HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	授業書「新しい数ー分数」（2014年改訂版）について
Author(s)	大田, 邦郎; 里城, 智仁
Citation	教授学の探究, 30, 53-88
Issue Date	2016-02-04
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/60685
Type	departmental bulletin paper
File Information	AN10116428-30 (6).pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学大学院教育学研究院
教育方法学研究室
教授学の探究，第30号
2016年1月

授業書「新しい数－分数」（2014 年改訂版）について

大田邦郎
（千葉大学教育学部）
里城智仁
（四街道市立中央小学校）

はじめに

北大教育方法学研究室の数学教育グループで、授業書「新しい数－分数」を開発したのは1975年のことである。当時、1968年小学校学習指導要領のもとで、検定教科書は分数を2年から6年までの5学年にわたって扱っていた[1]。

これに対して授業書「新しい数－分数」は、分数の導入から異分母加減算まで（検定教科書では2年から6年まで）をひとつの単元に再構成したものである。とくに加減算については同分母の場合と異分母の場合とで分けずに、同分母分数の加減算を異分母分数の加減算の特殊な場合と位置づけて、ひとまとまりの計算体系を構成した。

この84ページにわたる授業書「新しい数－分数」を用いての実験授業は、小樽市の小学校4年生を対象に38時間かけて実施された。当時、小樽市では独自のカリキュラムを編成しており、分数は、4年で導入から同分母分数の加減算まで、5年で異分母分数の加減算および乗除算と、2学年のみで扱われていた。

そのため、分数を初めて学ぶ4年生に、導入から異分母分数の加減算まで通して指導することが可能であるかどうか、実験することができたのである。そして、それが可能であることが確かめられた[2]。

しかし、検定教科書で3学年ないし4学年にわたって扱われる内容を、一般の小学校において、ある学年でまとめて指導するのは時間的にきびしい。その後、授業書「新しい数－分数」を最後まで使用した実践は少なく、途中までの実践が多かった[3]。

また、授業書「新しい数－分数」の「改訂版」と称して、導入から加減算、乗除算までの分数指導全体に関する統一的な視点を持たずに、もとの授業書の導入部分にあれこれ付け加えたものも現れた。

もとの授業書「新しい数－分数」は、1978年に若干の修正を加えたうえで手書きオフセット

---

[1] その後、1977年版、1989年版では3年から6年、1998年版では4年から6年となり、2008年版でまた2年から6年となった。分数をどの学年から教えるのが良いか何十年も実験をしてきたはずなのに、文部科学省はその結果を明らかにしないまま学習指導要領を改訂してきた。

[2] 大田邦郎「小学校の分数指導における新しい試み－導入から加減算までの授業書とその解説－」（『教授学研究シリーズ No.3』北海道大学教育学部教育方法学研究室、1978年3月）。

[3] 北海道地区数学教育協議会編『算数たのしい学習プリント』（共同文化社、2002年）は、基本的に授業書「新しい数－分数」に基づきながら、これを4年で導入から同分母分数の加減算まで、5年で倍分・約分・通分および異分母分数の加減算と分けている。

印刷したものしか公表されておらず、発行部数も少なく入手困難である[4]。また、何度かの実験授業の結果をふまえて、修正を要する箇所がいくつか明らかになってきている。

以上のような背景から、もとの授業書「新しい数－分数」の基本的な構造を堅持したうえで、可能な限りコンパクトにまとめる方向で改訂することにした。その方向については、2013年から2014年にかけて、北大数学教育グループの研究会や、北海道地区数学教育協議会の札幌算数サークルなどで大田が報告し、検討がなされてきた。

さらに、2014年度の千葉大学教育学部の卒論ゼミの一環として、大田と当時4年生の里城が授業書「新しい数－分数」の改訂作業を行った。具体的には、1978年の手書き版を里城が電子ファイル化していく過程で、大田が修正意見を述べ、里城の同意を得ながら改訂したのである。

このようにして、授業書「新しい数－分数」の2014年改訂版が作成された。主として加減算の型分けを大まかにし、計算練習問題を大幅に削減することでページ数を減らした。

ただし、導入部分は一部を削除しながらも練習問題を充実させて、50ページ、約20時間分の授業書となった。1975年版からみて、ページ数、授業時数とも6割程度になったのである。

そして、実験授業を札幌算数サークルの櫻田和也が引き受けてくれた。さらに、里城が実験授業のビデオから授業記録を起こし、これにもとづいて大田と里城が授業過程の検討を行い、授業書に若干の修正を加えた。

本稿では、授業書の基本構造を確認したうえで、授業書と実験授業の記録を提示し、検討していくことにする。

1　授業書「新しい数－分数」の基本構造と改訂の趣旨

最初の実験授業に用いた授業書「新しい数－分数」の1975年版と、それに微修正を加えて公表した1978年版の基本構造は、2014年改訂版においても変わらない。現時点で以下のようにまとめておく。

(1) 分数概念の導入
・量の測定の際に、単位量で測定して出た余り（はんぱ）で、単位量を測定する方法を用いる。
・上記の測定結果から、量の大きさを分数で表わす。
(2) 分数の性質
・同じ大きさの分数に無数の表し方があることを理解させる。
・この性質を利用して分数の大小比較をする。
(3) 分数の加減算
・同分母の場合と異分母の場合をひとまとめにして、加法および減法の計算体系を構成する。
・加法と減法のそれぞれに水道方式を適用して、素過程（同分母真分数、異分母真分数）
→典型的複合過程（異分母帯分数）→退化型複合過程（その他の型）の順序とする。

次に、具体的な授業書の構成を示す。第1章が上記の「分数概念の導入」にあたる部分、第2章から第4章までが「分数の性質」を扱う部分である。

第1章　新しい数－分数

[4] 注2に所収。なお、2000年頃に復刻されて残部が多少ある。

第2章　分数のヘンシン その1
第3章　分数のヘンシン その2
第4章　通分
第5章　分数のたし算
第6章　分数のひき算

今回の改訂で、第2章から第4章までは微修正するにとどめた。大きく変更したのは第5章と第6章である。加減算の計算体系の型分けを大まかにして、計算問題を大幅に減らした。その一方で、帯分数どうしの加減算について、整数部分どうし、分数部分どうしで加減算を行う従来の計算方法に加えて、帯分数を仮分数にしてから加減算を行う方法も示すことにした。

第1章については、問題のあとに練習問題を補充したり、削除したり、指導順序を変更したりした箇所がある。これについて具体的に示す。

【問題1】ある長さを1mのものさしで測ると、1mが2つとれてはんぱが出た。はんぱで1mを測ると3つで1mになった（互除法[5]1段階）。3つで1mになる長さを$\frac{1}{3}$mとし、もとの長さを$2\frac{1}{3}$mとする。
（1978年の修正版から【れんしゅう1】を追加。）

【問題2】$\frac{2}{3}$mは3つで2mになる長さであるとともに、$\frac{1}{3}$mが2つ分の長さでもあることを確認する。
（今回、【れんしゅう2】を追加。）

【問題3】長さの測定で、最初のはんぱAで1mを測ると2つとれて、またはんぱBが出た。はんぱBではんぱAをはかるとちょうど3つとれた（互除法2段階）。はんぱBは7つで1mになるから$\frac{1}{7}$m、はんぱAは$\frac{1}{7}$mが3つ分だから$\frac{3}{7}$m。
（今回、【れんしゅう3】を追加。）

【問題 4】タイルの大きさ（$\frac{1}{5}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{3}{3}$、$2\frac{1}{3}$、$\frac{3}{1}$）を分数で表わす。

（1978年版では【問題4】と【問題5】はともに【れんしゅう】であったが、今回は【問題】とした。また、これらの順序が逆であったが、長さの測定から分数を導いたように、タイルの大きさを数値で表わすことが先であると考え、順序をこのように変更した。）
【問題5】分数（$3\frac{5}{8}$、$2\frac{7}{4}$、$\frac{5}{6}$、$\frac{12}{3}$、$\frac{4}{4}$、$\frac{3}{1}$）をタイル図で表わす。

[5] ユークリッドの互除法（2つの整数の最大公約数を求めるアルゴリズム）を、未測量と単位量との「最大公約量」を求める方法として利用した。

（1978年版はこのあと、【れんしゅう】としてタイル図で同分母真分数のたし算を扱っていた。これは「第5章 分数のたし算」と重複するので削除した。なお、【問題4】、【問題5】とも問題の数値を再検討して加除修正した。）

【問題6】2と$2\frac{0}{5}$の大小比較から、$\frac{0}{5}=0$、$2\frac{0}{5}=2$であることを確認する。

【研究問題】$\frac{3}{5}$mは5つで3mになる長さであることから、「0個で3mになる長さはない」から$\frac{3}{0}$mは存在しない。また、「どんな長さも0個で0mになる」から$\frac{0}{0}$mは考えない。
（1978年版では【問題】としたが、今回は【研究問題】として、これを扱うかどうかは授業者にまかせることにした。）

なおここで、授業書「新しい数－分数」の「改訂版」あるいは「改訂2版」と称して、【問題2】と【問題3】の間にいくつかの「問題」を挿入した岡野勉と佐藤敬行のプラン[6]に言及せざるを得ない。

その前に、授業書「新しい数－分数」における【問題2】の位置づけについて、あらためて述べておく。【問題2】では、分数のふたつの意味である「商分数（$2\div3$）」と「分割分数（$1\div3\times2$）」を示し、どちらも同じ大きさを表わすことを確認する。

これを【問題1】の次に位置づけたのは、互除法1段階で「3つで1mになる長さを$\frac{1}{3}$mとする」と「商分数」で単位分数を定義したあと、互除法2段階で「$\frac{1}{7}$mが3つ分の長さを$\frac{3}{7}$mとする」と「分割分数」で分数を定義する間に、「商分数」から「分割分数」への橋渡しが必要であると考えたからである。

すなわち、互除法2段階の前に以下のように【問題2】で分割分数を導いておき、【問題3】では、互除法2段階の測定結果を分割分数を用いて表わすことができるようにしたのである。

【問題1】3つで1mになる長さを$\frac{1}{3}$mとする。

【問題2】3つで2mになる長さと、$\frac{1}{3}$mが2つ分の長さが等しく、これを$\frac{2}{3}$mとする。

【問題3】はんぱAは、$\frac{1}{7}$mが3つ分の長さだから$\frac{3}{7}$m。

さしあたり【問題1】の商分数から【問題3】の分割分数への橋渡しの役割を担う【問題2】のあとに、岡野・佐藤は別の方向を向いて以下のような「問題」群を付け加えている。

「問題3」$2\frac{2}{3}$mのテープを3本つなげると、何mになるでしょうか。（以下略）
「問題4」どちらの分数が大きいでしょうか。図を書いて確かめてから大きい方に○をつけなさ

[6] 『教授学の探究』にいくつか投稿されているが、最も新しい岡野勉、佐藤敬行「授業書『新しい数－分数』（改訂2版）による授業」（『教授学の探究 第22号』2005年）から引用する。

い。

① $\frac{3}{5}$m　$\frac{2}{5}$m　② $\frac{3}{5}$m　$\frac{3}{4}$m

「問題5」3人姉妹がいます。おばあさんから黄色いリボンを8mもらったので、仲良く同じ長さずつ分けることにしました。 1人どれだけの長さのリボンをもらうことができるでしょうか。（以下略）

検討しよう。「問題3」はたし算を必要とせず、「商分数的定義により」$\frac{2}{3}$mを「3つつなげたら2mになるのは自明である」という。しかし、授業記録では当初の予想で選択肢から正解の8mを選んだ者は34人中12人となっており、「自明」ではなかったようだ。

問題なのは、「8mは、3つで8mになる長さだから、$2\frac{2}{3}\text{m}=\frac{8}{3}\text{m}$」として、「商分数的定義を活用することで（中略）帯分数を仮分数に直すことができる」としていることである。このあとで帯分数を仮分数にするとき、あるいは仮分数を帯分数にするときにも、「商分数」で考えることを想定しているのだろうか。

そもそも、授業書「新しい数－分数」は、帯分数と仮分数の相互変換を「第2章 分数のヘンシン その1」で、「分割分数」で意味づけて扱っているのである。しかし、岡野・佐藤はこれとの整合性について触れていない。

次に「問題4」の大小関係であるが、これも「商分数」で考えさせている。したがって、分母が等しい場合か、分子が等しい場合にしか大小比較ができない。

分母が等しい分数の大小関係は、「分割分数」による意味付けやタイル図の読み書きから自明である。また、もとの授業書は「第4章 通分」で分母が異なる分数どうしの大小比較を、もちろん分割分数で扱っている。しかし、岡野・佐藤はこれとの整合性について触れていない。

「問題5」は「商分数」で考えさせるだけでなく、「$8\text{m}\div 3=\frac{8}{3}\text{m}$」とわり算まで用いている。さらに「一般に、わり算と分数の間には、$a\div b=\frac{a}{b}$（a,bは整数…ほんとは整数でなくてもよい）という関係があります」とまとめているが、これは誤りで、$b\neq 0$でなければならない。

もとの授業書は、わり算を用いずに「商分数」の考え方で「0個で3mになる長さはない」こと、また「どんな長さも0個で0mになる」こと、したがって分母が0の分数は考えないことを扱っている。しかし、岡野・佐藤はこれとの整合性について触れていない。

なお、大田は自然数のわり算の指導に「÷0」を含める[7]こと、$a\div b=\frac{a}{b}$（$b\neq 0$）については分数乗除の指導の際に扱う[8]ことを構想しており、これらの授業づくりにも関わっている。

量の測定から分数を導くことが主要な課題である第1章において、もっとも重要なのは互除法2段階の測定を伴う【問題3】である。そしてこれには「商分数」ではなく「分割分数」が必要である。

---

[7] 大田邦郎「小学校における量と数の指導についてのいくつかの問題」（『教授学の探究 第29号』2015年）。

[8] 丹尾春彦「逆内包量による分数除法の指導－分数のわり算はなぜわる数をひっくり返してかけるのか」（『教授学の探究 第29号』2015年）。

だから【問題2】で「商分数」から「分割分数」への橋渡しをして、スムーズに【問題3】に取り組むことができるように、授業書を構成したのである。

それにもかかわらず、岡野・佐藤は「改訂2版」の授業書も授業記録も、もとの【問題3】の前までしか示していない。そして、あれこれ問題を追加しても、それらと授業書全体との整合性をとろうという意識が見られない。これでは「改訂版」を名乗る資格はない。

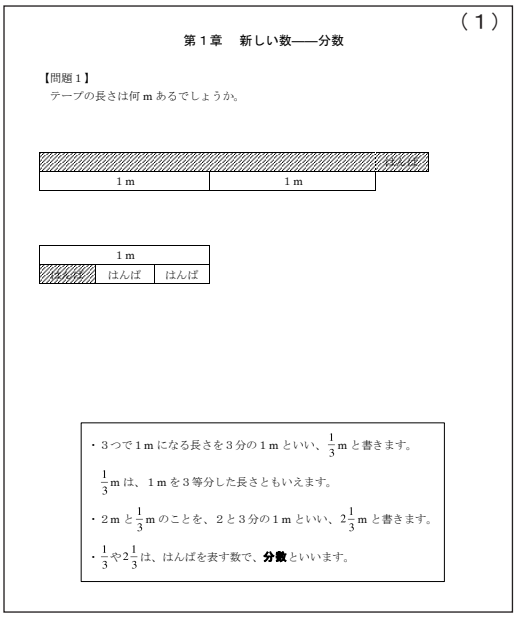
2　授業書と実験授業の展開

授業書「新しい数－分数」（2014年改訂版）を用いての実験授業は、2014年10月7日から11月6日まで、岩見沢市立幌向小学校4年1組（児童数34人、櫻田和也教諭）において、20時間にわたって実施された。なお、途中で学芸会等のため、「第4章 通分」と「第5章 分数のたし算」との間に1週間の中断がある。

以下、授業書（授業後に若干の微修正をしたもの、A4版50ページ）について解説するとともに、主な部分（とくに「第1章　新しい数－分数」を中心に）の授業記録を引用しながら検討していく。

(1)　第1章　新しい数－分数（6時間）

授業書「新しい数－分数」による1時間目の授業は、授業書なしで始められる。授業書の1ページ目は、【問題1】を考えたあとのまとめの際に配られる。



（1）

第１章　新しい数――分数

【問題１】
テープの長さは何ｍあるでしょうか。

1 m　1 m　はんぱ

1 m
はんぱ　はんぱ　はんぱ

・３つで１ｍになる長さを３分の１ｍといい、$\frac{1}{3}$ｍと書きます。

$\frac{1}{3}$ｍは、１ｍを３等分した長さともいえます。

・２ｍと$\frac{1}{3}$ｍのことを、２と３分の１ｍといい、$2\frac{1}{3}$ｍと書きます。

・$\frac{1}{3}$や$2\frac{1}{3}$は、はんぱを表す数で、**分数**といいます。

授業者は、黒板に【問題1】の$2\frac{1}{3}$mの紙テープを貼って、子どもたちに問う。

T：「このピンクの紙テープの長さは何m？」
C：「1m」「だいたい2mくらい」
T：「ではどうすればOK？」

C：「定規で測る」「あの棒（教室の棚の上に置いてある1mのものさし用の棒）を使う」
　1mの棒で測ると、2つ分とれて、はんぱ（余り）が出る。1mの紙テープと、はんぱと同じ長さの紙テープを各班に配布して、考えさせる。

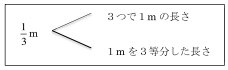
T：「では途中までやったこと含めて発表してもらいたいと思います。まず5班さん」
C：「5班が話し合って出した考えは、これ（はんぱ）を1mと合わせていったら、はんぱは3つ分になった。1mは100cmだから100÷3＝33あまり1、だから答えは2.331mになりました」
C：「2班で話し合ったのは、まずこれ（はんぱの部分）を1mに合わせて、1mを折っていったらちょうど3等分になったので、3こ合わせたら1mになることが分かった。計算したけど答えが出なかった」
T：「同じく3等分まで見つかったんだね」「では4班さん、お願いしていい？」
C：「まず紙テープ（はんぱの方）を1mに合わせて測って、3個分になった。3等分になったけど割り算をしたけど答えはまだ出てません」
T：「そしたら6班さん」
C：「6班が考えたのは、合わせていくところまでは同じで、そこまではみんなと一緒だったんだけど、計算しないで分数で表したら$2\frac{1}{3}$mになりました」

C：「同じです」「$\frac{1}{6}$？」

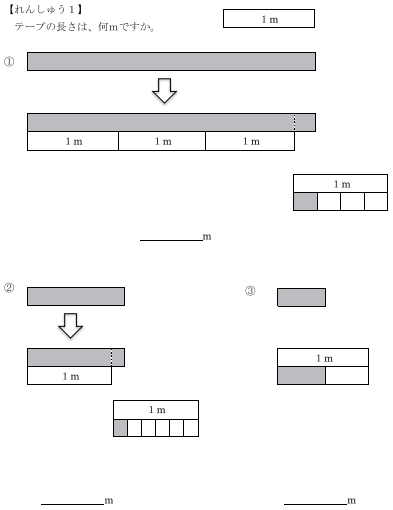
C：「$\frac{1}{3}$」「違う方法でやると、2mという言葉を使わなければ、$\frac{7}{9}$mになる」
T：「実はここ、みんなが割り切れなくて困っている時に新しい数があるんだよね。実は3つで1mになる長さ、あるいは1mを3等分した内の1つを$\frac{1}{3}$mと書きます。2mと合わせて$2\frac{1}{3}$mとこの場合書きます」

　子どもたちは2年生、3年生のときに分数を学習しているはずである。しかし、はんぱで1mを測って3つで1mになるというところまでわかっても、$\frac{1}{3}$という分数がなかなか出てこなかった。
　なお、$\frac{1}{3}$mを$\frac{1}{6}$と言った子どもは、はんぱが2mを6等分した1つ分にあたることをそう言い、$\frac{7}{9}$mと言った子どもは、求めるテープ全体の長さが3mを9等分した7つ分にあたることをそう言ったようだ。つまり、割合で考えたのだろう。

（２）



【れんしゅう１】
テープの長さは、何mですか。



（３）

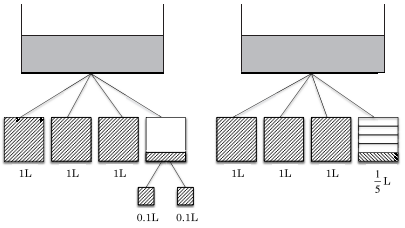
小数と分数

「はこの中に、みかんがいくつありますか」と聞かれたときは、「1、2、3、・・・」と数えていけば答えが出ます。しかし、「このバケツの中に、水がどれだけ入っていますか」と聞かれても、「1、2、3、・・・」と数えることはできません。

このときは、もとになる大きさ、つまり**単位**を決めて、それがいくつあるかを数えます。単位の１Lがちょうど３つだったら３Lです。このことを「**測る**」といいます。

ところが、単位で測ったとき、単位より小さい**はんぱ**が出ることがあります。このはんぱを測るのに大きく分けて２つの方法があります。

第１の方法は単位の１Lを10等分して0.1L、0.1Lを10等分して0.01Lというように、つぎつぎに10等分して小さい単位を作り、はんぱを測っていく方法です。バケツの中の水が、1Lが３つと0.1Lが２つだったら3.2Lです。これが小数です。

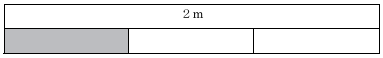


第２の方法は、はんぱで単位を測る方法です。バケツの中の水を測ったとき、1Lが３つと、はんぱが出たとします。そのはんぱ５つで1Lになれば、はんぱは$\frac{1}{5}$Lで、バケツの中の水はあわせて$3\frac{1}{5}$Lになります。これが分数です。

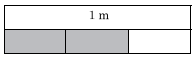
（４）

【問題２】
それでは、$\frac{2}{3}$mはどのような長さでしょうか。

（ア）　３つで２mの長さ



（イ）　$\frac{1}{3}$mが２つの長さ



（ウ）　その他

・３つで２mになる長さは、$\frac{1}{3}$mが２つの長さと同じです。

$\frac{2}{3}$m ＜ ３つで２mの長さ（２mを３等分した長さ）
$\frac{1}{3}$mが２つの長さ（１mを３等分した２つの長さ）

・$\frac{2}{3}$の３を分母、２を分子といいます。

日常生活で用いられる「もとの大きさの何分のいくつ」という割合と、量の大きさを表わす分数とが混同されている[9]。これを解消することは、第1章を通じての、さらには授業書全

[9] 注5の「改訂2版」には、付け加えられた一連の問題のあとに、「量分数と割合分数」という題の文章が挿入されている。しかし、数はそもそも量の大きさを表わすものであり、「量分数」も「割合分数」も存在しない。「量分数」とは「量にもとづく分数指導」を、「割合分数」とは「割合にもとづく分数指導」を指す語として捉えるべきであろう。

体を通じての課題である。

授業書4ページもまとめの際に配布する。授業者は【問題2】を選択肢なしで板書し、紙テープを黒板に貼った。各班で考えさせ、一通り発表させる。

C：「1mを3等分した長さの2この長さだと思います」
C：「3mを3等分したうちの2こ分」
T：「3mを3等分したらどうなる？」
C：「1m」
T：「ってことは$\frac{2}{3}$mは2mと同じなのかな？ちょっとこれは置いとこうかな」
C：「何かを3等分したうちの2つ分の長さ」

もう一度考える時間を取る。

C：「$\frac{2}{3}$mは3つで2mになる長さ」
C：「何かを3等分したうちの2つ分というのは、何かは全部に共通するもので、例えば鉛筆でも何かになるので違うと思う」

子どもたちから出てきた考えを板書して、それぞれ正しいと思うか、間違いと思うか、挙手をさせた。その過程でも発言が出た。

C：「思い出しました。2mを3等分した長さ」
C：「3つで2mになる長さと2mを3等分した長さは答えが同じ」
C：「え、なんで」
C：「違うと思う」

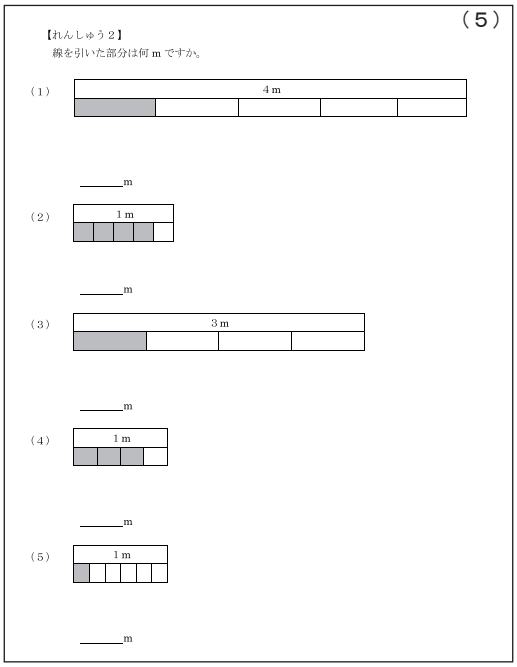
挙手の結果	○正しい	△たぶん正しい	×間違い
【1mを3等分したうちの2つ分】	15人	3人	16人
【3mを3等分したうちの2つ分で2m】	0人	5人	29人
【何かを3等分したうちの2つ分の長さ】	0人	0人	34人
【3つで2mになる長さ】	19人	10人	5人
【2mを3等分した長さ】	10人	10人	14人

当初は割合の考え（上から2番目と3番目）も出たが、班やクラス全体で話し合った結果、最終的に割合の考えを「正しい」としたものはいなかった。

また、「分割分数」は「正しい」と「間違い」がほぼ同数であるのに対して、「商分数」の「3つで2mになる長さ」は、34人中「正しい」が19人、「多分正しい」が10人で支持率が最も高かった。ただし、「3つで2mになる長さ」と「2mを3等分した長さ」が等しいと認識

していない子どもが多い。

このあと、授業書の4ページを配布し、黒板に貼ったテープも用いて、（ア）と（イ）が等しいことを確かめた。



【れんしゅう2】は今回の改訂で付け加えた。(1)と(2)はともに$\frac{4}{5}$m、(3)と(4)はともに$\frac{3}{4}$mであり、図でもそれぞれ同じ長さであることが見て取れるようにしてある。

T：「(1)はいくつですか？ 全員で一斉に」

C：「$\frac{1}{5}$m」

T：「$\frac{1}{3}$mは3つで1mになる長さ、1mを3等分したうちの1つ分の長さでした。(1)は1mを分けてる？」

C：「分数でどう表せばいいかわからない」「何cmかは分かった」

T：「ということは、(2)は楽勝だったの？ せーの」

C：「$\frac{4}{5}$m」

T：「(1)は斜線部分がいくつ集まると何mになる？」

C：「5個集まると4m」

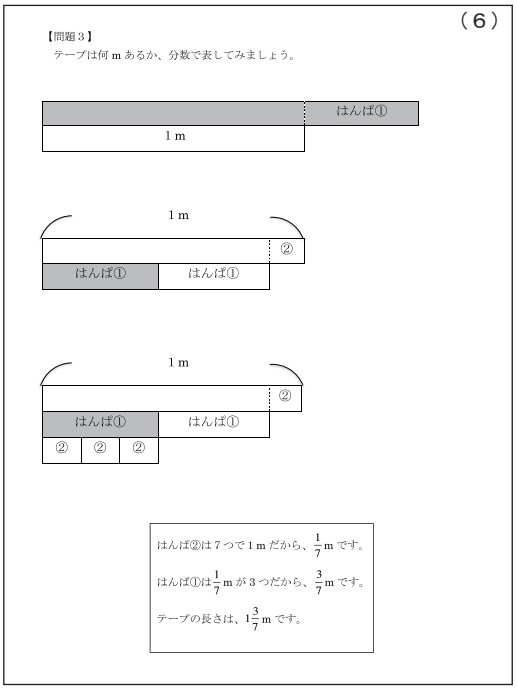
T：「ということは5つで4mになる長さなんだ。$\frac{1}{3}$mは3つで1mの長さと同じだ。ってことは、ここは$\frac{1}{5}$mかい？」

C：「$\frac{4}{5}$m」

子どもたちの多数は(1)を$\frac{1}{5}$m、(2)を$\frac{4}{5}$mとしていた。【問題2】で「商分数」が理解されていなかったようだ。「ある量を5等分した1つ分はもとの量の$\frac{1}{5}$」という割合と、「1を5等分した1つ分が$\frac{1}{5}$」という分数を混同して、「ある長さを5等分した1つ分が$\frac{1}{5}$m」と考えている[10]。

また、子どもたちはそもそも(1)を「5つで4mになる長さ」とは捉えていないようだ。【問題2】で、「3つで2mになる長さ」と「2mを3等分した長さ」が等しいことを、授業書の記述で強調するべきであった。

ともかく、【問題2】と【れんしゅう2】で「商分数」から「分割分数」へ橋渡しをして、【問題3】で「分割分数」の考え方を適用する準備をした。



[10] 大田がある高校への「出前授業」でこのタイプの問題を出したとき、正解は2年生38人中22人（58%）であった。大学生でも間違うものが少なくない。

授業書6ページも、まとめの際に配布する。授業者は黒板に【問題3】の$1\frac{3}{7}$mのテープを貼って、問いかける。

T：「どれくらいの長さだと思う？どうやったらわかる？」
C：「1mで測る」
T：「では置いてみます。まずここまでは1mでした。またはんぱ（①）が出てしまいました。さあ、どうしましょう」「このはんぱ（①）の長さはどうすればいいんだっけ？」
C：「1mに合わせて測っていく！」
T：「1mに合わせていくんですね」「あれ？2つとれたけど…」「またはんぱ（②）が出ました」
C：「上のはんぱ（①）に合わせる！」
T：「では合わせていきたいと思います」

授業者がはんぱ②ではんぱ①を測っていくと、ちょうど3つ分であった。はんぱ①はどんな長さか、班で話し合わせる。

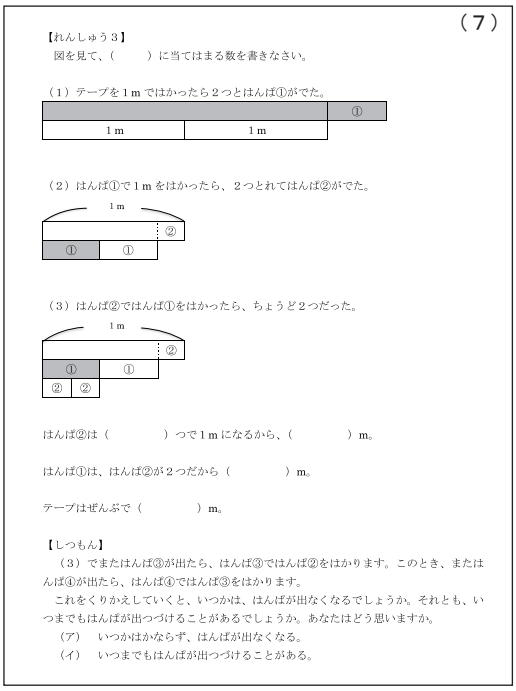
T：「8班さんお願いします」
C：「一番小さい紙テープ（はんぱ②）は、二番目に小さい紙テープ（はんぱ①）の3こ分（3等分の言い間違い）で、1mに二番目に小さい紙テープ（はんぱ①）を合わせたら、2こ分取れたから3×2が6で、あとの余りのはんぱが、さっきの一番小さい紙テープ（はんぱ②）と同じ長さだったから、7つで1mになるから$\frac{1}{7}$m」

この子どもにもう一度言ってもらいながら、授業者が黒板上の紙テープを用いて、はんぱ②が$\frac{1}{7}$mであるところまで確認する。

T：「で、求めたいところはここ（はんぱ①）だったはず。ここは何m？」
C：「$\frac{3}{7}$m」

はんぱ②が出たとき、子どもたちからは、はんぱ②で1mを測るという考えが出てくることが多い。1975年の小樽での実験授業でもそうだった。それでも、はんぱ②で1mを測る過程で、必然的にはんぱ①を測ることになる。

今回はすんなりと、はんぱ②ではんぱ①を測るという考えが出てきた。このように、「はんぱではんぱを測る」方法を互除法という。



（7）

【れんしゅう3】
図を見て、（　　）に当てはまる数を書きなさい。

（1）テープを1mではかったら2つとはんぱ①がでた。

（2）はんぱ①で1mをはかったら、2つとれてはんぱ②がでた。

（3）はんぱ②ではんぱ①をはかったら、ちょうど2つだった。

はんぱ②は（　　）つで1mになるから、（　　）m。

はんぱ①は、はんぱ②が2つだから（　　）m。

テープはぜんぶで（　　）m。

【しつもん】
（3）でまたはんぱ③が出たら、はんぱ③ではんぱ②をはかります。このとき、またはんぱ④が出たら、はんぱ④ではんぱ③をはかります。
これをくりかえしていくと、いつかは、はんぱが出なくなるでしょうか。それとも、いつまでもはんぱが出つづけることがあるでしょうか。あなたはどう思いますか。
（ア）　いつかはかならず、はんぱが出なくなる。
（イ）　いつまでもはんぱが出つづけることがある。

【れんしゅう3】のあとの【しつもん】は、1998年に新潟県の小学校4年生のクラスで授業にかけた際に付け加えた【研究問題】の、文章を若干修正したものである[11]。

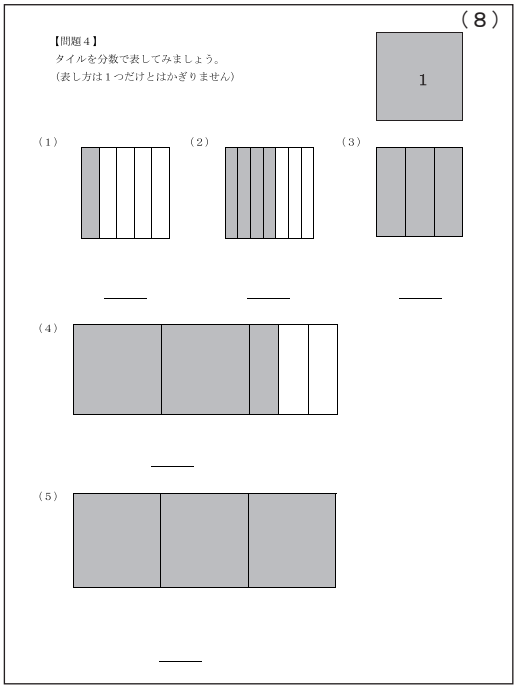
一般的に、連続量を単位量で測定する互除法のアルゴリズムは無限に続く。しかし、子どもたちに「正解」を知らせても納得は得られないだろうから、「正解」を言わずに「中学生、高校生になったら学ぶ機会があるかも知れない」と言う程度で良いだろう。

1998年の授業では、アが15人、イが2人、無答が1人であった。今回はアが24人、イが10人という結果で、4年生でもある程度無限が受け入れられるようだ。

T：「どうしてそう思ったのか言えそうな人いる？」
C：ア「いつかは絶対そのはんぱに合うはんぱが出ると思う」
C：ア「いつまでもはんぱが出続けたら、何分の何mかが分かんなくなるから」
C：ア「どんどんはんぱをやるほど小さくなっていくから絶対あると思う」

[11] 岡野勉、大田邦郎、山川健太郎、神戸康寿「分数の教育内容・教材構成に関する実験的研究：授業書「新しい数-分数（改訂版）」と実験授業によるその検証」（『教授学の探究 第18号』2001年）。この「改訂版」はこの【研究問題】と、【問題2】のあとに$2\frac{2}{3}$mのテープを3本つなげる問題を付け加えた程度であった。この時点で大田はこれを容認していた。なお、もとの【問題3】のはんぱの長さを$\frac{2}{5}$mに変えて、各班に1mと$\frac{2}{5}$mの紙テープを渡したところ、ほとんどの班が$\frac{2}{5}$mを2等分して1mに当てて測った。$\frac{2}{5}$という数値にしたことと、紙テープを子どもたちに渡したことで、はんぱ②ではんぱ①（または単位）を測るという発想が出るのを妨げたのではないか。

C：イ「…」
T：「ちなみに答えはイです。中学校、高校、大学に行った時に、教えてもらうことがあるかもしれないと思います」



【問題4】のタイルの数値化は、(1)〜(3)は問題なくできるが、(4)と(5)は割合の考え方が出やすい。(4)は$\frac{7}{9}$、(5)は$\frac{3}{3}$と間違う子どもが必ずいる。まず、(4)について。

C：「$\frac{7}{9}$です」「同じです」「なんで？」
C：「2このところに線入れたら6こになる」「線は元々入ってない」
C：「3として分けられているからこっちも3として分けられる」
C：「プリントの右上に1って書いてある」「$\frac{7}{9}$だと2があるのに、1より小さくなっている」
T：「もしこれが$\frac{7}{9}$だったら1より小さい？どう？」
C：「小さい」
T：「小さいんであれば、このタイルは$2\frac{1}{3}$だからまず2はあるもんね。$\frac{7}{9}$は1より小さいんだな。ってことは残念ながら$\frac{7}{9}$は違いそうだな」

(3)も(5)も$\frac{3}{3}$として、おかしいと思わない子どもが多い。

C：「3と$\frac{3}{3}$両方書いた」

C：「$\frac{3}{3}$だと(3)の答えの1と一緒になっちゃう」

T：「(3)は$\frac{3}{3}$のままでも正解。(5)は3なのはいいですね。これが$\frac{3}{3}$かどうかというと、実は×です。なぜなら$\frac{3}{3}$は、$\frac{1}{3}$が3つある大きさだから」

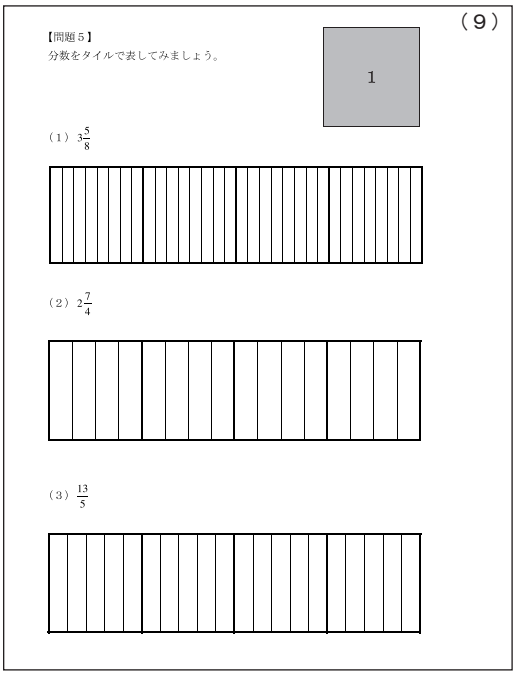
C：「他にもまだ違う言い方があります。$\frac{3}{1}$」

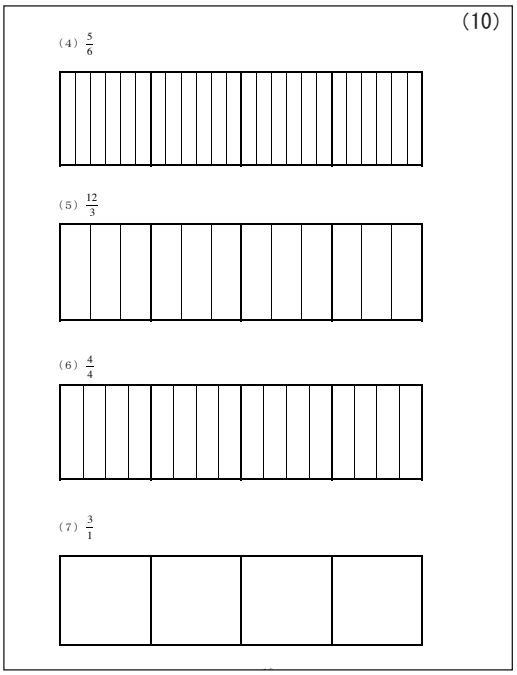
C：「わかった！」「1が3つあるからか」

T：「$\frac{3}{1}$は正解になります」

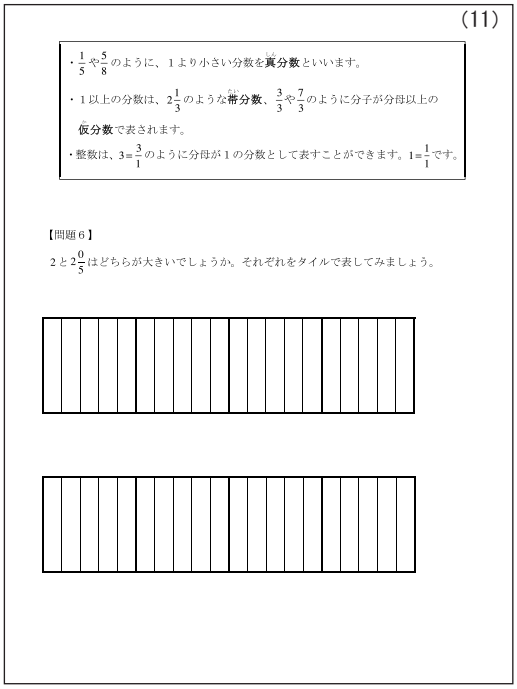
(5)を$\frac{3}{1}$と表わす子どもは少ない。この場合は1を例に出して、1は「1を1等分した1つ分」あるいは「1つで1」だから$1=\frac{1}{1}$と補足説明するのも良い。

なお、これは分数で表わす問題だから、1や3などの整数で表わすのは間違いだと主張する子どももいた。これについては、またあとで考える（26ページ）ので、保留しておいた。





【問題5】の分数のタイル化で、(5)の$\frac{4}{4}$を「4つに分けた4つ分」と割合で考えて、全体の4を塗ってしまう子どももいるが、今回は一人もいなかった。【問題4】と順序を逆にした効果もあったかも知れない。なお、(3)の$\frac{13}{5}$（一般的な仮分数）は授業後に付け加えた。



(11)

・$\frac{1}{5}$や$\frac{5}{8}$のように、１より小さい分数を**真分数**といいます。

・１以上の分数は、$2\frac{1}{3}$のような**帯分数**、$\frac{3}{3}$や$\frac{7}{3}$のように分子が分母以上の**仮分数**で表されます。

・整数は、$3=\frac{3}{1}$のように分母が１の分数として表すことができます。$1=\frac{1}{1}$です。

【問題６】

２と$2\frac{0}{5}$はどちらが大きいでしょうか。それぞれをタイルで表してみましょう。

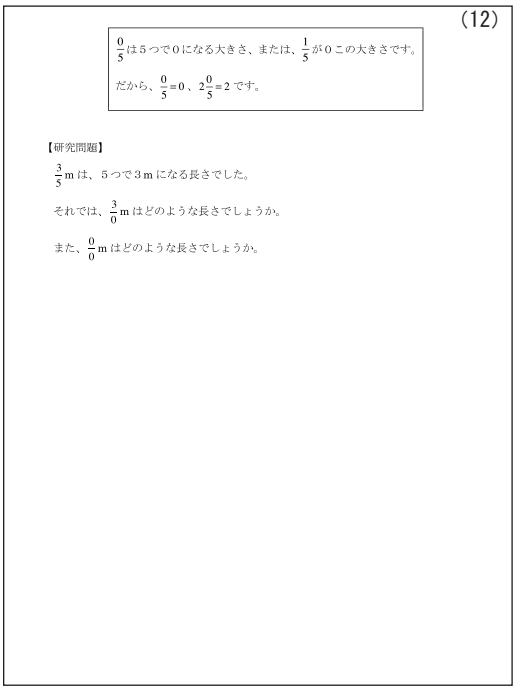
【問題6】で、$2\frac{0}{5}$をタイルで表わすのに、タイル3つを塗った子どもがいた。授業者が板書して、子どもたちに考えさせる。

T：「1つ目の2の方は全員描けていました。で、2つ目の方ですけども、このように描いた人がいました」

C：「これじゃあ3になっちゃう」

C：「$2\frac{0}{5}$じゃなくて3になっちゃう」

C：「$\frac{0}{5}$は5つに分けたうちの0個だから、タイル1つ分にはならないと思う」


(12)

$\frac{0}{5}$は5つで0になる大きさ、または、$\frac{1}{5}$が0この大きさです。

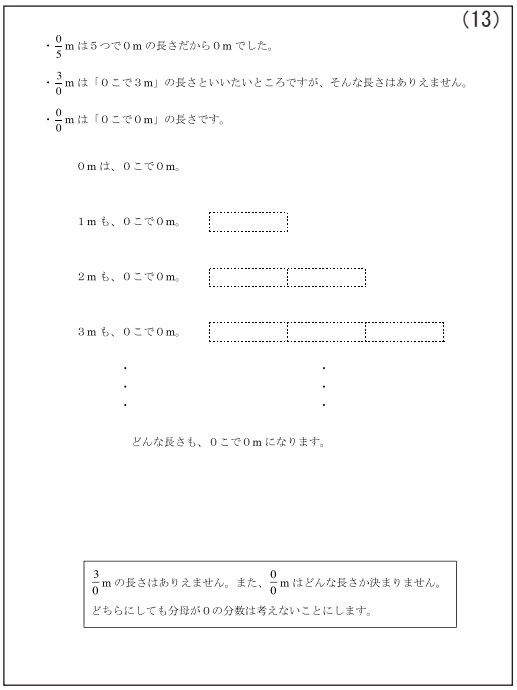
だから、$\frac{0}{5}=0$、$2\frac{0}{5}=2$です。

【研究問題】

$\frac{3}{5}$mは、5つで3mになる長さでした。

それでは、$\frac{3}{0}$mはどのような長さでしょうか。

また、$\frac{0}{0}$mはどのような長さでしょうか。


(13)

・$\frac{0}{5}$mは5つで0mの長さだから0mでした。

・$\frac{3}{0}$mは「0こで3m」の長さといいたいところですが、そんな長さはありえません。

・$\frac{0}{0}$mは「0こで0m」の長さです。

0mは、0こで0m。

1mも、0こで0m。

2mも、0こで0m。

3mも、0こで0m。

どんな長さも、0こで0mになります。

$\frac{3}{0}$mの長さはありえません。また、$\frac{0}{0}$mはどんな長さか決まりません。

どちらにしても分母が0の分数は考えないことにします。

【研究問題】で、分母が0の分数はないことについて考えさせる。これは、「分割分数」で考えるのは無理である。また、「商分数」でも「bのa等分」ではなく「a個でb」の考え方が必要である。つまり、【問題1】と【問題2】の「3つで1m」「3つで2m」がここで生きてくるのである。

班で考えさせ、授業書に書き込ませる。それぞれ、0mにしたものと、それ以外の考え（書けない、表わせないなど）を書いたものがいた。

C：「書けない理由は分母が0だから、分母が分数の元になる数字だからで、$\frac{3}{0}$、$\frac{0}{0}$どちらも何も書けない」

C：「0こでは3mにもとめることができない。3mにできない。なんも数がないからどうやってもやりようがない」

C：「0を3等分に分けることはできない。答えは0m」

C：「$\frac{3}{0}$mは0を3等分することはできない。$\frac{0}{0}$mは0個を何等分できないからどちらも0m」

C：「$\frac{0}{0}$mは分子も分母も0なのでいくつ集まっても長さにならない。だから0m」

C「$\frac{3}{0}$mは$\frac{1}{3}$mの場合、3つで1mの長さ、1mを3等分した長さなので$\frac{1}{3}$mを$\frac{3}{0}$mに変えて、1という数字を3にして、3という数字を0に変えると3mを0等分した長さだから答えは3m」

子どもたちに発表させたあと、13ページを配って読み合わせる。なお、13ページの「どんな長さも、0こで0mになります」という文は授業後に付け加えた。

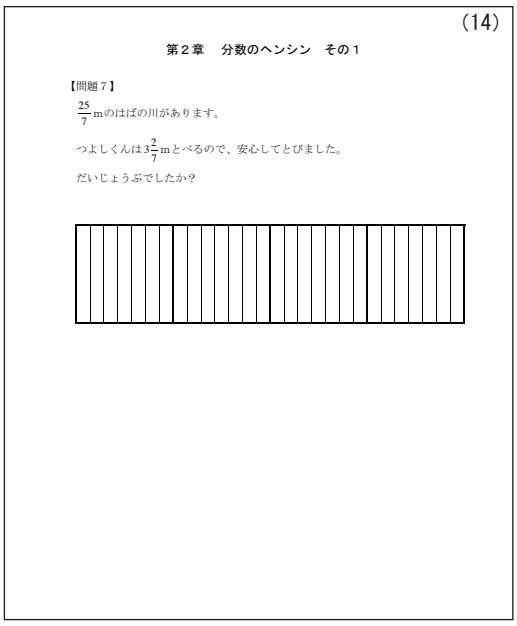
最後に、どちらも「できません」として理由も書いていた子どもを指名し、読み上げさせた。

C：「最初に『$\frac{3}{5}$mは5つで3mになる長さ』と書いてあったので、それをそのまま使って考えてみた結果、（$\frac{3}{0}$も$\frac{0}{0}$も）できなかったから」

大学生でも、$\frac{3}{0}=0$、$\frac{0}{0}=0$というものが多い。また、小学校の教員もあまりこの問題を取り上げたがらない。それで、これを扱うかどうかは授業者に委ねることにして【研究問題】とした。しかし、小学校4年生でもここまで考えることができるのである。

(2)　第2章　分数のヘンシン その1（2時間）

ここでは、仮分数を帯分数（または整数）に、帯分数（または整数）を仮分数に、それぞれ変形する。また、その計算方法を一般化する。基本的には1978年版を継承しているが、計算練習問題を少し減らし、使用する数値も見直した。


（14）

第２章　分数のヘンシン　その１

【問題７】

$\frac{25}{7}$mのはばの川があります。

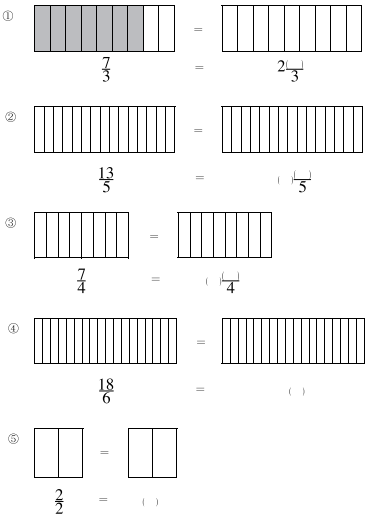
つよしくんは$3\frac{2}{7}$mとべるので、安心してとびました。

だいじょうぶでしたか？

【問題7】は、同分母の帯分数と仮分数の大小比較から、一方を他方の形で表わせば良いことに気づかせるための問題である。子どもたちは、タイル図に書き込むことで比較できていた。なお、1つのタイル図に2つの分数を表わすために苦労していた。タイル図は2つ書いておいた方が良かった。

(15)

【問題８】
仮分数を、帯分数か整数にヘンシンさせよう。
（　）の中に当てはまる数を書きなさい。



(16)

仮分数を帯分数にヘンシンさせるときは、分子で分母をわります。
商が整数部分、あまりが分子になります。あまりが０のときは整数になります。

$\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$　　$3\overline{)\,7}$（商 2 ← 整数部分）、6、1（← 分子）

$\frac{18}{6}=3\frac{0}{6}=3$　　$6\overline{)\,18}$（商 3 ← 整数部分）、18、0（← 分子）

【れんしゅう４】
仮分数を、帯分数か整数にヘンシンさせなさい。

① $\frac{9}{2}=$　　② $\frac{21}{8}=$

③ $\frac{17}{10}=$　　④ $\frac{12}{3}=$

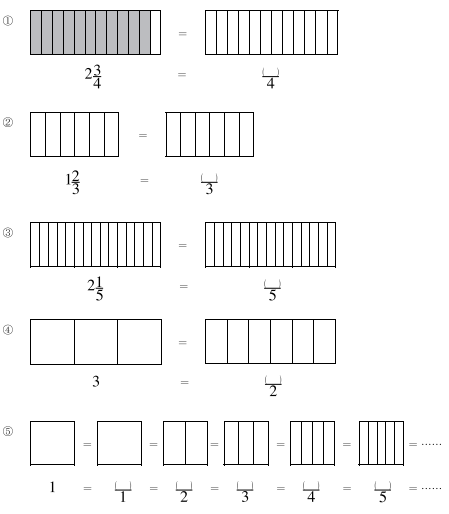
⑤ $\frac{6}{6}=$　　⑥ $\frac{3}{1}=$

【問題8】は、タイル図を用いて仮分数を帯分数にする過程で、計算方法に気づかせるための問題である。当初は①を　$\frac{8}{3}=1\frac{(\ )}{3}=2\frac{(\ )}{3}$　としていたが、分子を分母で割るのではなく、8－3－3とひき算を繰り返す方法が出てきた。これを避けるために、授業後に　$\frac{7}{3}=2\frac{(\ )}{3}$　と修正した。

また、②、③、④は、数値を見直すとともに、順序も見直した。

(17)

【問題９】
帯分数や整数を、仮分数にヘンシンさせよう。
（　）の中に当てはまる数を書きなさい。



(18)

帯分数を仮分数にヘンシンさせるときは、分母と整数部分をかけて、それに分子を加えたものを仮分数の分子とします。

$2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$　$(4\times2+3=11)$

整数は、表そうとする分数の分母と整数をかけて、それを分子にします。

$3=\frac{6}{2}$　　$(2\times3=6)$

【れんしゅう５】
次の分数、整数を仮分数にヘンシンさせなさい。

① $2\frac{4}{5}=$　　② $4\frac{5}{8}=$

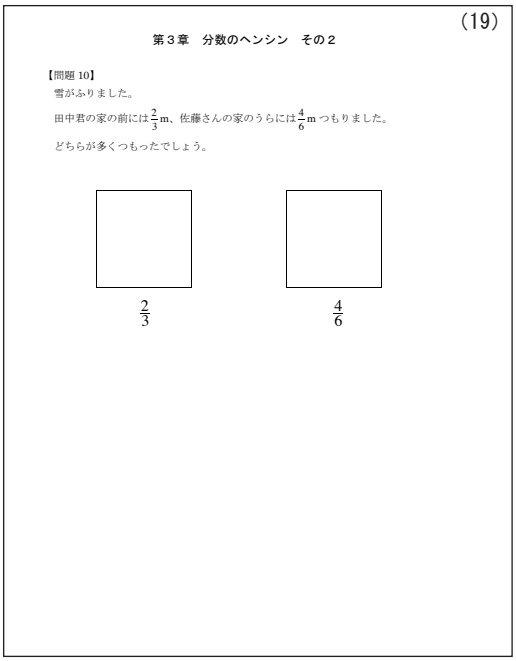
③ $3\frac{7}{10}=$　　④ $4=\frac{\square}{5}$

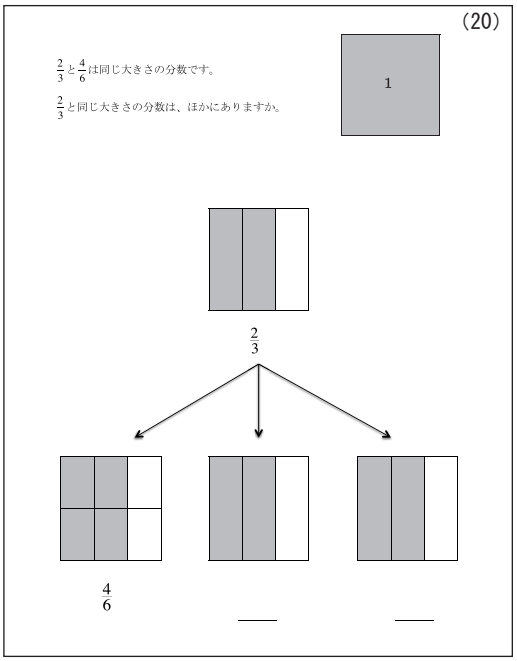
⑤ $6=\frac{\square}{1}$　　⑥ $1=\frac{\square}{1}=\frac{\square}{5}=\frac{\square}{8}$

【問題9】は【問題8】の逆である。これも同じ理由で授業後に修正した。さらに【れんしゅう5】の⑥は、$1=\frac{(\ )}{8}$ だけだったが、$1=\frac{(\ )}{1}=\frac{(\ )}{5}=\frac{(\ )}{8}$ に変更した。

(3) 第3章　分数のヘンシン その2（2.5時間）

ここでは、分数の分母と分子に同じ数をかけても大きさが変わらないこと（倍分[12]）、分数の分母と分子を同じ数で割っても大きさが変わらないこと（約分）を扱う。





【問題10】は大小比較から倍分、約分に気づかせるのがねらいである。子どもたちはタイル図に$\frac{2}{3}$と$\frac{4}{6}$を書き込むことで、大きさが等しいことに気づいた。

ただし、$\frac{2}{3}$と同じ大きさの分数については、タイル図の横線を1本ずつ増やして$\frac{6}{9}$、$\frac{8}{12}$、$\frac{10}{15}$、$\frac{12}{18}$と見つけていって、分母が3ずつ、分子が2ずつ増えていることに気づいても、分母と分子に同じ数をかけていることにはなかなか気づかなかった。

これは【問題8】や【問題9】の場合と同様に、累加や累減ではなく乗除算を用いる必要がある例を用いても良かった。具体的には、20ページのタイル図は子どもたちに自由に書き込ませるのではなく、横線をあらかじめ5本なり7本なり適当な数で入れておくことも考えられる。

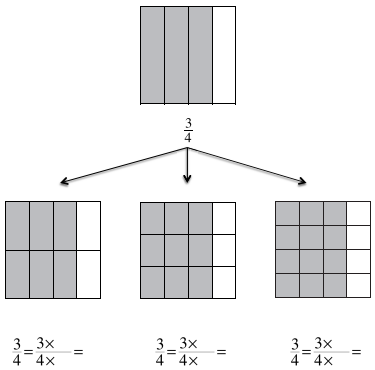
[12] 学習指導要領と検定教科書には倍分という用語はない。

(21)

・分母と分子に同じ数をかけても
分数の大きさはかわりません。 $\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$

・このようにして分数をヘンシン
させることを、**倍分**といいます。 $\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$

【れんしゅう６】
倍分しなさい。



$\frac{3}{4}=\frac{3\times}{4\times}=$　　$\frac{3}{4}=\frac{3\times}{4\times}=$　　$\frac{3}{4}=\frac{3\times}{4\times}=$

(22)

【れんしゅう７】
（　）に当てはまる数を書きなさい。

① $\frac{3}{4}=\frac{3\times}{4\times}=\frac{(\ )}{28}$

② $\frac{2}{5}=\frac{2\times}{5\times}=\frac{(\ )}{20}$

③ $\frac{1}{2}=\frac{\times}{\times}=\frac{(\ )}{18}$

④ $\frac{5}{8}=\frac{\times}{\times}=\frac{(\ )}{24}$

⑤ $\frac{7}{6}=\frac{\times}{\times}=\frac{(\ )}{12}$

⑥ $3\frac{1}{7}=(\ \ )\frac{\times}{\times}=(\ \ )\frac{(\ )}{14}$

【れんしゅう6】について、授業では$\frac{3}{4}$の倍分を$\frac{(\ )}{8}$などの穴埋めの形で行わせた。しかし、計算の過程（分母と分子に何をかけたか）を自覚化するために、$\frac{3}{4}=\frac{3\times}{4\times}=$　という書き方をすることにした。もともと1978年版はこの方式であった。

【れんしゅう7】も、穴埋め方式からこの書き方に改めた。また、問題の数や用いる数値も授業後に再検討した。

(23)

【問題 11】

$\frac{8}{12}$と同じ大きさの分数を見つけなさい。

(24)

・分母と分子を同じ数でわっても
分数の大きさはかわりません。 $\frac{8}{12}=\frac{8\div2}{12\div2}=\frac{4}{6}$

・このようにして分数をヘンシン
させることを、**約分**といいます。 $\frac{8}{12}=\frac{8\div4}{12\div4}=\frac{2}{3}$

【れいだい】

$\frac{12}{18}$を約分しなさい。

$\frac{12}{18}$　２でわれるかな？ われそうだな。　$\frac{12\div2}{18\div2}=\frac{6}{9}$

$\frac{6}{9}$　まだ何かでわれないかな？ ２はもうだめだ。

３でわれるかな？ うん、われそうだ。　$\frac{6\div3}{9\div3}=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$　これは？ どうしようもない。 だから…　$\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

これをまとめて書くと

$\frac{12\div2}{18\div2}=\frac{6\div3}{9\div3}=\frac{2}{3}$　または　$\frac{12\div3}{18\div3}=\frac{4\div2}{6\div2}=\frac{2}{3}$　または　$\frac{12\div6}{18\div6}=\frac{2}{3}$

【問題11】は、1978年版では$\frac{3}{5}$のタイル図に横線を1本入れた$\frac{6}{10}$や、横線を2本入れた$\frac{9}{15}$から、横線を取り除くことで約分の意味を示した。今回は、あえてタイル図を用いずに$\frac{6}{10}$という数値だけ与えて、約分を考えさせてみた。

今回の授業では、授業者が黒板に$\frac{6}{10}$と書いて「これと同じ分数つくってほしいんだけど」と問いかけた。子どもたちから、$\frac{12}{20}$、$\frac{18}{30}$、$\frac{24}{40}$と倍分したものが出てくる。

T：「たぶんきっと君たち、$\frac{\quad}{50}$というでしょ？」「ちょっと違うのいきたいなあ」
C：「$\frac{60}{100}$」
T：「OK。僕その考え嫌いじゃないです。なんかもっとないかな？」
C：「$\frac{120}{200}$」　「$\frac{600}{1000}$」
T：「どんどんでっかくなっていきます」
C：「逆戻りする」
T：「逆戻りするって意味、わからないんだけど」
C：「大きくならないで、ちっちゃくなる」
C：「$\frac{3}{5}$」
T：「いいのこれ？」
C：「あってる」「倍になってる」
T：「何が倍になってる？」
C：「分子と分母が倍になってる」
T：「あ！こちらからこちら（5から10）いったら×2、こちらからこちら（3から6）いったらどちらも×2になってる。ここイコールだ」
C：「割り算方式」
T：「割り算方式ってなんや？」
C：「10÷2」「かけるじゃなくて、わる2」「同じ数で割る」

たてと横に等分されたタイル図から横線だけ取り除いてみせるよりも、数字だけ与えて考えさせる方が、子どもたちは頭を働かせるようだ。倍分はもうわかっているのだから、タイル図はなくてもいい。

なお、授業後の再検討で、$\frac{6}{10}$のように約分の仕方が一通りだけの分数よりも、何通りもある分数の方が良いだろうとして、$\frac{8}{12}$を用いることにした。また、これに合わせて【れいだい】

の数値も変えた。

(25)

$\frac{12}{18}$は約分すると$\frac{6}{9}$や$\frac{4}{6}$や$\frac{2}{3}$になります。

$\frac{6}{9}$や$\frac{4}{6}$はまだ約分できますが、$\frac{2}{3}$はもうこれ以上約分できません。

【れんしゅう8】
約分できる分数はこれ以上できないところまで約分しなさい。

① $\frac{12}{27}=\frac{12\div}{27\div}=$　　② $\frac{60}{80}=\frac{\div}{\div}=$

③ $\frac{8}{9}=$　　④ $\frac{25}{100}=$

⑤ $\frac{11}{33}=$　　⑥ $3\frac{4}{12}=$

(26)

ヘンシンする数…分数

$2\frac{3}{4} = 1\frac{7}{4} = \frac{11}{4}$
$2\frac{6}{8} = 1\frac{14}{8} = \frac{22}{8}$
$2\frac{9}{12} = 1\frac{21}{12} = \frac{33}{12}$
$2\frac{12}{16} = 1\frac{28}{16} = \frac{44}{16}$
$2\frac{15}{20} = 1\frac{35}{20} = \frac{55}{20}$
$2\frac{196611}{262148} = 1\frac{458759}{262148} = \frac{720907}{262148}$

・分数は、たとえば$2\frac{3}{4}$は左のように何通りも表し方があり、どれも同じ数です。

・分数は<u>ヘンシンする数</u>なのです。

・整数1、2、3、…も分母が1の分数にヘンシンできるので、分数の一部と考えることができます。

【れんしゅう8】の約分の計算も、倍分の場合と同様に、$\frac{12}{27}=\frac{12\div}{27\div}=$　の形で書くようにした。
また、用いる数値も見直した。約分は、最大公約数で割らなくても、2で割って、3で割って、…という方式でできる程度にとどめた。

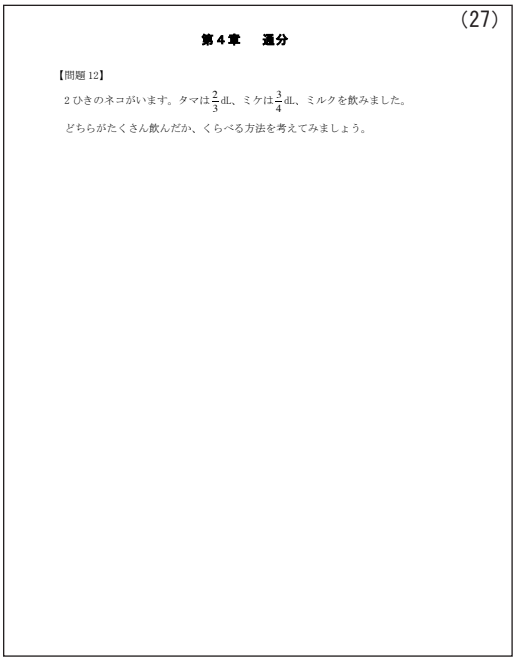
(4)　第4章　通分（1.5時間）

現行の2008年学習指導要領は、5年で最大公約数と最小公倍数を扱い、これらを用いて通分と約分を扱うようになっている。そのため、2年で「$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$など簡単な分数について知ること」としながらも、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$の計算は5年にならなければできない。

これに対して授業書「新しい数－分数」は、分数概念の導入のあと、演算の前に分数の性質をまとめて扱っている。約分も倍分・通分も、最大公約数や最小公倍数の概念がなくても、かけ算とわり算を使えば可能である[13]。

[13] 最大公約数や最小公倍数、異分母分数の加減算が既習の６年生のクラスで授業書「新しい数－分数」による授業を実施した際にも、子どもたちは最小公倍数ではなく授業書の倍数表を用いてどんどん計算していったという報告を受けたことがある。

演算の前に分数の性質をまとめて扱うことで、演算自体の指導も簡潔にできる。実際、加減算は同分母の場合と異分母の場合で分ける必要がなくなるのである。



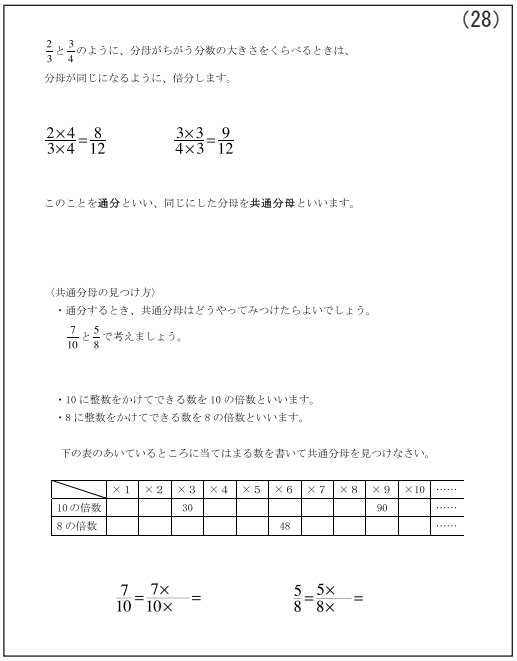
(27)

第４章　通分

【問題 12】

２ひきのネコがいます。タマは$\frac{2}{3}$dL、ミケは$\frac{3}{4}$dL、ミルクを飲みました。

どちらがたくさん飲んだか、くらべる方法を考えてみましょう。



(28)

$\frac{2}{3}$と$\frac{3}{4}$のように、分母がちがう分数の大きさをくらべるときは、

分母が同じになるように、倍分します。

$\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$　　$\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$

このことを**通分**といい、同じにした分母を**共通分母**といいます。

〈共通分母の見つけ方〉

・通分するとき、共通分母はどうやってみつけたらよいでしょう。

$\frac{7}{10}$と$\frac{5}{8}$で考えましょう。

・10 に整数をかけてできる数を 10 の倍数といいます。

・8 に整数をかけてできる数を 8 の倍数といいます。

下の表のあいているところに当てはまる数を書いて共通分母を見つけなさい。

	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10	……
10の倍数			30						90		……
8の倍数						48					……

$\frac{7}{10}=\frac{7\times}{10\times}=$　　$\frac{5}{8}=\frac{5\times}{8\times}=$

【問題12】は、分母が異なる分数の大小比較をするためには、倍分を用いて分母を共通にすれば良いことに気づかせるのがねらいである。しかし、授業書を配ると子どもたちはタイル図を書きはじめた。タイル図を書いて直接比較しようとしているのである。

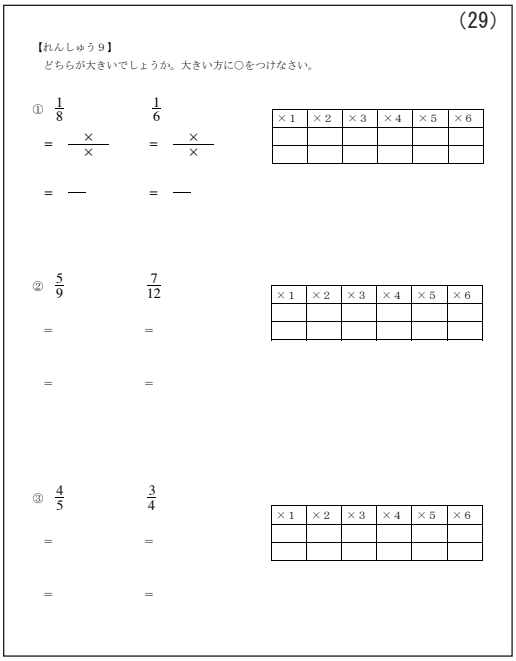
T：「タイルで描く方法も素晴らしいです。でも、すごい時間がかかっているので、それ以外で求める方法を考えてみてください」「どんな分数だったら比べられそう？」
C：「分母が同じ」
T：「分母が同じなら比べることができそうだ。そこの部分、どうやったら変えられそう？」

子どもたちから考えが出てこない。

T：「それではちょっと助けます。きっとタイルに線を入れて考えていると思います。この$\frac{2}{3}$、どうやったらヘンシンできると思う？」
C：「倍分」
T：「倍分ってことは？」
C：「線を入れる」
T：「線を入れたらいくつになった？」

C：「$\frac{4}{6}$」
T：「（分母と分子に）いくつかけた？」
C：「2」
T：「もちろん、その気になればまだいけそうですね。同じように$\frac{3}{4}$も線を入れるといくつにヘンシンしましたか？」
C：「$\frac{6}{8}$」
T：「かけるいくつ？」
C：「2」
T：「まだいけそうだね。同じことしていったらどこかで揃いそうなところはないかな？ちょっとやってみよう」
C：「12でいく！」

ようやく、両方とも分母が12になるように倍分すればいいというところまできた。このあと、28ページで「倍数表」を用いて共通分母を見つける方法、および分母が共通になるように倍分計算をして比べる方法を説明する。


(29)

【れんしゅう９】
どちらが大きいでしょうか。大きい方に○をつけなさい。

① $\frac{1}{8}$　$\frac{1}{6}$
= $\frac{\times}{\times}$　= $\frac{\times}{\times}$
= ―　= ―

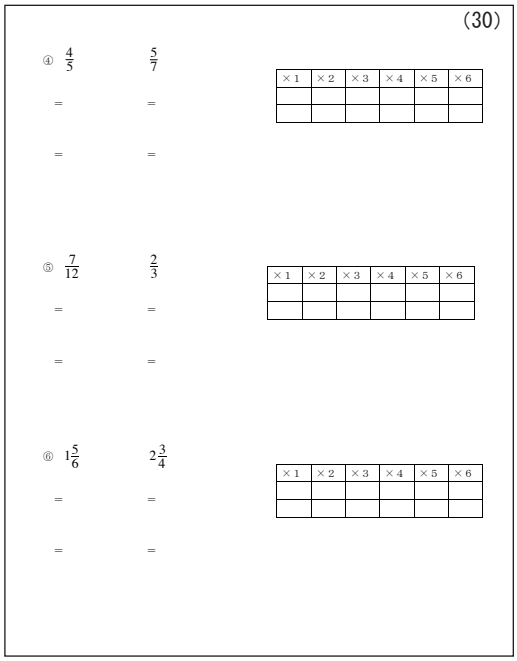
×1	×2	×3	×4	×5	×6

② $\frac{5}{9}$　$\frac{7}{12}$
=　=
=　=

×1	×2	×3	×4	×5	×6

③ $\frac{4}{5}$　$\frac{3}{4}$
=　=
=　=

×1	×2	×3	×4	×5	×6


(30)

④ $\frac{4}{5}$　$\frac{5}{7}$
=　=
=　=

×1	×2	×3	×4	×5	×6

⑤ $\frac{7}{12}$　$\frac{2}{3}$
=　=
=　=

×1	×2	×3	×4	×5	×6

⑥ $1\frac{5}{6}$　$2\frac{3}{4}$
=　=
=　=

×1	×2	×3	×4	×5	×6

【れんしゅう9】までは、「倍数表」は授業書の問題の横に印刷しておく。しかし、第5章以降は授業書には印刷せず、A4用紙1枚に10個印刷したもの（次ページ左）をたくさん用意しておいて、子どもたちに自由に使わせるようにした。

なお、⑥の帯分数の通分で、整数部分まで変えてはいけないことを、加減算の際に戸惑わないようにあらかじめここで確認しておく。

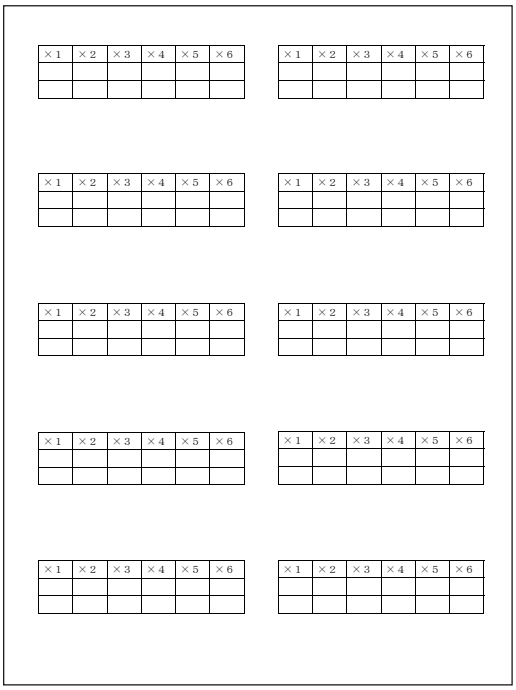
(5)　第5章　分数のたし算（4時間）

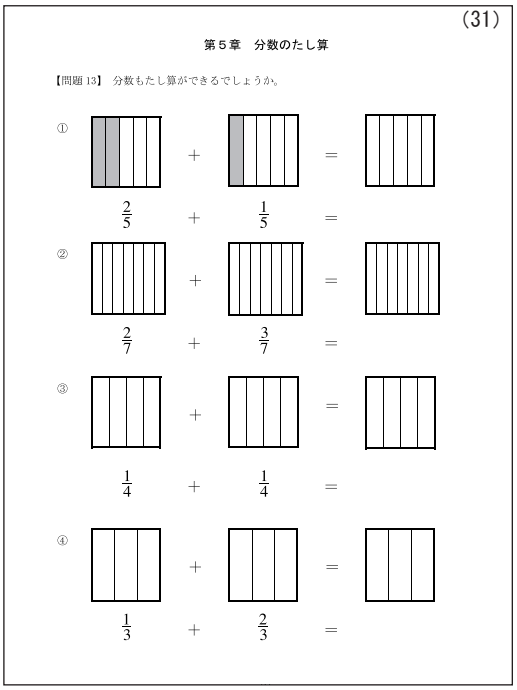
分数のたし算を、同分母の場合と異分母の場合で分けず、ひとまとめにして「水道方式」で型分けし、以下のように配列した。

同分母真分数どうし（素過程その1）→異分母真分数どうし（素過程その2）

→異分母帯分数どうし（典型的複合過程）→その他の型（退化型複合過程）

1978年版では、ひとつひとつの型ごとにタイル図を用いて例題を提示し、練習問題を解いていった。しかし、今回の改訂では、とくにその他の型（退化型複合過程）について大幅に簡略化した。





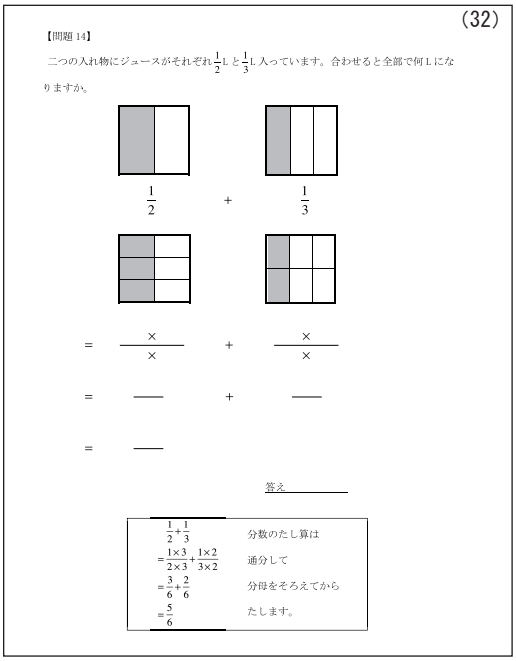
【問題13】は、同分母真分数どうしのたし算（素過程その1）である。授業者は、授業書を配布する前に①を例題として考えさせた。

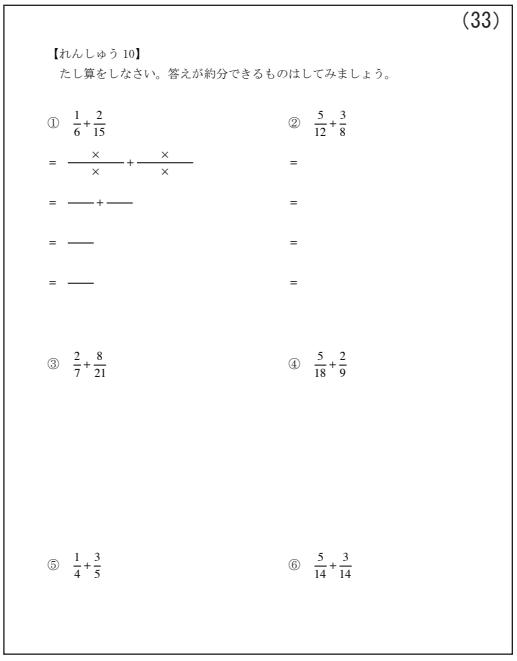
T：「今まで分数を勉強してきたけど、たし算とかひき算ってできそう？」
C：「できる」
T：「じゃあそれをやってもらいたいと思います」

黒板に$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$と書く。

C：「わかった！」「いける」「３年生の時に習った」
T：「ではいきます。いっせーのせーで」
C：「$\frac{3}{5}$です」「$\frac{3}{10}$です」
C：「ん？下（分母）をたしたらどうにもならないよ！」
C：「$\frac{3}{10}$だと分母が変わっちゃうよ」

授業者は、黒板に$\frac{2}{5}$と$\frac{1}{5}$のタイルを貼って合わせて見せた。さらに、用意しておいた$\frac{3}{10}$のタイルを並べて見せて、$\frac{3}{5}$が正しく、$\frac{3}{10}$は誤りであることを確認した。



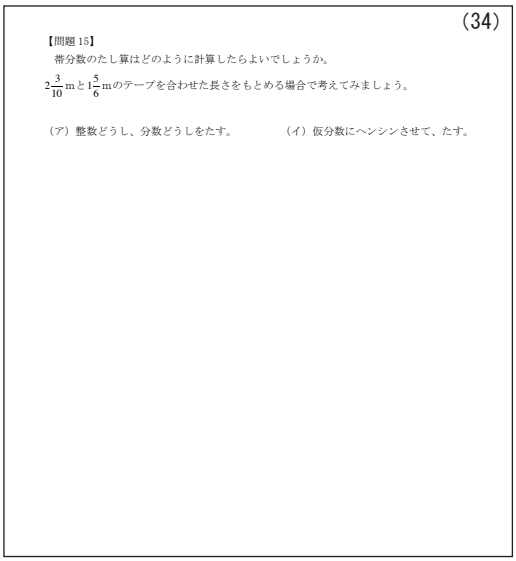


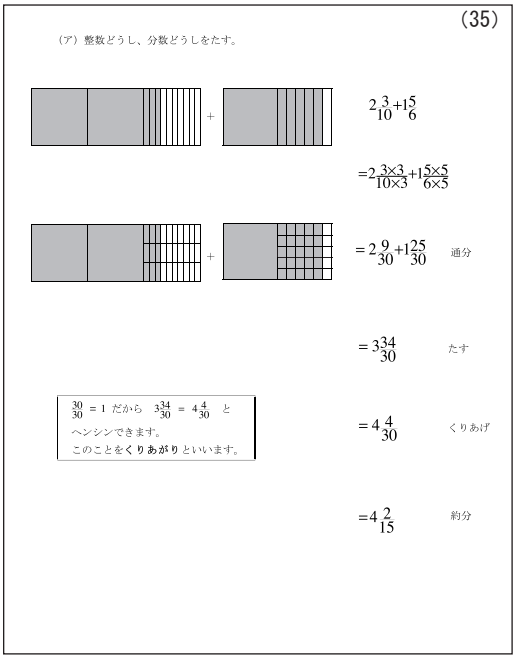
【問題14】は、異分母真分数どうしのたし算（素過程その2）である。問題を読んで、たし算であることを確認し、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$と式をたてる。そのうえで、どうすればいいか班で話し合わせる。各班から答えとして出てきた$\frac{2}{5}$、$\frac{2}{12}$、$\frac{5}{6}$を板書して、班で話し合われたことをまとめる形で授業者は言う。

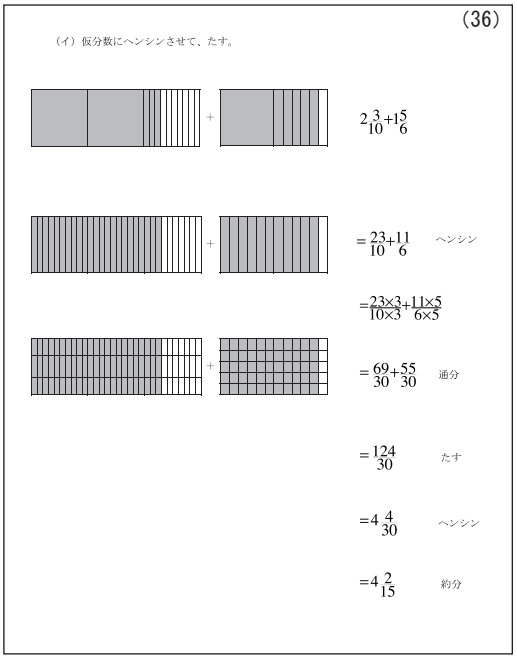
T：「実は1班さん以外、みんなが言ってること、基本、同じだったんです。分母が5と5だったら計算できる。7と7だったら計算できる…。2と3で、みんなうわってなっちゃったんだよね？」

T：「何だったら出来るの？これ（分母）が揃ったらできるんだよね。よく言葉、ページ数まで調べてくれました。28ページにどうやら書いてあるそうなんですよ」
T：「こんな言葉です。（板書して）共通分母、分母を２つとも共通にしたら出来るんじゃないのかなって発表してくれた班があります。この共通分母にするときの方法を、6班、7班、８班さんが言ってました。この分母を揃えることを、通分といいます」

学芸会等で1週間の中断があったので、授業書の28・29ページを参照させ、通分について思い出させている。通分してたすと$\frac{5}{6}$になることを確認して、分母どうし分子どうしをたし







た$\frac{2}{5}$は間違いであること、$\frac{2}{12}$は通分はできているが、分子をそのままにたした間違いであることを指摘した。　【問題15】は、異分母帯分数どうしのたし算（典型的複合過程=水源池）で、その中でも分数加法のアルゴリズム（通分、たす、繰り上げ、約分）がすべて備わった型である。

(37)

【れんしゅう 11】
たし算をしなさい。答えが約分できるものはしてみましょう。

① $1\frac{4}{15}+2\frac{9}{10}$　（ア）の方法で

=

① $1\frac{4}{15}+2\frac{9}{10}$　（イ）の方法で

=

(38)

（ア）か（イ）のどちらかの方法で計算しなさい。

② $2\frac{3}{4}+2\frac{5}{6}$

③ $3\frac{1}{2}+1\frac{7}{10}$

④ $1\frac{7}{12}+1\frac{2}{3}$

⑤ $2\frac{4}{5}+3\frac{1}{6}$

⑥ $1\frac{7}{8}+3\frac{5}{8}$

⑦ $3\frac{2}{7}+2\frac{5}{7}$

(39)

【れんしゅう 12】
いままでの計算とどうちがうか考えながら計算しなさい。

① $2\frac{1}{10}+3\frac{1}{2}$

② $2\frac{1}{6}+1\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{4}+1\frac{2}{3}$

④ $2\frac{2}{5}+\frac{4}{15}$

⑤ $\frac{5}{9}+2\frac{4}{9}$

⑥ $\frac{1}{6}+\frac{9}{10}$

(40)

⑦ $3\frac{2}{5}+4$

⑧ $2+3\frac{1}{4}$

⑨ $\frac{5}{7}+6$

⑩ $7+\frac{8}{9}$

⑪ $2+3$

⑫ 分数のたし算の問題をつくってときなさい。

1978年版では、整数部分どうし、分数部分どうしをたす方法で行うことを前提に、計算体系を組み立てた。今回は、札幌算数サークルでの検討の際に、帯分数を仮分数にしてたすという計算方法を採用してはどうかという意見が出たのを受けて、折衷的に、両方を併記する形とした。

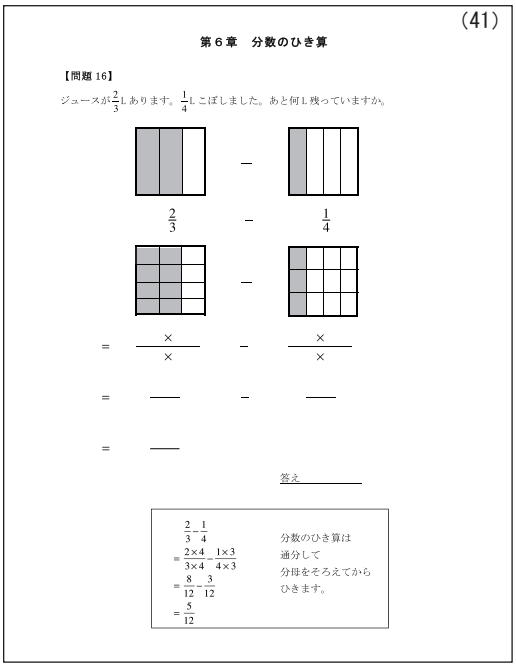
なお、後者の場合、アルゴリズムは（ヘンシン、通分、たす、ヘンシン、約分）となるが、二つ目のヘンシンを削除して答えを仮分数のままにしてもよい。

【れんしゅう11】は、典型的複合過程の計算練習問題、【れんしゅう12】は退化型複合過程の計算練習問題である。子どもたちがどちらの方法で計算するか観察したところ、ほとんどの子どもが問題に応じて二つの計算方法を使い分けていた。その際、どちらの方法で計算したら良いか判断に迷っているらしい子どもも少くなかった。

【れんしゅう12】の⑪「2＋3」はもっとも退化した型である。$\frac{2}{1}+\frac{3}{1}=\frac{5}{1}$と計算した子どももいた。また、⑫のたし算の問題を自分で作って解く問題は、結構おもしろがって取り組んでいた。

(6)　第6章　分数のひき算（4時間）

ひき算は、たし算と同様の原理で構成した。ただし、たし算の「繰り上げ」に対応するひき算の「繰り下げ」は少し難しいので、取り立てて扱う必要がある。また、退化型複合過程のうち、「整数－分数」の型は、整数を分数の形にしてから引くのが少し難しい。


(41)

第６章　分数のひき算

【問題 16】

ジュースが$\frac{2}{3}$L あります。$\frac{1}{4}$L こぼしました。あと何 L 残っていますか。

$\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{4}$

= $\frac{\times}{\times}$ − $\frac{\times}{\times}$

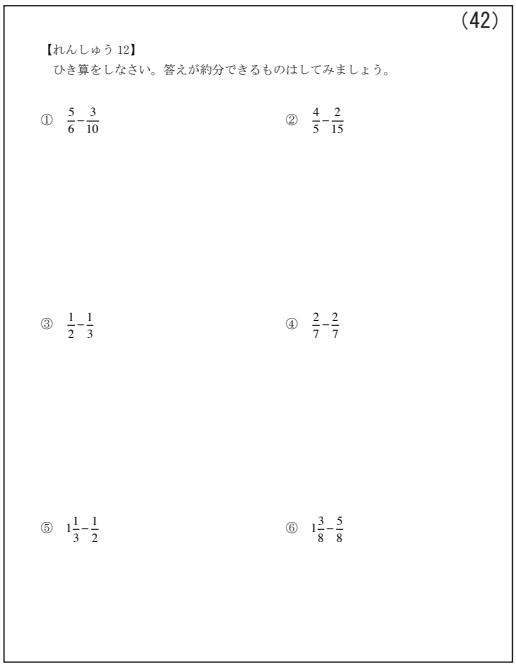
= ＿＿ − ＿＿

= ＿＿

答え ＿＿＿＿

$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$
$=\frac{2\times4}{3\times4}-\frac{1\times3}{4\times3}$
$=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}$
$=\frac{5}{12}$

分数のひき算は
通分して
分母をそろえてから
ひきます。


(42)

【れんしゅう 12】

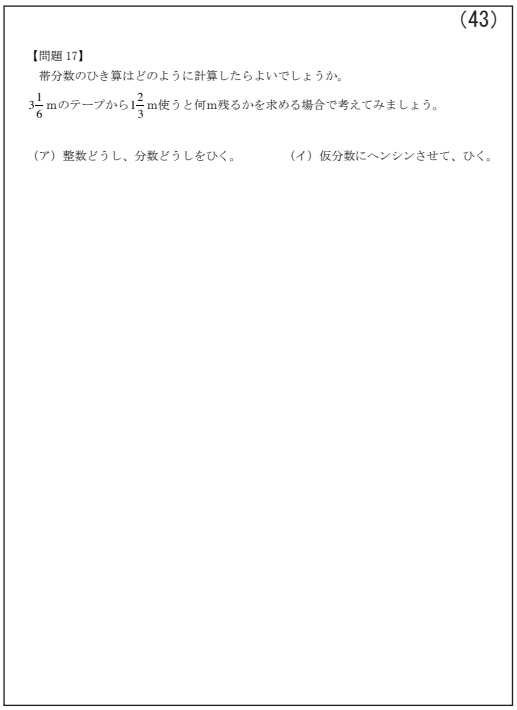
ひき算をしなさい。答えが約分できるものはしてみましょう。

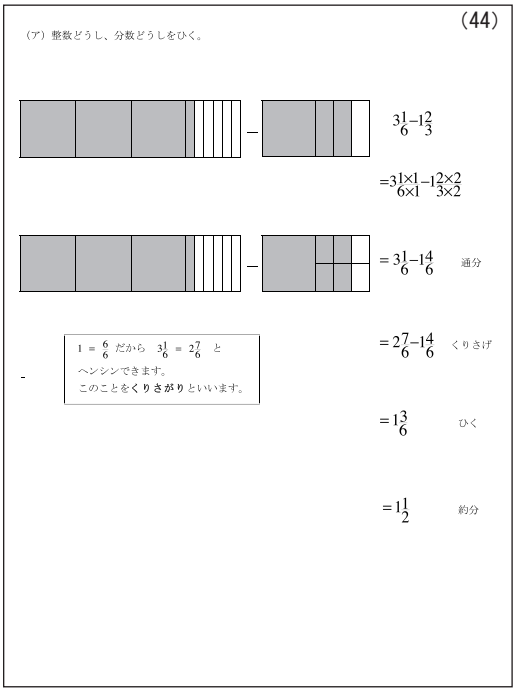
① $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$　　② $\frac{4}{5}-\frac{2}{15}$

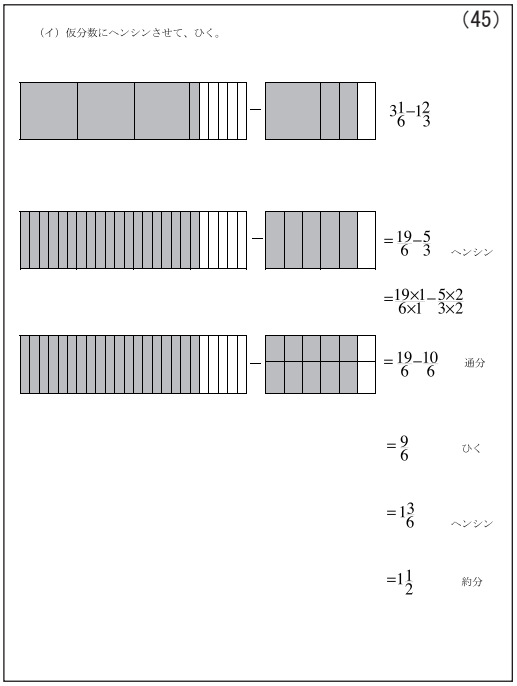
③ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$　　④ $\frac{2}{7}-\frac{2}{7}$

⑤ $1\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$　　⑥ $1\frac{3}{8}-\frac{5}{8}$

同分母真分数のひき算（素過程その1）は省略して、【問題16】の異分母真分数のひき算（素過程その2）からはじめる。【れんしゅう12】の⑤と⑥は繰り下がりの練習で、「素過程その3」とでもいうべき型である。







【問題17】は、異分母帯分数どうしのひき算（典型的複合過程=水源池）で、その中でも分数減法のアルゴリズム（通分、繰り下げ、ひく、約分）がすべて備わった型である。ただし、帯分数を仮分数にしてからひく方法の場合、アルゴリズムは（通分、ヘンシン、ひく、ヘンシ

ン、約分）となり、二つ目のヘンシンを削除して答えを仮分数のままにしてもよい。

(46)

【れんしゅう 14】
ひき算をしなさい。答えが約分できるものはしてみましょう。

① $4\frac{1}{2}-1\frac{5}{6}$ （ア）の方法で　　① $4\frac{1}{2}-1\frac{5}{6}$ （イ）の方法で

(47)

（ア）か（イ）のどちらかの方法で計算しなさい。

② $5\frac{3}{4}-2\frac{5}{6}$　　③ $4\frac{1}{2}-3\frac{1}{10}$

④ $8\frac{1}{3}-4\frac{3}{4}$　　⑤ $7\frac{8}{9}-3\frac{2}{9}$

⑥ $4\frac{1}{6}-3\frac{5}{8}$　　⑦ $2\frac{4}{5}-2\frac{3}{10}$

(48)

【れんしゅう 15】
いままでの計算とどこがちがうか、考えながら計算しなさい。

① $3-1\frac{2}{5}$　　② $8-3\frac{1}{6}$

③ $3-2\frac{7}{9}$　　④ $4-\frac{5}{7}$

⑤ $1-\frac{5}{12}$　　⑥ $7\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}$

(49)

⑦ $2\frac{3}{5}-\frac{3}{5}$　　⑧ $5\frac{1}{4}-3$

⑨ $6\frac{2}{15}-6$　　⑩ $\frac{10}{3}-2$

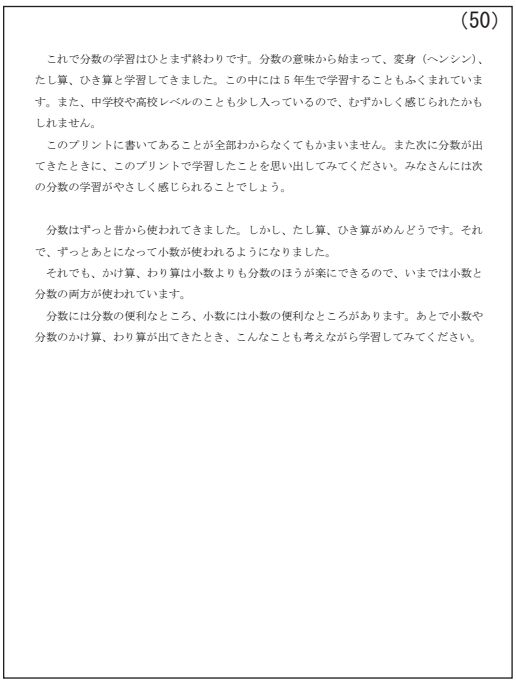
⑪ $9-7$

⑫ 分数のひき算の問題をつくってときなさい。

【れんしゅう14】は、典型的複合過程の計算練習問題、【れんしゅう15】は退化型複合過程の計算練習問題である。

【れんしゅう15】の「整数－分数」は当初、手が付けられない子どもが多かった。整数を分数にするのが思いつかなかったようだ。せめて①はタイル図を見ながら解くように、授業書を工夫するべきであった。

⑪の整数のひき算や、⑫の問題づくりは、たし算のときと同様に楽しくできていた。



(50)

これで分数の学習はひとまず終わりです。分数の意味から始まって、変身（ヘンシン）、たし算、ひき算と学習してきました。この中には５年生で学習することもふくまれています。また、中学校や高校レベルのことも少し入っているので、むずかしく感じられたかもしれません。

このプリントに書いてあることが全部わからなくてもかまいません。また次に分数が出てきたときに、このプリントで学習したことを思い出してみてください。みなさんには次の分数の学習がやさしく感じられることでしょう。

分数はずっと昔から使われてきました。しかし、たし算、ひき算がめんどうです。それで、ずっとあとになって小数が使われるようになりました。

それでも、かけ算、わり算は小数よりも分数のほうが楽にできるので、いまでは小数と分数の両方が使われています。

分数には分数の便利なところ、小数には小数の便利なところがあります。あとで小数や分数のかけ算、わり算が出てきたとき、こんなことも考えながら学習してみてください。



新しい数

分　数

古代エジプトの分数記号

上から順に　$\frac{2}{3}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{7}$

4年　　組

50ページは、難しい学習に取り組んでくれた子どもたちへの、感謝をこめたメッセージである。そして、最後に表紙を配り、授業書を閉じるファイルに貼ってもらうことにした。

2　授業書の評価と課題

授業書「新しい数－分数」（2014年改訂版）を用いての20時間の授業の終了後に、「まとめの問題」として評価テストを実施した。紙幅の都合ですべての項目について触れることはできないが、到達目標である異分母分数の加減算を中心に見ていこう。

加減算は、以下の4つの計算問題を課した。異分母真分数どうしの加減算と、異分母真分数どうしの加減算で、カッコ内は34人中の正答者数である。なお、今回の実験授業では答えが仮分数でも、また、約分していなくても正答としている。

(1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$　(30人)　　(2) $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$　(29人)

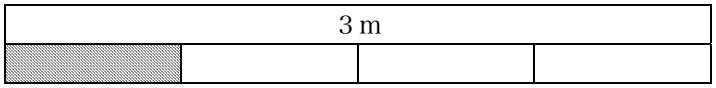
(3) $1\frac{5}{6}+2\frac{2}{3}$　(29人)　　(4) $4\frac{1}{2}-1\frac{7}{10}$　(26人)

(4)は、$2\frac{4}{5}$などが正答であるが、分数部分が$\frac{4}{5}$や$\frac{9}{5}$となって整数部分の処理のみ誤ったものが3人いる。授業書で、ひき算のアルゴリズム、とくに繰り下がりについてもう少していねいに説明すれば、正答率も上がるだろう。

もとの授業書から計算練習問題を大幅に削減したことは、ほとんど影響していないようだ。このことから、授業書「新しい数－分数」（2014年改訂版）を用いれば、公倍数・公約数が未習の4年生でも、異分母分数の加減算は十分に指導しうるといえるだろう。しかも、検定教科書を用いるよりも短時間で効率的にである。

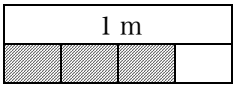
なお、【れんしゅう2】の数値だけ変えた問題で、正答者は(1)が4人、(2)が28人であった。(1)は$\frac{1}{4}$と書き入れたものが25人いた。「商分数」が理解されておらず、割合の考え方が依然として根強く残っていることが明らかになった。

(1)



＿＿＿＿＿m

(2)



＿＿＿＿＿m

この「まとめの問題」による評価テストを実施したのは、【問題 2】と【れんしゅう 2】の授業の 1 か月後であった。子どもたちはもう忘れてしまっていたのだろう。

しかし、「商分数」を定着させる方向での大きな改訂は不要である。授業書「新しい数－分数」において、「商分数」は【問題 1】で分数を定義する際に用いたあと、すぐに【問題 2】で「分割分数」に橋渡しされる。その後は【研究問題】で用いられるだけである。

加減算までの指導においては、基本的に「分割分数」が用いられる。「商分数」は分数乗除の際にあらためて扱いたい。

感想文を途中のきりのいいところで 3 回、授業時間の終わりの数分で書いてもらった。授業書の流れに沿って、いくつか引用する。

【第 1 章のあと】

・はんぱがでるとはおもわなかった。

・$\frac{2}{3}$は 2 つのいいかたがあるのにきづいた。

・7 ページのれんしゅう 3 がむずかしかった。たのしかった。

・むずかしかった問題はしつもん（7 ページ）にこたえる問題。

・とくにおもしろかったのは、12〜13 ページにあった$\frac{0}{0}$m とかのもんだいです。そこにはたくさん頭をつかったのでもっとやりたかったです。

・意見がとても多くてはんろんもとても多かった。

・どの問題も答えは一つではなかった。

【第４章のあと】

・倍分がとっても楽しかった。とくに楽しかったのが 20 ページの$\frac{2}{3}$の問題。

・25 ページの$\frac{60}{80}$の約分がとてもたのしかったです。

・通分と共通分母が楽しかった。

・通分、共通分母が一番こんがらがった。

【第６章のあと】

・「分数のたし算の問題をつくってときなさい」という問題がおもしろかった。

・整数ひく分数がむずかしかった。

子どもたちが、むずかしい問題に頭を使って取り組んで、楽しく学んでいった様子が感想文からも伺われる。

おわりに

私（大田）は北大入学後まもなく、当時の教養部で開催された「筑波大学法案」の学習会に参加して、教育学部の鈴木秀一教授の講演を聞いた。大学の自治の重要性について、教育学部の全構成員自治を例に話されたように記憶している。

教育学部へ移行した 1975 年に、学校教育講座が実験講座化して教育方法学講座となり、鈴木秀一教授、高村泰雄助教授、須田勝彦助手による新しい研究室体制が構築された。当時の教育学部は講座を超えた「研究グループ制」を採用しており、学部内では「教授学研究グループ」と名乗っていた。

研究室内では、名古屋大学の物理学教室のように、学生が教員を「さん」付けで呼んだ。鈴木さんは、教育史の鈴木朝英教授（退官後だったが）と区別して、また親しみを込めて「秀さん」と呼ばれた。

秀さん、高村さん、須田さんの３人が顔をそろえて本ゼミが、そして、教科別に分かれてサブゼミが編成された。私は、院生から助手になったばかりの須田さんの数学サブゼミに所属した。

最初のサブゼミで、須田さんが「さしあたり実数について考えていくことを課題としたい」[14]と提案し、私は分数乗除を卒論のテーマとした。翌週、研究室で徹夜して資料をあさり、乗除までのレポートを目指すも、分数の導入までにとどまる。

大田「3 つで 1m になる長さを$\frac{1}{3}$m といいます」「$\frac{1}{3}$m が２つで$\frac{2}{3}$ m です」

[14] この趣旨からも、授業書「新しい数－分数」は実数指導の一環に位置づけられる。つまり、量の大きさは互除法により（無限）連分数で表わされるが、これが実数に他ならない。この意味で【問題 3】こそが、この授業書の中核なのである。また、量の大きさを単位を系統的に等分して測定することで（無限）小数が得られる。これも実数に他ならない。数学サブゼミで 1977 年に開発された授業書「小数とは何か」の改訂作業も進行中である。

須田「3つで1mになる長さが$\frac{1}{3}$mだったら、$\frac{2}{3}$ mは3つで2mになる長さでないか？」

ここから始まって、夏休み前には授業プランの骨格が完成し、数学教育協議会の全道大会、さらに全国大会で発表することになる[15]。そして、2月から小樽で実験授業が実施されたのである。

授業書「新しい数－分数」は、このようにして新しい研究室の発足とともに誕生したのであった。

付記

授業書「新しい数－分数」は、40年にわたって多くの方々に実践され、検討されてきた。今回の改訂にあたっては、これまでに得た知見をできる限り反映したつもりであるが、今後も実践的な検討をふまえて、適宜改訂していきたい。そのためにも電子ファイル化したのである。

今回の改訂にあたっては、北大教育方法学研究室の数学教育グループと、北海道地区数学教育協議会の札幌算数サークルで何度も検討していただいた。そして岩見沢市立幌向小学校と櫻田和也教諭と子どもたちの協力で、楽しい実験授業が実現した。記して感謝したい。

本稿は、大田と里城が共同作業で電子ファイル化した授業書をもとに、里城による授業記録を用いて、大田がとりまとめたものである。

なお本稿は、2013-15年度科学研究費（課題番号235381016 初等数学の教育内容構成に関する実験的・歴史的研究－分数教授の歴史と構想　研究代表者：新潟大学岡野勉）による研究の一部である。

[15] さらに、雑誌『数学教室』編集部からの依頼を受けて、サブゼミで論文としてまとめたのが、大田邦郎「小学校の分数指導についてのいくつかの問題」（『数学教室』1976年3月号、国土社）である。