



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Studies on vector fields and differential forms on C^∞ -schemes [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	山下, 達也
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第12231号
Issue Date	2016-03-24
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/61544
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Tatsuya_Yamashita_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 山下 達也

学 位 論 文 題 名

Studies on vector fields and differential forms on C^∞ -schemes (C^∞ スキーム上のベクトル場と微分形式に関する研究)

本学位論文は C^∞ 多様体と微分形式、接ベクトル、 C^∞ 関数などの理論を多様体からより一般的な空間へ展開することを一つの目的とした。そのために用いたものの一つは C^∞ -ring の理論である。 C^∞ -ring とは C^∞ 関数による作用を与えた $\mathbb{R}$ -代数である。§2 ではこの C^∞ -ring に関する定義とその理論について述べる。その例として、実数集合や、多様体上の C^∞ 関数集合が考えられる。そして C^∞ -ring に関する局所化から、k-jet determined C^∞ -ring という C^∞ -ring のクラスを導入する。この k-jet determined C^∞ -ring という C^∞ -ring のクラスが本学位論文の定理を考える中心となる。

C^∞ -ring に対して、 $\mathbb{R}$ -derivation と $\mathbb{R}$ -cotangent module、 C^∞ -derivation と C^∞ -cotangent module をそれぞれ定義することができる。多様体上の接ベクトル場と微分形式の外微分は、 $\mathbb{R}$ -derivation とみなすことができる。さらにそれらは C^∞ -derivation でもある。本学位論文ではこの derivation という概念が中心的な役割を果たす。

§3 では C^∞ 多様体を一般化するために C^∞ -ringed space について考察する。 C^∞ -ringed space は C^∞ -ring による層が与えられた位相空間である。多様体そのものは、開部分集合上の C^∞ -関数の集合による層を持つ位相空間として C^∞ -ringed space とみなすことができる。 C^∞ -ring から C^∞ -ringed space への作用素 Spec が存在する。作用素による像と同型な C^∞ -ringed space を affine C^∞ -scheme、局所的に affine C^∞ -scheme である C^∞ -ringed space を C^∞ -scheme という。

§4 では本学位論文の主定理について述べる。 C^∞ -ring の derivation、 C^∞ -ringed space での differential に関する結果である。主に 3 つの結果が述べられている。

一つ目に C^∞ -ring $\mathfrak{C}$ から $\mathfrak{C}$ -module M への $\mathbb{R}$ -derivation d が C^∞ -derivation となるような C^∞ -ring $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{C}$ -module M について考察した。本学位論文で証明される定理は、k-jet determined C^∞ -ring である $\mathfrak{D}$ へ向かう $\mathfrak{C}$ からの $\mathbb{R}$ -derivation が必ず C^∞ -derivation となるということである。この定理に当てはまる C^∞ -ring と $\mathbb{R}$ -derivation として、多様体上の接ベクトル、多様体上の接ベクトル場が考えられる。

二つ目は、 C^∞ -ringed space での接ベクトルと接ベクトル場について、 C^∞ -ring の derivation を用いて定義を行うことである。接ベクトルを関数芽から実数への derivation として、接ベクトル場を関数芽からそれ自身への derivation として定めた。さらに §2 での C^∞ -ring の微分形式の定義とその well-definedness によって、 C^∞ -ringed space 上の微分形式とそのくさび積と外微分を位相空間上の層で定義する。

三つめは、Nash 関数と Leibniz complexity に関する考察である。

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数 $f = f(x_1, \dots, x_n)$ について、 f が U 上の semi-algebraic 関数、つまりある 0 でない実多項式 $P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) によって U 上 $P(x, f(x)) = 0$ となるならば、 f を Nash 関数という。さらに U が semi-algebraic set ならば、 f が Nash 関数である必要十分条件は f が解析

的でありなおかつ $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の f のグラフが semi-algebraic であることである。このとき、外微分 df が d の線形性と Leibniz 則のみを有限個適用して、計算が可能になる。この計算可能性を用いて、Leibniz complexity を定義する。

Leibniz complexity は関数に関する和と積に関して線形性を保つ不等式が成り立つ。そして Nash 関数 $f(x)$ について 0 ではない $\mathbb{R}^n$ 上の実多項式 $P(x, y)$ によって $P(x, f(x)) = 0$ となるならば、 f の Leibniz complexity は P の Leibniz complexity 以下の値となる。

本学位論文では、 $\mathbb{R}^n$ 上の Nash 関数と C^∞ -ring $\mathfrak{C}$ から $\mathfrak{L}\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}, \mathbb{R}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}, \mathbb{R}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ を定める。Leibniz complexity から、 C^∞ -ring を用いてさらに二つの complexity $\text{LComp}_{\mathfrak{C}}(f)$ と $\text{Comp}_{\mathfrak{C}}(f)$ という complexity の概念を導入し、それらについて考察を行う。