HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	過負荷故障に対する複雑ネットワークの安定性に関する理論的研究
Author(s)	水髙, 将吾
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第11877号
Issue Date	2015-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k11877
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/60945
Type	doctoral thesis
File Information	Shogo_Mizutaka.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

平成26年度博士論文

過負荷故障に対する複雑ネットワークの安定性に関する理論的研究

Study on stability of complex networks against overload failures

北海道大学大学院 工学院
応用物理学専攻 数理物理工学研究室

水高 将吾

目 次

第 1 章　序論 **13**

第 2 章　複雑ネットワークの基本的性質 **17**

2.1　複雑ネットワークとは 17

2.2　複雑ネットワークの特徴量 19

2.2.1　隣接行列と隣接リスト 19

2.2.2　次数と次数分布 22

2.2.3　次数相関 23

2.2.4　ネットワーク距離 27

2.2.5　クラスター係数 28

2.2.6　中心性 29

2.3　母関数と統計量 32

2.4　現実ネットワークの構造とその性質 35

2.4.1　ランダムグラフ 35

2.4.2　スモールワールド性 38

2.4.3　スケールフリー性 41

2.4.4　現実ネットワークの次数相関 44

2.5　代表的なネットワーク・モデル 45

2.5.1　スモールワールド性と Watts-Strogatz モデル 45

2.5.2　スケールフリー性と Barabási-Albert モデル 49

2.5.3　一般化 BA モデル 54

2.5.4　適応度モデル：平衡系 55

2.5.5　一般化ランダムグラフ 57

第 3 章　複雑ネットワークにおけるパーコレーション理論 **59**

3.1　複雑ネットワークとパーコレーション 59

3.2 母関数とパーコレーション 60
3.3 ネットワーク上のパーコレーションと頑強性 63
3.3.1 ランダム故障 65
3.3.2 ターゲット攻撃 67
3.3.3 臨界特性 70
3.4 次数相関がある場合 73

第 4 章 カスケード故障 76
4.1 カスケード故障とは 76
4.2 Motter-Lai のモデル 77
4.2.1 ネットワーク上の負荷 77
4.3 カスケード故障に関するその他のモデル 80
4.3.1 大域的効率に基づく過負荷故障カスケード 81
4.3.2 停電を説明するモデル 83
4.4 本研究の目的 87

第 5 章 過負荷故障パーコレーション 89
5.1 極値理論と故障 89
5.1.1 自然現象と極値統計 89
5.1.2 秩序変数と極値統計 90
5.1.3 過負荷による故障 91
5.2 ネットワーク上の流れ 92
5.2.1 ネットワーク上の流れの統計則 92
5.2.2 拡散モデルの解析的取扱い 95
5.3 過負荷故障確率理論 97
5.4 過負荷故障パーコレーション 99
5.4.1 総負荷量の増大効果 99
5.4.2 パーコレーション転移点 100
5.4.3 スケールフリー・ネットワークの頑強性 103
5.4.4 転移点の耐性パラメータ依存性 105
5.4.5 次数相関がある場合 106
5.4.6 総耐性が一定の下での頑強性 108

第 6 章　過負荷故障カスケード　111

6.1　過負荷故障カスケード過程 111

6.2　過負荷故障カスケード過程の定式化 113

6.3　過負荷故障カスケードに対するネットワーク頑強性 117

第 7 章　ネットワーク・サイズと構造安定性　122

7.1　システムの安定性とシステム・サイズ 122

7.2　機能性ネットワークの不安定化 123

7.2.1　故障とネットワーク・サイズ 123

7.2.2　ネットワークサイズと構造安定性 123

第 8 章　結論　126

謝辞　129

参考文献　130

付録 A　極値としての秩序変数の統計分布　A–138

A.1　アンダーソン転移 A–138

A.1.1　単一パラメータスケーリング理論 A–138

A.1.2　臨界指数とユニバーサリティ・クラス A–140

A.1.3　秩序変数としての局所状態密度 A–141

A.2　モデル A–143

A.3　LDOS の典型値の臨界揺らぎ A–146

付録 B　初期次数に依存したノード除去のカスケードによる次数相関変化　B–148

B.1　カスケードに伴う次数相関変化 B–148

B.2　初期に次数相関がない場合 B–151

図 目 次

2.1 各要素の対関係の数の揺らぎによるネットワークの分類．現実ネットワークの多くは大きな対関係数揺らぎを有しており，複雑な構造を有している． . . 17
2.2 (a) 自己ループと (b) 多重エッジの例．本論文ではこのような状況を考えない． 19
2.3 (a) 無向重みなしのネットワークと (b) 重み付きネットワーク，(c) 有向ネットワークのそれぞれの隣接行列と可視化したネットワークの例． 20
2.4 隣接ノード対の次数 k と k' をプロットした概念図．それぞれ (a) 正の次数相関，(b) 負の次数相関，(c) 次数相関なしに対応している． 25
2.5 ネットワークの例 2．このネットワークが電流や情報の流れを伴うネットワークとすると，i ノードの存在が重要な役割をもっているように見える． 31
2.6 次数分布関数 $P(k)$ の母関数 $G_0(x)$ を表すダイアグラム．赤丸ノードが x に対応づけられ，下段はそのようなパターンが現れる確率である． 33
2.7 黒色ノードのある 1 つのエッジを辿ったときに現れる第 2 隣接ノード (青色) 数の分布に対する母関数を説明する図． 34
2.8 表 2.1 のネットワークの平均クラスター係数 C のノード数 N 依存性．白丸が現実ネットワークのクラスター係数であり，黒丸がそれぞれのネットワークに対応するランダムグラフのクラスター係数である．破線は $C \sim N^{-1}$ を表す直線である． 40
2.9 ショートカットのある規則格子の概念図．このようなネットワークでは平均ノード間距離が小さく，クラスター係数は大きいと考えられる． 45
2.10 Watts-Strogatz モデルによるネットワークの作成アルゴリズム．(a) N 個のノードをリング上に配置する．(b) 各ノードとユークリッド距離の意味での z 近接ノードとの間にエッジを張る．図 (b) の場合，$z = 2$ である．(c) 各エッジを確率 p で張り替える．太線エッジが張り替えられたエッジに対応している． 46

2.11 Watts-Strogatz モデルの平均ノード間距離とクラスター係数のエッジ張り替え確率 p 依存性．文献 [38] より引用し，本論文の記法に直したもの． 48
2.12 Barabási-Albert モデルのアルゴリズムによって作成したネットワーク (a) とその次数分布関数 (b)．(a) は初期ノード $m_0 = 2$，新規参入ノードのエッジ数 $m = 2$ の下，アルゴリズムに従って $N = 500$ まで成長させたネットワークを可視化したものである．(b) はいろいろなモデル・パラメータの下，ノード数 $N = 10^6$ まで成長させたネットワークの次数分布関数 $P(k)$ を描いたもので，モデル・パラメータはそれぞれ上から (m_0, m) を $(3,3)$，$(2,2)$，$(2,1)$ とした結果に対応している．パネル (b) 内の点線は傾きが -3 の直線で，モデル・パラメータによらず BA モデルのアルゴリズムに従って作られたネットワークがスケールフリー指数 $\gamma = 3$ であることを示唆している． 50

3.1 母関数 $H_1(x)$ に対応するネットワークの図．黒丸がノード，白四角がエッジの先の連結成分を表している．$R(k)$ はエッジを辿って行き着くノードの残り次数が k である確率を表している． 61
3.2 母関数 $H_0(x)$ に対応する図．任意抽出したノードから出る各エッジに母関数 $H_1(x)$ で表現される構造がつながっている． 62
3.3 ランダムグラフの巨大連結成分の大きさ S(左軸:実線) と平均クラスターサイズ $\langle s \rangle$(右軸:破線) の平均次数 $\langle k \rangle$ 依存性．式 (3.21) の超越方程式を数値的に解くことで，巨大連結成分の大きさを求め，式 (3.22) より平均クラスターサイズを計算している．臨界平均次数 $\langle k \rangle = 1$ において巨大連結成分が現れ，平均クラスターサイズが発散していることがわかる． 64
3.4 インターネット (a) と WWW(b) からノードを取り去ったときの，平均ノード間距離をノードを取り去った割合 (ノード削除率) の関数として描いたもの．それぞれの図の□のシンボルがランダム削除に対する結果，○のシンボルが高次数ノードから順に取り去ったときの結果にそれぞれ対応する．選択的削除では最大次数のノードから順にひとつひとつノードを除去している．図は文献 [59] を基に本論文の記法に整えたものである． 65

3.5 ターゲット攻撃における臨界ノード除去率 p_c のスケールフリー指数 γ 依存性．破線が連続体近似を用いて得られた超越方程式 [式 (3.39)] から得られた結果であり，実線は近似を用いない場合の結果．近似を用いない場合の計算の詳細は文献 [65] を参照されたい．図は同文献より引用し，記法を本論文のものに改めたもの． 70
3.6 式 (3.54) に対応する図．茶ノードが次数 k のノードであり，その先に次数 k' の黄色ノードがある．右辺和内第 1 項目は，黄色ノードの先の構造を限定していないパターンを表している．したがって，黄色ノードから外向きに向かうそれぞれのエッジの先 (ピンク色領域) には巨大連結成分 (GC) があるかもしれないし有限クラスター (NGC) しかないかもしれない．第 2 項目は，黄色ノードの先には NGC しかない場合を表しているので，その差は茶ノードの先に GC が存在する場合を表している． 74

4.1 (a) レギュラー・ランダムグラフと (b) スケールフリー・ネットワーク上で ML モデルに従い過負荷故障カスケードを起こさせたときの，終状態におけるネットワークの最大連結成分の相対サイズ S を耐性パラメータ α の関数として表したもの．シンボルは，初期時刻においてランダムに選ばれたノード (□)，最大次数ノード (∗)，最大負荷ノード (◯) を削除した場合に対応する．レギュラー・ランダムグラフは，ノード数 $N = 5000$ で各ノードの次数が $k = 3$ である．また，スケールフリー・ネットワークは BA モデルに従って作ったものでノード数が $N = 5000$ で次数は平均次数 $\langle k \rangle \approx 3.1$ である．図は文献 [74] より引用し，記法を改めたものである． 78
4.2 (a) ノードの次数と媒介中心性の大きさの関係と (b) スケールフリー・ネットワークにおける媒介中心性分布．(a) はスケールフリー・ネットワークの媒介中心性が次数に対して $b \sim k^{\eta}$ によってスケールされている様子を表している．また，(b) に示されているデータは $\gamma = 2.2$ (◯)，2.5 (□)，3.0 (⋄)，4.0 (×)，∞(△) である．これらの図は文献 [52, 75] からの引用．詳細な計算条件は文献 [52, 75] 参照． 79
4.3 最大連結成分サイズの耐性パラメータと初期除去ノード数依存性．ネットワークは BA モデルによって作成されたもので，ノード数は $N = 2000$ である．各パラメータに対して 30 サンプル平均をとっている．図は文献 [76] より引用． 81

4.4 スケールフリー・ネットワーク上からランダムに 1 つのノードを除去したときの大域的効率の時間依存性．ネットワークは，ノード数 $N = 2000$，平均次数 $\langle k \rangle = 10$ の BA モデルによって作成されている．異なる線は耐性パラメータ α の値を変化させた場合の結果を表しており，α の値は図に表記したとおりである．図は文献 [77] から引用しているが，本論文に合わせて記法を変更している． 82

4.5 (a) ランダムグラフと (b) スケールフリー・ネットワークから，ノードをランダムに取り除いた場合 (□) と最も負荷の大きいノードを取り除いた場合 (•) の定常に達した後の大域的効率 $E(\boldsymbol{G})$ の耐性パラメータ α 依存性．ランダムグラフ，スケールフリー・ネットワークともにノード数 $N = 2000$，平均次数 $\langle k \rangle = 10$ である．図は文献 [77] から引用し，記法を本論文のものへと変更している． 84

4.6 (a) 平均カスケード規模 $\langle S \rangle$ のパラメータ λ_0 依存性と (b) カスケード規模 S の頻度分布．(a) は，様々な次数 k，ΔZ と N_f に対して平均カスケード規模を数値的に計算しており，横軸 λ の指数 α を $\alpha = 0.2$ としている．(b) の計算において，$\Delta Z = 3$ と $N_f = 10$ に固定している．どちらの図も文献 [85] より引用し，記法を改めたもの． 86

4.7 カスケード規模 S の平均負荷 L 依存性．$L \approx 0.8$ で過負荷故障カスケードが拡がり始めることがわかる．図は文献 [87] より引用し，本論文の記法に改めたもの． 87

5.1 (a) 風力の時系列データと (b) 風力の分布関数の振る舞いの概念図．それぞれの図の緑破線は平均値で，青破線が橋の耐性を表している． 92

5.2 インターネット (a) と河川 (b) のある 3 地点における流れの時間依存性．それぞれのデータの破線は平均を表してる．文献 [107] の図をもとに記法を書き換えたもの． 93

5.3 種々のネットワークにおけるノード上の平均流とその標準偏差の関係．上段がインターネットとマイクロチップ内の平均流と揺らぎの関係で点線は傾き $\alpha = 1/2$ の直線である．下段が WWW，河川，高速道路における平均流と揺らぎの関係で，点線は傾き $\alpha = 1$ の直線である．文献 [107] の Fig.2，Fig.3 からの引用． 94

5.4 モデル 1 とモデル 2 による流量の平均 $\langle f \rangle$ とその標準偏差 σ の関係．それぞれの図のプロットは総流量 $W = [\langle W \rangle - \delta W, \langle W \rangle - \delta W]$ に対する結果である．ここで総流量 W は平均流 $\langle W \rangle$ の周りで幅で δW で一様に揺らいでおり，下から順に $\delta W = 0,\ 20,\ 40,\ 80,\ 100,\ 200,\ 800,\ 1000,\ 4000,\ 10000$ に対する結果である．平均はすべてに共通して $\langle W \rangle = 10^4$ である．赤破線はそれぞれの図ともに下が傾き 1/2，上が 1 である．文献 [107] からの引用． 95

5.5 過負荷故障確率の次数依存性の理論値と数値シミュレーションの比較．実線が理論値で，シンボルがシミュレーション結果を表している．ノード数 $N = 5000$，エッジ数 19815 で $\gamma = 2.2$ のスケールフリー・ネットワークで 100 通りの異なるウォーカー配置によって数値シミュレーションを行っている．ウォーカー数と耐性パラメータは，それぞれ $W_0 = 2M$ と $m = 4$ である．図は文献 [114] からの引用であり，本論文の記法に改めたものである． 98

5.6 日本の (a) トラフィック総量の推移と (b) 電力使用量の経年変化．年々増大していることがわかる．(a) と (b) のデータはそれぞれ総務省 [116] と電気事業連合 [117] より引用した． 99

5.7 様々な総負荷量 W に対する過負荷故障確率 $F_W(k)$ の振る舞い．一番下の細い実線が $W = W_0$ に対する $F_W(k)$ の振る舞いであり，Kishore らの結果に等しい．太い黒実線が上から順に，それぞれ $W = 2W_0$，$W = 1.5W_0$，$W = 1.3W_0$，$W = 1.1W_0$ と $W = 1.05W_0$ に対する $F_W(k)$ の振る舞いである．ただし，耐性パラメータは，$m = 4$ で固定されている．太い灰色実線は，$W = 1.628W_0$，$m = 6$ に対する $F_W(k)$ の振る舞いを表している．全ての計算において，初期総負荷量を $W_0 = 2M$ とし，$M = 200000$ としている．過負荷故障確率のジグザグとした振る舞いは，式 (5.26) の $[q_k(W_0)]$ のためである． 100

5.8 $\gamma = 3.0$，$d = 4.0$ とした式 (5.30) によって与えられる次数分布関数．この次数分布関数に対する平均次数は $\langle k \rangle = 4.44$ である．インセットは平均次数 $\langle k \rangle$ のパラメータ d 依存性で，上からスケールフリー指数それぞれ $\gamma = 2.5$，$\gamma = 3.0$ と $\gamma = 4.0$ に対する結果を表している． 102

5.9 解析計算と数値シミュレーションの比較．シンボルは，シミュレーションによって得られた最大連結成分の相対サイズ S を，(a) 初期総負荷量でリスケールされた負荷 W/W_0 の関数，および (b) その負荷のもとで取り去られたノード割合 f の関数としてそれぞれプロットした結果を表している．次数分布関数 $P(k)$ は式 (5.30) において $\gamma = 2.5$，$d = 5.8272$ ($\langle k \rangle = 10.0$) としたものを採用した．数値計算は，この次数分布関数に従うノード数 $N = 10\ 000$ の一般化ランダムグラフに対して行われ，数値計算は 50 サンプル平均をとっている．数値シミュレーション・解析計算ともに，耐性パラメータと初期総負荷量は $m = 2$，$W_0 = 2M$ としている．それぞれの図における垂直の破線は解析計算から求めた臨界値であり，$W_c/W_0 = 1.912$ と $f_c = 0.547$ である． . . . 103

5.10 リスケールされた臨界総負荷量 W_c/W_0 のスケールフリー指数 γ 依存性．$m = 2$ 及び $W_0 = 2M$ としている．また，γ によらず平均次数が $\langle k \rangle = 10.0$ となるよう式 (5.30) の次数分布関数のパラメータ d を調節している．インセットの実線，破線および点線は，それぞれ過負荷故障，ランダム故障およびターゲット攻撃によるパーコレーションの臨界ノード除去率 f_c の γ 依存性を表している． 104

5.11 リスケールされた臨界総負荷量 W_c/W_0(a) と臨界ノード除去率 f_c(b) の耐性パラメータ依存性．破線と点線はそれぞれ $\gamma = 4.5$ と $\gamma = 2.5$ とした次数分布関数 (5.30) に従うスケールフリー・ネットワーク (SF) に対する結果を表しており，実線は Erdös-Rényi ランダムグラフ (RG) に対する結果を表している．平均次数と初期総負荷量は，それぞれ $\langle k \rangle = 10.0$，$W_0 = 2M$ としている． 106

5.12 臨界ノード除去率 f_c を次数相関を表す Pearson 相関係数 r の関数として描いた結果．計算条件の詳細は本文中に記載したとおりである．3 つの実線は上からそれぞれ $m = 2, 4$ と 6 に対する結果である． 108

5.13 総耐性 Q を一定とするような耐性パラメータ m とスケールフリー指数 γ の関係．ノード数 $N = 100\ 000$ とし，平均次数を $\langle k \rangle = 10.0$ に固定した場合の結果を示している．また，初期総負荷量を $W_0 = \langle k \rangle N$ としている．3 つの実線は総耐性 Q の値が異なる結果を表しており，上から $Q = 5.0,\ 10.0,\ 15.0$ としている． 109

5.14 総耐性Qを一定とするように耐性パラメータの値を調整した場合のリスケールされた臨界総負荷量W_c/W_0のγ依存性．(a)は$\langle k\rangle = 5.0$のネットワークに対する結果．3本の実線は総耐性Qの値が異なる場合の結果を表しており，上から$Q = 1.65\times10^6,\ 1.36\times10^6, 1.06\times10^6$に対応している．点線は$m$が一定の条件下での結果を表しており，上から$m = 8,\ 6,\ 4$に対応している．(b)は$\langle k\rangle = 10.0$のネットワークに対する結果．線の意味は(a)の図と同じであるが，実線において固定する総耐性の値は上から$Q = 2.34\times10^6,\ 2.02\times10^6, 1.66\times10^6$である．両図ともに，$N = 100000$，$W_0 = \langle k\rangle N$としている． 110

6.1 過負荷故障カスケードの巨大連結成分の相対サイズS_τの時間τ依存性を数値計算結果（シンボル）と解析計算結果（実線）で比較した図．数値計算・解析計算ともにノード数$N = 10000$，平均次数$\langle k\rangle = 5$のErdös-Rényiランダムグラフを採用している。青シンボル及び青実線は耐性パラメータ$m = 2.0$に対する結果であり，赤シンボル及び赤実線は$m = 4.0$に対応している．□は負荷制御パラメータrが$r = 0.8$，△が$r = 1.5$にそれぞれ対応している．実線は実線上のシンボルのパラメータの下、解析計算した結果である．初期総負荷量は$W_0 = 2M$である． 117

6.2 過負荷故障カスケードが終了した後の巨大連結成分の相対サイズS_∞の負荷制御パラメータr依存性．赤実線がErdös-Rényiランダムグラフに対する結果で，黒破線が最低次数から次数分布関数が$P(k) \sim k^{-\gamma}$に従い、スケールフリー指数が$\gamma = 2.5$であるスケールフリー・ネットワークに対する結果である．スケールフリー・ネットワークはノード数を$N = 10^5$、最低次数を$k_{\min} = 2$としており，このとき最大次数は$k_{\max} = 153$で平均次数は$\langle k\rangle \approx 4.25$である．Erdös-Rényiランダムグラフのノード数と平均次数はスケールフリー・ネットワークのそれと同じである．初期総負荷量と耐性はそれぞれ$W_0 = 2M$，$m = 2$である．インセットはメイン・パネルの条件を$N = 10^4$と変更して，過負荷故障カスケード終了後の巨大連結成分の相対サイズS_∞のr依存性を数値計算と解析計算で比較した図である． 118

6.3 過負荷故障カスケードによるパーコレーション転移点 r_c 近傍のネットワークの振舞い．(a) r_c 近傍におけるクラスターサイズ s の分布 $P(s)$．ノード数 $N = 10^4$，平均次数 $\langle k \rangle = 4.0$ のランダム・グラフに対する数値計算結果である．計算条件は $r = 0.85$，$m = 2.0$ で，5000 サンプルで平均をとっている．(b) カスケード終了後のネットワークに対して有限サイズ・スケーリングを行った結果．すべてのデータは近似的な解析計算から得られた結果であり，母体ネットワークのノード数はそれぞれ $N = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}, 10^{19}$ と 10^{20} で，平均次数は $\langle k \rangle = 4.0$ ある．耐性パラメータは $m = 2.0$ である．フィッティング・パラメータはそれぞれ $r_c = 1.84, \beta_r = 1.275, \nu_r^* = 19.45$ にとっている． 119

6.4 熱力学極限における臨界負荷制御パラメータ $r_c(\infty)$ のスケールフリー指数 γ 依存性．すべての γ の臨界値は，次数分布関数が式 (5.30) に従うスケールフリー・ネットワークに対する有限サイズ・スケーリングから見積もられている．このとき最小次数は $k_{\min} = 2$ であり，平均次数は $\langle k \rangle = 4.0$ となるように式 (5.30) 内の d を決定している．耐性パラメータ m は $m = 2.0$ である．γ 軸に平行な破線は，式 (5.30) の $\gamma \to \infty$ の極限における次数分布関数に対する臨界値を表している． 121

7.1 過負荷故障カスケードが止まった後の最大連結成分に含まれるノード数の初期ネットワーク・サイズ依存性．母体となるネットワークは平均次数 $\langle k \rangle = 10$ のランダムグラフで，耐性パラメータ $m = 4$，初期総負荷量が $W_0 = 2M$ である．それぞれの実線は近似的な解析計算から得られた結果で，上からそれぞれ $r = 2.8, 1.45, 1.4, 1.35, 1.3, 1.2$ と 1.14 である． 125

A.1 不規則電子系内の波動関数．(a) は非局在相，(b) は局在相である． A–142

A.2 $\rho_{\rm typ}$の定性的な振舞い．秩序変数の振舞いと似ている．. A–143

A.3 リスケールされた局所状態密度の典型値 $[x = (\rho_{\rm typ} - \langle \rho_{\rm typ} \rangle)/\sigma_{\rho_{\rm typ}}]$ の臨界点における揺らぎ (赤点)．と $a = \pi/2$ の一般化された Gumbel 分布 (実線)． .A–146

B.1 $S - S$ のエッジ集合から抽出されるエッジの描像．抽出されたエッジの左端には抽出したエッジのほかに $k - 1$ 個の S ノード（緑領域）がある．また，エッジ右端には $k' - 1$ 個の S ノードが存在する．点線エッジはその向こう側にマーク R のノードが存在することを意味している． B–149

表 目 次

2.1 現実ネットワークのノード数 N，平均次数 $\langle k \rangle$，平均ノード間距離 $\langle l \rangle$，およびクラスター係数 C．$\langle l_{\rm RG} \rangle$ および $C_{\rm RG}$ はそれぞれのネットワークと同じノード数および平均次数をもつランダムグラフの平均ノード間距離とクラスター係数に対応している．平均ノード間距離 $\langle l_{\rm RG} \rangle$ とクラスター係数 $C_{\rm RG}$ は，それぞれ式 (2.52) と式 (2.50) から見積もっている． 39
2.2 現実ネットワークの平均次数と隣接平均次数．文献 [11] より引用． 42
2.3 スケールフリー性を示す現実ネットワークのノード数 N，平均次数 $\langle k \rangle$，およびスケールフリー指数 $\gamma_{\rm in,out}$．入り次数の指数の値 $\gamma_{\rm in}$ と出次数の指数の値 $\gamma_{\rm out}$ が一致しているものは無向ネットワークである． 43
2.4 現実ネットワークの相関係数．文献 [32] より引用． 44

3.1 スケールフリー・ネットワークに対するランダム故障によるパーコレーション転移の臨界指数． 73

第1章　序論

我々の身の周りの世界は複雑系とみなせる系で溢れている．複雑系とは，微視的要素の相互作用によって，要素の単なる集合では見られない振る舞いを創発するシステムである．気象現象や生命活動，細胞内化学反応，神経伝達、さらには経済活動や人間同士の社会的つながり，社会インフラなど，複雑系の例は枚挙に暇がない．従来の自然科学では、要素間にユークリッド距離が定義できるような複雑系が主に扱われてきたが，要素間のつながり方のトポロジカルな性質によって、これら複雑系が示す特徴を理解しようとする研究が近年盛んに行われている．複雑ネットワークと呼ばれるこれらの系は，系を構成する離散的要素と，それらの間の関係さえ定義されれば，どのような系であれネットワークとみなせるため，極めて広い分野に渡る複雑系をネットワークとして記述することが可能となる．そのため，遍在する複雑ネットワークの普遍的性質や，ネットワーク上のダイナミクスを理解しようと精力的な研究がおこなわれている．ネットワークとみなせる現実の系の多くは，共通した構造的性質をもっていることがこれまでの研究から明らかになっている．これらの性質の多くは，システムがユークリッド空間から切り離されることによって発現している．重要な性質のひとつに，各要素 (ノード) が対関係 (エッジ) を形成している要素数 (次数) の分布 $P(k)$ が，$P(k) \sim k^{-\gamma}$ のようにべき型の分布関数に従うという性質がある．この性質はスケールフリー性と呼ばれ，各ノードがもつエッジ本数に不均一性があることを意味している．

ネットワークがスケールフリー性を有するか否か，あるいはスケールフリー指数 γ が大きいか小さいかによって，ネットワークがもつ基本的な特徴やネットワーク上で起こるダイナミクスの振る舞いが大きく異なってくる．特に，ネットワークの頑強性は，スケールフリー性の強弱によって質的に変化する。ネットワークの頑強性とは，故障や攻撃 (ノードの除去) に対して，ネットワークがその機能を維持し続けていられる程度，すなわちネットワークの耐性のことである．同一のあるノード除去過程の下で，あるネットワーク G_1 よりもネットワーク G_2 がより小さい割合のノード除去によって機能を失うならば，ネットワーク G_2 が G_1 より脆弱であるといえる．ネットワークの機能は，ネットワーク構造の大域的な連結性によって担保されているので，ネットワークの大域的連結性が失われてしまうようなノード除

去割合によってネットワークの頑強性の評価ができる．したがって頑強性の問題は，母体となるネットワークからノードを除去することよって引き起こされるパーコレーション転移の問題とみなすことができる．これまでに，ランダム故障とターゲット攻撃という 2 つのノード除去過程に対するパーコレーション問題が主に研究されており，スケールフリー・ネットワークの頑強性が理論的に評価されている．ランダム故障は，各ノードを等確率で除去する過程で，ネットワーク内の構成要素の自然故障などに対応している．スケールフリー指数 γ が $2 < \gamma \leq 3$ であるネットワークはすべてのノードを取り去らない限り，ネットワークの大域的連結性が失われないことがわかっており，このことはランダム故障に対してスケールフリー性を有するネットワークが極めて頑強であることを意味している．一方，戦争やテロによる主要発電所などへの攻撃に対応する，最大次数ノードから順にノードを取り去る過程であるターゲット攻撃に対しては，スケールフリー・ネットワークは脆弱であることがわかっている．ランダム故障とターゲット攻撃によるネットワーク上のパーコレーション転移の研究は，ネットワークの頑強性の理解のみでなく，複雑ネットワークを統計力学的観点から理解する意味においても非常に重要な意味をもっている．

しかしながら，ランダム故障やターゲット攻撃のような静的なパーコレーション過程は，必ずしも現実的なノード除去過程とは言えない．現実のネットワークでは，ネットワークの一部が機能停止した際，その機能停止が更なるノード故障を誘発し，機能停止が連鎖するカスケード故障によって，ネットワーク障害が大規模化することがあるからである．ひとつの会社の倒産が引き金となって連鎖倒産が起きることは，企業間取引ネットワークにおけるカスケード故障の例である。また，インターネットや電力網などのように，何らかの物理量がネットワーク上を流れることによって機能を実現しているシステムにおいて，ネットワークの一部が故障すると，流れの迂回に起因した過負荷が更なる故障の原因となることがある．この過負荷故障のカスケードに対するネットワーク頑強性の問題は，我々の生活に大きな影響を与えているため，これまでに盛んに研究がなされている．ネットワーク上のすべてのノード対間に一定量の流れが存在するとした極めて単純化されたモデルによってスケールフリー性を有するネットワークの脆弱性が明らかにされたのを契機に，様々なモデルに基づいて，過負荷故障カスケードに対するスケールフリー・ネットワークの脆弱性が研究されてきた．そのような過負荷故障カスケードの研究のほぼ全てにおいて，各ノードにかかる “平均的な負荷” がノードの耐性を超えた際に過負荷故障が起きるという仮定がなされてきた．しかしながら，現実ネットワークにおける負荷は常に時間とともに揺らいでおり，過負荷故障は揺らいでいる負荷のなかの最大値によって引き起こされる，いわゆる極端事象 (Extreme

Events) である．揺らぎの効果を取り入れた過負荷故障を議論することは，過負荷故障の本質を解明し，過負荷故障に対するネットワークの頑強性を正しく理解する上で非常に重要である．

本論文の目的は，負荷揺らぎの効果を取り入れた過負荷故障に対するネットワークの頑強性を明らかにすることである．本研究では，時間的に揺らぐネットワーク上の負荷をランダム・ウォーカーでモデル化するという Kishore らが提案した考え方を採用する．このような負荷搖動モデルに基づいた理論計算の結果、過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性が平均負荷に基づく従来の結果と質的に異なる振舞いを示すことが明らかとなった。一方、ネットワークのサイズ (ノード数)N が大きくなると負荷揺らぎも大きくなると考えられるので、過負荷故障を起こす確率は N とともに増大するであろう。その偶発故障に誘発されたカスケード故障がネットワークの大域的連結性を消失させるのであれば、ネットワークはある一定の大きさ以上に成長できないことになる。すなわち、安定でいられるネットワークのサイズには上限があることになる。従来のネットワーク理論においては、ネットワーク・サイズ N は単なるパラメータとして扱われてきたが、生態系ネットワークが安定に存在しうる種の数に上限があるように、現実のネットワークにはネットワークの種類に応じたノード数の上限がある。本研究では、過負荷故障カスケード問題に関する研究結果を基礎に、ネットワークの構造安定性とネットワーク・サイズの関係についての世界初の解析を試みる。

本論文ではまず，過負荷故障によるパーコレーション問題が論じられる．電力網における総電力量や、インターネットの総トラフィック量など、現実のネットワークにかかる負荷は年々増加傾向にある。このような総負荷量の増加の効果を取り入れた際の過負荷故障のパーコレーション問題を調べた。その結果、過負荷故障パーコレーションに対してスケールフリー・ネットワークは脆弱であることが明らかになった。次いで、過負荷故障カスケードに対するスケールフリー・ネットワークの頑強性について論じられる。平均負荷に基づいて過負荷故障カスケードを議論していた従来研究に対し、本研究では負荷揺らぎ効果を考慮した過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性を調べた。過負荷故障カスケード・プロセスが過負荷故障パーコレーション過程の連鎖であることに着目し、カスケード・プロセスをモデル化した。このモデルを解析的に扱うことで、ネットワークのスケールフリー性が強くなると過負荷故障カスケードに対する頑強性が増大することを明らかにした。本研究で得られた結果は、従来の平均負荷に基づく過負荷故障カスケード理論とは正反対の結果である。最後に，ネットワーク・サイズが何によって決まっているのかというネットワーク研究

の基本的命題を世界で初めて議論した。従来のネットワーク研究におけるネットワーク・サイズは、単なるモデル・パラメータの一つであり、自由な値を取ることができる。しかしながら、現実のネットワークのノード数は、それぞれのネットワークが固有の大きさの周りで揺らいでおり、決して自由な値を取れるわけではない。本研究では、ネットワーク・サイズと構造の安定性の関係を第 6 章で扱った過負荷故障カスケード・モデルを基礎に議論した。その結果、ネットワーク・サイズの増大がネットワークを不安定化させる場合とネットワークが無限に成長できる場合があることを明らかにした。.

本論文の構成は以下の通りである．第 2 章では，複雑ネットワークを特徴づける様々な量が紹介され，スケールフリー性など現実ネットワークが有する構造的性質と，それらの発現メカニズムに関する説明が行われる。第 3 章では，ネットワークの頑強性に関する従来研究、すなわちネットワーク上のパーコレーション問題に対する過去の研究が総括される。第 4 章では、過負荷故障カスケードに関するこれまでの知見がまとめられ，章末で本論文の目的が述べられる．第 5 章では，極端事象としての過負荷故障が定義づけられ，過負荷故障パーコレーション問題が論じられる．第 6 章では、過負荷故障のカスケード過程をモデル化した上で、このプロセスによるパーコレーション問題に対する解析的取扱い方法、およびその結果について述べられる．第 7 章では，第 5 章と第 6 章で得られた知見を基に，ネットワークの大きさとネットワークの構造の安定性の関係が議論される．第 8 章は本論文の結論である．

第2章　複雑ネットワークの基本的性質

2.1　複雑ネットワークとは

本論文で扱う“ネットワーク”とは「離散要素によって構成され，要素間の対関係が定義されている系」の総称であり，数学のグラフ理論におけるグラフとほぼ同義語である．したがって，例えばインターネットは，コンピュータ間が物理回線あるいは無線通信によって対関係を成すことで構成されているネットワークといえる．ネットワークの他の例として，電力網，航空路線網，道路網など，要素にもその間の対関係にも物理的実体が存在するものや，細胞内のたんぱく質相互作用ネットワーク (要素はたんぱく質の種類) や生態系の捕食被捕食関係 (要素は生物種) のように，要素にも対関係にも物理的実体が伴わないもの，さらには友人関係のように要素には実体があるが，対関係には実体がないものまで数多く挙げることができる．このように非常に広い範囲に渡る系がネットワークとみなせることから，物理学や生物学などの自然科学に加え，工学や社会科学など広範な分野においてネットワーク研究がなされている．

一般に，ネットワークにおける要素間にはユークリッド距離が定義されている必要はない．そのため，ある要素がどの程度の数の要素と対関係をなすかに制約がない．このことが

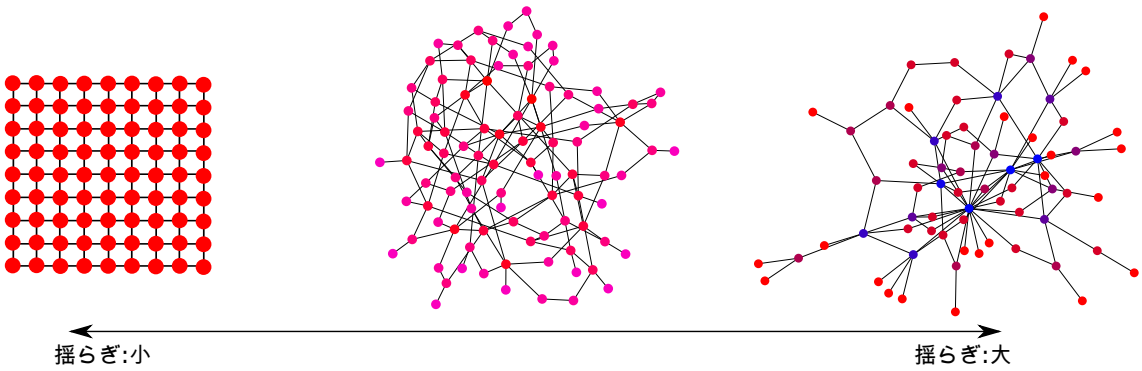


図 2.1: 各要素の対関係の数の揺らぎによるネットワークの分類．現実ネットワークの多くは大きな対関係数揺らぎを有しており，複雑な構造を有している．

固体や液体などの従来の物理系にはみられない不均一性を生み出しており，様々な特徴を発現させる．中でも最も顕著な特徴は，各要素が関与する対関係の数に大きな揺らぎが許されることである．複雑ネットワークの “複雑” には明確な定義があるわけではないが，多くの場合，この要素対数の揺らぎが非常に大きいものを複雑ネットワークと呼んでいる．ネットワークは多くの場合，要素を点で表現し対関係をなす要素同士を線でつないだ図 2.1 のように可視化される．図 2.1 の左は 2 次元格子をネットワークとみなしたものであり，対関係数に揺らぎがないネットワークである．図中央のネットワークはそれぞれの要素間にランダムに対関係が形成されているネットワークであり，各要素の対関係数に小さな揺らぎがある．これら二つのネットワークは対関係数の揺らぎの観点からみたとき複雑ネットワークとはいえない．図の右に配置されているネットワークは他の要素に比べて非常に大きな対関係数を有する要素が存在している．このような対関係数揺らぎの大きなネットワークを本論文では複雑ネットワークと呼ぶ.

ネットワークを統計物理学的に研究する際に重要なことは，それぞれの離散要素や対関係が表す対象の詳細にこだわらず，要素間のつながり方にのみに着目することで，系がもつ構造的特徴や普遍的な性質を顕わにすることである．離散要素や対関係の詳細を省いた抽象化を初めて行ったのは，Euler であったとされている．Euler はケーニヒスベルクの街を流れている川に架かる 7 つの橋を，一筆書きで渡れるか否かを議論する際に，川で分断された陸地を要素，橋を対関係とみなす抽象化を行った．これがグラフの概念の始まりである．数学の一分野であるグラフ理論における一般化されたグラフの定義は以下のとおりである.

「グラフとは離散集合 V と V の要素対の集合 E の組 $G(V, E)$ である.」

先に述べたネットワークの定義と相違ないことがわかる．本論文では，この離散集合 V の元をノード，また集合 E の元をエッジと呼ぶ.

上のグラフの定義では，ノード対集合 E に対して何ら制約がないため，次のような状況が起きうる.

- あるノードから出るエッジのもう一端が，このノードに接続する (自己ループ).
- あるノード対間に張られるエッジが 2 本以上となる (多重エッジ).

図示すると図 2.2 のような状況である．しかしながら，本論文で扱うネットワークは，自己ループや多重エッジを一切考えない，いわゆる単純グラフのみに限定する.



図 2.2: (a) 自己ループと (b) 多重エッジの例．本論文ではこのような状況を考えない．

2.2 複雑ネットワークの特徴量

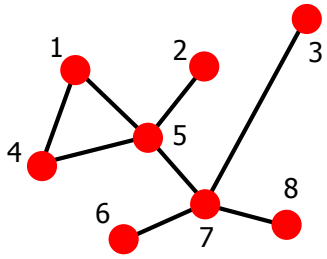
2.2.1 隣接行列と隣接リスト

隣接行列

現実の複雑ネットワークが有する構造的特徴や性質を説明するために，まずネットワークの基本的特徴量について説明する．先に述べたように，ネットワークは離散要素とそれらの対関係によって形成される系であるため，離散要素数 (ノード数) と対関係数 (エッジ数) が最も基本的特徴量となる．何らかのネットワークを考える際，以下では特に断らない限り，総ノード数とエッジ総本数はそれぞれ N と M で表記される．総ノード数 N は，ネットワークのシステム・サイズに対応する．ノードにラベル付けされたネットワークを表現する際，隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が用いられることが多い．隣接行列は，その要素をノード ij 間にエッジが存在するときに $A_{ij} = 1$，他の場合には $A_{ij} = 0$ とすることでノード間の繋がりを表現するものである．隣接行列の定義からわかるように，隣接行列は対称行列である．また，エッジが存在するノード間の要素を 1 以外にすることで，エッジに重みの付いた重みつきネットワーク W に簡単に拡張できる．ここでエッジの重みは，例えば航空路線網における 2 つの空港間の一日の発着便数とみなすことができる．あるいは，生態系ネットワークにおける捕食被捕食関係などには有意に向きが存在する．このような場合は，隣接行列を非対称行列とすることで，エッジに向きがある有向ネットワークに拡張することもできる．それぞれの種類のネットワークの簡単な例と対応する隣接行列を図 2.3 に示す．ネットワーク構造を計算機を用いて調べる際，隣接行列はノードを起点としたネットワークの解析に有用である．例えば，あるノード対 ij 間にエッジが存在するか否かを調べたり，ノード i と隣接するノードを調べることに向いている．一方で，エッジの本数に依らず $N \times N$ のメモリを消費するため，大規模で疎なネットワークの数値解析には向かない．多くの現実ネットワークは総ノード数に比例する程度の大きさの総エッジ数しかもたない．つまり，大規模なネットワークであればあるほど隣接行列の非零成分の割合は大きくなり，無駄なメモリ消費が顕著になる．そこで，

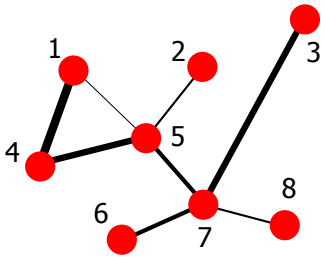
(a) 無向ネットワーク

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(b) 重みつきネットワーク

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 5 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



(c) 有向ネットワーク

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

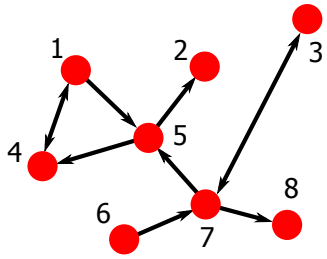


図 2.3: (a) 無向重みなしのネットワークと (b) 重み付きネットワーク，(c) 有向ネットワークのそれぞれの隣接行列と可視化したネットワークの例.

大規模で複雑なネットワークの数値解析には次に述べるような隣接リストが用いられることがある.

隣接リスト

隣接行列の要素において，興味ある要素はエッジが張られている要素であるため，隣接行列の非零要素のみで構成された隣接リストを考えることがメモリの節約につながる．図 2.3(a) のネットワークを表す隣接リストは，

ノード番号	隣接ノード番号
1	4, 5
2	5
3	7
4	1, 5
5	1, 2, 4, 7
6	7
7	3, 5, 6, 8
8	7

となる．この表から隣接リストの意味は明らかであろう．実際に隣接リストをコーディングする際には，次のような 2 つの 1 次元配列 n_1，n_2 で表現するのが便利である．

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \{4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 1,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 7,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 7\} \\
n_2 &= \{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 11,\ 15,\ 16\}
\end{aligned}
$$

ここで n_1 は，それぞれのノードに隣接するノード番号を順次格納した大きさ $2M$ の配列であり，n_2 は，先頭を 0 として，各ノードがもつエッジ本数を積算して作られる大きさ $N+1$ の配列である．隣接行列を用いた際のメモリの消費が N^2 であったのに比べて，このような縮約表現を使うと，メモリ消費量は M に比例した大きさで抑えることができるため，$M \sim O(N)$ の疎なネットワークの場合大幅にメモリ消費量が節約できる．ただし，隣接行列を使った場合は，1 回の演算であるノード対間にエッジが張られているか否かを調べられるのに対し，隣接リストの難点は，この演算に平均 $O(M/N)$ 回の演算を要することである．その他にも，エッジの追加や削除といった操作に $O(M/N)$ の演算回数がかかってしまう．何にも増して隣接行列の方が優れている点は，隣接リストよりもコーディングが簡単である．ただし，常に隣接リストの方が煩雑で多くの演算回数を必要とするわけではない．例えば，隣接リストは，あるノードに隣接するすべてのノードを見つける際，隣接リストを用いた場合は平均 $O(M/N)$ 回の演算で済むが，隣接行列を用いた場合には $O(N)$ 回の演算を要することになる．実際，ネットワーク内の連結成分を抜き出す操作では，隣接リストを用いた方が高速に処理できる．

そのほかにも，エッジリストという手法が用いられる場合がある．エッジリストはエッジ両端のノード番号が格納された $M \times 2$ の 2 次元配列であり，図 2.3(a) のネットワークはエッジリストを用いて，

$$
e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{2.1}
$$

と表現される．隣接リストと同様，エッジリストも消費メモリは M に比例する程度であるため，隣接行列を用いる場合に比べて大規模なネットワークの数値的取扱いが可能である．エッジリスト表現はエッジを任意抽出するなどの操作には秀でているが，ノードを起点とする操作には向かない．

ここまでに示したように，すべての目的に適したネットワークの表現はない．多くの場合，ネットワークから抽出したい情報や行いたい操作によって，ネットワークの表現方法を使い分ける必要がある．ただし，解析的取扱いにおいてはメモリ消費量を考慮する必要がないので，簡単で直観的な隣接行列を用いることが多い．本論文でも，数値解析以外でネットワーク構造を表現する必要がある場合は隣接行列 $\boldsymbol{A}=\{A_{ij}|i,j\in[1,N]\}$ が用いられる．

2.2.2 次数と次数分布

隣接行列の i 行目に関する和は，ノード i から出ているエッジ本数を意味している．この量をノード i の次数という．すなわち，ノード i の次数を k_i と表記すれば，

$$k_i=\sum_{j=1}^{N}A_{ij} \tag{2.2}$$

である．また，総次数と総エッジ数 M の間には

$$\sum_{i=1}^{N}k_i=2M \tag{2.3}$$

という関係が成り立つ (握手の補題)．したがって 1 ノードあたりの平均次数 $\langle k\rangle$ は，

$$\langle k\rangle=\frac{2M}{N} \tag{2.4}$$

と書くことができる．

システムサイズの大きなネットワークを扱う場合には，任意抽出したノードが次数 k を持っている確率 $P(k)$ を導入するのが便利である．$P(k)$ は次数分布関数と呼ばれる確率密度関数である．したがって，次数分布関数 $P(k)$ は規格化条件

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(k)=1 \tag{2.5}$$

を満足し，その 1 次モーメントは

$$\sum_{k=0}^{\infty}kP(k)=\langle k\rangle \tag{2.6}$$

であり，平均次数に等しい．また，次数分布関数の分散 $\sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$ を調べれば，そのネットワークの次数のばらつきの程度がわかる．ここで，

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k) \tag{2.7}$$

である．次数の揺らぎがどの程度であるかを理解する上で，次数分布関数の n 次モーメント $\langle k^n \rangle$ を求めることは重要である．後述するように，次数分布関数の高次モーメントはネットワークの臨界性や相関などの様々な構造的性質と密接に関係している．

任意抽出したノードの次数が k である確率は $P(k)$ であるが，任意抽出したエッジの一端のノードが持つ次数が k である確率は $P(k)$ とはならない．このことは，任意抽出されたエッジの先にエッジを持たない次数 $k = 0$ のノード（孤立ノード）が存在する確率が $P(0)$ と等しくないことからも明らかである (エッジの先に孤立ノードが存在する確率はもちろん 0 である)．あるエッジの先に次数 k のノードが存在する確率 $Q(k)$ を求めよう．総エッジ数が M のとき，エッジの端の数は $2M$ である．また，次数 k のノードから出ているエッジの総本数，すなわちエッジの端が次数 k のノードである端の総数は $kNP(k)$ であるので，

$$Q(k) = \frac{kNP(k)}{2M} = \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} \tag{2.8}$$

である．よって，式 (2.8) の 1 次モーメント，すなわち

$$\sum_{k=1}^{\infty} kQ(k) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \tag{2.9}$$

はエッジ端ノードの平均次数を表している．

2.2.3 次数相関

本節では，次数の不均一さに起因して発現する複雑ネットワーク特有の性質である次数相関について説明する．次数相関とは，あるノードの次数と他のノードの次数の間に存在する相関を指す．一般的には，ノードどうしが隣接している必要もないし，3 点以上のノード間の次数相関を考えることもできるが，多くの場合に興味のある次数相関は，隣接ノード対間の次数相関である．本論文でも，特に断らない限り隣接ノード対間の次数相関を単に次数相関という．

次数分布関数 $P(k)$ にしたがうネットワークから任意抽出した次数 k のノードに隣接するノードを任意に選んだとき，そのノードの次数が k' である確率 $P(k'|k)$ を考えよう．この条

件付き確率は任意の k に対して，

$$\sum_{k'=1}^{\infty} P(k'|k) = 1 \tag{2.10}$$

と規格化されている．ここで $P(k'|k)$ は k と k' に関して対称ではないことに注意する必要があるが，次数 k のノードに隣接する次数 k' のノードの数と，次数 k' のノードに隣接する次数 k のノードの数とは等しいという詳細釣合条件から，

$$kP(k'|k)P(k) = k'P(k|k')P(k') \tag{2.11}$$

が成立する．式 (2.11) を N 倍した量は，$NkP(k)$ がネットワーク内に存在する次数 k のノードから延びているエッジの総本数であったことを思い出せば，エッジの両端にそれぞれ次数 k と次数 k' のノードがあるエッジの総本数を表している．したがって，任意抽出したエッジの両端にそれぞれ次数 k と次数 k' のノードが存在する同時確率 $P(k,k')$ と条件付き確率 $P(k'|k)$ の間には，

$$P(k',k) = \frac{NkP(k)}{2M}P(k'|k) = \frac{kP(k)}{\langle k\rangle}P(k'|k) \tag{2.12}$$

が成り立つ．

特別な場合として，ネットワークに次数相関がない場合を考える．これは，どのような次数のノードを選んだとしても，そのノードに隣接するノードの次数が k' である確率が始めに選んだノードに依らないことを意味しており，$P(k'|k)$ が k に依存しない場合に対応している．式 (2.11) の両辺を k について和を取ることを考えると，右辺は式 (2.10) を適用して，$k'P(k')$ となり，左辺は $P(k'|k)$ が k に依存しないので，$P(k'|k)\langle k\rangle$ となる．よって，

$$P(k'|k) = \frac{k'P(k')}{\langle k\rangle} \tag{2.13}$$

が成り立ち，式 (2.8) の右辺の形と一致する．式 (2.8) が（次数相関があろうとなかろうと）任意に選んだエッジの一端に次数 k のノードが存在する確率 $Q(k)$ であったことを考えると，次数相関の無いネットワークにおいて，任意抽出されたノードのある隣接ノードの次数が k' となる確率 $Q(k')$ で与えられるのは当然である．

これまでにみたように，条件付き確率 $P(k'|k)$ や同時確率 $P(k,k')$ は隣接するノード間の次数相関を意味しているが，実際の複雑ネットワークに対してこれらの 2 変数関数を求めたとしても，結局どのような相関を持っているかを感覚的に理解することは容易ではない．そこで，隣接ノード対の次数 k と k' を直接プロットすることで，ネットワークが次数相関を持っているか否か，またどのような相関を持っているかを定性的に知ることができる．図 2.4 は，異なる 3 つのネットワークの隣接ノード対の次数 k,k' をプロットしたものである．

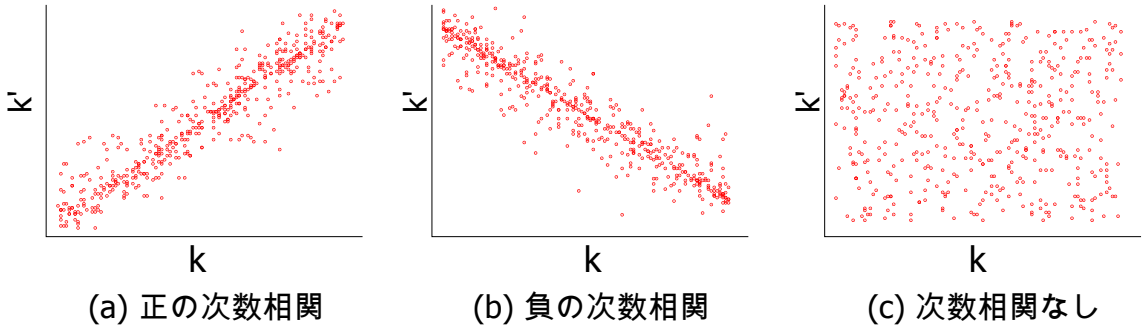


図 2.4: 隣接ノード対の次数 k と k' をプロットした概念図．それぞれ (a) 正の次数相関，(b) 負の次数相関，(c) 次数相関なしに対応している．

図 2.4(a) では次数の大きな (小さな) ノードが，次数の大きな (小さな) ノードと結合している傾向がある．このように同程度の次数どうしが繋がりやすい傾向，すなわち正の次数相関を持ったネットワークを assortative なネットワークという．これと反対に，図 2.4(b) は負の次数相関を表している．このように，次数の大きな (小さな) ノードが，次数の小さな (大きな) ノードと結合する傾向をもつネットワークを，disassortative なネットワークという．また図 2.4(c) は，他の 2 つのような傾向が見られず，次数相関のないネットワークを表してる．

次数相関がそれほど強くない現実ネットワークに対して図 2.4 のようなプロットを行っても，相関の正負を明確に読み取れないことはよくある．このような問題を解決するために，次数 k のノードに隣接するノードの平均次数 $k_{\rm nn}(k)$ の k 依存性を調べることがある．この隣接平均次数 $k_{\rm nn}(k)$ は，条件付き確率 $P(k'|k)$ を用いて

$$k_{\rm nn}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k' P(k'|k) \tag{2.14}$$

と表すことができる．隣接平均次数 $k_{\rm nn}(k)$ が k の単調増加関数であれば，そのネットワークは assortative なネットワークであることを意味し，$k_{\rm nn}(k)$ が k の単調減少関数ならば，そのネットワークは disassortative なネットワークを意味する．また，$k_{\rm nn}(k)$ が k に依存しない場合は，次数相関が無いことを意味しており，隣接平均次数は

$$k_{\rm nn} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \tag{2.15}$$

なる一定値をとる．このことは，式 (2.14) に式 (2.13) を代入することにより直ちに確認できる．現実のネットワークにおいて $k_{\rm nn}(k)$ が単調関数であることはそれほど多くない．隣接

平均次数の次数依存性が比較的きれいな単調関数になる現実ネットワークの例としては，たんぱく質相互作用ネットワーク [1] やインターネット [2,3]，国際貿易ネットワーク [4]，薬品処方箋ネットワーク [5] などが知られている．多くの場合，$k_{\rm nn}(k)$ は増減が混じった形となる．

ネットワークがもつ構造的性質や，ネットワーク上のダイナミクスに次数相関がどのような影響を与えるのかを理解するために，次数相関を定量的に評価することが求められる．現在のネットワーク研究においてもっともよく用いられている隣接次数相関の強さを定量化する指標は，統計学の分野で良く用いられる量である Pearson 相関係数である．結婚する 2 人の年齢など，Pearson 相関係数はどのような量の組であれ，2 つの量の間の相関を定量的に評価することができる．これをエッジ両端のノードの次数に適応することで，どの程度それらの値が似通っているかを評価し，隣接ノード間の次数相関を評価する．任意抽出したエッジの端の次数分布が表式 (2.8) で与えられることから，この抽出したエッジを除いた残り次数の分布 $Q^{\rm ex}(k)$ は

$$Q^{\rm ex}(k) = \frac{(k+1)P(k+1)}{\langle k \rangle} \tag{2.16}$$

で与えられる．この残り次数を Pearson 相関係数 r の定義式に適用することで，

$$r = \frac{1}{\sigma^2_{Q^{\rm ex}}} \sum_{kk'} kk' \left[P^{\rm ex}(k,k') - Q^{\rm ex}(k) Q^{\rm ex}(k') \right] \tag{2.17}$$

により定量化される [6]．ここで，$P^{\rm ex}(k,k') = P(k+1,k'+1)$ は任意抽出したエッジ両端の残り次数の同時確率である．また，分母の $\sigma^2_{Q^{\rm ex}}$ は残り次数分布 $Q^{\rm ex}(k)$ の分散であり，次数分布関数 $P(k)$ のモーメントを用いて，

$$\begin{aligned} \sigma^2_{Q^{\rm ex}} &= \sum_k k^2 Q^{\rm ex}(k) - \left[\sum_k k Q^{\rm ex}(k) \right]^2 \\ &= \frac{\langle k^3 \rangle}{\langle k \rangle} - \frac{\langle k^2 \rangle^2}{\langle k \rangle^2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

と表される．

ネットワーク解析する際の実用上を考えると，数値的に相関係数を計算する際には，式 (2.17) の代わりにエッジリストを使うと計算しやすい．その際エッジリストは式 (2.1) で導入した $M \times 2$ の配列を $M \times 4$ に拡張し，3 列目と 4 列目にエッジ両端のノードの次数を格納したものを用いて

$$r = \frac{4\langle kk' \rangle_{\rm e} - \langle k + k' \rangle_{\rm e}}{2\langle k^2 + k'^2 \rangle_{\rm e} - \langle k + k' \rangle^2_{\rm e}} \tag{2.19}$$

から求めるのが便利である．ここで $\langle \cdots \rangle_{\rm e}$ はエッジに渡る平均を意味している．現実の複雑ネットワークが有する次数相関については次節以降で概観する．

2.2.4　ネットワーク距離

ノードに座標情報が与えられている地理的ネットワークなどを除いて，一般に複雑ネットワークには，ノード間のユークリッド距離が定義されていない．しかしながら，ネットワークにおけるノード間距離を，ノード ij 間を結ぶ経路のうちで経路内に含まれるエッジ本数が最小となる経路のエッジ本数 l_{ij} として定義することができる．ただし，同一ノード間の距離は 0，ノード間を結ぶ経路がないとき $l_{ij} = \infty$ とする．重み付きネットワークにおいては，距離の測り方がエッジの重みの意味によって変わることに注意する必要がある．例えば交通網などにおいて，エッジの重みが運賃や距離 (ユークリッド距離) である場合，ノード ij 間における総運賃あるいは総距離を最小にする経路に従ってノード間距離が定義される．一方で，エッジの重みが情報を流す際の効率の良さなどに対応しているとすると，エッジの重みの逆数和を最小にする経路に沿ってノード間距離を定義するのが自然である．無向ネットワーク場合の重みの有無にかかわらず，$l_{ij} = l_{ji}$ であるが，有向ネットワークにおいては，エッジの向きに沿ってのみノードを辿ることとなるので，$l_{ij} \neq l_{ji}$ となりうる．

複雑ネットワークの性質を知るうえで非常に重要となる統計量のひとつに平均ノード間距離がある．平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ は，全ノード対間の距離の平均を意味し，

$$\langle l \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} l_{ij} \tag{2.20}$$

で定義される．平均ノード間距離がネットワーク・サイズ N の変化に対してどのように振舞うかを知ることは，ネットワークがどの程度のコンパクトさをもっているかを理解するうえで重要となる．現実のネットワークにおいては，ノード数の増加に対して平均ノード間距離の変化が非常に緩慢であることが知られている．この点に関しては，2.4 節で詳しく述べる．

式 (2.20) の定義からわかるように，平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ は与えられたネットワークの全要素のそれぞれがすべての要素への経路をもつとき (ネットワークが単連結であるとき) のみ有効である．しかし，現実のネットワークが単連結である保証はない．単連結でないネットワークにおいては，その島 (クラスター) ごとに平均ノード間距離を求めたり，ノード間距離の調和平均

$$E = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{l_{ij}} \tag{2.21}$$

によって評価する方法が考えられている．式 (2.21) で定義される E は大域的効率と呼ばれている [7].

2.2.5　クラスター係数

ネットワーク内のあるノード i の周りにどの程度密にエッジが張られているかを考えよう．このことを表す量を i ノードの隣接ノード間にエッジが張られている割合 C_i と考えれば，ノード i の次数が k_i で，隣接ノード間に張られているエッジの本数が t_i であるとき，

$$C_i = \frac{t_i}{k_i(k_i-1)/2} \tag{2.22}$$

と書くことができる．この量はノード i のクラスター係数と呼ばれる．隣接ノード間にエッジが存在することは，友人関係ネットワークにおいて「友人の友人もまた友人である」ことに対応しており，自分の周りの「三角形」の多さを表している．クラスター係数はネットワークの局所的な構造を特徴づける量である．これに対して，ネットワーク全体の平均クラスター係数

$$C = \frac{1}{N}\sum_i C_i \tag{2.23}$$

を考えることも，ネットワーク全体がどの程度 (三角形の意味で) 密につながっているかを評価する上で重要である．さらに，次数 k のノードに渡ってのみ C_i を平均した量，

$$C(k) = \frac{1}{NP(k)}\sum_i C_i\delta_{kk_i} \tag{2.24}$$

を定義すると，クラスター係数と次数との相関を調べることができる．現実のネットワークにおけるクラスター係数と次数との間には相関があり，多くの場合 $C(k)$ が k の減少関数であることが知られている [4, 8].

ネットワーク全体に対する平均クラスター係数と同様な意味をもつ量として

$$\bar{C} = \frac{A_{ij}A_{ij'}A_{jj'}=0 \text{ となる } (i,j,j') \text{ の組の数}}{A_{ij}A_{ij'}\neq 0 \text{ となる } (i,j,j') \text{ の組の数}} \tag{2.25}$$

が用いられる場合もある．式 (2.25) の分子は,「3× ネットワーク内の三角形の数」に等しい．また，この式は式 (2.22) の分子分母の平均を独立にとった $\bar{C} = \langle t_i\rangle/\langle k_i(k_i-1)/2\rangle$ に等しい．ネットワーク全体に対する平均クラスター係数の式 (2.23) と式 (2.25) は，定義式からわかるように，次数ごとの平均クラスター係数 $C(k)$ に次数 k 依存性がないとき一致し，$C=\bar{C}$ が成立する．ネットワーク内に含まれる三角形の数 $T=\sum_i t_i$ は，隣接行列を用いれば，

$$T = \frac{1}{6}\sum_i \left(A^3\right)_{ii} = \frac{1}{6}\mathrm{TrA}^3 \tag{2.26}$$

と書くことができる．Tr はトレースであり，対角和を意味する．

2.2.6 中心性

これまでに見た次数やクラスター係数は，各ノードの性質を特徴づける指標であった．次数の大きいノードは他のノードとのやり取りが多いため，重要なノードのように思える．このように，与えられたネットワークにおいて，あるノード (エッジ) がそのネットワークにおいてどの程度重要であるかを特徴づける量を “中心性” と呼ぶ．中心性を明らかにすることは，ネットワーク構造を単に理解するだけでなく，応用上も重要である．以下ではノードを特徴づけるいくつかの中心性について説明する．

次数中心性

最も単純かつ基本的な中心性である次数（或いは次数中心性）は，次数の高いノードを重要度の高いノードとみなすという考えに基づく中心性である．友人知人関係ネットワークや SNS などにおいて，この考え方は概ね正しいように思える．次数の高い人は，多くの人とつながっており，ネットワーク内において大きな影響力を持っていると考えられるからである．

人間関係以外のネットワークにおいても，ノードの重要度が次数中心性によって定量化される場合がある．例えば，論文の引用関係ネットワークはその一例である．論文引用関係ネットワークは，ある論文 i が他の論文 j を引用しているとき，i ノードから j ノードに向かう有向エッジを張ることによって構成されるネットワークである．したがって，各ノードの出次数がその論文の引用論文数に対応し，入次数が被引用回数に対応する．出 (入) 次数それぞれの次数中心性を定義することができるが，引用関係ネットワークにおいては，入次数中心性が大きな意味をもつ．各ノードの入次数 (被引用回数) は，そのノード (論文) の認知度や評価の度合いと密接に関係しており，重要度を表しているからである．次数中心性は，科学コミュニティに属する我々にとって非常になじみ深い指標であるといえる．

固有ベクトル中心性

次数中心性の自然な拡張として，固有ベクトル中心性がある．次数の高いノードの重要度が高いというのが次数中心性の考え方であった．しかしながら，次数中心性は個々のノードに隣接するノードがすべて等価である（同じ重要度を有する）ということを暗に仮定している．固有ベクトル中心性はこの点を考慮し，重要度の高いノードと隣接するノードの重要度も高くなるという効果を考慮したもので，隣接する各ノードから同じ大きさの寄与を受け取るのではなく，隣接するノードそれぞれの重要度に比例した寄与を受け取ると考えたものである．

まず暫定的にそれぞれのノード i に適当な重要度 $x_i(0)$ を割り振る (たとえばすべての重要度を 1 とする)．上の考え方を反映させると，

$$x_i(1) = \sum_j A_{ij} x_j(0) \tag{2.27}$$

という方程式を考えることができる．$x_i(1)$ は $x_i(0)$ から求まる新たな重要度であり，A_{ij} は隣接行列の ij 要素である．この式は列ベクトル $\boldsymbol{x}(0) = \{x_1(0), x_2(0), ..., x_N(0)\}^T$ を用いると，

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) \tag{2.28}$$

と書くことができる．この操作を n 回繰り返すと，

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x}(0) \tag{2.29}$$

となる．初期のベクトル $\boldsymbol{x}(0)$ を隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$ を用いて

$$\boldsymbol{x}(0) = \sum_i c_i \boldsymbol{v}_i \tag{2.30}$$

と展開してみよう．ここで，c_i は展開係数である．これを式 (2.29) に代入して変形すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n) &= \boldsymbol{A}^n \sum_i c_i \boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_i c_i \lambda_i^n \boldsymbol{v}_i \\ &= \lambda_{\max}^n \sum_i c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}} \right)^n \boldsymbol{v}_i \end{aligned} \tag{2.31}$$

と書ける．ここで λ_i は隣接行列 $\mathbf{A}$ の固有値であり，$\lambda_{\max}$ はその最大値である．$n \to \infty$ の極限において最大固有値以外の λ_i に対して $\lim_{n\to\infty}(\lambda_i/\lambda_{\max})^n = 0$ であるから，最大固有値に縮退がない場合，固有ベクトル中心性 $\boldsymbol{x}$ は隣接行列の最大固有値に属する固有ベクトルに比例することになる．すなわち，固有ベクトル中心性 $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_{\max}\boldsymbol{x} \tag{2.32}$$

を満足する．上記の固有値方程式を成分で書くと，

$$x_i = \lambda_{\max}^{-1} \sum_j A_{ij} x_j \tag{2.33}$$

となる．この式からわかるように，ノード i の中心性が高くなる条件は，自身の次数が高く，その隣接ノードの中心性も高いことである．このことより，最初に述べた中心性の考え方が正しく反映されていることがわかる．

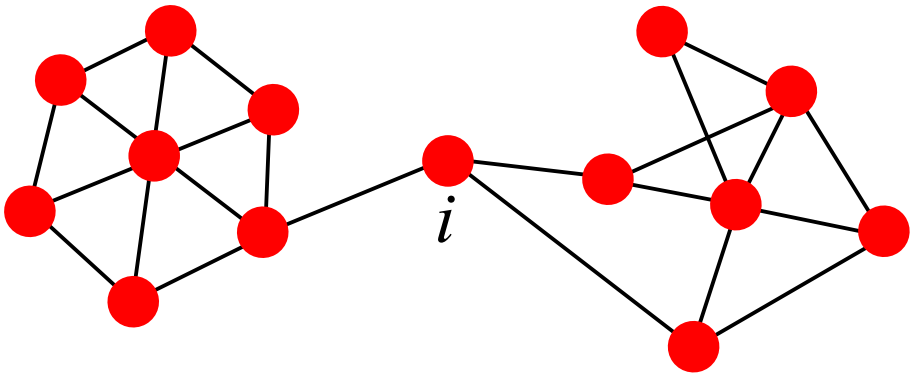


図 2.5: ネットワークの例 2．このネットワークが電流や情報の流れを伴うネットワークとすると，i ノードの存在が重要な役割をもっているように見える．

媒介中心性と脆弱度

これまでの議論から解るように，必ずしも次数が高いノードが高い中心性を有するわけではない．どのような意味の重要さを考えているかによって，中心性の高いノードは変わりうる．例えば図 2.5 のネットワーク内を情報や電流が流れているとすると，次数が高いノードやクラスター性の強いノードよりも，ネットワークの右側と左側をつないでいるノード i が，ネットワーク全体での情報共有や電力供給の観点からすると重要である．電力網などのようにネットワークが導管のような役割を果たし，その中を何らかの物理量が流れているようなネットワークは数多く存在する．そのような意味での中心性をみつけることは，停電や通信障害を防ぐ意味においても重要な意味をもつ．

社会学者の Freeman によってその考え方が広められ，現在最も広く活用されている中心性である媒介中心性はそのような意味での中心性の 1 つである [9]．問題を単純化するために，ネットワーク内のすべてのノード対に一定の流れが存在しているとしよう．一般に，流れが存在するネットワークは有向ネットワークであることが多いが，ここでは無向ネットワークを考える．また，この流れは (ネットワーク距離の意味で) 最短経路を通ると仮定する．このような状況において，任意のノード対間を結ぶ最短経路にノード i が含まれる回数がそのノード i の媒介中心性 b_i である．したがって b_i は，始点ノード s から終点ノード t までの最短路にノード i が含まれていれば $n_{st}^i = 1$，含まれていなければ $n_{st}^i = 0$ なる記号 n_{st}^i を用いて，

$$b_i = \sum_{s,t} n_{st}^i \tag{2.34}$$

と書くことができる．始点ノード s や終点ノード t 自身が対象ノード i である場合を式 (2.34) に入れるか否かには任意性がある．社会学分野の研究では，多くの場合これらを b_i に含めることはしない．しかしながら，始終点自信を b_i に含めるか否かは，b_i の大小関係に影響を与えないため，どちらの定義でも媒介中心性の意味は変わらない．式 (2.34) の定義では，同じような構造的特徴をもっていてもサイズの大きなネットワークの b_i の方がサイズの小さなネットワークの b_i よりも大きな値を取ることになる．異なるサイズのネットワークの中心性の違いを比較するには，b_i を全ノード対数 $N(N-1)/2$ で規格化するのが便利である．そのため，本論文ではノード i の媒介中心性を

$$b_i = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{s,t} n_{st}^i \tag{2.35}$$

と定義する．また，式 (2.35) の和には $s = i$ や $t = i$ も含めることとする．無向ネットワークに対して媒介中心性を定義したが，有向ネットワークに対しても，経路に向きがある (すなわち，$n_{st}^i = n_{ts}^i$ が必ずしも成立しない) ことに注意すれば，そのまま式 (2.35) によって媒介中心性を定義することができる．

媒介中心性は最短経路に特定のノードが含まれる回数によって定義されたが，これと似たような考え方に基づく中心性に脆弱度という量がある [10]．脆弱度は，特定のノードをネットワークから取り除いた際にネットワーク全体の平均ノード間距離がどの程度長くなるかを与える指標である．具体的には，ノード i の脆弱度 V_i は

$$V_i = \frac{E - E_i}{E} \tag{2.36}$$

で定義される．ここで E は式 (2.21) で定義されたネットワーク全体の大域的効率であり，E_i は考えているネットワークからノード i とそのエッジを取り去ったネットワークに対する大域的効率を表している．脆弱度はノード i が取り去られることによる影響の大きさを表しており，ノードの重要度を特徴づける中心性であることがわかる．媒介中心性に比べて優れている点は，重み付きネットワークに対してもそのまま適応可能なことである．

2.3 母関数と統計量

複雑ネットワークに関する解析的計算において非常に有効な手法である母関数法 (生成関数法) について説明する．

次数分布関数 $P(k)$ の母関数 $G_0(x)$ は

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) x^k \tag{2.37}$$

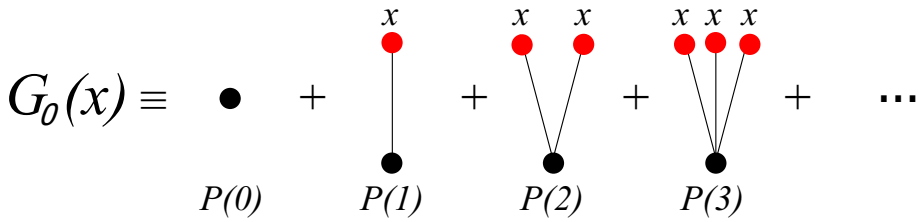


図 2.6: 次数分布関数 $P(k)$ の母関数 $G_0(x)$ を表すダイアグラム．赤丸ノードが x に対応づけられ，下段はそのようなパターンが現れる確率である．

で定義される．一般的な離散値確率密度関数 $R(k)$ の母関数も，式 (2.37) の $P(k)$ を $R(k)$ に置き換えることにより定義される．母関数 $G_0(x)$ の変数 x をノードに対応付けると，式 (2.37) は，図 2.6 のようなダイアグラムで表すことができる．任意抽出したノードが黒色ノードであり，その隣接ノードが赤色で示されている．赤色ノードの上の x は，隣接ノード 1 個分に対応した母関数を表している．同様に，x^k は k 個の隣接ノードに対応した母関数であり，その出現確率が $P(k)$ であることから，図 2.6 が式 (2.37) を表していることになる．次数分布関数 $P(k)$ は規格化条件 (2.5) を満たしているので，

$$G_0(1) = 1 \tag{2.38}$$

である．また，次数分布関数 $P(k)$ はあらゆる k に対して非負な実数値をとり，規格化条件 (2.5) を満たしているため，$G_0(x)$ は $|x| \leq 1$ の範囲において絶対収束する．$P(k)$ はその母関数 $G_0(x)$ を用いて，

$$P(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k G_0(x)}{dx^{(k)}} \bigg|_{x=1} \tag{2.39}$$

と表されるため，$G_0(x)$ は生成関数と呼ばれることもある．

複雑ネットワーク研究において，母関数法が重宝されている一つの理由にネットワークの様々な特徴量が母関数を使って簡単に求めることができる点が挙げられる．直ちにわかるように，次数分布関数の 1 次モーメント (平均次数) は

$$\langle k \rangle = \frac{dG_0(x)}{dx} \bigg|_{x=1} = G_0'(1) \tag{2.40}$$

で与えられ，n 次モーメントは

$$\langle k^n \rangle = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1} \tag{2.41}$$

となる．このように，次数分布関数 $P(k)$ から直接モーメントを求めるよりも，母関数を通じてモーメントを求める方が計算が簡単な場合が多い．

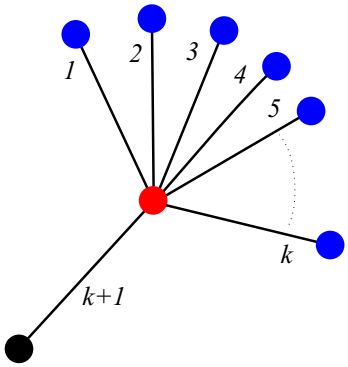


図 2.7: 黒色ノードのある 1 つのエッジを辿ったときに現れる第 2 隣接ノード (青色) 数の分布に対する母関数を説明する図.

次に，任意抽出したエッジ端ノードの次数分布関数 $Q(k)$[式 (2.8) 参照] の母関数を考えよう．母関数の定義と式 (2.8) から，$Q(k)$ の母関数は,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\langle k \rangle} k P(k) x^k = x \frac{G_0^{'}(x)}{G_0^{'}(1)} \tag{2.42}$$

となることがわかる．今，考えているネットワークに次数相関がないと仮定しよう．このとき，任意に選んだノードから出ているエッジの一本を辿ったとき，その先のノードの次数が k である確率は式 (2.13) で与えられる．したがって，この確率に対する母関数も式 (2.42) で与えられる．さらに，次数相関のないネットワークにおいて，任意抽出されたノード (図 2.7 の黒色ノード) に隣接するノード (図 2.7 の赤色ノード) の先に拡がるエッジ本数が k 本である確率に対する母関数を導入するのが便利である．この分布関数に対する母関数は

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)P(k+1)}{\langle k \rangle} x^k \\ &= \frac{G_0^{'}(x)}{G_0^{'}(1)} \end{aligned} \tag{2.43}$$

で与えられる．式 (2.42) と式 (2.43) を比べてわかるように，両者は x 倍だけ違っている．この x は，図 2.7 における黒色ノードに対応している．これらの母関数を使うことで，複雑ネットワークの最大連結成分の大きさなどを見積もることができる．このことに関しては第 3 章で述べる．

2.4　現実ネットワークの構造とその性質

1990 年代終わりの急速なインターネットの普及と高速計算機の発展を契機に，大規模なデータの共有・解析がなされるようになった．複雑ネットワークの初期の研究においては，特に「ノードが他のノードとどのようにつながっているか」というネットワークの構造に関する研究が盛んになされた．本節では現実ネットワークにみられる共通した構造的性質である，スモールワールド性とスケールフリー性について実データから概観する．

2.4.1　ランダムグラフ

現実のネットワークの構造的性質を明らかにするうえで，まずランダム・グラフをベンチマークとして導入することが有意義である．ランダムグラフは，数学の一分野であるグラフ理論で生まれたネットワーク・モデルの一種で，様々な統計的性質が十分に調べられている．2.1 節で述べたように，次数の揺らぎが大きいネットワークを本論文では複雑ネットワークとみなした．すぐ下で見るようにランダムグラフの次数揺らぎは小さいため，ランダム・グラフは複雑ネットワークとは呼べないが，現実のネットワーク “複雑さ ” を理解するときの比較対象としての意義は大きい．そのため，現実の複雑ネットワークの特徴を浮き彫りにするためにも，まずランダムグラフの性質を確認しておく．

N 個のノードが孤立して存在している状況を考える．すべてのノード対間に確率 p でエッジを張るとすると，その次数分布関数 $P(k)$ は

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-k-1} \tag{2.44}$$

という二項分布で与えられることになる．これがランダムグラフの次数分布関数である．二項分布であるから，分布の裾は短く，k の揺らぎは小さい．このことを確かめるためにも，この分布の平均次数と分散を求める．平均次数は，全ノード対数 $N(N-1)$ のうち割合 p だけエッジが張られるので，1 ノード当たりの平均次数は $p(N-1)$ で与えれることが簡単にわかる．式 (2.44) を使って直接平均と分散を求めようとすると，それなりに面倒な計算を行わなくてはならない．そこで，母関数を用いてモーメントを求めることにする．ランダムグラフの次数分布関数に対する母関数 $G_0(x)$ は

$$\begin{aligned} G_0(x) =& \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-k-1} x^k \\ =& (1-p+px)^{N-1} \end{aligned} \tag{2.45}$$

で与えられる．母関数を用いたモーメント計算の式 (2.41) を使えば，平均次数 $\langle k \rangle$ とその分散 σ^2 は，

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \frac{d}{dx}(1-p+px)^{n-1}|_{x=1} \\ &= p(N-1) \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \\ &= G_0'(1)\left[1 - G_0'(1)\right] + G_0''(1) \\ &= p(1-p)(N-1) \end{aligned} \tag{2.47}$$

でそれぞれ与えられる．ここで，G_0' および G_0'' は $G_0(x)$ の 1 階および 2 階の導関数である．

平均次数 $p(N-1)$ を有限に留まるようにした上で，ランダムグラフの大きさ N を十分大きくすると，式 (2.44) は Poisson 分布

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^{-k}}{k!} e^{\langle k \rangle} \tag{2.48}$$

に漸近する．この Poisson 分布に対する母関数は，式 (2.45) において，平均次数 $p(N-1)$ を有限に留めたまま，ノード数の大きな極限 ($N \to \infty$) を取ることにより得られる

$$G_0(x) = e^{\langle k \rangle (x-1)} \tag{2.49}$$

に等しくなる (このときエッジ確率は $p \to 0$).

ランダムグラフのクラスター係数 C_i も簡単に求めることができる．任意抽出したノード i の次数が k であるとき，クラスター係数に寄与する三角形の組み方は $k(k-1)/2$ だけある．このうち三角形を組むのは割合は，隣接ノード対間にエッジがあられている割合 p に等しいので，

$$C_i = \frac{pk(k-1)/2}{k(k-1)/2} = p = \frac{\langle k \rangle}{N} \tag{2.50}$$

となり，ノードの次数には依存しない．この結果は，平均次数がノード数 N に依存しない ($\langle k \rangle \sim N^0$) 場合に，クラスター係数がノード数の増大とともに，N^{-1} で減衰することを表している．この事実は，現実のネットワークの構造との対比において，重要な意味をもつ．

ランダムグラフでは，エッジ確率に従ってノード対間にランダムに (無相関に) エッジが張られているので，当然ながら次数相関をもたない．実際，任意抽出したノードの隣接ノードの平均次数は式 (2.13) と上記の $P(k)$ のモーメントを使って，

$$k_{\rm nn} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = pN + 1 \tag{2.51}$$

と求められ，ノードの次数に依存しない一定値をとる．残り次数平均で言えば，辿ってきたエッジのほかに平均して pN 本だけエッジを有していることになる．このことは，ノード数 N が無限大 (熱力学極限) のネットワークの連結性において大きな意味をもつ．仮に辿ってきたエッジのその先に平均して 1 本より小さいエッジしかもっていなかったとすると，ネットワークのいたるところに行き止まりが存在することになる．反対に，エッジの先のノードが平均して 1 本以上エッジを有している場合，エッジを辿って際限なくネットワーク進んで行くことができそうである．すなわち，ネットワーク・サイズ ($N \to \infty$) に比例した大きさの連結したクラスターが存在する．$k_{\rm nn} = 2$ を境にしたこの変化は，いわゆるパーコレション転移を意味している，パーコレーション臨界点や臨界性に関する詳しい議論は第 3 章で述べる．また，明らかにエッジ確率 $p = 1$ では全ノード対間にエッジが存在することになる．このようなネットワークは完全グラフと呼ばれる．

次にランダムグラフのノード間距離について述べる．多くの手法 [12–14] によってランダムグラフの平均ノード間距離やネットワーク直径が評価されているが，多くは煩雑な計算を伴う．ここでは，感覚的にネットワーク直径を見積もることにする．今，ネットワーク内の全てのノードが連結しているような比較的高いエッジ確率 p によってランダムグラフが生成されたとしよう．このとき，あるノードを起点にして，(ノード間距離の意味での) 半径 l よりも内側に存在するノード数を考える．どのノードも平均的に $\langle k \rangle$ だけエッジを持っているので，半径 l よりも内側に存在するノード数が $\langle k \rangle^l$ よりも遥かに小さくなる確率は小さい．したがって，ネットワーク・サイズ N と直径 d との間には $N \sim \langle k \rangle^d$ なる関係が成立し，直径 d は $d \sim \log N / \log \langle k \rangle$ と見積もられる．これは平均次数 $\langle k \rangle \geq 3.5$ のランダムグラフに対する厳密な計算によって得られる結果に等しい [15]．また，平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ もノード数 N の変化に対して対数的な依存性を示し，

$$\langle l \rangle \sim \frac{\log N}{\log \langle k \rangle} \tag{2.52}$$

であることが知られている [12–14]．ノード数 N の増加に対して，平均ノード間距離が対数的にしか増加しないことは，ランダムグラフが非常にコンパクトなネットワークであることを意味している．このランダムグラフのコンパクトさも現実ネットワークとの比較の際に非常に重要である．また，一般に D 次元構造体の体積 V と差し渡しの長さ L の間に $V \propto L^D$ の関係があることを考慮すると，ランダムグラフに対する $N \sim \langle k \rangle^l$ の関係は，ランダムグラフの有効次元が発散していることを意味している．

ランダムグラフにおいては，次数分布関数 $P(k)$ が式 (2.44) のような二項分布であることから，次数 (次数中心性) の揺らぎが小さいことは既に述べた．さらに，媒介中心性や他の

中心性の分布の幅も狭く，これらの量の揺らぎも小さいことが知られている [12, 14]．このことは，ランダムグラフが均質な構造を有していることを意味している．

2.4.2 スモールワールド性

大学で出会った友人が地元の友人の古い友人であったり，旅先の土地で出会った人と共通の知り合いがいたり等，我々の普段の生活において，一見不思議とも思える偶然の出会いがしばしば起きることがある．また，顔見知りではない特定の人物とコンタクトをとるためにどのような道筋 (人脈) を辿ればよいかということを考えた時，驚くほど少ない人数で，その人物へ辿りつけることがある．これらは知人ネットワークの「スモールワールド性」に起因した現象であり，古くから社会学の分野で研究がされてきた．現実の複雑ネットワークのスモールワールド性に関して議論を展開する前に，古くから知られる社会実験を説明することによって，現実ネットワークの構造的性質の一端に触れることにする．

スモールワールド実験

1950 年代，多くのネットワークにおいて，2 ノード間の距離は極めて短いということを Pool と Kochen が数理モデルによって明らかにした [16]．この研究に影響を受け，心理学者の Stanley Milgram は，知人関係ネットワーク内の 2 人 (ある 2 つのノード) がどの程度の社会的な距離で繋がっているのかということを調べようと次のような社会実験をした [17, 18]．

Milgram はアメリカのネブラスカ州のオマハの電話帳から任意に抽出した 96 人に小包を送った．小包の中には公式文書風のブックレットが入っており，このブックレットをネブラスカから 2000km 以上離れたマサチューセッツ州のボストンに住む Milgram の友人まで送るようにという依頼書が入っていた．与えられている情報は，ターゲットの氏名，住所，そして職業が株式仲介人であるという情報である．小包の所有者は，ターゲットを直接知っているのであれば小包をターゲットに送ってもよいが，もし知り合いではないのであれば，この小包を次のような条件に当てはまる人に送らなくてはならない．すなわち，お互いにファーストネームで呼び合う仲の友人のうち，最もターゲットへ近い友人，あるいはターゲットと知り合いである可能性が高い友人へ小包を送るのである．このようにして，小包は親密な人同士の手を渡る．最初の被験者からターゲットへ行きつくまでに何人の手に渡ったかというのが知人関係ネットワークにおけるノード間距離に対応する．

96 冊のブックレットのうち，ターゲットであるボストン在住の株式仲介人へ届いたのは 18 冊であった．Milgram はこの 18 冊のブックレットの軌跡を辿ることで，オマハの被験者

表 2.1: 現実ネットワークのノード数 N，平均次数 $\langle k \rangle$，平均ノード間距離 $\langle l \rangle$，およびクラスター係数 C．$\langle l_{\rm RG} \rangle$ および $C_{\rm RG}$ はそれぞれのネットワークと同じノード数および平均次数をもつランダムグラフの平均ノード間距離とクラスター係数に対応している．平均ノード間距離 $\langle l_{\rm RG} \rangle$ とクラスター係数 $C_{\rm RG}$ は，それぞれ式 (2.52) と式 (2.50) から見積もっている．

ネットワーク	N	$\langle k \rangle$	$\langle l \rangle$	$\langle l_{\rm RG} \rangle$	C	$C_{\rm RG}$	文献
WWW	153 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	2.3×10^{-4}	[20]
インターネット	10 697	5.98	3.31	5.31	0.39	5.6×10^{-4}	[21]
共著関係（数学）	70 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	[29]
共著関係（神経科学）	209 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	[29]
俳優共演関係	225 226	61	3.65	2.99	0.79	2.7×10^{-4}	[38]
蛋白質相互作用	2 115	2.12	6.80	7.67	0.071	1.0×10^{-2}	[22]
大腸菌	315	28.3	2.62	1.91	0.59	0.9×10^{-1}	[23]

からボストンのターゲットへのノード間距離が平均で 5.9 であることを明らかにした．このことは知り合いの知り合いを辿ることを 6 回以上繰り返せば，世界の誰とでもコンタクトが取れることを意味しており，標語的に “6 次の隔たり” という言葉で表されることがある．この実験は「スモールワールド実験」と呼ばれ，現在の複雑ネットワークの研究分野の基礎を形成する非常に有名な社会実験である．近年，E-mail を使ったより精密な実験によって，平均ノード間距離は 5 から 7 の間であるという結果が得られている [19]．しかしながら，これらの実験の重要性はノード間距離の絶対的な値にあるわけではない．数千万から数億のノード数があると思われるアメリカの友人関係ネットワークにおいて，任意の 2 点間のネットワーク距離が極めて小さいという事実にこそこれらの実験の重要性はある．

スモールワールド性

前項でみた，平均ネットワーク距離が総ノード数に比べ極めて小さいという事実は，知人関係ネットワークのみでみられるわけでない．表 2.1 に示したのは幾つかの現実ネットワークの基本的な統計的性質である．どのネットワークも総ノード数 N に比べて，平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ が極めて小さいことがわかる．この性質はランダムグラフにもみられる性質であった．そこで，それぞれの現実ネットワークのノード数と平均次数を有するランダムグラフにおける平均ノード間距離 $\langle l_{\rm RG} \rangle$ と比較してみよう．表からわかるように，現実ネットワークの平均ノード間距離はランダムグラフのそれに近い．このことは，現実ネットワークの平均

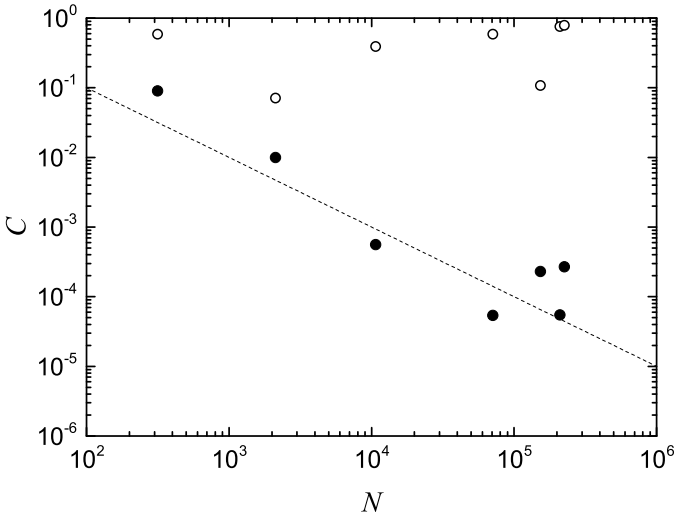


図 2.8: 表 2.1 のネットワークの平均クラスター係数 C のノード数 N 依存性．白丸が現実ネットワークのクラスター係数であり，黒丸がそれぞれのネットワークに対応するランダムグラフのクラスター係数である．破線は $C \sim N^{-1}$ を表す直線である．

ノード間距離もランダムグラフと同様にノード数変化に対して，平均ノード間距離が対数的な依存性

$$\langle l \rangle \sim \log N \tag{2.53}$$

をもつことを意味している．

しかしながら，現実のネットワークがランダムグラフと同じ統計的性質を有しているわけではない．現実ネットワークの平均ノード間距離の振舞いがランダム・グラフのそれと一致するのはむしろ例外的であり，他の多くの特徴はランダム・グラフとは一致しない．クラスター係数の大きさも，現実ネットワークとそれに対応するランダムグラフとでは大きく異なっていることが表 2.1 からわかる．この違いをわかりやすくするため，クラスター係数とネットワーク・サイズ N の関係を現実ネットワークとランダムグラフで比較したのが図 2.8 である．ランダムグラフのクラスター係数が式 (2.50) のとおり $C_{\rm RG} \sim N^{-1}$ であるのに対し，現実ネットワークの場合はノード数 N に依存せず，概ね $C \sim 10^{-1}$ という値をとっている．言い換えれば，現実ネットワークはランダムグラフに比べ極めて強くクラスター化しているといえる．

以上のことをまとめると，現実のネットワークは

- 平均ノード間距離とノード数の間に $\langle l \rangle \sim \log N$ なる関係がある．

- 平均クラスター係数はノード数に依存しない ($C \sim N^0$).

という特徴を有しているといえる．知人関係ネットワークでいうと，最初の性質は赤の他人であっても，知人関係を辿ると意外に近い関係にあることを意味し，二番目の性質は知人の知人は自分の知人であることが多いことを意味している．いずれも「世間は狭い」ということを表しているため，これら 2 つの性質を併せもったネットワークのことをスモールワールド性があるネットワークと呼ぶ．ただし，第一の性質のみを広義の意味でスモールワールド性ということもある．スモールワールド性は表に挙げたネットワークのみにみられるわけではなく非常に多くの現実のネットワークに共通してみられる重要な構造的特徴である．

2.4.3 スケールフリー性

前節では，多くの現実ネットワークがスモールワールド性を有することをみた．本節では，現実ネットワークの次数分布がどのような関数形をとるのかに着目する．ランダムグラフの次数分布関数は，次数の大きなところで指数関数的に減衰する二項分布であった．節 2.4.1 で述べたように，このことはネットワーク内のノードの次数に不均一さがないことを意味している．一方，現実のネットワークは強い次数不均一性を有している．この不均一さの証左となるいくつかの事実をまず説明しよう．

ランダムグラフの始祖である Paul Erdös は，数学の分野において多くの業績を残しており，生涯で約 1500 篇もの論文を著した．その多くが共著論文であり，約 500 人と共著関係にある．一方，数学者の共著ネットワークは 317,000 ノード，676,000 エッジで構成される (ここで単著のみの著者約 80,000 人は，ネットワークから除外している) [24]．いかにこの共著論文ネットワークがランダムグラフからほど遠い構造をもつかを知るために，この共著ネットワークが，仮にランダムグラフであったとする．Erdös のようなエッジ数 500 というノードがランダムグラフ内に現れる確率は式 (2.44) を用いると約 10^{-3570} という極めて小さい値になっていしまう．全ノード数が $N \sim 10^5$ であることを考えると，事実上そのような高次数ノードは存在しえないことになってしまう．

Erdös は偉大な数学者ではあるが，共著者数の点で特別であるわけではない．数学者の共著者ネットワークにおいて，共著者が 1 人から 3 人である著者は 200,000 人程度いる一方で，共著者数が 100 以上ある著者も 15 人いる．すなわち，大多数は数本のエッジしかもたないが，とても大きな次数をもったノードであるハブと呼ばれるノードも少数ながら存在している．このことは，共著ネットワークにおける次数分布が不均一であることを意味しており，ランダム・グラフのような幅の狭い次数分布をもたないことを表している．

知人関係ネットワークの次数分布の不均一性は，違った観点から議論されている．1991年，Feld は自身の社会学の論文 “Why Your Friends Have More Friends Than You Do” において，Coleman の著作 “*The Adolescent Society*” で扱われていた Marketville 高校の友人関係ネットワークのデータを基に，友人の友人数が自身の友人数よりも有意に多くなる傾向があることを示した [25]．現実のネットワークは次数相関を有するが，このことを一旦無視し，無相関であるとすると，この事実は平均次数と式 (2.15) で与えられる隣接平均次数との間に

$$\langle k \rangle \ll \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \tag{2.54}$$

なる関係が成立することになる．一方，ランダムグラフの場合は，$\langle k \rangle \approx pN$，$\langle k^2 \rangle \approx pN(1+pN)$ であるから $\langle k \rangle$ と $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ は 1 しか違わず，式 (2.54) のようにはならない．Feld は論文内で式 (2.54) の関係について言及しており，知人関係ネットワークの分散（或いは 2 次モーメント $\langle k^2 \rangle$）が大きいことを指摘している．他のネットワークについても平均次数と隣接平均次数を比べてみると，表 2.2 のように 生物分野の共著関係ネットワークでは隣接平均次数が平均次数の 4 倍以上，インターネットでは 50 倍を超えていることがわかる．これらの事実は，上に示した現実のネットワークの次数の揺らぎが大きく，その構造が極めて不均一であることを示している．

表 2.2: 現実ネットワークの平均次数と隣接平均次数．文献 [11] より引用．

ネットワーク	ノード数	平均次数	隣接平均次数
共著関係 (生物分野)	1,520,252	15.5	68.4
共著関係 (数学分野)	253,339	3.9	9.5
インターネット	22,963	4.2	224.3

では，現実のネットワークは実際にどのような次数分布をもっているのであろうか．いろいろな現実ネットワークの次数分布が系統的に調べられたのは 2000 年前後になってからである．その背景には，大規模なデータの扱いを可能にするコンピュータの出現とインターネットの急速な発展が挙げられる．これらの背景が契機となって複雑ネットワークの本格的な研究が始まったといって過言ではない．1999 年に Barabási と Albert は，多くの現実ネットワークの次数分布が，k の大きな領域で，

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \tag{2.55}$$

というベキ型の関数形をもつことを発見した [26, 27]．ネットワークが式 (2.55) のようなベ

表 2.3: スケールフリー性を示す現実ネットワークのノード数 N，平均次数 $\langle k \rangle$，およびスケールフリー指数 $\gamma_{\rm in,out}$．入り次数の指数の値 $\gamma_{\rm in}$ と出次数の指数の値 $\gamma_{\rm out}$ が一致しているものは無向ネットワークである．

ネットワーク	N	$\langle k \rangle$	$\gamma_{\rm in}$	$\gamma_{\rm out}$	文献
WWW	325 729	4.51	2.1	2.45	[59]
インターネット	3015-4389	3.42-3.76	2.1-2.2	2.1-2.2	[28]
共著関係（数学）	70 975	3.9	2.5	2.5	[29]
共著関係（神経科学）	209 293	11.5	2.1	2.1	[29]
俳優共演関係	225 226	61	2.3	2.3	[27]
論文引用関係	783 339	8.57	–	3	[30]
携帯電話網	5.3×10^7	3.16	2.1	2.1	[31]
蛋白質相互作用	1870	2.4	2.5	2.5	[35]
代謝	778	7.4	2.2	2.2	[22]

キ型の次数分布関数の裾をもつ性質をスケールフリー性といい，そのようなネットワークはスケールフリー・ネットワークと呼ばれる．ベキ関数は他の関数形と違い，特徴的なスケールを含まない関数である．数学的に言えば，ベキ関数 $f(x)$ は変数 x のリスケール $(x \to ax)$ に対して，定数因子を除き不変となる唯一の関数形である．すなわち，

$$f(ax) = bf(x) \tag{2.56}$$

を満たす関数集合がベキ関数である．これがスケールフリーという名の由来である．その意味で，ベキ関数性とスケールフリー性は常に同義であるといえるが,「スケールフリー」という言い方は複雑ネットワークに関わる研究の中で次数分布関数がベキ関数であるときのみに使われる専門用語である．

Barabási らの論文の中では，WWW と電力網，俳優共演関係ネットワーク，引用関係ネットワークの次数分布が調べられ，いずれも式 (2.55) の形の次数分布関数を有することが報告されている [26, 27]．その後，様々なネットワークの次数分布が調べられ，引用関係ネットワークなどの社会科学的ネットワークから，たんぱく質相互作用ネットワークや代謝ネットワークなどの生体系ネットワークに至る多岐に渡るネットワークが式 (2.55) の形の次数分布をもつことが明らかにされている．代表的ないくつかのネットワークを表 2.3 にまとめておく．表 2.3 を見ると，多くのネットワークのスケールフリー指数 γ は $2 \lesssim \gamma \lesssim 3$ の間の値をもっていることがわかる．この意味で，現実ネットワークの次数の不均一さは同程度であるように思える．しかしながら，この範囲 $2 \lesssim \gamma \lesssim 3$ というのは，後に見るように，ネット

ワークの臨界的な性質が大きく変化する範囲である．このことは，次数分布関数 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ の 1 次および 2 次モーメントの収束性が変化する点が $2 \lesssim \gamma \lesssim 3$ の範囲にあることと密接に関係している．詳しい議論は第 3 章で行う．

スケールフリー・ネットワークでは大多数が小さな次数のノードである一方で，非常に大きな次数をもつハブと呼ばれるノードが存在する．先に挙げた共著関係ネットワークにおける Erdös のようなハブノードの存在や，友人の友人数が自身の友人数よりも多いことは，スケールフリー性によって直ちに説明されることがわかる．

2.4.4 現実ネットワークの次数相関

相関係数 r を用いて，現実ネットワークの次数相関を測ると，ネットワークの分類ができることが知られている．表 2.4 に示したのは，文献 [32] から引用した次数相関係数の正負によるネットワークの分類である．表を見るとわかるように，共著関係ネットワークなどの社会的ネットワークは正の次数相関をもち，インターネットなどの技術的ネットワークやたんぱく質相互作用ネットワークなどの生物系ネットワークは負の次数相関をもっていることがわかる．

表 2.4: 現実ネットワークの相関係数．文献 [32] より引用．

	ネットワーク	ノード数 N	相関係数 r	文献
社会的ネットワーク	共著関係 (物理学)	52 909	0.363	[33]
	共著関係 (生物学)	1 520 251	0.127	[33]
	俳優共演関係	449 913	0.208	[38]
	会社役員	7 673	0.276	[34]
技術的ネットワーク	電力網	4 941	-0.003	[38]
	インターネット	10 697	-0.189	[21]
	WWW	269 504	-0.067	[26]
生物系ネットワーク	蛋白質相互作用	2 115	-0.156	[35]
	代謝	765	-0.240	[22]
	ニューラル	307	-0.226	[38]
	食物網	134	-0.263	[36]

2.5　代表的なネットワーク・モデル

2.5.1　スモールワールド性と Watts-Strogatz モデル

Watts と Strogatz は，現実の多くのネットワークにスモールワールド性があることを発見し，さらにその発現メカニズムを初めて示した [38]．Watts-Strogatz モデルを詳しく説明する前に，スモールワールド性の発現メカニズムを考える際の基本的アイデアについて触れる．2.4.2 節で述べたように，スモールワールド性とは，システムサイズ N のネットワークの平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ が $\langle l \rangle \sim \log N$ となり，クラスター係数 C がシステムサイズに依存しない ($C \sim N^0$) という性質であった．ランダムグラフは広義の意味でスモールワールド性を有しているが，クラスター係数は非常に小さい．一方で格子は強くクラスタリングしているものの，平均ノード間距離はシステムサイズに対してベキ的な依存性をもつ．そこで彼らは，広義のスモールワールド性をもつランダムグラフと強くクラスター化している格子を組み合わせることを考えた．具体的には，格子的なつながりの中にロングレンジのつながりを組み入れることで小さな $\langle l \rangle$ と大きな C を実現できると考えた．このような組み合わせは，友人関係ネットワークなどの現実のネットワークでも簡単に見つけることができる．そのようなネットワークの概念図を図 2.9 に示した．ショートレンジのつながりがネットワークのクラスター性 (規則性) を与え，ロングレンジのつながり (ショートカット) が平均ノード間距離を小さくすることになり，ネットワークのスモールワールド性が再現できると考えられる．

このような考えに基づき，Watts と Strogatz は Watts-Strogatz モデルと呼ばれるモデルを導入し,「規則性とショートカット」によってネットワークのスモールワールド性が説明されることを示した．以下でそのモデルを紹介する．

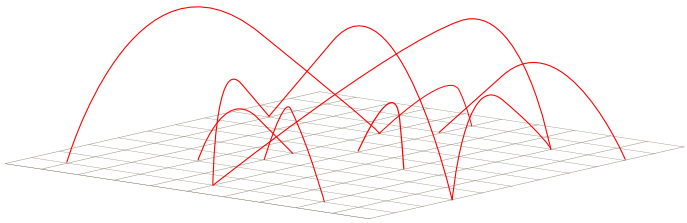


図 2.9: ショートカットのある規則格子の概念図．このようなネットワークでは平均ノード間距離が小さく，クラスター係数は大きいと考えられる．

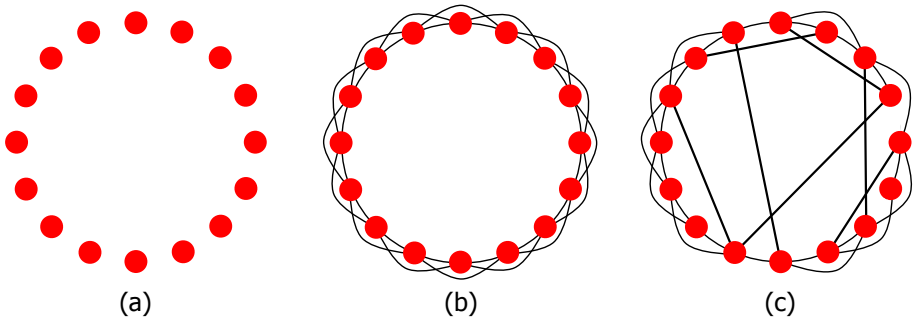


図 2.10: Watts-Strogatz モデルによるネットワークの作成アルゴリズム．(a) N 個のノードをリング上に配置する．(b) 各ノードとユークリッド距離の意味での z 近接ノードとの間にエッジを張る．図 (b) の場合，$z = 2$ である．(c) 各エッジを確率 p で張り替える．太線エッジが張り替えられたエッジに対応している．

Watts-Strogatz モデルのアルゴリズム

Watts-Strogatz モデルのアルゴリズムは以下の通りである．

1. 1 次元リング上に N 個のノードを配置する [図 2.10(a)].
2. 各ノードから左右 z 近接までのノードとエッジを張る [図 2.10(b)]．したがって，各ノードの次数は $2z$ であり，総エッジ数は zN 本である．
3. 2 で作られたネットワーク内の全エッジ zN 本それぞれに対して，確率 p で片方のエッジ端を切り (エッジ端の選ばれ方はランダム)，ランダムに選ばれた他のノードへ接続する．ただし，このとき多重エッジが生じるような張り替えは禁止する．

このモデルのパラメータは，ノード数 N，平均次数を決める z，およびエッジの張り替え確率 p である．確率 p のある領域において平均ノード間距離が $\langle l(p)\rangle \sim \log N$ であり，同時にクラスター係数が $C(p) \sim N^0$ となる，すなわちスモールワールド性が発現するであろうというのがこのモデルの心である．そこでまず，確率 p の両極限をおさえよう．ただし，ノード数 N に比べて z が大き過ぎると初期ネットワークが 1 次元系とみなせなくなってしまう．そこで，以下では $N \gg z$ の状況を考える．

エッジの張り替えが全くない状況である $p = 0$ のとき，クラスター係数 $C(0)$ は，

$$C(0) = \frac{2\binom{z}{2} + \binom{z}{2}}{\binom{2z}{2}} = \frac{3(z-1)}{2(2z-1)} \tag{2.57}$$

となる．最初の等号の右辺における分子の第 1 項目は対象とするノードの左右それぞれの領域における結合ノード対数を表しており，2 項目は左右の領域にまたがる結合ノード対数を表している．この表式より，クラスター係数がノード数 N に依存しない大きな値をもっていることがわかる．平均ノード間距離も簡単に求めることができる．仮にシステムが 1 次元リングではなく，1 次元チェーンであったとしよう．左端のノードから右端ノードまでのノード間距離は N/z である．それ故，平均ノード間距離は $N/2z$ と概算される．チェーンの両端をつないだ 1 次元リングの最長距離はチェーンの場合の半分になるので，平均ノード間距離も半分になる．したがって，1 次元リングの平均ノード間距離 $\langle l(0)\rangle$ は

$$\langle l(0)\rangle \approx \frac{N}{4z} \tag{2.58}$$

となり，N に比例する．

一方で，$p = 1$ の場合も単純である．全エッジが張り替えられるため，構造は全くのランダムになっている．したがって，$p = 1$ でのネットワークは平均次数が $\langle k\rangle = 2z$ のランダムグラフと一致する．そのため，クラスター係数と平均ノード間距離はそれぞれ，

$$C(1) = \frac{2z}{N} \tag{2.59}$$

$$\langle l(1)\rangle \propto \log N \tag{2.60}$$

で与えられる．

このモデルで明らかにしたいことは，張り替え確率 p を $0 < p < 1$ としたときにスモールワールド性が現れるか否かである．ここまで，N が z よりも十分大きいこと以外に制約を与えていなかったが，この先の議論をするにあたって，z の下限を決めておく必要がある．z があまりにも小さすぎると，エッジの張り替えによってネットワークの連結性が失われてしまう．小さなクラスターに分割されると，平均ノード間距離は発散してしまい，スモールワールド性の議論ができなくなってしまう．連結性の問題はパーコレーション問題と関連しているが，詳細は省略して結果だけ示すと，連結性の担保に必要な条件は $z > \log N/2$ であることがわかっている．したがって，以下の議論では z の範囲を $\log N/2 < z \ll N$ とする．このような制限が結果の本質を変えることはない．

Watts と Strogatz は，上記のモデルを数値的に調べ，平均ノード間距離とクラスター係数のエッジ張り替え確率 p 依存性を求めた．その結果を示したのが図 2.11 である．縦軸は，$p = 0$ のときの平均ノード間距離 $\langle l(0)\rangle$ とクラスター係数 $C(0)$ でそれぞれ規格化されている．横軸が対数プロットになっていることに注意する必要がある．計算条件はノード数 $N = 10^3$ で $z = 2$ であり，平均次数が $\langle k\rangle = 4$ である．図示されている点それぞれに対して 20 サンプ

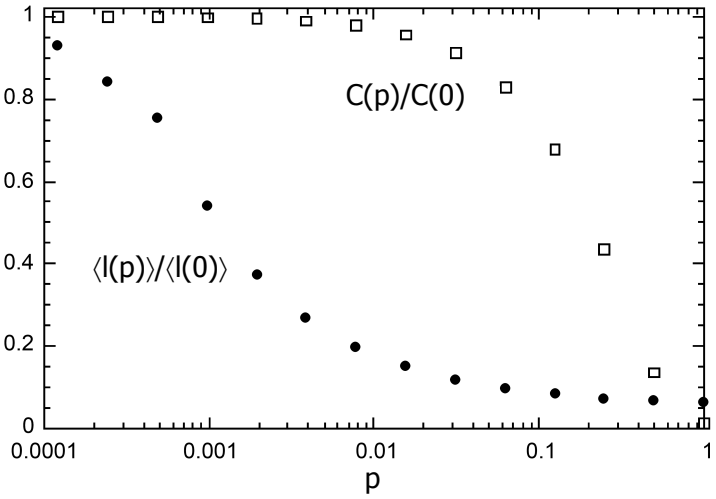


図 2.11: Watts-Strogatz モデルの平均ノード間距離とクラスター係数のエッジ張り替え確率 p 依存性．文献 [38] より引用し，本論文の記法に直したもの．

ルで平均がとられている．図を見るとわかるように，クラスター係数 $C(p)$ は $p \approx 0.01$ 程度まで大きな変化が見られない．一方，平均ノード間距離 $\langle l(p) \rangle$ は p の増加に対して，急激に減少しているのがわかる．$p > 10^{-2}$ において $\langle l(p) \rangle \sim \log N$ となっていそうである．$p \sim 10^{-2}$ のある領域で大きなクラスター係数 $(C(p) \sim N^0)$ を保ちながら $\langle l(p) \rangle \sim \log N$ となることが重要である．この数値計算では明確なことは言えないが，後に Watts-Strogatz モデルの詳細が調べられ，平均ノード間距離が $\langle l \rangle \propto N$ から $\langle l \rangle \propto \log N$ となるクロスオーバー確率 $p_{\rm co}$ は

$$p_{\rm co} \sim \frac{1}{zN} \tag{2.61}$$

で与えられることが明らかにされている [39–42]．また，クラスター係数が $C \sim N^0$ から $C \sim N^{-1}$ へとクロスオーバーする確率は，以下のような計算によって粗く求めることができる．$p = 0$ において存在したある三角形が，$p < 0$ で生き残る確率は三角形を構成するエッジのどれもが張り替えに選出されなかった場合である．この確率は $(1-p)^3$ で与えられる．$p = 0$ ではどのノードの周りにも三角形が $\frac{3}{2}z(z-1)$ 個だけ存在することを考慮すると，クラスター係数 $C(p)$ は，

$$C(p) = \frac{3(z-1)}{2(2z-1)}(1-p)^3 \tag{2.62}$$

で与えられると見積もることができる．この計算が近似である所以は，$p = 0$ において存在していた三角形の生存確率のみに着目しており，張り替えられたエッジが新たな三角形を

作る効果を考慮していない点である．そのため，$p \approx 1$ では式 (2.62) は正しくなく，実際には，$p = 1$ で有限ネットワークのクラスター係数が $C(1) = 0$ となることはない．式 (2.62) をみてわかるように，$(1-p)^3$ は単調な関数であり，$p < 1$ において特徴的な p の値は存在しない．このことは $C(p) \sim N^{-1}$ へのクロスオーバー確率が $p = 1$ であることを意味している．以上の議論により，Watts-Strogatz モデルでは $1/zN \ll p \ll 1$ の領域で $\langle l \rangle \sim \log N$ と $C \sim N^0$ が両立することになり，この範囲でスモールワールド性が発現することになる．N を十分大きくとれば，この領域は非常に広くなり，(対数的な意味で) ほとんど全ての p の値に対してスモールワールド性が現れることになる．

2.5.2 スケールフリー性と Barabási-Albert モデル

現実の多くのネットワークが，ベキ型の次数分布をもつというスケールフリー性を有することを前節で述べた．この構造的特徴の発見者である Barabási と Albert は，同一の論文内で，ネットワークのスケールフリー性の発現メカニズムを説明するモデル (Barabási-Albert モデル:BA モデル) を提案した [27]．BA モデルは，スケールフリー性を説明するネットワーク・モデルの中でもっとも有名なモデルである．彼らは，現実ネットワークがスケールフリー性を獲得するためには 2 つの効果が重要であることに着目した．ひとつは時間とともにノード数が増大すること (成長則) で，もうひとつは次数の大きなノードほど新たなエッジを獲得しやすいこと (優先選択則) である．本節では，BA モデルのアルゴリズムと，それによって作られるネットワークの次数分布関数と統計的性質について説明する．

Barabási-Albert モデル

まず BA モデルのアルゴリズムを説明する．

1. 時刻 $t = 0$ において，ノード数 m_0 の初期ネットワークを用意する．このネットワークは，単連結であればどのような形でもよい．しかし，m_0 は終状態のネットワークのノード数 N に比べて十分小さいとする．

2. 時刻 t において，時刻 $t-1$ のネットワークに m 本のエッジをもった新たなノードを 1 つ参入させる．

3. 新規参入ノードの m 本のエッジのそれぞれを既存ノードに接続する．その際，次のような優先選択則に従って確率的に接続先を選ぶ．すなわち次数 k_i のあるノード i が接

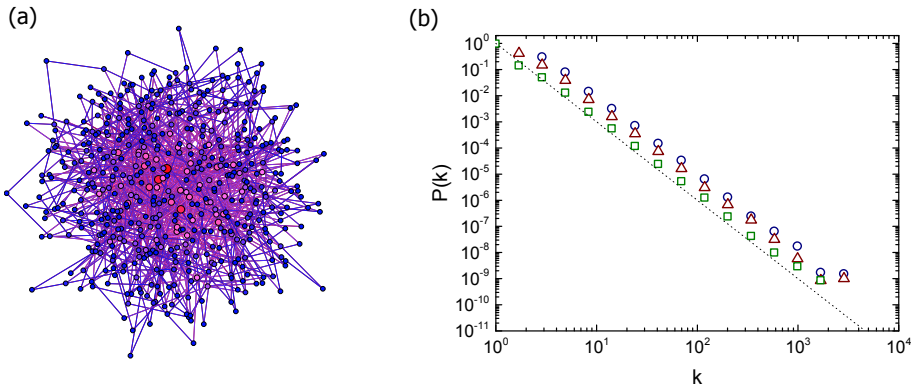


図 2.12: Barabási-Albert モデルのアルゴリズムによって作成したネットワーク (a) とその次数分布関数 (b)．(a) は初期ノード $m_0 = 2$，新規参入ノードのエッジ数 $m = 2$ の下，アルゴリズムに従って $N = 500$ まで成長させたネットワークを可視化したものである．(b) はいろいろなモデル・パラメータの下，ノード数 $N = 10^6$ まで成長させたネットワークの次数分布関数 $P(k)$ を描いたもので，モデル・パラメータはそれぞれ上から (m_0, m) を $(3, 3)$，$(2, 2)$，$(2, 1)$ とした結果に対応している．パネル (b) 内の点線は傾きが -3 の直線で，モデル・パラメータによらず BA モデルのアルゴリズムに従って作られたネットワークがスケールフリー指数 $\gamma = 3$ であることを示唆している．

続先に選ばれる確率 Π_i を

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{2.63}$$

とする．ここで，分母の和は時刻 $t-1$ のネットワークの全ノードに渡ってとられる．また，この m 本のエッジは全て違うノードに接続されるようにする (多重エッジの禁止)．したがって，参入ノードのエッジ本数は $m \leq m_0$ 出なければならない．

4. 2-3 の操作を所望のノード数になるまで繰り返す．

このようなアルゴリズムによって作られるネットワークの構造と，次数分布関数を図 2.12 に示す．図 2.12(a) を見てわかるように，大きな次数をもったハブが現れていることがわかる．また，図 2.12(b) の次数分布関数の形から，ネットワークがスケールフリー性を有していることがわかる．さらに，初期ネットワークの大きさ m_0 や新規参入ノードの次数 m によらず，スケールフリー性を特徴づけるべき指数 γ が $\gamma = 3$ となっているようにみえる．そこで，スケールフリー指数 γ について理論的に考察する．

BA モデルの理論的取扱い：連続体近似

BA モデルの理論的な取り扱い方として，システムを平均場的に取り扱う連続体近似と離散確率過程に基づくマスター方程式を用いる方法がある [43]．ここでは，まず連続体近似について説明する．

時刻 $t = t_i$ に参入したノード i の時刻 $t(\geq t_i)$ における次数を k_i とすると，$t = t_i$ では明らかに

$$k_i(t_i) = m \tag{2.64}$$

である．$t > t_i$ なるある時刻 t において，このノード i に新規参入ノードのエッジがつながる確率は $m\Pi_i$ 本である．したがって，ノード i の次数は平均的に (期待値として)$m\Pi_i$ 本だけ増加する．それ故，$k_i \gg m$ と $t \gg t_i$ という条件の下で次数と時間を連続変数と近似すると，期待値としての次数 k_i の時間変化は，方程式

$$\frac{dk_i}{dt} = m\Pi_i \tag{2.65}$$

に従うことになる．$t \gg 1$ のときネットワークの総次数は $\sum_j k_j \approx 2mt$ と近似できることを考慮し，初期条件 (2.64) の下で方程式 (2.65) を解くと，

$$k_i(t) = m\sqrt{\frac{t}{t_i}} \tag{2.66}$$

となる．これより，次数が時間とともに単調に成長していることがわかる．これを t_i について解きなおすと，

$$t_i = \left(\frac{m}{k_i(t)}\right)^2 t \tag{2.67}$$

である．これを用いて，まず時刻 t においてあるノードの次数が $k_i(t)$ よりも小さい確率 $P[k < k_i(t)]$ を求めよう．次数 $k_i(t)$ よりも小さな次数をもつノード数 $N[k < k_i(t)]$ は，各ノードの次数が時間の単調増加関数であることを考慮すると，時刻 t_i よりも後に参入してきたノード数に等しいので，$N[k_i(t) < k] = t - t_i = t - (m/k_i(t))^2 t$ であることになる．このノード数は，次数分布の累積分布関数 $P[k < k_i(t)]$ と時刻 t でのノード数 $(\approx t)$ の積に等しいので，累積分布関数 $P[k < k_i(t)]$ は，

$$P[k < k_i(t)] = 1 - \left(\frac{m}{k_i(t)}\right)^2 \tag{2.68}$$

となる．したがって，次数分布関数 $P(k)$ は

$$P(k_i(t)) = \frac{dP[k_i(t) < k]}{dk_i(t)} \sim m^2 k_i(t)^{-3} \tag{2.69}$$

となり，初期条件に依らず，スケールフリー指数が $\gamma = 3$ となることがわかる．この計算は $k_i \gg m$ と $t \gg t_i$ を前提としているので，式 (2.69) の結果は次数の大きなところでのみ正しいことに注意する必要がある．

BA モデルの理論的取扱い：マスター方程式

マスター方程式を用いた方法では，次数も時刻も離散変数として扱うため，連続体近似による結果と異なり，低次数領域も含めてより正確な次数分布関数が求められる．Dorogovtsev らは，時刻 t_i に参入したノード i が時刻 t において次数 k である確率 $p(k, t_i, t)$ を導入し，これを支配するマスター方程式を解析した [47]．m 本のエッジをもった新規参入ノードが入ってきたとき，次数 k のノードがエッジを獲得する確率は $m\Pi_k \approx k/2t$ である．したがって，確率 $p(k, t_i, t)$ を記述するマスター方程式は

$$p(k, t_i, t+1) = \frac{k-1}{2t} p(k-1, t_i, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) p(k, t_i, t) \tag{2.70}$$

となる．これを解くことによって次数分布関数 $P(k)$ を求めることができるが，ここでは，ネットワークの全ノード数が n であるときにあるノードが次数 k である確率 $P(k, n)$ を支配するマスター方程式を直接考える．この確率はノード数が n となる時刻における次数分布関数に等しい．ノード数 n の状況下において，次数 k のノードのうちいづれかのノードが新たなエッジを 1 本獲得する確率 Π_k は，優先選択則を表す式 (2.63) を考慮すると，

$$\Pi_k = \frac{nkP(k, n)}{n \sum_{k'} k' P(k', n)} = \frac{kP(k, n)}{2m} \tag{2.71}$$

となる．ここで $2m$ はこのネットワークの平均次数を意味している．新規参入ノードはエッジを m 本有しているので，各時刻において次数 k のノードが m 本の中のいづれかのエッジを獲得する期待値は，$m\Pi_k = kP(k, n)/2$ となり，m に依らない．これを用いて，次数分布関数 $P(k, n)$ を支配するマスター方程式を考えると，

$$(n+1)P(k, n+1) - nP(k, n) = \frac{1}{2}(k-1)P(k-1, n) - \frac{1}{2}kP(k, n) \quad \text{for } k > m \tag{2.72}$$

$$(n+1)P(m, n+1) - nP(m, n) = 1 - \frac{1}{2}mP(m, n) \quad \text{for } k = m \tag{2.73}$$

となる．この時間発展方程式の定常解 $P(k, n+1) = P(k, n) = P(k)$ は簡単に求めることができる．式 (2.73) より，$P(k)$ は

$$P(k) = \frac{1}{2}(k-1)P(k-1) - \frac{1}{2}kP(k) \tag{2.74}$$

を満たす．これより，

$$P(m) = \frac{2}{m+2} \tag{2.75}$$

$$P(k) = \frac{k-1}{k-2}P(k-1) \tag{2.76}$$

という漸化式が求まる．これよりただちに，

$$P(k) = \frac{(k-1)(k-2)\cdots m}{(k+2)(k+1)\cdots(m+3)}p(m) = \frac{2m(m+1)}{(k+2)(k+1)k} \tag{2.77}$$

と次数分布関数が得られる．式 (2.77) より，高次数領域で $P(k) \sim k^{-3}$ のスケールフリー・ネットワークになっていることがわかる．

Dorogovtsev らの上記の仕事と同時期に，独立して Krapivsky らも BA モデルの次数分布関数を導出している [48]．彼らは時刻 t に次数が k であるノード数 $N_k(t)$ の時間発展を記述するレート方程式,

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = \frac{m}{\sum_{k'} k' N_{k'}(t)}[(k-1)N_{k-1}(t) - kN_k(t)] + \delta_{km} \tag{2.78}$$

を解析することで式 (2.77) を導出している．様々な手法によって BA モデルの次数分布関数は求められているが，スケールフリー指数が $\gamma = 3$ という結果はもちろん変わらない．

BA モデルの統計的性質

BA モデルによって作成されるネットワークが有する統計的性質を概観する．まず平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ はノード数 N に対して,

$$\langle l \rangle \sim \frac{\log N}{\log\log N} \tag{2.79}$$

であることが知られている [44]．BA モデルによって作成されるネットワークはランダムグラフ（平均ノード間距離は $\langle l \rangle \sim \log N$）に比べてコンパクトなネットワークであることがわかる．また，同時確率 $P(k,k')$ は

$$\begin{aligned} P(k,k') = &\frac{4(k'-1)}{k(k+1)(k+k')(k+k'+1)(k+k'+2)} \\ &+ \frac{12(k'-1)}{k(k+k'-1)(k+k')(k+k'+1)(k+k'+2)} \end{aligned} \tag{2.80}$$

で与えられる [49]．ここで同時確率が非対称であるのは，文献 [49] 内で BA モデルを理論的に扱う際に有向ネットワークに拡張することで計算を実行しているためである．同時確率

からわかるように BA モデルによって作られるネットワークは次数相関を有している．しかしながら，正負の次数相関の意味では，$N \to \infty$ において Pearson 相関係数が $r \to 0$ となることが知られている [6]．平均クラスター係数についても調べられている．BA モデルの平均クラスター係数は，

$$C = \frac{m-1}{8N}(\log N)^2 \tag{2.81}$$

であり [45, 46]，ランダムグラフの平均クラスター係数 $C \approx N^{-1}$ よりも緩やかな N 依存性をもっていることがわかる．

2.5.3 一般化 BA モデル

Barabási と Albert によって BA モデルが提唱されて以来，BA モデルを一般化したモデルが数多く提案されている．BA モデルにおける最大の問題は，モデル・パラメータに一切依存せず，スケールフリー指数が $\gamma = 3$ となってしまうことであった．この点を改善するモデルも多く提案されてきた．本節から 2.5.5 節では，代表的ないくつかのモデルについて説明する．

Dorogovtsev ら [47] と Krapivsky ら [49] は次のようなモデルの修正を行った．次数 k のノードが新たなエッジを獲得する確率を，BA モデルのように次数 k に比例させるのではなく，$k + k_0$ に比例させるようにモデル変更をした．ここで k_0 は定数であり，各次数のノードのエッジ獲得確率を一定分底上げ (底下げ) させていることに対応する．k_0 の取り得る範囲は $-m < k_0 < \infty$ であり，負の値も許されることに注意する．k_0 が正の値のとき，高次数ノードのエッジ獲得確率と低次数ノードのエッジ獲得確率の違いは，BA モデルに比べて小さくなる．したがって，k_0 は優先選択性を弱める効果をもたらす．一方 k_0 が負の値のときは，エッジ獲得確率の違いが大きくなるため，優先選択性を強める効果を与える．優先選択性はスケールフリー性の起源のひとつであるから，k_0 を変化させることでスケールフリー指数 γ の値を変えることができると考えられる．このことはマスター方程式から定量的に確認することができる．式 (2.73) との類似から定常状態の方程式は，

$$P(m) = 1 - \frac{m^2}{2m + k_0}P(m) \tag{2.82}$$

$$P(k) = \frac{m}{2m + k_0}[(k-1)P(k-1) - kP(k)] \tag{2.83}$$

となる．これから $P(k)$ に対する漸化式を解けば，次数分布関数

$$P(k) = \frac{(k-1)\cdots m}{(k+2+k_0/m)\cdots(m+3+k_0/m)}P(m) = \frac{\mathrm{B}(k, 3+k_0/m)}{\mathrm{B}(m, 2+k_0)} \tag{2.84}$$

が得られる．ここで，$\mathrm{B}(a,b)$ はベータ関数であり，ガンマ関数と $\mathrm{B}(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ なる関係で結ばれている．ベータ関数 $\mathrm{B}(a,b)$ が a の大きなところでべき関数に漸近することを考えれば，この一般化された BA モデルの次数分布関数のスケールフリー指数は $\gamma = 3+k_0/m$ となることがわかる．このことより，確かに k_0 の値の違いが，上で述べたような効果として次数分布関数のスケールフリー指数に影響を与えていることがわかる．現実ネットワークの多くが $2 < \gamma < 3$ のネットワークであることを考えると，このモデルは $-1 < k_0/m < 0$ のときに現実と対応するということになる．

これまでに紹介したスケールフリー性を獲得する優先選択則に基づく成長モデルは，個々のノードの次数以外の個性を一切考えていないため，古参ノードよりも十分に時間が経ったのちの新規参入ノードが古参ノードを追い抜いてハブへと成長することはない．しかしながら，成長を伴う現実ネットワークにおいて，必ずしもネットワーク内の古参ノードのみがハブへと成長するわけではないし，新参ノードに次数を追い抜かれることもある．この点を考慮し，各ノードがエッジを獲得する要因として，次数以外の個性を導入した優先選択則，

$$\Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j} \tag{2.85}$$

が提案されている [50, 51]．ここで，η_i はノード i が有する個性である．各ノードのエッジ獲得確率は次数に比例するが，比例係数がノードごとに違うため，上述した古参ノードとそれよりも新参ノードの間で次数の意味での逆転が起きうることになる．このモデルは適応度モデルと呼ばれている．η が分布関数 $\rho(\eta)$ に従っているとき，定常状態に達した次数分布関数は

$$P(k) \sim C \int \frac{\rho(\eta)}{\eta} \left(\frac{m}{k}\right)^{1+C/\eta} d\eta \tag{2.86}$$

となることが知られている [50]．ここで式 (2.86) の C は，

$$\int_0^{\eta_{\max}} \rho(\eta) \frac{\eta}{C-\eta} d\eta = 1 \tag{2.87}$$

で決まる定数であり，$\eta_{\max}$ は η の取りうる最大値である．式 (2.86) に示したように，分布関数 $\rho(\eta)$ の形によって次数分布関数の形は大きく変化する．スケールフリー性を獲得することもあれば，一部のノードが他の全てのノードとエッジをもつ星形グラフのようなネットワークになることもある [51]．

2.5.4 適応度モデル：平衡系

本節では，前節の終わりで述べた適応度モデルを成長を伴わない平衡モデルに適用する．現実の知人関係ネットワークは，クラスの人数や所属するクラブの人数，住んでいる街の人

ロなど概ね一定の値を有している．平衡状態にあるネットワークにおいて友人関係が生まれるかどうかは，二人の個人の魅力によって決まると考えられる．ここで魅力とは，個人の資質や人柄，富などの個々人を特徴づける属性である．一般に，富は定量化することは簡単だが，人柄などといった属性を定量化することは容易くない．以下では，これらの属性が定量化できたとして議論を進める．あらかじめ用意された N 個のノードはそれぞれ定量化された属性値（適応度 η）を有しており，各ノード間の適応度の関係に応じてエッジを張るという状況を考える．したがって，このモデルにおいてネットワークの次数分布関数を決定する要因は，各々のノードがどのような適応度を有するか [適応度の分布関数 $\rho(\eta)$] と，二つのノード ij の適応度 η_i と η_j がどのような関係にあるときにエッジを張るかという二点である．ここで後者は，適応度 η_i と η_j の二変数関数で決まるエッジ確率と言えるので，この確率を $p(\eta_i, \eta_j)$ とすると，適応度モデルのアルゴリズムは以下のようになる．

1. N 個のノードを用意する．
2. 各ノード i に適応度分布 $\rho(\eta)$ に従って，適応度 η_i を割り振る．
3. 各ノード対 ij 間に $p(\eta_i, \eta_j)$ の確率でエッジを張る．

最も単純な場合であるエッジ確率 $p(x, y) = p$ は，ランダムグラフに等しいため，平衡系における適応度モデルはランダムグラフの自然な拡張であるといえる．一方でこのモデルで形成されたネットワークはランダムグラフに見られない特徴を示す．それは適応度分布 $\rho(\eta)$ とエッジ確率 $p(x, y)$ の取り方によって，形成されたネットワークは次数相関をもち得ることである．母関数を用いることで $\rho(\eta)$ と $p(x, y)$ を決定せず様々な統計量が計算できる [54]．いくつかの統計量について結果のみをあげると以下のようになる．

$$P(k) = \int_\tau q(k|\eta)\rho(\eta)d\eta \tag{2.88}$$

$$\langle k \rangle = N \iint_\tau \rho(\eta)\rho(\eta')p(\eta, \eta')d\eta d\eta' \tag{2.89}$$

$$\langle k^2 \rangle = N \iint_\tau \rho(\eta)\rho(\eta')p(\eta, \eta') \left[1 - p(\eta, \eta')\right] d\eta d\eta' \tag{2.90}$$

$$+ N^2 \iint_\tau \rho(\eta) \left[\int_\tau \rho(\eta')p(\eta, \eta')d\eta'\right]^2 d\eta \tag{2.91}$$

$$k_{\rm nn} = 1 + \frac{1}{P(k)} \int_\tau q(k|\eta)\rho(\eta)K_{\rm nn}(\eta)d\eta \tag{2.92}$$

ここで積分区間 τ は，$\rho(\eta)$ の取りうる全区間に対応する．また，$K_{\rm nn}(\eta)$ は適応度 η のノードの隣接平均次数で

$$K_{\rm nn}(\eta) = N \int_\tau \frac{\int_\tau \rho(\eta'')p(\eta', \eta'')d\eta''}{\int_\tau \rho(\eta'')p(\eta, \eta'')d\eta''} \rho(\eta')p(\eta, \eta')d\eta' \tag{2.93}$$

で与えられ，条件付き確率 $q(k|\eta)$ は

$$q(k|\eta) = \frac{[\lambda(\eta)]^k e^{-\lambda(\eta)}}{k!} \tag{2.94}$$

で与えられる適応度 η のノードが k 本のエッジを獲得する確率である．式 (2.94) において $\lambda(\eta) = N \int_\tau \rho(\eta')p(\eta, \eta')d\eta'$ と置いた．

このモデルによって形成されたネットワークがスケールフリー性を獲得するための必要十分条件はわかっていない．スケールフリー性を獲得する適応度分布 $\rho(\eta)$ とエッジ確率 $p(x, y)$ の組み合わせとして，$\rho(\eta)$ がベキ関数であり，$p(x, y)$ が 2 つのノードの適応度の積に比例する確率という組み合わせが知られている [52, 53]．次数分布関数などの統計量の詳細は文献 [52–54] を参照されたい．

2.5.5 一般化ランダムグラフ

本節では，任意の次数分布関数を有しており，その他の構造的性質はランダムグラフのそれと同じである一般化ランダムグラフ [55–57] について簡単に述べる．2.4.3 節で，多くの現実ネットワークはスケールフリー性を有することを述べた．スケールフリー性の強弱は，複雑ネットワークの構造的頑強性やネットワーク上のダイナミクスの振舞いに大きな影響を与えるため，興味のある性質あるいは現象とスケールフリー構造の関係を明らかにする研究が盛んに行われている．しかしながら，これまでに述べたネットワーク・モデルによって作成されるネットワークは，スケールフリー性に加えてスモールワールド性や次数相関が発現する（例えば 2.5.2 節参照）．そのため，これらのネットワーク・モデルから作られたネットワークを用いてネットワーク上のダイナミクスなどを説明しようとすると，そのネットワークのどのような構造的性質によって与えられた結果かが判然としなくなってしまう．一般化ランダムグラフを用いるとこのような問題が生じないため，最も広く扱われているネットワーク・モデルである．一般化ランダムグラフの作成方法は次の通りである．まず N 個のノードを用意する．各々のノードに所望の次数分布関数 $P(k)$ に従って次数 k を割り振る．すなわち，各々のノードは割り振られた本数分のスポークをもつことになる．次に無作為に選んだ 2 本のスポークを結ぶことでエッジを作る．この操作をスポークがなくなるまで繰

り返す．このようにしてできたネットワークは，エッジ形成がランダムであるため，次数相関をもたないネットワークである．しかし，一般化ランダムグラフを作る際，次の二つのことに注意が必要である．一つは握手の補題 [式 (2.3)] より総スポーク本数は偶数でなくてはならないことである．次数の総和が奇数になってしまった場合は，適当に選んだノードのスポーク本数を 1 本変化させることで，式 (2.3) を満たすようにすればよい．また，無計画なエッジ形成によって自己ループや多重エッジが避けられなくなることがある．スポークの本数が多いノードのスポークとランダムに選んだスポークによってエッジを作成することで，自己ループや多重エッジが発生する確率を減らすことができる．本研究では，一般化ランダムグラフを用いる．どのような次数分布関数に従う一般化ランダムグラフを用いるかをここで述べることはせず，適宜述べることにする．

第3章　複雑ネットワークにおけるパーコレーション理論

3.1　複雑ネットワークとパーコレーション

2.4.1 節で述べたランダムグラフや，2.5.4 節で述べた平衡系における適応度モデルは，あらかじめ用意された N 個のノードの各ノード対間に何らかの規則に従ってエッジを配置することでネットワークが形成されるモデルである．これらのネットワーク・モデルにおいては，エッジが張られる確率の増大に伴って，ネットワーク内に存在する連結成分の大きさも増大すると考えられる．ランダムグラフの場合，エッジ確率 p と隣接平均次数 $k_{\rm nn}$ の間に，

$$k_{\rm nn} = 1 + pN \tag{3.1}$$

という関係が成立しており，熱力学極限 ($N \to \infty$) において $k_{\rm nn} \geq 2$ であることは，ネットワーク内に無限に大きな連結成分が存在している状況に対応しそうであるということを 2.4.1 節で述べた．これはエッジ確率 p が或る閾値 $p_{\rm c}$ を超えるとネットワーク・サイズに比例するような巨大連結成分が出現する，いわゆるパーコレーション転移である．また，この逆過程である，与えられたネットワーク上からノードやエッジを取り去る過程はネットワークの構成要素の損傷に対応づけられるため，どの程度の損傷によって巨大な連結成分が失われるかというネットワークの頑強性の問題もパーコレーション問題である．我々の社会は様々なネットワークが正常に機能していることを前提としているため，ネットワークの頑強性を理解することは非常に重要である．パーコレーション問題はこれまでに，不規則構造や臨界現象を理解するための基礎理論として研究が盛んにされている．特に格子上のパーコレーション問題は非常によく調べられている．パーコレーションの一般論は文献 [58] が詳しい．本論文では，複雑ネットワークのパーコレーションについて述べる．次節で，ランダムグラフの巨大連結成分が出現する閾値が $k_{\rm nn} = 2$ で与えられることを解析的に示す．さらに 3.3 節では，スケールフリーネットワークの頑強性を「ネットワーク上のパーコレーション問題」から論じ，3.4 節で次数相関がある場合のパーコレーションについて論じる．

3.2 母関数とパーコレーション

任意の次数分布関数 $P(k)$ に従う (広義の) ランダムグラフのパーコレーション問題は，母関数を用いた解析手法によって調べられ，臨界点や巨大連結成分のサイズが求められている [57]．本節では，ネットワークのパーコレーション転移の性質を母関数を用いて評価する．2.3 節で述べたように，母関数は次数相関のないツリー構造のネットワークに対して効力を発揮する．そのため，以下でもそのようなネットワークを考えることにする．

次数分布関数 $P(k)$ の母関数は

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k \tag{3.2}$$

であり，任意抽出したエッジの一方の端のノードの残り次数が k である確率 $R(k)$ の母関数は

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} R(k)x^k & (3.3)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)P(k+1)}{\langle k \rangle} x^k \\ &= \frac{G_0^{'}(x)}{G_0^{'}(1)} & (3.4) \end{aligned}$$

であった．ここで，任意抽出したエッジの一端から先に拡がるノード数の分布に対する新たな母関数 $H_1(x)$ を導入する．ただし，ネットワークの連結成分は常に有限であるようなネットワークを考えるものとする．したがって，元の分布の規格化条件より，$H_1(1) = 1$ となる．ネットワークがツリー構造をしていることを考慮すると，母関数 $H_1(x)$ は図 3.1 のような描像に対応付けられる．図 3.1 を式で表せば,

$$H_1(x) = xR(0) + xR(1)H_1(x) + xR(2)[H_1(x)]^2 + \cdots \tag{3.5}$$

となる．式 (3.5) と式 (3.4) を比較すれば,

$$H_1(x) = xG_1\left(H_1(x)\right) \tag{3.6}$$

と書けることがわかる．この母関数 $H_1(x)$ を使えば任意に抽出したノードが属するクラスターサイズ s の分布に対する母関数 $H_0(x)$ は図 3.2 のように表せるので,

$$H_0(x) = xG_0\left(H_1(x)\right) \tag{3.7}$$

となる．与えられた次数分布関数 $P(k)$ から $G_0(x)$，$G_1(x)$，$H_1(x)$ を計算し，式 (3.7) で与

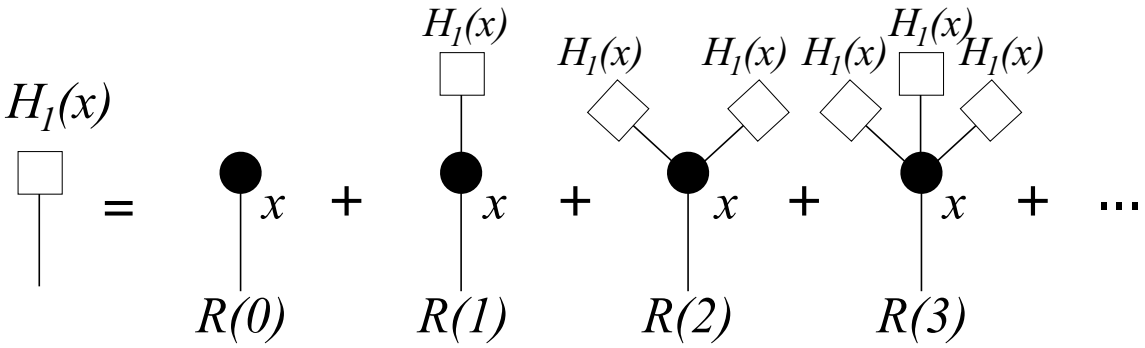


図 3.1: 母関数 $H_1(x)$ に対応するネットワークの図．黒丸がノード，白四角がエッジの先の連結成分を表している．$R(k)$ はエッジを辿って行き着くノードの残り次数が k である確率を表している．

えられる母関数 $H_0(x)$ を s 回微分することでクラスターサイズ分布 n_s を求めることができる．しかしながら，超越方程式である式 (3.6) を解析的に解くことは事実上不可能である．

クラスターサイズ分布の解析的な評価は難しいが，平均値を求めることは可能である．任意抽出したノードが属するクラスターの平均サイズ $\langle s \rangle$ は，母関数 $H_0(x)$ から

$$\langle s \rangle = H_0'(1) = 1 + G_0'(1)H_1'(1) \tag{3.8}$$

と求められる．母関数 $H_1(x)$ の平均は

$$H_1'(1) = 1 + G_1'(1)H_1'(1) \tag{3.9}$$

によって与えられるので，

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{G_0'(1)}{1 - G_1'(1)} \tag{3.10}$$

を得る．式 (3.10) は明らかに

$$G_1'(1) = 1 \tag{3.11}$$

で発散する．この条件がパーコレーション転移点を与える．式 (3.11) に式 (3.2) と式 (3.4) を代入して，整理すると，

$$\sum_k k(k-2)P(k) = 0 \tag{3.12}$$

あるいは，

$$\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = 2 \tag{3.13}$$

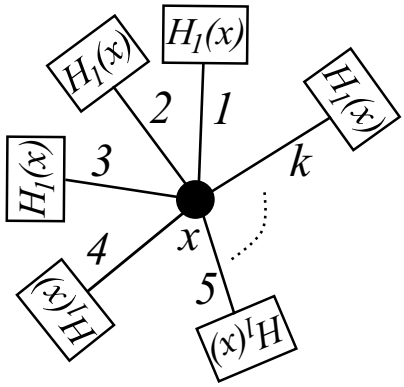


図 3.2: 母関数 $H_0(x)$ に対応する図．任意抽出したノードから出る各エッジに母関数 $H_1(x)$ で表現される構造がつながっている．

を得る．式 (3.13) の左辺は，次数相関がない場合の隣接平均次数である．すなわち，式 (3.13) は，任意抽出したノードの先のノードが平均して 2 本エッジをもっていることを意味している．辿ってきたエッジを除いて平均してもう 1 本以上のエッジがあればネットワークはどこまでもつながっており，システムサイズに比例するような大きな連結成分 (巨大連結成分) が存在することとなる．

最後に，秩序相における巨大連結成分の相対的な大きさ S を見積もることを考える．秩序相におけるクラスターサイズ分布の母関数 $H_0(x)$ には巨大連結成分からの寄与は含まれない．このことは，元の分布関数が規格化条件を満たさない，すなわち $H_0(1) < 1$ を意味している．$H_0(1)$ の値は，巨大連結成分に属さないノード割合に等しいので，

$$H_0(1) = 1 - S \tag{3.14}$$

となる．これより，巨大連結成分の相対的な大きさ S は，式 (3.6) と式 (3.7) を用いて，

$$S = 1 - G_0(u) \tag{3.15}$$

により計算することができる．ここで，$u \equiv H_1(1)$ であり，

$$u = G_1(u) \tag{3.16}$$

の非負の実数解として求めることができる．

ランダムグラフの場合

Erdös-Rényi ランダムグラフに上記の議論を適用してみよう．この場合，次数分布関数に対する母関数は

$$G_0(x) = e^{\langle k \rangle (x-1)}$$

で与えられることを 2.4.1 節でみた．任意抽出したエッジの一端のノードの残り次数分布に対する母関数 $G_1(x)$ は式 (3.4) から直ちに

$$G_1(x) = e^{\langle k \rangle (x-1)} \tag{3.17}$$

と求まる．これより，$G_1'(x) = \langle k \rangle e^{\langle k \rangle (x-1)}$ となるから，パーコレーション転移点の条件である $G_1'(1) = 1$ より，

$$\langle k \rangle = 1 \tag{3.18}$$

すなわち，

$$p_{\mathrm{c}} = \frac{1}{N} \tag{3.19}$$

が臨界点であることがわかる．したがって臨界点を隣接平均次数で表現すると

$$k_{\mathrm{nn}}^{\mathrm{c}} = 2 \tag{3.20}$$

となり，2.4.1 節で述べた推論が正しいことがわかる．また，式 (3.15) と式 (3.16) を使って，

$$S = 1 - e^{-\langle k \rangle S} \tag{3.21}$$

という超越方程式を解くことで $p > p_{\mathrm{c}}$(または $\langle k \rangle > 1$) での巨大連結成分の相対サイズを得ることができる．さらに，平均クラスターサイズ $\langle s \rangle$ は，式 (3.10) から，

$$\langle s \rangle = \frac{1}{1 - \langle k \rangle + \langle k \rangle S} \tag{3.22}$$

によって与えられる．これら 2 つの式を数値的に解くことによって，巨大連結成分の大きさ S と平均クラスターサイズ $\langle s \rangle$ の平均次数 $\langle k \rangle$ 依存性を示したのが図 3.3 である．

3.3　ネットワーク上のパーコレーションと頑強性

多くの現実ネットワークはノードとノードの大域的なつながりによって，その機能を実現している．そのためネットワークからノードが取り去られると，ネットワークの機能に影響が現れると考えられる．ノード除去によってノード対間の距離やネットワークの直径，平均

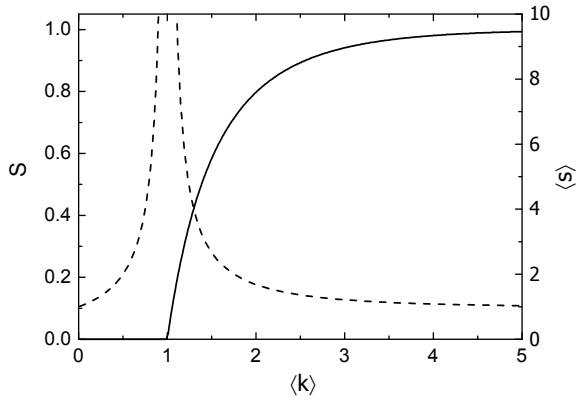


図 3.3: ランダムグラフの巨大連結成分の大きさ S(左軸:実線) と平均クラスターサイズ $\langle s\rangle$(右軸:破線) の平均次数 $\langle k\rangle$ 依存性．式 (3.21) の超越方程式を数値的に解くことで，巨大連結成分の大きさを求め，式 (3.22) より平均クラスターサイズを計算している．臨界平均次数 $\langle k\rangle = 1$ において巨大連結成分が現れ，平均クラスターサイズが発散していることがわかる．

ノード間距離といったネットワークの特徴量が大きくなることが予想される．多くのノードを取り去ったり，連結性に重要なノードを取り去ると，ノード ij 間をつなぐ経路がなくなってしまうことも起きうる．このような分断が起きてしまうと，ij 間のやり取りはもはや不可能である．

Albert らは 2 つの現実のネットワーク (インターネットと WWW) からノードを取り去ることで，スケールフリー・ネットワークの平均ノード間距離がどのような影響受けるかを調べた [59]．彼女らはそれぞれのネットワークから，ランダムにノードを取り去った場合と，次数の高い順にノードを取り去った場合に，平均ノード間距離がどのように変化するかを調べた（図 3.4）．図 3.4 からわかるように，ランダムにノードを取り去った場合には，ネットワークの平均ノード間距離がほぼ変化していない．このことはインターネットや WWW がランダムなノードの削除に対して非常に頑強であることを意味している．一方で，高次数ノードから取り去った場合，わずか 1%ほどのノード削除によって平均ノード間距離が 2 倍程度に大きくなっていることがわかる．これらのネットワークは，高次数側からのノード削除に対して非常に大きな影響を受けており，たった数%のノード削除でノード対間のつながりが途絶えてしまい，ネットワークが崩壊していることを意味している．

このようなノード除去の過程に対してネットワークがどの程度耐えられるかというネットワークの頑強性を理解することは，ネットワークの安定な機能維持を前提としている我々にとって非常に重要であるため，ネットワークの頑強性に関して盛んな研究がされている．頑

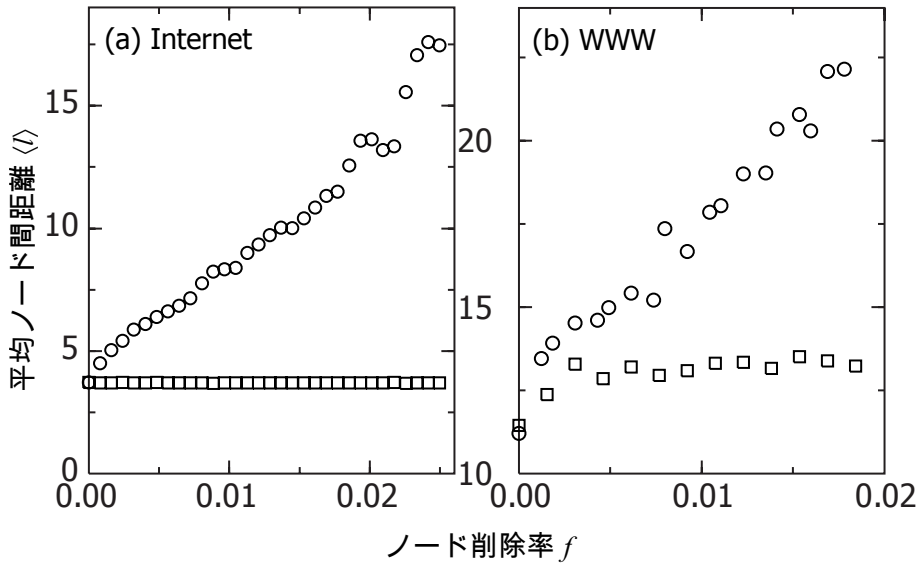


図 3.4: インターネット (a) と WWW(b) からノードを取り去ったときの，平均ノード間距離をノードを取り去った割合 (ノード削除率) の関数として描いたもの．それぞれの図の□のシンボルがランダム削除に対する結果，○のシンボルが高次数ノードから順に取り去ったときの結果にそれぞれ対応する．選択的削除では最大次数のノードから順にひとつひとつノードを除去している．図は文献 [59] を基に本論文の記法に整えたものである．

強性を評価する指標として，母体となるネットワークからノード（エッジ）を除去することでネットワークの大域的な連結性が消失する点，すなわちパーコレーション転移点が最もよく用いられている．これまでに述べたような母体構造からノードを取り去る過程は「ネットワーク上のパーコレーション」と呼ばれている．本節では，ネットワークの頑強性の問題をパーコレーション問題として捉えることでこれまでに得られている統計力学的知見について述べる．まず，ランダムにノードを除去する過程に対するネットワークの頑強性について述べ，次いで高次数ノードを順に取り除く過程に対するネットワーク頑強性について述べる．さらにパーコレーション転移点近傍におけるネットワークの臨界的振る舞いを概観する．

3.3.1 ランダム故障

ネットワークからランダムにノードを取り去る過程 (従来の物理学の言葉でいえばサイトパーコレーション過程) をランダム故障と本論文では呼ぶことにする．何故なら，このようなパーコレーション過程は，インターネットのルーターなどのランダムな故障に対応してい

るからである．次数相関のない複雑ネットワーク上のパーコレーション問題を理論的に扱ったのは Cohen らが最初である [60]．彼らの議論に沿ってランダム故障に対するネットワークの頑強性を評価する．

次数相関のないネットワークのパーコレーション転移点は，転移点におけるネットワークがツリー構造をもっていれば，

$$\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} = 2 \tag{3.23}$$

で与えられることを前節で導いた．ここでは，母体となるネットワークから一定割合 p だけノードをランダムに除去する過程を考えているので，式 (3.23) の平均 $\langle\cdots\rangle$ はノード除去後のネットワークに対してとられる．ノード除去後のネットワークの次数分布関数は自明ではないので，母体となるネットワークの次数分布関数を用いて臨界条件を書き直す必要がある．そこで，母体ネットワークとノード除去後のネットワークを明確に区別するため，母体となるネットワークを G，ノードを除去したのちのネットワークを g として，平均などの統計量に $\langle\cdots\rangle_G$ あるいは $\langle\cdots\rangle_g$ と添え字をつけることにする．

次数分布関数 $P_G(k)$ に従う母体のネットワーク G から確率 p でランダムにノードを除去してできたネットワーク g の次数分布関数 $P_g(k)$ を考える．ネットワーク g 内の或るノード i の次数が k であるためには，母体 G 内でのノード i の次数が $k'(\geq k)$ であり，i の k' 個の隣接ノード中の $k'-k$ 個が確率 p で除去され，残り k 個が除去されずにいる場合である．k' は $k'\geq k$ であればどのような値でもよいことや，母体 G 内でのノード i の次数が k' である確率が $P(k')$ であることを考慮すると，ノード除去後のネットワーク g の次数分布関数 $P_g(k)$ は母体のネットワーク G の次数分布関数 $P_G(k)$ を用いて，

$$P_g(k) = \sum_{k'=k}^{\infty} P_G(k')\binom{k'}{k}p^{k'-k}(1-p)^k \tag{3.24}$$

と書ける．この次数分布関数の，1 次モーメントと 2 次モーメントが

$$\langle k\rangle_g = \langle k\rangle_G(1-p) \tag{3.25}$$

$$\langle k^2\rangle_g = \langle k^2\rangle_G(1-p)^2 + \langle k\rangle_G p(1-p) \tag{3.26}$$

と計算される．したがって，転移点を与えるランダム故障確率 $p_{\rm c}$ は式 (3.23) から，母体 G の統計量を用いて，

$$p_{\rm c} = 1 - \frac{1}{\dfrac{\langle k^2\rangle_G}{\langle k\rangle_G} - 1} \tag{3.27}$$

で与えられることになる．この式から，臨界確率 p_c は母体ネットワークの 1 次および 2 次モーメントのみによって決まることがわかる．さらに言えば，母体 G の隣接平均次数 k_{nn} のみによって p_c は決まることになる．

スケールフリー性を有するネットワークのランダム故障に対する頑強性を評価しよう．式 (3.27) から明らかなように，2 次モーメントが発散するようなネットワークの臨界確率は $p_c = 1$ である．したがって，スケールフリー指数が $2 < \gamma \leq 3$ のネットワークは $p_c = 1$ となる．これは，ほぼ全てのノードを取り除かない限り，巨大連結成分が消失しないことを意味しており，ネットワークが極めて頑強であることを示している．

3.3.2 ターゲット攻撃

戦争やテロによる攻撃を想定し，最大次数から順にノード（とそのノードの全てのエッジ）を取り去る過程をターゲット攻撃と呼ぶ．この過程は，ハブからワクチン投与することによる感染症の防疫にも対応している．ターゲット攻撃によるネットワーク上のパーコレーション問題は，Callaway ら [61] と Cohen ら [62] によって独立に理論解析が行われた．ここでは，Cohen らの手法にならってターゲット攻撃によるネットワーク上のパーコレーション転移を論じる．

3.3.1 節で述べた方法と同様に，母体ネットワーク G とターゲット攻撃を受けたのちのネットワーク g の間の関係から転移点を見積もることを考える．母体のネットワーク G に次数相関がないとき，ネットワーク g も次数相関は現れないため（証明は文献 [63]），前節の式 (3.23) によってパーコレーション転移点を評価することができる．しかしながら，ターゲット攻撃は高次数ノードを選択的に除去する過程であるため，母体のネットワーク G から高次数ノードを p の割合だけノードを取り去ることになり，式 (3.24) はターゲット攻撃後のネットワーク g の構造を表していない．ターゲット攻撃を次のように考えることによって，エッジのランダム除去のパーコレーション問題と考えることができる．母体のネットワーク G が次数分布関数

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \qquad k = m, m+1, \cdots, K \tag{3.28}$$

に従うとする．ここで m と K は，それぞれ最小次数と最大次数である．高次数ノードを割合 p だけ取り除く過程は，取り除かれるノードから出るエッジをすべて取り去ることに等し

いので，ランダムに抽出したエッジが取り去られる確率を $\tilde{p}$ とすると，この確率は

$$\tilde{p} = \sum_{k=\tilde{K}}^{K} \frac{kP(k)}{\langle k \rangle_G} \tag{3.29}$$

と書くことができる．ここで，$\tilde{K}(< K)$ はターゲット攻撃後のネットワーク g の最大次数である．母体ネットワーク G の次数が $\tilde{K} < k \leq K$ であるノード集合 (取り除かれるノード集合) を V，これらの高次数ノードのエッジ集合 E を考える．ターゲット攻撃後のネットワーク g は母体 G から V と E を引いたものに等しい．母体 G からノード集合 V のみを除去したネットワークを g' とする．g は g' からエッジ集合 E を取り除いたものに等しいが，母体 G に次数相関がないため，g' からエッジ除去確率 $\tilde{p}$ に従ってランダムにエッジを除去したネットワークの統計的性質とターゲット攻撃後のネットワーク g の統計的性質とは等しくなる．したがって，ターゲット攻撃によるネットワーク上のパーコレーション問題は，確率 $1-\tilde{p}$ でエッジを占有するボンド・パーコレーション問題に帰着され，式 (3.27) がそのまま使えることになる．ただし，式 (3.27) の臨界ノード除去確率 $p_{\rm c}$ はエッジ除去確率 [式 (3.29)] に置き換えられ，エッジ占有を行う母体ネットワークは g' であり最大次数は $\tilde{K}$ である．これらの点を考慮すると，ターゲット攻撃によるパーコレーション転移点 $\tilde{p}_{\rm c}$ は，方程式

$$\tilde{p}_{\rm c} - 2 = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} m \left[\left(\frac{\tilde{K}}{m} \right)^{3-\gamma} - 1 \right] \tag{3.30}$$

の解として与えられる．式 (3.30) の計算において，

$$\begin{aligned} \langle k \rangle_{g'} &= \int_m^{\tilde{K}} k P_{g'}(k) dk \\ &= \frac{c}{2-\gamma} (\tilde{k}^{2-\gamma} - m^{2-\gamma}) \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle_{g'} &= \int_m^{\tilde{K}} k^2 P_{g'}(k) dk \\ &= \frac{c}{3-\gamma} (\tilde{k}^{3-\gamma} - m^{3-\gamma}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

を用いており，c はネットワーク g' の次数分布関数の規格化定数である．

ネットワーク g' の最大次数 $\tilde{K}$ とエッジ除去確率 $\tilde{p}$ はノード除去割合 p の関数であるため，これらの p 依存性を求めることによって，臨界ノード除去割合 $p_{\rm c}$ が式 (3.30) から計算される．ノード除去率 p と最大次数 $\tilde{K}(p)$ の間には，

$$p = \sum_{k=\tilde{K}(p)}^{K} P(k) = \sum_{k=\tilde{K}(p)}^{\infty} P(k) - \frac{1}{N} \tag{3.33}$$

が成立する．ここで，式 (3.33) 内の第 2 項目から第 3 項目への変形の際，有限系における最大次数のカットオフの見積もりとして，

$$\sum_{k=K}^{\infty} P(k) = \frac{1}{N} \tag{3.34}$$

を用いた．取り除くノード数に比べてネットワーク・サイズが十分大きい（$N \gg 1/p$）とき，式 (3.33) における母体ネットワークの最大次数 K からの寄与は無視できる．このとき，式 (3.33) 内の和を積分に置き換えた近似式

$$p \approx \int_{\tilde{K}}^{\infty} P(k)dk \tag{3.35}$$

と次数分布関数 [式 (3.28)] に対する規格化条件

$$\int_{m}^{\infty} P(k)dk \approx 1 \tag{3.36}$$

を用いることによって，ネットワーク g 内の最大次数 $\tilde{K}$ はノード除去割合 p を用いて，

$$\tilde{K} \approx mp^{1/(1-\gamma)} \tag{3.37}$$

と書くことができる．また，式 (3.29) も連続近似によって和を積分に置き換えると，エッジ除去率 $\tilde{p}(p)$ は

$$\tilde{p}(p) = p^{(2-\gamma)/(1-\gamma)} \tag{3.38}$$

と計算される．式 (3.37) と式 (3.38) を式 (3.30) に代入することにより

$$p_{\mathrm{c}}^{(\gamma-2)/(\gamma-1)} = m\frac{\gamma-2}{\gamma-3}\left[p_{\mathrm{c}}^{(\gamma-3)/(\gamma-1)} - 1\right] + 2 \tag{3.39}$$

が得られる．この超越方程式を数値的に解くことによって臨界ノード除去率 p_{c} が求まる．図 3.5 に p_{c} のスケールフリー指数 γ 依存性を示した．破線を見ると，γ の全領域において 1%に満たないノード除去割合でネットワークの巨大成分が消失していることがわかる．このことは，スケールフリー・ネットワークはターゲット攻撃に対して脆弱であることを意味している．また，γ の大きなところで $p_{\mathrm{c}} = 0$ となっているのは，この計算において最小次数を $m = 1$ としているために母体となるネットワーク自体に巨大連結成分が存在していないことに起因している [31]．実線は連続体近似を用いないで計算した，より正確な計算結果である [65]．

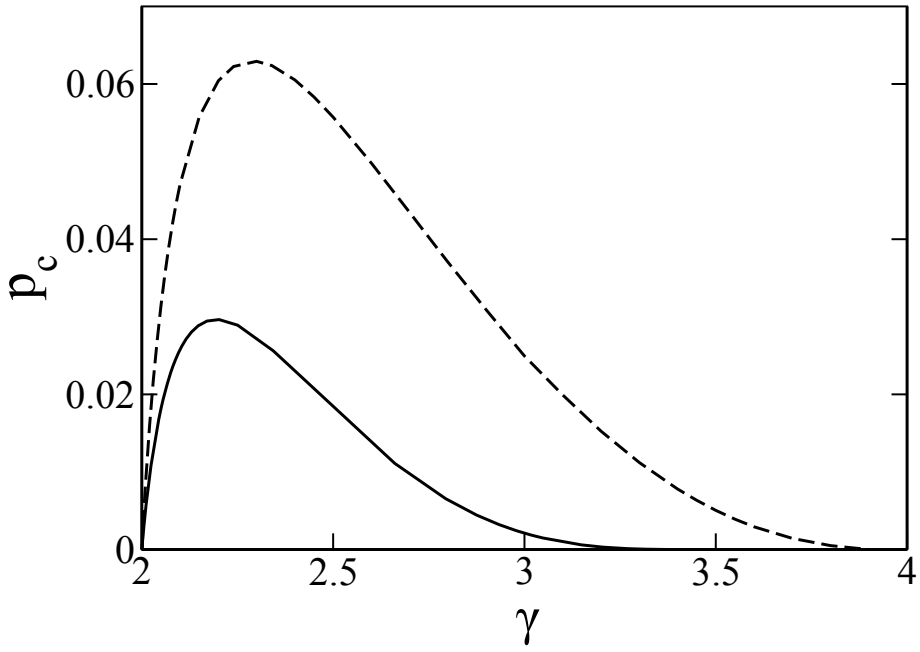


図 3.5: ターゲット攻撃における臨界ノード除去率 p_c のスケールフリー指数 γ 依存性．破線が連続体近似を用いて得られた超越方程式 [式 (3.39)] から得られた結果であり，実線は近似を用いない場合の結果．近似を用いない場合の計算の詳細は文献 [65] を参照されたい．図は同文献より引用し，記法を本論文のものに改めたもの．

3.3.3 臨界特性

スケールフリー・ネットワーク上のランダム故障に対するパーコレーション転移の臨界特性は，ランダム・グラフにおける転移の普遍クラスとは違ったものになる [66]．このことを示すために，臨界近傍の秩序変数 (巨大連結成分の相対サイズ) を特徴づける臨界指数 β の導出を行う．

ノード除去率 p と生き残り確率 q の間には，明らかに $q = p - 1$ なる関係がある．母体ネットワーク G の次数分布関数 $P_G(k)$ とノード除去後の次数分布関数 $P_g(k)$ は，式 (3.24) を q を用いて表すことにより

$$P_g(k) = \sum_{k'=k} P_G(k') \binom{k'}{k} q^k (1-q)^{k'-k} \tag{3.40}$$

なる関係で結ばれる．また，臨界ノード生き残り確率は

$$q_c = 1 - p_c = \frac{\langle k \rangle_G}{\langle k \rangle_G - \langle k^2 \rangle_G} \tag{3.41}$$

となる．

3.2 節において，任意抽出したエッジの一端の先に拡がるノード数分布に対する母関数 $H_1(x)$ を導入したが，ノード除去後のネットワーク g に対する $H_1(x)$ は，

$$H_1(x) = (1-q) + qxG_1\left[H_1(x)\right] \tag{3.42}$$

となる．第 1 項目の $(1-q)$ は，母体ネットワークから抽出されたエッジの一端のノードが除去されている場合を表しており，第 2 項目の q は図 3.1 の右辺のような状況になるには x で表されるノードが生き残っていなければならないことを示している．同様に考えると，母体 G から任意抽出したノードが，g 内の s クラスターに属している確率分布関数に対する母関数 $H_0(x)$ は，

$$H_0(x) = (1-q) + qxG_0\left[H_1(x)\right] \tag{3.43}$$

で与えらえる．$H_0(1)$ は，あるノードが有限サイズクラスターに属している確率であるため，パーコレーション転移点以下では $H_0(1) = 1$ である．一方，転移点より上では，巨大連結成分の相対サイズ $S(q)$ との間に $S(q) = 1 - H_0(1)$ という関係が成立する．したがって，巨大連結成分の相対サイズ $S(q)$ は

$$S(q) = q\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(k)u^k\right) \tag{3.44}$$

となる．ここで，u は $u \equiv H_1(1)$ で，

$$u = (1-q) + \frac{q}{\langle k\rangle_G}\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)u^{k-1} \tag{3.45}$$

を満たす最小の正の実数である．

スケーリング理論によると，臨界点近傍における巨大連結成分の相対サイズは $S(q) \sim (q-q_{\rm c})^{\beta}$ のように指数 β によって特徴づけられることがわかっている．$P_G(k) \sim k^{-\gamma}$ に従うスケールフリー・ネットワークにおける臨界指数 β は以下のように計算することができる．臨界点直上において，$S(q_{\rm c}) = 0$ であり，このとき $u = 1$ である．したがって臨界点よりも少し上 $(u = 1-\epsilon,\ q = q_{\rm c} + \delta)$ における式 (3.45)，すなわち

$$u = 1 - \epsilon = 1 - q_{\rm c} - \delta + \frac{q_{\rm c}+\delta}{\langle k\rangle_G}\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)(1-\epsilon)^{k-1} \tag{3.46}$$

の振舞いが重要となる．式 (3.46) の和の部分は，

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)(1-\epsilon)^{k-1} \sim \langle k\rangle_G - \frac{1}{2}\langle k(k-1)\rangle_G\epsilon + \cdots + c\Gamma(2-\gamma)\epsilon^{\gamma-2} \tag{3.47}$$

と展開できる．ここで，$\Gamma(x)$ はガンマ関数である．したがって，臨界近傍における式 (3.46) と $q_{\rm c} = \frac{\langle k \rangle_G}{\langle k(k-1) \rangle_G}$ を使って，

$$\frac{\langle k(k-1) \rangle_G^2}{\langle k \rangle_G} \delta = \frac{1}{2} \langle k(k-1)(k-2) \rangle_G \epsilon + \cdots + c\Gamma(2-\gamma)\epsilon^{\gamma-3} \tag{3.48}$$

を得る．この式は $\gamma > 3$ においてのみ成立する．γ の大きさにより上式のごとに支配項が変わることに注意すると，$\epsilon \ll 1$ では

$$\epsilon = \begin{cases} \left(\dfrac{\langle k(k-1) \rangle_G^2}{c \langle k \rangle_G \Gamma(2-\gamma)} \right)^{\frac{1}{\gamma-3}} \delta^{\frac{1}{\gamma-3}}, & 3 < \gamma < 4 \\ \dfrac{2\langle k(k-1) \rangle_G^2}{\langle k \rangle_G \langle k(k-1)(k-2) \rangle_G} \delta, & \gamma \geq 4 \end{cases} \tag{3.49}$$

となる．さらに $\gamma > 3$ において，$S(q) \sim q_{\rm c} \langle k \rangle_G \epsilon \sim (q - q_{\rm c})^{\beta}$ となるので，結局

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma - 3}, & 3 < \gamma < 4 \\ 1, & \gamma \geq 4 \end{cases} \tag{3.50}$$

を得る．ランダム・グラフの $k \gg 1$ における次数分布関数は指数関数的なテールをもつので，$\gamma \to \infty$ と考えることができる．また，ベーテ格子の次数分布関数は δ-関数であるから，この場合も $\gamma \to \infty$ と考えられる．したがって，ランダム・グラフやベーテ格子におけるノードのランダム除去によるパーコレーション転移の臨界指数 β は，$\beta = 1$ となる．一方，$3 < \gamma < 4$ のスケールフリー・ネットワークに対する β の値は $\beta \neq 1$ であるため，ランダム・グラフやベーテ格子とは異なる普遍クラスに属するパーコレーション転移を示すことになる．

次に，$\gamma < 3$ の場合について考える．このとき 3.3.1 の議論より，$q_{\rm c} = 0$，すなわち $q = \delta$ である．$\gamma < 3$ における式 (3.46) の和の部分は，

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)(1-\epsilon)^{k-1} \sim \langle k \rangle_G + c\Gamma(2-\gamma)\epsilon^{\gamma-2} \tag{3.51}$$

と展開される．よって，式 (3.46) から

$$\epsilon = \left(\frac{-c\Gamma(2-\gamma)}{\langle k \rangle_G} \right) \delta^{\frac{1}{3-\gamma}} \tag{3.52}$$

となる．これは

$$\beta = \frac{1}{3-\gamma}, \quad 2 < \gamma < 3 \tag{3.53}$$

を意味している．

転移の種類 [62, 64, 69] や様々な臨界指数 [66]，さらにはフラクタル次元 [67] についても既に議論されている．表 3.1 には，ランダム故障によるネットワーク上のパーコレーション転移の様々な臨界指数がまとめられている．この表で $\gamma_{\rm th}$ は平均クラスターサイズ $\langle s \rangle$ を特徴づける臨界指数であり，$\langle s \rangle \propto |q - q_{\rm c}|^{-\gamma_{\rm th}}$ で定義される．指数 τ はクラスターサイズ s の分布 n_s を記述する指数であり，$q = q_{\rm c}$ で $n_s \propto s^{-\tau}$ である．また指数 σ は臨界点近傍において相関長 ξ を平均ノード間距離とするクラスターのサイズ s_ξ を $s_\xi \propto |q - q_{\rm c}|^{-1/\sigma}$ で特徴づける臨界指数である．

表 3.1: スケールフリー・ネットワークに対するランダム故障によるパーコレーション転移の臨界指数．

	γ		
	$2 < \gamma < 3$	$3 < \gamma < 4$	$4 < \gamma$
β	$\frac{1}{3-\gamma}$	$\frac{1}{\gamma-3}$	1
$\gamma_{\rm th}$	-1	1	
τ	$\frac{2\gamma-3}{\gamma-2}$		5/2
σ	$\frac{3-\gamma}{\gamma-2}$	$\frac{\gamma-3}{\gamma-2}$	1/2

3.4 次数相関がある場合

次数相関がある場合のネットワーク上のパーコレーション転移点も理論的に見積もることができる．そのような問題に対して提案されている従来手法 [68, 70–72] をさらに一般化し，任意の次数相関を有し，任意次数分布関数に従うネットワークから，次数 k に依存した任意の方法でノードを除去した際のパーコレーション問題を扱う手法が Tanizawa らによって提案されているので [73]，その手法について以下で説明する．

次数分布関数が $P(k)$ に従い，2.2.3 節で述べた隣接次数相関を表す同時確率（任意抽出されたエッジの両端ノードの次数が k と k' である確率）が $P(k, k')$ で与えられるネットワークを考える．次数 k のあるノードに隣接する一つのノードの次数が k' である条件付き確率 $P(k'|k)$ は，同時確率を使って $P(k'|k) = P(k, k')/(k(P(k)/\langle k \rangle)$ となることは 2.2.3 節で述べたとおりである．次数のみに依存した何らかのノード除去プロセスの後に，母体ネットワークにおいて次数が k のノードが生き残っている割合を b_k $(0 \geq b_k \geq 1)$ とすると，ネットワーク全体での生き残りノード割合 q は，$q = \sum b_k P(k)$ によって与えられる．転移点 $q_{\rm c}$

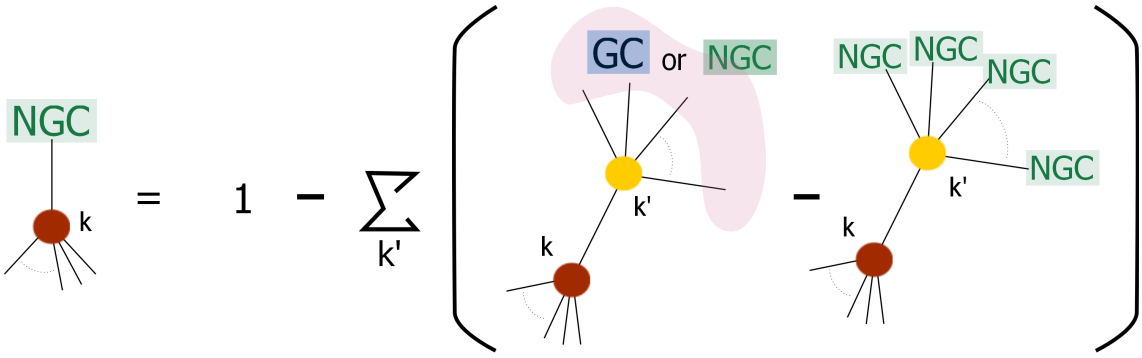


図 3.6: 式 (3.54) に対応する図．茶ノードが次数 k のノードであり，その先に次数 k' の黄色ノードがある．右辺和内第 1 項目は，黄色ノードの先の構造を限定していないパターンを表している．したがって，黄色ノードから外向きに向かうそれぞれのエッジの先 (ピンク色領域) には巨大連結成分 (GC) があるかもしれないし有限クラスター (NGC) しかないかもしれない．第 2 項目は，黄色ノードの先には NGC しかない場合を表しているので，その差は茶ノードの先に GC が存在する場合を表している．

を求めるために，次数相関がない場合の母関数の議論を拡張する．次数 k のあるノードにつながる一本のエッジの先に巨大連結成分が存在しない確率 x_k を導入する．$N \to \infty$ においてネットワークがツリー構造をしているならば，この確率 x_k と巨大連結成分の相対サイズ S は，方程式

$$x_k = 1 - \sum_{k'} b_{k'} P(k'|k) + \sum_{k'} P(k'|k)(x_{k'})^{k'-1}, \tag{3.54}$$

$$S = q - \sum_{k} b_k P(k)(x_k)^k = \sum_{k} b_k P(k)(1-(x_k)^k) \tag{3.55}$$

によって求めることができる．この二つの式の意味は，ランダム故障後のネットワークにおける母関数 $H_1(x)$ と $H_0(x)$ に対する方程式 (3.42)，(3.43) を思い出せば明白である．例えば，図 3.6 は式 (3.54) を図示したものである．

臨界点 q_c よりも下においては，すべての k に対して $x_k = 1$ であるため，$S = 0$ となる．逆に，巨大連結成分が存在する臨界点以上においては，少なくとも 1 つの x_k が $x_k \neq 1$ となる．これより，ある k に対して $x_k = 1$ から $x_k \neq 1$ に変化する点が臨界点に対応する．言い換えると，微小量 y_k を用いて $x_k = 1 - y_k$ としたとき，$y_k = 0$ から $y_k \neq 0$ に変化する点が臨界点である．臨界点近傍において y_k は微小量であるから，式 (3.54) において $x_k = 1 - y_k$

とし，y_k を小さいとして y_k の 1 次までで展開すると，

$$y_k = \sum_{k'} B_{k'k} y_{k'} \tag{3.56}$$

という関係式を得る．ここで $B_{k'k}$ は分岐行列と呼ばれ，

$$B_{k'k} \equiv b_{k'} P(k'|k)(k'-1) \tag{3.57}$$

で定義される行列である．式 (3.56) は，y_k が分岐行列 $B_{k'k}$ の固有値 1 に属する左固有ベクトルであることを示している．もし $B_{k'k}$ の（最大）固有値が 1 であれば，式 (3.56) を満たすゼロベクトル以外の y_k が存在することになり，系はパーコレート相にあることになる．逆に，$B_{k'k}$ の最大固有値が 1 未満であれば，式 (3.56) を満たすにはすべての k に対して $y_k = 0$ とならなければならず，系は非パーコレート相にあることになる．これより，臨界点を与える b_k は，式 (3.57) の分岐行列 $B_{k'k}$ の最大固有値が 1 となる点として計算される [71].

ネットワークに次数相関がない場合，条件付き確率 $P(k'|k)$ は次数 k によらず，$P(k'|k) = k'P(k')/\langle k\rangle$ で与えられるため，分岐行列は

$$B_{k'k} = b_{k'} \frac{k'(k'-1)P(k')}{\langle k\rangle} \tag{3.58}$$

という行方向のみ成分が変化する行列となる．このとき最大固有値 $\lambda_{\max}$ 以外のすべての固有値が 0 に縮退するため，分岐行列のトレース

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\langle k\rangle} \sum_k b_k k(k-1)P(k) \tag{3.59}$$

が最大固有値になる．そのため，臨界点を求めるために $B_{k'k}$ を対角化する必要がなくなる．次数相関がパーコレーション転移の臨界性に与える影響については，文献 [71, 73] が詳しい．

第4章　カスケード故障

4.1　カスケード故障とは

多くの現実ネットワークは何らかの機能を有しており，その機能はノード同士の大域的なつながりによって保障されている．前章で述べたパーコレーション問題は，静的な（一度の）除去プロセスの後，ネットワークが機能（大域的な構造）を維持できるかという問題であった．ネットワーク上のパーコレーション問題はネットワークの構造的頑強性の基礎を理解する上で非常に重要である．しかしながら，故障に対するネットワークの現実的な頑強性を正しく記述しているかと問われれば，否定的にならざるを得ない．何故なら，現実ネットワークにおいて要素の機能停止（ノード除去）がひとたび起こると，機能停止が連鎖することがあるのに対し，パーコレーション問題ではそのようなプロセスが無視されているからである．例えば，生物が生体内の化学反応によってエネルギーを作り出すとき，代謝ネットワーク上のあるノードの物質が作られなくなることで，その先の反応経路にも大きな影響を与えることがある．また，負債を抱えた会社の倒産によって，負債が貸借関係ネットワーク内で分配されることにより，連鎖倒産を引き起こすこともある．さらに，インターネットや電力網のように機能をパケットや電子の流れによって実現しているネットワークにおいては，一度故障が起こると流れの迂回が引き起こされる．このような系においては流れは負荷としても働くため，流れの迂回路となったノードに大きな負荷が掛かり，更なる過負荷故障を引き起こして故障が連鎖することになる．ネットワーク上の機能停止が連鎖する現象は，“カスケード故障”と呼ばれる．前章で見たパーコレーション過程は静的なプロセスであったのに対し，現実ネットワーク上で起きるネットワーク障害の多くは故障がカスケードする動的プロセスである．本論文では，過負荷故障が連鎖する過負荷故障カスケードについて扱う．そこで，次節 4.2 節において過負荷故障カスケードの先駆的研究について述べ，4.3 節でその他の過負荷故障カスケード・モデルに対する先行研究を概観する．また，最終節において本論文の目的を述べる．

4.2 Motter-Lai のモデル

4.2.1 ネットワーク上の負荷

複雑ネットワーク上のパーコレーション問題が詳しく調べられ，パーコレーション転移の臨界性などが明らかになったのと同時期に，複雑ネットワーク上の過負荷故障カスケードが議論されている．2002 年に Motter と Lai は，単純なモデル（ML モデル）によって過負荷故障カスケードの下でのネットワークの頑強性を調べた [74]．過負荷故障カスケードをモデル化する際に注意しなければならないことは，ネットワーク上の負荷をどのようにモデル化するかである．Motter らは，ネットワーク上の負荷を 2.2.6 節で導入した媒介中心性によって表した．すなわち，ネットワーク内のすべてのノード対間に最短経路を通るような一定量の流れが存在するという仮定である．媒介中心性の高いノードほど多くの流れ（負荷）が集中していることを意味しており，現実をある程度反映しているといえる．

彼らは，各ノードの負荷（媒介中心性）b_i に応じた耐性 C_i を

$$C_i = (1+\alpha)b_i \tag{4.1}$$

と設定した．過負荷故障はノード有する耐性を超えるような負荷がノードにかかったときに引き起こされるため，ML モデルにおいては，

$$b_i > C_i \tag{4.2}$$

となったノードにおいて過負荷故障が起こる．初期状態においてネットワーク内のすべてのノードは $b_i < C_i$ であるため，どのノードでも故障は起こらない．彼らは，このようなネットワークからノードを 1 つ取り除くことで，ネットワークを不安定な状態にすることを考えた．カスケードのプロセスは以下の通りである．

1. 時刻 $t = 0$ の初期ネットワークに対して，すべてのノードの媒介中心性（負荷）b_i^0 を求め，式 (4.1) に従ってそれぞれのノード耐性 C_i を決める．さらに，この時刻においてネットワーク内からノードを 1 つ除去する．

2. 時刻 t において，すべてのノードの媒介中心性 b_i^t を再計算する．

3. ノード上の負荷が耐性を上回るノード $(b_i^t > C_i)$ をすべて除去する．

4. 2-3 の操作を $b_i^t > C_i$ となるノードがなくなるまで繰り返す．

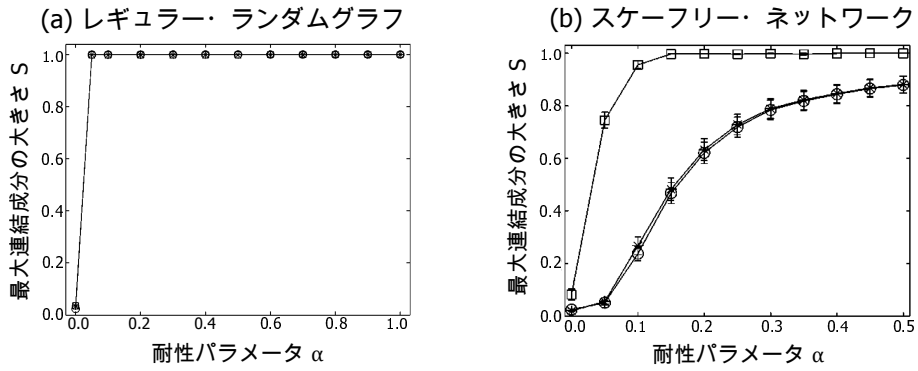


図 4.1: (a) レギュラー・ランダムグラフと (b) スケールフリー・ネットワーク上で ML モデルに従い過負荷故障カスケードを起こさせたときの，終状態におけるネットワークの最大連結成分の相対サイズ S を耐性パラメータ α の関数として表したもの．シンボルは，初期時刻においてランダムに選ばれたノード (□)，最大次数ノード (∗)，最大負荷ノード (◯) を削除した場合に対応する．レギュラー・ランダムグラフは，ノード数 $N = 5000$ で各ノードの次数が $k = 3$ である．また，スケールフリー・ネットワークは BA モデルに従って作ったものでノード数が $N = 5000$ で次数は平均次数 $\langle k \rangle \approx 3.1$ である．図は文献 [74] より引用し，記法を改めたものである．

初期ネットワークとして，次数一定のレギュラー・ランダムグラフと BA モデルによって作られたスケールフリー・ネットワークを想定し，過負荷故障カスケードのシミュレーションを行った結果が図 4.1 である．図 4.1 の三種類のシンボルは，最初に取り除くノードをランダムに選ぶ (□)，最大次数ノード (∗)，最大負荷ノード (◯) のそれぞれに対応している．ここで，縦軸の巨大連結成分の相対サイズ S は，カスケード終了後の巨大連結成分に属するノード数 N_{after} を用いて，

$$S = \frac{N_{\mathrm{after}}}{N} \tag{4.3}$$

で定義される量である．図 4.1(a) は，レギュラー・ランダムグラフ上で過負荷故障カスケードを起こした場合の結果を表している．このネットワークではどのノードも完全に等価なので，当然であるが，最初に取り除くノードに結果は依存していない．この結果で重要な点は，耐性パラメータを僅かに大きくしただけで，過負荷故障カスケードが全く起こらなくなっていることである．これは，レギュラー・ランダムグラフが過負荷故障カスケードに対して頑強であることを意味している．一方，スケールフリー性を示すネットワーク上の過負荷故障カスケードの結果は，初期削除ノードの選定によって大きな違いが出ている [図 4.1 (b)]．ラ

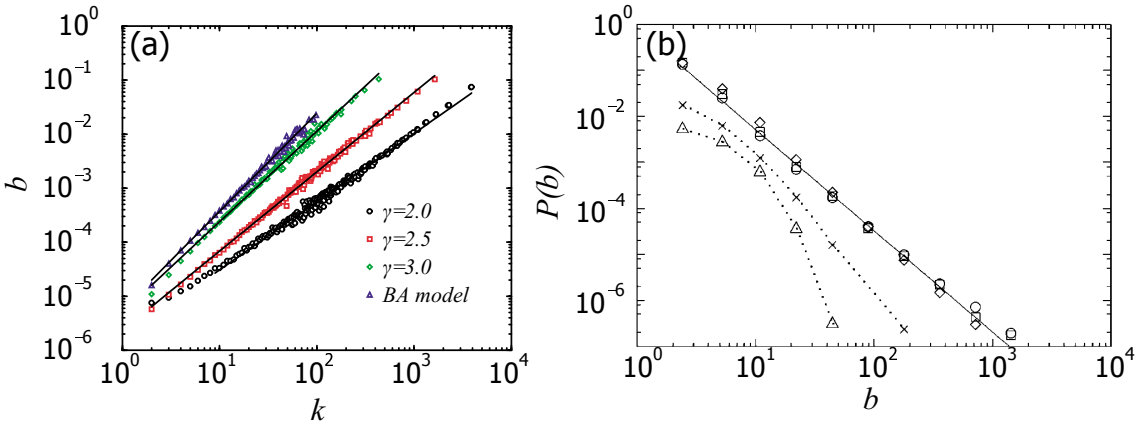


図 4.2: (a) ノードの次数と媒介中心性の大きさの関係と (b) スケールフリー・ネットワークにおける媒介中心性分布．(a) はスケールフリー・ネットワークの媒介中心性が次数に対して $b \sim k^{\eta}$ によってスケールされている様子を表している．また，(b) に示されているデータは $\gamma = 2.2$ (◯)，2.5 (□)，3.0 (⋄)，4.0 (×)，∞(△) である．これらの図は文献 [52, 75] からの引用．詳細な計算条件は文献 [52, 75] 参照．

ンダムにノードを除去する場合に比べて，最大次数や最大負荷のノードを取り去ったときの方が，カスケードが拡がりやすい．ネットワーク上のパーコレーション問題においてスケールフリー・ネットワークが選択攻撃に対して脆弱であったように，カスケード故障の意味においてもスケールフリー・ネットワークは次数や媒介中心性の意味での中心的なノードの故障に対して脆弱であることを意味している．一方，初期故障ノードの選定方法に依らず，図 4.1 (a) のレギュラー・ランダムグラフの場合に比べて，図 4.1 (b) のスケールフリー・ネットワーク場合の方がカスケードが拡がりやすくなっている．このことは，過負荷故障カスケードに対してスケールフリー・ネットワークが脆弱であることを示している．

カスケード故障に対するスケールフリー・ネットワークの脆弱性の起源は，媒介中心性と次数の間に正の相関があるという事実にある．このことを理解するために，まず最大次数ノードまたは最大負荷ノード（最大媒介中心性ノード）を初期削除ノードとして選ぶ場合を考えよう．図 4.2 (a) に示したとおり，媒介中心性と次数の間には $b \sim k^{\eta}$ という関係が成立していることが知られている [75]．そのため，次数分布関数がベキ関数になるスケールフリー・ネットワークにおいては，媒介中心性分布も図 4.2 (b) に示すようにベキ分布になる [52]．このことは，スケールフリー・ネットワーク上の最大の媒介中心性が，非スケールフリー・ネットワーク上のそれに比べて非常に大きくなることを意味している．極めて大きな媒介中

心性を有するノードが存在することは，最短経路上にこのノードを含むノード対の数が非常に多くなることを意味しており，このノードの削除は多数のノード対間の流れの迂回を余儀なくする．そのような大規模な迂回は，他の高媒介中心性ノードを含む多数のノードの故障を引き起こすため，図 4.2 (a) のように非常に大きな媒介中心性をもつノードが存在しないような非スケールフリー・ネットワークの場合に比べて，カスケードは拡がりやすくなる．次数と媒介中心性の間には正の相関があるので，最大次数ノードを初期削除する場合もこれと全く同じことが言える．一方，ベキ的な媒介中心性分布を有するスケールフリー・ネットワークからランダムに選ばれたノードを初期削除する場合は，初期削除ノードの次数や媒介中心性は平均的に低いと考えられる．したがって，そのようなノードの削除の影響は，削除ノード近傍に限られる．次数相関の無いネットワークにおいては低次数ノードの隣接ノードが高次数ノード（故に高媒介中心性ノード）になる確率が高いので，カスケードの第 2 段階においては高媒介中心性ノードが削除されやすいことになる．それ故，最大負荷ノードを初期削除する場合と同様に，ランダムに初期削除ノードを選んだ場合でも，スケールフリー・ネットワークにおけるカスケード故障の方が非スケールフリー・ネットワークにおけるそれよりも拡がりやすくなる．以上のことから，初期削除ノードの選び方に依らず，スケールフリー・ネットワークはカスケード故障に対して脆弱であると結論付けることができる．

ここで注意しなくてはならないのは，上述の議論においては，パーコレーション転移点によって頑強性を評価していないことである．そもそも，第 3 章で述べたパーコレーション転移のように臨界点が ML モデルに存在するか否かも明らかになっていない．図 4.1 を見る限り，有限の α の値に転移点があるようには思えない．そのため，頑強性を S の減少の仕方（カスケードの拡がり具合）で評価せざるを得ない．しかしながら，初期に除去するノードの数を変えることにより，有限の転移点をもたせることができる．複数の初期削除ノードを伴う ML モデルに関する研究 [76] によると，有限の α において系全体にカスケードが拡がる相があるということが数値的に明らかにされている．図 4.3 は，巨大連結成分を耐性パラメータ α と初期に取り除くノード数の関数として描いた 3 次元の図である．有限サイズのなかにおいて，系全体にカスケードが拡がる相が存在していることがわかる．

4.3 カスケード故障に関するその他のモデル

Motter らの研究以降，様々なカスケード故障モデルが提案されている．本節では，ML モデル以外のカスケード故障の代表的なモデルを紹介する．解析の詳細に立ち入らず，現実のどのような点をモデル化しているか，およびどのような結果が得られたかということに重点

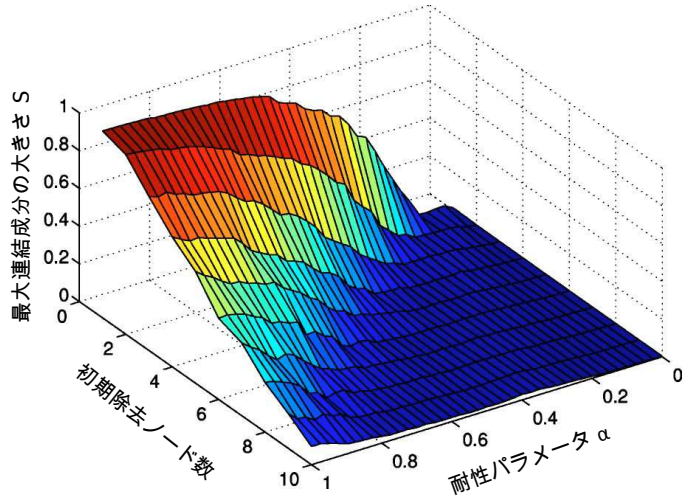


図 4.3: 最大連結成分サイズの耐性パラメータと初期除去ノード数依存性．ネットワークは BA モデルによって作成されたもので，ノード数は $N = 2000$ である．各パラメータに対して 30 サンプル平均をとっている．図は文献 [76] より引用．

をおいて説明する．

4.3.1 大域的効率に基づく過負荷故障カスケード

インターネットのルーターは，過負荷によって一時的に輻輳が起き，機能が低下することがある．負荷が耐性よりも小さくなると，また元通り機能し始める．交通渋滞なども同じような描像で理解できる．Crucitti らは，このような現実的効果を取り入れたモデルを提案した [77]．前節で述べた ML モデルとの大きな違いは以下の通りである．

- 重み付きネットワークを考える．
- ネットワーク上の流れはすべてのノード対間に一定量存在するが，その流れはエッジの重みの逆数和を最小にする経路を通るものとする．
- 過負荷ノードは除去せず，機能を低下させる．具体的には，エッジの重みを変更することにより，流れを通しにくくする．
- ネットワーク障害の規模を，2.2.6 節で導入したエッジの重みを考慮した大域的効率 [式 (2.21) 参照] によって測る．

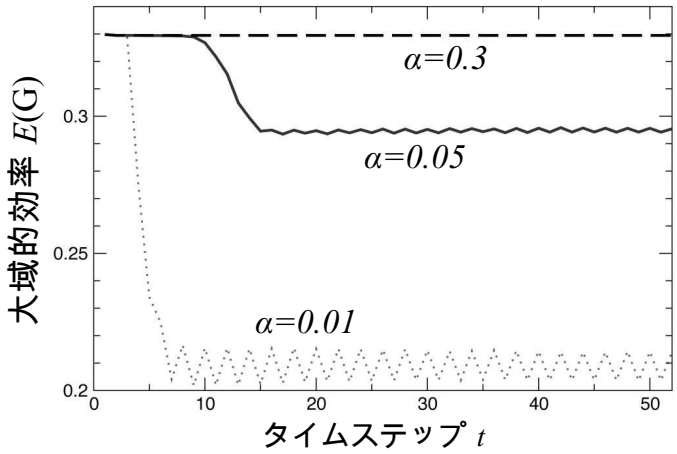


図 4.4: スケールフリー・ネットワーク上からランダムに 1 つのノードを除去したときの大域的効率の時間依存性．ネットワークは，ノード数 $N = 2000$，平均次数 $\langle k \rangle = 10$ の BA モデルによって作成されている．異なる線は耐性パラメータ α の値を変化させた場合の結果を表しており，α の値は図に表記したとおりである．図は文献 [77] から引用しているが，本論文に合わせて記法を変更している．

重み付きネットワーク導入する理由は，過負荷ノードから出るエッジの重みを変化させることで輻輳状態を表現するためである．このときのエッジの重みは交通の進み具合やコンダクタンスのような効率を表している．流れは重みの逆数和を最小にする経路を辿ると考えるのが自然である．これにより，目的地まで最小効率で辿り着くことになる．このモデルにおいてはノードは除去されないため，最大連結成分の大きさの変化によってカスケードの規模を測ることはできない．そこで，大域的効率

$$E(\boldsymbol{G}) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \epsilon_{ij}$$

を用いてカスケード規模を評価する．ここで ϵ_{ij} は，ノード ij 間を結ぶ経路の中での重みの逆数和の最小値（最小効率）である．ただし，ij 間が非連結の場合は，$\epsilon_{ij} = 0$ とする．大域的効率 $E(\boldsymbol{G})$ が小さいということはネットワークが非効率的になったことを意味するので，大域的効率の減少の程度がカスケードによるダメージの強さとみなすことができる．

モデルの詳細を簡単に説明する．時刻 $t = 0$ においてノード数 N の無向重み付きネットワーク $\boldsymbol{G}$ を用意する．このとき，エッジの重み e_{ij} はエッジによらず $e_{ij} = 1$ とする．すべてのノード対間に最小効率経路を通る一定量の流れがあると仮定し，ノード i 上の負荷 $L_i(0)$ を流れがノード i 上を通過した回数とする．ノードの耐性は，ML モデルの耐性 [式 (4.1)] に

ならい，

$$C_i = (1+\alpha)L_i(0) \tag{4.4}$$

と定義する．ML モデル同様，ネットワークは初期時刻において過負荷ノードは存在せず，安定状態である．上記のような初期状態の下で，ノードを 1 つ除去する．この除去に伴って過負荷状態となったノードから出るエッジの重みを更新する．具体的には，各時間ステップにおいてエッジの重みを

$$e_{ij}(t+1) = \begin{cases} e_{ij}(0)\dfrac{C_i}{L_i(t)}, & \text{if } L_i(t) > C_i \\ e_{ij}(0), & \text{if } L_i(t) \leq C_i \end{cases} \tag{4.5}$$

のように更新する．この重みの更新により，流れの経路は更なる変更を強いられる．

図 4.4 は，初期ネットワークからノードをランダムに一つ削除したときの大域的効率の時間依存性を示している．耐性パラメータ α が小さいときは，時間の経過とともに流れの再分配がさらなる過負荷ノードを生み出し，ネットワークの大域的効率が小さくなっている．一方で $\alpha = 0.3$ のときは，ランダムにノードを一つ取り除いても，ネットワークの効率には何ら影響が出ていないことがわかる．

次に，ネットワーク構造の違いが大域的効率の時間依存性にどのような影響を与えるかを調べる．図 4.5 はランダムグラフとスケールフリー・ネットワーク上でカスケードのシミュレーションを行い，定常状態に達した後のネットワークの大域的効率 $E(\boldsymbol{G})$ を耐性パラメータ α の関数として見たものである．シンボルの違いは，初期に取り去るノードの違いを表している．□はランダムにノードを選んで取り除いた場合，• は初期状態において負荷が最大のノードを取り除いた場合に対応している．初期削除ノードの種類によらず，ランダムグラフに比べてスケールフリー・ネットワークの方が大域的効率への影響が大きいことがわかる．このことは，スケールフリー・ネットワークが過負荷故障カスケードに対して脆弱であることを意味している．さらに図 4.5(b) をみると，耐性パラメータが $0.1 \leq \alpha \leq 0.3$ のとき，ランダムな故障に対してスケールフリー・ネットワークは頑強であるが，最大負荷ノードの選択攻撃に対しては脆弱であることがわかる．これは，ML モデルの場合同様，最大負荷ノードの除去が多くの流れの再分配を引き起こすためである．

4.3.2 停電を説明するモデル

電力は現代の社会生活における基盤であるため，電力網における停電を理解することは安定した経済活動や防災の観点から非常に重要である．本節では，電力網における過負荷故障カスケードである停電をモデル化した研究について述べる．

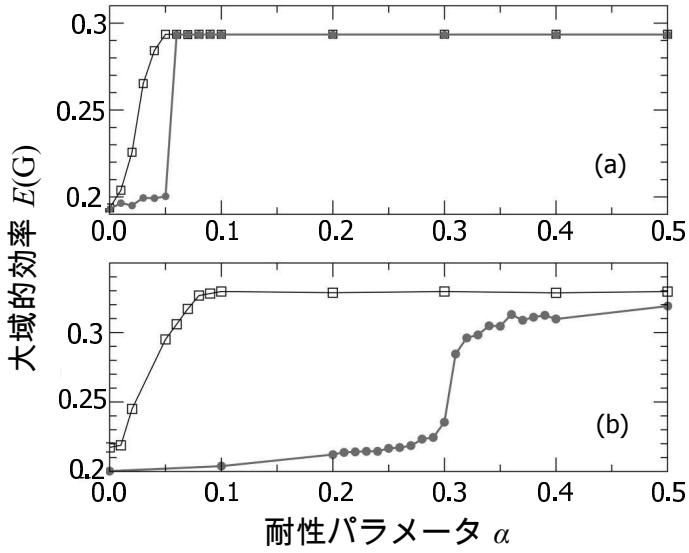


図 4.5: (a) ランダムグラフと (b) スケールフリー・ネットワークから，ノードをランダムに取り除いた場合 (□) と最も負荷の大きいノードを取り除いた場合 (•) の定常に達した後の大域的効率 $E(\boldsymbol{G})$ の耐性パラメータ α 依存性．ランダムグラフ，スケールフリー・ネットワークともにノード数 $N = 2000$，平均次数 $\langle k \rangle = 10$ である．図は文献 [77] から引用し，記法を本論文のものへと変更している．

Carreras らのモデル

実は，Motter-Lai のモデルや Crucitti らのモデルが提案されるよりも前に，過負荷故障カスケードのモデルは提案されている．ネットワークのスケールフリー性と頑強性の関係については調べられていないものの，複雑ネットワークの研究分野で過負荷故障カスケードを扱った初めての研究であるため，本節でこのモデルの概要を簡単に述べる．Carreras らによって提案されたこのモデルは，Bak らの砂山崩しモデル [84] を基礎においており，電力網における停電を単純化したモデルである [85]．カスケード過程は以下の通りである．

1. N ノードで構成される次数 k のレギュラー・ランダムグラフを用意し，各ノード i に一定の耐性 Z_{crit} と一定の負荷 Z_{a} を設定する．

2. 各時刻 t において，任意抽出されたノード i とランダムに選ばれたノード i の隣接ノー

ドのひとつ j の負荷を

$$Z_i(t) = Z_i(t) \pm 1 \tag{4.6}$$

$$Z_j(t) = Z_j(t) \mp 1 \tag{4.7}$$

と更新する（ルール 1）.

3. 過負荷となるノード，すなわち

$$Z_i(t) > Z_{\rm crit} \tag{4.8}$$

となるノード i があるかを確かめる．過負荷ノードがあれば操作 4. を行い，なければ操作 2. へと戻る.

4. 過負荷ノード i の負荷を

$$Z_i(t) = Z_i(t) - N_f \tag{4.9}$$

$$Z_j(t) = Z_j(t) + n_{fi} \tag{4.10}$$

に従って隣接ノードに分配する．ここで $N_f = \sum_i n_{fj}$ である（ルール 2）．分配終了後，操作 3. へと戻る.

耐性 $Z_{\rm crit}$ と平均負荷 $Z_{\rm a}$ の差 $\Delta Z \equiv Z_{\rm crit} - Z_{\rm a}$ を導入する．この他に，このモデルのパラメータは各ノードの次数 k と過負荷ノードが隣接ノードに割り振る負荷量 N_f がある．この 3 つのパラメータの取り方によって，カスケードの振舞いが変化する．詳細は省くが，Carreras らはカスケードの規模 S の平均サイズ $\langle S \rangle$ がパラメータ $\lambda \equiv k^\alpha N_f/\Delta Z$ $(\alpha \approx 0.22)$ によって，

$$\langle S \rangle = \frac{g}{(\lambda - \lambda_0)^2} \tag{4.11}$$

とスケールされることを数値的に明らかにした [図 4.6(A) 参照]．ここで g はフィッティング・パラメータで，λ_0 は平均カスケード規模 $\langle S \rangle$ が発散するようなモデル・パラメータの取り方を特徴づけるパラメータである．$\lambda < \lambda_0$ では，有限の大きさのカスケードのみが起き，$\lambda \geq \lambda_0$ において無限に大きなカスケードが起こる（カスケードが止まらない）．さらに $\lambda < \lambda_0$ の領域において，規模 S のカスケードが起こる確率を数値的に調べており，その結果が図 4.6(b) である．図 4.6(b) をみると，次数 k が大きくなるにつれて（λ が λ_0 に近づくにつれて），カスケードの規模 S の発生確率分布の裾がベキ的に振舞っていることがわかる．アメリカの電力網における停電の規模の分布がベキ的に振舞うこと [86] が知られており，著者らは現実の停電規模分布を説明したモデルであると主張している.

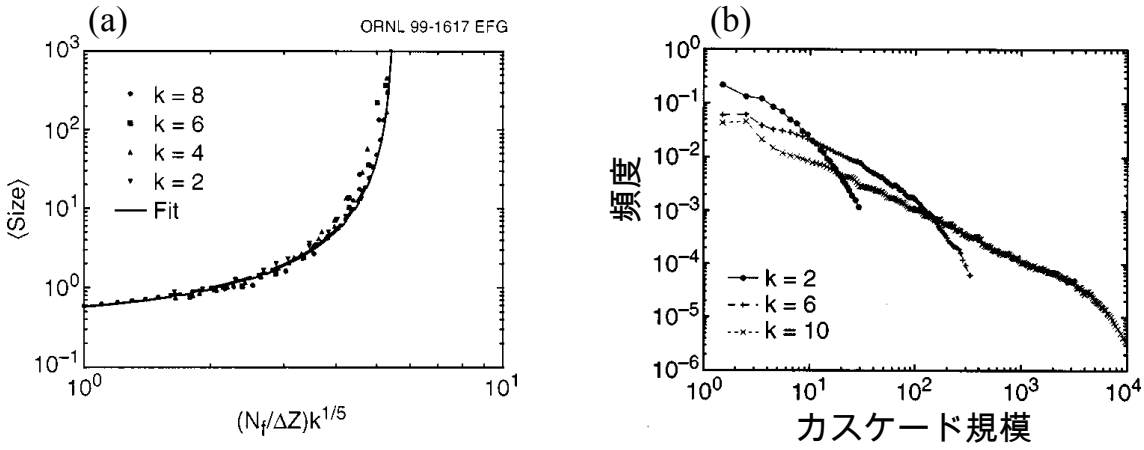


図 4.6: (a) 平均カスケード規模 $\langle S\rangle$ のパラメータ λ_0 依存性と (b) カスケード規模 S の頻度分布．(a) は，様々な次数 k，ΔZ と N_f に対して平均カスケード規模を数値的に計算しており，横軸 λ の指数 α を $\alpha = 0.2$ としている．(b) の計算において，$\Delta Z = 3$ と $N_f = 10$ に固定している．どちらの図も文献 [85] より引用し，記法を改めたもの．

Dobson らのモデル

解析的取扱いが可能な過負荷故障カスケードのモデルが Dobson らによって提案されている [87]．彼らは単純なカスケード過程を提案し，分岐過程の手法 [88] を適用することによってモデルを解析的に取り扱っている [87, 89, 90]．本論文では解析的取扱いは議論せず，カスケード過程の詳細及びモデルから得られる結果についてのみ述べる．過負荷故障カスケード過程は以下の通りである．

1. 時刻 $t = 0$ において N 個のノードから構成される完全グラフを用意し，各ノードに範囲 $[L^{\min}, 1]$ の一様ランダムな負荷 $L_i(0)$ を割り振る．各ノードの耐性 L^{fail} を $L^{\text{fail}} = 1$ とする．全てのノードに負荷 D を加える．

2. 時刻 t において

$$L_i(t) \geq 1 \tag{4.12}$$

となる過負荷故障ノード i をネットワークから除去する．またこの時刻における故障ノード数を $M(t)$ とする．生き残りノードの各々に $M(t)P$ だけ負荷を割り振る．ここで P は $1/N$ よりも小さな正の実定数である．

3. 過負荷故障ノードがなくなるまで操作 2. を繰り返す．

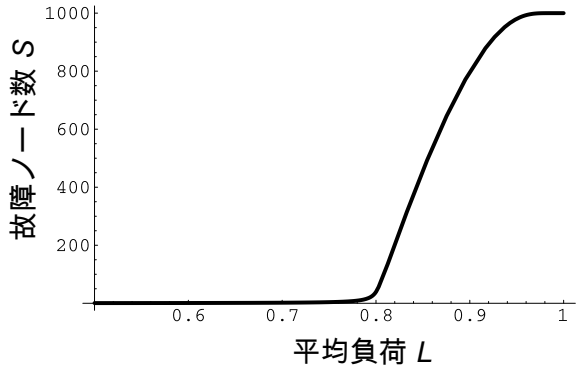


図 4.7: カスケード規模 S の平均負荷 L 依存性．$L \approx 0.8$ で過負荷故障カスケードが拡がり始めることがわかる．図は文献 [87] より引用し，本論文の記法に改めたもの．

上記のカスケード過程からわかるように，初期負荷の平均 L は

$$L = \frac{1 + L_{\min}}{2} \tag{4.13}$$

で与えられ，カスケードの規模 S は

$$S = \sum_t M(t) \tag{4.14}$$

である．このモデルでは，最小負荷 $L_{\min}$ を変化（L を変化）させることで，カスケードの振る舞いがどのように変化するかを調べている．初期条件をノード数 $N = 1000$，初期に加える負荷 $D = 4 \times 10^{-4}$，隣接ノードへの負荷の再分配割合 $P = 4 \times 10^{-4}$ として，カスケード規模 S の初期平均負荷 L の依存性を示したのが図 4.7 である．図を見るとわかるように，平均負荷が小さいときカスケードは起きないが，$L = 0.8$ あたりを境に急激にカスケード規模が大きくなり，ネットワーク全体にカスケードが拡がっていることがわかる．さらに著者らは初期の平均負荷とカスケード規模の関係を調べており，$L = 0.8$ 近傍でカスケード規模の分布がベキ的に振舞うことを明らかにしている [87]．

4.4 本研究の目的

前節までに述べたように，我々の生活に大きな影響を与えている過負荷故障カスケードの問題はこれまでに精力的に研究がなされている．しかしながら，それら全ての研究において，負荷が時間的に揺らぐ効果を考慮に入れたものはなかった．振動や荷重による橋や建造物の崩壊など，ネットワーク損傷に限らず，過負荷によって何らかの要素が損傷を受けるのは，

負荷の平均的な値が限界値を超えたときではなく，時間的に揺らぐ負荷の瞬間的な最大値が耐性を超えたときである．その意味で，過負荷故障は負荷揺らぎにおける Extreme Events の一つと言うことができる．平均値の分布が中心極限定理に支配されるのに対し，最大値の分布は極値統計に従うように，一般に平均値ととその周りの揺らぎとではそれらが従う統計的性質が異なる．そのため，負荷揺らぎを考慮した過負荷故障の性質は，平均値のみによって議論したそれとは質的に異なる可能性がある．このような理由から，負荷揺らぎを考慮した過負荷故障とネットワーク頑強性の関係を明らかにすることは，ネットワーク上の過負荷故障を理解する上で非常に重要である．

そこで本研究の目的は，時間的に揺らぐ負荷に対するネットワークの頑強性を理論的に明らかにすることである．具体的には，ネットワーク上の時間的揺らぎを有する負荷をランダムウォーカーでモデル化する．まず第 5 章では，Kisore ら [113] の過負荷故障確率に対する理論を拡張することで，過負荷故障による静的なパーコレーション問題を議論する．この問題は，寒波や熱波による急激な電力使用量の増加や災害時における一時的な通信量の増大に対してネットワークがどの程度頑強であるかを明らかにすることに対応している．この章では，過負荷故障パーコレーションに対する頑強性とスケールフリー性との関係についても論じる．次いで第 6 章では，Extreme Events としての過負荷故障が連鎖する過負荷故障カスケードを扱う．まず過負荷故障カスケードのモデルを提案した上で，過負荷故障カスケードが過負荷故障パーコレーションの連鎖過程であることに着目し，ネットワークの頑強性を特徴づける量を理論的に計算する．また，これらの計算を基にして，過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性とスケールフリー性との関係を議論する．最後に第 7 章では，有限系における過負荷故障カスケードを論じることで，ネットワーク・サイズと構造安定性の関係を明らかにする．この研究は，ネットワークを特徴づける最も基本的な量であるノード数が実際にはどのような制約によって決まるのかという極めて根本的な問題を初めて論じたものである．

第5章　過負荷故障パーコレーション

5.1　極値理論と故障

地震や洪水，台風，経済危機，感染症の蔓延，停電などあらゆる現象には規模の大小がある．小規模な災害もあれば，ときには甚大な被害を与える大規模な災害もある．我々が強く関心を抱くのは，稀に起こる大規模な災害である．このような稀な極端事象 (Extreme Events) の統計的性質を扱うのが極値理論 (Extreme Value Theory) である．極端事象は，単に稀に起こるから興味がもたれるだけでなく，工学的にも重要な意味をもつ．橋やビルといった巨大構造物から，集積回路内の微小素子まで，身の回りのものには何らかの恒常的なストレスが加わっている．このような系では，思いがけない大きなストレスが加わり，系全体の崩壊・故障が起こることがある．このような過負荷による故障の原因は，あらかじめ設定された耐性 (許容量) を超えるようなストレスが系に加わったことが原因である．想定以上の稀なストレスの統計的性質も極値理論によって理解される．5.1.1 節では，極値理論における極値とは何を意味するかを定義し，極値統計が重要となる代表例とその応用について述べる．5.1.2 節では，秩序変数と極値統計分布の関係について述べる．5.1.3 節では，極値理論の考え方を考慮した上で過負荷故障を確率的に扱う方法について述べる．

5.1.1　自然現象と極値統計

極値とは観測データのうちの最大値あるいは最小値を指す．この最大値・最小値が従う統計が極値統計である．極値統計の重要性を示すために，洪水という現象を例にとってみよう．洪水は，最も古い極値に関する問題であるといわれている．農耕が主要経済であった古来，河川付近は経済の中心であり，水流は主要な交通路となっていた．そのため，どのような大きさの洪水が起こるかを予測することは重要であった．現在においても洪水の問題は，工学上重要なテーマである．例えば，ダムによる治水は，我々の日々の経済活動や財産，生命を守っている．どの程度の許容量をもったダムを造れば洪水のリスクを回避できるであろうか．この問題を統計的に扱うことを考えよう．河川のある位置において，毎秒どれだけの流量があるかを，毎日測定したとする．そうすると，1 年に 365 個の観測データが得られる

ことになる．この中に，流量が最大となるデータが 1 つだけある．この値は年度洪水値と呼ばれる (洪水は数日にわたって，あるいは何度も起きているかもしれないし，反対に洪水は起きていないかもしれないが，1 年に必ず 1 つだけ洪水値がある)．何年にもわたり年毎の洪水値を集めたとする．これらの洪水値から分布 (最大値分布) が得られる．この分布からダムの適切な許容量を見積もることができる．

一般的に言うと，極値分布は各標本の最大値 (最小値) を構成要素とする分布である．極値分布の関数型は，母集団における確率変数が従う分布関数のタイプに依って 3 つの分布関数に漸近することが明らかになっている [91]．これら 3 つの分布関数は，それぞれ Gumbel 分布，Fréchet 分布，Weibll 分布と呼ばれている．母集団確率変数分布のタイプと極値分布については文献 [92] が詳しい．

極値統計の応用分野は驚くほど多い．気象学分野では，年毎の最大降雨量，最高気温，最低気温，最大風速などが注目すべき量となる．これらの量は，リスク工学などの分野で重要な統計データとなる．例えば，構造物を造る際は，稀にしか起きない最大風力や大規模地震のデータが重要となるし，空港の滑走路における最大風速のデータは，航空機の強度設計に活用されうる．保険会社は何十年に一度しか起きないようなリスクの管理がマネジメント上必要となる．また，ガスパイプやオイルタンクなどの腐食や傷においては，耐久年数を考える上で，腐食による傷の深さの最大値が重要となる．

5.1.2 秩序変数と極値統計

気象学やリスク工学といった応用工学的な学問分野においてのみ極値統計が重要となるわけではない．近年，系を特徴づける相関長が発散するような臨界系において，秩序変数が一般化された Gumbel 分布に従うことが明らかになっている．このことを説明するために，まず Gumbel 分布について簡単に説明する．べき的なテールをもたない任意の分布関数に従って分布する何らかの統計量からなる母集団があるとする．この母集団の部分集合である標本の平均，いわゆる標本平均の分布関数は，元の分布関数に依らず，必ず正規分布に従うというのが中心極限定理である．これに対し，指数テールをもった分布関数に従う統計量によって構成される母集団から作られる標本の最大値の分布は，$a = 1$ の Gumbel 分布，

$$G_a(x) = K\left[e^{b(x-s)-e^{b(x-s)}}\right]^a \tag{5.1}$$

に従う．ただし，K, b, s は a によって決まる定数であり，それぞれ

$$b = \left\{\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{\mathrm{d}^2\Gamma(a)}{\mathrm{d}a^2} - \left[\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{\mathrm{d}\Gamma(a)}{\mathrm{d}a}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{5.2}$$

$$s = \frac{1}{b}\left[\log a - \frac{1}{\Gamma(a)}\frac{\mathrm{d}\Gamma(a)}{\mathrm{d}a}\right] \tag{5.3}$$

$$K = \frac{b}{\Gamma(a)}e^{a\log a} \tag{5.4}$$

となる．ここで $\Gamma(a)$ はガンマ関数である．また，最大値ではなく 2 番目に大きな要素の分布は，$a = 2$ の Gumbel 分布に従う．一般に，標本内の m 番目に大きい要素からなる分布関数は，$a = m$ の Gumbel 分布となる．このように，Gumbel 分布は 1 つのパラメータ a によってその分布関数の形が決定される．極値統計学上意味をもつのは，a が整数の Gumbel 分布であることに注意する．

これに対し，臨界系の秩序変数分布は a が非整数の Gumbel 分布 (一般化された Gumbel 分布) に従うことが知られている．1998 年に Bramwell ら [93] は，2 次元 XY モデルの数値シュミレーションを行い，低温相における秩序変数 (磁化) の揺らぎの分布関数が非対称になることを見出し [93]，さらにこの非対称分布が $\alpha = \pi/2$ の Gumbel 分布であることを示した [94]．また，文献 [93] 内で，乱流のエネルギー散逸の大きさの分布も同様の分布関数に従うことを発見している．この研究を契機に，2 次元イジング・モデルやパーコレーション・モデル，液晶などの平衡臨界系における秩序変数や，自己組織化臨界系や長距離相関系における秩序変数と類似の意味をもつ巨視的量の振る舞いが調べられており，秩序変数の揺らぎが $a = \pi/2$ の一般化された Gumbel 分布に従うことが数値シュミレーションや実験から明らかにされている [94–106]．

これまでに知られていた秩序変数の臨界揺らぎの普遍的な性質は，熱的な揺らぎや幾何学的な揺らぎなどの古典的揺らぎに起因したものであった．しかし，本研究により，量子臨界現象である Anderson 転移の転移点近傍においても，局所状態密度の典型値が $a = \pi/2$ の Gumbel 分布に従うことが示された．この詳細については付録 A で述べる．

5.1.3 過負荷による故障

本節では，極値理論の考え方に基づいて，系内で過負荷故障が起こる確率について考える．例えば橋は，車両の往来や風，地震などのストレスに常にさらされている．風によるストレスに着目し，風力の時系列データが図 5.1 (a) のように観測されたとする．図内横軸に平行に引かれた青い破線がこの橋の風に対する耐性 q であった場合，$w > q$ となる時刻 $t = t_0$ でこの橋は崩壊することになる．このような橋の崩壊が起こる確率を考えるため，風力の時系列データから図 5.1 (b) のような風力分布を作成する．緑破線が風力の平均値，青矢印で示したのが耐性である．時間的に揺らぐ風力によって橋が崩壊する確率は，$w > q$ の範囲での

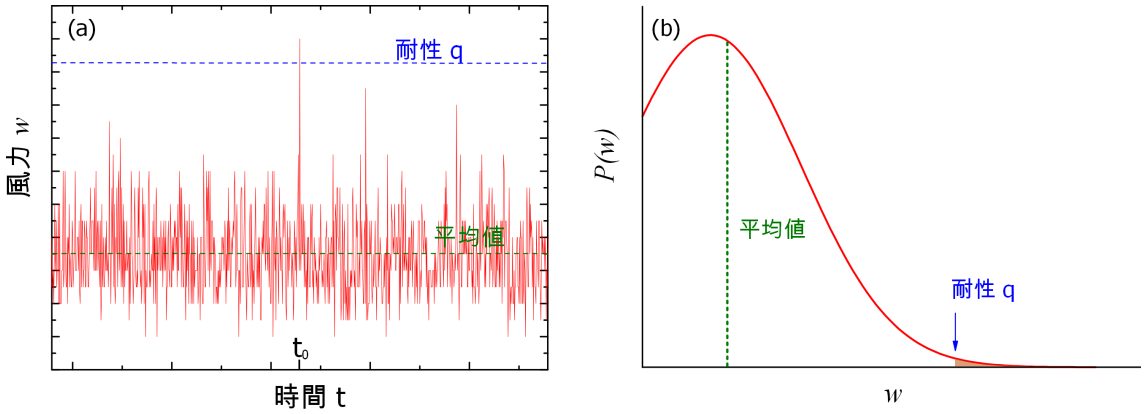


図 5.1: (a) 風力の時系列データと (b) 風力の分布関数の振る舞いの概念図．それぞれの図の緑破線は平均値で，青破線が橋の耐性を表している．

分布関数 $P(w)$ の積分値 (図 5.1 (b) の橙色の面積) によって与えられる．すなわち，負荷分布が $P(w)$ である場合，耐性 q の系の故障確率 F_q は，

$$F_q = \int_q^\infty P(w)dw \tag{5.5}$$

と表すことができる．本研究では負荷揺らぎを伴うネットワーク上のノードの過負荷故障を扱うが，その際も式 (5.5) の確率で過負荷故障が起こるものと考える．

5.2 ネットワーク上の流れ

5.2.1 ネットワーク上の流れの統計則

機能性ネットワークの多くは，何らかの流れによってその機能を実現している．蛋白質相互作用ネットワークは化学変化を伴いながら化学物質がネットワーク上を流れることによって蛋白質合成を行っていると考えられるし，インターネットはパケット流によって情報のやり取りがなされている．これらのネットワーク系において，流れの統計的振る舞いを明らかにすることは，どのような動的なプロセスによって機能を実現しているかを理解する上で重要である．また，そのような流れは，ネットワーク機能を実現すると同時に，ノードにかかる負荷にもなっている．そのため，流れの性質を理解することは，負荷の統計的性質に関する知見を与えることにもなる．流れの統計性を特徴づけるため，Menezes と Barabási [107] は，流れを伴う様々なネットワークにおいて，ノード上の流れのデータをとることで平均的な流れ $\langle f \rangle$ とその標準偏差 σ を解析した．図 5.2 は，あるルーターを通るパケット量と，河

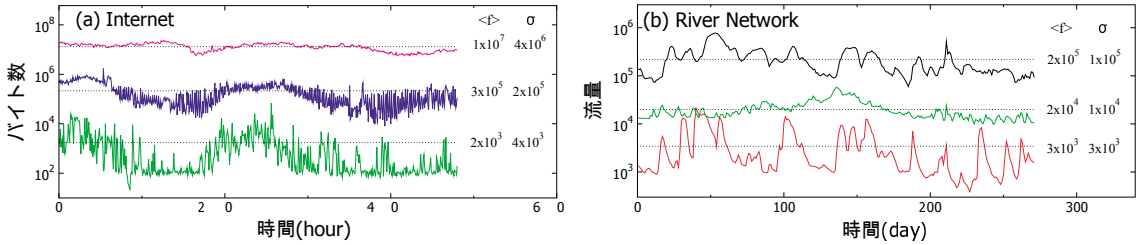


図 5.2: インターネット (a) と河川 (b) のある 3 地点における流れの時間依存性．それぞれのデータの破線は平均を表してる．文献 [107] の図をもとに記法を書き換えたもの．

川のある地点における流量の時間変化を示している．数千の観測地点 (ノード) のデータから，平均流とその標準偏差の間の関係を調べ，それらの間に

$$\sigma \sim \langle f \rangle^{\alpha} \tag{5.6}$$

というスケーリング則が成り立ち，α が 1/2 か 1 のどちらかであることを発見した (図 5.3)．図 5.3 上段に $\alpha = 1/2$ となるネットワーク，下段に $\alpha = 1$ となるネットワークにおける $\langle f \rangle$ と σ の関係を示している．ネットワークの種類や特徴に依らず，このようなスケーリング則が現れるのは注目に値する．

流れには，始点と終点あるという共通した性質がある．そこで Menezes ら [107] は，次に述べる二種類のシュミレーションをすることによって，式 (5.6) の理由を解き明かそうと試みている．

モデル 1 ：拡散過程

多数のネットワーク上に多数のランダムウォーカーが存在する系を考える．ランダムウォーカーは，ある時刻にあるノードを訪れ，次の時刻には隣接するノードのいづれかに等確率で遷移する．十分時間が経ったのち，各時刻に各ネットワーク上の各ノードを訪れるウォーカーの数を記録することで，ノード上の平均ウォーカー数とその標準偏差の関係を調べた．全てのネットワークで同一数のランダム・ウォーカーを放った結果が，図 5.4(a) の一番下のプロットである．平均ウォーカー数とその標準偏差の間に $\alpha = 1/2$ のスケーリング則が成り立っている．さらに，ネットワークごとにウォーカー数を揺らがせた場合に傾き α に与える影響も調べている．ウォーカー数の揺らぎが十分大きいときには，図 5.4(a) 一番上のプロットのように指数 $\alpha = 1$ のスケーリング則が現れる．

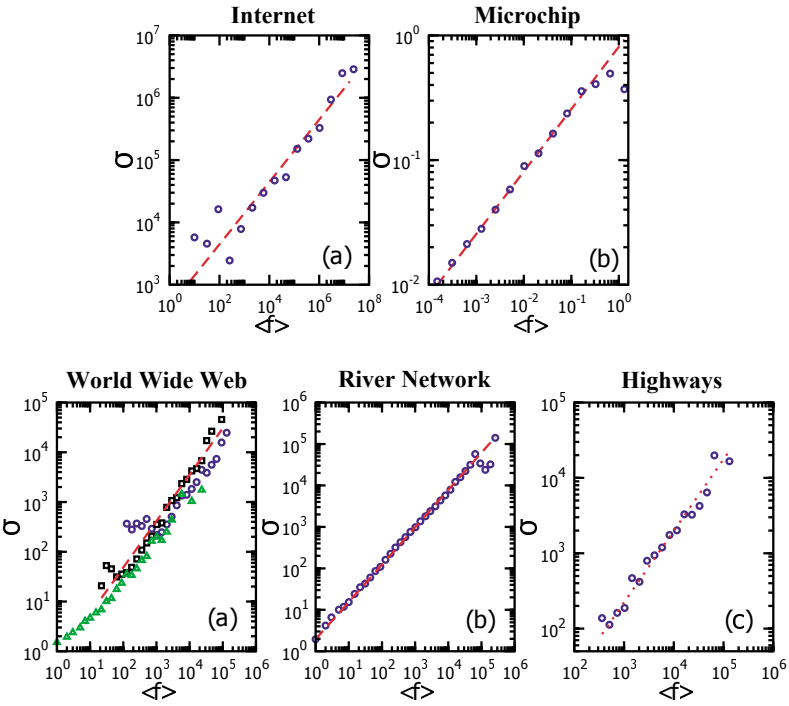


図 5.3: 種々のネットワークにおけるノード上の平均流とその標準偏差の関係．上段がインターネットとマイクロチップ内の平均流と揺らぎの関係で点線は傾き $\alpha = 1/2$ の直線である．下段が WWW，河川，高速道路における平均流と揺らぎの関係で，点線は傾き $\alpha = 1$ の直線である．文献 [107] の Fig.2，Fig.3 からの引用．

モデル２：最短経路過程

もう 1 つのモデルは，各時刻において，始点ノードと終点ノードのペアを多数選び，このノード対間の最短経路を流れる粒子を考えるモデルである．これは，パケットの少ないインターネット上のパケット流に対応している．このモデルにおいても，各ノードの粒子数を記録することで，ノード上の平均粒子数とその標準偏差を求めている．各時刻で同じペア数を取った場合の結果が図 5.4(b) の一番下のプロットである．モデル 1 と同様，$\langle f \rangle$ と σ の間に $\alpha = 1/2$ のスケーリング則が観測される．このモデルでも，ペア数揺らぎ（総流量揺らぎ）の効果を調べており，図 5.4(b) 一番上のプロットに示すとおり，揺らぎが十分大きいときに $\alpha = 1$ のスケーリン則が現れている．

拡散モデルにおいて $\alpha = 1/2$ のスケーリング則が現れる理由を次節で簡単に説明する．

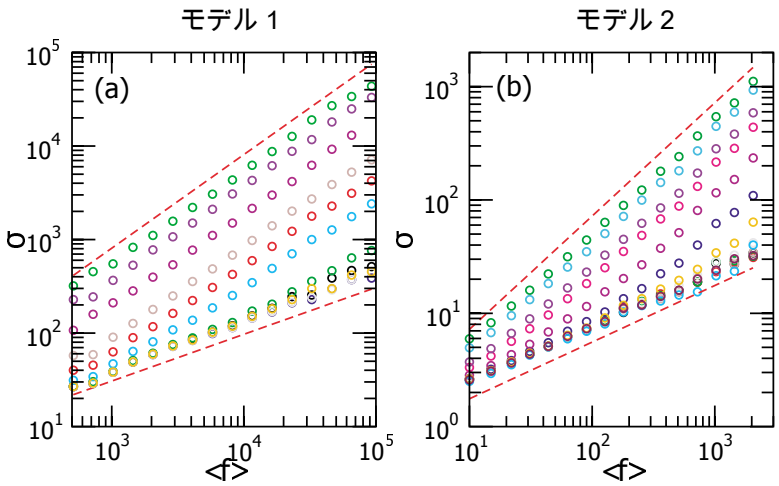


図 5.4: モデル 1 とモデル 2 による流量の平均 $\langle f \rangle$ とその標準偏差 σ の関係．それぞれの図のプロットは総流量 $W = [\langle W \rangle - \delta W, \langle W \rangle - \delta W]$ に対する結果である．ここで総流量 W は平均流 $\langle W \rangle$ の周りで幅で δW で一様に揺らいでおり，下から順に $\delta W = 0,\ 20,\ 40,\ 80,\ 100,\ 200,\ 800,\ 1000,\ 4000,\ 10000$ に対する結果である．平均はすべてに共通して $\langle W \rangle = 10^4$ である．赤破線はそれぞれの図ともに下が傾き 1/2，上が 1 である．文献 [107] からの引用．

5.2.2 拡散モデルの解析的取扱い

ノード数 N，エッジ数 M の単連結無向ネットワークを考える．まず，このネットワーク上にランダムウォーカーを 1 つだけ放つことを考える．長時間経ったのちにあるノードにウォーカーが存在する確率を求める．時刻 t においてノード j にいたウォーカーが次の時刻 $t+1$ にノード i へと遷移する確率 B_{ij} を用いると，時刻 $t+1$ にノード j にいる確率 $p_j(t+1)$ は，マスター方程式，

$$p_i(t+1) = \sum_j B_{ij} p_j(t) \tag{5.7}$$

を満たす．ここで遷移確率行列 B_{ij} は隣接行列を用いて $B_{ij} = A_{ij}/k_j$ と表せる．定常状態 $\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j$ において，式 (5.7) は定常確率ベクトル $\boldsymbol{p}$ を用いて，

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{p} \tag{5.8}$$

という固有値方程式に帰着する．この方程式の解は，

$$p_i = \frac{k_i}{2M} \tag{5.9}$$

であることが，式 (5.8) へ式 (5.9) を代入することで確かめられる．式 (5.9) からわかるように，定常に達した後のウォーカーのノード上存在確率は，単純にそのノードの次数に比例する [108, 109].

次に，ランダムウォーカーが W_0 個だけネットワークにいる場合を考えよう．ランダムウォーカーは互いに相互作用せず，各時刻において各々のウォーカーが隣接ノードのいづれかに等確率で遷移するものとする．次数 k のノード上のウォーカー数分布 $h_k(w)$ は，定常確率 p_k (ここで定常確率は次数にのみ依存するので添え字をノード番号から次数へ変更した) を用いて，

$$h_k(w) = \binom{W_0}{w} p_k^w (1-p_k)^{W_0-w} \tag{5.10}$$

のように二項分布として表すことががができる．よく知られている二項分布の平均と標準偏差を用いると，平均ウォーカー数 $\langle w_k \rangle$ とその分散 σ_k^2 は，

$$\langle w_k \rangle = \frac{k}{2M} W_0 \tag{5.11}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{kW_0}{2M}\left(1 - \frac{k}{2M}\right) \tag{5.12}$$

となる．ネットワークが十分に大きく $M \gg k_{\max}$ のとき，$\sigma_k^2 \approx kW_0/2M$ であるから，

$$\sigma_k \sim \langle w_k \rangle^{1/2} \tag{5.13}$$

という $\alpha = 1/2$ のスケーリング則を得る．

Menezes と Barabási の論文 [107] を契機に，スケーリング指数 α の値に関する論争が起きた．議論の内容とノード上のウォーカー数の統計的性質については文献 [110–112] に譲るとして，ここではウォーカー数揺らぎと指数 α の関係について簡単に述べる．Meloni らは，拡散モデルの平均流とその揺らぎを，ウォーカー数の揺らぎ δW，ノードの次数 k，データ観測の窓幅 T によって説明できることを示している [111]．ウォーカー数のゆらぎ δW と観測幅 T を考慮した場合の平均と分散は

$$\langle w_k \rangle = \frac{kW_0T}{2M} \tag{5.14}$$

$$\sigma_k^2 = \langle w_k \rangle \left(1 + \langle w_k \rangle \frac{\delta W^2}{W_0^2}\right) \tag{5.15}$$

となる．窓幅 T が小さく，ウォーカー数の揺らぎ δW が小さいという極限で $\alpha = 1/2$ が現れ，T が大きく，揺らぎ δW が大きいという極限においては $\alpha = 1$ が現れる．中間領域では，平均流が小さい領域で $\alpha = 1/2$ となり，平均流が大きくなるにつれて $\alpha = 1$ へと漸近する．

5.3 過負荷故障確率理論

前節では，ネットワークにおけるノード上の流れの統計的性質を観測データに基づいて示し，その統計則をランダムウォーカーによる拡散モデルから説明した．ネットワーク上の流れがノードに与える負荷にもなっていることを考慮すると，ノード上の負荷の揺らぎの統計的性質は，ランダムウォーカーを多数放ったネットワークにおけるノード上のウォーカー数揺らぎによって記述できることになる．そこで，ランダムウォーカーによってネットワーク上の負荷をモデル化し，ノードの過負荷故障確率を求めることを考える．すなわち，ランダムウォーカーが多数存在するネットワークにおいてノード上のウォーカー数が或る閾値を超える確率を求めればよく，ノード上のウォーカー数分布を $P(w)$ とすると，式 (5.5) で与えられる確率を計算することにほかならない．このようなシナリオを初めて理論的に定式化したのは Kishore ら [113, 114] であるので，以下では Kishore らの研究の流れを簡単に述べる．

Kishore らは，ノード i の耐性 q_i を平均負荷 $\langle w_i \rangle$ とその標準偏差 σ_i を用いて，

$$q_i = \langle w_i \rangle + m\sigma_i \tag{5.16}$$

と設定した．ここで m は耐性を特徴づけるパラメータである．平均的な負荷に加え，揺らぎをどの程度まで許すかを m によって決めているため，式 (5.16) の耐性は極めて自然設定であるといえる．互いに相互作用しないランダムウォーカーが W_0 個だけ存在する総エッジ数 M の単連結無向ネットワークにおける次数 k のノード上のウォーカー数分布や平均ウォーカー数，およびその分散はすでに 5.2 節で求めた．それらは，$p_k = k/2M$ として，それぞれ

$$h_k(w) = \binom{W_0}{w} p_k^w (1-p_k)^{W_0-w} \tag{5.17}$$

$$\langle w_k \rangle = \frac{k}{2M} W_0 \tag{5.18}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{kW_0}{2M}\left(1 - \frac{k}{2M}\right) \tag{5.19}$$

であった．これらの量はすべて次数 k のみの関数であるので，耐性 q_i も次数のみの形，

$$q_k = \langle w_k \rangle + m\sigma_k \tag{5.20}$$

で書くことができる．式 (5.5) に対応する過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ は，総ランダムウォーカー数が W_0 であることと，ウォーカー数が整数しかとらないことを考慮すれば，

$$F_{W_0}(k) = \sum_{w=[q_k]+1}^{W_0} \binom{W_0}{w} p_k^w (1-p_k)^{W_0-w} \tag{5.21}$$

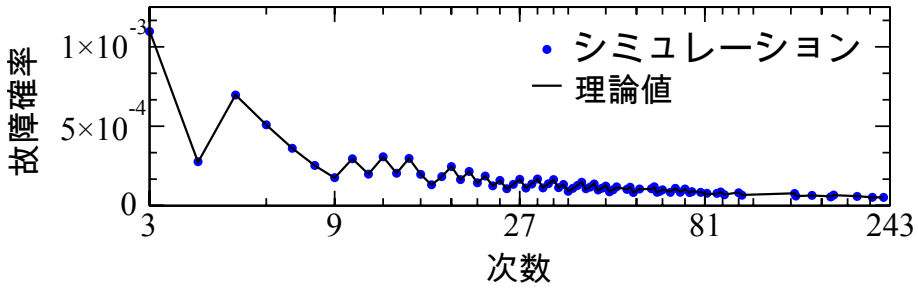


図 5.5: 過負荷故障確率の次数依存性の理論値と数値シミュレーションの比較．実線が理論値で，シンボルがシミュレーション結果を表している．ノード数 $N = 5000$，エッジ数 19815 で $\gamma = 2.2$ のスケールフリー・ネットワークで 100 通りの異なるウォーカー配置によって数値シミュレーションを行っている．ウォーカー数と耐性パラメータは，それぞれ $W_0 = 2M$ と $m = 4$ である．図は文献 [114] からの引用であり，本論文の記法に改めたものである．

とかける．ここで $[x]$ は x 以下の最大整数を意味する．過負荷故障確率 (5.21) をみてわかるように，総ウォーカー数 W_0 が一定であるならば，故障確率は次数 k のみに依存することがわかる．過負荷故障確率 (5.21) は，二項分布の相補累積関数であり，この関数は一般化された不完全ベータ関数 $I_p(x, y)$ [115] を用いて，

$$F_{W_0}(k) = I_{k/2M}([q_k] + 1, W_0 - [q_k]) \tag{5.22}$$

と書くことができる．ここで，正則化された不完全ベータ関数 $I_p(x, y)$ は，

$$I_p(x, y) = \frac{B(p; x, y)}{B(x, y)} \tag{5.23}$$

で定義される関数であり，ベータ関数 $B(x, y)$ および不完全ベータ関数 $B(p; x, y)$ は，

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{5.24}$$

$$B(p; x, y) = \int_0^p t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{5.25}$$

で定義される．

図 5.5 は，実際に多数のランダムウォーカーをネットワーク上に放ち，次数 k のノードに耐性 q_k を超えるようなウォーカー数が訪れる確率を数値シュミレーションから求めた場合と式 (5.21) を比較した図である．理論が数値シュミレーションと非常によく一致していることがわかる．ここで重要なのは，過負荷故障確率が次数の減少関数であるということである．このことは，過負荷故障はハブよりもむしろ，低次数ノードで起こりやすいことを意味している．

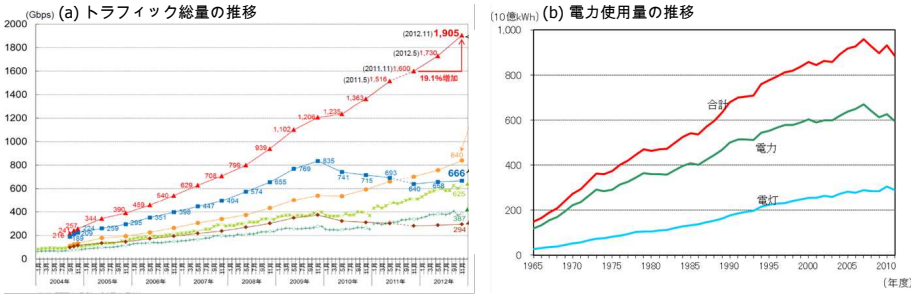


図 5.6: 日本の (a) トラフィック総量の推移と (b) 電力使用量の経年変化．年々増大していることがわかる．(a) と (b) のデータはそれぞれ総務省 [116] と電気事業連合 [117] より引用した．

5.4 過負荷故障パーコレーション

5.4.1 総負荷量の増大効果

スケールフリー性を有するネットワークは過負荷故障に対して頑強であろうか．Kishore らの過負荷故障確率理論によれば，ハブは過負荷故障を起こしにくい．ランダムなノード除去に対して，スケールフリー・ネットワークが極めて頑強であったことを考えると，スケールフリー・ネットワークは過負荷故障に対して頑強であるといえそうであるが，この素朴な予想は正しいであろうか．前節で述べた過負荷故障確率理論では，ネットワークの総負荷量が一定に保たれている．しかしながら，現実の多くのネットワークにおける総負荷量は年々増している．日本におけるインターネットのトラフィック総量と，電力使用量の経年変化が図 5.6 に示されているが，この図からもわかるようにネットワーク上の総負荷量は年々増大している．このような総負荷量の経年変化は，過負荷故障確率の振る舞いに影響を与える可能性がある．

総負荷が初期値 W_0 から $W(>W_0)$ に増大した場合，過負荷故障確率は式 (5.22) ではなく，

$$\begin{aligned} F_W(k) &= \sum_{w=[q_k(W_0)]+1}^{W} \binom{W}{w} p_k^w (1-p_k)^{W-w} \\ &= I_{k/2M}([q_k(W_0)]+1, W-[q_k(W_0)]) \end{aligned} \tag{5.26}$$

で与えられることになる．ここで注意しなくてはならないのは，耐性 q_k が初期負荷 W_0 によって決められていることである．すなわち，耐性設定時よりも総負荷量が増大していることになる．ある耐性パラメータ m をもったネットワークにおける過負荷故障確率 (5.26)

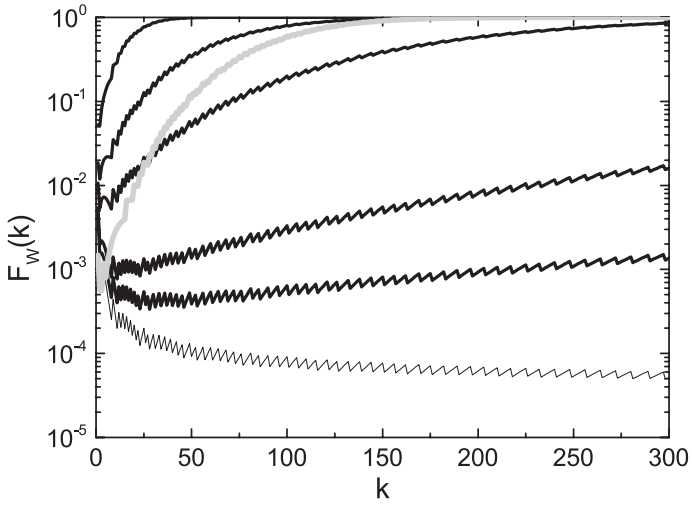


図 5.7: 様々な総負荷量 W に対する過負荷故障確率 $F_W(k)$ の振る舞い．一番下の細い実線が $W = W_0$ に対する $F_W(k)$ の振る舞いであり，Kishore らの結果に等しい．太い黒実線が上から順に，それぞれ $W = 2W_0$，$W = 1.5W_0$，$W = 1.3W_0$，$W = 1.1W_0$ と $W = 1.05W_0$ に対する $F_W(k)$ の振る舞いである．ただし，耐性パラメータは，$m = 4$ で固定されている．太い灰色実線は，$W = 1.628W_0$，$m = 6$ に対する $F_W(k)$ の振る舞いを表している．全ての計算において，初期総負荷量を $W_0 = 2M$ とし，$M = 200000$ としている．過負荷故障確率のジグザグとした振る舞いは，式 (5.26) の $[q_k(W_0)]$ のためである．

の次数依存性を，様々な総負荷量 W の下で計算した結果が図 5.7 である．総負荷量 W が $W \approx W_0$ のとき，過負荷故障確率 $F_W(W)$ は次数の減少関数である．しかし，$W \gg W_0$ における $F_W(W)$ の振る舞いは質的に変化し，次数の増加関数へと転じている．これより，$W > W_0$ なる総負荷量を有するスケールフリー・ネットワークが過負荷故障に対して頑強であるか否かは自明ではなく，定量的な議論を行う必要があることがわかる．

5.4.2 パーコレーション転移点

故障に対するネットワークの頑強性には二通りの意味があった．一つは，第 3 章で述べたように，ノードをどの程度一斉除去してもネットワークが大域的連結性を維持し続けられるかを表すものであり，もう一つは第 4 章で述べたように，少数ノードの初期除去に伴うカスケード故障の後においてもなお保ち続け得る連結性の程度を意味するものであった．本節では，負荷揺らぎに起因する Extreme Events としての過負荷故障に対し，前者の意味における頑強性とスケールフリー性との関係を議論する（後者の意味での頑強性は第 6 章で扱う）．

前者の意味での頑強性はパーコレーション転移の臨界点によって評価できることを第 3 章で述べた．それ故，過負荷故障パーコレーションに対するネットワークの頑強性を評価するには，過負荷故障確率に従ったノードの一斉除去に対するパーコレーション転移点を計算する必要がある．その際の過負荷故障確率としては，式 (5.22) で与えられる総負荷量一定の下での確率 $F_{W_0}(k)$ ではなく，式 (5.26) で与えられる総負荷量が W_0 から W へ増加する場合の確率 $F_W(k)$ を採用する．3.4 節で述べたように，任意の次数分布関数に従い，任意の隣接次数相関を有するネットワークから，任意の次数依存性をもつノード除去確率でノードを除去した場合のパーコレーション転移点を求める手法は，Tanizawa ら [73] によって提案されている．この手法は母関数の考え方を発展させたものであり，転移点近傍においてネットワークがツリー構造でありさえすれば，どのようなネットワークに対しても適用可能な手法である．本節から 5.4.4 節までは次数相関の無いネットワークを扱う．そのため，Tanizawa らの理論に従えば，式 (3.59) で与えられる $\lambda_{\max}$ が 1 に等しくなる条件から臨界点を求めることができることになる．すなわち，パーコレーション転移点は，

$$\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k b_k k(k-1)P(k) = 1 \tag{5.27}$$

から計算できる．ノードの生き残り確率 b_k が $b_k = 1 - F_W(k)$ であることと $\langle k \rangle = \sum_k kP(k)$ であることを考慮すると，式 (5.27) は

$$\sum_k \left[(k-1)F_W(k) - k + 2\right] kP(k) = 0 \tag{5.28}$$

となる．初期総負荷量 W_0 や耐性パラメータ m などのパラメータが一定で，総負荷量 W のみがこのモデルにおける変数であるとしたならば，パーコレーション転移点は臨界総負荷量 $W_{\rm c}$ によって与えられる．あるいは，臨界総負荷量 $W_{\rm c}$ を用いて定義される臨界ノード削除率 $f_{\rm c}$，

$$f_{\rm c} = \sum_k F_{W_{\rm c}}(k)P(k) \tag{5.29}$$

も臨界点を示す指標である．$W_{\rm c}$ や $f_{\rm c}$ の意味を考えれば，これらの値が小さいほどネットワークは脆弱であることは明らかである．臨界総負荷量 $W_{\rm c}$ と臨界ノード削除率 $f_{\rm c}$ の値によってネットワークの頑強性が評価できることになるが，5.4.4 節で示すように，両者の示す頑強性が意味するものは，必ずしも同じものではない．

$F_W(k)$ の表式 (5.26) を代入した式 (5.28) を W について解くことにより臨界総負荷量 $W_{\rm c}$ が求められ，その値から式 (5.29) より臨界ノード除去率 $f_{\rm c}$ が計算できる．しかし，実際の計算を遂行するには次数分布関数 $P(k)$ の形を決めなくてはならない．本研究の目的はスケー

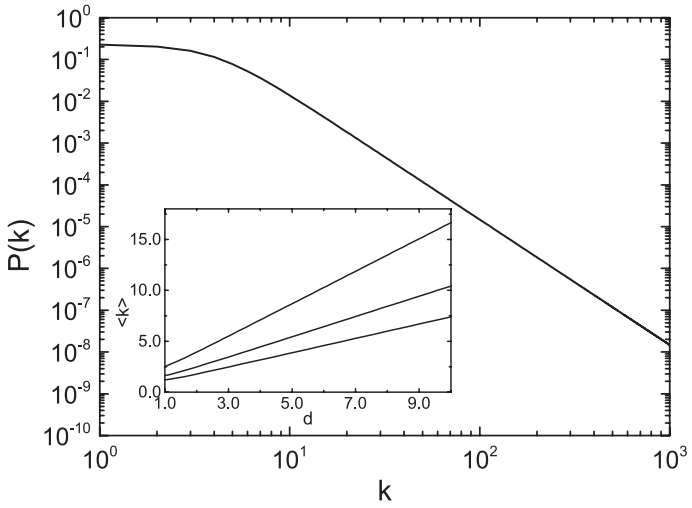


図 5.8: $\gamma = 3.0$，$d = 4.0$ とした式 (5.30) によって与えられる次数分布関数．この次数分布関数に対する平均次数は $\langle k \rangle = 4.44$ である．インセットは平均次数 $\langle k \rangle$ のパラメータ d 依存性で，上からスケールフリー指数それぞれ $\gamma = 2.5$，$\gamma = 3.0$ と $\gamma = 4.0$ に対する結果を表している．

ルフリー・ネットワークの頑強性を評価することであるから，$P(k)$ は大きな k に対して漸近的に $P(k) \sim k^{-\gamma}$ の形を持っていなければならない．最も単純な選び方は最小次数 $k_{\min}$ より大きな k に対して $P(k) = Ck^{-\gamma}$ と取ることであるが，この場合スケールフリー性の程度，すなわち γ の値を変化させると平均次数 $\langle k \rangle$ も変化してしまう．平均次数の大きなネットワークは当然頑強になるので，頑強性の変化が平均次数によるものなのかスケールフリー性によるものなのかを判断することができなくなる．そこで本研究では，平均次数を固定したまま γ の値を変えることができるような次数分布関数として，

$$P(k) = \frac{C}{k^{\gamma} + d^{\gamma}} \quad (1 \leq k < \infty) \tag{5.30}$$

を採用した．ここで d と γ は実数パラメータであり，$C = [\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k^{\gamma} + d^{\gamma})]^{-1}$ は規格化定数である．指数 γ は平均次数 $\langle k \rangle$ が有限となるように $\gamma > 2$ でなくてはならない．図 5.8 に示したように，この分布関数は次数 k が十分大きいところ $(k \gg 1)$ で $P(k) \sim k^{-\gamma}$ に漸近するため，ネットワークはスケールフリー性をもったランダムグラフとなる．また，図 5.8 のインセットにあるように，スケールフリー指数 γ を固定したまま d を変化させることで，平均次数 $\langle k \rangle$ を変化させることができる．したがって，平均次数を一定に保ったままスケールフリー性の程度（すなわち γ）と頑強性の間の関係を調べることができる．

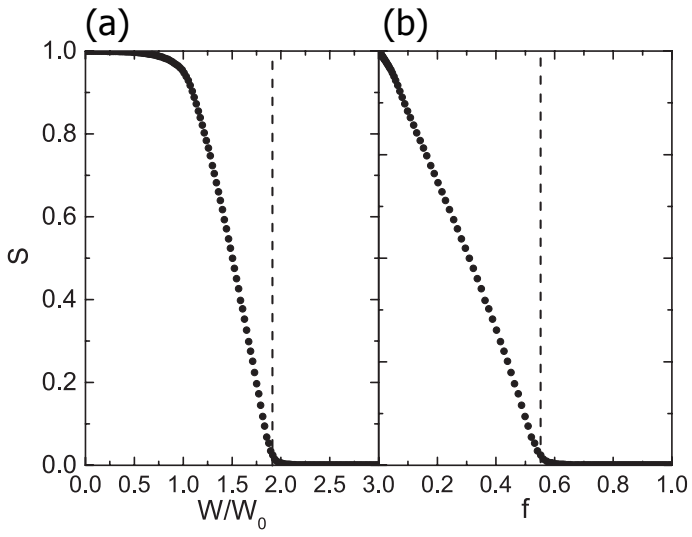


図 5.9: 解析計算と数値シミュレーションの比較．シンボルは，シミュレーションによって得られた最大連結成分の相対サイズ S を，(a) 初期総負荷量でリスケールされた負荷 W/W_0 の関数，および (b) その負荷のもとで取り去られたノード割合 f の関数としてそれぞれプロットした結果を表している．次数分布関数 $P(k)$ は式 (5.30) において $\gamma = 2.5$，$d = 5.8272$ ($\langle k \rangle = 10.0$) としたものを採用した．数値計算は，この次数分布関数に従うノード数 $N = 10\ 000$ の一般化ランダムグラフに対して行われ，数値計算は 50 サンプル平均をとっている．数値シミュレーション・解析計算ともに，耐性パラメータと初期総負荷量は $m = 2$，$W_0 = 2M$ としている．それぞれの図における垂直の破線は解析計算から求めた臨界値であり，$W_c/W_0 = 1.912$ と $f_c = 0.547$ である．

最後に，上述の解析的取扱いの正当性を確かめるため，式 (5.28) と式 (5.29) によって計算される臨界総負荷量 W_c と臨界ノード削除率 f_c を数値計算結果と比較した．図 5.9 の黒丸は，最大連結成分の相対サイズ S の総負荷量依存性およびノード削除率依存性の数値計算結果を示している．垂直な破線は，解析計算によって得られた過負荷故障によるパーコレーション転移点である．数値計算において最大連結成分が消失する点と解析計算から予測される転移点とが，非常によく一致していることがわかる．

5.4.3 スケールフリー・ネットワークの頑強性

図 5.10 は，解析的に計算された臨界総負荷量 W_c を初期総負荷量 W_0 でリスケールした量をスケールフリー指数 γ の関数として描いた結果を示している．この計算において，分岐行

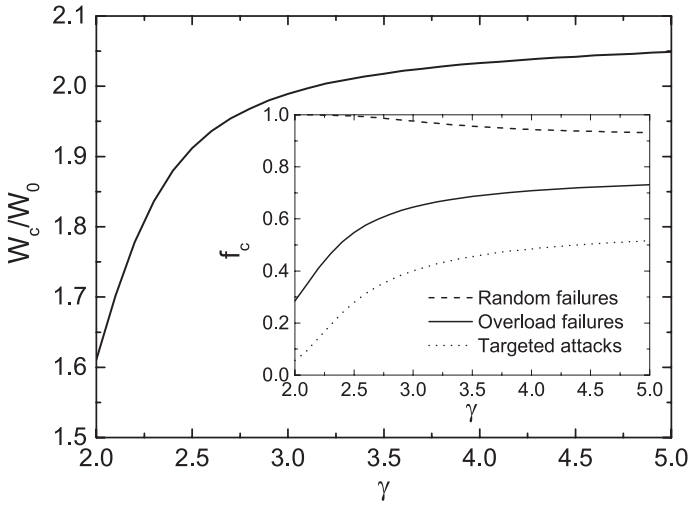


図 5.10: リスケールされた臨界総負荷量 $W_{\rm c}/W_0$ のスケールフリー指数 γ 依存性．$m = 2$ 及び $W_0 = 2M$ としている．また，γ によらず平均次数が $\langle k \rangle = 10.0$ となるよう式 (5.30) の次数分布関数のパラメータ d を調節している．インセットの実線，破線および点線は，それぞれ過負荷故障，ランダム故障およびターゲット攻撃によるパーコレーションの臨界ノード除去率 $f_{\rm c}$ の γ 依存性を表している．

列 $B_{k'k}$ のサイズを $k \leq k_{\max}$ でカットオフしている．ここで $k_{\max}$ は，

$$\int_{k_{\max}}^{N} P(k)dk = \frac{1}{N} \tag{5.31}$$

によって見積もられるネットワークの最大次数に対応している．図 5.10 の結果では，十分大きなネットワークサイズとして $N = 10^5$ としている．また，γ の値に依らず平均次数が $\langle k \rangle = 10$ となるように式 (5.30) の d を調節している．さらに，耐性パラメータを $m = 2$，初期総負荷量を $W_0 = 2M$ で固定し，総エッジ数を $M = \langle k \rangle N = 500\ 000$ としている．図 5.10 の実線は明らかに γ の増加関数である．このことは，スケールフリー性の程度を強めること（γ の減少）で過負荷故障に対する臨界総負荷量の意味でのネットワークの頑強性が弱められること（$W_{\rm c}$ の減少）を意味している．また，図 5.10 インセットの実線は，臨界ノード削除率 $f_{\rm c}$ の γ 依存性を表している．臨界総負荷量の振舞いと同様に，臨界ノード削除率もスケールフリー指数の増加関数となっており，スケールフリー・ネットワークが脆弱であることを示している．これらの結果は，臨界点近傍における過負荷故障確率 $F_{W \approx W_{\rm c}}(k)$ が，次数 k の増加関数となっていること，すなわち高次数ノードほど過負荷故障により除去される確率が高いという事実に起因している．3.3.2 節で述べたように，スケールフリー性が

強いほど高次数ノードの除去に対してネットワークは脆弱となる．したがって，$F_W(k)$ が k の増加関数である過負荷故障パーコレーションにおいても，スケールフリー性が強いネットワークほど臨界削除率 $f_{\rm c}$ は小さくなる．また，臨界総負荷量 $W_{\rm c}$ がスケールフリー指数 γ の増加関数であることも，$f = \sum_k F_W(k)P(k)$ が W の増加関数であることから理解できる．図 5.10 インセットの破線と点線は，それぞれランダム削除とターゲット攻撃の結果を表している．過負荷故障パーコーレションに対するネットワークの $f_{\rm c}$ は，両者の臨界除去率の中間的なものになっていることがわかる．ここで，ランダム除去の結果が $\gamma < 3$ においても $f_c = 1$ となっていないのは，次数分布関数として式 (5.30) を採用しており，最小次数から完璧なスケールフリー性をもっていないためである．

5.4.4　転移点の耐性パラメータ依存性

耐性パラメータ m の変化によってネットワークの頑強性がどのように変化するかを調べることは，頑強なネットワークを構築する上で重要である．3 種類のネットワーク構造に対して，臨界総負荷量 $W_{\rm c}$ と臨界ノード削除率 f_c の耐性パラメータ m 依存性を調べた結果が図 5.11 である．3 つの理論線は，それぞれ Erdös-Rényi のランダムグラフと，次数分布関数が式 (5.30) に従いスケールフリー指数が $\gamma = 3.5$ と $\gamma = 2.5$ のネットワークに対する結果を表している．図 5.11(a) からわかるように，臨界総負荷量は耐性パラメータの増加関数である．これは，ネットワークの耐性の増加によって，ネットワークが許容できる総負荷量が増加したことを意味しており，自然な結果である．一方，臨界ノード除去率は耐性パラメータの減少関数となっている．これは，次のように理解することができる．ネットワーク構造が同じで，耐性パラメータ m と総負荷量 W が異なる系において，同じ数だけノードが故障する状況を考える．そのような状況は図 5.7 の黒実線の上から 3 番目の結果 $(m = 4, W = 1.3W_0)$ と灰色実線の結果 $(m = 6, W = 1.628W_0)$ に対応している．2 つ結果を比べると，耐性パラメータ $m = 4$ のネットワークの方が $m = 6$ のネットワークよりも低次数領域において過負荷故障を起こしやすく，高次数領域においてはこの関係が逆転していることがわかる．このことは，高い耐性をもったネットワークでは，過負荷故障がハブにおいて起こる傾向がより高いことを意味している．3.3.2 節で述べたようにスケールフリー・ネットワークは少数の高次数ノードの除去で崩壊する．したがって過負荷故障パーコレーションにおいては，耐性が大きいネットワークの方が耐性が低いものに比べてハブでの過負荷故障が起きやすいため，臨界除去率 $f_{\rm c}$ が耐性パラメータ m の減少関数になると結論付けられる．図 5.11 において $W_{\rm c}$ と $f_{\rm c}$ の γ 依存性が異なるという結果は，過負荷故障パーコレーションに対するネッ

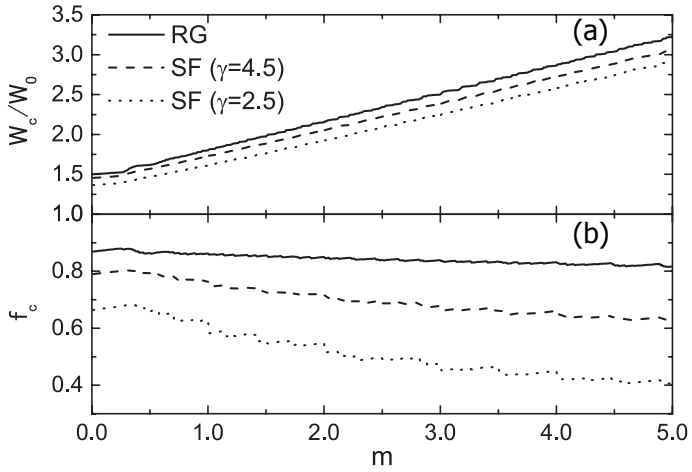


図 5.11: リスケールされた臨界総負荷量 W_c/W_0(a) と臨界ノード除去率 f_c(b) の耐性パラメータ依存性．破線と点線はそれぞれ $\gamma = 4.5$ と $\gamma = 2.5$ とした次数分布関数 (5.30) に従うスケールフリー・ネットワーク (SF) に対する結果を表しており，実線は Erdös-Rényi ランダムグラフ (RG) に対する結果を表している．平均次数と初期総負荷量は，それぞれ $\langle k \rangle = 10.0$, $W_0 = 2M$ としている．

トワークの頑強性については臨界総負荷量の意味と臨界ノード除去率の意味で分けて考える必要があることを示している．

5.4.5 次数相関がある場合

次に，次数相関が過負荷故障に対するネットワークの頑強性にどのような影響を与えるかを調べる．2.4.4 節で述べたように，現実のネットワークには次数相関があるため，次数相関がネットワークの頑強性に与える影響を理解することは重要である．次数相関がないとき，任意抽出したエッジの一端の次数が k である確率 $R(k)$ を用いて，同時確率 $P(k, k')$ は

$$P(k, k') = R(k)R(k') \tag{5.32}$$

と表せる．ここで

$$R(k) = \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} \tag{5.33}$$

である．反対に，同時確率 $P(k, k')$ が式 (5.32) のように表せないならば，ネットワークは次数相関を有していることになる．本研究では，次数相関をもつネットワークの過負荷故障を

考えるために，同時確率の形として Newman [32] によって提案されている

$$P(k,k') = P_0(k,k') - \frac{r}{r^*}\left[P_0(k,k') - Q(k,k')\right] \tag{5.34}$$

を用いる．ここで $P_0(k,k')$ は式 (5.32) で与えられる次数相関がないときの同時確率であり，$Q(k,k')$ と r^* は規格化条件を満足している任意の分布関数 $X(k)$ を用いて，

$$Q(k,k') = R(k)\tilde{R}(k') + R(k')\tilde{R}(k) - \tilde{R}(k)\tilde{R}(k'), \tag{5.35}$$

$$\tilde{R}(k) = \frac{kX(k)}{\langle k\rangle_X}, \tag{5.36}$$

$$\langle k^n\rangle_X = \sum_k k^n X(k), \tag{5.37}$$

$$r^* = -\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} - \frac{\langle k^2\rangle_X}{\langle k\rangle_X}\right)^2, \tag{5.38}$$

$$\sigma^2 = \frac{\langle k^3\rangle}{\langle k\rangle} - \frac{\langle k^2\rangle^2}{\langle k\rangle^2} \tag{5.39}$$

によって与えられる関数である．式 (5.34) の r は，次数相関を表す所望の Pearson 相関係数である．実際，式 (5.34) の同時確率を用いて $\sum_{k,k'}(k-1)(k'-1)[P(k,k') - P_0(k,k')]/\sigma^2$ を計算すると，r に等しくなる．ただし，r の取りうる範囲は分布関数 $X(k)$ の選び方に依存している．本研究では，次数分布関数 (5.30) と同じ関数形を用いて，

$$X(k) \propto \frac{1}{k^\alpha + D^\alpha}, \qquad (1 \le k < \infty), \tag{5.40}$$

とし，パラメータを $\alpha = 8.0$ と $D = 12.0$ とした．また，次数分布関数 $P(k)$ は，$\gamma = 4.5$, $d = 15.854$ とした式 (5.30) を採用した．このとき平均次数は $\langle k\rangle = 10.0$ である．$\gamma > 4$ のような大きなスケールフリー指数の値を採用しているのは，式 (5.39) を有限の値にするためである．

次数相関を有しているネットワークに対するパーコレーション転移点も，3.4 節で述べた分岐行列 $B_{k'k}$ の最大固有値が 1 に等しいという条件から計算できる．ただし，次数相関があるため最大固有値は式 (3.59) で与えられることはなく，そのため式 (5.28) を適用することはできないので，分岐行列 $B_{k'k}$ を数値的に対角化する必要がある．数値対角化の際，行列の大きさは $k_{\max} = 276$ でカットオフした．これは，ネットワーク・サイズが $N = 10^5$ であることに対応している．初期総負荷量 $W_0 = 2M(= \langle k\rangle N)$ のもとで，臨界ノード除去率 f_c の相関係数 r 依存性を調べた結果が図 5.12 である．3 本の実線は，耐性パラメータ m の違いを表している．耐性パラメータの値によらず，臨界ノード除去率 f_c は相関係数 r の増

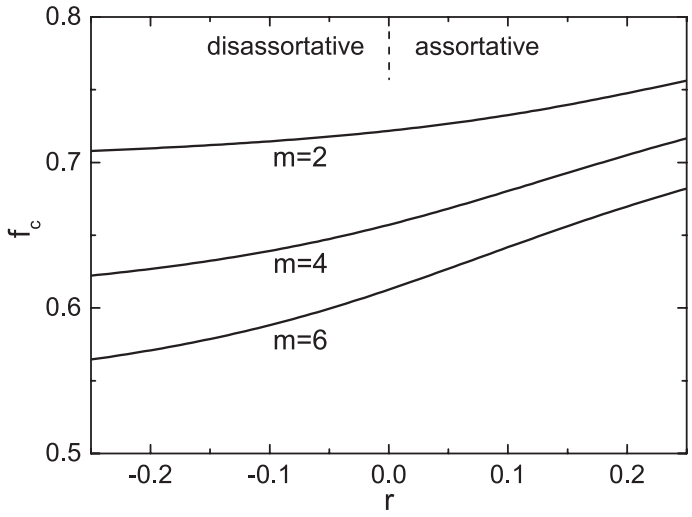


図 5.12: 臨界ノード除去率 f_c を次数相関を表す Pearson 相関係数 r の関数として描いた結果．計算条件の詳細は本文中に記載したとおりである．3 つの実線は上からそれぞれ $m = 2, 4$ と 6 に対する結果である．

加関数である．このことは正の次数相関がネットワークを頑強にしていることを意味している．これは，次数相関を有するスケール・ネットワークのターゲット攻撃に対する頑強性にみられる傾向と同じである [32, 73, 118]．

5.4.6 総耐性が一定の下での頑強性

これまでに，スケールフリー・ネットワークが過負荷故障に対して脆弱であることを明らかにした．その際，ノードの耐性を $q_i = \langle w \rangle_i + m\sigma_i$ と設定していた．ここで，耐性 q_i は $\langle w \rangle_i$ と σ_i を通じて，スケールフリー指数 γ に依存していることに注意しなくてはならない．ノード数 N，エッジ数 M，およびノード耐性パラメータ m が γ によらない一定値とすると，総耐性 $Q \equiv \sum_i q_i$ は γ の増加関数になる．明らかに総耐性 Q が小さいネットワークは脆弱であるため，γ の減少に伴うネットワークの脆弱化が総耐性の減少によるものなのか，スケールフリー性の強化によるものなのかが明確ではない．そこで，スケールフリー性の強さ（γ の値）によらず一定の総耐性を有しているネットワークの過負荷故障に対する頑強性を調べることにより，頑強性に対するスケールフリー性の寄与を明らかにする．

各ノードの耐性は，そのノードの次数 k にのみ依存していた．したがって，ある次数分布

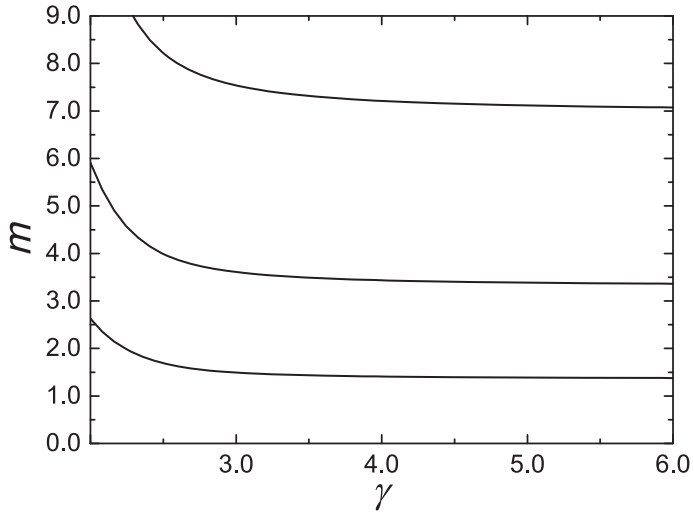


図 5.13: 総耐性 Q を一定とするような耐性パラメータ m とスケールフリー指数 γ の関係．ノード数 $N = 100\ 000$ とし，平均次数を $\langle k \rangle = 10.0$ に固定した場合の結果を示している．また，初期総負荷量を $W_0 = \langle k \rangle N$ としている．3 つの実線は総耐性 Q の値が異なる結果を表しており，上から $Q = 5.0,\ 10.0,\ 15.0$ としている．

関数 $P(k)$ に従うネットワークの総耐性 Q は，ノード数 N を用いて，

$$Q = N \sum_{k=1}^{k_{\max}} q_k(W_0) P(k) \tag{5.41}$$

と表される．ここで，$k_{\max}$ は式 (5.31) の条件によって決まる最大次数である．耐性に対する表式 (5.20) を用いると，次数分布関数 $P(k)$ によらず一定の総耐性 Q を与える m は，

$$m = \frac{Q - W_0}{N \sum_k \sigma_k P(k)} \tag{5.42}$$

によって決まる．これまでと同様，次数分布関数が式 (5.30) に従うとして，ノード数 N と平均次数 $\langle k \rangle$ に加え，総耐性 Q も一定であるという条件のもとで，耐性パラメータ m のスケールフリー指数 γ 依存性を示したのが図 5.13 である．これより，m が γ の減少関数であることがわかる．この結果は，耐性パラメータ m を一定にしたまま γ を増大させると，総耐性 Q が増大し，その結果としてネットワークが頑強化する可能性があることを示唆している．そこで，総耐性 Q を一定にしたまま，式 (5.42) に従って γ の変化とともに m の値を変化させた場合の臨界総負荷量 W_c の γ 依存性を計算した．

図 5.14(a) の実線は，総耐性 Q 一定の下での臨界総負荷量 W_c の γ 依存性を表している．比較として，耐性パラメータ m を一定にした場合の結果を点線で示している．実線の総耐

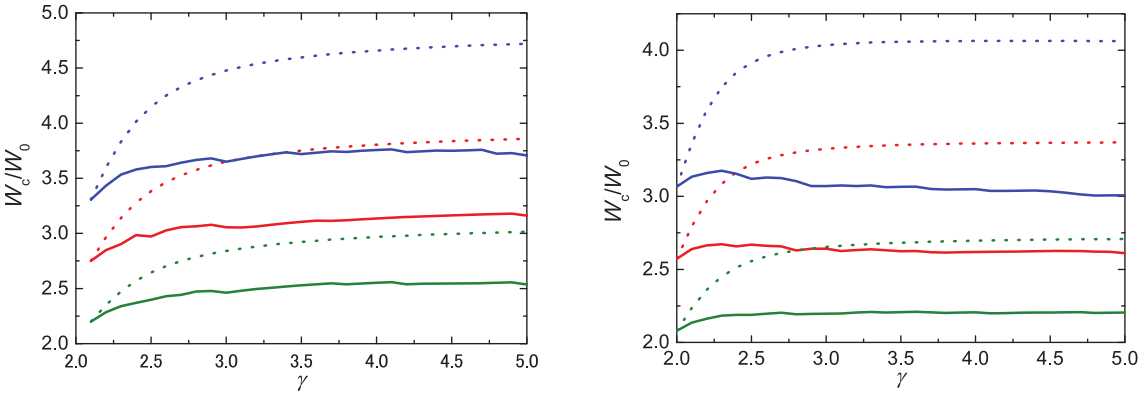


図 5.14: 総耐性 Q を一定とするように耐性パラメータの値を調整した場合のリスケールされた臨界総負荷量 $W_{\rm c}/W_0$ の γ 依存性．(a) は $\langle k\rangle = 5.0$ のネットワークに対する結果．3 本の実線は総耐性 Q の値が異なる場合の結果を表しており，上から $Q = 1.65\times10^6,\ 1.36\times10^6, 1.06\times10^6$ に対応している．点線は m が一定の条件下での結果を表しており，上から $m = 8,\ 6,\ 4$ に対応している．(b) は $\langle k\rangle = 10.0$ のネットワークに対する結果．線の意味は (a) の図と同じであるが，実線において固定する総耐性の値は上から $Q = 2.34\times10^6,\ 2.02\times10^6, 1.66\times10^6$ である．両図ともに，$N = 100000$，$W_0 = \langle k\rangle N$ としている．

性 Q の値は，最小の γ のときの点線の総耐性の値に統一している．ここで重要なことは，実線が γ の増加関数となっていることである．このことは，総耐性 Q が一定の下でもスケールフリー性はネットワークを脆弱にするということを意味している．m を一定とした場合に比べて，Q 一定の条件下での $W_{\rm c}$ の γ に対する増加割合が鈍化しているのは，ネットワーク構造の変化に伴う Q の増加がなくなったためである．過負荷故障確率 $F_W(k)$ のジグザグ構造のために，図 5.14(a) の実線は単調増加関数とはなっていないが，$W_{\rm c}/W_0$ の包絡線は増加しており，γ 無限大の極限でのある臨界値へ漸近している．先に述べたように，過負荷故障に対するスケールフリー・ネットワークの脆弱性の起源は，ハブノードの存在であった．したがって，平均次数を増加させるとハブの効果は弱くなり，$W_{\rm c}$ の γ に対する増加はさらに鈍くなる．実際，図 5.14(b) に示したように，平均次数を $\langle k\rangle = 10.0$ とした場合，図 5.14(a) に示した $\langle k\rangle = 5.0$ の結果に比べて，γ 依存性が弱くなっていることがわかる．

第6章　過負荷故障カスケード

本章では，負荷揺らぎを考慮した過負荷故障カスケード問題を論じる．現実のネットワークの機能停止は，過負荷故障がカスケードすることで大規模化するため、現実ネットワークの頑強性を理解する上で故障の連鎖を考慮することは重要である．従来の過負荷故障カスケードに関する研究のほとんどすべてにおいて，負荷の平均値がノードの耐性を超えたときに過負荷故障は起こるという仮定されてきた．しかしながら，各ノード上の負荷は時間的に常に揺らいでいるため，過負荷故障は時間的に揺らぐ負荷の瞬間的な最大値 (Extreme Events) によって引き起こされる。本章ではまず、過負荷故障カスケード過程をモデル化する。次に過負荷故障カスケード過程が，前章で議論した過負荷故障パーコレーション過程の連鎖であることに着目し，カスケード過程を定式化する。この解析計算を用いて負荷揺らぎに起因した過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性を明らかにする．

6.1　過負荷故障カスケード過程

第 5 章の過負荷故障パーコレーション問題と同様に，時間的に揺らぐ負荷をランダム・ウォーカーでモデル化する．ただし、時間の経過に伴う総負荷量の増大の効果は考えない．ノード数 N，エッジ数 M である単連結な無向ネットワークにおいて，総負荷量が W_0 の下での次数 k のノードの過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ は，正則化された不完全ベータ関数 $I_p(a,b)$ を用いて，

$$F_{W_0}(k) = I_{p_k}([q_k(W_0)]+1, W_0 - [q_k(W_0)]) \tag{6.1}$$

で与えられる．ここで $p_k = k/2M$ は，次数 k の或るノードにウォーカーが 1 つ存在する定常確率であり，$q_k(W_0)$ は平均ウォーカー数 $\langle w \rangle_k$ とその標準偏差 σ_k を用いて

$$q_k(W_0) = \langle w \rangle_k + m\sigma_k \tag{6.2}$$

と与えられる耐性である。また、m はノードの耐性を特徴づけるパラメータである．負荷の時間的な揺らぎを考慮した過負荷故障に起因した過負荷故障カスケード過程のモデルは以下の通りである．

過負荷故障カスケード過程のアルゴリズム

1. ノード数 N，エッジ数 M の初期ネットワークから過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ に従って，ノードを除去する．

2. カスケード過程における時刻 τ においてエッジ数 M_τ となったネットワークの総負荷量 W_τ を、実パラメータ r を用いて

$$W_\tau = \left(\frac{M_\tau}{M}\right)^r W_0, \quad (r > 0) \tag{6.3}$$

に従って更新する．

3. 新たな総負荷量 W_τ のもとで、初期時刻ににおける次数が k_0 で現在時刻 τ における次数が k であるような、クラスター α に属するノードの過負荷故障確率

$$F_{W_\tau^\alpha}(k_0, k) = I_{k/2M_\tau^\alpha}([q_{k_0}(W_0)] + 1, W_\tau^\alpha - [q_{k_0}(W_0)]) \tag{6.4}$$

に従ってそれぞれのノードを除去する．ここで，M_τ^α と W_τ^α は、それぞれ時刻 τ におけるクラスター α の総エッジ数と総負荷量である．

4. 2 - 3 の操作を、故障するノードがなくなるまで繰り返す.

ここで，r は負荷制御パラメータであり，過負荷故障によってネットワーク上の総負荷量がどのように減衰するかを特徴づけるパラメータである．例えば、ある企業が倒産することで、その会社と貸借関係をもつ会社に倒産が波及することがある。負荷制御パラメータ r は、このような連鎖倒産を防ぐために公的資金が企業間取引ネットワークに注入される状況を表している。また電力網においては、発電所などの停止に伴う節電要請によって電力供給量が制限される状況に対応する。r の値が小さいことは，過負荷故障に伴うネットワーク・サイズの変化に対して，総負荷量の減少量が小さいことを意味している．したがって，より小さな値の r でも大域的連結性を保持できるネットワークがより頑強であるといえる．また，クラスター α の総負荷量はクラスターのエッジ本数で按分され、

$$W_\tau^\alpha = \frac{M_\tau^\alpha}{M_\tau} W_\tau \tag{6.5}$$

であると仮定する．また、当然であるが,

$$W_\tau = \sum_\alpha W_\tau^\alpha \tag{6.6}$$

が成立する．本モデルでは，過負荷故障を確率的事象として捉えているため，カスケードの終了条件として，時刻 τ における過負荷故障ノード数の期待値が 1 を下回るという条件を課す．すなわち，時刻 τ におけるネットワーク $\mathscr{G}_\tau$ 内のノード i の故障確率を F_τ^i としたときカスケード終了条件は，

$$\sum_{i\in\mathscr{G}_\tau} F_\tau^i < 1 \tag{6.7}$$

である．

6.2 過負荷故障カスケード過程の定式化

ランダム・ウォークに対する近似

カスケード過程の中でネットワークが分断し複数のクラスターができた際には，式 (6.5) に従って，総負荷量 W_τ はクラスターごとに割り振られると仮定した．このとき、時刻 τ における次数が k のあるノードのウォーカー数分布 $h_k^\alpha(w)$ は

$$h_k^\alpha(w) = \binom{W_\tau^\alpha}{w}\left(\frac{k}{2M_\tau^\alpha}\right)^w\left(1-\frac{k}{2M_\tau^\alpha}\right)^{W_\tau^\alpha - w} \tag{6.8}$$

で与えられる。故に、平均ウォーカー数とその分散は

$$\langle w\rangle_k^\alpha = \frac{k}{2M_\tau^\alpha}W_\tau^\alpha = \frac{k}{2M_\tau}W_\tau \tag{6.9}$$

$$(\sigma_k^\alpha)^2 = \langle w\rangle_k\left(1-\frac{k}{2M_\tau^\alpha}\right) = \frac{k}{2M_\tau}W_\tau\left(1-\frac{k}{2M_\tau^\alpha}\right) \tag{6.10}$$

と求められる．これより，このノードの過負荷故障確率は，初期次数が k_0 であったとすると，

$$F_{W_\tau^\alpha}(k_0,k) = I_{k/2M_\tau^\alpha}([q_{k_0}(W_0)]+1, W_\tau^\alpha - [q_{k_0}(W_0)]) \tag{6.11}$$

となる．本研究のカスケード過程を理論的に扱おうとする際，各クラスターのエッジ本数を個別に求めることはできない．そこで，クラスター間が弱くつながっており，ランダム・ウォーカーがクラスター間を行き来できるという近似を施す．ここで，クラスター間が弱くつながっているとは，エッジ本数には顕わに現れないエッジによって，ウォーカーがクラスター間を移動できるということを意味する．この近似により，時刻 τ において次数 k のノード上にウォーカーが 1 つ存在する定常確率は，

$$p_k = \frac{k}{2M_\tau} \tag{6.12}$$

で与えられ，ウォーカー数分布及びその平均と分散はそれぞれ，

$$h_k(w) = \binom{W_\tau}{w} \left(\frac{k}{2M_\tau}\right)^w \left(1 - \frac{k}{2M_\tau}\right)^{W_\tau - w}, \tag{6.13}$$

$$\langle w \rangle_k = \frac{k}{2M_\tau} W_\tau, \tag{6.14}$$

$$\sigma_k{}^2 = \frac{k}{2M_\tau} W_\tau \left(1 - \frac{k}{2M_\tau}\right) \tag{6.15}$$

となる。これより，クラスター間が弱く連結しているという近似の下での，時刻 τ における次数 k のあるノードの過負荷故障確率は，そのノードの初期次数 k_0 を用いて，

$$F_{W_\tau}(k_0, k) = I_{k/2M_\tau}([q_{k_0}(W_0)] + 1, W_\tau - [q_{k_0}(W_0)]) \tag{6.16}$$

と記述できる．

過負荷故障確率はウォーカー数分布 $[h_k^\alpha(w)$ あるいは $h_k(w)]$ の耐性 $q_k(W_0)$ より上の積分値に等しいので、ランダム・ウォーカーがクラスターに閉じ込められている場合の故障確率と、クラスター間を移動することを許した場合の故障確率で違いを与えるのはウォーカー数分布である。式 (6.8) と式 (6.14) で表されるウォーカー数分布の平均と分散を比べると平均は等しく、分散はそれぞれ

$$(\sigma_k^\alpha)^2 = \frac{k}{2M_\tau} W_\tau \left(1 - \frac{k}{2M_\tau^\alpha}\right)$$

$$\sigma_k{}^2 = \frac{k}{2M_\tau} W_\tau \left(1 - \frac{k}{2M_\tau}\right)$$

であり、右辺括弧内の補正項のみが違っている。本研究では巨大連結成分の相対サイズに興味があり、カスケードの最中で $M_\tau, M_\tau^{\alpha_{\max}} \gg 1$ が成立していると考えられるため、2 つのウォーカー数分布の分散も等しいことになる。ここで，$M_\tau^{\alpha_{\max}}$ は最大クラスター内に含まれる総エッジ本数である。したがって、近似をしない過負荷故障確率と近似を施した過負荷故障確率は、同じ平均値と分散をもった二項分布の $q_k(W_0)$ から上の積分値なので、

$$F_{W_\tau}(k_0, k) \approx F_{W_\tau^\alpha}(k_0, k) \tag{6.17}$$

が成立すると期待される．ウォーカーがクラスター間移動できるという近似によって，クラスターごとのエッジ本数を求める必要がなくなり，過負荷故障カスケードを定式化することができる．次節で本研究の過負荷故障カスケードの解析的取扱いを説明する．

過負荷故障カスケードの定式化

第 3 章で述べたように，ネットワークの次数分布関数及び同時確率 (任意抽出したエッジ端がそれぞれ次数 k と k' である確率) が与えられれば，母関数の議論に沿って，巨大連結成

分の相対サイズを見積もることができる．そこで，カスケードの各時刻におけるこれらの量を追うために、時刻 $\tau+1$ において次数が k である或るノードに隣接する次数が k' であるノードが故障する確率 $\phi_{\tau+1}(k'|k)$ を導入する．時刻 τ において次数 k の隣接ノードの次数が k' である確率が $P_\tau(k'|k)$ で与えられているとする．このとき隣接ノード故障確率 $\phi_{\tau+1}(k'|k)$ は，ネットワーク内から任意抽出したノードの次数が初期時刻 $\tau=0$ において k_0 であり，時刻 τ において k である確率 $G_\tau(k_0,k)$ を用いて，

$$\phi_{\tau+1}(k'|k)=\sum_{k_0'=k'}^{k_{\max}} P_\tau(k'|k)\frac{G_\tau(k_0',k')}{P_\tau(k')}F_\tau(k_0',k') \tag{6.18}$$

と書ける．これより時刻 $\tau+1$ において次数 k の或るノードの隣接ノードが故障を起こす確率 $\phi_{\tau+1}(k)$ は，

$$\begin{aligned}\phi_{\tau+1}(k)&=\sum_{k'=1}^{k_0'}\phi_{\tau+1}(k'|k)\\&=\sum_{k_0'=k'}^{k_{\max}}\sum_{k'=1}^{k_0'}P_\tau(k'|k)\frac{G_\tau(k_0',k')}{P_\tau(k')}F_\tau(k_0',k')\end{aligned} \tag{6.19}$$

で与えられる．ここで時刻 τ の次数分布関数 $P_\tau(k)$ と確率 $G_\tau(k_0,k)$ は，

$$P_\tau(k)=\sum_{k_0=k}^{k_{\max}}G_\tau(k_0,k) \tag{6.20}$$

なる関係が成立するので，$G_\tau(k_0,k)$ を求めれば次数分布関数 $P_\tau(k)$ が求まる．一般に現実ネットワークは次数相関を有しているが，本研究ではスケールフリー性と過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性の関係を明らかにすることを目的としているため，初期ネットワークとして次数相関がないネットワークを考える．初期に次数相関がないネットワークは，過負荷故障カスケード過程の全時間で次数相関を発現することはない [付録 B 参照]．次数相関がないネットワークに対しては $P_\tau(k'|k)=k'P(k')/\langle k\rangle_\tau$ であるので，式 (6.19) は

$$\phi_{\tau+1}=\sum_{k_0'=k'}^{k_{\max}}\sum_{k'=1}^{k_0'}\frac{k'G_\tau(k_0',k')}{\langle k\rangle_\tau}F_\tau(k_0',k') \tag{6.21}$$

となり，次数に依存しない隣接ノード故障確率が得られる．

$G_\tau(k_0,k)$ を求めるために，時刻 $\tau-1$ において任意抽出したノードの次数が k'' であり，時刻 $\tau-1$ の過負荷故障過程によって，このノードの次数が k になる確率 $g_\tau(k_0,k'',k)$ を考

える．ここで k_0 は、このノードの初期時刻における次数である。時刻 $\tau-1$ において任意抽出したノードが，初期時刻 $\tau=0$ において次数 k_0 で時刻 $\tau-1$ において k'' である確率は $G_{\tau-1}(k_0,k'')$ であり，このノードの隣接ノードのひとつが過負荷故障を起こす確率は ϕ_τ なので，確率 $g_\tau(k_0,k'',k)$ は

$$\begin{aligned} g_\tau(k_0,k'',k) =& G_{\tau-1}(k_0,k'')\binom{k''}{k}\phi_\tau^{k''-k}\big(1-\phi_\tau\big)^k \\ & \times\big[1-F_{\tau-1}(k_0,k'')\big]+\delta_{k0}G_{\tau-1}(k_0,k'')F_{\tau-1}(k_0,k'') \end{aligned} \tag{6.22}$$

となる．式 (6.22) の右辺第 1 項目は，時刻 $\tau-1$ に任意抽出したノードが過負荷故障を起こさず，抽出したノードに隣接する $k''-k$ 個のノードが過負荷故障を起こすことに対応しており，第 2 項目は抽出したノードが過負荷故障を起こすことに対応している．したがって，確率 $G_\tau(k_0,k)$ を支配するマスター方程式は，

$$\begin{aligned} G_\tau(k_0,k) &= \sum_{k''=k}^{k_0} g_\tau(k_0,k'',k) \\ &= \sum_{k''=k}^{k_0} G_{\tau-1}(k_0,k'')\Bigg[\binom{k''}{k}{\phi_\tau}^{k''-k}[1-\phi_\tau]^k \\ &\qquad\qquad \times[1-F_{\tau-1}(k_0,k'')]+\delta_{k0}F_{\tau-1}(k_0,k'')\Bigg] \end{aligned} \tag{6.23}$$

で与えられる。式 (6.23) と式 (6.20) から時刻 τ の次数分布関数 $P_\tau(k)$ が与えられ，その $P_\tau(k)$ に対して 3.2 節の母関数の議論を用いて，巨大連結成分の相対サイズ S_τ を見積もることができる．カスケードの終了条件はネットワーク内において 1 つのノードも過負荷故障を起こさないという条件，

$$N\sum_{k_0=k}^{k_{\max}}\sum_{k=1}^{k_{\max}} G_\tau(k_0,k)F_{W_\tau}(k_0,k)<1 \tag{6.24}$$

で与えられる．一般に，母関数の議論による巨大連結成分の相対サイズの見積もりは十分大きな (熱力学極限の) システムにおいてのみ成立する．しかしながら上記の解析計算は有限サイズに対するものであり，カスケードの終了条件 [式 (6.24)] によって有限サイズ効果が記述できるという近似を用いている．したがってこの近似に加え，クラスター間をウォーカーが行き来できるという近似を施しているため，上記の解析的取扱いには，2 つの近似があることになる．これらの近似が妥当であるか否かを解析計算と数値計算を比較することによって評価する必要がある．図 6.1 に巨大連結成分の相対サイズの時間 τ 依存性が示されている．シンボルはネットワークから過負荷故障確率 [式 (6.4)] に従ってノードを除去した結果であり、実線が近似的な解析計算結果を表している．解析計算と数値計算の結果が良く一致して

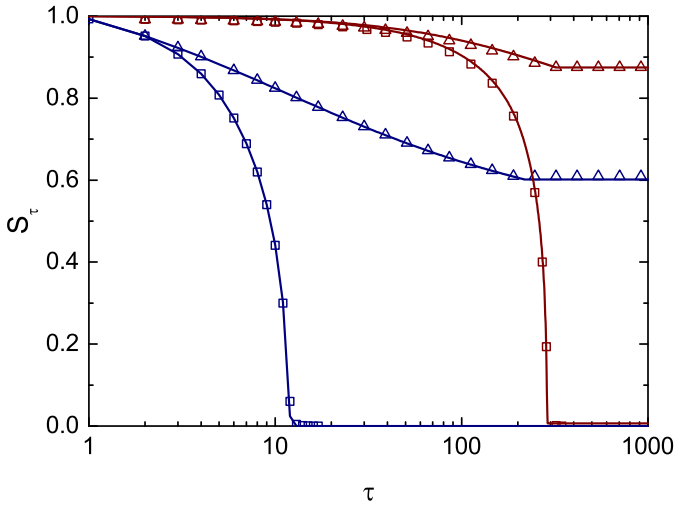


図 6.1: 過負荷故障カスケードの巨大連結成分の相対サイズ S_τ の時間 τ 依存性を数値計算結果（シンボル）と解析計算結果（実線）で比較した図．数値計算・解析計算ともにノード数 $N = 10000$，平均次数 $\langle k \rangle = 5$ の Erdös-Rényi ランダムグラフを採用している。青シンボル及び青実線は耐性パラメータ $m = 2.0$ に対する結果であり，赤シンボル及び赤実線は $m = 4.0$ に対応している．□は負荷制御パラメータ r が $r = 0.8$，△が $r = 1.5$ にそれぞれ対応している．実線は実線上のシンボルのパラメータの下、解析計算した結果である．初期総負荷量は $W_0 = 2M$ である．

いることがわかる．以下では、この（近似的な）解析計算を用いて、過負荷故障カスケードに対するスケールフリー・ネットワークの頑強性を明らかにする。

6.3 過負荷故障カスケードに対するネットワーク頑強性

過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性を評価しよう．図 6.2 に過負荷故障カスケードが終了した後の巨大連結成分の相対サイズの負荷制御パラメータ r 依存性が示されている．それぞれ実線はランダム・グラフに対する結果で，破線はスケールフリー・ネットワークに対する結果である．計算条件の詳細は図 6.2 のキャプションに示した．図 6.2 を見ると，カスケードがシステム全体に拡がり全崩壊を起こすグローバル・カスケード相と，カスケードがシステムの一部で留まるローカル・カスケード相を分ける閾値 r_c が存在することがわかる．加えて図からスケールフリー・ネットワークの r_c がランダム・グラフの r_c よりも小さいことが読み取れる．このことは，スケールフリー・ネットワークが過負荷故障

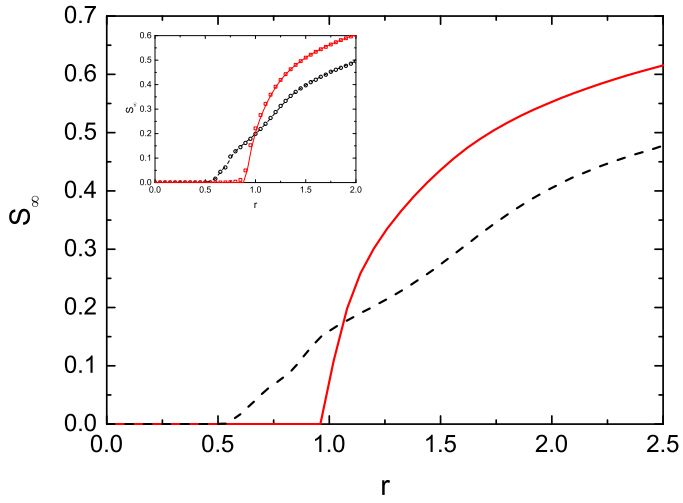


図 6.2: 過負荷故障カスケードが終了した後の巨大連結成分の相対サイズ S_∞ の負荷制御パラメータ r 依存性．赤実線が Erdös-Rényi ランダムグラフに対する結果で，黒破線が最低次数から次数分布関数が $P(k) \sim k^{-\gamma}$ に従い、スケールフリー指数が $\gamma = 2.5$ であるスケールフリー・ネットワークに対する結果である．スケールフリー・ネットワークはノード数を $N = 10^5$、最低次数を $k_{\min} = 2$ としており，このとき最大次数は $k_{\max} = 153$ で平均次数は $\langle k \rangle \approx 4.25$ である．Erdös-Rényi ランダムグラフのノード数と平均次数はスケールフリー・ネットワークのそれと同じである．初期総負荷量と耐性はそれぞれ $W_0 = 2M$，$m = 2$ である．インセットはメイン・パネルの条件を $N = 10^4$ と変更して，過負荷故障カスケード終了後の巨大連結成分の相対サイズ S_∞ の r 依存性を数値計算と解析計算で比較した図である．

カスケードに対して頑強であることを意味している．5.4.6 節で述べたように、平均次数が一定の下においてスケールフリー・ネットワークの総耐性 Q はランダム・グラフの総耐性よりも小さい。それにもかかわらずスケールフリー・ネットワークがランダムグラフよりも頑強であることは驚くべき結果である．

このスケールフリー・ネットワークの頑強性の起源は、高い耐性をもったハブノードにあると考えられる．図 5.7 で示したように、負荷揺らぎに起因した過負荷故障は低次数ノードで起きやすい．したがって，過負荷故障カスケードを静的なパーコレーション過程の連鎖とみなしたとき，各時刻におけるノードの除去過程は次数の低いノードほど除去されやすい，一種の逆ターゲット攻撃のようになっていることが示唆される．スケールフリー・ネットワークがランダム故障に対して非常に頑強であったことを考慮すると，負荷揺らぎに起因した過負荷故障カスケードに対して，スケールフリー・ネットワークがランダム・グラフよ

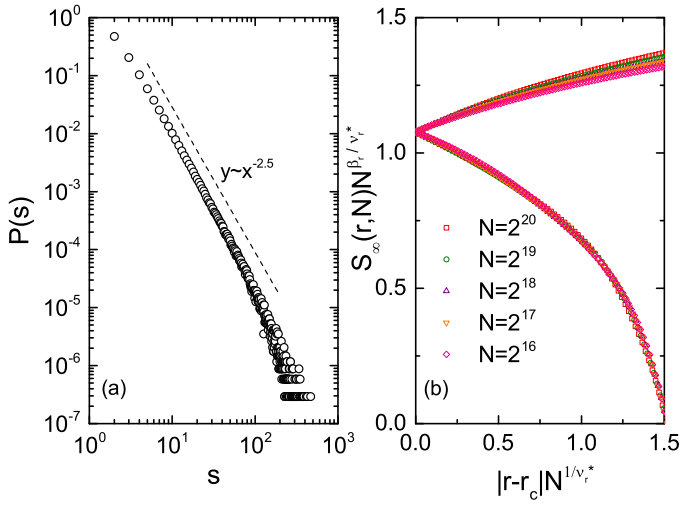


図 6.3: 過負荷故障カスケードによるパーコレーション転移点 $r_{\rm c}$ 近傍のネットワークの振舞い．(a) $r_{\rm c}$ 近傍におけるクラスターサイズ s の分布 $P(s)$．ノード数 $N = 10^4$，平均次数 $\langle k \rangle = 4.0$ のランダム・グラフに対する数値計算結果である．計算条件は $r = 0.85$，$m = 2.0$ で，5000 サンプルで平均をとっている．(b) カスケード終了後のネットワークに対して有限サイズ・スケーリングを行った結果．すべてのデータは近似的な解析計算から得られた結果であり，母体ネットワークのノード数はそれぞれ $N = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}, 10^{19}$ と 10^{20} で，平均次数は $\langle k \rangle = 4.0$ ある．耐性パラメータは $m = 2.0$ である．フィッティング・パラメータはそれぞれ $r_{\rm c} = 1.84, \beta_r = 1.275, \nu_r^* = 19.45$ にとっている．

りも頑強であると結論付けられそうである．しかしながら，上記の計算は有限サイズのネットワークに対する結果である．すなわち，上記の閾値 $r_{\rm c}$ は $r_{\rm c} = r_{\rm c}(N)$ であるため，熱力学極限 $(N \to \infty)$ においてもスケールフリー・ネットワークが頑強であるか否かを明らかにする必要がある．そこで，次に転移点 $r_{\rm c}$ 近傍におけるネットワークの振舞いを調べる．

転移点 $r_{\rm c}$ より少し上の r の下での過負荷故障カスケードが終了した後のネットワークのクラスターサイズ分布 $P(s)$ を図 6.3 (a) に示した．図 6.3 (a) を見るとわかるように，クラスターサイズ分布がベキ的に振る舞っている。これは連続的なパーコレーション転移を引き起こすシステムの転移点近傍における典型的な振舞いであり，過負荷故障カスケードによって引き起こされるネットワーク上のパーコレーション転移が連続的転移現象 (臨界現象) であることを示唆している．クラスターサイズ分布のベキ的に振舞うという事実から，臨界近傍のネットワークは，

$$S_\infty(r, N) = N^{-\beta_r/\nu_r^*} h(N^{1/\nu_r^*}|r - r_{\rm c}|) \tag{6.25}$$

なる式に従うということがスケーリング仮説から予想される．ここで，$h(x)$ はスケーリング関数であり，指数 ν_r^* は臨界近傍における相関長 $\xi_r \sim |r - r_{\rm c}|^{-\nu_r}$ を特徴づける指数 ν_r とネットワークの埋め込まれている空間次元 d の積を，β_r は秩序変数である巨大連結成分の相対サイズ (秩序変数) の立ち上がり $S_\infty \sim |r - r_{\rm c}|^{\beta_r}$ を特徴づける指数を表している．スケーリング仮説にしたがって，横軸に $N^{\beta_r/\nu_r^*} S_\infty(r, N)$，縦軸に $N^{1/\nu_r^*}|r - r_{\rm c}|$ をプロットした図が図 6.3 (b) である．全てのデータ点は近似的な解析計算から求めたもので，図を見るとシステムサイズに依らず全てのデータが同一曲線状に載っていることがわかる．したがって，過負荷故障カスケードによって引き起こされるパーコレーション転移が連続的相転移であることが結論づけられる．最後に，有限サイズ・スケーリング式 (6.25) を用いて，熱力学極限の臨界点 $r_{\rm c}(\infty)$ の γ 依存性を調べる．図 6.4 は，有限サイズ・スケーリングから求めた熱力学極限における転移点 $r_{\rm c}(\infty)$ をスケールフリー指数 γ の関数としてプロットしている．この計算において，初期の次数分布関数は式 (5.30) に従う平均次数 $\langle k \rangle = 4.0$ のスケールフリー・ネットワークを採用している．図 6.4 からわかるように，$r_{\rm c}(\infty)$ はスケールフリー指数 γ の増加関数である．すなわち，スケールフリー性が強くなればなるほど，臨界点 $r_{\rm c}(\infty)$ は小さくなる．したがって，過負荷故障カスケードに対してスケールフリー・ネットワークは，頑強であると結論づけられる．この結果は，負荷の平均値によって過負荷故障が起こると仮定している従来の研究結果とは正反対の結果である．

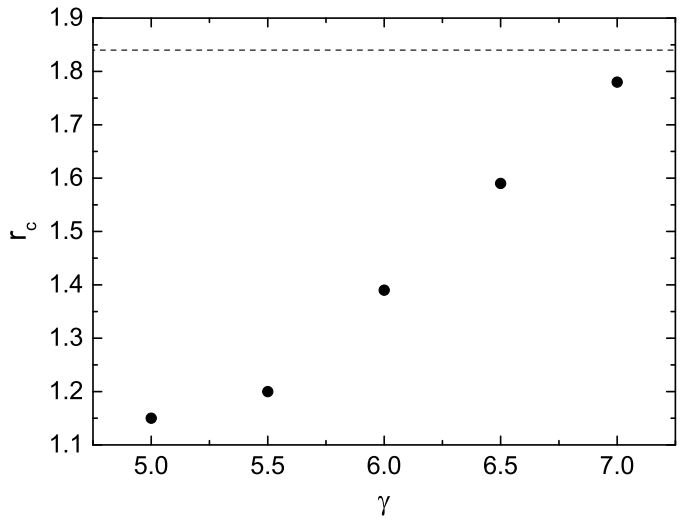


図 6.4: 熱力学極限における臨界負荷制御パラメータ $r_{\rm c}(\infty)$ のスケールフリー指数 γ 依存性. すべての γ の臨界値は，次数分布関数が式 (5.30) に従うスケールフリー・ネットワークに対する有限サイズ・スケーリングから見積もられている．このとき最小次数は $k_{\rm min} = 2$ であり，平均次数は $\langle k \rangle = 4.0$ となるように式 (5.30) 内の d を決定している．耐性パラメータ m は $m = 2.0$ である．γ 軸に平行な破線は，式 (5.30) の $\gamma \to \infty$ の極限における次数分布関数に対する臨界値を表している．

第7章　ネットワーク・サイズと構造安定性

第 2 章で述べたように，ネットワークの基本的性質に関する研究がこれまでに非常に盛んになされており，現実のネットワークはスケールフリー性やスモールワールド性，次数相関など様々な共通した構造的性質を有していることが明らかになっている．従来のネットワーク研究において，ネットワークのシステム・サイズに対応するノード数 N は，構造的性質やネットワーク上のダイナミクスを説明する際の，単なるモデル・パラメータとして扱われてきた．一方現実のネットワークにおいては，それぞれのネットワークが固有のノード数 N を有しており，多様なネットワーク・サイズがある．現実のネットワークはどこまでも大きくなることはなく，何らかの制約によって定常的な大きさでとどまり，ネットワークはそれぞれ固有の大きさを獲得していると考えられる．ノード数はネットワークという系を特徴づける最も基本的な量である．そのため，ノード数が何によって決まるのかを理解することは，ネットワーク研究におけて最も基礎的かつ重要な命題であるといえる．そこで本章では，複雑ネットワークのノード数がどのような理由により決まるのかについて議論する．その際，過負荷故障カスケードを引き起こしうる機能性ネットワークを考えることによって，具体的にこの問題を論じる．

7.1　システムの安定性とシステム・サイズ

生態系は，ネットワークのサイズが成長することで，不安定化することが知られている．生態系は，閉じたシステムではなく生物種 (ノード) の増減がある．この増減は，絶滅によるノードの除去や，進化による種の増加，他の生態系との結合，外来種の出現などによって起こる．生態系において，ノード数増加に伴って圧倒的な支配種が出現することがある．このような種が生態系に壊滅的な影響を与えることが現実の生態系において観測されている．また生態系が不安定化し得ることは，生態系の数理モデル研究によって理論的にも示唆されている．May は，生態系の平衡点近傍における線形安定性解析によって，生物種数がある数 $N_{\rm c}$ を超えるとシステムが不安定化することを理論的に示している [119]．ここで $N_{\rm c}$ はノード間の結合確率とノード間の捕食被捕食の相互作用の強さによって決まる．

このようなノード数の増大によるネットワークの不安定化は生態系以外でも起き得る．ネットワーク上に何らかの流れが存在し，その流れによってネットワークの機能を果たす機能性ネットワークにおいても，ネットワークの成長が構造の不安定化を引き起こす可能性がある．

7.2 機能性ネットワークの不安定化

7.2.1 故障とネットワーク・サイズ

機能性ネットワークにおいて，ネットワークの構成要素が機能停止する要因は，偶発故障や経年劣化によるランダム故障や，過負荷故障，ターゲット攻撃，環境の変化など数多くある．機能性ネットワーク上でノードの故障が起こる確率はネットワーク・サイズが小さいときは大きくない．しかしながら，個々のノードが故障を起こす確率がネットワーク・サイズに強く依存しないような場合においては，ネットワークの成長に伴ってネットワーク内で故障が起こる確率は増大する．機能性ネットワークにおいてノードの故障が起きると，流れの迂回が生じ更なる故障 (過負荷故障カスケード) を引き起こす可能性がある．このような理由から過負荷故障カスケードを引き起こす機能性ネットワークは系が不安定化を起こす可能性がある．そこで，本研究では前章でモデル化した過負荷故障カスケードを用いて機能性ネットワークのサイズ (ノード数) とその構造の安定性を議論する．

7.2.2 ネットワークサイズと構造安定性

過負荷故障カスケードを起こす系におけるネットワーク・サイズ (ノード数 N) と構造の安定性を議論する．図 7.1 は初期ネットワークのサイズと，終状態における最大連結成分の大きさ (ノード数) を示している．線種の違いは，負荷制御パラメータ r の違いを意味しており，上から下に向かって r の値は小さくなっている．負荷揺らぎに起因した過負荷故障カスケードは，ネットワークサイズがあるノード数 $N_{\rm th}$ よりも小さいとき起きない．初期時刻の過負荷故障ノード数期待値 $N_{\rm rev}$ が，初期時刻の過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ を用いて，

$$N_{\rm rev} = N \sum_k P(k) F_{W_0}(k) \tag{7.1}$$

によって決まり，$N_{\rm rev} < 1$ を満たしていることを意味している．しかし，ネットワークの大きさが $N_{\rm th}$ を超えると，すなわち $N_{\rm rev} \geq 1$ となると r の値によって振る舞いが大きく変わる．r の値によっては，あるネットワーク・サイズを超えるとネットワークが全崩壊を起こし，ネットワークは安定に存在できないことが図 7.1 から読み取れる．これは，ネットワー

クがグローバル・カスケード相にあることを意味している．また，r の値が大きくなるにつれネットワークが安定に存在できるサイズが大きくなっていることがわかる．過負荷故障カスケードによるネットワーク・サイズの小さな変化に対して，多くの負荷が取り除かれているためである．過負荷故障カスケードによるパーコレーション転移点 r_{c} よりも r が大きな値になると，システムがローカル・カスケード相に入り，どこまでもネットワークが成長できることがわかる．不安定化を引き起こすネットワーク・サイズは，故障に伴う負荷減少の程度 (r の大きさ) によって決まる．第 6 章で明らかになったようにスケールフリー・ネットワークが過負荷故障カスケードに対して頑強であることを考慮すると，ネットワークが安定でいられる大きさは，ネットワーク構造にも依存しており，スケールフリー・ネットワークの方がより安定に存在できると考えられる．

以上の結果を現実ネットワークに当てはめると，以下のことが示唆される．10^{12} ほどのネットワーク・サイズを有する WWW のように負荷がほぼないようなネットワークは大きく成長することができる．一方で銀行をノード，貸借関係をエッジとして構成される銀行間貸借関係ネットワークのようにノード数が 100 程度の非常に小規模なネットワークも現実には存在している．銀行間貸借関係ネットワークにおいては，負債 (負荷) による故障カスケードが大規模化しないように小さなネットワークサイズを保っていると考えられる．

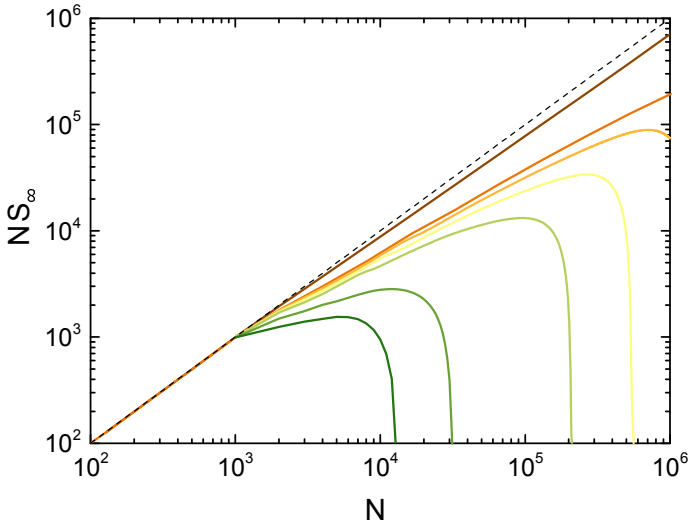


図 7.1: 過負荷故障カスケードが止まった後の最大連結成分に含まれるノード数の初期ネットワーク・サイズ依存性．母体となるネットワークは平均次数 $\langle k \rangle = 10$ のランダムグラフで，耐性パラメータ $m = 4$，初期総負荷量が $W_0 = 2M$ である．それぞれの実線は近似的な解析計算から得られた結果で，上からそれぞれ $r = 2.8, 1.45, 1.4, 1.35, 1.3, 1.2$ と 1.14 である．

第8章　結論

本研究は，負荷揺らぎによって引き起こされる過負荷故障に対するネットワークの頑強性を明らかにする目的で行われた．多くの機能性ネットワークは，ネットワーク上の何らかの流れによってそれらの機能を果たしている．ネットワーク上の流れは負荷としても働くため，この負荷による過負荷故障を理解することは，ネットワークが安定に機能していることを前提とした我々の現代生活において非常に重要である．従来の複雑ネットワークの研究において，過負荷故障は負荷の平均値がネットワークの構成要素の耐性を超えたときに起こると仮定されてきた．しかしながら，ネットワーク上の負荷は時間的な揺らぎを有しており，過負荷故障を揺らいでいる負荷の Extreme Events として扱うことが，現実のネットワークの機能障害を理解する上では重要であろう．本研究では負荷揺らぎの効果を考慮した過負荷故障を理論的に扱うため，ネットワーク上の負荷をランダムウォーカーとみなすことで Kishore らによって定式化された過負荷故障確率理論を用いた．

第 5 章では，過負荷故障によって引き起こされる静的なパーコレーション問題を扱い，過負荷故障に対するネットワークの頑強性を論じた．電力網における総電力量や，インターネットの総トラフィック量など，現実のネットワークにかかる負荷は年々増加傾向にある．Kishore らの過負荷故障確率理論を拡張することで，負荷増加の効果を取り入れた際には，過負荷故障に対してスケールフリー・ネットワークが脆弱であることを明らかにした．このスケールフリー・ネットワークの脆弱性は負荷増大によって，高次数ノードの過負荷故障が起きやすくなったことに起因している．本研究の応用研究として，頑強なネットワーク構築のための効率的な耐性設定の問題や，最小コストで最も頑強となるネットワーク構造とその耐性設定の問題などが挙げられる．これらの問題は，安定したネットワークを構築する上で非常に重要である．

第 6 章では，過負荷故障カスケードに対する複雑ネットワークの頑強性について論じた．現実のネットワークの機能停止は，過負荷故障が連鎖することで大規模化することがある．このような過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑強性明らかにするため，過負荷故障カスケード・プロセスが静的な過負荷故障パーコレーション過程の連鎖であることに着

目し，カスケード・プロセスをモデル化した．その際，負荷増加の効果は取り入れず，過負荷故障によるシステム・サイズの減少に伴う総負荷量の調整をモデルパラメータに取り入れた．このパラメータは，例えば電力網において，節電要請によって電力使用量が減少する状況を表したパラメータで負荷制御パラメータである．負荷制御パラメータが大きいことは，過負荷故障に伴う負荷減衰が大きいことを意味しているため，より小さな負荷制御パラメータで機能維持ができるネットワークが頑強であるといえる．この意味で，負荷揺らぎに起因した過負荷故障カスケードに対して，次数不均一なスケールフリー・ネットワークが均質なランダムグラフに比べて，頑強であることが本研究で明らかにされた．

第 7 章では，ネットワーク・サイズが何によって決まっているのかという，ネットワーク研究の基本的命題を世界で初めて議論した．従来のネットワーク研究において，ネットワークの大きさ (ノード数) は単なるモデル・パラメータとして扱われてきた．しかしながら，現実のネットワークは個々のネットワーク特有のサイズがあり，ネットワークによって様々である．ネットワーク・サイズはネットワークというシステムを特徴づける最も基本的な量であるにもかかわらず，これまでネットワークのノード数がどのように決定するかということはほとんど議論がされてこなかった．一般にネットワークが大きく成長すると，システム内の要素のうちの少なくとも１つが機能停止を起こす確率は増大するため，ネットワークの大規模化は不安定化を引き起こしうる．流れ（負荷）を伴うネットワークにおいては，故障が連鎖すること（過負荷故障カスケード）があるため，ネットワーク・サイズと構造の安定性の関係の問題に非常に密接な関係がある．そこで，ネットワーク・サイズとその構造の安定性を過負荷故障カスケードの問題を通じて論じた．その結果，ネットワーク・サイズの増大がネットワークを不安定化させることを明らかにした．ネットワークが不安定化するノード数は，過負荷故障カスケードの最中の総負荷量の変化や，ノードの耐性などに依存することを明らかにした．本研究のように，ネットワーク研究の基本的命題が議論された研究は他にはない．本研究を契機にネットワーク・サイズに関する活発な議論がなされることが期待される．

また，現実のネットワークの一部が機能停止した場合，不安定化に起因した全崩壊がすぐに起こるわけではなく，ネットワークは新たな安定点に落ち込むことが多い．そして，修復や成長によってネットワークは再び大きくなる．このような成長と不安定化の競合によってネットワークは構造的な臨界点周りで揺らぐ可能性がある．これは，ネットワーク構造が自己組織的に臨界へと近づくことを意味している．このような振る舞いによって発現する定常ネットワークは，フラクタル性を有していると考えられる．これまで現実ネットワークに見

られるフラクタル性がどのようなメカニズムで発現しているかということは説明されておらず，非平衡臨界における揺らぎに起因してネットワークのフラクタル構造が現れることを示した研究はない．このような視点からネットワークのフラクタル性を議論することは，現実ネットワークの構造的特徴を深く理解する上で非常に重要であり，急務の課題であるといえる．

謝辞

本研究遂行に当たり，細部に至るまで懇切丁寧にご指導してくださった矢久保考介教授に心から感謝いたします．浅野泰寛准教授・小布施秀明助教にも研究に関するアドバイスを頂きました．ありがとうございます．また，事務補佐員の富樫杏子さま，数理物理工学研究室の諸先輩や同期，後輩の皆さまには公私に渡り，大変お世話になりました．応用物理学専攻の同期に恵まれたことで充実した 9 年間の大学生活が送れました．そして，すべての皆さまの支えがあってこその私でした．この先の研究生活では一層の精進を重ねて参ります．

参考文献

[1] S. Maslov and K. Sneppen, Science **296**, 910 (2002).

[2] A. Vázquez, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, Phys. Rev. E **65**, 066130 (2002).

[3] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. **87** 258701 (2001).

[4] M. A. Serrano and M. Boguñá, Phys. Rev. E **68**, 015101(R) (2003).

[5] S. Furuya and K. Yakubo, Physica A **389**, 5878 (2010).

[6] M. E. J. Newman, Phys. Rev. Lett. **89**, 208701 (2002).

[7] V. Latora and M. Marchiori, Phys. Rev. Lett **87**, 198701 (2001).

[8] G. Caldarelli, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Eur. Phys. J. B **38**, 183 (2004).

[9] L. C. Freeman, Sociometry **40**, 35 (1977).

[10] V. Latora and M. Marchiori, Phys. Rev. E **71** 015103(R) (2005).

[11] M. E. J. Newman, *Networks An Introduction*, Oxford University Press (2010).

[12] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, Nucl. Phys. B **653**, 307 (2003).

[13] B. Bollobás and O. Riordan, Phys. Rev. E **69**, 036114 (2004).

[14] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, J. M. Hendrickx, and R. M. Jungers, Phys. Rev. E **76** 066101 (2007).

[15] F. Chung and L. Lu, Adv. Appl. Math. **26**, 257 (2001).

[16] I. de Sola. Pool and M. Kochen, Soc. Net., **1** 5 (1978).

[17] S. Milgram, Psycol. Today **2**, 60 (1967).

[18] J. Travers and S. Milgram, Sociometry **32**, 425 (1969).

[19] P. S. Dodds, R. Muhamad, and D. J. Watts, Science **301** 827 (2003).

[20] L. A. Adamic and B. A. Huberman, Nature (London) **401**, 131 (1999).

[21] Q. Chen, H. Chang, R. Govindan, S. Jamin, S. J. Shenker, and W. Willinger, in Proceedings of the 21st Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (IEEE Comput. Soc., Los Alanitos, CA, 2002).

[22] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, and A.-L. Barabási, Nature (London) **407**, 651 (2000).

[23] A. Wagner and D. Fell, Technical Report No. 00-07-041, Santa Fe Institute (2000).

[24] Erdös Number Project, http://www.oakland.edu/enp/

[25] S. L. Feld, The American Journal of Sociology, **96** 1464 (1991).

[26] R. Albert and A.-L. Barabási, Nature **401** 130 (1999).

[27] A.-L. Barabási and R. Albert, Science **286** 509 (1999).

[28] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos, Comput. Commun. Rev. **29**, 251 (1999).

[29] A.L. Barabási, H. Jeong, Z. Neda, E. Ravasz, A. Schubert, T. Vicsek, Physica A **311**, 590 (2002).

[30] S. Redner, Eur. Phys. J. B **4**, 131 (1988).

[31] W. Aiello, F. Chung, and L. Lu, Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing, p. 171 (2000).

[32] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **67** 026126 (2003).

[33] M. E. J. Newman, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **98**, 404 (2001).

[34] G. F. Davis, M. Yoo, and W. E. Baker (unpublished).

[35] H. Jeong, S. Mason, A.-L. Barabási, and Z. N. Oltvai, Nature (London) **411**, 41 (2001).

[36] M. Huxham, S. Beaney, and D. Raffaelli, Oikos **76**, 284 (1996).

[37] S. Maslov, K. Sneppen, and A. Zaliznyak, Phys. A, **333** 529 (2004).

[38] D. J. Watts and S. Strogatz, Nature (London) **393**, 440 (1998).

[39] M. Barthélemy and A. N. Amaral, Phys Rev. Lett. **82**, 3180 (1999).

[40] M. E. J. Newman and D. J. Watts, Phys. Lett. A **(**263), 341 (1999).

[41] A. Barrat and M. Weight, Eur. Phys. J. B, **13** 547 (2000).

[42] M. E. J. Newman, C. Moore, and D. J. Watts, Phys. Rev. Lett. **84**, 3201 (2000).

[43] A.-L. Barabási and R. Albert, Physica A, **272** 173 (1999).

[44] B. Bollobás and O. Riordan, Combinatorica **24**, 5 (2004).

[45] A. Barrat and R. Pastor-Satorras, Phys. Rev. E **71**, 036127 (2005).

[46] K. Klemm and V. M. Eguíluz, Phys. Rev. E **65**, 66123 (2002).

[47] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes and A. N. Samukhin, Phys. Rev. Lett. **85** 4633 (2000).

[48] P. L. Krapivsky, S. Redner, and F. Leyvraz Phys. Rev. Lett. **85**, 4629 (2000).

[49] P. L. Krapivsky and S. Redner, Phys. Rev. E **63**, 066123 (2001).

[50] G. Bianconi and A.-L. Barási, Europhys. Lett. **54**, 436 (2001).

[51] G. Bianconi and A.-L. Barási, Phys. Rev. Lett. **86**, 5632 (2001).

[52] K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim, Phys. Rev. Lett. **87** 278701 (2001).

[53] G. Caldarelli, A. Capocci, P. De Los Rios, and M. A. Munõz, Phys. Rev. Lett. **89** 258702 (2002).

[54] M. Boguñá and R. Pastor-Satrras, Phys. Rev. E **68** 036112 (2003).

[55] M. Molloy and B. Reed, Rand. Struc. Alg. **6**, 161 (1995).

[56] M. Molloy and B. Reed, Combin. Prob. Comp. **7**, 295 (1998).

[57] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, Phys. Rev. E **64**, 026118 (2001).

[58] D. Stauffer and A. Aharony, Introduction to Percolation Theory, 2nd ed. (Taylor & Francis, London 1991).

[59] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, Nature **406** 378 (2000).

[60] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **85**, 4626 (2000).

[61] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, Phys. Rev. Lett. **85**, 5468 (2000).

[62] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **86**, 3682 (2001).

[63] A. Srivastava, B. Mitra, N. Ganguly, and F. Peruani, Phys. Rev. E **86**, 036106 (2012).

[64] D. S. Callaway, J. E. Hopcroft, J. M. Kleinberg, M. E. J. Newman, and S. H. Strogatz, Phys. Rev. E **64**, 041902 (2001).

[65] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, Phys. Rev. Lett. **87**, 219801 (2001).

[66] R. Cohen, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Phys. Rev. E, **66**, 036113 (2002).

[67] R. Cohen and S. Havlin, Physica A, **336**, 6 (2004).

[68] M. E. J. Newman, Phys. Rev. Lett. **89**, 208701 (2002).

[69] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, Phys. Rev. E **64**, 066110 (2001).

[70] A. Vázquez and Y. Moreno, Phys. Rev. E 6**7**, 015101(R) (2003).

[71] A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E 78, 051105 (2008).

[72] Y. Shiraki and Y. Kabashima, Phys. Rev. E **82**, 036101 (2010).

[73] T. Tanizawa, S. Havlin, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **85**, 046109 (2012).

[74] A. E. Motter and Y.-C. Lai, Phys. Rev. E **66** 065102(R) (2002).

[75] M. Barthélemy, Phys. Rev. Lett., **91** 189803 (2003).

[76] L. Zhao, K. Park, and Y.-C. Lai, Phys. Rev. E, **70** 035101(R) (2004).

[77] P. Crucitti, V. Latora, and M. Marchiori, Phys. Rev. E, **69** 045104 (2004).

[78] M. L. Sachtjen, B. A. Carreras, and V. E. Lynch, Phys. Rev. E **61**, 4877 (2000).

[79] P. Holme, and B. J. Kim, Phys. Rev. E **65**, 066109 (2002).

[80] P. Holme, Phys. Rev. E **66**, 036119 (2002).

[81] W. X. Wang and Y.-C. Lai, Phys. Rev. E **80**, 036109 (2009).

[82] I. Simonsen, L. Buzna, K. Peters, S. Bornholdt, and D. Helbing, Phys. Rev. Lett. **100**, 218701 (2008).

[83] M. Rohden, A. Sorge, M. Timme, and D. Witthaut, Phys. Rev. Lett. **109**, 064101 (2012).

[84] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).

[85] M. L. Sachtjen, B. A. Carreras, and V. E. Lynch, Phys. Rev. E **61** 4877 (2000).

[86] B. A. Carreras, D. E. Newman, I. Dolrou, and A. B. Poole, in Proceedings of Hawaii International Conference on System Sciences, January 4-7, 2000, Maui, Hawaii.

[87] I. Dobson, B. A. Carreras, and D. E. Newman, Prob. in the Eng. and Info. Sci. **19**, 15 (2005).

[88] T. E. Harris, *Theory of branching processes* (Dover NY 1989).

[89] I. Dobson, B. A. Carreras, and D. E. Newman, Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences (2004).

[90] I. Dobson, B. A. Carreras, V. E. Lynch, and D. E. Newman, Chaos **17**, 026103 (2007).

[91] R. A. Fisher and L. H. C. Tippett, Proc. Camb. Phil. Soc. **24**, 180 (1928).

[92] E. J. Gumbel: *Statistics of Extremes* (Columbia University Press, New York, 1958).

[93] S. T. Bramwell, P. C. W. Holdsworth, and J.-F. Pinton: Nature **396** (1998) 552.

[94] S. T. Bramwell, K. Christensen, J.-Y. Fortin, P. C. W. Holdsworth, H. J. Jensen, S. Lise, J. M. López, M. Nicodemi, J.-F. Pinton, and M. Sellitto: Phys. Rev.

[95] J.-F. Pinton, P. C. W. Holdsworth, and R. Labbé: Phys. Rev. E **60** (1999) R2452.

[96] B. Portelli, P. C. W. Holdsworth, and J.-F. Pinton: Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 104501.

[97] K. Rypdal, B. Kozelov, S. Ratynskaia, B. Klumov, C. Knapek, and M. Rypdal: New J. Phys. **10** (2008) 093018.

[98] B. Ph. van Milligen, R. Sánchez, B. A. Carreras, V. E. Lynch, B. LaBombard, M. A. Pedrosa, C. Hidalgo, B. Gonçalves, R. Balbín, and The W7-AS Team: Phys. Plasmas **12** (2005) 052507.

[99] S. Joubaud, A. Petrosyan, S. Ciliberto, and N. B. Garnier: Phys. Rev. Lett. **100** 180601 (2008).

[100] S. T. Bramwell, T. Fennell, P. C. W. Holdsworth, and B. Portelli: Europhys. Lett. **57** (2002) 310.

[101] K. Dahlstedt and H. J. Jensen: Physica A **348** (2005) 596.

[102] T. Antal, M. Droz, G. Györgyi, and Z. Rácz: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 240601.

[103] M. Mitobe and K. Yakubo: J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009) 124002.

[104] J. J. Brey, M. I. García de Soria, P. Maynar, and M. J. Ruiz-Montero: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 098001.

[105] C. Chamon and L. F. Cugliandolo: J. Stat. Mech. P07022 (2007).

[106] R. Planet, S. Santucci, and J, Ortín: Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 094502.

[107] M. Argollo de Menezes and A.-L. Barabási, Phys. Rev. Lett., **92** 028701 (2004).

[108] J. D. Noh and H. Rieger, Phys. Rev. Lett., **92** 118701 (2004).

[109] Gőbel, F. & Jagers, A. A. Stoc. Process. Appl. **2** (4) 311 (1974).

[110] J. Duch and A. Arenas, Phys. Rev. Lett., **96** 218702 (2006).

[111] S. Meloni, J. Gómez-Gardeñes, V. Latora, and Y. Moreno, Phys. Rev. Lett., **100** 208701 (2008).

[112] Z. Zhou, Z.-G. Huang, L. Huang, Y.-C. Lai, L. Yang, and D.-S. Xue, Phys. Rev. E, **87** 012808 (2013).

[113] V. Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amritkar, Phys. Rev. Lett. **106**, 188701 (2011).

[114] V. Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amritkar, Phys. Rev. E **85**, 056120 (2012).

[115] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1964).

[116] http://www.soumu.go.jp/

[117] http://www.fepc.or.jp/index.html

[118] C. M. Schneider, A. A. Moreira, J. S. Andrade Jr, S. Havlin, and H. J. Herrmann, Proc. Natl. Acad. Sci. **108**, 3838 (2011).

[119] R. M. May, Nature **238** 413 (1972).

[120] E. Abraham, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan: Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.

[121] M. L. Mehta: *Random Matrices, 2nd ed.*, Academic, New York(1991).

[122] M. Janssen: Int. J. Mod. Phys. B **8** (1994) 943.

[123] M. Janssen: Phys. Rep. **295** (1998) 1.

[124] S. N. Evangelou and T. Ziman: J. Phys. C **20** (1987) L235.

[125] T. Ando: Phys. Rev. B **40** (1989) 5325.

[126] R. Markt, M. Janssen, and B. Huckestein: Phys. Rev. B **58** (1998) 4394.

[127] Y. Asada, K. Slevin, and T. Ohtsuki: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 256601.

[128] Y. Asada, K. Slevin, and T. Ohtsuki: Phys. Rev. B **70** (2004) 035115.

付録 A　極値としての秩序変数の統計分布

本付録では，系の不規則さに起因した量子力学的干渉効果から引き起こされる金属 - 絶縁体転移であるアンダーソン転移の転移点近傍における秩序変数の揺らぎについて議論する．A.1.1 節ではアンダーソン転移について簡単に述べる．A.2 節で，本研究に用いたモデルを説明し，A.3 節で結果を述べる．

A.1　アンダーソン転移

A.1.1　単一パラメータスケーリング理論

ここでは，電子の波動関数の局在性が空間次元と密接に関係していることを無次元化したコンダクタンス g を導入し，スケーリング理論を用いて議論する．一般にコンダクタンスは系の大きさ L と，乱れの度合いや電子密度などのいくつかの外部パラメータ x の関数となるので，$g = g(L, x)$ と表現することにする．スケーリング仮説から系の大きさ L を b 倍だけしたときのコンダクタンス $g = g(bL, x)$ は元のコンダクタンス $g = g(L, x)$ と b によってのみ記述できると仮定する．この仮定は 1979 年に E. Abrahams らによって提案された [120]．この仮定に従えば，

$$g(bL, x) = f[g(L, x), b] \tag{A.1}$$

と表すことが可能である．ここで f は適当なスケーリング関数である．式 (A.1) の両辺の対数をとったものを $\log bL$ で微分する．一般の関数 $F(bL)$ に対する対数微分で，

$$\frac{\mathrm{d}\log F(bL)}{\mathrm{d}\log b} = \frac{\mathrm{d}\log F(bL)}{\mathrm{d}\log(bL)} \tag{A.2}$$

が成立することを考慮すれば，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\log g(bL, x)}{\mathrm{d}\log bL} &= \frac{\mathrm{d}\log f[g(L, x), b]}{\mathrm{d}\log bL} \\ &= \frac{\mathrm{d}\log f[g(L, x), b]}{\mathrm{d}\log b}\end{aligned} \tag{A.3}$$

となる．式 (A.3) において $b \to 1$ とすれば式 (A.3) の右辺は $g(L,x)$ のみの関数となるので，

$$\beta(g) = \frac{\mathrm{d}\log g(L,x)}{\mathrm{d}\log L} \tag{A.4}$$

と関数 $\beta(g)$ を定義できる．

次に，式 (A.4) で定義した $\beta(g)$ のコンダクタンス g 依存性を調べる，まず，$g \to 0$ となるような局在相側での $\beta(g)$ を評価する．このとき波動関数の包絡線関数を $\phi(r)$ とすれば，局在長 ξ を用いて，

$$\phi(r) \propto \mathrm{e}^{-r/\xi} \tag{A.5}$$

のように電子の波動関数の裾は指数関数的に減衰すると考えられる．また，コンダクタンス g は $|\phi(0)\phi(L)|^2$ に比例しており，$g = g_0 \mathrm{e}^{-2L/\xi}$ となることから $\beta(g)$ は，

$$\beta(g) = \log g - \log g_0 \tag{A.6}$$

のように表される．金属相側，つまり波動関数が拡がっているとき，コンダクタンス g は空間次元依存性をもつ．つまり，オームの法則より，

$$g(L,x) = \frac{h}{2e^2}\sigma_{dc}(x)L^{d-2} \tag{A.7}$$

となる．ここで d は空間次元を表し，$\sigma_{dc}(x)$ は電気伝導度である．従って，

$$\beta(g) = d - 2 \tag{A.8}$$

となる．これより，$\beta(g)$ の正負が局在 - 非局在を分けることになる．

ここで $\beta(g)$ が g に対して単調に変化する解析関数であると仮定すれば，上記のような $\beta(g)$ の振舞いから，乱れの存在する電子系におけるアンダーソン転移は系の次元性によって，以下のように特徴づけることができる．

1. $d = 3$ 以上の場合

   $g \to 0$ のとき $\beta(g) < 0$，$g \to \infty$ のとき $\beta(g) > 0$ となるため，$\beta(g_c) = 0$ となる g_c が存在する．これより，$g > g_c$ では $L \to \infty$ としても金属的な振舞い（非局在）をし，$g < g_c$ では絶縁体（局在）となる．また，$g = g_c$ となるときがアンダーソン転移点直上に対応する．

2. $d = 1, 2$ の場合

   g をどのように変化させても $\beta(g) < 0$ であり，全ての状態が局在状態となる．

上記のようにコンダクタンスの振舞いは系の次元によって大きく異なる．また，系の乱れの大小が $g_c = g(E_c)$ となる臨界エネルギーを変化させるが，どの次元においてもアンダーソン転移の本質的な振舞いには寄与しない．スケーリング理論は，臨界点において系の特徴的な長さが消失することに基づき，臨界点近傍では系を特徴づける長さが 1 つのみであることを仮定に置いている．本節 A.1.1 の結論は β 関数の単調性を仮定することで得られたものであるが，ユニーバーサリィ・クラスのいくつかでは成立しない．そのため，本節 A.1.1 の結論は修正を加える必要がある．系の次元に加え，対称性とアンダーソン転移がどのように関連付けられるかを次節で述べる．

A.1.2　臨界指数とユニバーサリティ・クラス

一般に臨界点近傍における種々の統計量は，ベキ関数で表現される．これより，金属相側における電気伝導度 $\sigma(E)$ は，臨界点近傍で

$$\sigma \propto (E - E_c)^s \qquad (E > E_c) \tag{A.9}$$

と臨界指数 s を用いて表現でき，相関長 ξ は

$$\xi \sim |E - E_c|^{-\nu} \tag{A.10}$$

である．この臨界指数はある種のユニバーサリティを有している．同一のユニバーサリティを示す系の集合をユニバーサリティ・クラスと呼ぶ．系がどのユニバーサリティ・クラスに属するかは，相転移を引き起こす相互作用の種類や系の空間次元，空間構造の対称性のみに依存する．A.1.1 節では 3 次元以上においてのみアンダーソン転移が起こりうるという結果を得たが，系の対称性を変化させることでその結果は以下のように修正される．

格子欠陥や不純物が存在する不規則電子系では，並進対称性や結晶構造に起因する回転・反転などの空間対称性は全て破れており，一般に系が持ちうる対称性は時間反転対称性とスピン回転対称性の基本的対称性のみである．このことから，アンダーソン転移のユニバーサリティ・クラスはこの 2 つの基本的対称性の組み合わせできまるものと期待できる．時間反転対称性は系に磁場を印加することで破ることができる．またスピン軌道相互作用がはたらいている場合にはスピン回転対称性が破られる．磁場もなくスピン軌道相互作用がはたらかない場合には，どちらの対称性も保たれたままである．ランダム行列理論の分類法から，どちらの対称性も保たれている場合をオーソゴナル・クラス，時間反転対称性だけが破れている場合をユニタリー・クラス，スピン回転対称性だけが破れている場合をシンプレクティッ

ク・クラスと呼ぶ [121]．オーソゴナル・クラスでは節 A.1.1 の結果がそのまま適応でき，3 次元系でのみアンダーソン転移が観測される．ユニタリー・クラスでは β 関数の解析性が失われており，2 次元においてもアンダーソン転移が起こるようになる．シンプレクティック・クラスでは β 関数の単調性が失われており，これについても 2 次元以上の系でアンダーソン転移が起こる．

A.1.3　秩序変数としての局所状態密度

アンダーソン転移は典型的な連続転移であるにもかかわらず，アンダーソン転移における秩序変数を理解することは難しい．これは，アンダーソン転移に伴う対称性の破れが不明瞭なことや，磁性相転移の秩序変数 (磁化) などと比べたとき，アンダーソン転移を起こす系の秩序が何であるかを理解することが難しいことに起因する．アンダーソン転移の秩序変数は以下の条件を満たす必要がある．

- 秩序変数は局在相 (絶縁相) あるいは非局在相 (金属相) のどちらか一方でゼロになる．
- そのどちらかの相において正の有限値を取る．
- 転移点近傍でべき的な振舞いを示す (臨界指数 β をもつ)．

上記の条件を満たす量として Janssen は局所状態密度 (Local Density of State:LDOS) の典型値を提案した [122]．以下では LDOS の典型値の定性的な振舞いを考察するが，これらの議論では系の不規則さの度合い W は一定として考える．LDOS はある状態において位置 $\boldsymbol{r}$ での電子の存在確率を与える量で，無限系においては

$$\rho(\boldsymbol{r}, E) = \sum_{\lambda} |\psi_\lambda(\boldsymbol{r})|^2 \delta(E - E_\lambda) \tag{A.11}$$

で定義される．ここで $\psi_\lambda(\boldsymbol{r})$ は固有エネルギー E_λ に属する固有状態を表す．システムが有限である系 (システムサイズ L) の LDOS はエネルギースペクトルが離散スペクトルであることから，δ 関数は有限幅 $\Gamma(E) \propto L^{-d}$ にぼかされ，

$$\rho(\boldsymbol{r}, E) = \Gamma(E)^{-1} |\psi_E(\boldsymbol{r})|^2 \tag{A.12}$$

となる．まずその空間平均量を考える．$\rho(\boldsymbol{r}, E)$ の空間平均 $\rho_{av} = L^{-d} \int \rho_f(\boldsymbol{r}, E) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は通常の状態密度に他ならないので，そのサイズ依存性は

$$\rho_{av} \propto L^0 \tag{A.13}$$

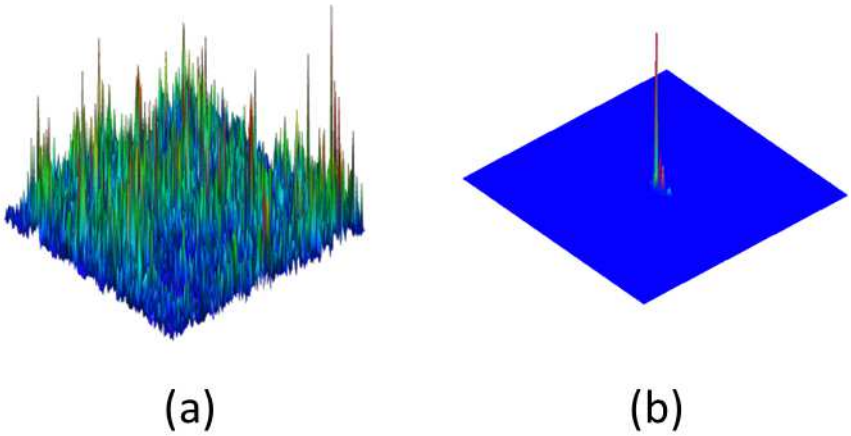


図 A.1: 不規則電子系内の波動関数．(a) は非局在相，(b) は局在相である．

となる．有限サイズスケーリングの議論から，式 $(A.13)$ は ρ_{av} が臨界点近傍で外部パラメータ x(アンダーソン転移においてはエネルギーや不規則さの度合い) には依らないことを意味している．従って，状態密度 ρ_{av} は秩序変数にはふさわしくない．

次に，LDOS の典型値の振舞いを見る．“ 典型値 ” とは最もよく現れる値 (モード) を意味しており，相乗平均

$$\rho_{\rm typ} = \left(\prod_i^N \rho_i \right)^{1/N} \tag{A.14}$$

と同じ統計的振舞いを有する．ここで格子系を考えれば，i はサイトであり，N は格子点数であり $N = L^d$ という関係がある．アンダーソン転移が起こる 2 次元電子系の金属相と絶縁相を示したのが図 A.1 である．絶縁相においては局在領域以外は存在確率がなくなり，このとき式 (A.14) はゼロとなる．また反対に，金属相においては系全体に波動関数が広がっており，式 (A.14) は有限の値を獲得する．図 A.2 にこの振舞いを定性的に示したように，LDOS の典型値はある閾値を境に有限になることが期待され，この振舞いは秩序変数の振舞いに似ているといえる．

有限系においては，式 (A.14) は以下のようにも表現できる．

$$\rho_{\rm typ}(E) = \Gamma^{-1}(E) |\psi(E)|^2_{\rm typ} \tag{A.15}$$

マルチフラクタル解析の議論から，この量のサイズ依存性は

$$\rho_{\rm typ} \propto L^{d-\alpha_0} \tag{A.16}$$

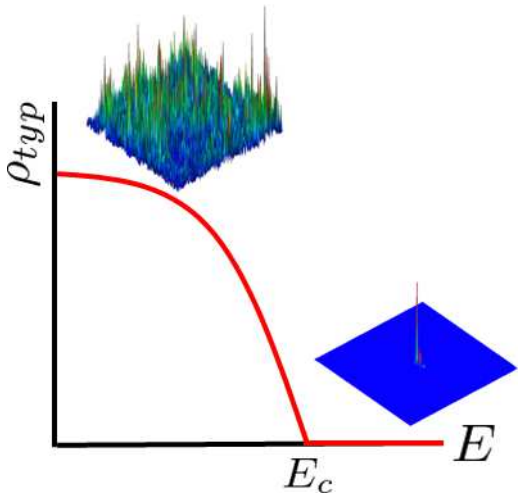


図 A.2: $\rho_{\rm typ}$の定性的な振舞い．秩序変数の振舞いと似ている．

と書ける．ここで α_0 はマルチフラクタル解析における Lipschitz – Hölder 指数である．また，LDOS の典型値が臨界的に振舞うとすると，そのときの臨界指数を β として，以下のスケーリング関係式が得られる [123].

$$\beta = \nu(\alpha_0 - d). \tag{A.17}$$

A.2 モデル

本節では，本研究で扱う数値計算モデルである SU(2) モデルについて説明する．このモデルは 2 次元不規則電子系で唯一アンダーソン転移を示すユニバーサリティ・クラスである 2 次元シンプレクティック・クラスに属する．すなわち，スピン軌道相互作用を有する系 (時間反転対称性は保たれているが，スピン回転対称性は破れている系) がこのユニバーサリティ・クラスに属する．SU(2) モデルはスケーリング解析を行う際のスケーリング補正が小さいため，数値計算に適している．また，2 次元系を用いることで行列サイズが抑えられ，高次元のアンダーソン転移に比べてより大きなシステムサイズを扱うことができる．

A.1.2 節で説明したように，2 次元シンプレクティック・クラスは，2 次元系で唯一アンダーソン転移が起こるユニバーサリティ・クラスである．このユニバーサリティ・クラスを記述するモデルには，Evangelou モデル [124]，Ando モデル [125]，Merkt らによって提案されたネットワークモデル [126] などがある．本研究では Asada らによって提案された SU(2) モデル [127, 128] を採用する．SU(2) モデルは他のモデルに比べ，スケーリング解析をする際

の irrelevant な長さが小さいという特徴がある．そのため信頼性の高い計算結果が得られる．

SU(2) モデルは，2 次元格子上でのサイト上の不純物散乱と最近接サイト間ホッピングのみを考慮した強束縛モデルであり，そのハミルトニアンは

$$H = \sum_{i,\sigma} \epsilon_i c^{\dagger}_{i,\sigma} c_{i,\sigma} - V \sum_{\langle i,j\rangle,\sigma,\sigma'} R(i,j)_{\sigma,\sigma'} c^{\dagger}_{i,\sigma} c_{\sigma} \tag{A.18}$$

と表現できる．ここで $c^{\dagger}_{i,\sigma} c_{i,\sigma}$ はそれぞれサイト i にスピン σ をもった電子を 1 個生成，消滅させる演算子である．ϵ_i はサイト i における不純物ポテンシャルの大きさを表しており，区間 $[-W/2, W/2]$ の範囲で均一にランダムな値をとる．従って，分布の幅 W が系の不規則さを決定する．通常の強束縛モデル同様，ホッピングエネルギー V を系のエネルギー単位とする．第 2 項の和の $\langle i,j\rangle$ は最近接サイトペアのみ和に寄与することを意味する．スピン軌道相互作用を有する系は，スピンの回転を記述するホッピング項をもつことが期待され，$R(i,j)_{\sigma,\sigma'}$ はスピン散乱を表す．スピンの回転は，オイラーの回転を用いることで説明できる．

オイラーの回転は以下の 3 段階の操作を指す．まずある対象を z 軸周りに α' 角だけ時計回りに回転させる．この回転に伴い y 軸は y' 軸へと移動したとする．次に y' 軸周りに β' 角だけ時計回りに回転させる．この操作によって z 軸は z' 軸へと移動したとする．この結果をさらに，z' 軸周りに角度 γ' だけ回転させる．この操作は回転演算子 R を用いて，

$$R(\alpha', \beta', \gamma') \equiv R_{z'}(\gamma') R_{y'}(\beta') R_z(\alpha') \tag{A.19}$$

と記述でき，個々の回転演算子には

$$R_{y'}(\beta') = R_z(\alpha') R_y(\beta') R_z^{-1}(\alpha') \tag{A.20}$$

$$R_{z'}(\gamma') = R_{y'}(\beta') R_{z'}(\gamma') R_{y'}^{-1}(\beta') \tag{A.21}$$

という関係が成り立つ．式 (A.20)，(A.21) を式 (A.19) に代入すると，

$$R(\alpha', \beta', \gamma') = R_z(\alpha') R_y(\beta') R_z(\gamma') \tag{A.22}$$

が得られる．よく知られているように，スピン系の回転演算子はパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用いて，

$$R_x(\alpha) = \exp(i\sigma_1 \alpha/2) \tag{A.23}$$

$$R_y(\alpha) = \exp(i\sigma_2 \alpha/2) \tag{A.24}$$

$$R_z(\alpha) = \exp(i\sigma_3 \alpha/2) \tag{A.25}$$

と書ける．従って，式 (A.22) は，

$$
\begin{aligned}
R(\alpha',\beta',\gamma') &= \exp(i\sigma_3\alpha'/2)\exp(i\sigma_2\beta'/2)\exp(i\sigma_3\gamma'/2) \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\alpha'/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha'/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta'/2) & \sin(\beta'/2) \\ -\sin(\beta'/2) & \cos(\beta'/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma'/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma'/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i(\alpha'+\gamma')/2}\cos(\beta'/2) & e^{i(\alpha'-\gamma')/2}\sin(\beta'/2) \\ -e^{-i(\alpha'-\gamma')/2}\sin(\beta'/2) & e^{-i(\alpha'+\gamma')/2}\cos(\beta'/2) \end{pmatrix} \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}
$$

と表せる．ここで，

$$\alpha = \frac{\alpha'+\gamma'}{2} \qquad \text{(A.27)}$$

$$\beta = \frac{\beta'}{2} \qquad \text{(A.28)}$$

$$\gamma = \frac{\alpha'-\gamma'}{2} \qquad \text{(A.29)}$$

と改めて置きなおせば，式 (A.26) は

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos(\beta) & e^{i\gamma}\sin(\beta) \\ -e^{-i\alpha}\sin(\beta) & e^{-i\gamma}\cos(\beta) \end{pmatrix} \qquad \text{(A.30)}$$

となる．

SU(2) モデルでは式 (A.30) の 3 つの回転角はホッピングするサイト間 i,j に依存すると考え，

$$R(i,j) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_{(i,j)}}\cos(\beta_{(i,j)}) & e^{i\gamma_{(i,j)}}\sin(\beta_{(i,j)}) \\ -e^{-i\alpha_{(i,j)}}\sin(\beta_{(i,j)}) & e^{-i\gamma_{(i,j)}}\cos(\beta_{(i,j)}) \end{pmatrix} \qquad \text{(A.31)}$$

とする．SU(2) モデルでは，スピン軌道相互作用が非常に強い場合を考えるため，スピン回転角は最大の範囲で変化するとする．そのため，α,γ は $[0.2\pi)$ の範囲でランダムな値をとる．また β は，

$$P(\beta)\mathrm{d}\beta = sin(2\beta)\mathrm{d}\beta \qquad (0 \le \beta \le \pi/2) \qquad \text{(A.32)}$$

という分布関数に従ってランダムな値を取らせる．式 (A.31) より $R(i,j)$ は

$$R(i,j)^\dagger = R(i,j)^{-1} \qquad \text{(A.33)}$$

$$|R(i,j)| = 1 \qquad \text{(A.34)}$$

という関係を満たすことが確認できる．式 (A.33) は R がユニタリー行列であることを示している．さらにその行列式が 1 であるとき，特別なユニタリー (Special Unitary:SU) 行列であるという．これらと行列のランクを考慮して，行列 $R(i,j)$ は SU(2) 群に属するという．

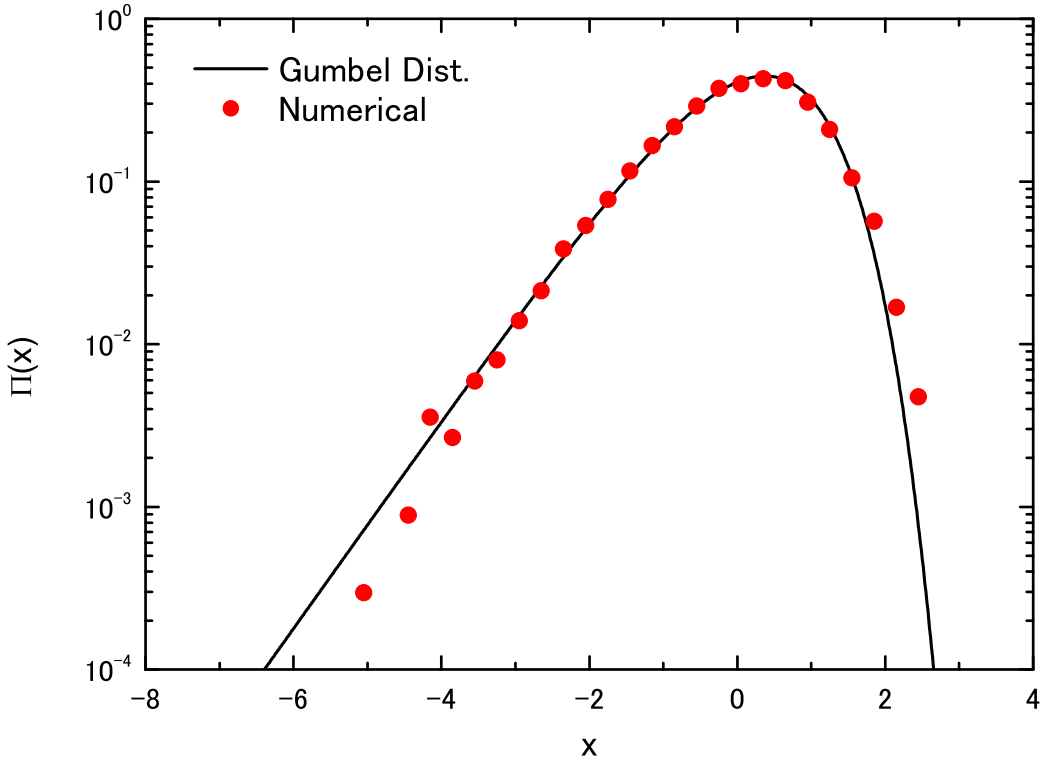


図 A.3: リスケールされた局所状態密度の典型値 $[x = (\rho_{\rm typ} - \langle\rho_{\rm typ}\rangle)/\sigma_{\rho_{\rm typ}}]$ の臨界点における揺らぎ (赤点). と $a = \pi/2$ の一般化された Gumbel 分布 (実線).

A.3 LDOS の典型値の臨界揺らぎ

臨界エネルギー E_c が $E_c = 0$ となる不規則さの度合い $W = 6.199$ を採用し，システムサイズを $L = 20$ としてハミルトニアン行列を数値的に対角化することで固有値と固有ベクトルを計算した．これらの中で $E = E_c(= 0)$ に最も近い固有状態に対して式 A.14 に基づいて $\rho_{\rm typ}$ を求めた．同様の計算を異なる不規則ポテンシャル分布を有する 2500 個の系に対して計算し，その平均値 $\langle\rho_{\rm typ}\rangle$ と標準偏差 $\sigma_{\rho_{\rm typ}}$ を求め，$x = (\rho_{\rm typ} - \langle\rho_{\rm typ}\rangle)/\sigma_{\rho_{\rm typ}}$ の分布関数を計算した．その結果が図 A.3 である．実線は $a = \pi/2$ の一般化された Gumbel 分布である．LODS の典型値の臨界揺らぎと $a = \pi/2$ の一般化された Gumbel 分布が一致していることより，アンダーソン転移における $\rho_{\rm typ}$ の臨界揺らぎが，他の多くの臨界現象の秩序変数と

同様に，一般化された Gumbel 分布に従うことが明らかになった.

付録 B　初期次数に依存したノード除去のカスケードによる次数相関変化

ネットワーク上の負荷をランダム・ウォーカーとみなすことで，時間的な揺らぎを考慮した過負荷故障カスケードの問題において，カスケードの最中の各時刻における各ノードの故障確率は，初期ネットワークにおける次数 k_0 と時刻 τ における次数 k に依存する．次数相関を有さない初期ネットワークが，カスケード過程を経て次数相関を発現するか否かは自明な問題ではない．そこで参考文献 [63] に基づき，この問題を議論する．

B.1　カスケードに伴う次数相関変化

次数相関を有する初期ネットワークが次数分布関数 P_k，結合確率 $P_{k,k'}$ に従っているとする．このネットワークから，次数に依存した確率 f_k でノードを取り去りさることを考えるが，取り除いたのちの構造を考えやすくするために，ノード除去プロセスに際して，各ノードに生き残り S と除去 R とマーキングする．このようなネットワークからエッジを一本任意抽出したとき，その両端ノードのマークは $S-S$，$S-R$，$R-S$，$R-R$ のいづれかである．任意抽出したエッジ端のノードがそれぞれマーク M_1 で次数 k，マーク M_2 で k' である確率 $q_{k,k'}^{M_1,M_2}$ は

$$q_{k,k'}^{S,S} = P_{k,k'}(1-f_k)(1-f_{k'}) \tag{B.1}$$

$$q_{k,k'}^{S,R} = P_{k,k'}(1-f_k)f_{k'} \tag{B.2}$$

$$q_{k,k'}^{R,S} = P_{k,k'}f_k(1-f_{k'}) \tag{B.3}$$

$$q_{k,k'}^{R,R} = P_{k,k'}f_k f_{k'} \tag{B.4}$$

となる．これらの確率から一方のマークが S でかつ次数 k のノードのある隣接ノードがマーク R である確率 ϕ_k が

$$\phi_k = \frac{\sum_{k'} q_{k,k'}^{S,R}}{\sum_{k'}(q_{k,k'}^{S,S} + q_{k,k'}^{R,S})} \tag{B.5}$$

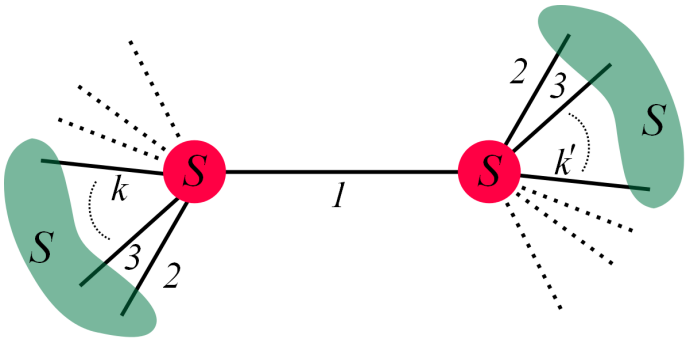


図 B.1: $S-S$ のエッジ集合から抽出されるエッジの描像．抽出されたエッジの左端には抽出したエッジのほかに $k-1$ 個の S ノード（緑領域）がある．また，エッジ右端には $k'-1$ 個の S ノードが存在する．点線エッジはその向こう側にマーク R のノードが存在することを意味している．

と求められる．この確率 ϕ_k から直ちにノード除去後の次数分布関数 P'_k が

$$P'_k = \sum_l \binom{l}{k} \phi_l^{l-k} (1-\phi_l)^k P_l^s \tag{B.6}$$

と求めることができる．ここで $P_k^s = \frac{(1-f_k)P_k}{\sum_l P(l)(1-f_l)}$ である．新たな結合確率 $P'_{k,k'}$ を考える．確率 $P'_{k,k'}$ は両端ノードが S とマークされたエッジ集合から任意抽出したエッジの片側のノードの向こう側にマーク S のノードが $k-1$ 個，もう片側に S が $k'-1$ 個ある確率に等しい（図 B.1 参照）．ここで $S-S$ のエッジ集合から任意抽出したエッジの両端の次数が u と v である確率 $\xi_{u,v}$ は

$$\xi_{u,v} = \frac{q_{k,k'}^{S,S}}{\sum_{m,l} q_{m,l}^{S,S}} \tag{B.7}$$

となる．したがって，この確率と隣接ノード除去確率 (B.5) を用いて，新たな結合確率 $P'_{k,k'}$ は

$$P'_{k,k'} = \sum_{u=k} \sum_{v=k'} \binom{u-1}{k-1} \phi_u^{u-k} (1-\phi_u)^{k-1} \binom{v-1}{k'-1} \phi_v^{v-k'} (1-\phi_v)^{k'-1} \xi_{u,v} \tag{B.8}$$

と求めることができる．

次に S とマークされたノードの周りに存在する S ノードの数を勘定することで，除去後のそれぞれのノードの次数変化を調べる．ノード除去確率 f_k に従ってノードを除去した後のネットワークから，任意抽出したノードの次数が k であり，このノードが初期において次数が k_0 である確率 $G'_{k_0,k}$ を考える．この確率は式 (B.6) の和の中の関数形に他ならない．し

たがって，

$$G'_{k_0,k} = \binom{k_0}{k} \phi_{k_0}^{k_0-k} (1-\phi_{k_0})^k P^s_{k_0} \tag{B.9}$$

である．

第一のノード除去プロセスを行った後のネットワークから，初期の次数 k_0 と除去後の次数 k に依存した確率 $f_{k_0,k}$ でさらにノードを除去する (第二ノード除去プロセス)．この除去プロセスによって次数分布関数が P''_k となったネットワークの次数相関について考える．上記で導入したエッジ端ノードのマークに関する確率を 4 変数関数に拡張し，

$$q^{S,S}_{k_0,k,k'_0,k} = Q'_{k_0,k,k'_0,k}(1-f_{k_0,k})(1-f_{k'_0k'}) \tag{B.10}$$

$$q^{S,R}_{k_0,k,k'_0,k} = Q'_{k_0,k,k'_0,k}(1-f_{k_0,k})f_{k'_0k'} \tag{B.11}$$

$$q^{R,S}_{k_0,k,k'_0,k} = Q'_{k_0,k,k'_0,k}f_{k_0,k}(1-f_{k'_0k'}) \tag{B.12}$$

$$q^{R,R}_{k_0,k,k'_0,k} = Q'_{k_0,k,k'_0,k}f_{k_0,k}f_{k'_0k'} \tag{B.13}$$

を導入する．ここで $Q'_{k_0,k,k'_0,k}$ は任意抽出したエッジの片側ノードの次数が初期に k_0，現在 k でもう片側ノードの次数が初期に k'_0，現在 k' である確率で，式 (B.8) の和の中の関数形に等しい．上記の確率を用いて初期において次数 k_0，現在次数 k の S とマークされたノードから出る一本のエッジの先に R が存在する確率 $\phi_{k_0,k}$ は

$$\phi_{k_0,k} = \frac{\sum_{k'_0,k'} q^{S,R}_{k_0,k,k'_0,k}}{\sum_{k'_0,k'}(q^{S,S}_{k_0,k,k'_0,k} + q^{S,R}_{k_0,k,k'_0,k})} \tag{B.14}$$

となる．初期次数が k_0 で，確率 $f_{k_0,k}$ による除去プロセス後に次数 k となったノードの存在確率 $G''_{k_0,k}$ は式 (B.6) を拡張して，

$$G''_{k_0,k} = \sum_l \binom{l}{k} \phi_{k_0,l}^{l-k}(1-\phi_{k_0,l})^k G'^s_{k_0,l} \tag{B.15}$$

と記述できる．ここで

$$G'^s_{k_0,k} = \frac{G'_{k_0,k}(1-f_{k_0,k})}{\sum_{m_0,m} G'_{m_0,m}(1-f_{m_0,m})} \tag{B.16}$$

である．確率 $f_{k_0,k}$ でノードを取り除いたのちのネットワークの次数相関を明らかにするために，第二ノード除去プロセス後のネットワークから任意抽出したエッジの両端の片側ノードの次数が初期に k_0，現在 k で，反対側の次数が初期に k'_0，現在 k' である確率 $Q''_{k_0,k,k'_0,k}$ を求める．確率 (B.7) を拡張した，第二ノード除去プロセスに伴うマーキングによって作られた $S-S$ のエッジ集合から，任意抽出したエッジの片側ノードの次数が初期に k_0 で，現

在 u であり，もう一方が k_0' で，現在 v である確率 $\xi_{k_0,u,k_0',v}$ を導入する．これは，

$$\xi_{k_0,u,k_0',v} = \frac{q^{S,S}_{k_0,u,k_0',v}}{\sum_{m_0,m,l_0,l} q^{S,S}_{m_0,m,l_0',l}} \tag{B.17}$$

とかける．$S-S$ のエッジ集合から任意抽出したエッジの片側ノードが初期に次数 k_0 のノードが現在次数 u で第二ノード除去プロセスによって次数が k となり，反対側ノードが初期に次数 k_0' のノードが現在次数 v で第二ノード除去プロセスによって次数が k' になると考えれば，u, v の任意性から確率 $Q''_{k_0,k,k_0',k'}$ は

$$Q''_{k_0,k,k_0',k'} = \sum_{u=k}^{k_0}\sum_{v=k'}^{k_0'} \binom{u-1}{k-1} \phi_{k_0,u}^{u-k}(1-\phi_{k_0,u})^{k-1} \binom{v-1}{k'-1} \phi_{k_0',v}^{v-k'}(1-\phi_{k_0',v})^{k'-1} \xi_{k_0,u,k_0',v} \tag{B.18}$$

したがって，第二ノード除去プロセス後の結合確率 $P''_{k,k'}$ は

$$P''_{k,k'} = \sum_{k_0=k}^{k_{\max}}\sum_{k_0'=k'}^{k_{\max}} Q''_{k_0,k,k_0',k} \tag{B.19}$$

で与えられる．ここで $k_{\max}$ は初期ネットワークの最大次数である．

B.2 初期に次数相関がない場合

初期に次数相関がないネットワークの場合について参考文献 [63] では，次数 k に依存したランダムなノード除去プロセス後に次数相関が現れないことを解析的に示している．ここでは，初期次数と第一ノード除去プロセス後の次数に依存した確率 $f_{k_0,k}$ による第二ノード除去プロセス後も次数相関が現れないことを示す．参考文献 [63] によれば，初期に次数相関がないネットワークの第一ノード除去プロセス後の結合確率 $P'_{k,k'}$ が

$$P'_{k,k'} = \frac{kP'_k}{\langle k\rangle_{P'}}\frac{k'P'_{k'}}{\langle k\rangle_{P'}} \tag{B.20}$$

となる．このことと第一ノード除去プロセス後のネットワークから任意抽出したノードの次数が初期に k_0，現在 k である確率 $G'_{k_0,k}$ を用いて，エッジの片側ノードの次数が初期に k_0，現在 k で，もう片側ノードの次数が初期に k_0'，現在 k' である確率 $Q'_{k_0,k,k_0',k'}$ は

$$\begin{aligned} Q'_{k_0,k,k_0',k'} &= P'_{k,k'}\frac{G'_{k_0,k}}{P'_k}\frac{G'_{k_0',k'}}{P'_{k'}} \\ &= \frac{kG'_{k_0,k}}{\langle k\rangle_{P'}}\frac{k'G'_{k_0',k'}}{\langle k\rangle_{P'}} \end{aligned} \tag{B.21}$$

と書くことができる．式 (B.21) から隣接ノード除去確率 $\phi_{k_0,k}$ は，

$$\begin{aligned}\phi_{k_0,k} &= \frac{\sum_{k'_0,k'} q^{S,R}_{k_0,k,k'_0,k}}{\sum_{k'_0,k'}(q^{S,S}_{k_0,k,k'_0,k}+q^{S,R}_{k_0,k,k'_0,k})} \\ &= \frac{\frac{kG'_{k_0,k}}{\langle k\rangle_{P'}}(1-f_{k_0,k})\sum_{k'_0,k'}\frac{k'G'_{k'_0,k'}}{\langle k\rangle_{P'}}f_{k'_0,k'}}{\frac{kG'_{k_0,k}}{\langle k\rangle_{P'}}(1-f_{k_0,k})\sum_{k'_0,k'}\frac{k'G'_{k'_0,k'}}{\langle k\rangle_{P'}}} \\ &= \sum_{k'_0,k'}\frac{k'G'_{k'_0,k'}}{\langle k\rangle_{P'}}f_{k'_0,k'}=\phi \end{aligned} \tag{B.22}$$

となり，初期次数と現在次数に依存しない．また，第二ノード除去プロセスに伴うマーキングでできた $S-S$ のエッジ集合から任意抽出したエッジに関する確率 $\xi_{k_0,u,k'_0,v}$ は，次数相関がないとき

$$\xi_{k_0,u,k'_0,v}=\frac{uG'_{k_0,u}(1-f_{k_0,u})vG'_{k'_0,v}(1-f_{k'_0,v})}{\left[\sum_{m_0,m}mG'_{m_0,m}(1-f_{m_0,m})\right]^2} \tag{B.23}$$

となる．したがって式 (B.18) に式 (B.23) と式 (B.22) を代入することで第二ノード除去後のネットワークにおける初期次数を考慮した結合確率 $Q''_{k_0,k,k'_0,k'}$ は

$$\begin{aligned}Q''_{k_0,k,k'_0,k'} &= \sum_{u=k}^{k_0}\sum_{v=k'}^{k'_0}\binom{u-1}{k-1}\phi^{u-k}(1-\phi)^{k-1}\binom{v-1}{k'-1}\phi^{v-k'}(1-\phi)^{k'-1} \\ &\times \frac{uG'_{k_0,u}(1-f_{k_0,u})vG'_{k'_0,v}(1-f_{k'_0,v})}{\left[\sum_{m_0,m}mG'_{m_0,m}(1-f_{m_0,m})\right]^2}\end{aligned} \tag{B.24}$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned}&\sum_{u=m}^{m_0}\binom{u-1}{m-1}\phi^{u-m}(1-\phi)^{m-1}uG'_{m_0,u}(1-f_{m_0,u}) \\ &\qquad=\frac{m}{1-\phi}\sum_{u=m}^{m_0}\binom{u}{m}\phi^{u-m}(1-\phi)^m G'_{m_0,u}(1-f_{m_0,u}) \\ &\qquad=\frac{m}{1-\phi}\sum_{l_0,l}G'_{l_0,l}(1-f_{l_0,l})\sum_{u=m}^{m_0}\binom{u}{m}\phi^{u-m}(1-\phi)^m G'^{s}_{m_0,u}\end{aligned}$$

と [上記の式変形において二項分布の性質と式 (B.16) を用いた]，第二ノード除去後のネットワークから任意抽出したノードの次数が初期次数 k_0 で，そのときの次数が k である確率 $G''_{k_0,k}$ が，第二ノード除去プロセス前に次数相関がないとき，

$$G''_{k_0,k}=\sum_{l=k}^{k_0}\binom{l}{k}\phi^{l-k}(1-\phi)^k G'^{s}_{k_0,l} \tag{B.25}$$

であることから，

$$Q''_{k_0,k,k'_0,k'} = \frac{kG''_{k_0,k}k'G''_{k'_0,k'}}{\left[\dfrac{(1-\phi)\sum_{m_0,m} mG'_{m_0,m}(1-f_{m_0,m})}{\sum_{m_0,m} G'_{m_0,m}(1-f_{m_0,m})}\right]^2} \tag{B.26}$$

と変形できる．ここで式 (B.26) の分母の括弧内が第二ノード除去プロセス後のネットワークの平均次数 $\langle k\rangle_{P''}$ に等しければ，このネットワークに次数相関がないといえる．第二ノード除去プロセス後のネットワークの平均次数 $\langle k\rangle_{P''}$ は

$$\begin{aligned}
\langle k\rangle_{P''} &= \sum_{k=0}^{k_{\max}} k \sum_{k_0=k}^{k_{\max}} G''_{k_0,k} \\
&= \sum_{k=0}^{k_{\max}} k \sum_{k_0=k}^{k_{\max}} \sum_{l=k}^{k_0} \binom{l}{k} \phi^{l-k}(1-\phi)^k G'^{s}_{k_0,l} \\
&= \frac{1}{\sum_{m_0,m} G'_{m_0,m}} \sum_{k=0}^{k_{\max}} k \sum_{k_0=k}^{k_{\max}} \sum_{l=k}^{k_0} \binom{l}{k} \phi^{l-k}(1-\phi)^k G'_{k_0,l}(1-f_{k_0,l}) \\
&= \frac{1}{\sum_{m_0,m} G'_{m_0,m}} \sum_{k_0=k}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{k_0} G'_{k_0,l}(1-f_{k_0,l}) \sum_{k=0}^{l} k \binom{l}{k} \phi^{l-k}(1-\phi)^k \\
&= \frac{1-\phi}{\sum_{m_0,m} G'_{m_0,m}} \sum_{k_0=k}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{k_0} lG'_{k_0,l}(1-f_{k_0,l}) \sum_{k=0}^{l} \binom{l-1}{k-1} \phi^{l-k}(1-\phi)^{k-1} \\
&= \frac{(1-\phi)\sum_{k_0=k}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{k_0} lG'_{k_0,l}(1-f_{k_0,l})}{\sum_{m_0,m} G'_{m_0,m}}
\end{aligned}$$

と変形することができ，上式の最終形は式 (B.26) の分母の括弧内に他ならない．よって，式 (B.26) から第二ノード除去プロセス後のネットワークの結合確率 $P''_{k,k'}$ は

$$\begin{aligned}
P''_{,k,k'} &= \sum_{k_0,k'_0} \frac{kG''_{k_0,k}}{\langle k\rangle_{P''}} \frac{k'G''_{k'_0,k'}}{\langle k\rangle_{P''}} \\
&= \frac{kP''_k}{\langle k\rangle_{P''}} \frac{k'P''_{k'}}{\langle k\rangle_{P''}}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

となる．したがって初期ネットワークに次数相関がないネットワークから初期次数と現在次数に依存した何らかの確率 $f_{k_0,k}$ に従ってノードを次々と除去しても，次数相関が生まれることはない．