは，最低限定められている事柄（総体の場合は「複合をもつ」こと，トポスの場合は公理を満たすこと）以外は，各々がもつ構成部分の結合の仕方が未決であることである．トポスの対象の場合は「結合の仕方」と言うよりは，その対象上に定義されている構造と言う方が適切と考えられる．結合の仕方が未決であることで，そこに何らかの指定（総体の場合は結合の仕方の特徴を述べること，トポスの場合は公理を追加すること）を行うことが可能となり，様々な種類の総体，様々な種類のトポスの対象を考えることができる．ボルツァーノの意味での集合と，トポス $\mathbf{T}$ の対象はそのようにして得られるものであった．また，総体とトポスの対象に共通する点として，各々を内包的に定める方法が用意されていることも指摘できる．

ボルツァーノの意味での集合と $\mathbf{T}$ の対象の共通点としては，共に上位概念（総体とトポスの対象）から上に述べたような仕方で得られることに加えて，その内的変化を無視できることが挙げられる．ボルツァーノの意味での集合はその構成部分の結合の順序を変えても本質的なものが何も変わらないような総体だった．また $\mathbf{T}$ においては，一般の圏において一般元を用いて述べられた命題を元を用いて述べ直すことができ，そのことが T の対象を構造が入っていない集合，つまり内的に特定の変化がない集合と見なすことを可能にしていた．

これらの共通点に反して，部分と全体の関係をめぐっては複雑な違いが存在する．我々はボルツァーノの総体と構成部分の間に結ばれる関係が集合論における要素関係に近いことを指摘した．また，圏論において部分と全体の関係は二種類与えられるように見え，その一方は通常の部分集合や部分群などに対応するものであり，他方はある対象に相対化され，要素関係とよく似た定義をもつものだった．

圏論の側で部分と全体の関係が二種類定義されるのに対して，本稿ではボルツァーノの総体の体系の中に二種類の関係を見出すことはできなかった．部分と全体の関係を対象に相対化することに関しては 3.3.2 節で触れたベーバウドの提案によってボルツァーノの体系との関わりが見えるかも知れないが，ベーバウドの場合は何らかの表象への相対化であり，全ての表象が総体であるわけではないから，アナロジーを働かせるには慎重にならなくてはならない．これら諸々の関係同士の関わりについては課題として残る．

4.4　まとめ

本章では圏論関連の諸概念を導入し，圏論の言語で書かれたトポス理論によってボルツァーノの総体の体系を理解することを試みた。トポスはある公理群を満たす圏であり，

公理を付加することで様々な種類のトポスが得られる。公理を付加することで任意の射をその定義域の各元における値で区別できるようにしたトポス $\mathcal{T}$ の対象は，構造が入っていない集合と見なすことができる。このことから，ボルツァーノの総体とトポスの対象，ボルツァーノの集合と $\mathcal{T}$ の対象とがそれぞれ比較され，各々の間に類似を見ることができた。しかし課題も残された。圏論において部分と全体の関係は二種類定義されるように見えるが，そのこととボルツァーノの総体の体系における総体とその構成部分の間に結ばれる関係については類似を見出すことが困難である．

第 5 章

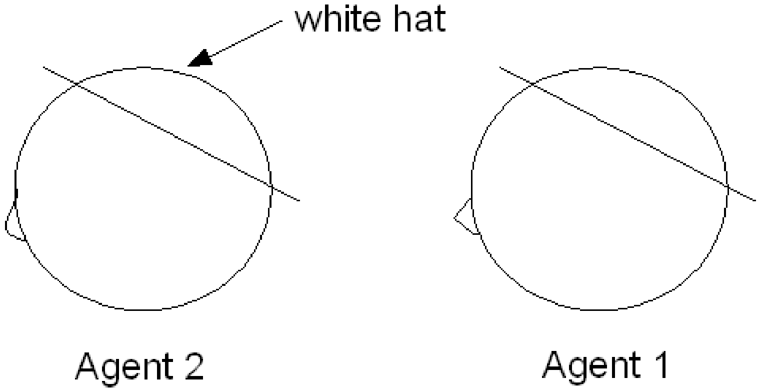
様相部分構造論理と “the two wise girls puzzle”

本章では八杉ら（Yasugi and Oda 2002）が提示した “the two wise girls puzzle” と呼ばれる論理パズルと部分構造論理の関係について論じる．我々は日常的に，信念を表現する発話を耳にすることで自分の信念を拡大させ，それを用いて推論を行う．このパズルはそのような仕方で複数の主体の信念が影響しあう状況を取り上げるものである．八杉らはある推論体系を用いて，そのパズルの当事者たちの信念が関わる推論を定式化し，パズルの解決可能性について論じている．我々はまずそのパズルと八杉らのアプローチの概要を見る．次いで様相部分構造論理の体系を導入し，その体系を用いた分析によって，当該のパズルの推論過程を記述するには弱化（weakening）の右規則の使用が本質的であることを指摘する．シークエント計算 **LK** については既知とする（例えば小野 （1994）を参照されたい）．

5.1 “The two wise girls puzzle”

まず Yasugi and Oda （2002, p. 146）にしたがってパズルの設定を解説する．3 人の人がおり，そのうちの 2 人をそれぞれ agent1，agent2 と呼ぶことにする．その 2 人は同じ方向を向いており，agent2 が agent1 の前にいる．したがって，agent1 は agent2 の姿を見ることができるが，agent2 は agent1 の姿を見ることができない．ただし，agent1 が何かを言った場合に，agent2 はその声を聞くことができる．二人は帽子をかぶっている．二人とも自分の帽子の色は分からない．ただし二人の位置関係によって，agent1 には agent2 の帽子の色が分かる．agent2 に白い帽子をかぶっており，agent1 の帽子の色は不問である．二人とは別の人—— 我々は彼を observer と呼ぶ—— が二人に，少なくとも一人は白い帽子をかぶっていると告げる．Observer は agent1 に「自分の帽子が白いかどうか分か

りますか」と問う．すると agent1 は「いいえ，分かりません」と答えた．その後同じ質問を agant2 に行ったところ，「はい，分かります」と答えた．agent2 が正しい結論に到達した，つまり自分が白い帽子をかぶっていることを知ることができたとすると，agent2 はどのような推論を経てその結論を得たのだろうか．



八杉らはある推論体系を用いればこの議論を定式化し，agent2 が正しい結論に到達できることを説明している．彼女らの体系は様相命題論理のシークエント計算で，$\mathbf{KD4^2}$ と呼ばれる．これは通常の命題論理の論理記号に加えて，agent1 の知識を表現するための様相演算子 B_1 と， agent2 の知識を表現するための様相演算子 B_2 を含む．p を命題とすると，$B_1(p)$ は「agent1 は p であると信じている」などと読まれる．さらに $\mathbf{KD4^2}$ は「agent1 は白い帽子をかぶっている」という命題を表す命題定項 $1W$ と，「agent2 は白い帽子をかぶっている」という命題を表す命題定項 $2W$ を含む．

証明に用いられる公理はシークエント計算 **LK** の公理と変わらない．推論規則としては，**LK** のものに以下の二つの推論規則 $(B_1 \to B_1)$ と $(B_2 \to B_2)$ が付け加えられている[1]．

$$\frac{\Gamma, B_i\Gamma' \to \Delta}{B_i\Gamma, B_i\Gamma' \to B_i\Delta}(B_i \to B_i) \quad (i = 1, 2)$$

ここで Γ，Γ'，Δ は論理式の集合であり，Δ は高々一つの元を有する．また $B_i\Gamma = \{B_i(A) | A \in \Gamma\}(i = 1, 2)$ である．

これらの規則は様相演算子に関する公理 **K**，**D**，**4** の代わりに導入されている．様相論理のシークエント計算を定義する際には三つの公理はよく以下のように推論規則の形式で

[1] 構造に関する推論規則のうち，exchange 規則と contraction 規則は八杉らの体系に明示的には含まれていない．しかし八杉らはシークエントを「論理式の列 → 論理式の列」という形式でなく「論理式の集合 → 論理式の集合」という形式で定義している（Yasugi and Oda 2002, p. 148）ので，それらの推論規則は暗黙に前提されていると見てよい．我々が体系 $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ を導入する際には，シークエントを「論理式の列 → 論理式の列」という形式で定義している．

導入される．

$$\frac{\Gamma \to A}{B_i\Gamma \to B_i(A)}(B_i\text{-}\mathbf{K}) \qquad \frac{\Gamma \to}{B_i\Gamma \to}(B_i\text{-}\mathbf{D}) \qquad \frac{B_i\Gamma \to A}{B_i\Gamma \to B_i(A)}(B_i\text{-}\mathbf{4}) \quad (i = 1, 2)$$

これらは左から順に公理 **K**，**D**，**4** に対応する[2]．実際，$(B_i \to B_i)$ は，$\Gamma' = \emptyset$ かつ $\Delta \neq \emptyset$ のときには $(B_i\text{-}\mathbf{K})$ であり，$\Gamma' = \Delta = \emptyset$ のときには $(B_i\text{-}\mathbf{D})$ であり，$\Gamma = \emptyset$ かつ $\Delta \neq \emptyset$ のときには $(B_i\text{-}\mathbf{4})$ である．逆にこれらの規則が成り立つことは，$\Delta = \emptyset$ の場合は $(B_i\text{-}\mathbf{D})$ と $(B_i\text{-}\mathbf{4})$ を用いて示すことができ，$\Delta \neq \emptyset$ の場合は $(B_i\text{-}\mathbf{K})$ と $(B_i\text{-}\mathbf{4})$ を用いて示すことができる．

様相演算子 B_1 と B_2 を導入することで，agent1 と agent2 の信念を表す文の集合がそれぞれ記述される．agent1 の信念を表す文の集合 Γ_1 は以下のように記述される．

$$\Gamma_1 = \{B_1(1W \vee 2W), B_1(2W)\}$$

ここで $B_1(1W \vee 2W)$ は observer の「少なくとも一人は白い帽子をかぶっている」という発話を聞いて agent1 が抱いた信念であり，$B_1(2W)$ は agent1 が agent2 の後ろ姿を見て抱いた信念である．他方，agent2 の信念は agent1 の発話を聞くことで変化しているので，その変化の前後それぞれについて記述される．agent1 の発話を聞く前の agent2 の信念を表す文の集合 Γ_2 は以下のように記述される．

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{matrix} B_2(1W \vee 2W), B_2(B_1(1W \vee 2W)), \\ B_2(2W \supset B_1(2W)), B_2(\neg 2W \supset B_1(\neg 2W)) \end{matrix} \right\}$$

$B_2(2W \supset B_1(2W))$ と $B_2(\neg 2W \supset B_1(\neg 2W))$ は，agent2 が自らと agent1 との位置関係を考えることで得る信念である．さらに agent1 の発話を聞いた後の agent2 の信念を表す文の集合 Γ_2 は以下のように記述される．

$$\Gamma_2' = \Gamma_2 \cup \{B_2(\neg B_1(2W))\}$$

Γ_2' は Γ_2 の拡張になっている．$B_2(\neg B_1(2W))$ は，agent1 が observer に対して行った「いいえ，分かりません」という返答を agent2 が耳にしたことで生じる信念である．

これらの準備を経て得られる結果の一部を以下に記す．

（a）$\Gamma_1 \nvdash B_1(1W)$
（b）$\Gamma_1 \nvdash B_1(\neg 1W)$
（c）$\Gamma_2' \vdash B_2(2W)$

[2] より厳密には，$(B_i\text{-}\mathbf{K})$ は公理 **K** すなわち $B_i(A \supset B) \supset (B_i(A) \supset B_i(B))$ と必然化（necessitation）すなわち「$\vdash A$ ならば $\vdash B_i(A)$」を合わせたものに対応する．$(B_i\text{-}\mathbf{D})$ は，$(B_i\text{-}\mathbf{K})$ を用いることで，公理 **D** すなわち $B_i(A) \supset \neg B_i(\neg A)$ との対応を示すことができる．同様に $(B_i\text{-}\mathbf{4})$ も $(B_i\text{-}\mathbf{K})$ を用いることで，公理 **4** すなわち $B_i(A) \supset B_i(B_i(A))$ との対応を示すことができる．

（d）$\Gamma_2 \nvdash B_2(2W)$

（a）と（b）は，agent1 は自分が白い帽子をかぶっているか否か分からないということを示している．これによって agent1 が observer に対して「いいえ，分かりません」という返答を行ったことが正当化される．そして（c）と（d）は，agent2 は agent1 の返答を聞いたあとは自分が白い帽子をかぶっていると分かるが，返答を聞くまでは分からない，ということを示している．もともとの問題は，agent2 が正しい解答に到達する推論の過程を示すこと，すなわち（c）を具体的に示すことだった．八杉らは（c）を示すために，シークエント $\Gamma_2' \to B_2(2W)$ の証明図を描くための手続きを記している．後の節で我々はその手続きを経て得られる証明図よりも整理された証明図の例を挙げ，そちらを議論に用いることにする．

5.2　部分構造論理によるアプローチ

八杉らのアプローチはシークエント計算 **LK** を基づく様相論理の証明体系を用いて agent2 の推論を記述するものだった．我々は八杉らの体系よりも幾分弱い体系を取りあげ，八杉らの結果がその体系へと持ち越せるか否かを検討する．

様相論理の体系を弱めるには，様相演算子についての公理または推論規則を変更あるいは削除するのが一般的である．八杉らの体系は様相論理の体系 **KD4** の変種なので，それを弱めた **KD** や **K4**，あるいはそれらの各々と **KD4** の間にある体系を用いて同じ結果が出るか否か検討することは可能であろう．しかしそのような制限は様相演算子の振舞いと信念の結びつきを損なうかもしれない．なぜなら，何人も矛盾した信念を抱かないと主張する公理 **D** は信念の論理を構築するための要請として理解されうるし，自分が何かを考えているときには，その考えていること自体を考えることができる，という能力が各人に存すると主張する公理 **4** もまた，その成立が自然に想定されうるからである．我々はむしろ様相演算子の振舞いを制御する推論規則には手を加えず，構造に関する推論規則を制限することでより弱い証明体系を得る．

5.2.1　様相部分構造論理 CFL_eKD4^2

我々が採用する体系はシークエント計算 $\mathbf{CFL_eKD4^2}$（Classical Full Lambek with exchange rules and the axioms **K**, **D** and **4** about 2 modal operators）と呼ばれる[3]．この体系

[3] この呼称は，我々の体系がシークエント計算の体系 $\mathbf{CFL_e}$ と様相論理の体系 $\mathbf{KD4^2}$ を合わせたものであることを示している．この命名の方針に従えば，前節で取り上げた八杉らの体系は $\mathbf{LKKD4^2}$ と呼ばれることになる．また **LK** は $\mathbf{CFL_e}$ に weakening 規則と contraction 規則を付け加えた体系 $\mathbf{CFL_{ecw}}$ と一致するから，$\mathbf{CFL_{ecw}KD4^2}$ と書いてもよい．

は，同じシークエント計算である **LK** の構造に関する推論規則から weakening 規則と contraction 規則を取り除き，代わりにいくつかの命題定項と論理結合子を導入し，さらにそれらの振舞いを制御する公理と推論規則を加えることで得られる．ここでは **LK** との差分についてだけ簡潔に説明する．詳細については亘理らの論文（Watari et al. 1999）を参照されたい（ここでの表記法はほぼそれに従っている[4]）．部分構造論理に関するより包括的な記述は Restall（2000）で与えられている．

LK との顕著な違いは二項結合子 $*$ と $+$ の存在である．これらは線形論理ではそれぞれ乗法的連言子（multiplicative conjunctive）および乗法的選言子（multiplicative disjunctive）と呼ばれる．それに対して **LK** の連言の結合子と選言の結合子はそれぞれ加法的連言子（additive conjunctive），加法的選言子（additive disjunctive）と呼ばれる．我々の表記と線形論理での表記の対応は以下のようである．

	連言の結合子		選言の結合子	
	乗法的	加法的	乗法的	加法的
線形論理	$\otimes$	$\&$	$\wp$	$\oplus$
我々の体系	$*$	$\wedge$	$+$	$\vee$

弱化（weakening）規則と縮約（contraction）規則を備えた体系では，$*$ と $+$ はそれぞれ $\wedge$ と $\vee$ と振舞いにおいて一致する．その意味で $*$ と $+$ は推論規則の制限によって連言と選言の概念が細分化されて生じた，一種の連言の結合子と選言の結合子である．新たに導入される命題定項の性質はこれらの結合子との関係で理解される．我々はまずこれらを含む $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ の新たな論理記号を導入する．次いでそれらの振舞いを定める諸公理と推論規則について述べる．さらに，これらの新たな結合子が有する直感的な意味について触れ，最後にパズルへの適用を行う．

LK に付け加えられる論理記号は，命題定項 **t**，**f**，$1W$，$2W$，様相演算子 B_1，B_2，そして上述の二項結合子 $*$ と $+$ である．命題定項 $1W$ と $2W$ は前節で説明したものと変わらない．B_1 と B_2 もまた前節と同様に agent1 と agent2 の信念を表現するために使われるが，それらのための推論規則としては前節と異なるものを用いる．ただしこの変更は亘理らの体系に準拠して議論を進めるためのもので，本質的なものではない．

t と **f** はそれぞれ，$*$ と $+$ を論理式の集合上の二項演算と見た場合の単位元の役割を果たす．つまり，後述する公理と推論規則を用いて以下の事柄を示すことができる．A を論

[4] ただし様相演算子 $\Box$ については八杉らの体系との比較を容易にするため表記を B に改めた．

理式として，

$$\vdash \mathbf{t} * A \to A \qquad \vdash A \to \mathbf{t} * A \qquad \vdash A * \mathbf{t} \to A \qquad \vdash A \to A * \mathbf{t}$$
$$\vdash \mathbf{f} + A \to A \qquad \vdash A \to \mathbf{f} + A \qquad \vdash A + \mathbf{f} \to A \qquad \vdash A \to A + \mathbf{f}$$

同様の事柄は $\wedge$ と $\top$，$\vee$ と $\bot$ の間にもそれぞれ成り立つ．つまり，$\top$ と $\bot$ はそれぞれ $\wedge$ と $\vee$ の単位元である．さきほどの $*$ と $+$ と同様に，weakening 規則と contraction 規則があれば，**t** と $\top$，**f** と $\bot$ はそれぞれ互いに区別できない．$\top$ と $\bot$ は **LK** ではそれぞれ真なる命題と偽なる命題を表すものとして理解されるから，新たに導入される **t** と **f** は推論規則の制限によって生じた，一種の真なる命題および偽なる命題と考えることができる．

本論文で用いる $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ の公理と推論規則は以下の通りである．ただしここでは **LK** に付け加えるものしか記載されていない．本節冒頭で述べたように，構造に関する推論規則から weakening 規則と contraction 規則は除かれている．したがって構造に関する推論規則として利用できるのは exchange 規則と cut 規則だけである．

- 公理

$$\to \mathbf{t} \qquad \mathbf{f} \to \qquad \Gamma \to \Delta, \top \qquad \Gamma, \bot \to \Delta$$

- 推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma, \mathbf{t} \to \Delta}(\mathbf{t}\mathrm{w}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \mathbf{f}}(\mathbf{f}\mathrm{w})$$

$$\frac{\Gamma, A, B \to \Delta}{\Gamma, A * B \to \Delta}(*\ \mathrm{left}) \qquad \frac{\Gamma \to A, \Delta \quad \Gamma' \to B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \to A * B, \Delta, \Delta'}(*\ \mathrm{right})$$

$$\frac{\Gamma, A \to \Delta \quad \Gamma', B \to \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A + B \to \Delta, \Delta'}(+\ \mathrm{left}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, A + B}(+\ \mathrm{right})$$

$$\frac{\Gamma \to A}{B_i\Gamma \to B_i(A)}(B_i\text{-}\mathbf{K}) \qquad \frac{\Gamma \to}{B_i\Gamma \to}(B_i\text{-}\mathbf{D}) \qquad \frac{B_i\Gamma \to A}{B_i\Gamma \to B_i(A)}(B_i\text{-}\mathbf{4}) \quad (i = 1, 2)$$

ここで A と B は論理式であり，Γ，Γ'，Δ，Δ' は論理式の列であり，$\Gamma = A, B, \cdots$ のとき $B_i\Gamma = B_i(A), B_i(B), \cdots$ である．この体系はおおむね亘理らの体系を基にしているが，パズルに適用できるように様相演算子に関する推論規則を各 agent に相対化している点でもっとも異なる．

5.2.2　Resource-consciousness

後々の議論のために，+ についての推論規則の特徴を述べておく．既に触れたように + はある種の選言の結合子であるから，同じ選言の結合子である $\vee$ についての推論規則との比較が有効である．+ についての左規則でとくに $\Gamma = \Gamma'$ かつ $\Delta = \Delta'$ の場合に両者の違いが明確になる．

$$\frac{\Gamma, A \to \Delta \quad \Gamma, B \to \Delta}{\Gamma, \Gamma, A + B \to \Delta, \Delta}(+\text{ left}) \qquad \frac{\Gamma, A \to \Delta \quad \Gamma, B \to \Delta}{\Gamma, A \vee B \to \Delta}(\vee\text{ left})$$

これら二つの推論において，推論の前提は一致しているが，結論は一致していない．+ の左規則では推論の前提にあった二つの Γ がそのまま結論に現れているのに対し，$\vee$ の左規則では前提にあった二つの Γ と二つの Δ が結論ではそれぞれ一つになっている．つまり両者は推論に用いられる資源（resources）に関して，片や前提にあるものを結論において保存し，片や保存しない，という違いを有すると言える．新たに導入された選言の結合子が——ひいてはこの証明体系全体が——有する，推論に用いられる資源の増減に関する敏感さは，“resource-conciousness” あるいは “resource-sensitivity” と呼ばれる．+ と $\vee$ が別々の選言の結合子として与えられていることは，我々の体系が resource-conscious な性格を有することの一つの顕れである．

このような resource-conciousness は，+ の右規則と $\vee$ の右規則の比較でも見てとることができる．$\vee$ の右規則は以下の二つの形式を有していた．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}(\vee\text{ right}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}(\vee\text{ right})$$

後者の形式の規則において $\Delta = \Delta', A$ の場合を考える．

$$\frac{\Gamma \to \Delta', A, B}{\Gamma \to \Delta', A \vee B, B}(\vee\text{ right}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta', A, B}{\Gamma \to \Delta', A + B}(+\text{ right})$$

再び二つの推論で前提は一致しており，結論は異なっている．$\vee$ の右規則を適用した場合，結論に新たに現れる選言において新たな B が選言肢として導入されている．それに対して + の右規則を適用した場合には，前提に含まれる B が結論に新たに現れる選言の選言肢として使われている．結果として，$\vee$ の右規則を適用した場合は推論の資源として用意されていた B の数が増加したことになり，+ の右規則を適用した場合はその増加が起こらなかったことになる．この事実もまた，+ が有する resource-conciousness を示している．

$\wedge$ と $\vee$ の間に認められるような双対性が $*$ と + の間にも認められるので，$*$ もまた推論の資源に関する conciousness を有する．$*$ と + は構造に関する推論規則を制限することによって $\wedge$ と $\vee$ から分かれ出た連言の結合子と選言の結合子だったので，結局 $*$ と + は，

$\wedge$ と $\vee$ に潜在していた resource-conscious な側面を取り出したものとして理解できる．このような仕方で連言と選言の概念の精緻化が行われることによって，我々の体系は後述する一定の「弱さ」を得ることになる．

後の議論のために，+ に素朴な意味での意味づけを行っておきたい．推論規則による特徴づけは確かに論理記号に意味を与える一つの方法だが，それとは別に素朴な意味づけを与えることもできる[5]．一つの方法は，+ を含む論理式 $A+B$ と何らかの意味で等価で，かつ + を含まない論理式の意味を利用することである．我々は証明論の枠組みで議論を展開しているので，等価性としては二つの論理式の間の相互導出可能性を用いるのがよい．たとえば以下の事実が利用できる．

$$\vdash A+B \to (\neg A) \supset B \qquad\qquad \vdash (\neg A) \supset B \to A+B$$

すなわち，$A+B$ と $(\neg A) \supset B$ は互いに導出可能である．そして $(\neg A) \supset B$ の意味は「A が成りたたないならば B が成りたつ」であるから，それを $A+B$ の意味として採用するのである（竹内 1995, p. 22）．これに対して + でない選言の結合子を含む命題 $A \vee B$ の意味は「A が成りたつか，または，B が成りたつ」というものである．ただし A が成りたつか B が成りたつかは分からない（p. 23）．$\vee$ についての推論規則はこの考え方をよく反映している．たとえば $A \vee B$ から C を導出したい場合，A が成りたつか B が成りたつか分からないのだから，A から C が導出されることと B から C が導出されることの両方を示さねばならない．これは以下に示す $\vee$ についての左規則が要求することである．

$$\frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}(\vee\ \mathrm{left})$$

5.2.3　証明体系としての強さ

八杉らの体系と我々の体系は別の論理記号を有するので，定理の集合の大小を容易に比較することはできない．しかし，私たちの体系がある意味で弱い体系であることは，以下のような代表的なトートロジーが証明できないことから分かる．A，B，C を論理式として，

- $A \supset (B \supset A)$
- $A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

[5] 適切な代数を用いて意味論を与えることももちろん可能だが（Watari et al. 1999, pp. 432–434），我々は自然言語で記述された論理パズルに論理体系を適用しようとしているので，自然言語から離れたそのような意味論に依拠することはできない．

たとえば $A \supset (B \supset A)$ の証明図を結論から遡って描こうとすると，下図のように証明図を完成させることができない．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{?}{A, B \to A}}{A \to B \supset A}}{\to A \supset (B \supset A)}$$

この場合，weakening 規則が使えないことが証明図の完成を妨げている．また，他の二つの論理式については contraction 規則がないため証明図が完成されない．その一方で，我々の体系は弱すぎるものではない．$(A \wedge B) \supset (A \vee B)$ のように **LK** においても weakening 規則や contraction 規則を使わなくともよい証明は我々の体系でも行うことができる．また **LK** において weakening 規則や contraction 規則を用いなければ証明できない論理式であっても，そこに現れる連言の結合子と選言の結合子をそれぞれ $*$ と $+$ に置き換えることによって証明可能となるものもある．たとえば $A \supset B$ と $(\neg A) \vee B$ の相互導出可能性は contraction 規則と weakening 規則を用いて示されるため，我々の体系では示すことができない．しかし $(\neg A) \vee B$ に現れる選言の結合子を $+$ に置き換えたものは，$A \supset B$ と相互に導出可能である．また，矛盾律や排中律もその例となる．

5.3　CFL_eKD4^2 をパズルに適用する

これまでの準備を踏まえて，我々は八杉らの結果が $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ でも成立するか否かを検討する．とりわけ我々の検討は，observer に対する agent1 の返答を耳にした後の agent2 の信念を記述する文の集合 Γ_2' から $B_2(2W)$ が導出されることを示すことができるか，という点に向けられる．すなわち，$\mathbf{CFL_eKD4^2}$ の公理と推論規則を用いてシークエント $\Gamma_2' \to B_2(2W)$ に至る証明図を描くことができるか，ということが問題である．我々は結論から遡って証明を構成してゆく．以下の図は，そうして構成される図の一例である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{2W \to 2W}{\to \neg 2W, 2W} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{?}{1W \to 2W, 1W}}{1W, \neg 2W \to 1W} \qquad \cfrac{\cfrac{?}{2W \to 2W, 1W}}{2W, \neg 2W \to 1W}}{1W \vee 2W, \neg 2W \to 1W}}{B_1(1W \vee 2W), B_1(\neg 2W) \to B_1(1W)}}{B_1(1W \vee 2W), \neg B_1(1W), B_1(\neg 2W) \to}}{B_1(1W \vee 2W), \neg B_1(1W), \neg 2W \supset B_1(\neg 2W) \to 2W}}{B_2 B_1(1W \vee 2W), B_2 \neg B_1(1W), B_2(\neg 2W \supset B_1(\neg 2W)) \to B_2 2W}$$

求める証明図を得るためには Γ_2' の限られた要素で十分であることに八杉らは注意を促しており（Yasugi and Oda 2002, p. 155），それにしたがって図の最下行には必要な要素

だけを並べてある．証明の最上行を見れば分かるように，我々の体系には weakening の右規則が無いためにこの証明図は完成されない．もちろん証明図の描き方は無数に存在するので，weakening 規則がなければ証明できないということを厳密に検証するには適当な意味論を用意して論じる必要があるが，そちらについては稿を改めたい．我々はむしろ次の事実に注目する．すなわち，最下行に含まれる $B_2(B_1(1W \vee 2W))$ に現れている $\vee$ が $+$ であれば，証明を完成させることができる．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{1\mathrm{W} \to 1\mathrm{W} \qquad \dfrac{2\mathrm{W} \to 2\mathrm{W}}{2\mathrm{W}, \neg 2\mathrm{W} \to}}{1\mathrm{W} + 2\mathrm{W}, \neg 2\mathrm{W} \to 1\mathrm{W}}}{B_1(1\mathrm{W}+2\mathrm{W}), B_1(\neg 2\mathrm{W}) \to B_1(1\mathrm{W})} \\ \vdots}{B_2 B_1(1\mathrm{W}+2\mathrm{W}), B_2 \neg B_1(1\mathrm{W}), B_2(\neg 2\mathrm{W} \supset B_1(\neg 2\mathrm{W})) \to B_2(2\mathrm{W})}
$$

我々は二種類の選言の結合子の振舞いについては詳述してきたが，パズルで用いられているような日常言語とのかかわりで二つの選言の結合子をどう使い分けるかについてはほとんど述べてこなかった．Γ_2' は八杉らの先行研究からそのまま引き継いだものなので，その要素には部分構造論理の論理記号を用いて記述しなおすべき箇所があるかもしれない．さて，Γ_2' の要素である $B_2(B_1(1W \vee 2W))$ に現れる選言の結合子の置き換えは正当だろうか．そもそもその正当性を検討するための確固たる道具立てを我々は手にしているだろうか．

ここで我々が直面しているのは，形式言語と日常言語の対応付けの問題である．理想的には，日常言語で選言を含む文が与えられたときに，その選言を $\vee$ で書くべきか $+$ で書くべきかを決定する道具立てがあると良い．我々は二種類の選言に対して直感的な意味を与えた．すなわち，$A \vee B$ を「A または B である（ただしどちらが成りたつかは分からない)」と読み，$A+B$ を「A でないならば B である」と読む可能性を示唆した．しかしこの翻訳は，選言文を類別する道具立てとしては，かなり弱いと思われる．なぜなら，この二つの意味づけは結局同じことを言っているのではないか，という批判に耐えられるかどうか疑わしいからだ．「A または B で，さらに A でないならば，当然 B だろう」そして「A でないならば B であるとしよう．A か A でないかどちらかだ．A であれば A または B だと言える．A でない場合でも，仮定から B なのだから，再び A または B だと言える」などと推論して，二種類の選言の意味の間に差を認めることができない人もいるだろう．この人の推論におかしな所は認められない以上，問題は選言の結合子に対して日本語で与えられた意味にある．この点については一層検討を行うことが必要である．

5.4 公理 D について

この節では，様相公理 **D** について一つの所見を与える．我々はシークエント計算 $\mathbf{CFL_e}$ に，公理 **K**，**D**，**4** のそれぞれに対応する推論規則を追加した．規則 $(B_i\text{-}\mathbf{D})$ に対応する公理 **D** は $B_i(A) \supset \neg B_i(\neg A)$（$A$ は論理式）である．公理 **D** にはこの他にも述べ方がある．たとえば $\neg\neg B_i(A \wedge \neg A)$ である．もともと公理 **D** は義務様相（deontic modality）を表現するために導入されたものだが，しかし我々は当該の様相演算子を信念を表現するための演算子として使っているので，後者の形式の公理は “It is not believed that A and not A”，つまり “No contradiction is believed” と読める．前者を $\mathbf{D}_1$，後者を $\mathbf{D}_2$ と呼ぶことにしよう．規則 $(B_i\text{-}\mathbf{K})$ を伴う **LK** では，contraction と weakening を用いて $\mathbf{D}_1$ と $\mathbf{D}_2$ を相互に導出できる．しかし $(B_i\text{-}\mathbf{K})$ を伴う $\mathbf{CFL_e}$ では，二つの導出は両方失敗する．したがって $\mathbf{D}_1$ と $\mathbf{D}_2$ は同一視できない．

$\mathbf{CFL_e}$ では選言の概念が二つに分かれ，その結果二つの演算 $\vee$ と $+$ が生じた．そしてその各々の単位元（unit）として $\perp$ と $\mathbf{f}$ が導入された．**LK** のように weakening と contraction を含む体系では，この二つは同一視でき，任意の矛盾した文を表す定項と見なすことができる．さらに $\mathbf{CFL_e}$ では連言も二つに分かれ，その結果二つの演算 $\wedge$ と $*$ が生じる．したがって，我々が $\mathbf{CFL_e}$ を証明体系の基本とするならば，我々は矛盾した命題を表現するためのより多くの手段を手にしていることになる．“No contradiction is believed” が公理 **D** の意味だとすれば，$\mathbf{CFL_e}$ の語彙を用いた場合，以下のようなものをその表現の候補とすることができるだろう．

- $\mathbf{D}_1 : B_i(A) \supset \neg B_i(\neg A)$
- $\mathbf{D}_2 : \neg B_i(A \wedge \neg A)$
- $\mathbf{D}_3 : \neg B_i(\perp)$
- $\mathbf{D}_4 : \neg B_i(\mathbf{f})$
- $\mathbf{D}_5 : \neg B_i(A * \neg A)$

最初の二つは先に述べた $\mathbf{D_1}$ と $\mathbf{D_2}$ である．$\mathbf{D_3}$，$\mathbf{D_4}$，$\mathbf{D_5}$ は，$\mathbf{D_2}$ に現れている矛盾した命題の表現を別の表現に置き換えることで得られる．これらのうちどの二つも同一視できない．なぜなら，これらの間に成立する，$(B_i\text{-}\mathbf{K})$ を伴う $\mathbf{CFL_e}$ における導出可能性は以下

のようになるからである．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{D}_5 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbf{D}_4 \arrow[ur] & \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_3 \\
 & \mathbf{D}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

推論規則 (B_i-**K**) を伴う **LK** では，これらはすべて互いに導出可能である．しかし我々は推論規則 (B_i-**D**) を採用したので，公理 **D** の表現として図の中央に書かれているものを選択したことになる．これらのうち，どの表現が “No contradiction is believed” という文の内容を最もよく表現しているか，ということについて我々は考えを持ち合わせていない．公理 **D** は信念や義務が満たすべき要件の一つとして導入されるものであるから，このような多様な定式化が可能になることは，部分構造論理の使用が信念や義務の概念を理解する一助となることを意味していると言ってよい．ここで再び重要となるのは，5.3 で指摘したように日常言語と形式言語との対応付けである．我々は “contradiction” という語で，ある文とその否定との multiplicative conjunction のことを言っているのか，それともそれらの additive conjunction のことを言っているのか．そのような対応付けの問題が根底にある．

5.5　まとめ

まず “the two wise girls puzzle” とそれに対する八杉らのアプローチを紹介した．次いで resource-conscious な性質を有する様相部分構造論理の体系を導入し，その体系を用いて当該のパズルの推論過程を記述するには弱化（weakening）の右規則の使用が本質的であることを指摘した．最後に，部分構造論理に特有の結合子と日常言語の対応のつけ方次第で，先に導入した部分構造論理の体系でもパズルが解けることを指摘し，部分構造論理と日常言語の対応の重要性を確認した．

「ある推論規則を欠いた証明体系では，ある文が証明できない」ということを厳密に示すためには，意味論的道具立てに訴えることになる．第 6 章ではこの問題意識のもとに，我々の体系の意味論の可能性について検討する．

第 6 章

前層のトポスによる様相部分構造論理の意味論構築に向けて

第 5 章では Yasugi and Oda （2002）において論じられた「two wise girls puzzle」を分析するための基本的な道具立てとしてある部分構造論理の体系を用いた．その体系は Kitamura, Nakatogawa and Fukayama （2007）において Fukayama が $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ と名付けたものである．本章ではその体系に対して可能世界意味論を展開するためにトポスを使うことを試みる．様相部分構造論理に対する代数的意味論（Watari et al. 1999）や代数的意味論を介した可能世界意味論（Ono and Komori 1985）に対して，トポスを用いて直接に可能世界意味論を与えようとするものである．様相述語論理の意味論を求める Shehtman and Skvortsov （1990）および Awodey and Kishida （2008）のように位相ブール代数上の層（sheaf）の概念を用いるアプローチが存在する．我々は圏論の言語を用いてより容易に記述できる前層（presheaf）の概念を用いて意味論を与えることを追求する．その記述の仕方は Moerdijk and van Oosten （2007） を参考にしている．結果として，前順序集合 $\mathbf{W} = \langle W, R\rangle$ が解釈のフレームとして与えられたとき，原子文への付値に関して $\mathbf{W}$ 上の前層のトポスは有用であることが見出される．その一方で，トポスを用いて我々の様相を解釈することと，推論の際にリソースの数や順序に配慮しなければならない結合子を含む文の真理条件を記述することに関しては，未解決の問題が見出される．

6.1　先行研究

部分構造論理は推論に使われるリソースの数やそれらの順序に配慮する（resource-conscious な）論理である。その形式的体系の一つであるシークエント計算 **CFL** は，よく知られた論理結合子に関する推論規則に加えて，推論の際に resource-conscious な結合子に対する推論規則と「構造に関する推論規則」（structural inference rules），すなわち

weakening，exchange，contraction を含む。

resource-consciousness の考え方を説明するために $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ に特徴的な推論規則のいくつかに触れておく[1]．以後，Γ や Δ のようなギリシャ文字の大文字は文のリストを表し，σ や τ のようなギリシャ文字の小文字は文を表すこととする．文のリストは空であってもよい．はじめに，積法的連言子 $*$ と積法的選言子 $+$ に関する推論規則は以下のようである．

$$\frac{\Gamma, \sigma, \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \sigma * \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}(* \text{left}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \sigma, \Delta \quad \Gamma' \longrightarrow \tau, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \sigma * \tau, \Delta, \Delta'}(* \text{right})$$

$$\frac{\Gamma, \sigma \longrightarrow \Delta \quad \Gamma', \tau \longrightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \sigma + \tau \longrightarrow \Delta, \Delta'}(+ \text{left}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma, \tau, \Delta'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma + \tau, \Delta'}(+ \text{right})$$

一方，以下は通常の連言子 $\wedge$ と選言子 $\vee$ に関する規則である．これらの結合子は上述の積法的結合子と区別して，それぞれ加法的連言子，加法的選言子と呼ばれる．

$$\frac{\Gamma, \sigma, \Gamma' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \sigma \wedge \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}(\wedge \text{left}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma, \Delta' \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, \tau, \Delta'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma \wedge \tau, \Delta'}(\wedge \text{right})$$

$$\frac{\Gamma, \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \sigma \wedge \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}(\wedge \text{left})$$

$$\frac{\Gamma, \sigma, \Gamma' \longrightarrow \Delta \quad \Gamma, \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \sigma \vee \tau, \Gamma' \longrightarrow \Delta}(\vee \text{left}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma, \Delta'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma \vee \tau, \Delta'}(\vee \text{right})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \tau, \Delta'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \sigma \vee \tau, \Delta'}(\vee \text{right})$$

規則 $(* \text{left})$ と $(\wedge \text{left})$ を例に，積法的結合子と加法的結合子の違いを見よう．二つの規則は下式の左辺に σ と τ の連言を作り出す点で共通している[2]．それらの違いは規則の上式にあり，$(* \text{left})$ が上式の左辺に σ と τ の両方を必要とするのに対して $(\wedge \text{left})$ は σ と τ のどちらか一つだけを必要とする．したがって $(\wedge \text{left})$ の第一の（第二の）規則によると上式の左辺が τ（σ）を含まないにもかかわらず，それを含む下式を推論することができる．このことから $(\wedge \text{left})$ はある文を連言肢の一方として関連するリソースなしに生み出すと言える．対照的に $(* \text{left})$ は与えられたリソース σ と τ からそれらの連言を生

---

[1] $\mathbf{CFL_eKD4^2}$ の公理と推論規則の全体については Kitamura et al.（2007）を見よ．

[2] 推論

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Pi \longrightarrow \Sigma}$$

が与えられたとき，$\Gamma \longrightarrow \Delta$ をその推論の上式，$\Pi \longrightarrow \Sigma$ をその推論の下式と呼ぶ．またシークエント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が与えられたとき，Γ をそのシークエントの左辺，Δ をそのシークエントの右辺と呼ぶ．

み出しているだけで，それらと無関係な文を生み出してはいない．この点で結合子 $*$ は resource-conscious であると言える．結合子 $+$ もまた resource-conscious である．なぜならば規則 $(+\,\text{right})$ によると，選言 $\sigma+\tau$ を推論できるのは上式にそのリソースとなる文 σ と τ が含まれるときに限られるからである．

CFL$_\mathbf{e}$KD4$^\mathbf{2}$ はさらに三つの構造に関する推論規則を持つ．一つは cut 規則であり，これは他のシークエント計算にも見られる．他の二つは exchange の左規則および右規則である（下付き文字の **e** はこれに由来する）．

$$\frac{\Gamma,\sigma,\tau,\Gamma' \longrightarrow \Delta}{\Gamma,\tau,\sigma,\Gamma' \longrightarrow \Delta}(\text{e left}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\sigma,\tau,\Delta'}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\tau,\sigma,\Delta'}(\text{e right})$$

この規則によって，隣り合う二つの文を交換することができる．

CFL$_\mathbf{e}$KD4$^\mathbf{2}$ は様相論理として，二つの様相演算子 $B_i(i=1,2)$ とそれらに対する三つの推論規則を持つ．Γ を文のリスト $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ としよう．このとき文のリスト $B_i\sigma_1,B_i\sigma_2,\ldots,B_i\sigma_n$ を $B_i\Gamma$ と略記する．この記法を用いると B_i に関する推論規則は以下のように書かれる．

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \sigma}{B_i\Gamma \longrightarrow B_i\sigma}(B_i\text{-}\mathbf{K}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow}{B_i\Gamma \longrightarrow}(B_i\text{-}\mathbf{D}) \qquad \frac{B_i\Gamma \longrightarrow \sigma}{B_i\Gamma \longrightarrow B_i\sigma}(B_i\text{-}\mathbf{4})$$

話の中心を代数構造による様相部分構造論理の代数的解釈へと移そう．Watari et al.（1999）は様々な様相部分構造論理の体系に対して代数的解釈を与えており，それらの体系は **CFL$_\mathbf{e}$KD4$^\mathbf{2}$** の基となった体系 **CFL$_\mathbf{e}$KD** および **CFL$_\mathbf{e}$KT4** を含んでいる[3]．彼らが解釈のために用いる代数的構造はモノイドの積を備える束であって，さらにその束の上に二つの関数が定義されたものである。加法的な論理結合子は束の演算によって，積法的な論理結合子はモノイドの積によって，そして必然性と可能性の演算子は各々が一つの関数を用いて解釈される。

部分構造論理のシークエント計算に対して可能世界意味論を展開する試みとして，Ono and Komori（1985, pp.176–177）は代数的構造を介してフレームの概念を導入している．その基本的な部分を概観しよう．彼らの基本的な道具はモノイドであってその積と両立する半順序を備えるものである．より正確には，構造 $\langle M,\cdot,1,\leqq\rangle$ が以下の三つの条件を満たすことが求められる．

(i) $\langle M,\cdot,1\rangle$ は 1 を単位元とするモノイドである．
(ii) $\langle M,\leqq\rangle$ は半順序集合である．さらに M の元 a,b,c に対して，$a\leqq b$ ならば，$a\cdot c\leqq b\cdot c$ かつ $c\cdot a\leqq c\cdot b$ である．
(iii) M のすべての元 a に対して $1\leqq a$.

[3] 様相論理 **KT4** は **S4** と一致する．

これらを満たす $\langle M, \cdot, 1, \leqq \rangle$ は *PO* モノイド（*PO-monoid*）と呼ばれる．

次いで SO モノイドの概念が導入される．$\langle M, \cdot, 1, \leqq \rangle$ を PO モノイドとする．$\langle M, \cdot, 1, \leqq \rangle$ が *SO* モノイド（*SO-monoid*）であるのは，その上に交わり（meet）の演算が定義されて半束（semilattice）を成すときである．すなわち M の任意の二元 a と b に対してそれらの交わり $a \cap b$ が定義されて，

- $a \cdot (b \cap c) = a \cdot b \cap a \cdot c$
- $(b \cap c) \cdot a = b \cdot a \cap c \cdot a$

が M の任意の元 a, b, c に対して成り立たねばならない．以後，モノイドの積 $a \cdot b$ を ab と略す．また $a \leqq b$ であるとき b は a の拡大（extension）であると言う．

次いでフレームの概念が導入される．$\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1, \leqq \rangle$ を SO モノイドとする．**フレーム**（*frame*）は $\mathbf{M}$ と，M の空でない部分集合 K の対 $\langle \mathbf{M}, K \rangle$ である．ただし K は下記の二条件を満たさねばならない．a, b, c, d を M の元とする．

(i) $a \in K$ かつ $bdc \leqq a$ ならば，K の中に d の拡大 d' が存在して $bd'c \leqq a$ が成り立つ．

(ii) $a \in K$ かつ $b \cap c \leqq a$ とする．さらに K の中に b の拡大が存在するならば，b の拡大 b' で $b' \cap c \leqq a$ が成り立つものが K の中に存在する．また K の中に b の拡大が存在しないならば，$c \leqq a$ が成り立つ．

以上，Ono and Komori （1985）における意味論の基本的な道具立てをフレームの定義まで見た．その定義が積法的結合子を含む文への付値にどう関わるかを以下で見よう．フレーム $\langle \mathbf{M}, K \rangle$ 上の**弱付値**（*weak valuation*）$\models$ が，まず K と原子文全体の集合の間の関係として定義される．p を原子文として $\models$ は次の条件を満たしていなければならない．

- 任意の $a, b, c \in K$ に対して，$a \models p$ と $b \models p$ と $a \cap b \leqq c$ が成り立つならば，$c \models p$ が成り立つ．

ついで $\langle \mathbf{M}, K \rangle$ 上の弱付値は K と文全体の集合の間の関係へと拡大される．彼らが意味論を提示す形式的体系は，恒偽文を表す記号 $\perp$，含意の結合子 $\supset$，選言の結合子 $\vee$，連言の結合子 $\vee$，加法的連言の結合子 $\wedge$，積法的連言の結合子 & を含むので，拡大された関係 $\models$ は次のように再帰的に定義される．$a \in K$，A と B を文として，

- $a \not\models \perp$.
- $a \models A \supset B \iff$ 任意の $b, c \in K$ に対して，$b \models A$ かつ $ab \leqq c$ ならば，$c \models B$ である．
- $a \models A \vee B \iff a \geqq b \cap c$ なる $b, c \in K$ が存在して，$b \models A$ または $b \models B$ が成り

立ち，さらに $c \models A$ または $c \models B$ が成り立つ．

- $a \models A \land B \iff a \models A$ かつ $a \models B$.
- $a \models A\&B \iff a \geqq bc$ なる $b, c \in K$ が存在して，$b \models A$ かつ $c \models B$ が成り立つ．

さらに $\mathbf{M}$ が最大元 ∞ を持つ場合，上記のうち $\perp$ に関する条項を

- $a \models \perp \iff a = \infty$

で置き換えた付値も用いられる．こちらの付値は**強付値**（*strong valuation*）と呼ばれる．

さて二種類の連言文 $A \land B$ と $A\&B$ への付値の違いに注目しよう．$a \models A \land B$ であるとき，$a \models B \land A$ であることは容易に分かる．しかし $a \models A\&B$ であるときに $a \models B\&A$ であるとは限らない．なぜなら，$a \models A\&B$ であることから存在が主張される $a \geqq bc$ なる $b, c \in K$ に関して，$a \geqq cb$ もまた成り立つとは限らないからである．モノイド $\mathbf{M}$ の積が可換であれば，$bc = cb$ が成り立つから，$a \geqq bc$ から $a \geqq cb$ を導くことができるであろう．同様の議論によって，$a \models A$ と $a \models A \land A$ が同値である一方で，$a \models A$ と $a \models A\&A$ が同値とは限らない．$\mathbf{M}$ の積に関して冪等律すなわち $aa = a$ が成り立つならば，これが成り立つことを示すことができるだろう．かくして，この付値は $\land$ と & を異なった意味を持つ連言子として扱っている．

彼らはクリプキタイプの意味論を実際に標榜しているけれども（p.176），resource-consciousness を捉えるためには代数的演算が大きく寄与している．我々は到達可能性関係を中心に据えた可能世界意味論の延長として resource-consciousness を捉えたいと考えるので，代数的演算が解決策の中心であるものに満足することはできない．

一方 Restall （2000, pp.239-248）は到達可能性関係にこだわった意味論を展開している．ただし複数の二項関係に加えて三項関係も用いられる．それらの到達可能性関係は，論理式に対する付値を記述する際に，その論理式が含む様相演算子や論理結合子に応じて使い分けられる．ここでは本論文の論点に関連する範囲で彼が用いる諸概念を解説する．

Restall は命題の解釈の基本的な枠組みとして点集合（point set）と呼ばれる半順序集合を用いる．点集合 $\mathcal{P}$ とは集合 P と，P 上の半順序 $\sqsubseteq$ の対 $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ である．定義されている半順序は解釈において重要である場合もあれば，重要でない場合もある．直観主義論理を解釈する際には，$\mathcal{P}$ の点は一定の量の情報を持つ状態と解される．その際，P 上に定義された $\sqsubseteq$ は状態の発展（development）と解され，$\mathcal{P}$ の元 x と y に対して $x \sqsubseteq y$ は，y が x より多くの情報を有していることを意味する．このように意味付けされた $\sqsubseteq$ は文の真理条件に影響を与える．状態 x と論理式 A に対して $x \Vdash A$ を「A は x において知られている」と読むと，さらに y を P の元として

- $x \Vdash A$ かつ $x \sqsubseteq y$ ならば，$y \Vdash A$

が成り立たねばならない．つまり，ある状態 x で A が知られていて，かつ状態 y が x よりも多くの情報を有するならば，y でも A が知られねばならない．また含意 $A \supset B$ について，

- $x \Vdash A \supset B \iff y \sqsupseteq x$ なるすべての y について，$y \Vdash A$ ならば $y \Vdash B$

が成り立つことが求められる．つまり，ある状態で $A \supset B$ を知っている以上は，その状態以上の情報を得た状態であればいつでも，A を知れば B も知らなければならない．これらは，$\sqsubseteq$ が状態が有する情報の大小関係を意図していることを反映している．

直観主義論理のように $\mathcal{P}$ 上の半順序を意味論に使う必要がなければ，あたかも $\mathcal{P}$ の点が離散的であるかのように考えることもできる．そのためには関係 $\sqsubseteq$ として同一性関係 $=$ をとればよい．そのような半順序集合は**平坦**（*flat*）であると言われる．

到達可能性関係は $\mathcal{P}$ 上に定義される．**正の二項到達可能性関係**（*positive two-place accessibility relation*）S とは $\mathcal{P}$ 上の二項関係であって，xSy なる任意の $x, y \in \mathcal{P}$ に対して，以下の二条件が成り立つものである．

- 任意の $x' \in \mathcal{P}$ に対して，xSy かつ $x' \sqsubseteq x$ ならば，$x'Sy'$ かつ $y' \sqsupseteq y$ となる $y' \in \mathcal{P}$ が存在する．
- 任意の $y' \in \mathcal{P}$ に対して，xSy かつ $y \sqsubseteq y'$ ならば，$x'Sy'$ かつ $x' \sqsubseteq x$ となる $x' \in \mathcal{P}$ が存在する．

この条件の意味に関する彼の説明は以下のようである．S は「xSy が成り立つときには，x において必然的なことのすべてが y において成り立つ」（everything necessary in x holds in y）と読まれる．そして x' の情報が x より少ないならば，x' において必然的なことは x においても必然的である．したがって xSy かつ x' の情報が x より少ないならば，x' において必然的なことは y において成り立ち，まして y より情報が多い y' においても成り立つ．これが第一の条件に対する説明である．彼は第二の条件に対して説明を与えていないが，同じ要領で説明を与えれば次のようになるだろう．y よりも y' が多くの情報を持つならば，y において成り立つことは y' においても成り立つ．それゆえ xSy かつ y よりも y' が多くの情報を持つならば，x において必然的なことは y のみならず y' においても成り立つ．すると x よりも情報が少ない x' において必然的なことも y' において成り立つ．これが第二の条件に対する説明である．

負の二項到達可能性関係（*negative two-place accessibility relation*）C は $\mathcal{P}$ 上の二項関係であって，任意の $x, y \in \mathcal{P}$ に対して，以下の二条件が成り立つものである．

- 任意の $x' \in \mathcal{P}$ に対して，xCy かつ $x' \sqsubseteq x$ ならば，$x'Cy'$ かつ $y' \sqsubseteq y$ となる $y' \in \mathcal{P}$ が存在する．

- 任意の $x' \in \mathcal{P}$ に対して，yCx かつ $x' \sqsubseteq x$ ならば，$y'Cx'$ かつ $y' \sqsubseteq y$ となる $y' \in \mathcal{P}$ が存在する．

Restall は xCy を「x は y と両立可能である」（x is compatible with y）あるいは「x が退け y が受け入れるものは存在しない」（there is nothing that x rejects that y accepts）と読む．二つの条件の意味は，両立可能な二つの状態の一方についてより情報が少ない状態を考えると，それと両立するように，もう一方について情報が少ない状態をとることができる，ということである．

三項到達可能性関係（*three-place accessibility relation*）R は $\mathcal{P}$ 上の三項関係であって，$Rxyz$ なる任意の $x, y, z \in \mathcal{P}$ に対して，以下の三条件が成り立つものである．

- 任意の $z' \in \mathcal{P}$ に対して，$z \sqsubseteq z'$ ならば，$Rx'y'z'$ かつ $y' \sqsupseteq y$ かつ $x' \sqsupseteq x$ となる $x', y' \in \mathcal{P}$ が存在する．
- 任意の $x' \in \mathcal{P}$ に対して，$x' \sqsubseteq x$ ならば，$Rx'y'z'$ かつ $y' \sqsubseteq y$ かつ $z' \sqsupseteq z$ となる $y', z' \in \mathcal{P}$ が存在する．
- 任意の $y' \in \mathcal{P}$ に対して，$y' \sqsubseteq y$ ならば，$Rx'y'z'$ かつ $x' \sqsubseteq x$ かつ $z' \sqsupseteq z$ となる $x', z' \in \mathcal{P}$ が存在する．

ここで関係 R の第一項を占める状態 x は，ある情報に適用すると別の情報を生じる規則を持っていると想定される．その上で $Rxyz$ は「z は，x の諸規則を y の情報に適用することで得られるすべてを有する」（z contains everything you get from applying the rules in x to the information in y）と読まれる．Restall は第二の条件に対してだけ説明を与えている．それを含めて説明を試みると，第一の条件は，x の規則を y の情報に適用して z の情報が得られるとき，z より多くの情報を持つ z' の情報は，x の情報と y の情報をそれぞれ増やして得られる状態 x' と y' から得ることができる，ということである．第二の条件は次のようである．x の規則を y の情報に適用して z の情報が得られるとき，x より少ない情報を持つ x' があれば，x' の諸規則を適用できる情報を持ち y より少ない情報を持つ状態 y' を得ることができて，その規則の適用で手に入る情報は z において成り立つのみならず，z より多くの情報を持つ z' においても成り立つ．第三の条件の読みは第二の条件に似る．すなわち，x の規則を y の情報に適用して z の情報が得られるとき，y より少ない情報を持つ y' があれば，y' の諸情報に適用できる規則を持ち，かつ x より少ない規則を持つ x' を得ることができて，その規則の適用で手に入る情報は z において成り立つのみならず，z より多くの情報を持つ z' においても成り立つ．

ただし R の第一項と第二項に関する想定，つまり前者が規則を持つ状態を担い，後者が規則を適用する情報を担うという想定は，逆転することもある．これは後で含意文についての評価の定義を見る際に明らかになる．

さて，Restall における到達可能性関係とは，上記いずれかの種類を持つ関係である．上に列挙した諸条件は $\sqsubseteq$ が同一性関係 $=$ であればすべて自明に成り立つので，$\mathcal{P}$ が平坦な半順序集合であれば，その上のすべての二項関係が二項到達可能性関係の要件を満たし，すべての三項関係が三項到達可能性関係の要件を満たす．つまり上に列挙した諸条件は，$\mathcal{P}$ が平坦でない場合にのみ，単なる関係が到達可能性関係であるための制約として機能する．

次いでフレームが定義される．フレームとは点集合 $\mathcal{P}$ であって，任意の数の到達可能性関係を備えるものである．フレームが定義されるとそれを用いて論理式に対する付値 $\Vdash$ が定義される．$\Vdash$ はフレームの元と論理式の間の関係であり，フレームの元 x と論理式 A に対して $x \Vdash A$ は「x において A は真である」と読まれる．A と B を論理式として，$A \wedge B$ や $A \vee B$ のように加法的結合子が支配的である論理式の付値は通常の帰納的定義に従う．様相文 $\Box A$ および $\Diamond A$ の付値は，x をフレーム $\mathcal{F}$ の元として以下のように定義される[4]．

- $x \Vdash \Box A \iff xSy$ であるすべての $y \in \mathcal{F}$ に対して $y \Vdash A$ である．
- $x \Vdash \Diamond A \iff xSy$ かつ $y \Vdash A$ である $y \in \mathcal{F}$ が存在する．

これは馴染み深い可能世界意味論における様相文の評価の仕方と一致している．

Restall の体系は既に触れた直観主義の含意の結合子に加えて，二種類の含意の結合子 $\rightarrow$ と $\leftarrow$ を持つ．これらが支配的である論理式の付値は以下のように定義される．A と B を論理式とする．

- $x \Vdash A \rightarrow B \iff Rxyz$ であるすべての $y, z \in \mathcal{F}$ に対して，$y \Vdash A$ ならば $z \Vdash B$ である．
- $x \Vdash B \leftarrow A \iff Ryxz$ であるすべての $y, z \in \mathcal{F}$ に対して，$y \Vdash A$ ならば $z \Vdash B$ である．

$Rxyz$ が「z は，x の諸規則を y の情報に適用することで得られるすべてを有する」と読まれることを思い出そう．$A \rightarrow B$ が x において真であるのは，x の諸規則と y の情報 A から z の情報 B が得られるときである．$B \leftarrow A$ が x において真である条件は，$Ryxz$ の第一項と第二項を逆転すれば $A \rightarrow B$ が x において真である条件に一致する．つまり，R

[4] Restall の体系では可能様相について別の演算子$\diamondminus$も存在し，可能様相文の評価はまず$\diamondminus A$ に対して以下のように定義される．

- $x \Vdash \diamondminus A \iff ySx$ かつ $y \Vdash A$ である $y \in \mathcal{F}$ が存在する．

$\diamondminus A$ は $\Box A$ に対して否定を介して結びつくという意味での双対ではないが，しかし Restall は証明論的観点から$\diamondminus$が可能様相であるとしている（Restall 2000, p.50）．この論点については彼の証明体系の詳細を論じる必要があるので立ち入らない．$\Diamond A$ の付値の定義は，$\Box A$ の付値の定義とは別の節で与えられている（Restall 2000, p.265）．

の第一項と第二項の逆転によって二種類の含意の意味を区別するのが要点である．

このような二種類の含意が現れる論理の例として，Restall は文字列の型に関する推論を掲げる．その例ではフレームの元は型を持つ文字列であり，論理式はその型と見なされる．したがって，x を文字列，A を型とすると $x \Vdash A$ は「x は A 型である」（x is of type A）と読まれる．このとき $A \to B$ 型の文字列 x と A 型の文字列 y からは B 型の文字列 xy が生じる．それに対して $B \leftarrow A$ 型の x と A 型の y からは B 型の yx が生じる．ここで xy と yx は x と y をそれぞれの順序で連結して得られる文字列である．これらを先の付値の書き方にすると次のようになる．

- $x \Vdash A \to B \iff xy = z$ であるすべての文字列 y, z に対して，$y \Vdash A$ ならば $z \Vdash B$ である．
- $x \Vdash B \leftarrow A \iff yx = z$ であるすべての文字列 y, z に対して，$y \Vdash A$ ならば $z \Vdash B$ である．

ここで三項到達可能性関係 $Rxyz$ は $xy = z$ である．これらは次の二条件にそれぞれ同値である．

- $x \Vdash A \to B \iff$ すべての文字列 y に対して，$y \Vdash A$ ならば $xy \Vdash B$ である．
- $x \Vdash B \leftarrow A \iff$ すべての文字列 y に対して，$y \Vdash A$ ならば $yx \Vdash B$ である．

Restall はこちらの簡便な表現だけを記述している．

Restall の体系は積法的連言子 $\circ$ を含む．これは我々の表記では $*$ に対応する．論理式 $A \circ B$ に対する付値は次のように定められる．

- $x \Vdash A \circ B \iff Ryzx$ であるすべての $y, z \in \mathcal{F}$ に対して，$y \Vdash A$ かつ $z \Vdash B$ である．

参考までに，加法的連言 $A \wedge B$ に対する付値は以下のようである．

- $x \Vdash A \wedge B \iff x \Vdash A$ かつ $x \Vdash B$.

Restall の体系はさらに二種類の否定 $\sim$ と $\neg$ を持つ．論理式 A に対して「A でない」は「A ならば矛盾する」としばしば同一視される．Restall の体系では「ならば」が $\to$ と $\leftarrow$ に分かれているので，「A ならば矛盾する」もまた二つに別れることになる．「ならば」として $\to$ を使う否定が ${\sim}A$ であり，$\leftarrow$ を使う否定が $\neg A$ である．${\sim}A$ と $\neg A$ に対する付値は以下のようである．

- $x \Vdash {\sim}A \iff xCy$ であるすべての $y \in \mathcal{F}$ に対して $y \nVdash A$.
- $x \Vdash \neg A \iff yCx$ であるすべての $y \in \mathcal{F}$ に対して $y \nVdash A$.

つまり x において A の否定が真であるのは，x と両立可能な $\mathcal{F}$ のすべての点において A が真でないときである．

以上，Restall の意味論においては三種類の到達可能性関係が使われることを見た．彼の意味論は複雑である代わりに，様々な部分構造論理に適用できる．必然性と可能性の様相を持つ文への付値に現れているように，彼の意味論は可能世界意味論の拡張を意図している．しかし，一般性と引き換えに生じた複雑さのゆえか，彼は自分の意味論を可能世界意味論と呼ぶことは誤解を招くと述べ，フレームという語を積極的に用いることにしている（Restall 2000, p.235）．しかし我々はできるだけ複雑さを避け，クリプキ構造に基づく意味論的概念の，より自然な拡張を得たい．

話の中心を様相論理に移そう．Shehtman and Skvortsov （1990）と，それに続いて Awodey and Kishida （2008）は，位相空間上の層の概念を用いてクリプキ構造を記述している．ここで位相空間論のごく基本的な諸概念を導入しておく[5]．位相空間はその元どもの間につながり，あるいはまとまりが定義された集合である．位相空間の元のつながり方，まとまり方を**位相**（*topology*）と呼ぶ．，位相空間は数学的構造として，集合と，その集合上の位相を表現するものの対として書かれる．位相を表現する仕方は複数あるが，その集合の**開集合**（*open set*）どもの全体，すなわち「開集合系」がよく用いられる．S を集合とすると，開集合系 $\mathcal{O}$ は S の部分集合の集合（S の冪集合の部分集合）であって，下記の公理に従うものである．

- $\emptyset, S \in \mathcal{O}$.
- $A, B \in \mathcal{O}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{O}$.
- 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のすべての元が $\mathcal{O}$ の元ならば，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$.

第一の公理は空集合と S 自身が開集合であることを主張している．第二の公理は，任意の二つの開集合の共通部分は開集合であると述べている．任意の有限個の集合の共通部分は，二つずつ共通部分をとる操作の繰り返しで得られるから，第二の公理は任意の有限個の開集合の共通部分が開集合であることを含意する．第三の公理を読む際には，添字集合 Λ が無限集合でありうることに注意が必要である．つまり第三の公理は，任意の有限個の開集合の和集合が開集合であると主張するだけでなく，任意の無限個の開集合の和集合が開集合であると述べている．

集合 S とその開集合系 $\mathcal{O}$ が与えられたとき，位相空間としての S は $\langle S, \mathcal{O} \rangle$ と書かれる．開集合系は位相の表現としてよく使われるので，開集合系が位相と呼ばれることもある．同じ理由で「集合 S 上の位相 $\mathcal{T}$」あるいは「位相空間 $\langle S, \mathcal{T} \rangle$」と言った場合に $\mathcal{T}$ が S の開集合系であることがある．

[5] 基本諸概念の説明は松村 （1966）に多くを負う．

開集合の概念からいくつもの関連する概念が定義される．$\langle S, O\rangle$ を位相空間とし，M を S の（開集合とは限らない）部分集合とする．このとき M の**開核**（*open kernel*）あるいは**内部**（*interior*）M^o とは，M の部分集合のうち最大の開集合である．それは M のすべての開部分集合の和集合として構成される．

次に閉集合と閉包の概念を導入する．**閉集合**（*closed set*）とは開集合の補集合である．集合 S が与えられたときに，開集合系の公理によって $\emptyset$ と S は S 上のいかなる位相においても開集合であった．ここで $\emptyset$ の補集合は S であり，S の補集合は $\emptyset$ であるから，$\emptyset$ と S は S 上の任意の位相において閉集合でもある．

開集合と閉集合は，互いに補集合であるという関係を介して双対概念を成す．我々は開集合から開核の概念を定義したので，閉集合から開核の双対概念を定義することができる．再び $\langle S, O\rangle$ を位相空間とし，M を S の（閉集合とは限らない）部分集合とする．このとき M の**閉包**（*closure*）ないし**触集合**（*adherence*）$\overline{M}$ とは，M を部分として含む集合のうち最小の閉集合である．これは M を部分として含むすべての閉集合の共通部分として構成される．

話を開核に戻そう．$\langle S, O\rangle$ が与えられたとき，開核に関連して以下のことが成り立つ．

- $S^o = S$.
- S の任意の部分集合 M に対して $M^o \subseteq M$.
- S の任意の部分集合 M と N に対して $(M \cap N)^o = M^o \cap N^o$.
- S の任意の部分集合 M に対して $M^{oo} = M$.

また，S の部分集合 M に対して M^o は一意に存在するので，M^o を M に対してある関数を適用した結果と見なすことができる．S の冪集合上のそのような関数を I としよう．その定め方からして S の部分集合 M に対して $I(M) = M^o$ である．すると上記四性質は，開核の性質であるとともに，関数 I の性質と見ることもできる．M^o を $I(M)$ で置き換えると，以下の四条件を得る．

- $I(S) = S$.
- S の任意の部分集合 M に対して $I(M) \subseteq M$.
- S の任意の部分集合 M と N に対して $I(M \cap N) = I(M) \cap I(N)$.
- S の任意の部分集合 M に対して $I(I(M)) = M$.

実のところ，S の冪集合上の関数 I が任意に与えられて上記の新たな四条件を満たせば，I をもとに開集合系の公理を満たすような S の部分集合の集合を定めることができて，さらにその開集合系から定義された開核が，I を S の部分集合に適用した結果と一致するようにできる．つまりこの四条件は，開集合系の代わりに S の冪集合上の関数が位相を定めるための公理として機能する．これを開核の公理と呼ぶ．

開集合系の公理と開核の公理は，その「双対」を考えることでそれぞれ閉集合系の公理と閉包の公理にすることができる．そのためには公理において S と $\emptyset$ を相互に置き換え，開核を与える関数と閉包を与える関数を相互に置き換え，さらに集合算の $\cup$ と $\cap$ を，部分集合関係 $\subseteq$ を $\supseteq$ でそれぞれ相互に置き換えればよい．

こうして定義される位相空間は，様相論理の意味論に用いることができる．$\langle S, O\rangle$ を位相空間とする．Awodey and Kishida（2008, p.148）の記法に従って論理式 A の解釈を $[\![A]\!]$ と書く．解釈はまず原子文 p に対して定義され，次いで複合的な論理式に対して拡大される．原子文 p の解釈 $[\![p]\!]$ は S の部分集合である．以下，A と B を論理式として $[\![\neg A]\!] = S - [\![A]\!]$，$[\![A \wedge B]\!] = [\![A]\!] \cap [\![B]\!]$，$[\![A \vee B]\!] = [\![A]\!] \cup [\![B]\!]$，$[\![\top]\!] = S$，$[\![\bot]\!] = \emptyset$，$[\![\Box A]\!] = I([\![A]\!])$ と定義される．そしてモデルが位相空間と解釈の組 $\langle S, [\![\cdot]\!]\rangle$ として定義され，モデルにおいて論理式が真であるという関係 $\models$ が

$$\langle S, [\![\cdot]\!]\rangle \models A \iff [\![A]\!] = S$$

によって定義される．これが位相空間を用いた様相命題論理の意味論である．

ある位相空間 S 上の層の概念は前層の概念を用いて定義される。S 上の（集合の）**前層** F（*a presheaf F (of sets) over S*）は S の開部分集合 U に対して集合 $F(U)$ を割り当て，さらに $V \subseteq U$ なる S の開部分集合の組 $\langle V, U\rangle$ に対して $F(U)$ から $F(V)$ への関数 $F(V, U)$ を割り当てる。ただし $F(U, U)$ は $F(U)$ 上の恒等関数であり，さらに W が S の開部分集合で $W \subseteq V \subseteq U$ ならば，合成関数 $F(W, V) \circ F(V, U)$ は $F(W, U)$ に等しくなければならない。たとえば $F(U)$ が U から実数全体の集合 R への連続関数全体の集合であり，$F(U)$ から $F(V)$ への関数 $F(V, U)$ が $F(U)$ の元（つまり U から R への連続関数）f に対して，それを V へと制限したもの $f|V$ を割り当てるとする。このような割り当て F は上述の二つの条件を満たすので前層を成す．

層の定義を与えよう．F を前層とする。さらに，S の開集合 U と U の開被覆 $\{U_i\}_i$ が与えられたときに，$F(U_i)$ と $F(U_j)$ それぞれの任意の元 f_i，f_j を U_i と U_j の共通部分に制限したもの $f_i|U_i \cap U_j$ と $f_j|U_i \cap U_j$ が一致するとする[6]。このとき，$F(U)$ の元 f であってそれを U_i へ制限すると f_i になるものが一意に存在するならば，F は**層**（*sheaf*）であると言う。これは開集合 U 全体に関する情報が，U_i どもに関する局所的な情報をのりづけして得られることを示している。

位相空間上の層の定義には以下のような代替となるものがあり，Awodey and Kishida（2008）はそれを採用している。S と F を位相空間とし，π を F から S への関数とす

[6] 被覆と開被覆の定義．S を位相空間とする．X が S の部分集合の集合で，$\bigcup X = S$ であるとき，X は S の**被覆**であると言う．X が S の被覆であって，さらに X の各元が S の開部分集合であるとき，X は S の**開被覆**であると言う．本文では，位相空間 S の開部分集合 U が再び位相空間となることから，U の被覆を考えている．一般に S の位相が開集合系 O_S によって与えられているとき，S の部分集合 M には $\{O \cap M \mid O \in O_S\}$ を開集合系とする位相が入る（相対位相）．

る。F の各元 a に対して a の近傍 U が存在して[7]，$\pi(U)$ が S の開部分集合であり，かつ π を U に制限したもの $\pi|U$ が同相写像であるとき (F, π) を S 上の層と呼ぶ。π は射影（*projection*）と呼ばれる。S の元 p に対して，$\{p\}$ の π による逆像 $\pi^{-1}(\{p\})$ は p 上の F のファイバー（*a fiber of F over p*）と呼ばれる。様相述語論理の外延的意味論を考える際，F として解釈のドメイン D がとられる（n 項述語を解釈する場合は層の直積の概念を用いて D^n から S への射影を使う必要がある）。各文の外延はファイバーごとに与えられた外延の和である。論理式 A に対して $\Box A$ の外延は，A の外延の内部として自然に与えられる。

6.2　前層のトポスによるアプローチ

集合上の前層の概念は，関手の概念を用いて，圏上の前層の概念へと抽象化される．$\mathbf{C}$ を圏とする．関手としての $\mathbf{C}$ 上の前層とは，$\mathbf{C}$ から $\mathbf{Set}$ への反変関手，つまり $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{Set}$ への関手である．集合 S 上の前層の概念は $\mathbf{C}$ を S の開集合系 O とすることで復元される．それを示そう．O は S の開集合間の包含関係を順序とする前順序集合として圏を成している（圏としての前順序集合については後に詳述する）．F を O から $\mathbf{Set}$ への反変関手とする．圏としての前順序集合の対象はその元であり，射は順序関係にある二元の対である．したがって $V \subseteq U$ なる開集合の対 $\langle V, U\rangle$ は O における V から U への射である．F は反変関手として $\langle V, U\rangle$ に関数 $F(U, V)$ を割り当てる．関手が恒等射と合成を保存するという性質は前層の定義に他ならない．したがって圏上の前層の概念は元々の前層の概念を含んでいる．今後は圏の諸概念を使うために関手としての前層を用いていくことにする．

ある圏 $\mathbf{C}$ 上の前層が作る全体は，ある前層から別の前層への適切な写像を定めることで圏を成す．前層は関手であるから，それらの間の写像としては自然変換が適切である．したがって圏 $\mathbf{C}$ 上の前層が作る圏は関手圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ である．我々はこれを習慣に従って $\widehat{\mathbf{C}}$ と略記する．

$\widehat{\mathbf{C}}$ は既に述べたトポスの例となる．トポスの定義を振り返ると，それは圏であって，以下の要件を満たすものであった．

- すべての有限極限を持つ．
- すべての有限余極限を持つ．
- 任意の二つの対象に対してそれらの冪（べき）が存在する．
- 部分対象類別子が存在する．

[7] 近傍の定義．位相空間 F，F の元 a，F の部分集合 U に対して，a が U の内部の元であるとき U は a の近傍（*neighborhood*）であると言う．

極限のような $\widehat{\mathbf{C}}$ の構造は，**Set** が持つトポスの構造に言及しながら定義される．例えば，**Set** の終対象を $1 = \{*\}$ とすると，$\widehat{\mathbf{C}}$ の終対象 $\widehat{1}$ は **C** から **Set** への反変関手で，**C** の任意の射 $f : C \to C'$ に対して 1 上の恒等射 $\mathrm{id}_1 : 1 \to 1$ を割り当てるものである．$\widehat{1}$ が $\widehat{\mathbf{C}}$ の終対象であることを証明しておこう．$\widehat{\mathbf{C}}$ の対象 $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ をとると，F から $\widehat{1}$ への自然変換 ν を **C** の対象 C ごとに $\nu_C(*) = *$ によって定めることができて，さらに **Set** の終対象（つまり一点集合）の定義によって F から $\widehat{1}$ への自然変換は ν 以外ありえない．したがって $\widehat{1}$ は $\widehat{\mathbf{C}}$ の終対象である．

トポスの最たる特徴である部分対象類別子について，$\widehat{\mathbf{C}}$ の場合の構成法を記しておく．部分対象類別子とは「真理値対象」と，当該の圏の終対象から真理値対象への「真理射」の対であった．それらを定義する前に sieve の概念を用意しよう．C を **C** の対象とする．C **上の** *sieve*（*a sieve on C*）とは C をコドメインとする射の集合であって，右からの合成演算に関して閉じたものである．すなわち，**C** の射 f がその集合の元であって，同じく **C** の射である g のコドメインと f のドメインが一致しているならば（つまり合成可能ならば），それらの合成 $f \circ g$ もまたその集合の元でなければならない[8]．C をコドメインとする射全体の集合は C 上の sieve であって，特に C **上の極大** *sieve*（*the maximal sieve on C*）と呼ばれる．以下ではそれを $\max(C)$ と書く．

以上の準備の下で C 上の前層 Ω を定義する．Ω は $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ から **Set** への関手で，$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の対象 C に対して C 上の sieve 全体の集合 $\Omega(C)$ を割り当て，C' から C への射 f に対して $\Omega(C)$ から $\Omega(C')$ への関数 f^* を割り当てる．ここで f^* は $\Omega(C)$ の元 S に対して $\Omega(C')$ の元である集合 $f^*(S) = \{g \mid f \circ g \in S\}$ を割り当てる関数である．$f^*(S)$ はしばしば f **による** S **の引き戻し**（*the pullback of S along f*）と呼ばれる．$f^*(S)$ が実際に $\Omega(C')$ の元であることを示そう．そのためには $f^*(S)$ が C' 上の sieve の一つであることを示せばよいから，結局以下の二点を示せばよい．

（i）$f^*(S)$ の元 g をとると，g のコドメインは f のドメイン C' である．
（ii）$f^*(S)$ の元 g と **C** の射 h について $g \circ h$ が定義されているならば，$g \circ h$ も $f^*(S)$ の元である．

（i）$f^*(S)$ の定義から明らかである．（ii）g は $f^*(S)$ の元なので $f \circ g$ は S の元である．S は sieve なので，$f \circ g \circ h$ もまた S の元である．したがって $g \circ h$ は $f^*(S)$ の元である．こうして（i）と（ii）が成り立つので，$f^*(S)$ は C' 上の sieve であることを示すことができた[9]．

[8] 異なる用語法として，対象 C をドメインとする射の集合であって左からの合成演算に関して閉じたものが C 上の sieve と呼ばれることがある．その場合，我々が従う用語法での sieve は cosieve と呼ばれる（Bell 2008, p.61,65）．
[9] Ω が実際に関手であることの証明は省略する．

次に真理射 $t : \widehat{1} \to \Omega$ を定義する．t は関手 $\widehat{1}$ から関手 Ω への射であるから，$\mathbf{C}$ の対象 C ごとに定義される自然変換である．自然変換 t の C 成分 t_C は $\widehat{1}(C)$ から $\Omega(C)$ への関数でなければならない．すでに見たように $\widehat{1}(C)$ は一点集合 $\{*\}$ であり，$\Omega(C)$ は C 上の sieve 全体の集合である．そこで t_C は $*$ に対して C 上の極大 sieve を割り当てるものとして定義される．こうして定義される t が $\widehat{1}$ から Ω への自然変換であることは容易に確かめられる．

上のように定義された Ω と t が $\widehat{\mathbf{C}}$ における部分対象類別子であることの証明は（Mac Lane and Moerdijk 1992, pp.38-39）を参照されたい．以上，部分対象類別子の構成を中心に前層のトポスの構造を見た．

前層を用いるアプローチを採用する論者は様相述語論理に対する意味論を与えることを主眼としている．そのような意味論を単純化することで様相文論理に対する意味論を与えることができる．Moerdijk and van Oosten（2007, p.15）はその方法を示しており，以下ではそれを取り上げる．

付値 $[\![\_]\!]$ は原子文に対して終対象 $\widehat{1}$ の部分対象を割り当てる．**Set** における終対象 1 は一点集合であり，その部分集合は $\emptyset$ と 1 自身の二つしかないが，しかし $\widehat{\mathbf{C}}$ を含む一般的なトポスでは終対象がより多くの部分を持つこともありうる．原子文 p が与えられると，部分対象類別子の定義によって，付値によって得られる $\widehat{1}$ の部分対象 $[\![p]\!]$ を類別する射 $\{p\} \colon \widehat{1} \to \Omega$ が一意に存在する．$\{p\}$ は自然変換であって，対象 C と $\widehat{1}(C)(= \{*\})$ の元 $*$ に対して

$$\{p\}_C(*) = \{f \mid \mathrm{Cod}(f) = C \text{ かつ} [\![p]\!](f)(*) \in \widehat{1}(\mathrm{Dom}(f))$$

で定義される関数の族である[10]．ここで $\mathrm{Dom}(f)$ と $\mathrm{Cod}(f)$ はそれぞれ f のドメインとコドメインである．このように定義された $\{p\}_C(*)$ は C 上の sieve である．これは付値 $[\![\_]\!]$ の定め方によって id_C を元として持つかもしれないし，持たないかもしれない．そこで**原子文 p が C において真であること**を $C \models p$ と書き，

$$C \models p \iff \mathrm{id}_C \in \{p\}_C(*)$$

と定義する[11]．

複合的な文の真理条件に関して Moerdijk and van Oosten（2007, p.15）は通常の帰納的定義に従っている．すなわち A と B を論理式として

- $C \models \neg A \iff C \models A$　でない
- $C \models A \wedge B \iff C \models A$　かつ　$C \models B$

[10] この構成は Ω と t が $\widehat{\mathbf{C}}$ における部分対象類別子であることの証明の中で使われる．

[11] Moerdijk and van Oosten（2007, p.12）は直観主義論理との関連で $\models$ でなく $\Vdash$ を用い，“forces” と読ませている．

- $C \models A \vee B \iff C \models A$　または　$C \models B$

としている．

ここまでは一般の圏 $\mathbf{C}$ 上の前層の圏について議論してきたが，我々の目的は様相部分構造論理の意味論となるような可能世界意味論の自然な拡張を得ることであった．そこで我々は前順序集合 $\mathbf{W} = \langle W, R\rangle$ に注目する．**前順序集合**（*preordered set*）とは集合 W であって，以下の二条件件を満たす二項関係 R を備えるものである．

(i) W の任意の元 w, u, v に対して $\langle w, u\rangle$ と $\langle u, v\rangle$ が R の元ならば，$\langle w, v\rangle$ もまた R の元である（推移律）．

(ii) W の任意の元 w に対して $\langle w, w\rangle$ は R の元である（反射律）．

$\mathbf{W}$ はクリプキフレームとして可能世界の集合 W と W 上の到達可能性関係 R から成る．同時に $\mathbf{W}$ はそれ自体が圏である．圏 $\mathbf{W}$ の対象は W の元であり，射は R の元である．$\langle w, u\rangle$ は対象 w から対象 u への唯一の射である．したがって圏 $\mathbf{W}$ においてはある対象から別の対象へ高々一つの射が存在する．対象 w から対象 u への射は存在しないか，存在すればそれは $\langle w, u\rangle$ である．今後 $\langle w, u\rangle$ が R の元であることを wRu と略記する．

二つの射 $\langle w, u\rangle$ と $\langle u, v\rangle$ の合成 $\langle u, v\rangle \circ \langle w, u\rangle$ は $\langle w, v\rangle$ である．推移律は $\langle w, u\rangle$ と $\langle u, v\rangle$ が存在するときに $\langle w, v\rangle$ が存在することを保証する．また，W の元 w に対して w 上の恒等射 id_w は $\langle w, w\rangle$ である．反射律は W のすべての元に対して恒等射が存在することを保証する．

$\widehat{W}$ 上の前層の圏を $\widehat{\mathbf{W}}$ で表そう．$\widehat{\mathbf{W}}$ においては原子文への付値の具体的なイメージが得られる．$\widehat{\mathbf{W}}$ における終対象 $\widehat{1}$ の部分対象と，W の部分集合のうち「下向きに閉じた」ものとを同一視できることが基本的である．この同一視はいかにして可能か．W の下向きに閉じた部分集合とは，W の部分集合 S であって，S の任意の元 s と W の任意の元 w に対して，wRs ならば w が S の元であるものを言う．例えば $W = \{w, u, v, s\}$ かつ $R = \{\langle w, w\rangle, \langle w, v\rangle, \langle w, s\rangle, \langle w, u\rangle, \langle v, s\rangle, \langle v, v\rangle, \langle u, u\rangle, \langle s, s\rangle\}$ であるとしよう（下図参照，ただし恒等射を省略している）．

$$\begin{tikzcd}
s & & \\
v \arrow[u, "\langle v,s\rangle"] & & u \\
& w \arrow[ul, "\langle w,v\rangle"] \arrow[uul, "\langle w,s\rangle"'] \arrow[ur, "\langle w,u\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき $\{w, v, s\}$ や $\{w, v\}$ は下向きに閉じている．それに対して $\{v, s\}$ は下向きに閉じていない．なぜなら，wRv であるにもかかわらず w が $\{v, s\}$ の元でないからである．一方，前層 $\widehat{1}$ は $\mathbf{W}$ から $\mathbf{Set}$ への反変関手で，$\mathbf{W}$ の対象 w に一点集合 $1 = \{*\}$ を，$\mathbf{W}$ の射

$\langle w, u\rangle \colon w \to u$ に対して $\mathrm{id}_1 \colon 1 \to 1$ を割り当てるものであった．

一般に圏 $\mathbf{C}$ 上の前層の圏 $\widehat{\mathbf{C}}$ において，その対象である前層 P の**部分前層**（*subpresheaf*）あるいは**部分関手**（*subfunctor*）Q とは，$\mathbf{C}$ 上の前層であって以下の二つの条件を満たすものを言う．

- $\mathbf{C}$ の任意の対象 C に対して $Q(C) \subseteq P(C)$ である．
- $\mathbf{C}$ の任意の射 $f : C' \to C$ に対して関数 $Q(f) : Q(C) \to Q(C')$ が関数 $P(f) : P(C) \to P(C')$ の定義域を $Q(C)$ に制限したものである．すなわち，$Q(f) = P(f)|_{Q(C)}$ である．

部分前層の概念は前層の圏における部分対象の概念と等価である（Mac Lane and Moerdijk 1992, pp.36-37）．したがって $\widehat{1}$ の部分前層と W の部分集合のうち「下向きに閉じた」ものとをいかにして同一視できるかを見ればよい．

上で定義した具体的な $\widehat{\mathbf{W}}$ を例に用いながら検討を進めよう．$\widehat{1}$ の部分前層 Q が与えられたとする．Q は $\widehat{\mathbf{W}}$ から $\mathbf{Set}$ への反変関手なので，上図の全体に Q を適用すると以下のような $\mathbf{Set}$ における図を得る．

$$
\begin{tikzcd}
Q(s) \arrow[d] \arrow[ddr] & & \\
Q(v) \arrow[dr] & & Q(u) \arrow[dl] \\
& Q(w) &
\end{tikzcd}
$$

w のすべての元 x に対して $\widehat{1}(x)$ は定義によって 1 であり，部分前層の定義によって $Q(x)$ は $\widehat{1}(x)$ の部分集合なので，$Q(x)$ は $\emptyset$ か 1 である．図中の $Q(w)$ が $\emptyset$ であれば，図中の矢印はすべて関数であるから，$Q(v)$ も $Q(s)$ も $Q(u)$ も $\emptyset$ でなければならない．$Q(w)$ が 1 の場合，$Q(v)$ は $\emptyset$ の場合も 1 の場合もありうる．ここで W の部分集合 $\bar{Q}$ を $\{x \mid Q(x) = 1\}$ によって定義すると，$\bar{Q}$ は下向きに閉じた W の部分集合となる．

反対に W の下向きに閉じた部分集合 S が与えられたとき，前層 $\tilde{S}$ を W の元 x に対して

$$\tilde{S}(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \text{ のとき} \\ \emptyset & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

そして W の射 $\langle x, y\rangle$ に対して以下のように定義する

$$\tilde{S}(\langle x, y\rangle) = \begin{cases} \mathrm{id}_1 & x, y \in S \text{ のとき} \\ ! & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

ここで！は $\emptyset$ から 1 への一意な関数である．$\tilde{S}$ が部分前層の定義を満たすことは容易に確かめられる．ここで定めた双方向の手続きは双方の構造を破壊することなく写すので，

結局 $\widehat{1}$ の部分前層と W の部分集合のうち「下向きに閉じた」ものを同一視してよいと分かる．

一般の $\widehat{\mathbf{C}}$ を用いた原子文への付値 $[\![\_]\!]$ は，原子文に対して $\widehat{\mathbf{C}}$ の終対象の部分対象を割り当てるものであった．ここまでの検討を経て，$\widehat{\mathbf{W}}$ を用いた原子文への付値は，$\mathbf{W}$ の性質に則した，より扱いやすいものでよいことが分かる．すなわち，$\widehat{\mathbf{W}}$ の終対象の部分対象は W の下向きに閉じた部分集合と等価であるから，後者を原子文に対して割り当てればよい．

さて我々の目的は様相を含まず積法的結合子も含まない単なる文論理の意味論を構築するのみならず，様相部分構造論理に対する可能世界意味論を与えることであった．これまで述べてきた枠組みにおいて様相はどこに位置付けられるか．先行研究で見たように，統語論における様相は意味論において位相に関係している．トポス理論において，位相は Ω から Ω への射 J であって以下の諸条件を満たすものとして現れる．

(i) $J \circ t = t$
(ii) $J \circ J = J$
(iii) $J(\_ \wedge \_) = J(\_) \wedge J(\_)$

これらの条件は様相論理のいくつかの公理とその帰結に対応するように見える．(i) は様相論理の公理 **T**: $\Box\sigma \supset \sigma$ あるいはその双対 $\sigma \supset \Diamond\sigma$ に，(ii) は公理 **4**: $\Box\sigma \supset \Box\Box\sigma$ あるいはその双対 $\Diamond\Diamond\sigma \supset \Diamond\sigma$ にそれぞれ対応するように見える．(iii) は $\Box(\sigma \wedge \tau) \equiv (\Box\sigma \wedge \Box\tau)$ あるいは $\Diamond(\sigma \wedge \tau) \equiv (\Diamond\sigma \wedge \Diamond\tau)$ に対応するように見える．前者は基本的な様相論理 **K** において証明可能である．後者に関しては，$\Diamond(\sigma \wedge \tau) \supset (\Diamond\sigma \wedge \Diamond\tau)$ は **K** において証明可能であり，その逆である $(\Diamond\sigma \wedge \Diamond\tau) \supset \Diamond(\sigma \wedge \tau)$ は $\Diamond\sigma \supset \Box\sigma$ のような公理を **K** に付加することで証明可能となる[12]．したがって J は $\Box$ と解するのが適当なように思われるが，しかし Bell（2008, p.163）はこの様相を必然様相でなく可能様相と呼んでいる．

我々が注目するこの様相概念にはいくつかの同値な概念が存在する．ここでは Moerdijk and van Oosten（2007, p.22）にしたがって covering sieve の概念に言及しておく．まず sieve の概念を思い出そう．ある圏の対象 C 上の sieve とは C をコドメインとする射の集合であって，右からの合成に関して閉じているものであった．また，C 上の極大 sieve である $\max(C)$ は C をコドメインとする射全体の集合であった．これらの概念を用いて C 上の covering sieve は以下の三条件を満たす集合 $\mathrm{Cov}(C)$ の元として定義される．

[12] Garson（2006, pp.110-111）は $\Diamond\sigma \supset \Box\sigma$ を（CD）と呼び，義務論理（deontic logic）の観点から所感を述べている．義務論理において $\Box$ は「〜は義務である」を，$\Diamond$ は「〜は可能である」を表す．公理（CD）は義務論理に特徴的な公理 **D**: $\Box\sigma \supset \Diamond\sigma$ の逆であり，（CD）を認めれば $\Box\sigma \equiv \Diamond\sigma$ が証明可能になる．また（CD）は各可能世界から到達可能な世界が高々一つずつしかないようなフレームにおいて真である．

(i) $\max(C)$ は $\mathrm{Cov}(C)$ の元である．

(ii) R が $\mathrm{Cov}(C)$ の元ならば，当該の圏の射 $f\colon C' \to C$ に対して，f による R の引き戻し $f^*(R)$ は $\mathrm{Cov}(C')$ の元である．

(iii) R が C 上の sieve で S が $\mathrm{Cov}(C)$ の元であり，S の元である各射 $f\colon C' \to C$ に対して $f^*(R)$ が $\mathrm{Cov}(C')$ の元であるとする．このとき R は $\mathrm{Cov}(C)$ の元である．

これらは $\mathrm{Cov}(C)$ が満たすべき必要条件を述べているにすぎず，したがって $\mathrm{Cov}(C)$ の定め方は C ごとに一意ではない．例えば $\mathrm{Cov}(C)$ は $\max(C)$ だけを元として持つかもしれない．それは $\mathrm{Cov}(C)$ の最小の構成である．一方，$\mathrm{Cov}(C)$ が C 上の sieve 全体の集合である $\Omega(C)$ と一致するかもしれない．それは $\mathrm{Cov}(C)$ の最大の構成である．それら二つの極端の間で $\mathrm{Cov}(C)$ は様々な構成を持ちうる．

各対象 C に対して $\mathrm{Cov}(C)$ を具体的に定めることと上述の意味での位相を定めることとは同値であり，位相は様相演算子のように振る舞うから，Cov の構成の違いは様相の違いに関わる．我々が基本的な様相文解釈のフレームとして取り上げてきた前順序構造 $\mathbf{W} = \langle W, R\rangle$ を思い出そう．これは樹位相（tree topology）と呼ばれる位相を自然に持つ（Levy 1979）．この位相における閉集合は W の下向きに閉じた部分集合であり，それは付値 $[\![\_]\!]$ が文に対して割り当てるものであった．この関連性を基に前順序集合をフレームとする可能世界意味論の全体を前層のトポスの観点から記述することが考えられる．

ここまで様相の取り扱いについて述べたが，この路線で部分構造論理の意味論を得る見通しは明るくない．それはトポスの性質が集合の圏の性質の影響を強く受けるからである．そのことを見るために，トポスにおいて論理結合子を射として表すことができ，その結合子の性質に集合の圏の性質が反映されることを見よう．連言（および二項の真理関数）は $\Omega\times\Omega$ から Ω への射として理解される．これは **Set** における Ω が真理値集合 $\{0, 1\}$ であることからの自然な拡張になっている．あるトポスの対象 X から Ω への射 σ と τ が与えられたとしよう．部分対象類別子の定義によって，σ と τ はそれぞれ X の部分 $i\colon S \hookrightarrow X$ と $j\colon T \hookrightarrow X$ を類別する．

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, "i"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\sigma"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "!_T"] \arrow[d, "j"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\tau"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

ここで $!_S$ と $!_T$ は終対象 1 の定義によって S と T 各々に対して一意に存在する射である．トポスが備える積の定義によって，σ と τ の順序対 $\langle\sigma, \tau\rangle$ が X から $X\times X$ への射として存在する．同様に真理射の対 $\langle t, t\rangle$ が 1 から $\Omega\times\Omega$ として存在する．$\langle t, t\rangle$ はモニック射なので，それを類別する $\Omega\times\Omega$ から Ω への射が存在する．これが射としての論理結合子 $\wedge$

である．

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, "\langle t,t\rangle"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "\langle\sigma,\tau\rangle"'] & X\times X \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

合成によって得られる射 $\wedge\circ\langle\sigma,\tau\rangle$ を $\sigma\wedge\tau$ と略記しよう．この射は再び類別射であり，S と T の共通部分を類別することを示すことができる．

$$
\begin{tikzcd}
S\cap T \arrow[r, "!_{S\cap T}"] \arrow[d, "k"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "\sigma\wedge\tau"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

ここで $\sigma\circ i$，$\tau\circ j$，$(\sigma\wedge\tau)\circ j$ をそれぞれ σ^*，τ^*，$(\sigma\wedge\tau)^*$ と略記し，さらに $t\circ!_S$，$t\circ!_T$，$t\circ!_{S\cap T}$ をそれぞれ t_S，t_T，$t_{S\cap T}$ と略記することで，

$$(\sigma\wedge\tau)^* = t_{S\cap T} \iff \sigma^* = t_S \text{ かつ } \tau^* = t_T$$

を導出することができる．これは馴染み深い連言文の真理条件をトポスの射で表現したものになっている．さて，S を類別する射は σ であり，上図で T と τ をそれぞれ S と σ に置き換えれば分かるように，$S\cap S$ を類別する射は $\sigma\wedge\sigma$ である．そして集合として $S\cap S=S$ であるから $\sigma\wedge\sigma=\sigma$（べき等律）が従う．また $\sigma\wedge\tau$ は $S\cap T$ を，$\tau\wedge\sigma$ は $T\cap S$ を類別し，集合として $S\cap T=T\cap S$ であるから，$\sigma\wedge\tau=\tau\wedge\sigma$（交換律）が従う．このことは，トポスを用いるアプローチを用いて定義された連言が resource-conscious でないことを意味する．この性質は二つの集合の共通部分を取る演算 $\cap$ の性質を引き継ぐものである．

所与のトポスにおける射の観点から定義された形式的体系はトポス論理（topos logic）と呼ばれる（McLarty 1995, p.128）．したがって「トポス論理は resource-conscious でない」と言える．実際，トポス論理がシークエント計算として形式化される場合，連言の推論規則も選言の推論規則もリソースの数や順序に配慮するものではない．まとめると，トポスはフレームを用いて様相論理の意味論を与えることに関して有力な可能性を持つけれども，そのままでは部分構造論理の意味論を与えるには適さない．

6.3　まとめ

前順序集合上の前層という簡便な道具立てによって様相部分構造論理の意味論を構築することを試みてきた．圏論の道具立ては真理概念を内包するトポスと可能世界意味論を与える際のフレームとを前層の概念によって自然に結びつけ，前順序フレームを用いれば原

子文の付値を見通しよく与えることができる．しかしトポスが備える様相概念が我々がよく知る **S4** などの様相とどう関わるかは明らかでなく，また resource-conscious な結合子の解釈には，前層がその定義によって集合の圏から引き継いで持つ諸性質が妨げとなることが見出された．

終章

6 章の反省を踏まえ，検討の候補としうる方途に触れて今後の展望としたい．

部分構造論理との関連で，トポスを用いずモノイダル圏（*monoidal category*）を用いるものが研究されてきている．モノイダル圏とはその対象同士に抽象的な二項演算が定義されている圏である．その二項演算は，集合同士の共通部分のように冪等律や交換律を満たす必要はなく，単位元となる対象が存在し，かつ結合的（associative）であることのみが条件として求められる．これは結合子のより柔軟な解釈を可能にする．交換律に関しては成り立つことが前提されるものの，Coecke（2006）は物理学者に対してモノイダル圏の重要性を説いている[13]．彼は物理学，特に量子論の記述を圏論で行うことを念頭に置いており，その関心から圏の対象を物理系のタイプ（電子や量子ビット等）と見なし，射を物理系に施す操作（operation）と見なす．そのとき，射として表された操作 f と g の合成は f という操作の後に g という操作を施すという連続した操作を表す．これに対して複数のタイプの物理系に対する並行的操作を表すために対称モノイダルテンソル（*symmetric monoidal tensor*）と称する一種の積 $\otimes$ を持つ対称モノイダル圏（*symmetric monoidal category*）が定義される（Coecke 2006, p.51）．この積は射 $f\colon A \to B$ と $g\colon C \to D$ のペアに対して $f \otimes g\colon A \otimes C \to B \otimes D$ を割り当てるものである．この積 $\otimes$ は単位元を持ち，結合的であり，交換律を満たし，さらに双関手的（bifunctorial）でなければならない．双関手性とは，上で述べた操作の文脈で言えば，二つの操作 f と g を並行して行う際に，f を行った後に g を行っても，g を行った後に f を行っても全体の結果は変わらないというものである．彼が想定する具体例の一つは有限次元ヒルベルト空間の圏 **FdHilb** である．量子論において物理系の状態はヒルベルト空間内のベクトルによって表され，物理量はヒルベルト空間どもの間の写像によって表される．Coecke は量子状態を複製する演算子は存在しないという量子論の定理に言及し，自然な対角化 $\Delta_A\colon A \to A \otimes A$ を定義できないと述べる（p.60）．A と $A \otimes A$ が等しくなるには（より正確には，同型になるには）そのような写像を定義できることが必要であるから，我々は冪等律が成り立たない，意味のある積を手に

[13] 我々の様相部分構造論理の体系においては加法的演算子も積法的演算子も交換律を満たす．しかし部分構造論理一般の意味論をモノイダル圏で与えようとすれば交換律が成り立つか否かに十分注意しなければならない．

していることになる．さらに Coecke は論理に言及し，ヒルベルト空間どもの間の演算として「ならば」(implication）$\Rightarrow$ を定義している（p.65）．すなわち $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ を有限次元ヒルベルト空間とし，$\mathcal{H}^*$ を有限次元ヒルベルト空間の双対空間として

$$\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^* \otimes \mathcal{H}_2$$

と定義する．そしてこの定義はさらに随伴

$$\mathbf{FdHilb}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) \simeq \mathbf{FdHilb}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H}_3)$$

を引き起こす．これは各ヒルベルト空間を文，ヒルベルト空間の間の写像を演繹関係と見なせば，「A かつ B」から C への証明があれば，A から「B ならば C」への証明があり，その逆もまた成り立つという，連言と「ならば」の関係を示唆する．これは $\otimes$ が resource-conscious な連言子の一つの候補であることを支持しているだろう[14]．

上で見たような方針は，resource-conscious な結合子に対して，物理系の操作という具体的な意味を持つ解釈を与える道を開くものである．しかし我々のもう一つの目的である様相の取り扱いについて，その方針は示唆を与えてくれない．では，前層のトポスを用いるという方針は変えずに resource-conscious な結合子の解釈を得ることはまったく不可能であろうか．我々が注目してきた前層のトポスは，ある圏から集合の圏 **Set** への反変関手を対象としてきた．この形式の前層は集合の前層（a presheaf of sets）と呼ばれる．それに対して，加群（module）や環（ring）のような代数の圏を集合の圏の代わりに用いることもできる．すなわち集合の圏への反変関手でなく，加群の圏や環の圏への反変関手を対象とするトポスを考えるのである．そのような概念は代数幾何学の分野で実際に用いられてきた．代数として，冪等律や交換律を満たさない演算を持つものを選び，その演算を加法的でない結合子の解釈に用いれば，少なくとも一つの論理演算に関しては望ましい性質を持つモデルを得られることが予想される．様相の解釈については，トポスにおいて covering sieve がもたらす種々の位相が，我々が親しんでいる様相概念とどのように対応するのかを調べることが必要である．我々が様相解釈の基本的な枠組みと考える前順序フレームと covering sieve とを適切に結びつけることがその出発点となるであろう．

[14] ただし **FdHilb** においては

$$(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)^* \simeq \mathcal{H}_1^* \otimes \mathcal{H}_2^*$$

が成り立つので，連言と選言が一致してしまうことを Coecke は指摘している（p.66）．本論文ではこの論点に立ち入ることはできない．

引用文献

Awodey, S. (2010). *Category theory* (2nd ed.). Oxford logic guides 52. Oxford: Oxford University Press.

Awodey, S. & Kishida, K. (2008). Topology and modality: The topological interpretation of first-order modal logic. *The Review of Symbolic Logic*, *1*, 146-166.

Behboud, A. (1997). Remarks on Bolzano's collection. In Künne, W., Siebel, M., & Textor, M. (Eds.). *Bolzano and analytic philosophy*, 109-115. Amsterdam: Rodopi.

Bell, J. L. (2008). *Toposes and local set theories: An introduction*. Mineola, NY: Dover. Original work published 1988.

Berg, J. (Ed.). (1987). *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe, Reihe I, Band 11, Teil 2*. Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog.

Berg, J. (1992). *Ontology without ultrafilters and possible worlds: An examination of Bolzano's ontology*. Beiträge zur Bolzano-Forschung 1. Sankt Augustin: Academia.

Bolzano, B. (1975). *Paradoxien des Unendlichen*. Philosophische Bibliothek 99. Hamburg: F. Meiner. Text hrsg. von Fr. Přihonský. 2 Aufl. mit Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von B. van Rootselaar. (Original work published 1851) ——邦訳：(1978).『無限の逆説』(藤田伊吉訳), みすず書房. 東京.

——— (1987). Wissenschaftslehre: Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. In Berg, J. (Ed.). *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*. Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog. (Original work published 1837) —— 英訳 : (1972). *Theory of science: Attempt at a detailed and in the main novel exposition of logic with constant attention to earlier authors*. (R. George, Trans. and Ed.) Berkeley: University of California Press.

Cantor, G. (1966). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In *Georg Cantor: Abhandlungen mathematishen und philosophischen Inhalts*, 282-356. Hildesheim: Olms. Hrsg. von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. (Original work published 1895 and 1897) ——邦訳：(1979).『カントル　超限集合論』(功力金次郎・

村田全 訳・解説)，共立出版．東京.

——— (1882). Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, *XX*, 113-121.

Coecke, B. (2006). Introducing categories to the practicing physicist. In *What is category theory?*, 45-74. Monza, Italy: Polimetrica.

Fraenkel, A. A. (1953). *Abstract set theory*. Amsterdam: North-Holland.

Fraenkel, A. A. & Bar-Hillel, Y. (1958). *Foundation of set theory*. Amsterdam: North Holland.

Fukayama, Y., Nakatogawa, K., & Kitamura, H. (2013). Toward sheaf semantics for a multi-agent substructural modal logic. In *Proceedings of SOCREAL 2013: 3rd international workshop on philosophy and ethics of social reality 2013*, 12-25. Sapporo, Japan: Hokkaido University. URL: `http://hdl.handle.net/2115/55071`.

Garson, J. W. (2006). *Modal logic for philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Hallett, M. (1984). *Cantorian set theory and limitation of size*. Oxford: Clarendon Press.

Kelley, J. L. (1955). *General topology*. New York: Springer.

Kitamura, H., Nakatogawa, K., & Fukayama, Y. (2007). Substructuralized modal logics applied to the two wise girls puzzle. In *SOCREAL 2007: International workshop on philosophy and ethics of social reality 2007*, 40-53. Sapporo, Japan: Hokkaido University. URL: `http://hdl.handle.net/2115/29937`.

Lawvere, F. W. (1994). Cohesive toposes and Cantor's '*lauter Einsen*'. *Philosophia Mathematica*, *2*, 5-15. URL: `http://philmat.oxfordjournals.org/content/2/1/5.abstract`.

Lawvere, F. W. & Rosebrugh, R. (2003). *Sets for mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Levy, A. (1979). *Basic set theory*. Berlin: Springer.

Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician* (2nd ed.). New York: Springer.

Mac Lane, S. & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. New York: Springer.

McLarty, C. (1995). *Elementary categories, elementary toposes*. Oxford logic guides 21. Oxford: Clarendon Press. (Original work published 1992).

Mendelson, E. (1997). *Introduction to mathematical logic* (4th ed.). London: Chapman & Hall.

Moerdijk, I. & van Oosten, J. (2007). Topos theory. URL: `http://www.staff.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/toposmoeder.pdf`.

Monk, J. D. (1969). *Introduction to set theory*. International series in pure and applied mathematics. New York: McGraw-Hill.

Ono, H. & Komori, Y. (1985). Logics without the contraction rule. *The Journal of Symbolic Logic*, *50*, 169-201.

Quine, W. V. (1969). *Set theory and its logic* (revised ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Restall, G. (2000). *An introduction to substructural logics*. London: Routledge.

Rosebrugh, R. & Wood, R. J. (1995). Distributive adjoint strings. *Theory and application of categories*, *1*, 119-145.

Russell, B. (1967). Letter to Frege. In van Heijenoot, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harverd University Press. (Original work published 1902).

Shehtman, V. & Skvortsov, D. (1990). Semantics of non-classical first-order predicate logics. In Petkov, P. P. (Ed.). *Mathematical logic*, 105-116. New York: Plenum Press.

Simons, P. (1997). Bolzano on collections. In W. Künne, M. S. & Textor, M. (Eds.). *Bolzano and analytic philosophy*. Amsterdam: Rodopi.

Tait, W. W. (1996). Frege versus Cantor and Dedekind: On the concept of number. URL: `http://home.uchicago.edu/~wwtx`.

——— (2000). Cantor's *Grundlagen* and the paradoxes of set theory. URL: `http://home.uchicago.edu/~wwtx`.

Watari, O., Ueno, T., & Nakatogawa, K. (1999). Sequent systems for classical and intuitionistic substructural modal logics. In Downey, R., Decheng, D., Tung, S. P., Qiu, Y. H., & Yasugi, M. (Eds.). *Proceedings of the 7th & 8th Asian Logic Conferences*, 423-442. Singapore: World Scientific.

Yasugi, M. & Oda, S. H. (2002). A note on the wise girls puzzle. *Economic Theory*, *19*, 145-156.

Young, W. H. & Young, G. C. (1972). *The theory of sets of points* (2nd ed.). Bronx, NY: Chealsea.

Zermelo, E. (1967). Investigation in the foundations of set theory I. In van Heijenoot, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press. (Original work published 1908).

小野寛晰．(1994)．『情報科学における論理』，情報数学セミナー，日本評論社．東京．

三平正明．(2003)．「フレーゲとカントールの対話」．『思想』，第 954 巻，123-140 頁．

西村敏男・難波完爾．(1985)．『公理的集合論』，共立出版．東京．

日本数学会（編）(1985)．『岩波　数学辞典』，第 4 版，岩波書店．東京．

深山洋平．(2006)．「F. W. ローヴェアによる随伴関手を用いた集合論の基礎の理解とその展望」．『哲学』，第 42 巻，*1-14* 頁．北海道大学哲学会発行．

前原昭二．(1967)．『記号論理入門』，日本評論社．東京．

松村英之．(1966)．『集合論入門』，朝倉書店．東京．

竹内外史．(1995)．『線形論理入門』，日本評論社．東京．