HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	自己組織化臨界ダイナミクスによるフラクタル・ネットワークの構造形成
Author(s)	渡邉, 章友
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第12298号
Issue Date	2016-03-24
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k12298
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/61637
Type	doctoral thesis
File Information	Akitomo_Watanabe.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

平成27年度学位論文

自己組織化臨界ダイナミクスによる フラクタル・ネットワークの構造形成

Formation mechanism of fractal complex networks

by self-organized critical dynamics

北海道大学大学院工学院

応用物理学専攻　数理物理工学研究室

渡邉　章友

目 次

第 1 章　序論 **4**

第 2 章　複雑ネットワークの基本的性質 **9**

2.1　複雑ネットワークとは 9

2.2　複雑ネットワークの特徴量 10

2.2.1　次数と次数分布 10

2.2.2　次数相関 11

2.2.3　ネットワーク距離 13

2.2.4　クラスター係数 15

2.2.5　モジュラリティ 16

2.2.6　Erdös-Rényi ランダム・グラフ 17

2.3　スケールフリー性 20

2.3.1　現実ネットワークのスケールフリー性 20

2.3.2　一般化ランダム・グラフ 22

2.3.3　Barabasí-Albert モデル 24

第 3 章　スモールワールド性とフラクタル性 **28**

3.1　スモールワールド性 28

3.1.1　現実ネットワークのスモールワールド性 29

3.1.2　Watts-Strogatz モデル 32

3.1.3　Watts-Strogatz モデルにおける次元クロスオーバー 34

3.2　フラクタル性 36

3.2.1　フラクタルとは 36

3.2.2 ネットワークのフラクタル性 39
3.2.3 現実ネットワークのフラクタル性 40
3.2.4 フラクタル・スケールフリー・ネットワークのモデル 40
3.3 スモールワールド性とフラクタル性の関係 48
3.3.1 測定方法と特徴的長さ 48
3.3.2 クロスオーバーとスケーリング 50

第 4 章 自己組織化臨界性とフラクタル性 53

4.1 自己組織化臨界性を示す代表的なモデル 54
4.1.1 Bak-Tang-Wiesenfeld モデル 54
4.1.2 Bak-Sneppen モデル 56
4.2 ネットワーク上の自己組織化臨界ダイナミクス 57
4.2.1 ネットワーク上の Bak-Tang-Wiesenfeld モデル 58
4.2.2 ネットワーク上の Bak-Sneppen モデル 59
4.3 ネットワーク内ダイナミクスと構造の相互作用 60
4.3.1 Bak-Sneppen ダイナミクスと構造の相互作用 61
4.3.2 太陽フレアのモデル 61
4.3.3 ブーリアン・ネットワークのダイナミクス 63
4.4 本研究の目的 64

第 5 章 触媒反応ネットワーク上の自己組織化臨界ダイナミクス 66

5.1 細胞内反応とネットワーク 66
5.2 Awazu-Kaneko のモデル 67
5.3 ネットワーク・モデル 71
5.3.1 スケールフリー・ネットワーク 71
5.3.2 コミュニティ性と次数相関を有するネットワーク 72
5.3.3 触媒機能不均一性を有するネットワーク 74
5.4 連鎖反応規模の分布関数 75

5.4.1 構造不均一性を有する場合 75
5.4.2 触媒機能不均一性を有する場合 77

第 6 章 過負荷故障カスケード 83

6.1 機能性ネットワークと故障に対する頑健性 83
6.2 過負荷故障カスケードのランダムウォーカー・モデル 86
6.2.1 ネットワーク上の負荷とモデル 86
6.2.2 臨界負荷低減パラメータの理論解析 90
6.2.3 スケールフリー・ネットワークの頑健性 92

第 7 章 ネットワークの自己組織化臨界ダイナミクスとフラクタル性 97

7.1 ネットワーク・ダイナミクス 97
7.2 特徴量の時間発展 101
7.3 カスケード・サイズと自己組織化臨界性 104
7.4 フラクタル構造の発現 108
7.4.1 Compact-box-burning アルゴリズム 110
7.4.2 臨界ネットワークのフラクタル性 111
7.5 スモールワールド構造の発現と構造クロスオーバー 112
7.6 自己組織化臨界性の発現条件 115

第 8 章 結論 119

謝辞 122

参考文献 123

第1章　序論

自然界や現実社会には, 数多くの複雑系が存在する. 複雑系とは, 微視的要素の相互作用を通じて, 各要素の単純な集合とは質的に異なる振る舞いを示す系, すなわち全体としての挙動が個々の要因の寄せ集めとして単純に推測できないような系のことである. 細胞内の化学反応, 民衆の意見形成, 気象現象, 生命活動など, 身の周りの多くの系は複雑系とみなすことができる. 従来の自然科学においても複雑系の研究は進められてきたが, そこでの主な対象は, 要素間にユークリッド距離が定義できるような実空間に埋め込まれた複雑系であった. しかし, 近年になって, 要素間のトポロジカルな関係性に着目することによって, より広範な複雑系の性質を理解する試みが盛んに行われるようになった. そのような複雑系の多くは, 複雑ネットワークとして記述することができる. 系を構成する離散的要素 (ノード) と, それらの間の対関係 (エッジ) さえ定義されれば, その系をネットワークとみなすことが可能であるため, 非常に多くの分野における複雑系を複雑ネットワークとして捉えることができる. これまでの研究から, 全く異なる分野の複雑系をネットワークとして表すと, そこには様々な共通する特徴が現れることが明らかとなっている [1–3]. 複雑ネットワークにはユークリッド距離が定義される必要はないが, ノード間を結ぶ最短経路に含まれるエッジ数としてのノード間距離 l を定義することはできる. この基本的な量である l の平均値 $\langle l \rangle$ とノード数 N との関係に着目すると, 多様なネットワークの構造は, $\langle l \rangle \propto \log N$ の関係を満たすスモールワールド構造 [4] と, $\langle l \rangle \propto N^{1/d_{\mathrm{B}}}$ の関係をもつフラクタル構造 [5] に大別することができる. ここで, d_{B} はフラクタル次元である. 数学的には, これらの関係式が同時に満たされることはないため, スモールワールド構造とフラクタル構造が共存することはない. ところが, 以前はスモールワールド性をもつと考えられていたネットワークの幾つかが, その後の研究により

フラクタル性をも示すことが報告されている [5–8]. 当初この問題は, ネットワーク構造の測り方の違いによるものであると解釈されていたが, 現在では構造解析を行う長さスケールの違いによってフラクタル構造からスモールワールド構造へとクロスオーバーするものと理解されている [9].

スモールワールド性は, ショートカット・エッジが導入されることで発現することが明らかになっている [4]. スモールワールド性を示さないネットワークにショートカット・エッジを僅かに追加するだけでも, 平均ノード間距離は劇的に短くなり, スモールワールド性が発現する. 一方で, フラクタル性を発現させるメカニズムは未だに明らかにされていない. また, 現実世界には何故スモールワールド・ネットワークとフラクタル・ネットワークが存在し, それらの間でどのようにクロスオーバーが起こるのかについても理解が得られていない. 極めて基本的なこれらの問題を解決するにあたって, ユークリッド空間に埋め込まれた通常のフラクタル構造が自己組織化臨界性 (Self-organized criticality:SOC) を示すダイナミクスによって形成されるという知見 [10–13] は重要な示唆を与える. SOC ダイナミクスにおいては, 系は特別なパラメータ・チューニングをせずとも自発的に平衡系臨界点へと近づき, 臨界点近傍の状態の不安定性がゆえ, 臨界点の周りで揺らぎ続ける. その揺らぎは, 状態を特徴づける何らかの動的物理量が間欠的な雪崩のように振る舞い, 雪崩サイズの分布関数がベキ関数で表されるという特徴をもつ [10]. このことから, フラクタル構造を有するネットワークも, 何らかの SOC ダイナミクスによって形成される可能性がある.

構造が固定された複雑ネットワーク上の SOC ダイナミクスは, 従来より盛んに研究されてきた [14–27]. しかし, フラクタル・ネットワークが自己組織的に形成されるような, ネットワーク構造そのものの SOC ダイナミクスに関する研究はほとんど行われていない. そのような SOC ダイナミクスのモデルを構築するためには, ネットワークのトポロジーと内部自由度のダイナミクスとの相互作用を考慮する必要がある. 内部自由度の SOC ダイナミクスと構造との相互作用によって非自明なネットワーク構造が形成されるモデルは, これまでにも幾つか提唱されている [15, 28–37]. そこでは, Bak-Sneppen モデルをはじめとする生態系に関するモデルにおけるダイ

ナミクス [15,28,29], Bak らの砂山モデルに関連したダイナミクス [30–32], 太陽フレアの動きを模したダイナミクス [33], ノードやエッジの状態変化に伴ったエッジの繋ぎ替え [34–37] などが内部自由度ダイナミクスとして扱われている. しかしこれらのモデルでは, ダイナミクスに間欠的な雪崩現象が見られなかったり [15,34,35], 形成されたネットワークにフラクタル性が見られない [28,30–33,36,37], あるいは臨界性の発現にパラメータ・チューニングを要する [29,36] などの理由から, ネットワーク構造自体に対する SOC ダイナミクスのモデルにはなっていない.

本論文は, ネットワーク構造の時間変化が自己組織化臨界性を示すモデルを構築することで, 複雑ネットワークにおけるフラクタル性の発現機構を明らかにすると同時に, 単一ダイナミクスによるスモールワールド構造とフラクタル構造の共存, およびそのクロスオーバー・メカニズムを説明することを目的としている. 本研究で提唱される SOC モデル [38] は, Mizutaka らによる過負荷故障カスケード・モデル [39] に基づいた時間発展モデルである. Mizutaka らのモデルには, 過負荷故障カスケードによるネットワークのサイズ減少に伴ってネットワーク全体の総負荷量を低減させる負荷低減パラメータが含まれている. このパラメータには, 過負荷故障カスケードが系全体に広がるか否かを分ける臨界値が存在し, 臨界負荷低減パラメータ下でのカスケード・プロセスによってフラクタル・ネットワークが形成されることが明らかになっている [39]. 本論文における SOC モデルでは, 各時刻に新規ノードを参入させることでネットワークは成長するが, その成長に伴い負荷低減パラメータを下げることで過負荷故障カスケードが起き易くなり, ネットワークが成長し続けることを防いでいる. その結果, 限界ネットワーク・サイズの近傍で間欠的なカスケードが繰り返し起こり, その過程でフラクタル・ネットワークやスモールワールド・ネットワークが形成されることになる.

本論文では, まず固定されたネットワーク上での SOC ダイナミクスを考え, SOC の普遍クラスがネットワーク構造とどのような関係にあるのかを調べる. この目的のため, 触媒反応ネットワークにおける SOC ダイナミクスについて数値的な研究を行った. その結果, 現実ネットワークが有する様々な構造的不均一性は触媒反応ダイ

ナミクスのSOCの発現を妨げず, SOCの普遍クラスにも影響を与えないことが示された [25]. SOCの普遍クラスがネットワークの構造的不均一性に依存しないという事実は, 一つの普遍クラスに属するSOCダイナミクスから多様な構造的特徴を有するネットワークが形成される可能性を示唆するという点で非常に重要である. 続いて, 本論文におけるSOCモデル構築の基礎となるMizutakaらの過負荷故障カスケード・モデル [39] が説明される. ここで導入される負荷低減パラメータの値は, 全ノードに及ぶような大規模なカスケードが起こるか否かを左右する. また, 負荷低減パラメータが臨界値をとる場合の過負荷故障カスケードによってフラクタル・ネットワークが形成されることが説明される. 最後に, この結果に基づいたSOCモデル [38] が提案され, このモデルの性質が調べられる. これにより, フラクタル・ネットワークの形成原理と, フラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバー・メカニズムが同時に明らかにされる.

本論文の構成は以下の通りである. 第2章では, 複雑ネットワークを特徴づける様々な量を紹介する. また, 現実ネットワークが有する構造的特徴についても述べられる. さらに, そのような構造的特徴を再現するような数理モデルも紹介される. 第3章では, スモールワールド性とフラクタル性に関する詳細な説明を行い, これらの性質を有するネットワークの数理モデルを紹介する. さらに, 両性質の間の関係性に対する従来研究も紹介される. 特に, フラクタル・ネットワークの形成機構, およびフラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバー・メカニズムが未だに明らかにされていないことが強調される. 第4章では, ユークリッド空間に埋め込まれた通常のフラクタル構造がSOCダイナミクスによって形成されることを説明し, SOCと関連する様々なネットワーク・モデルが紹介される. その上で, いずれの従来モデルも本研究の目的である「ネットワーク構造自体のダイナミクスがSOCを示すモデル」にはなっていないことが述べられる. この章の最後に本論文の目的が改めて示される. 第5章では, ランダム・グラフ上の触媒反応ダイナミクスがSOCを示すことを明らかにしたAwazuらの研究を紹介する. その後, 各種構造不均一性を有するネットワーク上の触媒反応ダイナミクスも同様にSOCを示し, SOCの普遍ク

ラスが構造的不均一性に依存しないという本研究の一つの成果を述べる. 第 6 章では, Mizutaka らの過負荷故障カスケード・モデルを紹介する. 第 7 章では, 過負荷故障カスケード・モデルに基づいた SOC モデルを提案する. また, このモデルによって形成されるネットワークのフラクタル性が評価される. さらに, 同一のダイナミクスからスモールワールド・ネットワークも形成され得ることを示し, フラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバーがどのようなメカニズムによって生じるのかが議論される. 第 8 章では結論が述べられる.

第2章　複雑ネットワークの基本的性質

本章では, まず複雑ネットワーク理論の基礎と以降の議論で必要となる用語や様々な特徴量の説明を行う. また, 現実のネットワークが有する構造的特徴を説明し, それらの性質を再現する代表的な数理モデルを紹介する.

2.1　複雑ネットワークとは

ネットワークとは, 離散的な要素が何らかの対関係により繋がっている系のことを指す. ネットワーク上の離散要素はノードと呼ばれ, ノード間の繋がりはエッジと呼ばれる. エッジに向きがないネットワーク無向グラフと呼ばれ, 向きがある場合は有向グラフと呼ぶ. それぞれのネットワークの一例を図 2.1 に示す. また, 任意のノード間に 1 本あるいは複数本のエッジからなる経路が存在するネットワークは連結なネットワークと呼ばれる.

自然界や人間社会における複雑な関係性の多くは, ネットワークで記述できる. 通常, それらの系を表すネットワークのノード数は非常に大きく, 格子のような自明な構造を有していない. そのようなネットワークは一般に複雑ネットワークと呼ばれる. なお, 本論文で扱うネットワークは, ノードから出て再度そのノードに戻ってくるような自己ループ・エッジや, 一つのノード対が複数のエッジによって繋がった多重辺を含まない.

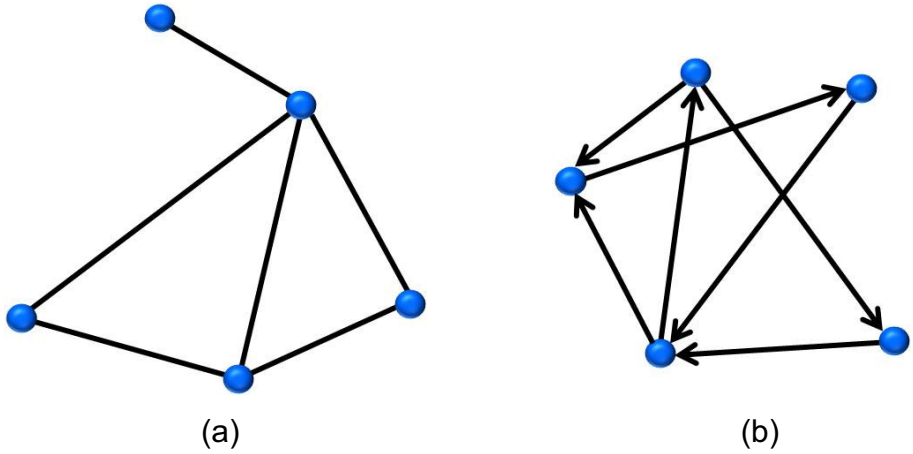

図 2.1: (a) 無向グラフと (b) 有向グラフの例.

2.2 複雑ネットワークの特徴量

2.2.1 次数と次数分布

あるノードに繋がっているエッジの数を次数と呼ぶ. 有向グラフの場合はリンクの向きを考慮して, ノードに入ってくるエッジの数を入次数, ノードから出ていくエッジの数を出次数と呼ぶ. 本論文では無向グラフと有向グラフの両方を扱うが, 以下の議論は基本的に無向グラフを念頭において展開する. 有向グラフへの拡張は容易であるので, 有向グラフを扱う際に特に注意する点がある場合にはその都度ふれることにする.

全ノード数が N であるネットワーク上の, あるノード i の次数を k_i とする. 各エッジの両端にノードがあることから, 1 本のエッジは両端のノードの次数に 1 ずつ寄与する. したがって, 総エッジ数が M のネットワークにおいて,

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = 2M \tag{2.1}$$

が成り立つ. これを, 握手の定理という.

図 2.1 を見てもわかるように, 一般的なネットワークではノードごとに次数が異なる. このため, ある特定の次数に着目するだけでは, ネットワーク全体の特徴を捉える

ことはできない. ネットワーク全体で次数がどの程度ばらついているかを見るため, 全ノードから任意に選んだノードの次数が k である確率 $P(k)$ を考える. この $P(k)$ を次数分布関数と呼ぶ. これにより, 次数が k のノードの個数の期待値は $NP(k)$ と表される. 次数分布関数は, ネットワークの統計的性質を調べる際に重要な役割を果たす. 自己ループや多重辺を許さないネットワークの場合, k は $N-1$ より小さな値しか取り得ない. $k = N-1$ のノードは, 他の $N-1$ 個のノード全てと直接繋がっているノードである. また, $P(k)$ について,

$$0 \leq P(k) \leq 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \sum_{k=0}^{N-1} P(k) = 1 \tag{2.2}$$

が必ず成立する. 図 2.1(a) を例に $P(k)$ を計算すると,

$$P(0) = 0, \quad P(1) = \frac{1}{5}, \quad P(2) = \frac{2}{5}, \quad P(3) = P(4) = \frac{1}{5}, \quad P(k) = 0 \ (k \geq 5) \tag{2.3}$$

となる.

あるネットワークにおける次数の平均値を平均次数と呼び, $\langle k \rangle$ と書く. これは,

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i = \sum_{k=0}^{N-1} kP(k) \tag{2.4}$$

と表せる. ここで, (2.1) 式を用いることにより,

$$\langle k \rangle = \frac{2M}{N} \tag{2.5}$$

を得る.

2.2.2 次数相関

類は友を呼ぶと言うように, 人は似た者どうしで関係を築くことが多い. ネットワークにおいても, 次数の意味で同様の性質が見られることがある [40]. 次数が大き

い (小さい) ノードは次数が大きい (小さい) ノードと繋がる, すなわち, 次数が近いノードどうしが繋がりやすいという性質である. このような性質を有するとき, そのネットワークには正の次数相関があるという. 経験的に, 人間関係などの社会的ネットワークには正の次数相関があることが多い. 一方で, 次数の高いノードが次数の小さいノードと繋がりやすいという性質を有するネットワークもある. この場合, ネットワークに負の次数相関があるという. インターネットや WWW などの工学系ネットワークは, 次数相関が負であることが多い. 正・負の次数相関は, 各ノードの次数 k を横軸に, そのノードに隣接するノードの次数 k' を縦軸にプロットすることにより判断することができる. 或いは, 次数 k のノードに隣接するノードの次数の平均値, $k_{\rm nn}(k)$ の関数形を用いて調べることもできる. 正の次数相関がある場合, $k_{\rm nn}(k)$ は k の増加関数となり, 負の次数相関がある場合には, $k_{\rm nn}(k)$ は k の減少関数になる. 次数相関が無い場合は, $k_{\rm nn}(k)$ は k に依存せず一定である.

$k_{\rm nn}(k)$ は, 具体的には次のようにして計算する. 次数 k のノードに隣接するノードの中から任意に抽出したノードの次数が k' となる確率を $P(k'|k)$ とする. 規格化条件より, 任意の k に対して

$$\sum_{k'=0}^{\infty} P(k'|k) = 1 \tag{2.6}$$

である. この $P(k'|k)$ を用いると, $k_{\rm nn}(k)$ は

$$k_{\rm nn}(k) = \sum_{k'=0}^{\infty} k' P(k'|k) \tag{2.7}$$

と表せる. 次数 k のノードに隣接する次数 k' のノードの数と, 次数 k' のノードに隣接する次数 k のノードの数が一致することから, $P(k'|k)$ と $P(k|k')$ の間には

$$k' P(k|k') P(k') = k P(k'|k) P(k) \tag{2.8}$$

なる関係が成立している. この関係式を使うと, 次数相関が無い場合の $k_{\rm nn}(k)$ の値

を求めることができる. (2.6) 式より, (2.8) 式の左辺を k で和をとると,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k'P(k|k')P(k') = k'P(k') \tag{2.9}$$

となる. 一方, (2.8) 式の右辺の k に関する和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} kP(k'|k)P(k) &= P(k'|k)\sum_{k=0}^{\infty} kP(k) \\ &= P(k'|k)\langle k\rangle\end{aligned}$$

となる. したがって,

$$P(k'|k) = \frac{k'P(k')}{\langle k\rangle} \tag{2.10}$$

が成立する. これを (2.7) 式に代入すると

$$k_{\rm nn}(k) = \frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} \tag{2.11}$$

が得られる.

2.2.3 ネットワーク距離

一般に, ネットワーク上のノード間にユークリッド距離が定義される必要はない. しかし, 例えば, 人をノード, 知人関係をエッジとする知人関係ネットワークを考えると明らかなように, 人間関係が「近い」もしくは「遠い」という概念は存在する. ノード間の距離が「近い」と考える場合は, それらを結ぶ経路, 特に最短経路に含まれるエッジ数が少ないことを想定している. 実際, ノード i とノード j を結ぶ経路に含まれるエッジ数の最小値 l_{ij} は, ノード $i-j$ 間のネットワーク距離 (あるいは距離) と呼ばれ, ネットワークの構造を特徴づける上で基本的な量となっている. なお, 同一ノード間のネットワーク距離は $l_{ii} = 0$ とし, 連結していない (経路が存在しない)

ノード間のネットワーク距離については無限大とする. これにより, 無向ネットワークにおける l_{ij} は, 対称性 ($l_{ij} = l_{ji}$) や正定値性など, 距離の公理を全て満足する. 有向グラフにおいても, エッジの向きに沿った経路に含まれるエッジ数の最小値としてネットワーク距離を定義することができる. ただし, この場合は一般に $l_{ij} \neq l_{ji}$ であり, 数学的な意味での距離にはなっていないことに注意したい.

ノード間距離 l_{ij} は, ある特定のノード間の距離を表す. しかし, ネットワークの大域的な構造を議論するためには, 距離の分布を知ることが重要である. 実際に, ノード間距離の分布関数 $R(l)$ は多くの現実ネットワークに対して評価されている [41–43]. しかし, 複雑ネットワークの数理モデルに対する $R(l)$ を解析的に計算することは困難である. このような事情から, $R(l)$ の情報を縮約して得られる特徴量の一つである平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ が用いられることが多い. $\langle l \rangle$ は

$$\langle l \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} l R(l) \tag{2.12}$$

と定義されるが, ノード数 N の特定の連結ネットワークが与えられた場合には,

$$\langle l \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i<j}^{N} l_{ij} \tag{2.13}$$

から計算することができる. 後に述べるように, $\langle l \rangle$ がノード数 N とどのような関係にあるかを調べることは, ネットワークの大域的構造を議論する際に重要な役割を果たすことになる. また, 連結している全てのノード間距離 l_{ij} の中の最大値 $l_{\max}$ はネットワークの直径と呼ばれる. $l_{\max}$ はしばしば計算されるものの, 複雑なネットワーク・モデルに対しては解析計算が容易ではなく, ネットワークごとの揺らぎが非常に大きい. したがって, ネットワークの統計的性質を調べる際には, $l_{\max}$ よりも $\langle l \rangle$ を用いることが多い.

2.2.4　クラスター係数

ネットワークを特徴づける際, ネットワーク内のノードがどれほど密に繋がっているかを考えることは重要である. 一般の物質や構造体において局所的な密度のプロファイルを計算することで全体構造を把握するように, ネットワーク科学においても局所的エッジ密度を用いて大域的構造を特徴づけることが多い. ノード i の周りの局所的エッジ密度は

$$C_i = \frac{2m_i}{k_i(k_i - 1)} \tag{2.14}$$

で定義され, C_i はノード i のクラスター係数と呼ばれる. ここで, m_i はノード i の隣接ノード間を結ぶエッジの数である. C_i はノード i に隣接するノード・ペアの数 $k_i(k_i-1)/2$ と結合したノード対の数 m_i の比であることから, ノード i の隣接ノード対の結合率を表している. ノード i を一つの頂点とする三角形の数の割合と考えることもできる. 各ノードのクラスター係数をネットワーク全体で平均した量,

$$C = \frac{1}{N}\sum_i C_i \tag{2.15}$$

は平均クラスター係数と呼ばれる. $0 \leq C_i \leq 1$ より, 平均クラスター係数も $0 \leq C \leq 1$ の値をとる. 全ノード対がエッジを介して繋がっている完全グラフに対してのみ, $C = 1$ となる. 一方, サイクルを含まないツリー構造のネットワークに対して $C = 0$ となるが, ツリー構造ではないネットワークに対しても $C = 0$ となる場合がある. クラスター係数は三角形の数の割合を表すことから, 非ツリー構造であっても, 三角形を一つも含まないネットワーク (例えば正方格子) に対しては $C = 0$ となるのである. なお, $k_i = 0$ や $k_i = 1$ であるノード i のクラスター係数は定義しないことが多い. その場合は, (2.15) 式における N は全ノード数ではなく, 次数が 2 以上のノード数を表すことになる.

2.2.5 モジュラリティ

国, 派閥, 会社, 家族, サークルなど, 人間社会には大小様々な組織が存在する. このような組織の内部では各人が密接に関係しているが, それと比較すると, 異なる組織に属する人どうしの関係は希薄である. したがって, 社会構造をネットワークで表せば, その内部で非常に密に繋がりあったノードのグループが複数見られるはずである. 実際, 社会学者の Zachary は, 実在する空手クラブの人間関係ネットワークにこのような構造があることを示した [44]. 内部で密に繋がりあったノードのグループからなるネットワークは, コミュニティ性がある, もしくはコミュニティ構造をもつといい, そのグループをコミュニティと呼ぶ. これは, 我々が日常的に用いているコミュニティという語の概念と同じである. コミュニティ性を有するのは人間関係ネットワークのみではない. 動物の群れを表したネットワークや, 航空路線網, 脳機能ネットワークにもコミュニティ性があることが知られている.

ネットワークのコミュニティ性はどのように定量的に評価するのだろうか. 上に述べた定義は概念的であり, あるネットワークからいかにコミュニティ構造を見出すかについての具体的な方法を示したものではない. こうした背景から, 様々なコミュニティ抽出法や評価法が提案されているが, 決定的な方法は知られていないというのが現状である. ここでは, 現在最も広く用いられているモジュラリティ [45] に基づく評価法を説明する. モジュラリティ Q は, ネットワークを何らかの方法で複数のコミュニティに分割した際, それらの内部で繋がっているエッジの割合が, エッジをランダムに配置した場合 (つまり, コミュニティ構造が無いと考えられる場合) と比べてどれほど多いかを定量的に表したものである. 数学的には,

$$Q \equiv \frac{1}{2M} \sum_{l=1}^{n_C} \left[\sum_{i,j \in C_l} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2M} \right) \right] \tag{2.16}$$

で定義される量であり, $Q \leq 1$ の値をとる. ここで, n_C は分割したコミュニティの総数, $l(= 1, 2, ..., n_C)$ は各コミュニティに割り振った番号, $\sum_{i,j \in C_l}$ は同一コミュニティ C_l に属するノードに関する和である. モジュラリティを計算する際は, リンクの向

きを考慮しないことが多い. 分割の特別な場合として, ネットワーク全体を一つのコミュニティと考えると,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2M}\sum_{i,j}^{N}\left(a_{ij}-\frac{k_i k_j}{2M}\right) \\ &= \frac{1}{2M}\left(\sum_{i,j}^{N}a_{ij}-\sum_{i,j}^{N}\frac{k_i k_j}{2M}\right) \\ &= \frac{1}{2M}\left(2M-\frac{(2M)^2}{2M}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる. ここで, $\sum_{i,j} a_{ij} = 2M, \sum_i k_i = 2M$ となることを用いた. (2.17) 式は, ネットワーク全体を一つのコミュニティとみなすような分割が無意味であることを示している. 逆に, Q が大きな値をとるとき, ネットワークがコミュニティ性を有すると考えることができる. 経験的には, Q が 0.3 程度より大きければ, そのネットワークはコミュニティ性を有するとみなす. また, ネットワークのコミュニティ構造は, Q が最大となる分割によって見つける.

2.2.6 Erdös-Rényi ランダム・グラフ

ここでは, 最も単純な確率的ネットワーク・モデルであるランダム・グラフを紹介する. ランダム・グラフは, 1959 年に Erdös と Rényi が提案したネットワーク・モデルであり [46], 不規則な構造をもつ複雑ネットワークのモデルとしては最も古いものの一つである. ランダム・グラフは, N 個の孤立したノードを用意し, 全てのノード対間に一定の確率 p でエッジを配置することで形成される無向ネットワークである. $p = 0$ とするとエッジは 1 本も配置されず, N 個のノードは全て孤立したままとなる. 一方, $p = 1$ とすると全てのノード対間にエッジが配置され, 完全グラフとなる.

ランダム・グラフの次数は, 次のような性質をもつ. まず, 各ノードは他の $N-1$

個のノード全てとの間に確率 p でエッジを繋ぐので, 平均次数は

$$\langle k \rangle = (N-1)p \tag{2.18}$$

と表せる. 次に, 任意に選んだノードが次数 k である確率, すなわち次数分布関数 $P(k)$ を考える. 次数 k のノードは, k 個のノードとエッジを繋ぎ, 残りの $N-1-k$ 個とは繋がらないので, k 本のエッジを繋ぐ相手の選び方が ${}_{N-1}C_k$ 通りあることから,

$$P(k) = {}_{N-1}C_k p^k (1-p)^{N-1-k} \approx \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} \tag{2.19}$$

となる. (2.19) 式の最右辺は, 二項分布をポアソン分布で近似することで得られる. この近似は, $N \to \infty$, $p \to 0$, かつ $(N-1)p$ が正の値に収束するときに許される. 次数分布が指数関数的に振る舞うということは, 極端に大きい次数をもつノードが形成されにくいことを意味している. 言い換えると, ランダム・グラフは, 次数の揺らぎが小さい比較的均質なネットワークであるといえる. エッジがランダムに配置されていることで一見複雑に見えても, 一様ランダムであるがゆえに各ノードの個性が失われ, 均質なネットワークとなる. 次節以降で述べるように, 現実のネットワークはランダム・グラフと異なり均質ではなく, 多彩な不均一性を示す. しかし, 現実の不均一なネットワークの性質を評価する際の基準としてランダム・グラフが用いられることが多いため, ランダム・グラフはネットワーク理論において非常に重要な役割を果たす.

ランダム・グラフには次数相関が無いので, $k_{\rm nn}(k)$ は (2.11) 式で与えられる. (2.18) 式より, 大きな N に対して

$$\langle k \rangle \simeq pN \tag{2.20}$$

であり, $\langle k^2 \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle &= \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle \\ &\simeq pN(1+pN) \end{aligned} \tag{2.21}$$

となることから, (2.11) 式は

$$k_{\rm nn} = pN + 1 \tag{2.22}$$

と表せる.

ランダム・グラフの平均ノード間距離や直径は様々な手法 [47–49] によって評価されているが, 多くの場合は煩雑な計算を伴う. ここでは, ランダム・グラフの直径を感覚的に見積もることにする. 比較的高い確率 p によって構築された, 連結したランダム・グラフがあるとしよう. このネットワークにおいて, あるノードからネットワーク距離 l 以内にあるノードの数を考える. 各ノードは平均的に $\langle k \rangle$ 本のエッジを有するので, l 以内にあるノード数が $\langle k \rangle^l$ よりも圧倒的に小さくなる可能性は低い. このことから, ノード数 N と直径 d との間には $N \sim \langle k \rangle^d$ という関係が成立し, この関係から直径 d は $d \sim \log N / \log\langle k \rangle$ と見積もられる. これは, $\langle k \rangle \geq 3.5$ のランダム・グラフに対する厳密な計算による結果 [50] とも一致する. また, $\langle k \rangle > 1$ のランダム・グラフにおいては, 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ とノード数 N との関係も

$$\langle l \rangle \sim \frac{\log N}{\log\langle k \rangle} \tag{2.23}$$

となることが知られている [47–49]. ノード数 N の増加に対して平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ の増加が対数的でしかないということは, ランダム・グラフが非常にコンパクトであることを意味する. このことは, 第 3 章でランダム・グラフと現実ネットワークの構造的特徴を比較する際に重要となる. また, $N \sim \langle k \rangle^l$ が成立するという事実は, 体積 V の D 次元構造体と差し渡しの長さ L との間の $V \propto L^D$ なる関係を考慮すると, ランダム・グラフの有効次元が無限大であることを意味している.

ランダム・グラフの平均クラスター係数は簡単に計算することができる. ランダム・グラフ中のあるノードの次数が k であったとする. このノード i には k 個の隣接ノードがあり, これらの隣接ノード間のノード対の数は $k(k-1)/2$ である. しかし, 各ノード対の間に実際にエッジが存在する確率は p であるから, 隣接ノード間を結ぶエッジ数の期待値は $pk(k-1)/2$ となる. したがって, ノード i のクラスター係数 C_i は

$$C_i = \frac{pk(k-1)/2}{k(k-1)/2} = p \tag{2.24}$$

となる. これより, ランダム・グラフにおける平均クラスター係数 C は, N が大きいとき,

$$C = p = \frac{\langle k \rangle}{N} \tag{2.25}$$

と表せる.

ランダム・グラフにコミュニティ性が無いことは容易に理解できる. 既に述べたように, ランダム・グラフは次数の揺らぎが小さく均質である. したがって, いかなるコミュニティ分割に対しても, コミュニティの内部と外部でエッジの密度が大きく異なるような状況は生まれない. すなわち, ランダム・グラフがコミュニティ性を有するとみなすことはできない.

2.3 スケールフリー性

2.3.1 現実ネットワークのスケールフリー性

インターネット, 航空路線網, 蛋白質相互作用ネットワークなど, 現実のネットワークの次数分布は, ランダム・グラフと異なり, ベキ則に従っていることが多い [51].

すなわち, k の大きなところで

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \tag{2.26}$$

が成立している. ベキ関数には特徴的なスケールが存在しないことから, このような性質をスケールフリー性と呼び, 指数 γ をスケールフリー指数という. また, この性質をもつネットワークをスケールフリー・ネットワークと呼ぶ. 現実のネットワークのスケールフリー指数は $2 \leq \gamma \leq 3$ であることが多い. スケールフリー・ネットワークにおける次数の揺らぎは大きく, ランダム・グラフと比較して次数の不均一性が強い. 実際に, ランダム・グラフの次数分布が従うポアソン分布と比較すると, ベキ分布の方が分布の裾の範囲が広い. このことは, 非常に大きな次数をもつノードが無視できない割合で存在することを意味する. このような大きな次数をもつノードをハブと呼ぶ. 全ノードに対するハブの割合は, γ を小さくするにつれ高くなる. つまり, γ が小さいほど不均一性は強い. 逆に, $\gamma \to \infty$ は均質なネットワークであるランダム・グラフに対応する.

ネットワークの統計的性質は, 平均次数 $\langle k \rangle$ や二次モーメント $\langle k^2 \rangle$ と密接に関係している. 指数 γ のスケールフリー・ネットワークにおいて, これらの量はどう表されるだろうか. 最小次数 $k_{\min}$ より大きな全ての次数に対して, 次数分布関数が $P(k) = Ck^{-\gamma}$ となるようなネットワークを考える. ここで, C は規格化定数である. 実際には k が小さい領域での次数分布はベキ則からずれることが多いが, ネットワークの統計的性質に影響を左右するのが $P(k)$ の裾の関数形であることを考慮すると, この前提から得られる議論は一定の意味がある. この条件の下で $\langle k \rangle$ と $\langle k^2 \rangle$ を計算してみる. まず, 連続近似を用いて規格化定数 C を計算すると,

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} P(k)dk = \frac{C}{1-\gamma} \left[k^{-\gamma+1} \right]_{k_{\min}}^{\infty} = 1 \tag{2.27}$$

より,

$$C = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1} \tag{2.28}$$

となる. ただし, $P(k)$ が規格化可能であるためには, $\gamma > 1$ が必要である. これより, 平均次数は $\gamma > 2$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
\langle k \rangle &= \int_{k_{\min}}^{\infty} kP(k)dk \\
&= C\int_{k_{\min}}^{\infty} k^{-\gamma+1}dk \\
&= \frac{(\gamma-1){k_{\min}}^{\gamma-1}}{2-\gamma}\left[k^{-\gamma+2}\right]_{k_{\min}}^{\infty} \\
&= \frac{\gamma-1}{\gamma-2}k_{\min}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

となり, $\gamma \leq 2$ では $\langle k \rangle$ が発散する. 二次モーメントも同様に計算すると, $\gamma > 3$ のとき

$$\begin{aligned}
\langle k^2 \rangle &= \int_{k_{\min}}^{\infty} k^2P(k)dk \\
&= \frac{(\gamma-1){k_{\min}}^{\gamma-1}}{3-\gamma}\left[k^{-\gamma+3}\right]_{k_{\min}}^{\infty} \\
&= \frac{\gamma-1}{\gamma-3}k_{\min}^2
\end{aligned} \tag{2.30}$$

となる. $\gamma \leq 3$ では $\langle k^2 \rangle$ は発散する. $\langle k \rangle$ と $\langle k^2 \rangle$ に関する上の議論は, $N \to \infty$ に対するものであるが, 現実の N はもちろん有限である. このとき, k の最大値は $N-1$ となるので, 実際に $\langle k \rangle$ や $\langle k^2 \rangle$ が発散することはない. しかし, N が有限のスケールフリー・ネットワークにおいても $\gamma = 3$ や $\gamma = 2$ を境に統計的性質が大きく変化することが多い. したがって, $2 \leq \gamma \leq 3$ のネットワーク・モデルを用いて統計的性質を調べることは, 現実のネットワークの γ を再現するだけでなく, その性質を正しく評価する上で非常に重要である.

2.3.2 一般化ランダム・グラフ

先に見たように, ランダム・グラフにおいては多くの特徴量を解析的に求めることができる. その最大の理由は, ランダム・グラフのエッジ配置が無相関であること,

すなわち次数相関が無いことにある. しかし, 一定の確率でエッジを配置することから, 次数分布は常に二項分布 (ノード数が大きければ Poisson 分布) となる. そのため, 次数分布関数の形がネットワークの性質にどのような影響を与えるかを評価することができない. さらに, 本節で既に述べたように, 現実ネットワークの次数分布は二項分布ではないことが多いため, ランダム・グラフを現実ネットワークのモデルとみなすことには無理がある. そこで, ランダム・グラフの特徴を活かしつつ任意の次数分布を実現するように拡張されたモデルが一般化ランダム・グラフ (あるいはコンフィギュレーション・モデル) である [52–55]. このモデルも Erdös-Rényi ランダム・グラフと同様に, 最初は N 個の孤立したノードを用意する. ただし, 本モデルではこれらのノードに所望の次数分布関数 $P(k)$ に従う次数 k をあらかじめ割り振ってある. すなわち, ノード i には $P(k)$ に従う k_i 本のスポーク (エッジの切れ端) が繋がっていると考える. 続いて, これらのスポークのペアをランダムに選び, その 2 本のスポーク繋ぎ合わせて 1 本のエッジを形成する. ただし, 自己ループや多重エッジができないようにスポーク対を選ぶものとする. この過程を, スポークがなくなるまで繰り返すことで一般化ランダム・グラフが形成される.

一般化ランダム・グラフの構成は非常に単純である. しかし, 実際に作成する際には注意を要する. まず, 割り振った次数の総和 $\sum_i k_i$ は偶数でなければならない. これは, (2.1) 式からの要請である. さらに, 次数の総和を偶数としても, 最終的に自己ループや多重エッジを形成せざるを得ない状況が生じることもある. このような状況は, 割り振られた次数が大きいノードに繋がるスポークから順にその接続先となるスポークを選んでいくことで, ある程度回避することができる. それでも自己ループや多重エッジを形成せざるを得なくなった少数のスポーク対は, 削除してしまっても特に問題ないことが多い. そのような操作をしても, 実際の次数分布は所望の $P(k)$ とほとんど変わらないからである. スポークを削除するのではなく, スポーク対の選出や次数の割り振りをやり直すことによって自己ループや多重エッジを回避する方法もある. いずれの方法でも, エッジの配置に相関は生まれないことに注意したい.

2.3.3 Barabasí-Albert モデル

一般化ランダム・グラフにおいて始めに設定する次数分布関数$P(k)$をベキ関数とすれば, 当然のことながらスケールフリー・ネットワークを構築することができる. しかし, これではスケールフリー性の起源を明らかにしたことにはならない. 現実ネットワークのスケールフリー構造の形成メカニズムを説明するモデルは, 現実のネットワーク形成過程をある程度模したものである必要がある. そのようなモデルとして, 1999 年に Barabási と Albert は, 2 つの基本ルールによってスケールフリー性を実現するモデルを提案した [51]. このモデルは Barabási-Albert(BA) モデルと呼ばれ, スケールフリー性を説明する代表的なネットワーク・モデルとなっている. このモデルでは, 時間経過にともなうノード数の増加 (成長則) と, 次数が大きいノードの新規エッジ獲得に対する優位性 (優先選択則) を考えている. このモデルのアルゴリズムは次の通りである.

(1) N_0 個のノードからなる初期ネットワークを用意する. 最終的に構築したいネットワークのノード数 N よりも N_0 が十分小さく, 連結でありさえすれば, 初期ネットワークはどのようなものでも構わない. このときの時刻を $t = 0$ とする.

(2) 各時刻 $(t = 1, 2, \cdots)$ において, 前時刻 $t-1$ のネットワークに $m(\leq N_0)$ 本のエッジを有する新規ノードを追加する (成長).

(3) 新規ノードが有する m 本のエッジのそれぞれを, 既存のノードへランダムに接続していく. ただし, 1 本のエッジが次数 k_i の既存ノード i に繋がる確率 Π_i は

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{2.31}$$

に従うものとする (優先選択). ここで, 分母の和は前時刻 $t-1$ におけるネットワーク内の全てのノードに対してとる. この確率は, 次数の大きいノードほど高くなる. なお, この過程においても多重エッジの形成は許可しない.

必要なノード数 N になるまで, すなわち $t = N - N_0$ まで (2)-(3) の過程を繰り返す.

アルゴリズムからも想像されるように, このモデルにおいては, 一度エッジの獲得競争に勝ったノードは, それ以降もエッジを受け取りやすくなる. すなわち, ハブになりやすくなる. しかし, 本当にスケールフリー性は実現されているのだろうか. それを確かめるために, 次数分布を計算する. 計算方法はいくつかあるが, 本論文では Barabási らによる連続近似を用いた解析 [51] を行う. ここでは, 本来は整数である次数 k とノードを加える時刻 t を連続変数とみなす.

時刻 t_i に新規ノード i が参入したとして, このノードの次数 k_i が時間経過とともにどのように変化するかを考える. まず, 新規ノードの参入時の次数は m であるから, 初期条件として

$$k_i(t_i) = m \tag{2.32}$$

を課す. この後の各時刻 $t(> t_i)$ において, 新規ノードの有する m 本のエッジのうちの 1 本がノード i に接続される確率は Π_i であるから, 各時刻におけるノード i の次数増加の期待値は $m\Pi_i$ となる. ノード i の参入から十分に時間が経過した時刻 t に着目すれば, $(t - t_i) \gg 1$ より, t を連続変数とみなすことができる. このとき, $t \gg t_i$ であるから, $k_i \gg m(\geq 1)$ と考えることが可能であり, k_i も連続変数とみなせることになる. このような連続体近似に加えて, 確率事象に伴う揺らぎを無視する近似も行う. 具体的には, ノード i の次数増加は常に期待値 $m\Pi_i$ に従うものとする. これにより, 次数 k_i は時刻 t から一意に定まり, その時間発展は

$$\frac{dk_i}{dt} = m\Pi_i \tag{2.33}$$

に従う. このとき, (2.31) 式の分母は, 時刻 t に形成されているネットワークの次数の総和となる. 各時刻において m 本のエッジがネットワークに追加されるため, 次数の総和は $2m$ ずつ増加する. これより, 初期ネットワークの次数の総和を m_0 とす

ると, 時刻 t における次数の総和は

$$\sum_j k_j = m_0 + 2mt \tag{2.34}$$

となる. ここで, $t \gg t_i$ であることから右辺第一項の寄与を無視すると, $\sum_j k_j \approx 2mt$ と近似できる. このとき, 新規エッジ獲得確率 Π_i は, $\Pi_i = k_i/2mt$ となることから, (2.33) 式は

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{k_i}{2t} \tag{2.35}$$

と書くことができる. この式を, (2.32) 式で表される初期条件の下で解くと,

$$k_i(t) = m\sqrt{\frac{t}{t_i}} \tag{2.36}$$

となる. 続いて, 時刻 t において次数 k であるノードが新規ノードとしてネットワークに参入してきた時刻 t_k を求める. そのためには, (2.36) 式において $k_i(t)$ を k,t_i を t_k とし, t_k について解けばよい. すると,

$$t_k = \left(\frac{m}{k}\right)^2 t \tag{2.37}$$

を得る. このことと, 次数が k よりも小さいノードの数 $N_{<k}$ は, t_k よりも後に参入してきたノードの数に等しいことから,

$$\begin{aligned} N_{<k} &= t - t_k \\ &= t\left\{1 - \left(\frac{m}{k}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{2.38}$$

と表せる. 時刻 t における総ノード数を $N(t)$ とすると, $N_{<k}$ は次数分布関数 $P(k)$ を用いて

$$N_{<k} = N(t)\int_m^k P(k')dk' \tag{2.39}$$

と表すことができる. $N(t) = N_0 + t \approx t$ と近似できることと, (2.38) 式と (2.38) 式から,

$$\int_m^k P(k')dk' = 1 - \left(\frac{m}{k}\right)^2 \tag{2.40}$$

が成り立つ. (2.40) 式の両辺を k で微分すると, 左辺は次数分布関数 $P(k)$ となり, 最終的には

$$P(k) \propto m^2 k^{-3} \tag{2.41}$$

を得る. このことから, BA モデルによって構築されたネットワークはスケールフリー性を有し, スケールフリー指数 γ は m や N_0 に依存せず 3 という値をとることがわかる. BA モデルでは現実のスケールフリー・ネットワークの多くが $2 \leq \gamma \leq 3$ となることは説明できないため, この問題を解決する様々なモデルが提案されている [1]. しかし, ベキ則を導くメカニズムがいくつもある中で普遍性の高いメカニズム (成長・優先選択) に着目した BA モデルは, 複雑ネットワーク科学の発展に大きな影響を与えたモデルといえる. 一見すると何の関係もないネットワークにスケールフリー性という共通の性質があり, その性質が普遍的なメカニズムから説明できることは, 複雑ネットワークという対象に物理学者の強い関心を集める契機となった. これを機に, 基礎科学を含めた様々な分野の研究者が複雑ネットワークの研究に取り組むこととなり, 複雑ネットワーク科学は飛躍的な進展を遂げたのである.

第3章　スモールワールド性とフラクタル性

前章で述べたように, 現実の多くの複雑ネットワークにはスケールフリー性という共通した性質がある. 一方, ノード数と平均ノード間距離の関係に着目すると, 現実ネットワークの構造はスモールワールド構造とフラクタル構造に大別することができる. 本章では, それぞれの構造の意味と, そのような性質を発現させる数理モデル, 両者の関係性などについて説明する.

3.1　スモールワールド性

遠い存在だと思っていた人が意外にも自分と近い関係にあることは少なくない. 実際, アメリカで行われた Milgram らの社会実験 [56] によると, 起点となる複数の人物からある 1 人のターゲットとなる人物に向けて知人を介して送られたメッセージは, 平均すると 5.2 回の転送で届けられることが分かっている. 基本的には, 起点となる人物はターゲットとなる人物と直接の知り合いではないことを考慮すると, 5.2 回という結果は, 想像よりもかなり少ない回数であるように思える. このことは, 知人ネットワークの平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ がノード数 N に比べて圧倒的に小さいことを示唆している. Milgram らの社会実験における N は, アメリカの人口を考えるべきか, 実験が行われた地域の人口を考えるべきか, あるいは世界の人口を考えるべきかは判然としないが, いずれにせよ, $\langle l \rangle = 5.2$ が N に比べて遥かに小さいという事実に変わりはない. 次の小節で, 知人関係ネットワークに限らず, 現実ネットワークの多くにこのような性質があることを示し, スモールワールド性の定義を述べるこ

とにする.

3.1.1 現実ネットワークのスモールワールド性

平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ がノード数 N に比べて圧倒的に小さいという性質は, 知人関係ネットワークに限ったものではない. 表 3.1 には, 様々な現実ネットワークの平均ノード間距離とノード数が示されているが, いずれの場合も, 平均ノード間距離はノード数よりも遥かに小さい. この表に挙げられているネットワークの多くは, スケールフリー性を有している. したがって, これらのネットワークは, スケールフリー性を有すると同時に, 非常に短い平均ノード間距離を有することになる. また, 表 3.1 には, 各現実ネットワークと同じノード数と平均次数を有するランダム・グラフの平均ノード間距離 $\langle l_{\rm RG} \rangle$ も掲載されているが, この値も, 対応する現実ネットワークの $\langle l \rangle$ と同様に, ノード数に比べて遥かに小さいことが分かる. ランダム・グラフも含

表 3.1: 現実ネットワークのノード数 N, 平均次数 $\langle k \rangle$, 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$, 平均クラスター係数 C. $\langle l_{\rm RG} \rangle$ および $C_{\rm RG}$ は, 同じノード数と平均次数を有するランダム・グラフの平均ノード間距離と平均クラスター係数を表している. この表は文献 [57–67] に基づいて作成されている.

ネットワーク	N	$\langle k \rangle$	$\langle l \rangle$	C	$\langle l_{\rm RG} \rangle$	$C_{\rm RG}$
WWW	$203,549,046$	10.46	16.18	0.11	8.40	5.14×10^{-8}
インターネット	$10,697$	5.98	3.31	0.39	5.31	5.59×10^{-4}
論文引用関係	$27,865$	3.69	40	0.24	7.58	1.32×10^{-4}
共著関係	$1,520,251$	18.1	4.6	0.60	5.20	1.19×10^{-5}
俳優共演関係	$449,913$	113.443	3.48	0.78	3.01	2.52×10^{-4}
単語同時出現	$478,773$	74.2	2.63	0.687	3.41	1.54×10^{-4}
ソフトウェア	$1,989$	3.98	6.2	0.08	5.38	2.00×10^{-3}
デジタル回路	320	3.175	5.06	0.053	4.59	9.92×10^{-3}
航空路線網	$3,880$	9.7	4.37	0.3	3.85	2.50×10^{-3}
蛋白質相互作用	$2,115$	2.12	6.80	0.071	7.67	1.00×10^{-3}
代謝	765	9.64	2.56	0.67	3.15	0.0126

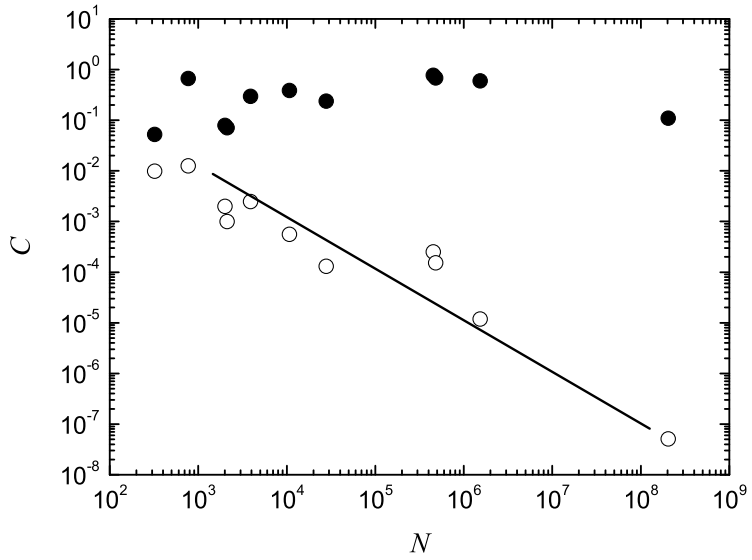

図 3.1: 平均クラスター係数 (C) のノード数 (N) 依存性. 黒丸は表 3.1 の現実ネットワーク, 白丸はそれぞれに対応するランダム・グラフに対する結果である. 実線は $C \propto N^{-1}$ の直線を表している. 文献 [68] より引用.

め, ここに挙げたネットワークは $\langle l \rangle \sim \log N$, あるいは $\langle l \rangle \sim \log\log N$ という意味で $\langle l \rangle \ll N$ となっている. しかし, 現実ネットワークの平均ノード間距離とランダム・グラフの平均ノード間距離が近い値をとるという事実が, 現実ネットワークをランダム・グラフでモデル化できることを意味しているわけではない. まず, ランダム・グラフはスケールフリー性をもたない. また, 表 3.1 には, 各現実ネットワークの平均クラスター係数 C と, それぞれに対応するランダム・グラフの平均クラスター係数 $C_{\rm RG}$ も示されているが, 両者の数値は大きく異なっている. 現実ネットワークの平均クラスター係数の値は, 対応するランダム・グラフの値よりも数桁大きいことが分かる. これより, 現実ネットワークは, 対応するランダム・グラフよりも遥かに強くクラスター化しているといえる. さらに, 図 3.1 に示されているように, 現実ネットワークの平均クラスター係数は N にほとんど依存しないが, 対応するランダム・グラフの平均クラスター係数は N^{-1} に比例している.

以上をまとめると, 多くの現実ネットワークには,

(A) 平均ノード間距離はノード数に比べて遥かに小さく, 同じノード数, 同じ平均

次数のランダム・グラフと同程度である

(B) 平均クラスター係数は, 同じノード数, 同じ平均次数のランダム・グラフに比べて非常に大きい

という特徴があるといえる. これらの特徴を有するネットワークは, スモールワールド性があるといわれる. スモールワールド性は, スケールフリー性と同様に, 多くの現実ネットワークが有する重要な構造的特徴である. (A) と (B) に含まれる「同程度」や「非常に」といった曖昧な表現を取り除いて,

(A') 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ とノード数 N の間に $\langle l \rangle \propto \log N$ の関係がある

(B') 平均クラスター係数 C はノード数 N に依存しない

ということをスモールワールド性の定義としてもよい. この定義は $\langle l \rangle$ や C の N 依存性に基づいているため, ネットワーク・モデルに対しては意味があっても, N が定まっている現実ネットワークに対しては意味がないように思える. しかし, あるノード i からネットワーク距離 l 以内にあるノード数 $n_i(l)$ を求め, それを全てのノードについて平均した量 $n(l)$ と l の関係を調べることで, 現実ネットワークに対しても (A') の成立可否を判断することができる. ネットワークの構造的特徴がどのスケールにおいても同様に現れるのであれば, $\langle l \rangle \propto \log N$ の場合には $l \propto \log n(l)$ となる. ただし, l が $\langle l \rangle$ を超えてネットワーク直径 $l_{\max}$ に近づくと, 有限サイズ効果によって $n(l)$ は l に依存しなくなる. そのため, $l \propto \log n(l)$ が成立する可能性があるのは $l \ll l_{\max}$ の領域である. (B') の成立可否についても, 各ノードが距離 l 以内にあるような部分グラフの平均クラスター係数 $C(l)$ と l の関係を調べることで判断することができる.

ここでは, $\langle l \rangle \propto \log N$ かつ $C \propto N^0$ であることがスモールワールド性の定義であると述べたが, $\langle l \rangle \propto \log N$ となっているだけでも, スモールワールド性があるということがある. 本論文でも, $\langle l \rangle \propto \log N$ のみをスモールワールド性の定義として考える. (B) または (B') の条件を含めて考える際は, 改めて注意を促すことにする. また, 必ずしも $\langle l \rangle \propto \log N$ とはなっていなくても, $\langle l \rangle$ が $\log N$ よりも遅い増加関数であれば, そのネットワークはスモールワールドであるということが多い.

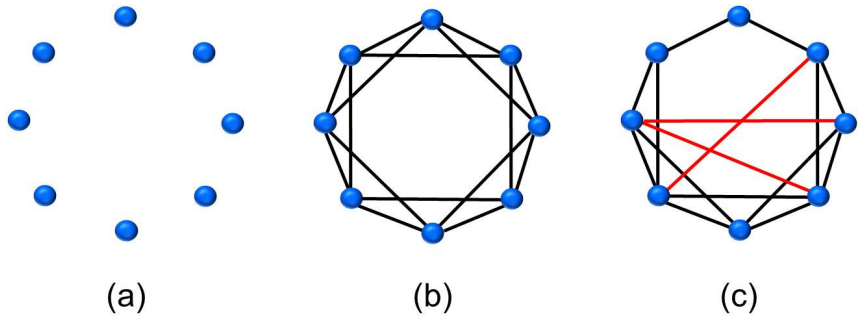

図 3.2: WS モデルによるネットワーク形成. (a)N 個のノードを 1 次元リング上に並べる. (b) 各ノードは, 左右の z-近接までのノードとエッジで繋がれる. この図では, $z = 2$ としている. (c) 確率 p で各エッジを繋ぎ替える. この図では, 赤色のエッジが繋ぎ替えられたエッジを表している.

3.1.2 Watts-Strogatz モデル

1998 年に Watts と Strogatz は, [(A') と (B') の意味での] スモールワールド性の起源を説明するため, Watts-Strogatz(WS) モデルと呼ばれるモデルを提唱した [4]. このモデルでは, 次のようなアルゴリズムによってネットワークが形成される.

(1) N 個のノードを, 図 3.2(a) のように 1 次元リング上に並べる.

(2) 図 3.2(b) に示すように, 各ノードとその左右の第 z 近接までのノードとの間にエッジを配置する. このとき, エッジの総数は zN であり, 各ノードの次数は $2z$ である. ただし, 初期ネットワークを 1 次元系とみなすために, $z \ll N$ とする.

(3) 各エッジに対して, 確率 p で片方の端を切り離し, ランダムに選んだ他のノードに繋ぎ替える (図 3.2(c) 参照). この際, 切り離すエッジの一端はランダムに決定する. また, 多重エッジが形成されないようにする.

ノード数 N を除くと, このモデルのパラメータは z と p である. このモデルの平均クラスター係数 $C(p)$ と平均ノード間距離 $\langle l(p) \rangle$ を考えよう. $p = 0$ の場合, エッジの繋ぎ替えは起きないため, ネットワークは図 3.2(b) に示すような規則的な構造を有

することになる. この場合の平均クラスター係数$C(0)$は

$$C(0) = \frac{2_zC_2 + {}_zC_2}{{}_{2z}C_2} = \frac{3(z-1)}{2(2z-1)} \tag{3.1}$$

となり, Nに依らない大きな値をとる. また, このときの平均ノード間距離$\langle l(0)\rangle$は, $p=0$の規則構造が$z \ll N$では1次元構造とみなせることを考慮すると,

$$\langle l(0)\rangle \propto N \tag{3.2}$$

となる. したがって, $p=0$では, スモールワールド性の条件 (B') のみが満たされることになる. 一方, $p=1$の場合は全てのエッジをランダムに繋ぎ替えることになるので, ネットワークの構造はランダム・グラフと同じになる. この際の平均クラスター係数$C(1)$は, 第2章のランダム・グラフについての議論から,

$$C(1) = \frac{\langle k\rangle}{N} = \frac{2z}{N} \tag{3.3}$$

となる. また, このときの平均ノード間距離$\langle l(1)\rangle$とNとの関係は

$$\langle l(1)\rangle \propto \log N \tag{3.4}$$

である. これより, $p=1$では, スモールワールド性の条件 (A') のみが満たされることになる. ここまでの議論から, pが0もしくは1のとき, 形成されるネットワークはスモールワールド性をもたないことが分かった. しかし, pを0から1まで変化させる過程で, 平均クラスター係数は (3.1) 式と同程度の大きさを維持しつつ, 平均ノード間距離は (3.4) 式のように短くなる可能性がある. このとき, ネットワークはスモールワールド性を有することになる.

パラメータzに関しては, 次の点に注意する必要がある. まず, $p=0$で平均クラスター係数が大きな値をとるためには, 少なくとも$z \geq 2$である必要がある. また, ランダム・グラフと同じ構造を有する$p=1$のネットワークが非連結にならないよ

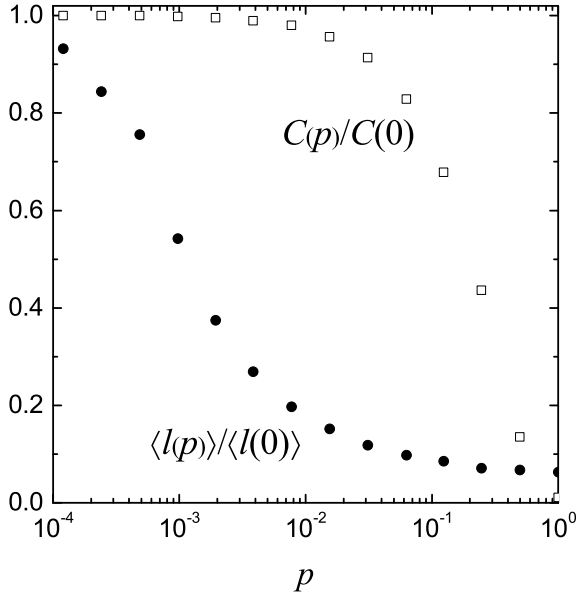

図 3.3: WS モデルの平均クラスター係数 (四角) と平均ノード間距離 (黒丸) の p 依存性. いずれの結果も $p = 0$ での値で規格化している. この図は文献 [4] の図に基づいて作成されている.

うな z とすべきである. その理由は, ネットワークが分断されていると, 平均ノード間距離が発散してしまい, スモールワールド性の議論ができなくなるためである. 詳細は省略するが, $z > \log N/2$ であれば, そのような事態を避けることができる. 以上より, z は $\log N/2 < z \ll N$ とする. z をこの領域に設定することで, 以降の議論の本質は p の値のみに依存することになる.

3.1.3 Watts-Strogatz モデルにおける次元クロスオーバー

WS モデルによって構築されたネットワークの平均ノード間距離とクラスター係数の p 依存性は図 3.3 のようになる. なお, $C(p)$ と $\langle l(p)\rangle$ の振る舞いを見やすくするために, 縦軸は $C(0)$ と $\langle l(0)\rangle$ の値を用いて規格化されている. また, 横軸は対数表示としている. ここでは, $N = 1,000$, $z = 2$ としており, プロットの各点では 20 サンプルにわたる平均がとられている. この結果から, $C(p)$ は $p = 0$ から $p \approx 0.01$ までほとんど変化していないことが分かる. 一方で, $\langle l(p)\rangle$ は p を増加させると急激に減少

していることが分かる. $p \approx 0.01$ 付近では $C(p) \sim C(0)$ かつ $\langle l(p) \rangle \sim \log N$ という性質, すなわち, スモールワールド性が現れている. この数値計算からは, 平均ノード間距離が $\langle l \rangle \propto N$ から $\langle l \rangle \propto \log N$ となるクロスオーバー確率 $p_{\rm co}$ について明確なことは言えないが, 後の研究によって,

$$p_{\rm co} \sim \frac{1}{zN} \tag{3.5}$$

となることが明らかにされている [69–72]. 平均クラスター係数が $C \sim N^0$ から $C \sim N^{-1}$ へとクロスオーバーする確率については, 以下のような議論から大まかに見積もることができる. $p = 0$ のときに存在する, 3 個のノードと 3 本のエッジからなる三角形型の部分グラフの 1 つが $p > 0$ でも存在するのは, 三角形を構成する 3 本のエッジのどれもが繋ぎ替えを起こさない場合である. この状況が実現する確率は $(1-p)^3$ である. また, $p = 0$ では各ノードの周りに $\frac{3}{2}z(z-1)$ 個の三角形がある. これらより, 平均クラスター係数の p 依存性は

$$C(p) = \frac{\frac{3}{2}z(z-1)(1-p)^3}{{}_{2z}C_2} = \frac{3(z-1)}{2(2z-1)}(1-p)^3 \tag{3.6}$$

となる. ただし, ここでは $p = 0$ のときに存在していた三角形のみに着目しており, エッジの張り替えによって新たに形成された三角形の存在を無視している. したがって, p が大きいところでは (3.6) 式は正しくない. 実際, (3.6) 式に $p = 1$ を代入すると $C(1) = 0$ となり, (3.6) 式と矛盾する. $p < 1$ について考えると, $C(p)$ は p に関して単調な関数であり, 特徴的な p の値は存在しない. このことは, $C \sim N^0$ から $C \sim N^{-1}$ へのクロスオーバー確率が N の値に依らず $p \simeq 1$ であることを意味している. 以上の議論から, $1/zN \ll p \ll 1$ において $\langle l \rangle \propto \log N$ と $C \sim N^0$ が両立し, スモールワールド性が発現することが分かる. 第 2 章で述べたように, $\langle l \rangle \propto \log N$ のとき, そのネットワークの次元は無限大であるとみなすことができる. このことを考慮すると, 上述の結果は, 「WS モデルで p を $0 \to 1$ と変化させた際, ネットワークの次元は有限次元から無限次元へとクロスオーバーする」と言い換えることができる.

3.2 フラクタル性

本節では, スモールワールド性と並んで複雑ネットワークの重要な統計的性質の一つであるフラクタル性について説明する. まずはユークリッド空間に埋め込まれたフラクタル構造について述べる. 続いて, 非ユークリッドな系であるネットワークにおけるフラクタル性の定義を述べ, 現実ネットワークの幾つかがフラクタル性を有することを例示する. その後, フラクタルなスケールフリー・ネットワークを構築するための数理モデルである (u, v)-フラワー [73] と Song-Havlin-Makse モデル [74] を紹介する.

3.2.1 フラクタルとは

自然界に見られる構造には様々な対称性がある. 例えば, 金属や半導体の結晶中における原子の配置は規則的であり, その構造は特定の距離の推進に対する並進対称性や特定の回転角度に対する回転対称性をもつ. 一方で, 気体中の原子配置は不規則であり, 各原子の位置は互いに無相関である. このような無相関でランダムな構造は, 任意の推進や任意の回転角に対する並進対称性や回転対称性を有する. その意味で, 結晶よりも高い対称性を示すと考えられる. これに対して, 海岸線の構造や雲の形状, 樹木の枝分かれ構造などは, 規則構造でもなければ完全に無相関なランダム構造でもない. 原子や分子のスケールより大きなスケールでの複雑系の構造は, ほとんど全てがこのような特徴をもっている. しかし, このような複雑構造にも, 「自己相似性」という特別な対称性が備わっていることが多い. 自己相似性とは, 全体の構造とその一部の構造が, 厳密に, あるいは統計的な意味で相似であるという性質である. 数学者の Mandelbrot は, このような対称性を有する形状をフラクタルと呼び体系化した [75].

厳密な意味で自己相似性をもつ図形の例の一つに, シェルピンスキー・ガスケットがある. シェルピンスキー・ガスケットは, 次のような操作によって作ることができる.

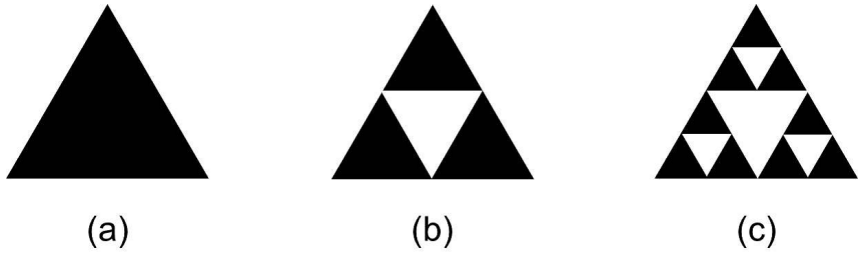

図 3.4: シェルピンスキー・ガスケット.

(1) 一辺の長さが a の正三角形を用意する [図 3.4 (a)].

(2) 各辺の中点を結んでできる一辺の長さが $a/2$ の正三角形を切り取る [図 3.4(b)]. このときの形を 1 つのユニットとする.

(3) 残された一辺の長さが $a/2$ の正三角形 3 つを縮小されたユニットで置き換える [図 3.4(c)].

(4) 同様に, 残された一辺の長さが $a/4$ の正三角形 9 つを縮小されたユニットで置き換える. これを無限に繰り返す.

このようにして構築された図形は厳密に自己相似であり, 決定論的フラクタルと呼ばれる. これに対し, 海岸線や雲などの, 自然界に見られる自己相似形状は統計的フラクタルと呼ばれる. 統計的な自己相似とは, 系全体を特徴づける全ての統計量と, 系の一部分を特徴づける統計量とが同一である, あるいは同じ分布関数に従うという系の性質である. フラクタル構造を定量的に特徴づける際には, フラクタル次元が用いられる. フラクタル次元は, 相似次元, 情報次元, ハウスドルフ次元, 容量次元などの総称であり, 通常, これらの次元は同一の対象に対して同じ値をとる. ここでは, 相似次元, 測度のサイズ依存性から得られる次元, および容量次元について説明する.

ある構造が, その構造を $1/a$ に縮小した $N(a)$ 個の部分構造から成り立っているとしよう. ここで, $N(a) = a^{D_{\rm f}}$ と表される場合, $D_{\rm f}$ を相似次元という. すなわち, 相似

次元は

$$D_{\mathrm{f}} = \frac{\log N(a)}{\log a} \tag{3.7}$$

と定義される. ただし, 相似次元が定義できるのは, 数学的に厳密な自己相似構造のみである. 例として, シェルピンスキー・ガスケットの相似次元を求めてみる. シェルピンスキー・ガスケットにおいては, 各ステップごとに正三角形の中心から自身の辺の長さを $1/2$ にした正三角形が切り取られていく. これによって, 辺の長さを $1/2$ にした正三角形が 3 個残ることになる. したがって, シェルピンスキー・ガスケットのフラクタル次元 (相似次元) は, $D_{\mathrm{f}} = \log 3/\log 2 \simeq 1.58$ のような非整数値となる.

相似次元は決定論的フラクタルに対してのみ適用されるのに対し, 測度のサイズ依存性から得られる次元と容量次元は統計的フラクタルに対しても適用できる. まず, 測度のサイズ依存性から得られる次元は次のように定義される. 系の一部を半径 l の円で覆ったとき, その円の中に系の最小単位が $M(l)$ 個含まれていたとする. この円の半径 l を変化させて $M(l)$ の l 依存性を調べたとき,

$$M(l) \propto l^{D_{\mathrm{f}}} \tag{3.8}$$

という関係が成り立つならば, D_{f} を系の次元とみなすことができる. このように, 被覆する円の半径と円に含まれる最小単位の数から次元を求める方法をクラスター成長法 (Cluster-Growing: CG 法) という.

容量次元の定義は次の通りである. 系を半径 l の円 (箱) で被覆することを考える. その際, ある l に対し, 被覆に必要な箱の数の最小値を $N(l)$ とする. この $N(l)$ が

$$N(l) \propto l^{-D_{\mathrm{f}}} \tag{3.9}$$

と表されるとき, D_{f} を容量次元と呼ぶ. また, ここで述べたような, 系を被覆する箱の長さと被覆に必要な箱の数の最小値から容量次元を求める方法をボックスカバリング法 (Box-Covering: BC 法) という. 相似性次元も CG 法による次元も BC 法に

表 3.2: 自然界のフラクタル系におけるフラクタル次元 D_{f}. この表は文献 [68] に基づいて作成されている.

フラクタル系	D_{f}
アマゾン川	1.85
人間の肺	2.17
人間の脳の皺	2.79
蝙蝠の翼の血管	2.3
銀河の空間分布	1.2
シリカゲルの表面	2.97

よる次元も, 特別な場合を除き, 通常は同じ値をとることが知られている. そのため, これまでの物理学ではこれらをことさら区別することはせず, フラクタル次元と呼んできた. 表 3.2 には, 様々な方法によって計測された, 自然界に存在するフラクタル構造のフラクタル次元が示されている. これより, 自然界に存在する統計的フラクタル構造も, シェルピンスキー・ガスケットと同様に, 非整数にまで拡張された次元を用いて記述されることが分かる.

3.2.2 ネットワークのフラクタル性

これまでに説明してきたフラクタル次元の定義では, ユークリッド距離の存在が必要であった. そのため, このままではユークリッド距離が定義されていないネットワーク系のフラクタル性を議論することはできない. しかし, ユークリッド距離の代わりにネットワーク距離を用いることで, ネットワークのフラクタル性をユークリッド系と同様に議論することが可能になる. ユークリッド系における, 測度のサイズ依存性に基づく次元の定義をネットワークに自然な形で拡張すると, ネットワークのフラクタル次元は次のように考えることができる. あるノード (中心ノード) からネットワーク距離 l_{C} 以内に存在するノード数の, 中心ノードに関する平均値 $\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}})\rangle$ が

$$\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}})\rangle \propto {l_{\mathrm{C}}}^{d_{\mathrm{C}}} \tag{3.10}$$

となるとき, ネットワークはフラクタルであるといい, d_{C} を CG 法によるフラクタル次元と呼ぶ. また, ユークリッド系における容量次元の定義をネットワークに拡張すると, ネットワーク直径 l_{B} の部分グラフでネットワーク全体を被覆する際の最小部分グラフ数 $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ が

$$N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}}) \propto {l_{\mathrm{B}}}^{-d_{\mathrm{B}}} \tag{3.11}$$

と表される場合, ネットワークはフラクタルであると言える. このとき, d_{B} を BC 法によるフラクタル次元と呼ぶ. ユークリッド空間に埋め込まれたフラクタル構造と同様に, ネットワークの次数分布が均質な場合は, d_{C} と d_{B} は同じ値をとるが, スケールフリー・ネットワークのように次数不均一性が強いネットワークにおいては, 両者は異なる値をとる可能性があることが指摘されている [5].

3.2.3 現実ネットワークのフラクタル性

2005 年に Song らは, BC 法を用いることにより, 幾つかの現実ネットワークにフラクタル性があることを示した [5]. Song らがフラクタル性を見出した現実ネットワークは, WWW($d_{\mathrm{B}} = 4.1$), 俳優の共演ネットワーク ($d_{\mathrm{B}} = 6.3$), 蛋白質相互作用ネットワーク ($d_{\mathrm{B}} = 2.3$) , 代謝ネットワーク ($d_{\mathrm{B}} = 3.5$) である. 現在では, この他に送電線ネットワーク, 水道網, 地下鉄ネットワーク [6], ソフトウェア・ネットワーク [7], 航空網 [8] 等も BC 法の意味でフラクタルであることが示されている. ここで重要なことは, これらのネットワークの多くは, 単にフラクタルであるばかりではなく, 次数分布がベキ則に従うスケールフリー性も同時に有している点である.

3.2.4 フラクタル・スケールフリー・ネットワークのモデル

BA モデルや WS モデルがそれぞれスケールフリー性とスモールワールド性の本質を理解する上で役立ったように, フラクタルなネットワークの数理モデルを構築することは非常に重要である. しかしながら, 複雑ネットワークにおけるフラクタ

ル性がどのようなメカニズムで発現するのかを説明した研究は未だ存在していない. ただし, スケールフリー性とフラクタル性を同時に兼ね備えたネットワークに対する構造モデルであれば, これまでに幾つか提案されている. ここでは, フラクタル・スケールフリー・ネットワークの代表的な構造モデルである, (u,v)-フラワーと Song-Havlin-Makse モデルを紹介する.

(u,v)-フラワー

(u,v)-フラワー [73] の名前に含まれる u と v は, このモデルにおけるパラメータであり, ともに正の整数値をとる. あらかじめ u と v の値を決めた上で, (u,v)-フラワーは以下のようなプロセスによって構築される.

(1) 第 1 世代のネットワークとして, $w \equiv u + v$ 本のエッジと w 個のノードからなるサイクル C_1 を用意する. この中からランダムに 1 つのノード i を選出し, そこからネットワーク距離で $\min(u, v)$ だけ離れたノードを j とする. これらのノード i, j を C_1 の基点ノードと呼ぶ.

(2) 第 n 世代のネットワークは, 第 $n-1$ 世代のネットワークに存在する全てのエッジを C_1 に置き換えることで構築される. ただし, 置き換えられる各エッジの両端のノードが, C_1 における基点ノードに対応するように置き換える.

(3) (2) の操作を, 所望のノード数 (世代) に達するまで繰り返す.

例として, 図 3.5 に $(1, 2)$-フラワーと $(2, 2)$-フラワーの第 3 世代までのネットワークが示されている. アルゴリズムから明らかなように, (u,v)-フラワーと (v,u)-フラワーは同じネットワーク構造を有する. したがって,

$$1 \leq u \leq v \tag{3.12}$$

としても一般性は失われない. 以下の議論は, この条件のもとで進める.

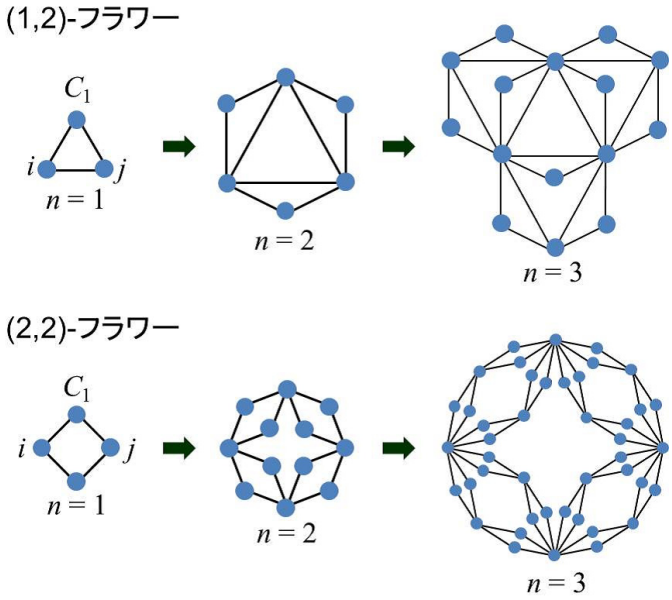

図 3.5: $(1, 2)$-フラワーと $(2, 2)$-フラワーにおける第3 世代 $(n = 3)$ までのネットワーク構造. C_1 の基点ノード i と j を結ぶ 2 つの経路の長さは u, v である.

(u,v)-フラワーのスケールフリー指数とフラクタル次元は解析的に求めることができる. まず, スケールフリー指数を求めてみよう. 第 n 世代のネットワークにおけるノード数を N_n, エッジ数を M_n とすると, M_n は

$$M_n = w^n \tag{3.13}$$

と表され, N_n は

$$N_n = wN_{n-1} - w \tag{3.14}$$

となる. 漸化式 (3.14) 式を $N_1 = w$ の条件下で解くことにより,

$$N_n = \left(\frac{w-2}{w-1}\right) w^n + \left(\frac{w}{w-1}\right) \tag{3.15}$$

を得る. また, 各世代における次数 $k_m = 2^m (m = 1, 2, ..., n)$ のノード数 $N_n(m)$ は, $N_n(m) = N_{n-1}(m-1) + (w-2)w^{n-1}\delta_{1m}$ より,

$$N_n(m) = \begin{cases} (w-2)w^{n-m}, & (m < n) \\ w, & (m = n) \end{cases} \tag{3.16}$$

と表せる. ここで, $1 \ll m < n$ であるとして, m と k_m を連続変数とみなす. これにより, 次数分布 $P(k)$ に関して $|N_n(m)dm| = |P(k)dk|$ が成り立つ. したがって, $k_m = 2^m$ であることと (3.16) 式から, $k \gg 1$ に対して

$$P(k) = \frac{(w-2)w^n}{\log 2} k^{-(1+\log w/\log 2)} \tag{3.17}$$

となる. 以上より, (u,v)-フラワーのスケールフリー指数 γ は

$$\gamma = 1 + \frac{\log(u+v)}{\log 2} \tag{3.18}$$

であることが分かる. 続いて, フラクタル次元 d_{B} を求めよう. 実は, $u = 1$ の場合はフラクタルではない. すなわち, $u = 1$ の (u,v)-フラワーはスモールワールド性を有している. まずはこのことを確認しよう. $u = 1$ のとき, 第 n 世代のネットワークの直径 L_n は n に比例する. v が奇数の場合の L_n は容易に求めることができて,

$$L_n = (v-1)n + \frac{3-v}{2} \tag{3.19}$$

となる. v が偶数の場合も $L_n \sim (v-1)n$ となることが知られており [73], いずれの場合も L_n は n の線形関数で表されることが分かる. n が十分に大きければ, (3.19) 式と (3.15) 式はそれぞれ $L_n \sim (v-1)n$, $N_n \sim (v+1)^n$ となることから,

$$L_n \sim \frac{v-1}{\log(v+1)} \log N_n \tag{3.20}$$

と書くことができる. これより, $u = 1$ の (u,v)-フラワーはスモールワールド性を有していることが分かる. 次に, $u > 1$ の場合を考える. w が偶数の場合に限れば, L_n は

$$L_n = \left(\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{u-1} \right) u^{n-1} - \frac{v-u}{u-1} \tag{3.21}$$

となる. 第 m 世代 $(m < n)$ のネットワークを長さ $l_{\mathrm{B}} = L_m$ の被覆部分グラフと考えると, 被覆に必要な部分グラフの数 N_{B} は

$$N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}}) = w^{n-m} \tag{3.22}$$

となることは明らかである. しかし, この N_{B} は被覆に必要な部分グラフの最小値ではない. ハブから順に被覆することで, より少ない部分グラフで被覆することができる. この方法で N_{B} を求めてみよう. s 番目に大きなハブを中心とする被覆部分グラフの数 $N_{\mathrm{B}(s)}(L_m)$ は, s 番目に大きなハブの個数そのものであるから, $N_{\mathrm{B}(s)}(L_m) = N_s - N_{s-1}$ である. さらに, $N_0 = 0$ とし, 第 s 世代のノード数 N_s が (3.15) 式で与えられることを用いると,

$$N_{\mathrm{B}(s)}(L_m) = (w-2)w^{s-1}(1-\delta_{1s}) + w\delta_{1s} \tag{3.23}$$

と表すことができる. (u,v)-フラワーの構造を考慮すると, $s = 1$ の最大ハブから $(n-m)$ 番目に大きいハブのそれぞれを中心とした被覆を行うことでネットワーク全体を被覆できることが分かる. つまり, s がとり得る値の範囲は

$$1 \leq s \leq n - m \tag{3.24}$$

である. これより, 被覆部分グラフの数 $N_{\mathrm{B}}(L_m)$ は

$$N_{\mathrm{B}}(L_m) = \sum_{s=1}^{n-m} N_{\mathrm{B}(s)}(L_m) \tag{3.25}$$

と表せる. ここで, (3.23) 式を用いれば,

$$N_{\mathrm{B}}(L_m) = \left(\frac{w-2}{w-1}w^{n-m}\right) - \frac{w}{w-1} \tag{3.26}$$

と書くことができる. したがって, n が十分に大きいとき,

$$N_{\mathrm{B}}(L_m) \propto w^{n-m} \tag{3.27}$$

となる. ここで, $n \gg 1$ の場合は w が奇数でも $L_n \sim u^n$ であること [73] を用いると,

$$N_{\mathrm{B}}(L_m) \propto {L_m}^{-\log w/\log u} \tag{3.28}$$

と表すことができる. これより, (u,v)-フラワーのフラクタル次元が

$$D_{\mathrm{f}} = \frac{\log(u+v)}{\log u} \tag{3.29}$$

となることが分かる. ここでは, BC 法に基づいてフラクタル次元を計算したが, CG 法を用いても同じ結果が導かれる.

Song-Havlin-Makse モデル

Song-Havlin-Makse(SHM) モデル [74] も, (u,v)-フラワーと同じくフラクタルなスケールフリー・ネットワークを構築する決定論的モデルの 1 つである. SHM モデルのアルゴリズムは次の通りである (図 3.6 参照).

(1) 第 1 世代 ($n = 1$) のネットワークとして, 少数のノードからなる星型グラフを用意する. このときのノード数を N_1 とすると, 1 つのノードの次数が $N_1 - 1$ であり, 残りの $N_1 - 1$ 個のノードの次数は 1 となる. したがって, 初期ネットワークの次数の総和は $2(N_1 - 1)$ である.

(2) 第 $n-1$ 世代のネットワークに含まれる各ノード i の周りに, 新たに tk 個のノードを追加し, ノード i とエッジで繋ぐ. ここで, k はノード i の次数, t は 2 以上

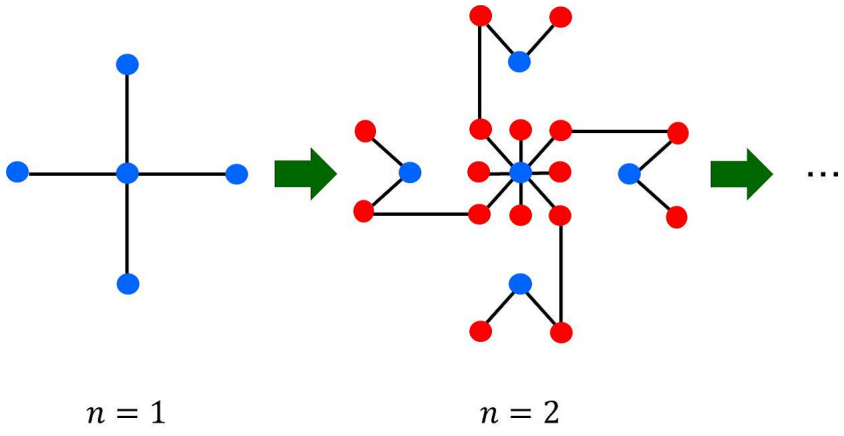

図 3.6: $t = 2$ の SHM モデルによるネットワーク形成. 青色と赤色のノードは, それぞれ第 1 世代と第 2 世代に追加されたノードを表す.

の整数値をとるパラメータである. この際, ノード i の周りに追加されたノードの集合を $\nu_i(n)$ と表すことにする.

(3) (2) のネットワークから, 第 $n-1$ 世代より引き継いだエッジを全て削除する. ここで削除した各エッジの両端にあるノードを i, j とする.

(4) ノード集合 $\nu_i(n)$ と $\nu_j(n)$ から, それぞれ 1 つずつノードを選出し, 両者をエッジで繋ぐ. ただし, 一度選出されたノードを再び選ぶことがないようにする.

(5) 必要なノード数に達するまで, (2) から (4) の操作を繰り返す.

このようにして構築されたネットワークや (u,v)-フラワーには, 負の次数相関がある. このことは, (u,v)-フラワーの図やアルゴリズム, あるいは SHM モデルでの操作 (3) および (4) から明らかである.

SHM モデルによって構築されたネットワークのフラクタル次元とスケールフリー指数を計算してみよう. 第 n 世代のネットワークのノード数 N_n は, 第 $n-1$ 世代のネットワークのエッジ数 M_{n-1} を用いることで,

$$N_n = N_{n-1} + 2tM_{n-1} \tag{3.30}$$

と表せる．このモデルによって構築されるネットワークは, サイクルをもたないツリー構造であることを考えると, $M_{n-1} = N_{n-1} - 1 \approx N_{n-1}$ であるから,

$$N_n = (2t+1)N_{n-1} \tag{3.31}$$

と書くことができる．また, 第 n 世代のネットワークの直径 L_n は,

$$L_n = 3L_{n-1} + 2 \tag{3.32}$$

と表される．このことは, 第 $n-1$ 世代ネットワークの全てのエッジが第 n 世代では長さが 3 の経路に置き換えられることと, 第 n 世代で追加されたノードのうち, 第 1 世代で星型グラフの中心であったノードから最も離れているノード間の距離が直径に寄与することを考慮すれば理解できる．$L_n \gg 1$ のとき, (3.32) 式の右辺第 2 項は無視することができて, 第 n 世代のネットワークの直径は第 $n-1$ 世代における直径の 3 倍になると考えることができる．このとき, (3.31) 式と (3.32) 式から, ネットワークの差し渡しの長さを 3 倍にするとノード数が $2t+1$ 倍になるといえる．これは, CG 法によるフラクタル次元が

$$D_{\mathrm{f}} = \frac{\log(2t+1)}{\log 3} \tag{3.33}$$

であるということに他ならない．この結果は, BC 法を用いても導くことができる．続いて, スケールフリー指数を計算してみよう．アルゴリズムから明らかなように, 第 $n-1$ 世代において次数が k であるノードの数 $N_{n-1}(k)$ は, 第 n 世代において次数が tk であるノードの数 $N_n(tk)$ と等しい．このことを次数分布関数 $P(k)$ を用いて表すと,

$$N_n P(tk)d(tk) = N_{n-1}P(k)dk \tag{3.34}$$

となる. なお, 上式の両辺で同じ分布関数が用いられているが, これはネットワークが自己相似的であることによる. ここで, $P(k) \propto k^{-\gamma}$ であるとすると, (3.34) 式から

$$N_n = N_{n-1} t^{\gamma - 1} \tag{3.35}$$

を得る. この式と (3.31) 式を比較することにより, スケールフリー指数 γ は

$$\gamma = 1 + \frac{\log(2t+1)}{\log t} \tag{3.36}$$

と表せる.

3.3 スモールワールド性とフラクタル性の関係

3.1 節で述べたように, 現実ネットワークの多くはスモールワールド性を有している. 一方, 幾つかの現実ネットワークにフラクタル性があることも前節で示した. これらの性質はどのような関係にあるのだろうか. ここでは, Kawasaki と Yakubo の論文 [9] に基づいてスモールワールド性とフラクタル性の関係を議論する. ただし, 本節ではクラスター係数とは無関係に, 平均ノード間距離がノード数に比べて圧倒的に小さいことのみをスモールワールド性の条件とする.

3.3.1 測定方法と特徴的長さ

スモールワールド性をネットワーク距離 l_{C} 以内にある平均ノード数 $\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}}) \rangle$ を用いて表現すると,

$$\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}}) \rangle \propto e^{l_{\mathrm{C}}/l_0} \tag{3.37}$$

となる. ここで, l_0 はある特徴的な長さである. この式は, フラクタル性の定義式である (3.10) 式と明らかに矛盾する. このことは, スモールワールド性を有するネット

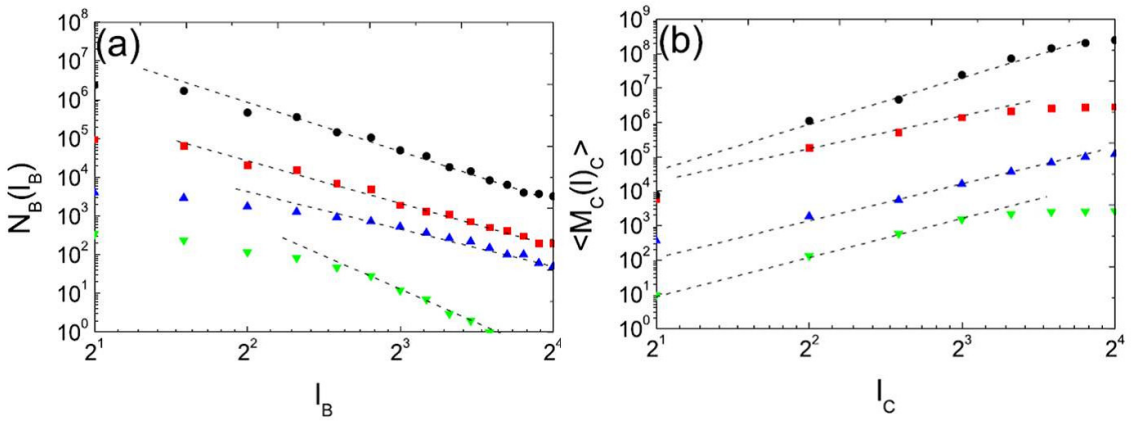

図 3.7: (a)BC 法, (b)CG 法による現実ネットワークのフラクタル解析. 各プロットはそれぞれ, WWW(黒), 代謝ネットワーク (赤), イースト菌の蛋白質相互作用ネットワーク (青), 人間の蛋白質相互作用ネットワーク (緑) に対する結果を表している. 図の見やすさのため, 各データは縦方向にシフトさせて表示している. この図は, 文献 [9] に基づいて作成されている.

ワークはフラクタルになり得ないことを示している. しかし, BC 法によってフラクタルであると評価されたネットワークの多くは, $\langle l \rangle \propto \log N$ の意味でスモールワールド性を有することが知られている [61,65,67]. Song らは当初, 次数不均一性が強いスケールフリー・ネットワークにおいては, CG 法による測定でのスモールワールド性と BC 法の意味でのフラクタル性は両立し得ると考えた [5]. CG 法による d_{C} と BC 法による d_{B} とは数学的に異なる量であり, 両者が異なる値をとる可能性は否定できない. しかし, 一方 (d_{B}) が有限でもう一方 (d_{C}) が発散することは考え難い. なぜなら, このことは測定方法によって特徴的な長さ l_0 の有無が左右されるという極めて不自然な事実を受け入れなければならないからである. 実際に, (u,v)-フラワーや SHM モデルにおけるフラクタル次元は, 測定方法に依存せず同じ値をとっていた. 2010 年に Kawasaki と Yakubo [9] は, BC 法と CG 法のそれぞれを用いてネットワークのフラクタル性を詳細に調べることで, スモールワールド性とフラクタル性の関係を解明することを試みた.

Kawasaki らは, まずスケールフリー性を有する 4 種の現実ネットワークのフラクタル性を評価した. 図 3.7(a) には, WWW, 代謝ネットワーク, 2 種類の蛋白質相互作

用ネットワークに対する, BC 法を用いたフラクタル解析の結果を示している. この図より, 各ネットワークにおける $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ が l_{B} のベキ関数で表されることが分かる. すなわち, これらのネットワークは BC の意味でフラクタルである. この結果は, 以前の研究 [5] で得られた結果と一致している. 一方, 図 3.7(b) には, 各ネットワークにおける $\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}})\rangle$ の l_{C} 依存性を示している. $\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}})\rangle$ が l_{C} のベキ関数になるという事実は, ここに示した現実ネットワークが BC 法のみならず CG 法の意味でもフラクタルであることを意味している. フラクタル性が見られるスケールが BC 法の方が長いのは, スケールフリー・ネットワークにおいて有限サイズ効果が現れるスケールが測定方法によって異なることに起因する. CG 法においては, l_{C} が直径と同程度の長さになると, 部分グラフ内に最大ハブが含まれることになり, ほぼ全てのノードが 1 つの部分グラフに含まれてしまう. このため, CG 法は BC 法に比べて有限サイズ効果が現れ易くなる. したがって, ネットワークのフラクタル性を評価するには, CG 法よりも BC 法の方が優れていると言える. ただし, CG 法を用いたフラクタル性の評価が難しいことと, 質的にフラクタル性が現れないということは別の問題であることに注意しなければならない.

3.3.2 クロスオーバーとスケーリング

ここまでの議論から, あるネットワークが CG 法か BC 法のどちらかでフラクタルであると示された場合, もう一方の測定法でもフラクタルであると評価されなければならないことが示唆される. したがって, ネットワークのスモールワールド性やフラクタル性が測定方法に依存するとは考えられない. それでは, 現実ネットワークで観測されている $\langle l\rangle \propto \log N$ と $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}}) \propto {l_{\mathrm{B}}}^{-d_{\mathrm{B}}}$ の両立をどのように理解すれば良いのであろうか. Kawasaki ら [9] は, ある長さを境に構造的クロスオーバーが起こっていると考えた. フラクタルなネットワークにショートカットとなるようなエッジを加えることで, フラクタルからスモールワールドへの構造的クロスオーバーが起こることは以前から示されている [76]. また, CG 法による測定の結果, ランダム・グラフのパーコレーション転移点近傍でフラクタル構造からスモールワールド構造へ

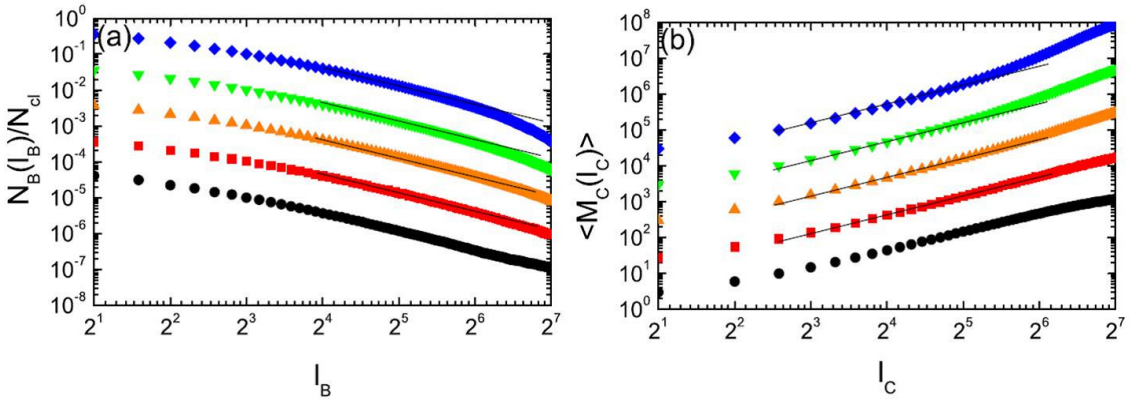

図 3.8: (a)BC 法, (b)CG 法によるパーコレーション転移点近傍におけるランダム・グラフのフラクタル解析. 各プロットはそれぞれ, $p = p_c$ (黒), $p = 1.025p_c$(赤), $p = 1.05p_c$(橙), $p = 1.075p_c$(緑), $p = 1.1p_c$(青) に対する結果を表している. 図の見やすさのため, 各データは縦方向にシフトさせて表示している. この図は, 文献 [9] に基づいて作成されている.

のクロスオーバーが起こることも明らかにされている [77]. フラクタル性の有無が測定方法に依存しないことを考えると, BC 法を用いても同様のクロスオーバーが見られると考えられる.

Kawasaki らは, 異なるエッジ確率 p から形成されたランダム・グラフの $N_B(l_B)$ と $\langle M_C(l_C)\rangle$ を計算した. 図 3.8(a) と (b) にその結果を示す. それぞれの図において, プロットは下から $p = p_c$, $p = 1.025p_c$, $p = 1.05p_c$, $p = 1.075p_c$, $p = 1.1p_c$ に対する結果に対応している. p_c はランダム・グラフにおけるパーコレーション転移の臨界確率であり, ノード数が N のとき,

$$p_c = \frac{1}{N} \tag{3.38}$$

である [46]. パーコレーション転移点直上 ($p = p_c$) においては, ランダム・グラフはフラクタル構造をとることが知られている. 実際, 図 3.8 より, パーコレーション転移点直上では, l の非常に広い範囲でフラクタル性が現れていることが分かる. しかし, 転移点から徐々に離れるにつれ, あるスケールからフラクタル性が失われていくこ

とが見てとれる. このような振る舞いは, CG 法と BC 法のどちらに対する結果についても見られる. このことは, パーコレーション転移点直上にあるフラクタルなネットワークにショートカット・エッジを加えていくと, l の長い領域でスモールワールド性が見られるようになることを示している. このような振る舞いは, ネットワークにスケールフリー性がある場合にも見られることが確認されており [9], その際も, 測定方法の違いとフラクタル性の有無は無関係であることが示されている. さらに, スケーリング解析の結果, パーコレーション転移点近傍での $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ と $\langle M_{\mathrm{C}}(l_{\mathrm{C}})\rangle$ の振る舞いがクロスオーバー長のみでスケールできることも明らかにされている [9]. これらのことから, 複雑ネットワークにおけるフラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバーは, 従来のパーコレーション系におけるフラクタル構造から均一構造へのクロスオーバーと本質的に同じであると考えられる. スモールワールド・ネットワークにおいては, 系の有効次元は無限大とみなせるので, フラクタルからスモールワールドへの構造的クロスオーバーは, 有限次元から無限次元への次元クロスオーバーと見ることもできる. しかしながら, 時間とともに構造が変化する現実のネットワークにおいて, どのようなメカニズムがフラクタル性を発現させ, スモールワールド構造へのクロスオーバーを引き起こしているのかという点については, 未だに明らかにされていない. 次章では, ユークリッド空間に埋め込まれたフラクタル構造体の形成機構の一つである自己組織化臨界性と, ネットワークの構造形成に関する従来研究を紹介する.

第4章　自己組織化臨界性とフラクタル性

前章で述べたように, フラクタル性とスケールフリー性を同時に有するネットワーク・モデルは既に幾つか提唱されてきた. しかし, 複雑ネットワークがどのようなメカニズムを通じてフラクタル性を獲得するかについては, 未だに十分な理解が得られていない. 一方, 海岸線の形状や河川の分岐構造など, 自然界に見られるユークリッド系におけるフラクタル構造の起源については, ある程度理解が得られている. これらのフラクタル構造形成メカニズムを説明するモデル [11–13] においては, 自己組織化臨界性 (Self-organized criticality: SOC) [10] を有するダイナミクスが重要な役割を果たしている. 多自由度系の非線形ダイナミクスの中には, 特別なパラメータ・チューニングをせずとも系が自発的に平衡状態としての臨界点に近づき, その後に臨界点近傍で定常的な揺らぎを示すものがある. SOC とは, そのような非平衡ダイナミクスが示す様々な臨界的性質のことである. 定常状態におけるフラクタル性の発現も, そのような性質の 1 つである. このことは, ユークリッド距離が定義されない複雑ネットワークにおけるフラクタル性の発現機構も, SOC と密接な関係にあることを想起させる. 本章では, まず SOC を示す代表的なモデルを紹介し, 続いて複雑ネットワーク上の SOC モデル, ならびにネットワークの様々な構造形成モデルについて説明する. また, 章末では本研究の目的を述べる.

4.1 自己組織化臨界性を示す代表的なモデル

自己組織化臨界性という概念は, 1987 年に Bak らによって導入された [10]. 以降, 自然界の様々な複雑現象を説明すべく, 前述の海岸線や河川分岐の構造形成モデル [11–13], 森林火災のモデル [78], 地震のモデル [79], 生態系のモデル [80] など, SOC を示すモデルが幾つも提案され, 精力的に研究されるに至った. ここでは, Bak らが SOC という概念を初めて導入した論文 [10] で提案された Bak-Tang-Wiesenfeld モデルと, 生態系の単純なモデルとして広く知られている Bak-Sneppen モデル [80] について説明する.

4.1.1 Bak-Tang-Wiesenfeld モデル

Bak-Tang-Wiesenfeld モデル [10] は, 平面上にランダムに落ちてきた砂粒によって形成される砂山が, 斜面の傾きがある値を超えると崩壊し, その崩壊によって更なる崩壊の連鎖が発生する様子をモデル化したものである. Bak らは, このモデルにおける雪崩 (砂山の連鎖崩壊) のサイズ分布を計算した. 以下に示すように, そのプロセスは極めて単純である. 実際には 2 次元と 3 次元の両方について計算が行われているが, いずれの場合も SOC が発現することに変わりはないため, ここでは 2 次元の場合について説明する.

まず, $N \times N$ 個のサイトからなる正方格子を用意する. 各サイトの座標は, 整数の組 (x, y) で指定される. ここで, $1 \leq x, y \leq N$ である. また, 各サイトには整数値をとる変数 $z(x, y)$ が定義されており, サイト (x, y) の z がある値 K を超えると, z は隣接する 4 サイトも含めて

$$\begin{aligned} z(x, y) &\rightarrow z(x, y) - 4, \\ z(x \pm 1, y) &\rightarrow z(x \pm 1, y) + 1 \\ z(x, y \pm 1) &\rightarrow z(x, y \pm 1) + 1 \end{aligned}$$

のように変化する. z は各サイトにおける砂山の傾き (あるいは高さ) に対応しており, 上式は z がある値 K を超えると崩壊が発生し, 砂粒は周りのサイトへと転がり落ちることを意味している. すなわち, この崩壊によって周りのサイトにおける傾き (高さ) が増加する. さらに, これにより隣接サイトの z が K を超えた場合は, そのサイトでも同様の崩壊を起こす. この過程は, 崩壊が起きなくなるまで繰り返される. なお, $z(0,y) = z(N+1,y) = z(x,0) = z(x,N+1) = 0$ とする. 最初, 各サイトには $z \gg K$ なる z がランダムに割り振られており, 上述の崩壊プロセスを崩壊が止まるまで繰り返す. したがって, この時点 ($t = 0$) では全てのサイトで z は K 以下となっている. 各時刻において $z = K$ であるサイトの 1 つをランダムに選び, そのサイトの z を $z = K + 1$ として崩壊を起こす. すなわち, 最も不安定なサイトに砂粒を 1 つ追加することで崩壊を起こす. これを引き金に崩壊を起こすことになったサイトの総数が, 雪崩のサイズ S として定義される. この操作を長時間 ($t \gg 1$) 繰り返す. Bak らは, 200 サンプルに対して上述のシミュレーションを行い, 雪崩サイズ S の分布関数 $D(S)$ を計算した.

その結果, $D(S)$ は S のベキ関数で表され, その指数は 0.98 であることが明らかになった. このことは, 雪崩のサイズに典型的なスケールがないことを意味している. このとき, 1 つの砂粒は, ほんの数箇所の崩壊からなる小規模な雪崩を引き起こすこともあれば, システム・サイズに匹敵する大規模な雪崩を引き起こすこともある. この結果は K の値に依らない. このモデルには, K 以外にチューニングすべきパラメータがないことから, 砂山は自発的に臨界的な状態へと組織化したといえる. また, その後の時間発展は $t = 0$ の後の時間発展と本質的に同じであることから, このシステムは臨界状態の周りで揺らぎ続けることになる. Bak らは, 平衡系の臨界点へと自己組織化し, 臨界点の周りで揺らぎ続けるような非平衡ダイナミクスに見られる臨界的性質 (ベキ型の雪崩サイズ分布など) を自己組織化臨界性 (SOC) と名付けた.

4.1.2 Bak-Sneppen モデル

生態系における生物種の繁栄能力は, しばしば適応度という指標によって表される. 適応度が高い生物種は存続しやすく, 低い種は絶滅しやすい. 各生物種は捕食や被食の関係などを通じて相互に影響を及ぼし合っており, ある種が絶滅あるいは突然変異を起こして新たな適応度をもつ種が生まれると, その新種と相互作用する種の適応度も変化する. このように, ある種の変異が別の種の変異を引き起こすことを共進化と呼ぶ.

Bak-Sneppen モデル [80] は, 複数の生物種が相互作用を通じて共進化する過程をモデル化したものである. このモデルでは, N 種の生物種を 1 次元鎖上に並べられた N 個の点として表している. すなわち, 全ての種は隣接する 2 種と相互作用すると仮定している. また, 各種の適応度 $B_i (i = 1, 2, ..., N)$ は各点に割り当てられた 0 から 1 までの値で表される (図 4.1 参照). 初期状態では, 各種の適応度はランダムに割り当てられている [図 4.1(a)]. その後の時間発展は以下の通りである. まず適応度が最小の種を選出する [図 4.1(b)]. 続いて, その種と, それに隣接する 2 種の適応度の値を, 改めて 0 から 1 までの値をランダムに割り当てることで更新する [図 4.1(c)]. 以降は, 同様にして最小適応度をもつ種とそれに隣接する 2 種の適応度を更新するという操作を繰り返す [図 4.1(d),(e)].

以上の時間発展を長時間続けると, どのようなことが起こるだろうか. 時間発展の各ステップにおいて, 最小適応度をもつ種とそれに隣接する 2 種の計 3 種が適応度を更新することから, 適応度の平均値は時間発展とともに増加する. $N = 4,096$ として行った数値計算の結果, この系は全ての種の適応度が $B_c = 0.67$ 以上となるような定常状態に到達することが示されている [80]. 系が定常状態に達した後も, 引き続き最小適応度の種を含む 3 種の適応度更新が行われる. ここで, 適応度を更新した 3 種の更新後の適応度が全て B_c 以上であれば, 系は定常状態に留まることになる. 一方, 3 種の内のいずれかが更新によって B_c を下回る適応度になった場合, 再び全ての種の適応度が B_c 以上になるまで, すなわち系が再び定常状態になるまでに多くのステップを要することがある. Bak と Sneppen は, 系が定常に達した後, 再び定常に戻るま

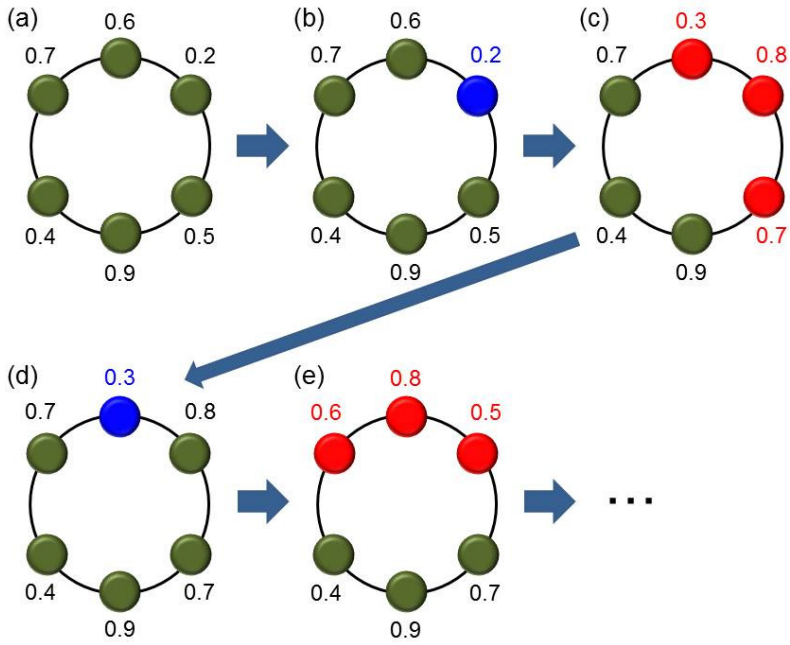

図 4.1: Bak-Sneppen モデルのダイナミクスの概念図. (a) まず, 適応度として 0 から 1 までの値がランダムに割り当てられた点を 1 次元鎖上に並べる. (b) その中から適応度が最小である点 (青) を選ぶ. (c) その点とそれに隣接する点の計 3 点 (赤) の適応度を, 0 から 1 の値をランダムに割り当てることで更新する. (d) 適応度を更新した点を含む全ての点の中から, 適応度が最小の点 (青) を選ぶ. (e)(c) と同じ操作を行う. 以上の操作を繰り返す.

でに起きた変異の回数を雪崩の規模 S と定義し, その分布関数 $R(S)$ が S のベキ関数で表され, その指数が 0.9 となることを明らかにした [80]. また, このような振る舞いがモデルの詳細に依存しないことも確認されている. これらのことから, 生態系の共進化ダイナミクスも SOC を示すことが明らかになった.

4.2 ネットワーク上の自己組織化臨界ダイナミクス

正方格子上の Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) モデルにおいては, あるサイトで起きた崩壊が隣接する 4 サイトに影響を及ぼした. また, Bak-Sneppen(BS) モデルでは, 一次元鎖上のある種の変異が隣接する 2 種の変異を誘発した. 実空間内の要素どう

しが相互作用してSOCダイナミクスを呈する場合はこのような格子モデルを考えればよいが, 企業間取引における連鎖倒産のように実空間とは無関係な繋がりの中での雪崩現象を扱うには, ネットワーク上のSOCダイナミクスを考えなければならない. そのため, 複雑ネットワーク上のBTWモデルやBSモデルが盛んに研究されている. ここでは, そのうちの代表的な研究について説明する.

4.2.1 ネットワーク上のBak-Tang-Wiesenfeldモデル

1995年にBonabeauは, 有向ランダム・グラフ上のBTWモデルにおけるダイナミクスを数値的に調べた [14]. ここでは, 次のような過程が考えられた. まず, N 個のノードを用意し, その中から $N_{\rm b}$ 個のノードを境界ノードとしてランダムに選出しておく. 次に, 各ノードの出次数 k_i を, 次数分布 $P(k)$ が平均値 $\langle k \rangle$, 分散 σ の正規分布となるように決定し, 各ノードから出る k_i 本の有向エッジを他のノードにランダムに接続することで有向ランダム・グラフを構築する. ただし, 各境界ノードが有する k_i 本のエッジの内, n_i 本 $(n_i \leq k_i)$ のエッジは系外への砂粒の排出に用いられるものとする. したがって, これらのノードにおいては $k_i - n_i$ 本のエッジのみがネットワーク構築に使用される. 初期状態では, 各ノードにおける砂山の高さ z_i を $z_i = 0$ としておく. その後の時間発展の各ステップにおいて, ランダムに選択した1つのノードの z_i を $z_i + 1$ とする (砂粒の追加). これにより, あるノードの z_i がノードごとに決められた閾値 $z_{\rm c}(i)$ を超えた場合, そのノードは不安定化する. ただし, $z_{\rm c}(i) = k_i - 1$ とする. このとき, 不安定化したノード i の z_i を $z_i - k_i$ に, そのノードから出る有向エッジの先にある k_i 個の隣接ノード j の z_j を $z_j + 1$ に変更する (砂山の崩壊). ただし, i が境界ノードの場合は, 隣接するノードは $k_i - n_i$ 個である. この過程を不安定ノードがなくなるまで繰り返す (崩壊の雪崩). 雪崩の規模 S は, 全ノードが再び安定化するまでに起きた崩壊の回数として定義される. 以上のダイナミクスを繰り返すことで雪崩サイズの分布関数 $D(S)$ を計算すると, $D(S)$ はBTWモデルと同様に S のベキ関数で表され, その指数は $3/2$ となることが明らかになった. これは, 平均場近似が与える結果 [81] と一致している.

Goh らはスケールフリー・ネットワーク上の BTW モデルを考え, スケールフリー性が SOC ダイナミクスに与える影響を調べた [18]. このモデルでは, まずノード数 N, 平均次数 $2m$, スケールフリー指数 γ の無向スケールフリー・ネットワークを用意する. 初期時刻における各ノード上の砂山の高さ z_i は $z_i = 0$ とする. その後, 次のようなダイナミクスを考える. 時間発展の各ステップにおいて, ランダムに選んだ 1 つのノードに砂粒を追加する. すなわち, このノードの z_i を $z_i + 1$ に変更する. 各ノードの z_i が $z_{\rm c}(i) = k_i$ を超えた場合, そのノードは不安定化する. 不安定化したノード i 上の砂山の高さ z_i を $z_i - k_i$ に, それに隣接するノード j 上の砂山の高さ z_j を $z_j + 1$ に更新する. ただし, この砂山崩壊プロセスの後, 各砂粒は確率 f で除去される ($f \ll 1$). この崩壊プロセスを, 不安定ノードがなくなるまで繰り返し実行する. Goh らは, 一連の崩壊で砂粒が 1 つも除去されなかった雪崩の規模 S を, 数値的に計算した. その結果, 雪崩サイズの分布関数 $D(S)$ はベキ関数で表され, その指数 λ はスケールフリー指数 γ に依存することが明らかになった. 具体的には, ランダム・グラフに対応する $\gamma \to \infty$ において λ はランダム・グラフ上の BTW モデルとほぼ同じ値 (1.52) をとるが, γ が小さくなると λ の値は増大することが示された. すなわち, スケールフリー性を強めると大規模な雪崩の割合が減少する. これは, ハブの $z_{\rm c}$ が非常に大きいことから, 崩壊の連鎖がハブによって止められることが多く, スケールフリー性が強いほどその影響が顕著になるためであると考えられる.

4.2.2 ネットワーク上の Bak-Sneppen モデル

Christensen らはランダム・グラフ上の BS モデルを考え, そのダイナミクスを数値的に調べた [15]. このモデルでは, まず N 個のノードからなる平均次数 $\langle z \rangle$ の無向ランダム・グラフを用意し, 各ノード i に 0 から 1 までの一様乱数としての適応度 B_i を割り振る. その後の時間発展の各ステップにおいて, 最小の適応度をもつノード i を選出し, そのノードと, 隣接するノードの適応度を一様乱数によって更新する. この過程を繰り返すと, B_i の分布関数は定常に達する. 定常においては, BS モデルと同様にほとんど全ての B_i がある閾値 $B_{\rm c}$ 以上となる. 定常に達した後, あるノー

ドの B_i が B_c を下回ってから再び全ての適応度が B_c 以上になるまでのステップ数を雪崩のサイズ S とする. Christensen らは, 以上のプロセスを異なる $\langle z \rangle$ に対して実行し, 雪崩サイズの分布関数を計算した. その結果, 分布関数は S のベキ関数で表され, その指数 λ は $\langle z \rangle = 1$ のとき $\lambda = 1.2$, $\langle z \rangle > 1$ のとき $\lambda = 1.5$ となることが明らかになった. $\langle z \rangle = 1$ におけるベキ指数 $\lambda = 1.2$ は, 2 次元の BS モデル [82] における指数と同じである. このことは, $\langle z \rangle = 1$ のランダム・グラフが臨界的性質を有し, フラクタル次元の実測値が 2 に近い 1.88 であることから合理的に理解される. 一方, $\langle z \rangle > 1$ に対する指数 $\lambda = 1.5$ は, 平均場近似 [83] により得られた指数と一致する. この事実は, $\langle z \rangle > 1$ のランダム・グラフがスモールワールド性を有し, 有効次元が無限大になっていることを反映している.

スケールフリー・ネットワーク上の BS モデルは, Moreno らによって研究された [17]. 彼らのモデルでは, まず BA モデル [51] によってスケールフリー・ネットワークを構築する. 各ノードへの適応度の割り振りや, その後の時間発展プロセス, 雪崩のサイズの定義については Christensen らのモデル [15] と同様なので割愛する. Moreno らは, このモデルにおいても雪崩サイズ S の分布関数は S のベキ関数で表され, その指数は 1.55 となることを明らかにした. この値は, ランダム・グラフ上の BS モデル [15] における $\langle z \rangle > 1$ の場合に対する値に近いことから, スケールフリー性はネットワーク上の BS ダイナミクスの普遍クラスを変えないことがわかる.

4.3 ネットワーク内ダイナミクスと構造の相互作用

前節では, ネットワーク上で起こる SOC ダイナミクスについて概観した. そこで紹介されたモデルに共通する点は, ネットワークの構造が不変であるということである. しかし実際には, ネットワークの構造とダイナミクスは相互に影響を及ぼし合っている. 例えば企業間取引ネットワークにおいては, 取引の結果がネットワーク構造を変化させ, ネットワーク構造の変化が取引の結果を左右する. このような事実を考慮して, 構造がダイナミクスと相互作用しながら自己組織化するネットワーク・

モデルも提唱されている. ここでは, その内の幾つかのモデルについて説明する.

4.3.1 Bak-Sneppen ダイナミクスと構造の相互作用

先に紹介した Christensen らの論文 [15] では, ランダム・グラフ上の BS モデルの他に, BS ダイナミクスに基づくネットワーク構造の時間発展モデルも扱われている. このモデルは, ランダム・グラフ上の BS モデルを基本としているが, BS ダイナミクスの各ステップにおいて, 小さな確率 p でのエッジの追加や削除が行われる. 具体的には, 適応度が更新されたノード i の次数 k_i が局所平均次数 κ を上回っている場合には i に繋がるエッジをランダムに 1 本削除し, k_i が κ を下回っている場合には i と他のランダムに選ばれたノードを結ぶエッジを 1 本追加する.

以上の過程を繰り返すことにより, 初期の平均次数に依らず, 最大連結成分の平均次数は 2 に近づき, クラスター・サイズの分布関数は指数 $5/2$ のベキ関数となることが明らかになった. これらの事実は, このモデルによって構築されたネットワークが臨界的であることを示唆している. また, 変異 (適応度の更新) を起こしたノードの次数は κ に近づくことから, 次数分布は Poisson 分布より若干裾が狭い分布となる. したがって, ネットワーク構造が臨界的であってもネットワーク全体の平均次数は 1 にならない.

4.3.2 太陽フレアのモデル

Hughes らは, 太陽フレアのダイナミクスを説明するモデルを提唱した [33]. このモデルは, フレアの両端点をノードとし, 磁束ループをエッジとするネットワークの構造とフレアのダイナミクスとの相互作用による自己組織化過程を記述している. アルゴリズムは次の通りである. まず, $L \times L$ の 2 次元平面内の適当な位置に適当な本数の磁束ループを配置する. 各ループは半円状であり, n 番目のループの両端点の座標をそれぞれ $\boldsymbol{r}_n^+$, $\boldsymbol{r}_n^-$ とする. このとき, ループの長さは $l_n = (\pi/2)|\boldsymbol{r}_n^+ - \boldsymbol{r}_n^-|$ で与

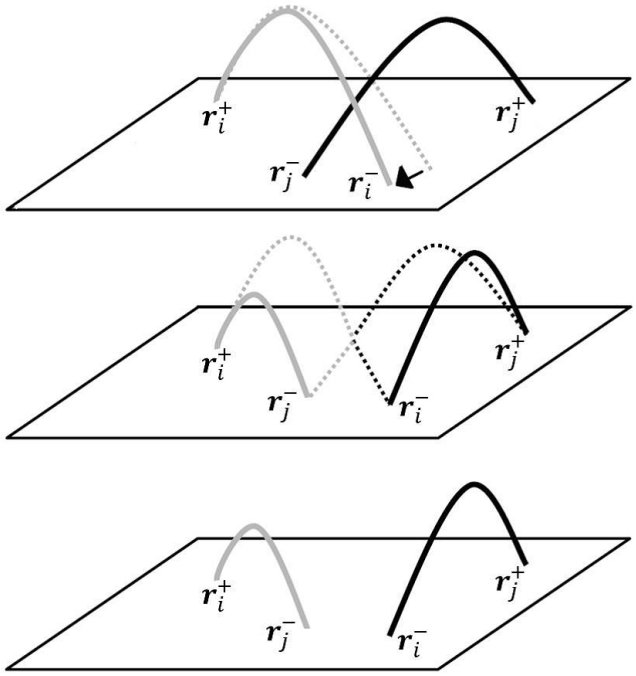

図 4.2: 上段から順にループの繋ぎ替えの手順を表した概念図. (上段) 端点 $\boldsymbol{r}_i^+$ と $\boldsymbol{r}_i^-$ を繋ぐループ i が破線で表された位置から移動することにより, $\boldsymbol{r}_j^+$ と $\boldsymbol{r}_j^-$ を繋ぐループ j と交差する. (中段) ループ i の片方の端点を $\boldsymbol{r}_i^-$ から $\boldsymbol{r}_j^-$ に, ループ j の片方の端点を $\boldsymbol{r}_j^-$ から $\boldsymbol{r}_i^-$ に変更することでループを繋ぎ替える. (下段) ループの繋ぎ替えによって, $\boldsymbol{r}_i^+$ と $\boldsymbol{r}_j^-$ を繋ぐループ i と $\boldsymbol{r}_j^+$ と $\boldsymbol{r}_i^-$ を繋ぐループ j が形成される. この図は文献 [33] に基づいて作成されている.

えられる. また, 系のエネルギーを $E = \sum_n l_n$ と定義する. 続いて, 時間発展の各ステップにおいて次の (a) または (b) の操作を行う.

(a) 1 つのループ端をランダムに選び, 任意の方向に一定の距離だけ移動 (ランダム・ウォーク) させる.

(b) ループ端間の距離が l_{nl} であるような新規ループを任意の位置に追加する.

ここで, (b) の操作は (a) の操作を mN 回実行する度に 1 回の頻度で行われるものとする. ただし, m は実数のパラメータ, N はループ端の総数である. (a) の操作で, ループの両端点間の長さが $l_{\min}$ となった場合は, そのループを除去する. 2 つのループ, $(\boldsymbol{r}_i^+, \boldsymbol{r}_i^-)$ と $(\boldsymbol{r}_j^+, \boldsymbol{r}_j^-)$ が空中で交差した場合は, それらの合計の長さが短くなる場

合に限り, $(\boldsymbol{r}_i^+, \boldsymbol{r}_j^-)$ と $(\boldsymbol{r}_j^+, \boldsymbol{r}_i^-)$ の 2 つのループとなるように繋ぎ替えを行う (図 4.2 参照). この繋ぎ替えが更なる繋ぎ替えを生じさせ, 繋ぎ替えの雪崩を引き起こす可能性がある. また, 2 つのループの端点 $\boldsymbol{r}_i^+$ と $\boldsymbol{r}_j^+$ の距離が $l_{\min}$ 以下になった場合は, 両端点を併合して $\boldsymbol{r}_j^+$ の 1 点とする. 一方, $\boldsymbol{r}_i^+$ と $\boldsymbol{r}_j^-$ の距離が $l_{\min}$ 以下になった場合は, 両端点は消滅させて 2 つのループを $(\boldsymbol{r}_i^-, \boldsymbol{r}_j^+)$ の 1 つのループとする.

以上の操作を繰り返すシミュレーションより, 次の事実が明らかになった. $m \ll 1$ のとき, 次数分布関数はベキ関数となり (スケールフリー性), 指数は 2.0 である. また, 繋ぎ替えに伴う解放エネルギーの分布関数もベキ関数となり, その指数は 3.0 である. 解放エネルギーの大きさは雪崩の規模に対応するので, これまでに紹介した幾つかのモデルと同様に, このモデルでもベキ的な雪崩サイズ分布が観測されたことになる. しかし, 繋ぎ替えの待ち時間分布は実際の観測事実と異なりベキ分布にはならず, このモデルの雪崩は間欠的ではない.

4.3.3 ブーリアン・ネットワークのダイナミクス

神経ネットワークの自己組織化を説明するため, Bornholdt らはバイナリー・ネットワークに基づくモデルを提唱した [34]. バイナリー・ネットワークとは, 各ノードに 2 つの値をとり得る状態変数 σ_i が定義されているネットワークである. 彼らモデルのアルゴリズムは次のようなものである. まず, ノード数 N, 平均次数 K のランダム・グラフを用意する. 続いて, 各ノードに状態変数 $\sigma_i = \pm 1$ を, 各エッジに結合強度 $c_{ij} = \pm 1$ をランダムに割り振る. 時間発展の各ステップにおいて, 状態変数 σ_i を $\sigma_i(t+1) = \mathrm{sgn}[f_i(t)]$ に従って $\min(T_2, T_{\max})$ 回だけ更新する. ここで, $f_i(t) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\sigma_j(t)$ であり, $T_{\max}$ は事前に決められた更新の上限回数である. また, T_2 は全ての i について初めて $\sigma_i(T_1) = \sigma_i(T_2)$ となる回数である. 状態変数の更新が終了した後, ランダムにノードを 1 つ選出する. このノード i の状態変数 σ_i が $T_1 < t < T_2$, あるいは $T_{\max}/2 < t < T_{\max}$ の間に一度も変化しなかった場合は, さらに 1 つのノード j をランダムに選出し, ij 間をエッジで繋ぐ. このエッジの結合強度

c_{ij} は等確率で $+1$ か -1 の値をとるものとする. 一方, σ_i が $T_1 < t < T_2$, あるいは $T_{\max}/2 < t < T_{\max}$ の間に一度でも変化した場合は, ノード i に繋がるエッジをランダムに 1 本選出して除去する. 続いて, c_{ij} の中からゼロではない要素をランダムに 1 つ選び, その符号を逆転させる.

以上の時間発展プロセスを繰り返すことにより, 最大連結成分の平均次数は N のみに依存した一定値 $K_{ev}(N)$ に収束する. この値は初期ネットワークの平均次数には依らず, 定数 c, δ を用いて $K_{ev}(N) = 2 + cN^{-\delta}$ と表される. したがって, $K_{ev}(\infty) = 2$ となる. また, あるノードの状態変数が $T_1 < t < T_2$, あるいは $T_{\max}/2 < t < T_{\max}$ の間に一度も変化しない確率 $C(K, N)$ は $N \to \infty$ で $K_{\rm c} = 2$ を境とするステップ関数になる. すなわち, $K < K_{\rm c}$ であればエッジが追加され, $K > K_{\rm c}$ であればエッジが除去される. このことから, $N \to \infty$ では平均次数が $K_{\rm c} = 2$ のネットワークに自己組織化する. ただし, このモデルには明確な雪崩的ダイナミクスは存在しない.

4.4 本研究の目的

前節でも示したように, ネットワークが内部自由度の SOC 的なダイナミクスと相互作用しながら非自明な構造へと自己組織化するモデルはこれまでにも幾つか提唱されてきた. しかし, いずれのモデルも複雑ネットワークにおけるフラクタル性の起源やフラクタル構造とスモールワールド構造のクロスオーバーについて説明する真の意味での SOC モデルにはなっていない. 例えば, Hughes らのモデル [33] における雪崩の間欠性には特徴的時間が存在したり, Bornholdt らのモデル [34] では雪崩的ダイナミクスそのものが観測されないからである. その他のモデルも, 臨界性発現のために特別なパラメータ設定が必要であったり [29,36], 形成されたネットワークに臨界性やフラクタル性が見られない [28,30–33,36,37,84] など, ネットワーク構造の SOC ダイナミクスを記述するモデルにはなっていない. これらのモデルの中で唯一, Christensen らのモデル [15] は (論文内では雪崩の間欠性などの議論は行っていないが), 真の SOC モデルとなり得るものの, ネットワーク内のノード数は一定であるた

め, 何故そのようなネットワーク・サイズになるのかを説明できるモデルにはなっていない. 当然のことながら, 現実ネットワークにおいてはエッジ数のみならずノード数も時々刻々と変化し, 増減を繰り返している.

これらのことを考慮して, 本研究では, ノード数とエッジ数が時間とともに変化しつつ構造が自己組織化し, 形成されたネットワークがフラクタル性を示すような, ネットワーク構造に関する真の意味での SOC モデルを構築することを目的とする. また, このモデルを通じて, フラクタル構造とスモールワールド構造のクロスオーバーを説明することを試みる. この目的のため, まず第 5 章ではネットワークの構造的特徴とその上での SOC ダイナミクスの普遍クラスとの関係を調べる. 具体的には, 細胞内の触媒反応をモデル化した触媒反応ネットワーク上の SOC ダイナミクスとネットワーク構造との関係について調べた研究 [25] を説明する. ここで扱われたモデルにおいてはノード数とエッジ数は固定されているものの, ネットワークの各種不均一性が SOC ダイナミクスの普遍クラスに影響を与えないことが示されている. この結果は, 単一の SOC ダイナミクスによって多様なネットワーク構造が形成され得ることを示唆している. 第 6 章では, より普遍性が高いダイナミクスとして過負荷故障カスケードに着目し, このようなダイナミクスとネットワークの頑健性について調べた Mizutaka の研究 [39] について述べる. 最後に, 第 7 章では, 第 6 章での議論に基づき, 過負荷故障カスケード・プロセスと新規ノード参入プロセスを組み合わせた SOC モデル [38] を提唱し, このモデルによって形成されたネットワーク構造を詳細に調べることでフラクタル性発現の起源や, フラクタル構造とスモールワールド構造のクロスオーバー・メカニズムを明らかにする. この研究は, 単にフラクタル性の起源だけでなく, どのような場合にネットワークはスモールワールド構造をとり, どのような状況下ではフラクタル性が現れるのかという極めて基本的な問題に対する一つの理解を与えることにもなっている. また, 単一のダイナミクスからフラクタル・ネットワークとスモールワールド・ネットワークの双方を作り出すことができる初めてのモデルである本研究の SOC モデルは, 現実ネットワークにおいて観測されている両構造間のクロスオーバーを自然な形で説明している.

第5章　触媒反応ネットワーク上の自己組織化臨界ダイナミクス

本章では, 触媒反応ネットワーク上でみられる自己組織化臨界ダイナミクスに関する本研究の結果について説明する. まず, Awazu と Kaneko [23] によって提唱された触媒反応ネットワークを紹介し, 彼らの研究が明らかにした自己組織化臨界性について述べる. その後, Awazu と Kaneko の研究の問題点を指摘した上で, 我々の研究 [25] について説明する. ここでは, 固定されたネットワーク構造上で起こる自己組織化臨界ダイナミクスが扱われるが, その結果は, 次章以降でネットワーク構造形成ダイナミクスそのものの自己組織化臨界性を考察する際の重要な示唆を与えることになる.

5.1　細胞内反応とネットワーク

生存や成長を目的として細胞の内部で起こる数多くの化学反応は, 触媒物質 (酵素物質) が作用することで引き起こされ (触媒反応), その触媒物質もまた, 触媒反応によって生成される. このことから, 触媒反応は生物にとって非常に重要な反応であると考えられている. 実際, 原始細胞の理論的なモデルを構築するため [85–90], あるいは現実の細胞における複雑な化学反応が有する普遍的な統計的性質を明らかにするため [91] に, 複数の触媒反応からなる系が精力的に研究されている.

一般的に, 細胞は多数の化学物質種で構成されている. その内のいくつかの種類の物質は細胞膜を透過することができる (吸収あるいは排出). また, ごく少量のみしか存在しない物質種もある. しかし, そのような物質種の中には, たとえ細胞内に数

分子しか存在していなくても重要な役割を果たすものもある [92]. そのため, ある物質の細胞内での総量を連続変数として扱う近似は許されないことが多い. 実際, 分子数を離散変数として扱うモデルが精力的に研究されている [93–95]. Awazu らは, 多数の物質種と比較的少数の分子数からなる状況下での触媒反応ダイナミクスをモデル化し, これを数値的に調べることで, 連鎖反応のサイズ分布がベキ則に従うという普遍的統計則を見出した [23]. すなわち, 細胞内の触媒反応ダイナミクスにおける SOC を示した. その際, Awazu らは細胞内の複雑な触媒反応を触媒反応ネットワークとしてモデル化している. 次節では, このモデルの詳細と数値計算結果について説明する.

5.2 Awazu-Kaneko のモデル

Awazu と Kaneko は, 細胞内の複雑な触媒反応 (例えば代謝反応) を, 化学物質の種類をノードとし, それらの間の反応関係を有向エッジとする触媒反応ネットワークによりモデル化した. この有向ネットワークは以下のように構築される. まず, 化学物質種を表す 1 から N の番号が割り振られた N 個のノードからなる平均次数 K の有向ランダム・グラフを用意する. ノード i からノード j へのエッジは, 化学物質種 i から物質種 j への化学反応が存在することを意味している. エッジが有向であることから, 次数には, ノードに入ってくるエッジの本数を表す入次数 $k_{\rm in}$ と, ノードから出ていくエッジの本数を表す出次数 $k_{\rm out}$ の二種類があるが, ここではどちらの平均次数も等しい, すなわち $\langle k_{\rm in}\rangle = \langle k_{\rm out}\rangle$ とする. 次に, 各エッジにその反応の触媒物質の種類を表す番号を割り振る. 触媒となる物質も同一のネットワーク上に存在すべきであるから, この番号は既存のノード番号の中からランダムに選出する. ただし, 触媒番号の割り振りの際には, 注意が必要な点が 2 つある. 1 つは, そのエッジの両端にあるノードの番号は割り振らないという点である. これは, 通常, 反応前の物質 (基質) や反応後の物質 (生成物) 自身がその反応を促すことはないという事実を反映している. もう 1 つは, あるノードから出る複数のエッジに対して同じ番号が割り振ら

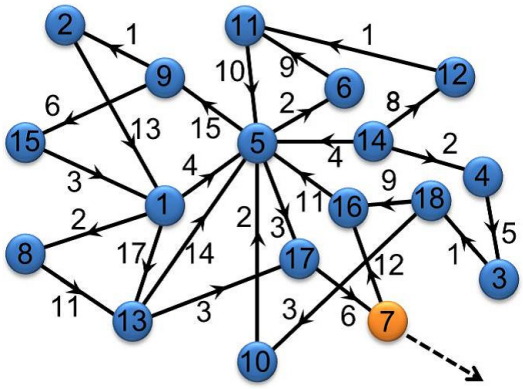

図 5.1: 触媒反応ネットワークの概念図. 各ノードが化学物質の種類, エッジが触媒反応を表す. エッジ上に割り振られた番号は, その反応に触媒として作用する物質の種類を表す. 橙色のノードは排出ノードである.

れないようにする点である. これは, ある化学反応に対する触媒は, その化学物質を基質とする反応の 1 つのみに関与するという事実に基づくものである. また, 全ノードの中から老廃物を細胞外に排出するノードをランダムに一つ指定する. このノードを排出ノードと呼ぶことにする. 触媒反応ネットワークの概念図を図 5.1 に示す.

このネットワーク上の反応ダイナミクスとして, ネットワーク上の個々の分子の反応 (移動) を考える. 時間発展も考慮した反応ダイナミクスは, 次のようにモデル化される. まず, 各時間ステップごとに, 各ノードに流入率 q でランダムに分子を流入させる. q は全てのノードに対して等しい値をとり, 時間的に変化しないものとする. ただし, 初期状態において各ノード中に分子は全く存在していないものとする. 確率的に取り込まれたこれらの分子の触媒反応ダイナミクスは, 次の条件を満たすように起こる.

- 物質 B が物質 C を触媒として物質 A に変化する反応, $B + C \to A + C$ において, 生成される A の分子数 n_A は, 基質である B の分子数 n_B と触媒である C の分子数 n_C の積に比例する.

すなわち, $n_A \propto n_B n_C$ と考える. これは, 基質と触媒が多いほど生成物も多く生成されるという, 反応速度論に則した条件である. シミュレーション上では, 各時間ステップごとにネットワーク内に存在する総分子数 n_{tot} を計算し, 分子対をランダム

に $n_{\rm tot}$ に比例する回数だけ選び, 選出の都度, 選出したペアが基質と触媒の関係にあるかを調べ, その関係にあれば, 基質となるノード中の 1 つの分子を消去して生成物となるノードに移動させる (触媒となるノード中の分子数は変化させない) [96]. なお, 反応し得る分子対が 1 組も存在しない分子数分布の状態では, いかなる分子対を選んでも反応は起きないので, 分子対の選出操作を省略することで計算時間の短縮を図る. このような系の状態を不活性状態と呼ぶことにする. これに対し, 反応し得る分子対が 1 組でも存在するような系の状態を活性状態と呼ぶ. こうして一連の反応が進むと, 初めに指定した排出ノード中に分子が生成されることがあるが, この場合はただちにその分子を消去する. この操作は, 排出ノードに新たに生成された分子はいかなる反応にも寄与せずに細胞外に排出されることに対応する. 流入率 q を調整して以上のダイナミクスを繰り返すことにより, 物質種あたりの平均分子数が 1 を下回り, かつ流入する分子数と流出する分子数がほぼ同数となる定常状態に達する. 定常状態では間欠的に一連の触媒反応の連鎖が起こるが, その連鎖反応の規模を, 活性状態が継続している時間領域内で起きた反応総数 S として定義する. Awazu らは, $10^4 \sim 10^9$ にわたるタイム・ステップの範囲でこのシミュレーションを行った.

Awazu らが行ったシミュレーションにより得られた S の分布関数 $R(S)$ の結果を図 5.2 に示す. ノード数 N は全ての結果に対して $N = 1{,}000$ である. 図中の赤線は, 平均次数 $K = 18$, 流入率 $q = 0.0003$ における結果であり, 緑の $\times$ 印は $K = 36$, $q = 0.0001$ に対する結果, 黒の破線は $K = 36, q = 0.0003$ に対する結果を表している. これより, いずれの場合も連鎖反応規模 S の分布関数 $R(S)$ がベキ指数 $\lambda = 4/3$ のベキ則に従うことが明らかである. すなわち,

$$\begin{aligned} R(S) &\propto S^{-\lambda}, \\ \lambda &= \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{5.1}$$

という結果が得られた. この結果は, q が十分に小さく, $k_{\rm c} < \langle k_{\rm in/out} \rangle \ll N$ である限り変わらない. ここで, $k_{\rm c}$ は, それ以上の値でランダム・グラフが連結となるような平均次数の値である. これまでにも見てきたように, ベキ的なサイズ分布を有する雪

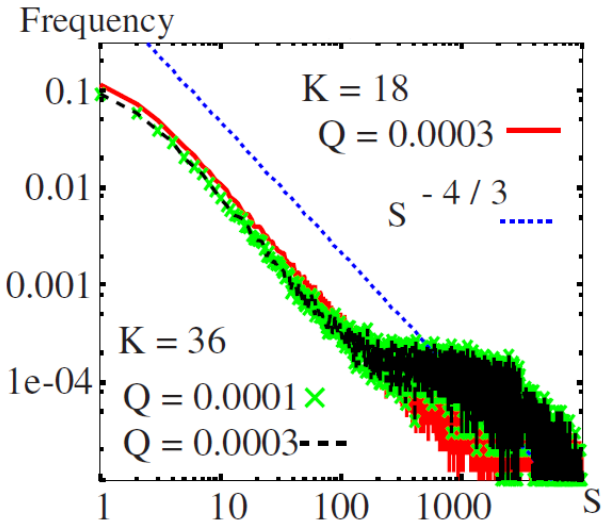

図 5.2: Awazu らによる, 連鎖反応規模の分布関数. 計算条件は本文中に示してある. 文献 [23] より引用.

崩現象は, SOC を示すダイナミクスの特徴的な振る舞いである. Awazu らは, 分子の「反応」と「輸送」からなる複合ダイナミクスである触媒反応ダイナミクスを考えることで, 触媒反応ネットワーク上で起こるダイナミクスが SOC という普遍的性質を有することを明らかにしたのである.

Awazu らの研究では, 触媒反応ネットワークの構造として, 次数の揺らぎが小さく比較的均質な (有向) ランダム・グラフを用いていた. しかし, 現実の代謝ネットワークの構造には, スケールフリー性, コミュニティ性, 次数相関などの様々な構造不均一性があることが報告されている [67, 97–102]. また, 上述のモデルでは各触媒物質が寄与する化学反応数にほとんど揺らぎがなかった. 現実には, 多くの反応に対して触媒として働く物質もあれば, そうでないものもあり, 各物質種の触媒機能には大きな揺らぎがある. これらのことからもわかるように, 現実の細胞内反応の統計的性質を議論する際には, 触媒反応ネットワークの構造的・機能的不均一性を考慮することが重要である. そこで我々は, 各種不均一性を取り入れた触媒反応ネットワーク上のダイナミクスを考えることにより, それらの不均一性が触媒反応ダイナミクスの SOC の普遍クラスに与える影響について数値的に調べた [25].

5.3 ネットワーク・モデル

我々の研究 [25] では, 現実の代謝ネットワークの構造的・機能的不均一性を考慮した代謝ネットワーク・モデル上の触媒反応ダイナミクスを扱った. 次項以降で, 各モデルについて詳しく説明する. いずれの場合おいても, 触媒反応のシミュレーション・プロセスは, Awazu らのモデルで扱われていたものと基本的には同じである. 特に注意すべき点がある場合には, その都度ふれることにする.

5.3.1 スケールフリー・ネットワーク

2000 年に Jeong らは, 大腸菌をはじめとする 43 種の生物種の代謝ネットワークにスケールフリー性があることを明らかにした [67]. 一方, 先に述べたように, Awazu らは次数の揺らぎが小さい有向ランダム・グラフを触媒反応ネットワークの構造として採用していた. そこで本研究では, 現実の細胞内反応の統計的性質を議論するため, 触媒反応ネットワークの構造として有向スケールフリー・ネットワークを採用し, スケールフリー性が触媒反応ダイナミクスの SOC の普遍クラスに与える影響について調べた. スケールフリー性を有する有向ネットワークは, 有向の一般化ランダム・グラフを用いて構築した. このとき, 入次数 k_{in} と出次数 k_{out} のそれぞれの次数分布関数は, $k_{\mathrm{in/out}} \in [k_{\min}, \infty)$ に対して, $P_{\mathrm{in}}(k_{\mathrm{in}}) = C_{\mathrm{in}} {k_{\mathrm{in}}}^{-\gamma_{\mathrm{in}}}$, $P_{\mathrm{out}}(k_{\mathrm{out}}) = C_{\mathrm{out}} {k_{\mathrm{out}}}^{-\gamma_{\mathrm{out}}}$ となる. ここで, $C_{\mathrm{in/out}}$ は規格化定数, $\gamma_{\mathrm{in/out}}$ はスケールフリー指数, $k_{\min}$ は最小次数である. ここでは, γ_{in} と γ_{out} の値は等しく, $\gamma_{\mathrm{in}} = \gamma_{\mathrm{out}} = \gamma$ であるとした. これにより, k_{in} と k_{out} に対する次数分布関数は, ともに $P(k_{\mathrm{in/out}}) = C k_{\mathrm{in/out}}^{-\gamma}$ と表すことができる. ただし, $C = 1/\sum_{k=k_{\min}}^{\infty} k^{-\gamma}$ である. 実際にネットワークを構築する際は, まずこの次数分布関数に従う k_{in} と k_{out} を N 個のノードのそれぞれに割り振る. すなわち, 各ノードに対して, k_{in} 本の入ってくるスポークと k_{out} 本の出ていくスポークが割り振られる. その後, 自己ループや同一方向の多重エッジができないよう注意しながら, 一方のノードに入るスポークともう一方のノードから出るスポークをランダムに接続してエッジを構成していく. N が十分に大きければ, 構築されるネット

ワークにコミュニティ性や次数相関が生じることはない. なお, このモデルにおいては, 入次数の平均値 $\langle k_{\rm in} \rangle$ は出次数の平均値 $\langle k_{\rm out} \rangle$ と等しく, その値は γ と $k_{\rm min}$ を与えることで一意に定まる.

5.3.2 コミュニティ性と次数相関を有するネットワーク

スケールフリー性に加えて, 現実の代謝ネットワークの多くはコミュニティ構造や次数相関を有することが知られている [97–102]. したがって, 現実の細胞内反応の統計的性質を議論する際, これらの構造的特徴が触媒反応ダイナミクスの SOC の普遍クラスに与える影響を調べることは重要である. このことから, 本研究ではコミュニティ構造や次数相関をもつ触媒反応ネットワーク上のダイナミクスについても調べた. コミュニティ構造を有するネットワークは, 次のようにして構築した. まず最初に, n 個のノードからなる有向正則ランダム・グラフを $\nu_{\rm c}$ 個用意する. 正則グラフとは全てのノードの次数が等しいネットワークをいうが, 本研究では n 個のノード全ての次数が $k_{\rm in} = k_{\rm out} = k$ となるようにした. ただし, $1 \ll k < n$ である. 続いて, これらの正則ランダム・グラフの全てのペアを, 互いに逆方向を向いた 2 本の有向エッジで接続する. このとき, まず正則ランダム・グラフ C_ν と $C_{\nu'}$ に属するノード i と i' をランダムに選出し, i から i' に向けた有向エッジを配置する. その後, 再び ν と ν' からそれぞれに属するノード j と j' をランダムに選出し, j' から j への有向エッジを配置する. この操作を全ての正則ランダム・グラフ対に対して行うことで, 所望のネットワークが作られる. ただし, 1 つの正則ランダム・グラフ内にある有向エッジの総数は, この正則ランダム・グラフと他の $\nu_{\rm c} - 1$ 個の正則ランダム・グラフの間の有向エッジ総数より十分に大きいものとする. すなわち, $nk \gg 2(\nu_{\rm c} - 1)$ とする.

このようにして作られるネットワークは, 明らかにコミュニティ性を有する. このことを定量的に示すため, 各正則ランダム・グラフ C_ν を 1 つのコミュニティとみなし, エッジの方向を無視してモジュラリティ Q を計算してみよう. (2.16) 式より, Q

は

$$Q = \frac{1}{2M} \sum_{\nu=1}^{\nu_c} \left[\sum_{i,j \in C_\nu} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2M} \right) \right] \tag{5.2}$$

と書くことができる. ここで, エッジの方向を無視したことにより, 正則ランダム・グラフ内の各ノードの次数が $2k$ となっていることに注意すると,

$$\sum_{i,j \in C_\nu} a_{ij} = 2nk \tag{5.3}$$

となる. また, エッジの総数 M は, 各コミュニティ内にあるエッジの総数とコミュニティ間を結ぶエッジの総数を足し合わせることにより,

$$\begin{aligned} M &= nk\nu_c + \nu_c(\nu_c - 1) \\ &= \nu_c(nk + \nu_c - 1) \end{aligned} \tag{5.4}$$

と表せる. さらに,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in C_\nu} \frac{k_i k_j}{2M} &= \frac{1}{2M} \left(\sum_{i \in C_\nu} k_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2M} \left[2nk + 2\left(\nu_c - 1\right) \right]^2 \\ &= \frac{2(nk + \nu_c - 1)}{\nu_c} \end{aligned} \tag{5.5}$$

と計算されるので, (5.2) 式は

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\nu_c(nk + \nu_c - 1)} \nu_c \left[2nk - \frac{2(nk + \nu_c - 1)}{\nu_c} \right] \\ &= \frac{nk}{nk + \nu_c - 1} - \frac{1}{\nu_c} \end{aligned} \tag{5.6}$$

と書き表せる. この値は $nk \gg \nu_c - 1 \gg 1$ のとき 1 に近い値をとる. したがって, この条件においてネットワークは確かに高いコミュニティ性を有することがわかる.

次数相関を有するネットワークは, 上で説明したモデルを少しだけ変更することで容易に構築することができる. 具体的には, 各正則ランダム・グラフごとにノードの次数を異なる値に設定する. すなわち, ν 番目の正則ランダム・グラフに属するノードの次数を k_ν とし, $\nu'(\neq \nu)$ 番目の正則ランダム・グラフに属するノードの次数を $k_{\nu'}(\neq k_\nu)$ とする. このとき, 各正則ランダム・グラフごとに同次数のノード対がエッジで結ばれることになるので, ネットワークが正の次数相関を有することになる.

5.3.3 触媒機能不均一性を有するネットワーク

触媒機能不均一性を有するネットワーク・モデルを説明する前に, Awazu らのモデル [23] や上述の構造的不均一性を有するモデルにおいては, 各ノードの触媒機能に大きな揺らぎがなかったことを確認しておこう. これまでに紹介したモデルでは, 各エッジに対し, 触媒物質の種類を表す番号をランダムに割り振ってきた. したがって, ある 1 つの触媒が関与する反応数 m の確率分布関数 $H(m)$ は, 二項分布

$$H(m) = \binom{M}{m} \left(\frac{1}{N-3}\right)^m \left(1 - \frac{1}{N-3}\right)^{M-m} \tag{5.7}$$

によって近似的に表すことができる. ここで, N と M はそれぞれノード数とエッジ数であり, 因子 $1/(N-3)$ は一つの化学反応 (エッジ) にその触媒が関与する確率である. この確率が $1/N$ ではなく $1/(N-3)$ であるのは, 各反応には基質 (対応するエッジの起点ノード), 生成物 (終点ノード), 老廃物となる物質種の番号は割り振れないためである. 一つのノードから出る複数のエッジには互いに異なる番号を割り振らねばならないことから, 実際には m が $N-2$ よりも大きくなることはない. しかし, (5.7) 式ではその事実を無視しているため, $H(m)$ は $N-2 < m \leq M$ でも有限となっている. 以上より, m の平均値は $\langle m \rangle = M/(N-3)$ で与えられ, $H(m)$ は $m \gg \langle m \rangle$ で指数関数的に減衰することがわかる. すなわち, 各触媒が関与する反応数には大きな揺らぎがないことがわかる.

しかしながら, 現実の触媒反応ネットワークにおいては, ウレアーゼのように少数

の反応だけを触媒する物質もあれば, アルコールデヒドロゲナーゼのように多数の反応の触媒となる物質も存在する. 言い換えると, 代謝反応系における m の分布は大きな揺らぎをもっている. その意味で, m の分布の不均一性が SOC に与える影響を調べることは重要である. この不均一性を再現するため, $H(m)$ が m のベキ関数であると仮定したモデルを調べた. 具体的には, 各エッジに対し, $i^{-\sigma'}$ に比例する確率 p_i に従って番号 i を割り振った. ただし, σ' は正の実数である. ここでも, 各反応 (エッジ) において基質と生成物となる物質種と老廃物として指定した物質種の番号は割り振らないようにする. また, 一つのノードから出る複数のエッジに対して同じ番号が割り振られないようにする. この操作により, $N(N-1)/2 \gg M \gg N$ を満たす場合には, $m \gg 1$ において

$$H(m) \propto m^{-\sigma}, \tag{5.8}$$

となる. ここで, 指数 σ は, σ' を用いて $\sigma = 1 + 1/\sigma'$ と表される. なお, この場合のネットワーク構造としては, 単純な有向ランダム・グラフを用いている. これにより, 構造的不均一性が結果にもたらす影響を排除し, 純粋に触媒機能不均一性が結果に与える影響のみを議論することができる.

5.4 連鎖反応規模の分布関数

5.4.1 構造不均一性を有する場合

ここでは, 前節で紹介したネットワーク・モデルのうち, スケールフリー性, コミュニティ性, 次数相関を有するモデルを用いた数値計算結果について述べる. 図 5.3(b) の結果以外は, 全てのモデルに対して $N = 1000$ とし, 平均次数は 18 に近い値になるようにした. これらの条件は Awazu らの研究 [23] で用いられたものと同一である. また, 流入率は $q = 3.0 \times 10^{-4}$ とし, 時間ステップごとに分子対を μn_{tot} 個選出することとした. ただし, $\mu = 40.0$ と設定した. 構造不均一性の効果のみを抽出するため, 触媒物質番号は各エッジに対してランダムに割り振っている. 連鎖反応の規模

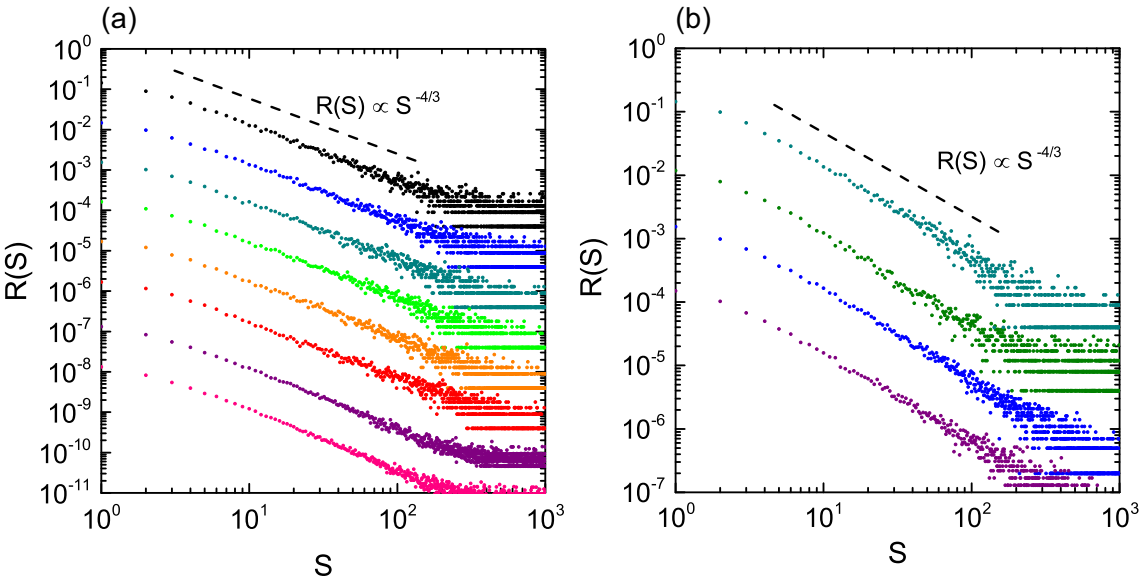

図 5.3: 各種構造不均一性を有する触媒反応ネットワークにおける連鎖反応規模 S の分布関数 $R(S)$. (a) 各プロットは, 上から順に, 有向ランダム・グラフ, $\gamma = 4.0, 3.5, 3.0, 2.8, 2.7$ の有向スケールフリー・ネットワーク, コミュニティ性を有する有向ネットワーク, 次数相関を有する有向ネットワークに対する結果を表している. 計算条件の詳細は本文に示した. (b) $\gamma = 3.5$ の有向スケールフリー・ネットワークにおいて, 各種パラメータを変化させた場合の連鎖反応規模の分布関数 $R(S)$. 計算条件は (a) に対するものと基本的に同じであるが, プロットの上から順に, N, $\langle k_{\rm in/out}\rangle$, q, μ の値だけを $N = 500$, $\langle k_{\rm in/out}\rangle = 35.65$, $q = 6.0 \times 10^{-4}$, $\mu = 80.0$ と変えている. どちらの図も, 図の見やすさのため, 各プロットは縦方向にシフトさせて表示しており, 破線は $R(S) \propto S^{-4/3}$ の傾きを表している. 文献 [25] より引用.

S は, $10^6 \leq t \leq 10^8$ に対して計算した. スケールフリー性を有する有向ネットワークに対しては, $\gamma = 4.0, 3.5, 3.0, 2.8, 2.7$ とした. それぞれにおける $k_{\rm min}$ と $\langle k\rangle$ の値は, $k_{\rm min} = 13, 11, 10, 9, 8$ および $\langle k\rangle = 18.78, 17.53, 19.03, 19.16, 18.26$ である. コミュニティ性を有するモデルにおいては, $\nu_{\rm c} = 5$, $n = 200$ および, $\langle k_{\rm in}\rangle = \langle k_{\rm out}\rangle = 18$ とした. 次数相関を有するモデルにおいても $\nu_{\rm c} = 5$, $n = 200$ としているが, それぞれの正則ランダム・グラフにおける次数は $k_1 = 14, k_2 = 16, k_3 = 18, k_4 = 20, k_5 = 22$ としている. なお, どちらのモデルにおいても, 正則ランダム・グラフ間を結ぶエッジまで含めたネットワーク全体の平均次数は $\langle k_{\rm in}\rangle = \langle k_{\rm out}\rangle = 18.02$ である.

数値的に計算した連鎖反応規模の分布関数 $R(S)$ を図 5.3(a) に示す. 比較のため,

$N = 1000$, $\langle k_{\rm in} \rangle = \langle k_{\rm out} \rangle = 18.0$ の有向ランダム・グラフに対する結果も示してある. Awazu ら [23] が示した通り, 有向ランダム・グラフにおける $R(S)$ は $S^{-4/3}$ に比例していることがわかる. 図 5.3 の結果は, 様々な構造不均一性を考慮したネットワークについても, $R(S)$ が $S^{-4/3}$ に比例することを示している. このことは, 触媒反応ダイナミクスにおける SOC の普遍クラスがネットワーク構造の不均一性の影響を受けないことを示唆している. スケールフリー・ネットワーク上の多くの臨界現象における普遍クラスが γ に依存することを考慮すると [103,104], この結果は注目に値する. ここで, ダイナミクスを特徴づけるパラメータの値の変化に対する普遍クラスの堅牢性を調べておくことも重要である. 図 5.3(b) には, N, $\langle k_{\rm in/out} \rangle$, q, μ の値を変えた場合のスケールフリー・ネットワーク ($\gamma = 3.5$) に対する $R(S)$ が示されている. これより, SOC の普遍クラスは, ネットワークの構造不均一性のみならず, パラメータの値にも依らないことがわかる. ただし, $\langle k_{\rm in/out} \rangle$ が小さすぎると $n_{\rm tot}$ が増大し続けてダイナミクスが定常に達しなくなることと, q が大きすぎると連鎖反応の間欠性が失われてしまう. すなわち, SOC ダイナミクスを実現するためには, $\langle k_{\rm in/out} \rangle$ と q の値をそれぞれ $k_{\rm c} \ll \langle k_{\rm in/out} \rangle \ll N$, $q \ll 1$ を満たすように選ぶ必要がある.

5.4.2 触媒機能不均一性を有する場合

触媒機能不均一性を有する触媒反応ネットワークに対する $R(S)$ を図 5.4 に示す. ここでは, $N = 500$, $\langle k_{\rm in} \rangle = \langle k_{\rm out} \rangle = 18.0$ としている. 1 つの触媒が関与する反応数が (5.8) 式に従うよう, 各エッジに番号が割り振られており, $\sigma = 2.5, 1.5$ に対して $R(S)$ が計算されている. 他の計算条件は図 5.3(a) の場合と同じである. また, 比較のため, 図 5.4 には触媒機能不均一性がない有向ランダム・グラフに対する結果 [図 5.3(a) における最上段のプロット] を再掲してある. 図 5.4 より, 触媒機能不均一性がある場合でも $R(S) \propto S^{-\lambda}$ のように $R(S)$ はベキ関数となることがわかる. しかし, その場合の指数 λ は, 触媒機能が均一である場合の値, $4/3$ とは明らかに異なる. 実際, $10 \leq S \leq 100$ のデータに対して最小二乗フィットを行うと, $\sigma = 2.5, 1.5$ のそれぞれについて $\lambda = 1.47 \pm 0.02, 1.60 \pm 0.02$ となった. これより, 触媒機能不均一性を

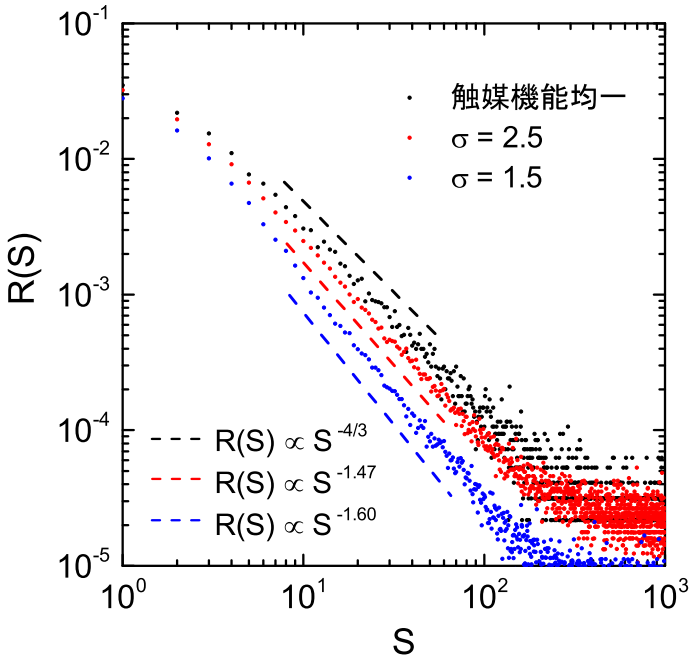

図 5.4: 触媒機能不均一性を有する触媒反応ネットワークに対する連鎖反応規模の分布関数 $R(S)$. 各プロットは, 上から順に, 触媒機能不均一性がない場合, $\sigma = 2.5, 1.5$ に対する結果を表している. 図の見やすさのため, 各プロットは縦方向にシフトさせて表示している. 各破線は, 上から順に, $R(S) \propto S^{-4/3}$, $R(S) \propto S^{-1.47}$, $R(S) \propto S^{-1.60}$ の傾きを表している. 文献 [25] の図を基にしているが, 表記法は変更されている.

考慮した場合の SOC の普遍クラスは, 考慮しない場合のものと異なることが明らかになった.

触媒機能が均一な場合と不均一な場合での普遍クラスの違いはどのように説明されるだろうか. 触媒機能が均一な有向ランダム・グラフにおける λ の値 $(= 4/3)$ は, 時刻 t に起きた反応の総数 $r(t)$ の時間発展軌跡を 1 次元単純ランダム・ウォークとみなすことで説明できる [23, 105]. この考えのもとでは, 一連の連鎖反応の継続時間 D はランダム・ウォークの再帰時間に対応することになる. したがって, ランダム・ウォークの性質から, D の分布関数 $U(D)$ は $D^{-3/2}$ に比例する. また, 平均二乗距離 $\langle r^2(t) \rangle$ を用いると, 連鎖反応規模 S は $S = \int_0^D r(t)dt \sim \int_0^D \sqrt{\langle r^2(t) \rangle} dt$ と書けるので,

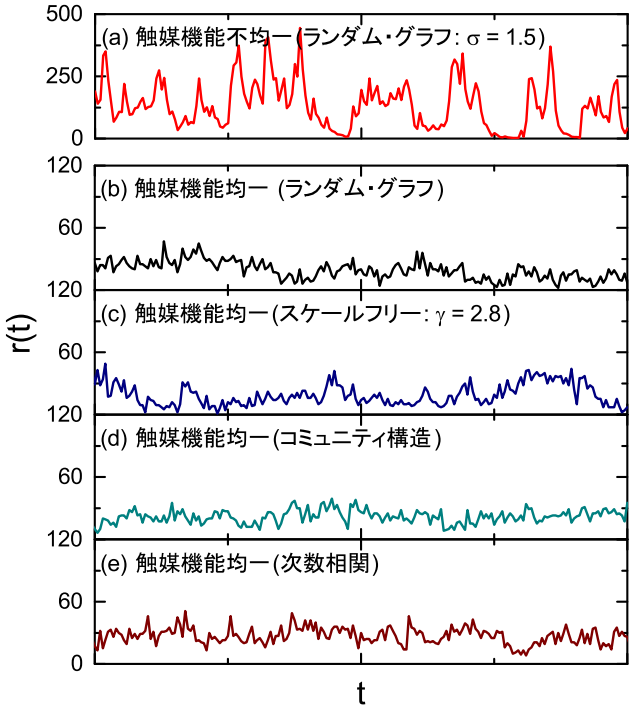

図 5.5: 反応回数 $r(t)$ の時間依存性. (a) は触媒機能不均一性 ($\sigma = 1.5$) を有する場合の結果である. (b) から (e) は触媒機能不均一性がない場合の結果であり, (b) から (e) の順に, ランダム・グラフ, $\gamma = 2.8$ のスケールフリー・ネットワーク, コミュニティ性を有するネットワーク, 次数相関を有するネットワークに対する結果である. 文献 [25] の図を基に, 表記法を変更している.

$S \propto D^{3/2}$ を得る. これらの関係より,

$$\begin{aligned} R(S) &= U(D)\frac{dD}{dS} \\ &\propto D^{-3/2} S^{-1/3} \\ &\propto S^{-4/3} \end{aligned} \tag{5.9}$$

が導かれる [23]. $r(t)$ の振る舞いをランダム・ウォークとみなす仮定は, 次のような考えに基づいている. 時刻 t における反応回数 $r(t)$ は, $t-1$ における基質と触媒の関係にある分子の組み合わせの数に比例する. また, 基質や触媒の分子数は, 反応を通じてその物質となる, あるいは他の物質に変化する分子の数によって決まる. 言い換えると, その物質に関係する反応によって生成, もしくは消費された分子の数に

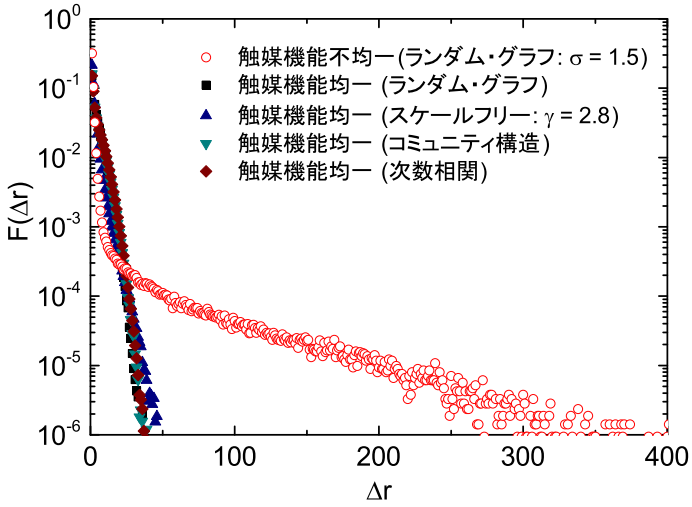

図 5.6: 反応回数変化量 $\Delta r\,[= r(t) - r(t-1)]$ の分布関数 $F(\Delta r)$. 赤い丸で表されたプロットは触媒機能不均一性 $(\sigma = 1.5)$ を有するネットワークに対する結果である. その他のプロットは全て触媒機能不均一性が無い場合の結果であり, 四角形, 三角形, 逆三角形, ダイヤ型のプロットはそれぞれランダム・グラフ, $\gamma = 2.8$ のスケールフリー・ネットワーク, コミュニティ性を有するネットワーク, 次数相関を有するネットワークに対する結果を表している. ここで用いられたネットワークの構造は, 図 5.3(a) や図 5.4 での計算に用いられたものと同一である. 文献 [25] の図を基に, 表記法を変更している.

よって決定される. さらに, それらの分子の数もまた, それらの物質を生成・消費する反応に関与する分子数によって決まる. したがって, 触媒機能不均一性がない場合には, t と $t-1$ のそれぞれにおける分子数は独立かつ複雑な非線形関係にあり, 近似的に $r(t)$ と $r(t-1)$ は無相関であるとみなせる. このような理由から, $r(t)$ の軌跡を 1 次元単純ランダム・ウォークと考えることができる.

触媒機能不均一性がある場合の $r(t)$ の軌跡も 1 次元単純ランダム・ウォークとみなせるであろうか. 図 5.5 は, 触媒機能不均一性 $(\sigma = 1.5)$ がある場合の有向ランダム・グラフと, 触媒機能が均一な場合の各種ネットワーク・モデルにおける $r(t)$ の t 依存性を比較している. 触媒機能が均一な場合はいずれも $r(t)$ の概形の統計的性質が似ているのに対し, 触媒機能不均一性がある場合には $r(t)$ の変化が大きく, その様相が大きく異なっている. この差異をより明確にするため, $r(t)$ の変化量に対する分布関数を計算した. 図 5.6 は, 触媒機能の不均一性がある場合とない場合のそれぞ

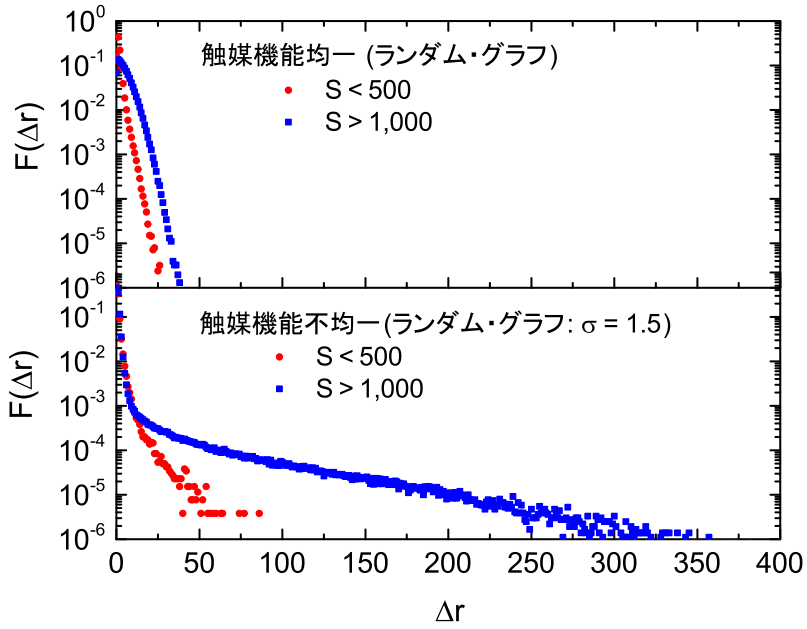

図 5.7: 連鎖反応規模が $S < 500$(赤) および $S > 1,000$(青) であるような連鎖反応内での反応回数変化量の分布関数 $F(\Delta r)$. 上段は触媒機能不均一性がないランダム・グラフに対する結果, 下段は触媒機能不均一性 $(\sigma = 1.5)$ を有するネットワークに対する結果である. 文献 [25] の図を基に, 表記法を変更している.

れにおける $r(t)$ の変化量, $\Delta r \equiv r(t) - r(t-1)$ の分布関数 $F(\Delta r)$ を示している. 触媒機能が均一な場合には $F(\Delta r)$ が指数関数的に減少している. このことは, $r(t)$ をランダム・ウォークの軌跡とみなした際の歩幅がほぼ一定であることを意味しており, 触媒機能が均一な場合の $r(t)$ をマルコフ過程による単純ランダム・ウォークと近似することの正当性を支持している. これに対し, 触媒機能不均一性がある場合の $F(\Delta r)$ は長いテールをもっている. 実際, この場合の $15 \leq \Delta \leq 200$ のデータは, 拡張された指数関数 $F(\Delta r) \sim \exp\left[-(\Delta r/0.15)^{0.27}\right]$ によってフィッティングされる. このことから, 触媒機能不均一性を有する場合の $r(t)$ の振る舞いは, 単純ランダム・ウォークと質的に異なることがわかる. 非常に大きな Δr が生まれるのは, 多くの反応を触媒する (それまでは存在していなかった) 物質種の分子が生成された, あるいは流入してきたときである. 対照的に, 触媒機能が均一であれば, 例え構造上のハブ・ノードである物質種の分子が現れたとしても, 非常に多くの反応の引き金となることはない. さらに, $F(\Delta r)$ と S の相関についても調べた. 図 5.7 の赤点と青点の結

果は, それぞれ $S < 500$, $S > 1,000$ であるような一連の連鎖反応における Δr の分布関数を示している. 触媒機能が均一な場合には $S < 500$ と $S > 1,000$ のどちらに対する分布関数もほとんど同じ概形をもつ一方, 触媒機能不均一性がある場合には2つの分布関数の概形は大きく異なり, 大規模な連鎖反応における分布関数の方が長いテールをもつ. すなわち, 触媒機能不均一性がある場合の Δr は連鎖反応の規模と相関があり, $r(t)$ の振る舞いをマルコフ過程とみなすことはできない. 以上の議論から, 触媒機能不均一性がある場合の $r(t)$ の軌跡は単純ランダム・ウォークと異なり, $\lambda = 4/3$ を導く先の理論は適用できないことがわかる.

本研究 [25] では, 触媒反応ネットワーク上で起こる SOC ダイナミクスに対してネットワークの構造的・機能的不均一性がその普遍クラスに与える影響を調べた. その結果, 各種構造的不均一性を考慮した触媒反応ネットワークにおいては, 均質な構造を仮定した Awazu らのモデル [23] と同じく $R(S) \propto S^{-4/3}$ となるのに対し, 触媒機能不均一性がある場合には, Awazu らのモデルにおけるダイナミクスとは異なる普遍クラスが得られることが明らかになった. このことは, 触媒機能に大きな揺らぎさえなければ, 様々な構造的不均一性を有する現実の触媒反応ネットワークで起こるダイナミクスであっても, Awazu らの単純なモデルで記述できることを示唆している. さらに, SOC の普遍クラスがネットワークの構造的特徴の変化に対して鈍感であるという事実は, 単一の普遍クラスに属する SOC ダイナミクスによって多様なネットワーク構造を自己組織化できる可能性を示している.

第6章　過負荷故障カスケード

本研究の目的は, ネットワーク内の内部自由度のダイナミクスとネットワーク構造が相互に影響を及ぼし合いながら自発的にフラクタルなネットワーク構造が形成される SOC モデルを構築することにある. その際, ノード数やエッジ数もダイナミクスとの相互作用によって自然な形で決まっていく. ただし, SOC ダイナミクスである以上, ネットワーク構造は臨界構造の周りで揺らぎ続かなくてはならず, ノード数やエッジ数もその定常値の周りで増えたり (ネットワークの成長) 減ったり (ネットワークの崩壊) しなければならない. ネットワークの成長に関しては, 新規ノードの参入というプロセスで実現できる. 一方, ネットワーク崩壊の原因には様々なものが考えられる. 本研究では, 現実的な過程である過負荷故障カスケードを崩壊プロセスとして採用する. 近年, Mizutaka と Yakubo [39] は, 過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑健性について理論的に調べた. この研究で用いられたモデルには, 過負荷故障カスケードがネットワーク全体に及ぶか否かを左右するパラメータが存在する. 新規ノードの参入と過負荷故障カスケード過程をうまく組み合わせることで, このパラメータが自発的に臨界値に向かうような機構を考えることができれば, 所望の SOC モデルを構築できる可能性がある. 本章では, まず過負荷故障カスケードの概要を説明し, その後に Mizutaka らの研究 [39] について述べることにする.

6.1　機能性ネットワークと故障に対する頑健性

現実の多くの機能性ネットワークは, ノード間の大域的な繋がりによってその機能が維持されている. 故障によってこの大域的な繋がりが消失すると, ネットワークは深刻な機能障害を起こすことになる. このため, どのようなネットワーク構造が故障に対

して頑健であるかを明らかにすることは非常に重要である. このような観点から, ネットワークの故障に対する頑健性が従来より盛んに研究されている [77, 104, 106–110]. 頑健性を評価する指標として, 大域的な連結性を失うのに必要な母体のネットワークからのノード (あるいはエッジ) の最小除去率, すなわちパーコレーション転移点が最もよく用いられている. Cohen ら [77] は, 次数相関のない複雑ネットワーク上のパーコレーション問題を初めて理論的に扱った. この研究では, 母体となるネットワークから一定割合 f だけノードをランダムに削除するパーコレーション過程 (ランダム故障) を考え, 転移点を与えるランダム故障確率 $f_{\rm c}$ を計算した. その結果, 母体ネットワーク G の次数分布関数の 1 次モーメント $\langle k\rangle_G$ と 2 次モーメント $\langle k^2\rangle_G$ を用いることにより, ランダム故障確率 $f_{\rm c}$ は

$$f_{\rm c} = 1 - \frac{1}{\dfrac{\langle k^2\rangle_G}{\langle k\rangle_G} - 1} \tag{6.1}$$

で与えられることが明らかになっている [77]. (6.1) 式より, 臨界削除率 $f_{\rm c}$ は母体ネットワークの 1 次および 2 次モーメントのみから決まることが分かる. 特に, スケールフリー指数 γ が $2 < \gamma \leq 3$ であるようなスケールフリー・ネットワークでは 2 次モーメントが発散することから, $f_{\rm c} = 1$ となる. このことは, ほぼ全てのノードを除去しない限り, ネットワークの大域的連結性が失われないことを意味している. すなわち, γ が $2 < \gamma \leq 3$ のスケールフリー・ネットワークはランダム故障に対して極めて頑健である. ここで扱われたランダム削除は, インターネットやルーター等のランダムな故障に対応している.

一方, 戦争やテロによる攻撃を想定し, 最大次数をもつノードから順に削除する過程をターゲット攻撃と呼ぶ. この過程は, 人間の交際関係のネットワークにおいて交友関係の広い (ハブとなる) 人物から順にワクチンを投与する感染症の防疫にも対応している. ターゲット攻撃によるネットワークのパーコレーション問題は, Callaway ら [106] と Cohen ら [107] によって独立に理論解析が行われた. スケールフリー指数が γ のスケールフリー・ネットワークにおいて, 高次数ノードから割合 f だけノー

ドを削除するパーコレーション過程の臨界ノード削除率 $f_{\rm c}$ に関して

$$f_{\rm c}^{(\gamma-2)/(\gamma-1)} = k_{\rm min}\frac{\gamma-2}{\gamma-3}\left[f_{\rm c}^{(\gamma-3)/(\gamma-1)}-1\right]+2 \tag{6.2}$$

が得られ, この超越方程式を数値的に解くことで $f_{\rm c}$ が求まる [107]. ここで, $k_{\rm min}$ は母体のスケールフリー・ネットワークの最小次数である. (6.2) 式を数値的に解いて得られる $p_{\rm c}$ の γ 依存性を調べることにより, γ の全領域で 1 パーセントに満たないノード除去割合で大域的連結性が失われることが明らかになっている. このことは, スケールフリー・ネットワークがターゲット故障に対して脆弱であることを意味している.

現実ネットワークの故障過程は, 常にランダム故障やターゲット故障に従うわけではない. 故障過程には様々なものがあるが, 多くの現実ネットワークに見られる故障過程として, 連鎖故障が挙げられる. インターネット, 電力網, 企業間取引ネットワーク等, 何らかの機能を有する現実ネットワークにおいては, ネットワーク上を何らかの物理量が流れることによってその機能が発現している. 上に挙げたネットワークの場合, それぞれパケット流, 電流, 貨幣・商品の流通がその機能を支えている. 一方で, これらの流れはネットワークにとって負荷にもなり, 負荷が許容値を超えるとネットワークの大規模な機能停止を誘引することにもなる. もし, 過負荷によってネットワークの一部が故障を起こすと, そこを流れていた負荷はネットワーク上を迂回し, 他の正常な経路に集中することによって新たな故障を引き起こす可能性がある. これが連鎖すると, ネットワークの大部分が故障してしまうような大規模損傷が起こりかねない. 現代社会において, 上述のような機能性ネットワークの大規模故障が我々の生活に与える影響は計り知れない. このような観点から, 連鎖故障に対するネットワークの頑健性を調べることは非常に重要である. 2002 年に Motter と Lai [112] は, あるノードにかかる負荷をそのノードの媒介中心性 [111] で表したモデルを提唱し, ネットワークの頑健性を評価した. 媒介中心性とは, ネットワーク内の全てのノード対を結ぶ最短経路が特定のノードを通る回数を意味している. すなわち, Motter らのモデルでは, ネットワーク内の全てのノード対間に最短経路を通る一

定量の流れが存在していることを仮定している. この過程の下では, 媒介中心性が高いノードほど流れ (負荷) が集中していることになり, 現実をある程度反映していると考えられる. 高次数ノードの除去は大規模なカスケードを引き起こすため, スケールフリー・ネットワークは均質なネットワークに比べると過負荷故障カスケードに対して脆弱であることが, このモデルによって示された [112]. スケールフリー・ネットワークの脆弱性は, 他のカスケード故障モデルでも指摘されている [113–118]. これらのモデルに共通した特徴は, ネットワーク構造から定まる負荷の平均値が各ノードの耐性を超えることによって過負荷故障が引き起こされるという点である. しかしながら, 通常, 各ノードにかかる負荷量は時間とともに揺らいでいる [119–121]. このような場合における過負荷故障は, 時間変動する負荷のある時刻における瞬間値がノードの耐性を超えることで起きる. その際の過負荷故障カスケードの性質は, 時間的揺らぎの無い平均負荷量により引き起こされるものと大きく異なる可能性がある. 2015 年に Mizutaka と Yakubo は, 時間的に変動する負荷が引き起こす過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑健性を調べた [39]. 次節以降では, 本研究の内容と密接に関係する Mizutaka らの研究 [39] について説明する.

6.2 過負荷故障カスケードのランダムウォーカー・モデル

Mizutaka らの研究では, 時間的に変動するネットワーク上の負荷の振る舞いを Kishore らによって提唱されたランダムウォーカー・モデルによって記述した [122,123]. ここでは, ランダムウォーカー・モデルに基づいた過負荷故障カスケードに対する Mizutaka らのモデル [39] とそれにより得られた結果について述べる.

6.2.1 ネットワーク上の負荷とモデル

ランダムウォーカー・モデル [122,123] では, ネットワーク上の負荷をそのネットワーク上を移動するランダムウォーカーによってモデル化する. このモデルでは, ウォーカーの数が負荷の大きさに対応する. Noh らの研究 [124] によれば, エッジ数

M_0 の連結した無向ネットワークにおいて, 次数 k のあるノードに 1 つのウォーカーを見出す定常確率 p_k は,

$$p_k = \frac{k}{2M_0} \tag{6.3}$$

となる. このネットワーク上に W_0 個のランダムウォーカーが存在する場合 (すなわち, 総負荷量が W_0 の場合), 各ランダムウォーカーは独立に運動するので, 定常状態において次数 k のあるノードに w 個のウォーカーを見出す確率 $h_k(w)$ は, 二項分布

$$h_k(w) = \binom{W_0}{w} {p_k}^w (1-p_k)^{W_0-w} \tag{6.4}$$

によって表される. したがって, 次数 k のノード上の平均ウォーカー数 $\langle w \rangle_k$ とその標準偏差 σ_k は, それぞれ $\langle w \rangle_k = W_0 p_k$, $\sigma_k = \sqrt{\langle w \rangle_k (1-p_k)}$ で与えられる. このとき, 次数 k のノードの負荷に対する耐性 q_k は,

$$q_k = \langle w \rangle_k + m\sigma_k \tag{6.5}$$

と設定するのが自然である. ここで, m は負荷に対するノードの耐性を特徴づける正の実数パラメータであり, 耐性パラメータと呼ばれる. あるノード上のウォーカー数 w が, そのノードの耐性 q を超えると, そのノードは過負荷故障を起こすと考える. したがって, 次数 k のノードの過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ は, w が q_k を超える確率に他ならない. この確率 $F_{W_0}(k)$ は, (6.4) 式で表される分布関数 $h_k(w)$ を q_k より大きな w について足し合わせることで得られる. すなわち,

$$\begin{aligned} F_{W_0}(k) &= \sum_{w=\lfloor q_k \rfloor + 1}^{W_0} \binom{W_0}{w} {p_k}^w (1-p_k)^{W_0-w} \\ &= I_{k/2M_0}(\lfloor q_k \rfloor + 1, W_0 - \lfloor q_k \rfloor) \end{aligned} \tag{6.6}$$

となる [122]. ただし, $I_p(a,b)$ は正則化された不完全ベータ関数である [125]. また, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す. 図 6.1 に示すように, (6.6) 式で表される過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ は k の減少関数である [122]. すなわち, このモデルでは次数の低

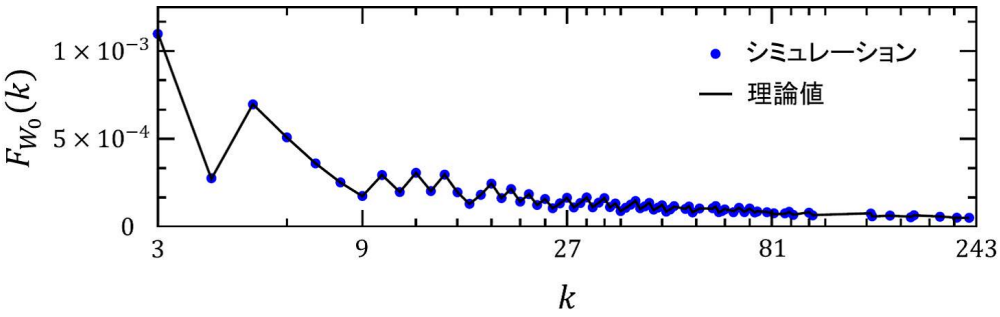

図 6.1: 過負荷故障確率の次数依存性．実線は理論値，シンボルはシミュレーションによる結果を表している．シミュレーションは，ノード数 $N = 5,000$ ，エッジ数 $M_0 = 19,815$，スケールフリー指数 $\gamma = 2.2$ のスケールフリー・ネットワークにおける 100 通りのウォーカー配置に対して行われている．ウォーカー数と耐性パラメータは，それぞれ $W_0 = 2M_0$，$m = 4.0$ としている．図は文献 [122] から引用し，表記法を変更している．

いノードほど過負荷故障を起こしやすいことになる．

上記の過負荷故障のモデルを用いて，Mizutaka ら [39] は過負荷故障カスケード過程を次のようにモデル化した．

(i) N_0 個のノードと M_0 本のエッジからなり，次数相関が無く，連結な無向ネットワーク $\mathcal{G}_0$ を初期ネットワークとして用意する．このネットワーク上には W_0 個のウォーカーが存在し，各ノードの耐性は (6.5) 式に従って決められているものとする．

(ii) カスケード故障の各ステップ τ において，総負荷量 W_τ をそのときのネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ のサイズに応じて

$$W_\tau = \left(\frac{M_\tau}{M_0}\right)^r W_0 \tag{6.7}$$

のように更新する．ここで，M_τ は $\mathcal{G}_\tau$ のエッジ数，r は正の実数値をとるパラメータである．

(iii) 各ノードの過負荷故障確率 $F_{W_\tau}(k)$ を計算し，その確率に従って $\mathcal{G}_\tau$ からノードを除去する．

(iv) (ii) と (iii) の操作を，(iii) で除去されるノードが無くなるまで繰り返す．

操作 (ii) では, ネットワーク・サイズの減少割合に応じて総負荷量 W_τ を低減させている. この操作は, ネットワークの機能維持を目的とした現実のカスケード故障における同様の操作をモデル化している. 例えば, 自然災害などにより電力網の一部が故障を起こし停電したとする. このとき, 一時的な電力の使用制限を行うことにより, 電力網全体に停電が広がることを防ぐ措置がとられることがある. また, ある企業や銀行の倒産・破綻が企業間取引ネットワーク上の大規模な連鎖倒産につながることを防ぐため, しばしば公的資金の投入による負債の低減が図られることもある. これらの例はいずれも, ネットワーク・サイズに合わせた総負荷量の調節によって, 大規模な機能停止を起こさないようにするための措置である. (6.7) 式は, このような総負荷量の調節操作を表している. また, (6.7) 式における r は, ネットワーク・サイズの減少に合わせて総負荷量を如何に速く低減させるかを特徴づけるパラメータであり, 以下では負荷低減パラメータと呼ぶ. 初期ネットワーク $\mathcal{G}_0$ が連結であっても, カスケード・ステップ τ におけるネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ は必ずしも連結ではない. 連結でないようなネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ に対しては, W_τ 個のウォーカーは各クラスターに対しそれぞれのエッジ数に比例して分配されると仮定する. すなわち, クラスター α に割り当てられる負荷量 W_τ^α は

$$W_\tau^\alpha = \frac{M_\tau^\alpha}{M_\tau} W_\tau \tag{6.8}$$

で与えられる. ここで, M_τ^α は $\mathcal{G}_\tau$ におけるクラスター α に含まれるエッジ数である.

操作 (iii) では, (6.6) 式をそのまま用いてカスケード中の過負荷故障確率を計算することはできない. まず第一に, 耐性が決められる際のノードの次数と過負荷故障を起こすときの次数とは異なる点に注意しなければならない. 初期ネットワーク $\mathcal{G}_0$ 内の次数 k_0 のあるノードが, カスケード中のネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ において k の次数になったとしよう. このノードの耐性は $\mathcal{G}_0$ において既に決められているので, (6.6) 式中の q_k は q_{k_0} とする必要がある. しかし, ネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ におけるこのノード上にウォーカーが存在する確率は k に比例するので, (6.6) 式の q_k 以外の k は k_0 ではなく k でなければならない. さらに, ランダム・ウォーカーが各クラスター間を移動で

きないことを考慮して, $\mathcal{G}_\tau$ が連結でない場合には各クラスターごとの過負荷故障確率を計算する必要がある. 以上の点を考慮すると, クラスター α に属し, 初期次数が k_0 で現在次数が k であるようなノードのカスケード・ステップ τ における過負荷故障確率 $F_{W_\tau^\alpha}(k_0, k)$ は,

$$F_{W_\tau^\alpha}(k_0, k) = I_{k/2M_\tau^\alpha}(\lfloor q_{k_0}(W_0) \rfloor + 1, W_\tau^\alpha - \lfloor q_{k_0}(W_0) \rfloor) \tag{6.9}$$

と表されなければならない.

過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑健性は, カスケード終了後における巨大連結成分の相対的なサイズ $S_\mathrm{f} \equiv N_\mathrm{f}/N_0$ によって評価する. ただし, N_f はカスケードの最終段階のネットワーク $\mathcal{G}_\mathrm{f}$ における最大クラスターのノード数である. より正確に言えば, $r > r_\mathrm{c}$ において S_f が有限であり, $r < r_\mathrm{c}$ では $S_\mathrm{f} = 0$ となるような負荷低減パラメータの値 r_c(臨界負荷低減パラメータ) によってネットワークの頑健性が評価される. r_c が小さいということは, ネットワークのサイズ減少に対して総負荷量を緩やかに減衰させているにもかかわらず, カスケード後にも巨大な連結成分が故障せずに残ることを意味する. したがって, 臨界負荷減衰パラメータ r_c が小さいネットワークほど, 過負荷故障カスケードに対して頑健であると考えることができる.

6.2.2 臨界負荷低減パラメータの理論解析

Mizutaka ら [39] は, 母関数の議論と任意抽出したエッジの両端ノードの次数がそれぞれ k と k' である同時確率に対するマスター方程式から, カスケード終了後における巨大連結成分の相対サイズを見積もった. Newman らの研究 [52] によれば, 次数分布関数が $P_\tau(k)$ であり次数相関のない無向ネットワークにおける巨大連結成分の相対サイズ S_τ は,

$$S_\tau = 1 - \sum_k P_\tau(k) u^k \tag{6.10}$$

と計算される. ここで, u は超越方程式

$$u = G_1^{(\tau)}(u) \tag{6.11}$$

における非負かつ最小の解であり, $G_1^{(\tau)}(x)$ は, $\langle k \rangle_\tau \equiv \sum_k k P_\tau(k)$ として,

$$G_1^{(\tau)}(x) = \frac{1}{\langle k \rangle_\tau} \sum_k (k+1) P_\tau(k+1) x^k \tag{6.12}$$

で定義される母関数である. 6.2.1 節で説明したカスケード過程は, 新たな次数相関を生む過程ではないので, 初期ネットワーク $\mathcal{G}_0$ に次数相関がないのであれば, カスケード中のネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ やカスケード後のネットワーク $\mathcal{G}_\mathrm{f}$ にも次数相関はない. そのため, (6.10) 式の $P_\tau(k)$ をカスケード中のネットワーク $\mathcal{G}_\tau$ の次数分布関数と考えれば, この式は $\mathcal{G}_\tau$ の巨大連結成分の相対サイズ S_τ を与えることになる. $P_\tau(k)$ は, $\mathcal{G}_\tau$ から任意抽出されたノードの次数が k であり初期次数 k_0 である確率 $\Pi_\tau(k_0, k)$ を用いると,

$$P_\tau(k) = \sum_{k_0 \geq k} \Pi_\tau(k_0, k) \tag{6.13}$$

と表すことができる. 確率 $\Pi_\tau(k_0, k)$ は, マスター方程式

$$\Pi_\tau(k_0, k) = \sum_{k' \geq k} \Pi_{\tau-1}(k_0, k') \left\{ \binom{k'}{k} \phi_{\tau-1}^{k'-k} \left(1 - \phi_{\tau-1}\right)^k \left[1 - F_{W_{\tau-1}}(k_0, k')\right] + \delta_{k0} F_{W_{\tau-1}}(k_0, k') \right\} \tag{6.14}$$

から計算される. ここで ϕ_τ は $\mathcal{G}_\tau$ の中から任意抽出されたノードに隣接する一つのノードが過負荷故障を起こす確率であり, $\mathcal{G}_\tau$ に次数相関が無い場合は,

$$\phi_\tau = \sum_{k_0} \sum_{k'=1}^{k_0} P_\tau(k'|k) \frac{\Pi_\tau(k_0, k')}{P_\tau(k')} F_{W_\tau}(k_0, k') \tag{6.15}$$

で与えられる. ここで, $P_\tau(k'|k)$ は $\mathcal{G}_\tau$ において次数 k のノードに隣接するノードが次数 k' をもつ条件付き確率である. (6.15) 式からも分かるように, ϕ_τ は任意抽出したノードの次数に依存しない. (6.14) 式の右辺のサマンドは, ネットワーク $\mathcal{G}_{\tau-1}$ の

中の次数 k' のノードが次数 k になる確率を表している. 特に第一項目は「次数 k' のノードは過負荷故障を起こさないが, そのノードに隣接する k' 個のノードの内 $k'-k$ 個が過負荷故障を起こして削除される確率」を意味しており, 第二項目は「次数 k' のノード自身が過負荷故障を起こす確率」を表している. マスター方程式 (6.14) 式を初期条件

$$\Pi_0(k_0, k) = P_0(k)\delta_{k_0 k} \tag{6.16}$$

の下で数値的に解くことで, カスケードの終状態における $\Pi_{\mathrm{f}}(k_0, k)$ が求められる. (6.13) 式に得られた $\Pi_{\mathrm{f}}(k_0, k)$ を代入すれば終状態での次数分布関数 $P_{\mathrm{f}}(k)$ が計算でき, これを使うことで最終的に (6.10) 式から S_{f} を求めることができる. マスター方程式の逐次解法の際のカスケード終了条件は, 過負荷故障カスケードを起こすノード数の期待値が 1 個未満であること, すなわち,

$$N_0 \sum_{k,k_0} F_{W_\tau}(k_0, k)\Pi_\tau(k_0, k) < 1 \tag{6.17}$$

によって与えられる. ただし, 過負荷故障確率 $F_{W_\tau}(k_0, k)$ を計算する際, ランダム・ウォーカーがクラスター間を移動できるものと近似し, W_τ^α ではなく W_τ を用いる. この近似の精度については, Mizutaka らの論文 [39] に詳しく述べられている.

6.2.3 スケールフリー・ネットワークの頑健性

カスケード終了時における巨大連結成分の相対サイズ S_{f} の負荷低減パラメータ r 依存性から過負荷故障カスケードに対するネットワークの頑健性が評価できる. 図 6.2 には, Erdös-Rényi ランダム・グラフとスケールフリー・ネットワークに対する S_{f} の r 依存性が示されている. スケールフリー・ネットワークは次数分布 $P_0(k)$ が

$$P_0(k) = \begin{cases} \dfrac{C}{k^\gamma + d^\gamma}, & (k \geq k_{\min}) \\ 0, & (k < k_{\min}) \end{cases} \tag{6.18}$$

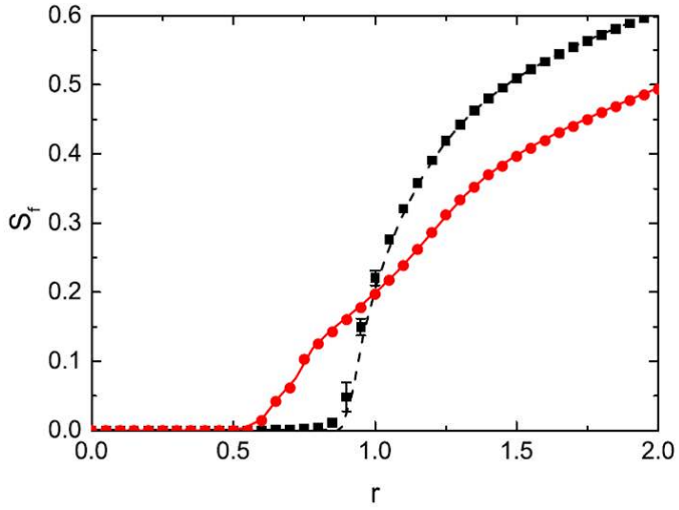

図 6.2: 過負荷故障カスケード終了時の巨大連結成分の相対サイズ S_{f} の負荷低減パラメータ r 依存性. 黒の破線と四角形シンボルはランダム・グラフに対する結果, 赤の実線と丸シンボルは $\gamma = 2.5$ のスケールフリー・ネットワークに対する結果である. それぞれにおける破線と実線は解析計算による結果である. 一方, 四角形と丸のシンボルはシミュレーションによる結果であり, 50 サンプルに渡る平均がとられている. 初期総負荷量と耐性はそれぞれ $W_0 = 2M_0$, $m = 2.0$ としている. 図は文献 [39] から引用.

に従う一般化ランダム・グラフである. ここで, d は正の実数値をとるパラメータであり, $P_0(k)$ は $k \gg d$ において $P_0(k) \propto k^{-\gamma}$ となる. また, $k_{\min}$ は最低次数, C は規格化定数である. γ をある値に固定したとき, 平均次数 $\langle k \rangle_0$ は d と $k_{\min}$ によって定まる. 図 6.2 の計算では, $\gamma = 2.5$, $k_{\min} = 2$ としている. ノード数 N_0 とエッジ数 M_0 はそれぞれ $N_0 = 10^4$, $M_0 = 2 \times 10^4$ としており, これはランダム・グラフの場合も同じである. すなわち, どちらのネットワークも平均次数は $\langle k \rangle_0 = 4.0$ である. スケールフリー・ネットワークにおける d の値は, (6.18) 式から $\langle k \rangle_0 = 4.0$ を満たすように決められる. 図 6.2 より, いずれのネットワークに対しても解析計算による結果が数値計算による結果とよく一致していることが分かる. また, $S_{\mathrm{f}} = 0$ と $S_{\mathrm{f}} > 0$ を分ける閾値 $r_{\mathrm{c}}(N_0)$ が存在し, $r < r_{\mathrm{c}}(N_0)$ で $S_{\mathrm{f}} = 0$, $r \geq r_{\mathrm{c}}(N_0)$ で $S_{\mathrm{f}} > 0$ となることが分かる. さらに, スケールフリー・ネットワークにおける $r_{\mathrm{c}}(N_0)$ の値がランダム・グラフでの値に比べて小さいことから, スケールフリー・ネットワークはランダム・グ

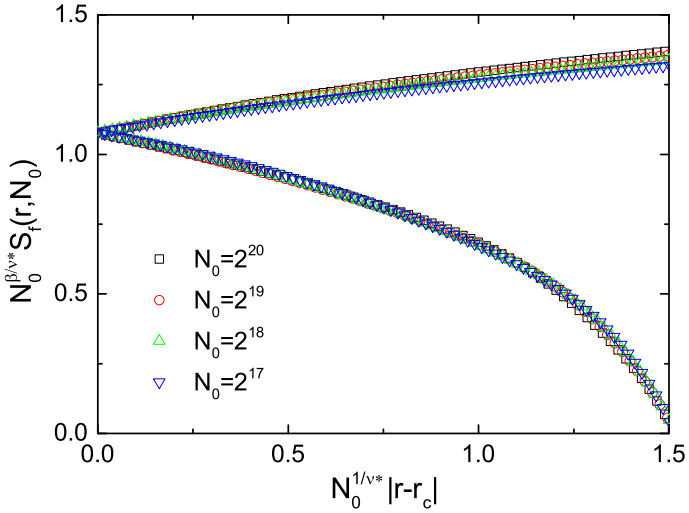

図 6.3: $N_0 = 2^{17}, 2^{18}, 2^{19}, 2^{20}$ のランダム・グラフに対する有限サイズ・スケーリング. 平均次数は $\langle k \rangle_0 = 4.0$ としている. また, $W_0 = N_0 \langle k \rangle_0$, $m = 2.0$ である. フィッティング・パラメータは, それぞれ $r_c = 1.84$, $\beta = 1.27$, $1/\nu^* = 19.45$ としている. 図は文献 [39] から引用.

ラフに比べて過負荷故障カスケードに対して頑健であることが示唆される. これは, スケールフリー・ネットワークが過負荷故障カスケードに対して脆弱であることを示した従来研究 [112–118] とは正反対の結果である.

上記の計算は有限サイズのネットワークに対して行われたものである. したがって, 熱力学極限 ($N_0 \to \infty$) でもスケールフリー・ネットワークが過負荷故障カスケードに対して頑健であることを示すことが重要である. そのために, まず転移点 r_c 近傍でのネットワークの振る舞いを調べてみよう. N_0 が無限大の場合において, $r = r_c(N_0)$ での S_f の変化が臨界的であるならば, 熱力学極限に対する r_c の計算に有限サイズ・スケーリング解析を用いることができる. スケーリング仮説によれば, 臨界近傍のネットワークは

$$S_f(r, N_0) = N_0^{-\beta/\nu^*} \Phi\left(N_0^{1/\nu^*} |r - r_c| \right) \tag{6.19}$$

なる式に従う. ここで, $\Phi(x)$ はスケーリング関数であり, ν^* は無限系において相関長の範囲内に含まれるノード数 $N_\xi \propto |r - r_c|^{-\nu^*}$ の発散を特徴づける指数, β は $S_f(r, \infty)$ の立ち上がりを特徴づける指数である. これより, ν^*, β, r_c として適切な値が選ばれ

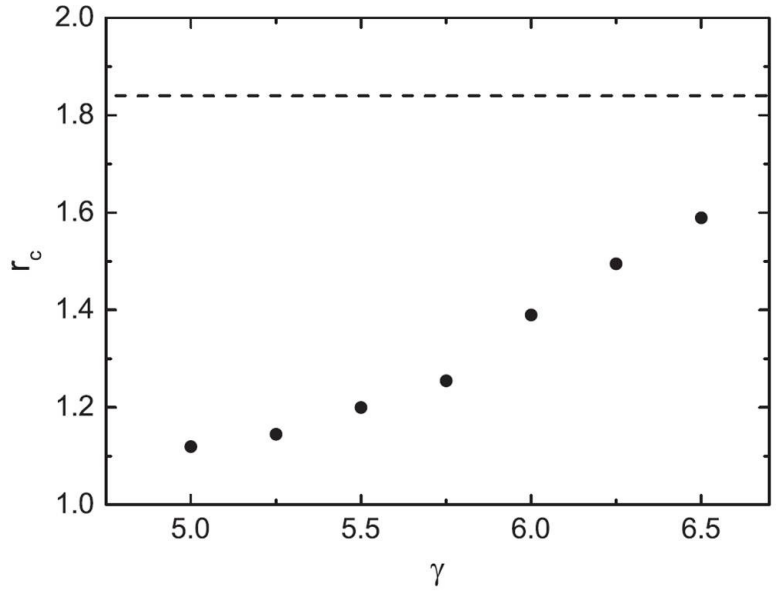

図 6.4: 熱力学極限における臨界負荷低減パラメータ r_c のスケールフリー指数 γ 依存性. 各 γ に対して, (6.18) 式中の d は $\langle k \rangle_0 = 4.0$ となるように調節されている. r_c の値は, $W_0 = N_0 \langle k \rangle_0$, $m = 2.0$ とした際の $S_f(r, N_0)$ の有限サイズ・スケーリングから見積もられている. 破線は $\langle k \rangle_0 = 4.0$ のランダム・グラフ ($\gamma \to \infty$) に対する結果である. 図は文献 [39] から引用.

ると, 様々な r と N_0 の値に対して, $N_0^{1/\nu^*}|r - r_c|$ の関数としての $N_0^{\beta/\nu^*} S_f(r, N_0)$ は同一曲線上に乗ることになる. 図 6.3 には, 幾つかの異なるサイズのランダム・グラフに対して計算された $N_0^{\beta/\nu^*} S_f(r, N_0)$ の $N_0^{1/\nu^*}|r - r_c|$ 依存性が示されている. 図 6.3 より, 全てのデータ点が同一曲線上に乗っていることから, $r = r_c(N_0)$ での転移が臨界的であると考えることができる. 同様の振る舞いは, スケールフリー・ネットワークにおいても確認されている. 図 6.4 は, 上記有限サイズ・スケーリングから求めた熱力学極限での r_c をスケールフリー指数 γ の関数としてプロットしたものである. この計算では, 初期の次数分布関数が (6.18) 式に従い, 平均次数が $\langle k \rangle_0 = 4.0$ であるようなスケールフリー・ネットワークが用いられている. 図 6.4 より, r_c は γ の増加関数であることが分かる. このことは, スケールフリー性が強いほど r_c が小さくなることを意味している. したがって, 有限系のみならず, 無限系においてもスケールフリー・ネットワークは過負荷故障カスケードに対して頑健であるといえる.

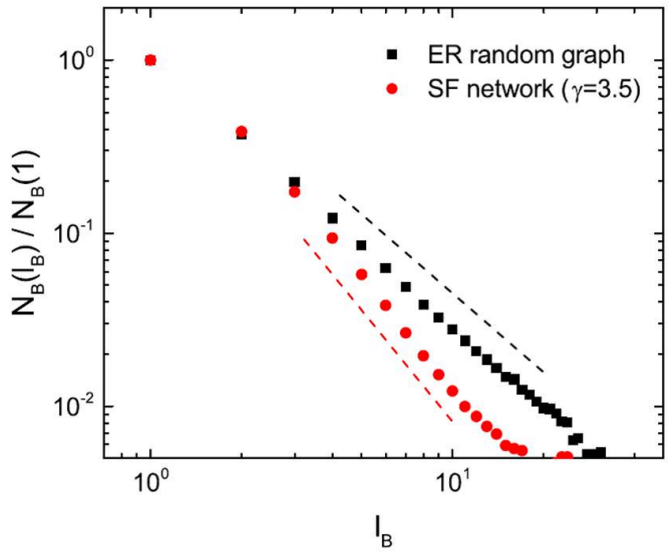

図 6.5: $r = r_c$ におけるカスケード後のネットワーク $\mathcal{G}_f$ に対する $N_B(l_B)$. 黒の四角形プロットはランダム・グラフに対する結果, 赤の丸シンボルは $\gamma = 3.5$ のスケールフリー・ネットワークに対する結果を表している. どちらのネットワークも, ノード数は $N_0 = 10^4$, 平均次数は $\langle k \rangle_0 = 4.0$ であり, 総負荷量と耐性パラメータはそれぞれ $W_0 = N_0 \langle k \rangle_0$, $m = 2.0$ としている. また, 結果は 100 サンプルに渡って平均されたものである. なお, 縦軸は $N_B(1)$ でリスケールされている. 図は文献 [39] から引用.

$r = r_c$ での転移が臨界的であるという事実は, $r = r_c$ のカスケードの直後のネットワークにフラクタル性が発現することを示唆する. Mizutaka らは, 3.2.1 節および 3.2.2 節で説明したボックスカバリング法を用いることより, $r = r_c$ でのカスケード後のネットワーク $\mathcal{G}_f$ のフラクタル性を評価した. その際, $N_B(l_B)$ を求める方法として, Compact-box-burning(CBB) アルゴリズム [126] が用いられているが, このアルゴリズムの詳細については次章で述べることにする. 図 6.5 に, ランダム・グラフと $\gamma = 3.5$ のスケールフリー・ネットワークに対して $r = r_c$ とした場合の $\mathcal{G}_f$ の巨大連結成分における $N_B(l_B)$ を示す. これより, いずれのネットワーク対しても $N_B(l_B)$ は (3.11) 式で表される関係を満たしており, どちらのネットワークもフラクタル構造をとることが分かる. また, フラクタル次元 d_B は, ランダム・グラフに対して $d_B = 1.54 \pm 0.01$, スケールフリー指数が $\gamma = 3.5$ のスケールフリー・ネットワークに対して $d_B = 2.13 \pm 0.02$ と見積もられている.

第7章　ネットワークの自己組織化臨界ダイナミクスとフラクタル性

前章では, 過負荷故障カスケード過程において, カスケードがネットワーク全体に及ぶか否かを分ける臨界負荷低減パラメータ r_{c} が存在することを説明した. また, $r = r_{\mathrm{c}}$ で起こるカスケード直後のネットワークがフラクタル性を有することも示した. これらの事実を考えると, ノードの新規参入と過負荷故障カスケードを組み合わせた時間発展ダイナミクスの中で何らかの要因で負荷低減パラメータ r が自発的に r_{c} に近づくようにすれば, 成長と崩壊を繰り返しながらフラクタル構造に自己組織化するネットワークの SOC モデルを構築できる可能性がある. 本章では, まず本研究で扱うモデルの詳細について述べ, このモデルのダイナミクスに SOC 特有の特徴が現れることを確認する. 続いて, このモデルによって形成されるネットワークにおけるフラクタル性の有無を調べる. 最後に, SOC の発現条件について議論する.

7.1　ネットワーク・ダイナミクス

本研究で扱うモデルは, 前章で紹介した Mizutaka らの過負荷故障カスケード・モデル [39] を基礎とし, これにノードの新規参入プロセスを加えたものである. $W_0 \propto M_0$ とすると, (6.6) 式で表される過負荷故障確率 $F_{W_0}(k)$ は, M_0 にほとんど依存しない. しかしながら, 新規ノードの参入によりネットワークが成長するにつれ, ネットワーク内でカスケードを誘発する過負荷故障が起こる確率は上昇する. したがって, ネットワークは成長し続けることができず, そのサイズ (ノード数) はある値の周りで揺らぎ続けることが期待される. 本モデルには, ネットワークの成長とカスケード故障

という二種類のダイナミクスが含まれている. これらを明確に区別するため, 以降はネットワーク成長のタイム・ステップを括弧内に示された t で表し, カスケードのステップを添え字として示された τ で表すことにする. 本モデルにおけるネットワークの時間発展アルゴリズムは以下の通りである.

(i) 初期ネットワーク $\mathcal{G}(0)$ として, $N_{\rm ini}$ 個のノードと $M_{\rm ini}$ 本のエッジからなる小さな連結無向ネットワークを用意する. このネットワーク上には, $W_{\rm ini}$ 個のウォーカーが存在し, $W_{\rm ini} = aM_{\rm ini}$ であるとする. ここで, a は正の定数である. 各ノードの耐性は, (6.5) 式によって決定される.

(ii) 各タイム・ステップ $t(\geq 1)$ において, μ 本のエッジをもつ 1 個のノードを追加する. この際, 新規参入ノードの μ 本のエッジは, 前時刻のネットワーク $\mathcal{G}(t-1)$ からランダムに選出された μ 個のノードに繋げる. また, $2 \leq \mu \leq N_{\rm ini}$ とする. この段階におけるネットワークを $\mathcal{G}_0(t)$ と表す.

(iii) $W_0(t) = aM_0(t)$ 個のランダム・ウォーカーを $\mathcal{G}_0(t)$ 上におく. ここで, $M_0(t)$ は $\mathcal{G}_0(t)$ のエッジ数である. 新たに追加されたノードの耐性は, (6.5) 式において k を μ とし, 総負荷量を $W_0(t)$ とすることで計算される.

(iv) $\mathcal{G}_0(t)$ に対し, 6.2.1 節で示した手順に従って過負荷故障カスケードの一連の操作を実行する. この過程において, 過負荷故障を起こしたノードだけでなく, 全ての隣接ノードが故障し次数が 0 となった孤立ノードもネットワークから除去する. このカスケード故障が終了した際のネットワークを $\mathcal{G}(t)$ とする.

(v) (ii) から (iv) の操作を十分に長い時間繰り返す.

上記のアルゴリズムに関して, 注意すべき点が幾つかある. 操作 (ii) において, 新たに追加されるノードが有するエッジ数 μ は 2 以上でなければならない. さもなければ, ひとたび過負荷故障カスケードによってネットワークが複数のクラスターに分断されてしまうと, 各クラスターは二度と合併しない. すなわち, 十分に時間が経過した後のネットワークは, 多数の小規模クラスターから構成されることになる. し

たがって, このような状況下におけるダイナミクスは $\mu \geq 2$ の場合と質的に異なる振る舞いを示すことになる. 各時刻における, カスケードが起こる前のネットワーク $\mathcal{G}_0(t)$ が連結である必要はないことにも注意する必要がある. $\mathcal{G}_0(t)$ がそれ以前のダイナミクスの結果を受けて非連結となっている場合には, 過負荷故障カスケードの場合と同様の方法により総負荷量 $W_0(t)$ を各クラスターに按分する. すなわち, クラスター α には,

$$W_0^\alpha(t) = \frac{M_0^\alpha(t)}{M_0(t)} W_0(t) = a M_0^\alpha(t) \tag{7.1}$$

の負荷が割り当てられる. ここで, $M_0^\alpha(t)$ は $\mathcal{G}_0(t)$ におけるクラスター α に含まれるエッジ数である. 操作 (iii) における新規参入ノードの耐性の計算は, 実際には $W_0^\alpha(t)$ を用いて行われる. 具体的には, 時刻 t に $\mathcal{G}_0(t)$ へ参入し, クラスター α に属することになったノードの耐性 $q^\alpha(t)$ は,

$$q^\alpha(t) = \langle w \rangle_\mu + m\sigma_\mu^\alpha \tag{7.2}$$

とする. ただし, $\langle w \rangle_\mu = W_0^\alpha(t) p_\mu^\alpha = a\mu/2$, $\sigma_\mu^\alpha = \sqrt{\langle w \rangle_\mu (1 - p_\mu^\alpha)}$, および $p_\mu^\alpha = \mu/2M_0^\alpha(t)$ である. 参入時にこのようにして決められた各ノードの耐性の値は, そのノードが除去されるまで変わることはない.

操作 (iv) における過負荷故障カスケードの手順は, 基本的には 6.2.1 節で述べた手順における $\mathcal{G}_0$, N_0, M_0, W_0 をそれぞれ $\mathcal{G}_0(t)$, $N_0(t)$, $M_0(t)$, $W_0(t)$ に置き換えたものである. ここで, $N_0(t)$ は $\mathcal{G}_0(t)$ のノード数である. $\mathcal{G}_0(t)$ が非連結である場合があることに加えて, 6.2.1 節で述べたカスケード過程とは細部において異なる点が 2 つある. まず, (6.9) 式で表される過負荷故障確率をそのまま用いることはできないという点である. これは, (7.2) 式で与えられる各ノードの耐性が, そのノードが参入した時刻に依存していることによっている. この点を考慮すると, 時刻 t に起こるカスケードの τ ステップ目におけるノード i の過負荷故障確率は,

$$F_{W_\tau^\alpha(t)}(i) = I_{k_i/2M_\tau^\alpha(t)}(\lfloor q^\beta(t_i) \rfloor + 1, W_\tau^\alpha(t) - \lfloor q^\beta(t_i) \rfloor) \tag{7.3}$$

と表される. ここで, k_i はノード i の次数, t_i はノード i が参入した時刻, α と β はそれぞれ時刻 t で起こったカスケードの τ ステップ目および参入時刻 t_i においてノード i が属している (あるいは属していた) クラスターの指標である. また, $W_\tau^\alpha(t)$ と $M_\tau^\alpha(t)$ はそれぞれ, $\mathcal{G}_\tau(t)$ 内のクラスター α における負荷の総量とエッジ数である. ただし, $\mathcal{G}_\tau(t)$ は時刻 t で起こるカスケードの τ ステップ目におけるネットワークである. さらに, カスケード中の負荷低減の方法も 6.2.1 節で述べたものと異なる. ネットワークの機能停止を回避するために, 6.2.1 節ではカスケード中のネットワーク・サイズの減少に伴って (6.7) 式に従った負荷低減を行っていた. しかし, 現実には, ネットワークが大規模になると, 迅速に負荷を低減させることが難しくなる. 現実のカスケード故障におけるこのような事情を考慮して, 本モデルでは負荷低減パラメータ r を $N_0(t)$ の減少関数とした. 具体的には, 本モデルにおけるカスケード中の負荷低減は

$$W_\tau(t) = \left(\frac{M_\tau(t)}{M_0(t)}\right)^{r[N_0(t)]} W_0(t) \tag{7.4}$$

に従って行われる. ここで, $M_\tau(t)$ は $\mathcal{G}_\tau(t)$ におけるエッジ数, $r[N_0(t)]$ は $N_0(t)$ の減少関数である. 大規模なカスケードは r が小さいときに起こりやすくなるため, $r[N_0(t)]$ が $N_0(t)$ の減少関数であることは, ネットワークが際限なく成長することを妨げていることになる.

操作 (iv) によって全てのノードが除去された場合は, 改めて $\mathcal{G}(0)$ を構築し, 操作 (ii) から一連のプロセスを再開する. 本モデルでは, τ によって特徴づけられるカスケードの時間スケールは, t により特徴づけられるネットワーク成長の時間スケールよりも十分に短く, さらにランダム・ウォーカーの緩和時間はカスケードの 1 ステップよりも遥かに短いものと考えている. 本研究では, ネットワーク成長の時間スケールにおけるネットワークの時間発展に注目する. そのため, 操作 (iv) が終了した各時刻におけるネットワーク $\mathcal{G}(t)$ に関する情報が t の関数として記録される.

本モデルには幾つかのパラメータや条件が存在する. 具体的には, 初期ネットワーク $\mathcal{G}(0)$ に関する $N_{\rm ini}$ と $M_{\rm ini}$, および $\mathcal{G}(0)$ のトポロジー, 単一エッジが運ぶ負荷 a, ノード耐性パラメータ m, 新規参入ノードのエッジ数 μ, 負荷低減パラメータの関数

形 $r(N)$ である. 本研究では, これらの値や条件を次のように定めた. まず, $\mathcal{G}(0)$ は $N_{\rm ini}=3$, $M_{\rm ini}=3$ の三角形型のネットワークとする. a と μ の値は, それぞれ $a=2.0$, $\mu=2$ とした. m の値は $5.0 \leq m \leq 7.0$ の範囲から選んでいる. $r(N)$ の関数形は

$$r(N)=\begin{cases} r_{\rm max}, & (2 \leq N < N_{\rm ini}) \\ \dfrac{r_{\rm max}(N_{\rm max}-N)}{N_{\rm max}-N_{\rm ini}}, & (N_{\rm ini} \leq N < N_{\rm max}) \\ 0, & (N \geq N_{\rm max}) \end{cases} \tag{7.5}$$

とした. この関数は, N の増加に従って最大値 $r_{\rm max}$ から 0 へと減少する. どのようなネットワークであっても $r=0$ のときに起こるカスケードは全てのノードを故障させることから, 一連のダイナミクスの中でネットワークが到達し得るおおまかな最大サイズは, $N_{\rm max}$ の値によって見積もることができる. 以降は, 特に断らない限り, $N_{\rm max}=1,000$, $r_{\rm max}=1$ とする. 以上のパラメータの値を選んだ理由と SOC 発現に必要なパラメータ領域については, 7.6 節で述べることにする.

7.2 特徴量の時間発展

前節で述べたモデル・アルゴリズムと計算条件のもとで数値シミュレーションを行い, まず $\mathcal{G}(t)$ のサイズの時間依存性を調べた. 図 7.1 には, $t \leq 10^4$ における $\mathcal{G}(t)$ のノード数 $N(t)$ の時間依存性が示されている. この図から明らかなように, ネットワークは成長し続けることなく, 成長と崩壊を繰り返して大きく揺らぎ続ける. $N(t)$ の概形には, 幾つかの特徴を見出すことができる. 成長の初期段階においては, $N_0(t)[=N(t-1)+1]$ が小さいため, いずれかのノードが過負荷故障を起こす確率は低く, $N(t)$ はほぼ単調に増加する. このような時間領域においては, 故障するノード数の期待値は 1 を下回っている. その後は, この期待値が 1 以上となり, $\mathcal{G}_0(t)$ の幾つかのノードが故障することになる. しかし, $N_0(t)$ はまだそれほど大きくはないため, $r(N)$ は比較的大きく, カスケードがネットワーク全体に広がることはない. 例えば, $400 \leq t \leq 800$ 付近において, $N(t)$ が比較的小さな落ち込みを示しつつも増加し続け

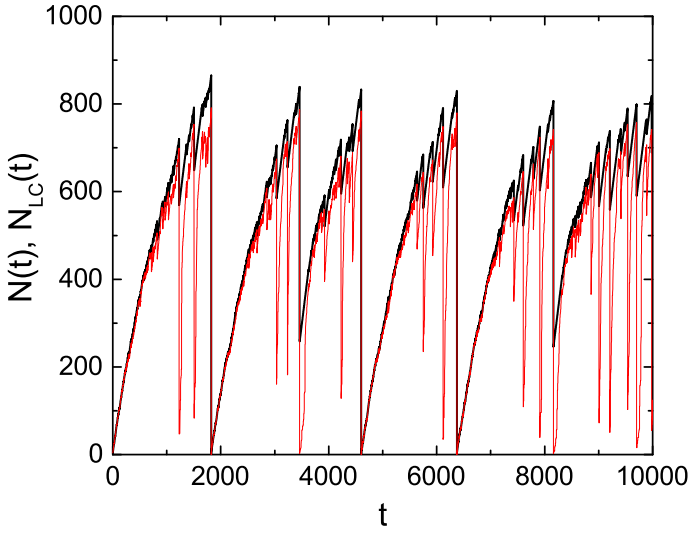

図 7.1: $\mathcal{G}(t)$ におけるノード数 $N(t)$(黒線) と最大連結成分のノード数 $N_{\rm LC}(t)$(赤線) の時間依存性. 耐性パラメータ m は $m = 5.0$ とした. 文献 [38] より引用.

るのはこのためである. ところが, $N(t)$ が 800 を超えた辺りになると, カスケードがネットワーク全体に広がるほど $r(N)$ は小さくなり, 全てのノードが故障することになる. 本論文では, このようなカスケードを完全崩壊と呼ぶことにする. 図 7.1 では, $t = 1,824,\ 4,603,\ 6,374$ で完全崩壊が起こっている. 完全崩壊の後, ネットワークは $t = 0$ からの時間発展と同様に成長と崩壊を繰り返す. 図 7.1 には, $N(t)$ に加えて, $\mathcal{G}(t)$ における最大連結成分のノード数 $N_{\rm LC}(t)$ の時間依存性も示されている. 基本的には $N_{\rm LC}(t)$ は $N(t)$ に追随して時間発展するが, 時折, $N(t)$ があまり変化していないにもかかわらず大幅に減少する. このような場合, ネットワークは過負荷故障カスケードによって複数の小さなクラスターに分解されている. $N(t)$ の下落幅, すなわち, カスケードのサイズに関する統計的性質については, 次節で述べることにする.

ネットワークを特徴づける他の幾つかの量の時間依存性も見てみよう. 図 7.2 には, $\mathcal{G}(t)$ の平均次数 $\langle k \rangle$, 平均クラスター係数 C, 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ の時間依存性が示されている. 平均次数は完全崩壊の直後は大きな値をとるものの, 概ね $\langle k \rangle = 2 (= \mu)$ の周りで揺らぎ続けていることが分かる. なお, ここでは示されていないが, $N(t)$ の大きな $\mathcal{G}(t)$ の次数分布関数 $\mathcal{P}(k)$ は, k の大きな領域で指数関数的に減衰することが計算により明らかにされている. これは, 新規参入ノードが有するエッジがランダム

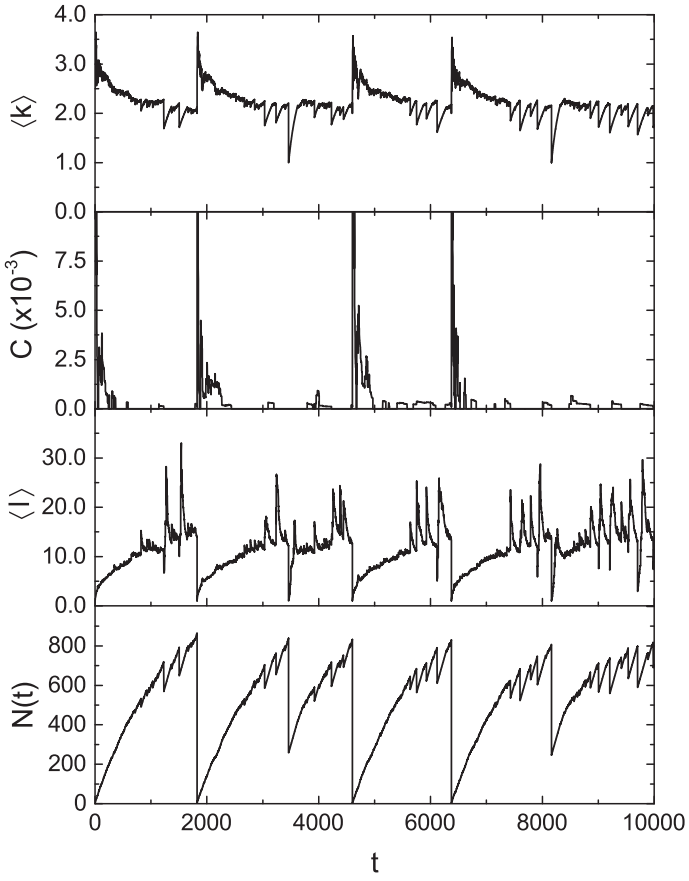

図 7.2: 最上段から順に, $\mathcal{G}(t)$ の平均次数, 平均クラスター係数, 平均ノード間距離の時間依存性. 最下段には図 7.1 で示した $N(t)$ を再掲している. 耐性パラメータ m は $m = 5.0$ とした. 文献 [38] より引用.

に既存ノードに繋がれ, 過負荷故障カスケードが特別な次数相関を生み出すことがないため, ネットワークがランダム・グラフと似た構造をとることに起因する. 平均クラスター係数は, 完全崩壊の直後を除いて非常に小さな値をとっている. 完全崩壊の直後は, ネットワークは三角形型の $\mathcal{G}(0)$ となっているため, $C = 1.0$ である. しかし, その後は新規参入ノードが有するエッジのランダム接続によって C は急速に減衰する. しばしば C が 0 となることがあるが, これはネットワークがループの無い木構造になっていることを意味している. 平均ノード間距離は, 完全崩壊の直後には当然 $\langle l \rangle = 1.0$ となる. その後は大きな揺らぎを伴いながら徐々に増大している. $N(t)$ が $1,000$ 以下であるにもかかわらず $\langle l \rangle$ の値が 10 かそれ以上であるネットワークは,

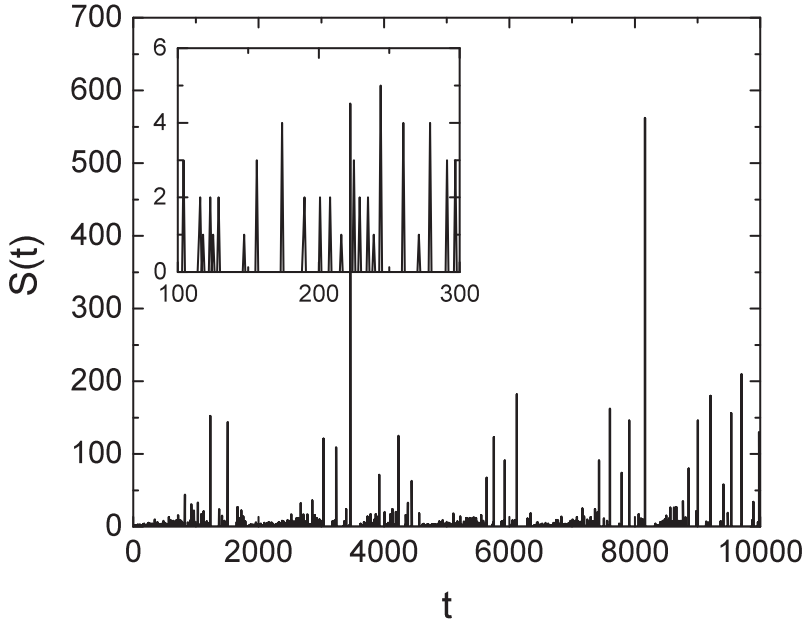

図 7.3: 図 7.1 に示した $N(t)$ から計算された雪崩のサイズ $S(t)$. 図を見やすくするため, 完全崩壊に対応する $S(t)$ は示していない. インセットは, $100 \leq t \leq 300$ の範囲を拡大したものである. 文献 [38] より引用.

スモールワールド構造をとっているとは考え難い. このことから, $\langle l \rangle$ が大きいときの $\mathcal{G}(t)$ はフラクタル性をもつ可能性がある. $\mathcal{G}(t)$ のフラクタル性を評価する前に, 次節で本モデルの一連のダイナミクスが SOC を示すか否かを調べる.

7.3 カスケード・サイズと自己組織化臨界性

図 7.1 で見られた $N(t)$ の下落は, 過負荷故障カスケードによるネットワークの崩壊を表している. また, この下落幅は, 過負荷故障カスケードによって失われたノード数, すなわちカスケードの規模を表している. そこで, カスケード (雪崩) のサイズ $S(t)$ を, 時刻 t に起こった過負荷故障カスケードによって除去されたノード数として定義する. 図 7.3 には, 図 7.1 に示した $N(t)$ から計算された $S(t)$ が示されている. 完全崩壊に対応する $S(t)$ を除いても, 雪崩のサイズは非常に大きく揺らいでいる. 図 7.3 のインセットは, 主パネルの一部を拡大したものであるが, この図から雪崩が間欠的に起こっていることが分かる. このことは, 本モデルのダイナミクスが SOC を

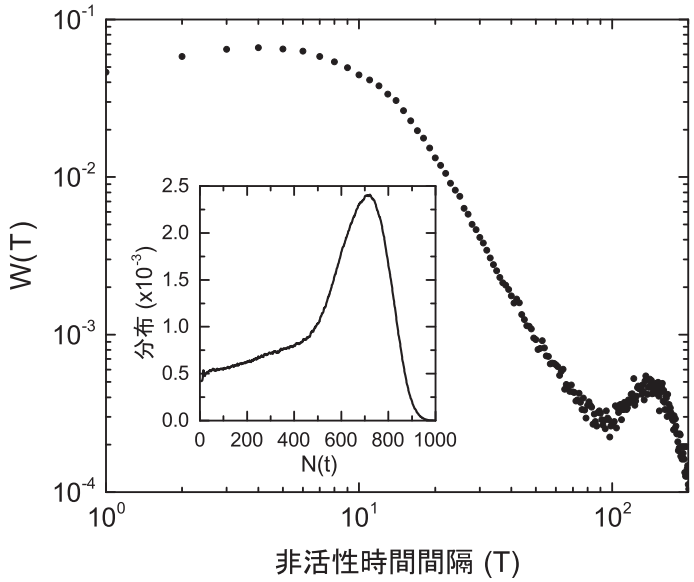

図 7.4: 雪崩間の非活性時間間隔 T の分布関数 $W(T)$. 耐性パラメータ m は $m = 5.0$ とし, $t = 5 \times 10^6$ までのダイナミクスから計算されている. インセットは, 同一条件の計算から得られた $N(t)$ の分布関数である. 文献 [38] の図を基に, 表記法を変更している.

示すことを示唆している. SOC ダイナミクスのさらなる根拠を示すため, 雪崩と雪崩の間の非活性時間間隔 T の分布関数 $W(T)$ を調べた. 図 7.4 には, 図 7.1 の結果を得るのと同一の条件で $t = 5 \times 10^6$ まで計算することにより得られた $W(T)$ が示されている. これより, $W(T)$ は T の中間的な領域において,

$$W(T) \propto T^{-\eta} \tag{7.6}$$

と, T のベキ関数で表せることが分かる. $20 \leq T \leq 50$ のデータに対する最小二乗フィットによると, $\eta = 3.00 \pm 0.03$ である. $T \sim 150$ に見られる小さなハンプは, ネットワーク・サイズの典型値 $N_{\rm typ}$ に関係する有限サイズ効果に起因するものである. $N(t)$ の分布関数を示した図 7.4 のインセットから, ここで用いられた計算条件では $N_{\rm typ} \sim 700$ であることが分かる. 一方, $N(t)$ と $S(t)$ の間には強い相関があることは, 図 7.1 を見れば明らかである. また, $S(t)$ とその後の非活性時間間隔 T との間にも相関があることが数値的に確認されている. これらの事実から, $N_{\rm typ} \sim 700$ が $T \sim 150$

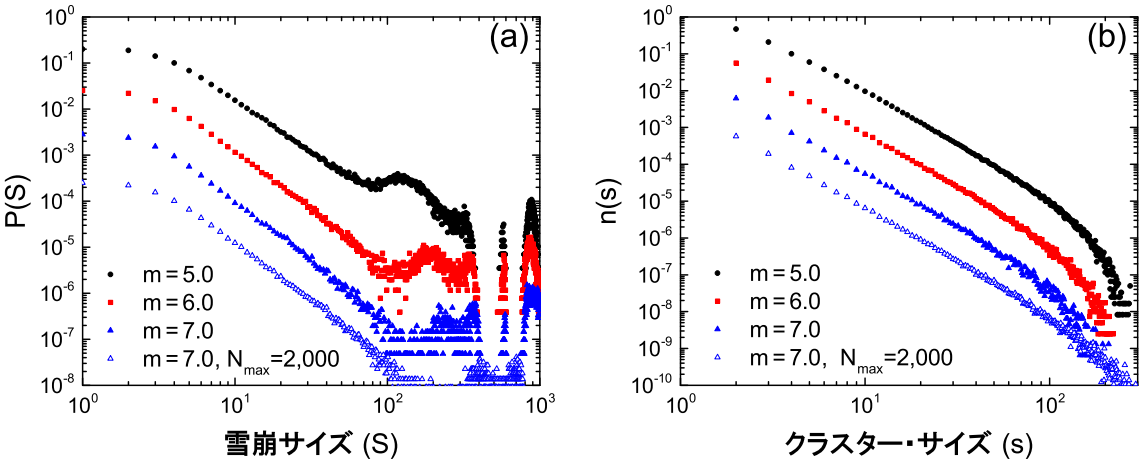

図 7.5: (a) 雪崩のサイズ S の分布関数 $R(S)$ と, (b) クラスター・サイズ s の分布関数 $n(s)$. それぞれにおいて, 耐性パラメータは $m = 5.0, 6.0, 7.0$ とし, $t = 5 \times 10^6$ までのダイナミクスから分布関数が計算されている. また, $m = 7.0$ については $N_{\max} = 2,000$ に対する結果も示してある. $m = 6.0, 7.0$ に対する結果は, 図を見やすくするために下方へシフトさせて表示している. 文献 [38] の図を基に, 表記法を変更している.

での $W(T)$ のハンプの起源であることが確認されている.

雪崩のサイズ S の分布関数 $R(S)$ も S のベキ関数で表される. 図 7.5(a) に, 幾つかの m の値に対する $R(S)$ を示す. この図から, S の中間的な領域において

$$R(S) \propto S^{-\lambda} \tag{7.7}$$

と表すことができることが分かる. 指数 λ の値は, ほとんど m に依らず, $m = 7.0$ のとき, $\lambda = 2.50 \pm 0.02$ と見積もられる. λ の値が $N_{\rm typ}$ の値によって特徴づけられるネットワーク・サイズにどの程度影響を受けるかを明らかにするため, 図 7.5(a) には, $m = 7.0$ で $N_{\max} = 2,000$ に対する $R(S)$ もプロットされている. この結果に対しても上記に近い $\lambda = 2.48 \pm 0.01$ と見積もられることから, 無限に大きな $N_{\max}$ に対しても λ は 2.48 に近い値をとることが予想される. $R(S)$ の右端に見られる $S \sim 900$ 付近のハンプは完全崩壊に対応しており, 右から 2 番目のハンプは大きなネットワークが多数のダイマー型クラスターに分断されるような崩壊に対応している. $m = 5.0$

に対する結果の $S = 150$ 付近に現れるブロードなハンプは, 図 7.4 における $W(T)$ のハンプと関係している. すなわち, このブロードなハンプは, ノード数が $N_{\rm typ} \sim 700$ であるような典型的なネットワークで起こる典型的な崩壊に対応している. したがって, これらのハンプはパラメータの選び方に依存した有限サイズ効果に起因していると考えられる. このようなハンプは, 2009 年に Sornette [127] が提唱した「ドラゴン・キング」に他ならない. ドラゴン・キングとは, ベキ的な分布を見せる事象のうち, 明らかにベキ則から外れている大規模な事象を指しており, 通常, 極端に規模が大きいカスケードによって引き起こされる [128]. また, ドラゴン・キングの発現は, ダイナミクス中に現れる前兆から予測することが可能であるばかりでなく, 小さな摂動を加えることで抑制できることが知られている [129]. したがって, これらの技術を応用することにより, 本モデルを完全崩壊が起きないようなモデルへと変更できる可能性がある.

本研究ではさらに, クラスター・サイズ s の分布関数 $n(s)$ についても調べた. 図 7.5(b) には, $m = 5.0, 6.0, 7.0$ に対する $n(s)$ が示されている. 時刻 t におけるクラスター・サイズ s は, $\mathcal{G}(t)$ 内のあるクラスターに含まれるノード数であり, $n(s)$ はダイナミクスの全時間における全てのクラスターから計算される. 図 7.5(b) より,

$$n(s) \propto s^{-\tau} \tag{7.8}$$

と表され, クラスター・サイズもベキ型の分布関数に従うことが分かる. 指数 τ の値も λ と同様に m にほとんど依らず, $m = 7.0$ のとき $\tau = 2.87 \pm 0.02$ となる. $m = 7.0$ および $N_{\rm max} = 2,000$ に対しては, $\tau = 2.86 \pm 0.01$ となり, やはりこの値が $N_{\rm max}$ を無限大にしたときの指数の値に近いことが分かる. $R(S)$ の場合とは異なり, $n(s)$ では完全崩壊に対応するドラゴン・キングが現れていない. これは次のような理由による. 完全崩壊の直後のネットワークは $\mathcal{G}(0)$ であり, そのクラスター・サイズは $s = N_{\rm ini}(= 3)$ となる. しかし, ネットワークの時間発展で現れる $s = 3$ のクラスター数は, 稀に起こる完全崩壊の回数よりも遥かに大きいため, $n(s)$ には完全崩壊の影響が現れない.

$S(t)$ の間欠性や, $W(T)$, $R(S)$, $n(s)$ がベキ関数で表されることは, 本モデルで扱うネットワーク構造の時間発展ダイナミクスが SOC を示すことを強く示唆している. また, これらの結果から, SOC の普遍クラスは m に依存しないことも示されている. m 以外のパラメータと SOC の関係については, 7.6 節で議論する.

7.4 フラクタル構造の発現

前章で述べたように, 負荷低減パラメータ r が臨界値 $r_{\rm c}$ を下回っている場合の過負荷故障カスケードはネットワークを壊滅的に破壊し, $r > r_{\rm c}$ ならばカスケードによる損傷は有限に留まる. また, $r = r_{\rm c}$ でのカスケードの後の巨大成分はフラクタル性を有することになる [39]. 本モデルでは, r は $N_0(t)$ の減少関数になっているため, ネットワークの成長に伴い $N_0(t)$ が増加することにより r が減少し, ある時点での r がその時のネットワークにおける臨界値 $r_{\rm c}$ と等しくなることが予想される. したがって, この時のカスケード直後のネットワークはフラクタル性をもつことが期待できる. ただし, $r_{\rm c}$ を解析的に評価した Mizutaka らのモデル [39] と異なり, 本モデルでは, 各ノードの耐性はそのノードが系に参入した時刻における総負荷量に基づいて決定される. すなわち, $\mathcal{G}_0(t)$ 内の各ノードの耐性は $\mathcal{G}_0(t)$ の履歴に強く依存しており, $\mathcal{G}_0(t)$ のサイズやトポロジーから $r_{\rm c}$ を一意に決定することはできない. そのため, 各時刻の $\mathcal{G}_0(t)$ に対する $r_{\rm c}$ の値を解析的に求めることはできず, 本モデルでは, $r[N_0(t)]$ が $\mathcal{G}_0(t)$ に対する未知の臨界値 $r_{\rm c}$ に近いか否かを数値的に調べる必要がある.

もし $r[N_0(t)]$ が $r_{\rm c}$ より遥かに大きければ, 過負荷故障カスケードによって $\mathcal{G}_0(t)$ から除去されるノードは僅かであり, 巨大連結成分の大きさはほとんど変わらない. 一方, $r[N_0(t)] \ll r_{\rm c}$ であれば, $\mathcal{G}_0(t)$ は完全崩壊を起こすだろう. $r[N_0(t)]$ が $r_{\rm c}$ に近い場合は, カスケード直後の巨大連結成分の大きさ $N_{\rm LC}(t)$ はカスケード直前のそれである $N_{\rm LC}(t-1)$ に比べて大幅に小さくなるものの, 依然として $N_{\rm LC}(t)$ は $N_{\rm ini}$ よりは

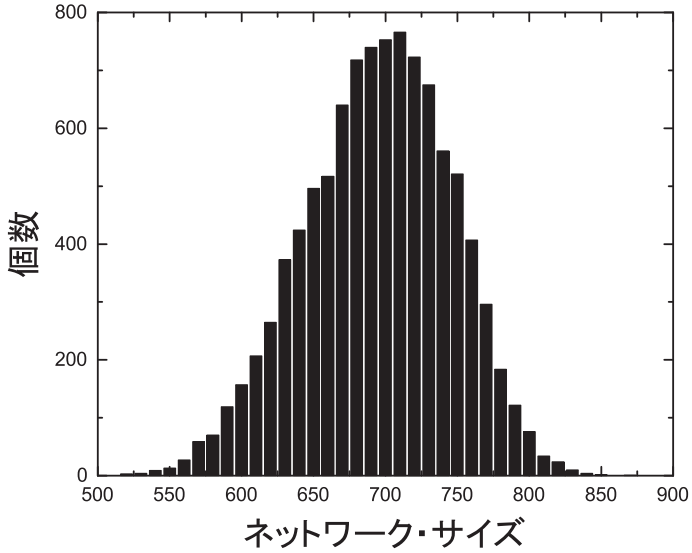

図 7.6: 前臨界ネットワーク・サイズの度数分布. $m = 5.0$ とし, 10^4 回の臨界カスケードに対する前臨界ネットワークから計算されている. 文献 [38] の図を基に, 表記法を変更している.

遥かに大きいはずである. 以上のような考察から,

$$\frac{N_{\mathrm{LC}}(t)}{N_{\mathrm{LC}}(t-1)} \leq 0.5, \text{かつ } N_{\mathrm{LC}}(t) \geq 100 \tag{7.9}$$

であるときに負荷減衰パラメータが r_{c} に近い値をとると考えた. この条件を満たす時刻に起きるカスケードを臨界カスケードと呼ぶことにする. また, 臨界カスケードの直後のネットワークを臨界ネットワーク $\mathcal{G}_{\mathrm{c}}$, 臨界カスケードの直前のネットワークを前臨界ネットワーク $\mathcal{G}_{\mathrm{pre}}$ と呼ぶことにする. (7.9) 式における 0.5 や 100 などの具体的数値は, $N_{\mathrm{LC}}(t)/N_{\mathrm{LC}}(t-1)$ が 1 よりも遥かに小さく, $N_{\mathrm{LC}}(t)$ が 1 よりも遥かに大きい限り, どのようにとってもよく, 結果に影響を与えない. 図 7.6 に $\mathcal{G}_{\mathrm{pre}}$ の個数の度数分布を示す. この結果より, 我々のパラメータ設定における臨界カスケードは $N(t) \sim 700$ で起こりやすいことが分かる. 図 7.4 のインセットに示されていたように, $N_{\mathrm{typ}} \sim 700$ であったことを考慮すると, 臨界カスケードは SOC ダイナミクスの過程で頻繁に起きていると考えることができる. このことは, 時間発展の中で臨界ネットワークも頻繁に現れていることを意味している. Mizutaka らの研究 [39] の結

果を考えると, 臨界ネットワークがフラクタル性を有する可能性があるが, このことを調べる前に, フラクタル性を評価するために本研究で用いたアルゴリズムについて説明する.

7.4.1 Compact-box-burning アルゴリズム

本研究では, BC 法を用いてネットワークのフラクタル性を評価する. 第 3 章で述べた通り, BC 法ではネットワークを直径 l_{B} の部分グラフで被覆した際の最小部分グラフ数 $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ を計算する必要がある. しかしながら, 与えられたネットワークを被覆する部分グラフ数の真の最小値を求める問題は, 多項式時間で解を見つけることができない NP 困難な問題である. そのため, 真の最小値ではなく, その近似値を使ってフラクタル解析を行わざるを得ない. $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ を近似的に求める方法は幾つかあるが, ここでは Compact-box-burning(CBB) アルゴリズム [126] を用いることにする. CBB アルゴリズムでは, 次のような手続きによって $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ が計算される.

(1) 与えられたネットワークにおいて, まだ被覆されていないノードの集合を C とする.

(2) 集合 C の中から, 1 つのノード i をランダムに選出する.

(3) ノード i から距離 l_{B} 以上にあるノードを全て集合 C から除外する.

(4) ノードが除外された集合 C から新たにノードを 1 つランダムに選出し, (3) の操作を行う.

(5) (4) の操作を, 除去されるノードが無くなるまで繰り返す. この操作で残ったノードの集合 C' が, 直径 l_{B} の 1 つの被覆部分グラフを表すことになる.

(6) (1) から (5) までの操作を, 全てのノードが被覆されるまで繰り返す.

(7) (5) の操作で作られた集合 C' の総数を $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ とする.

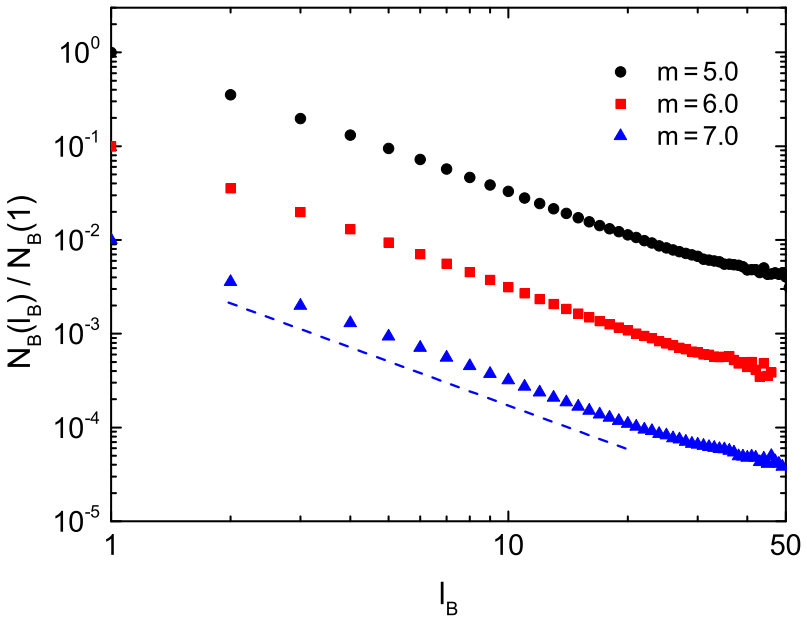

図 7.7: 臨界ネットワークの巨大連結成分に対する $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ の l_{B} 依存性. 縦軸は 1,000 個の臨界ネットワークに渡って平均された $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})/N_{\mathrm{B}}(1)$ を表している. $m = 6.0$ および 7.0 の結果は, 図を見やすくするために下方へシフトさせて表示している. 破線の傾きは $d_{\mathrm{B}} = 1.53$ を表している. この値は $m = 7.0$ の $2 \leq l_{\mathrm{B}} \leq 20$ の領域に対する最小二乗フィットから得られたものである. 文献 [38] より引用.

このアルゴリズムでは, ランダムに選ばれたノード i がどのノードであるかによって結果が変わるため, ある程度の平均操作が必要となる. しかし, より近似の精度が高い greedy colouring アルゴリズム [130] と比較しても結果はほとんど変わらず, 計算時間は大幅に短いことが確認されている [126].

7.4.2 臨界ネットワークのフラクタル性

臨界ネットワークのフラクタル性を評価するため, SOC ダイナミクス中に現れた 1,000 個の臨界ネットワークに対して CBB アルゴリズムを適用することにより $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ を計算し, $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})/N_{\mathrm{B}}(1)$ の平均値を求めた. ただし, $N_{\mathrm{B}}(1)$ は最大連結成分のノード数に等しい. $m = 5.0, 6.0, 7.0$ に対する結果を図 7.7 に示す. これより, $N_{\mathrm{B}}(l_{\mathrm{B}})$ は (3.11) 式で表される関係を満たしており, 臨界ネットワークがフラクタル構造をとっていることが分かる. 図 7.7 から明らかなように, フラクタル次元 d_{B} は m の値に依

らない. 特に, $m = 7.0$ の結果からは, $d_{\rm B} = 1.53 \pm 0.01$ と見積もられる. この値は, Erdös-Rényi(ER) ランダム・グラフを初期ネットワークとした $r = r_{\rm c}$ での過負荷故障カスケード後の最大連結成分のフラクタル次元 $d_{\rm B} = 1.54 \pm 0.01$ [39] に近い. 本モデルにおける $\mathcal{G}_{\rm pre}$ のトポロジーと ER ランダム・グラフ $\mathcal{G}_{\rm ER}$ のトポロジーは異なる. また, $\mathcal{G}_{\rm pre}$ 内の各ノードの耐性はノードが参入してきた時刻での総負荷量に依存するのに対し, $\mathcal{G}_{\rm ER}$ 内の各ノードの耐性は与えられた初期総負荷量 W_0 と次数のみから決まる. これらの違いがあるにもかかわらず $\mathcal{G}_{\rm pre}$ と $\mathcal{G}_{\rm ER}$ が同じフラクタル次元を有し, 両者の過負荷故障過程が同じ普遍クラスのパーコレーション転移を与えていることは, (i) $\mathcal{G}_{\rm pre}$ の次数分布関数が $\mathcal{G}_{\rm ER}$ の次数分布関数と同様に指数関数的なテールをもつこと, (ii) $\mathcal{G}_{\rm pre}$ における耐性の分布関数の幅が $\mathcal{G}_{\rm ER}$ の場合と同様に狭いことから理解できる.

7.5 スモールワールド構造の発現と構造クロスオーバー

臨界カスケード以降のネットワークの $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ についても調べた. 臨界カスケード直後の臨界ネットワークに対し, それ以降新規参入ノードが次々と追加され, それらが有するエッジは既存ノードにランダムに接続されていく. このようなエッジのランダム接続はショートカット・エッジを形成することになるので, 臨界カスケード以降のネットワークはスモールワールド性を有する可能性がある. このことを確かめるため, まず完全崩壊の後に初めて $N(t) = 300$ となったネットワーク $\mathcal{G}_{300}$ の最大連結成分に対する $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ を計算した. 図 7.8 は, 1,000 個の $\mathcal{G}_{300}$ から平均された $N_{\rm B}(l_{\rm B})/N_{\rm B}(1)$ の $l_{\rm B}$ 依存性を $m = 5.0, 6.0, 7.0$ に対して計算した結果である. この結果より, 臨界カスケードが起こる時刻から遠く離れた時刻に形成されたネットワークにはスモールワールド性があることが分かる. 臨界カスケード直後のネットワークはフラクタル構造をとるので, 本モデルでは単一のダイナミクスによってフラクタル・ネットワークとスモールワールド・ネットワークが構築されることになる.

次に, フラクタルな臨界ネットワークが時間発展とともにスモールワールドへと

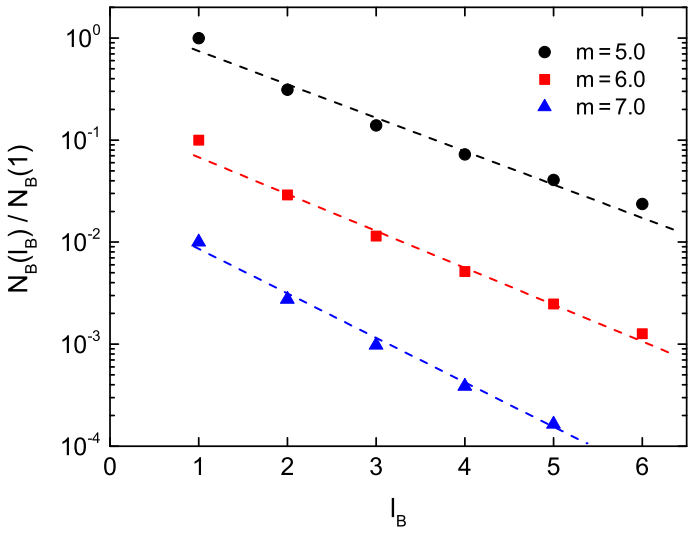

図 7.8: 完全崩壊後に初めて $N(t) = 300$ となった際のネットワーク $\mathcal{G}_{300}$ の最大連結成分に対する $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ の $l_{\rm B}$ 依存性．縦軸は，1,000 個の $\mathcal{G}_{300}$ に渡って平均された $N_{\rm B}(l_{\rm B})/N_{\rm B}(1)$ を表している．$m = 6.0$ および 7.0 の結果は，図を見やすくするために下方へシフトさせて表示している．各破線は単なるガイドである．文献 [38] より引用．

クロスオーバーする振る舞いを調べてみよう．図 7.9 には，臨界カスケードが起こった時刻 t_1 から完全崩壊が起こる直前の時刻 t_4 に至るまでの幾つかの時刻において形成されたネットワークの $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ が示されている．$N_{\rm B}(l_{\rm B})$ を計算した時刻は，$N_{\rm LC}(t)$ の時間依存性を示した図 7.9(a) の中の矢印で指し示されている．$t = t_1$ では，$N_{\rm B}(l_{\rm B})$ は $l_{\rm B}$ のベキ関数となり，確かに $\mathcal{G}(t_1)$ における巨大連結成分がフラクタルであることが分かる．図 7.9(a) を見ると，この時刻の直後に $N_{\rm LC}(t)$ が急速に増大している．これは，この時間領域において追加されたノードが分断されているフラクタルなクラスターを併合しているためである．それゆえ，$t = t_2$ では依然としてフラクタル性が維持されている．ところが，さらに時刻が進むと，$N_{\rm LC}(t)$ の増大は緩やかになっている．この理由は，最大連結成分が十分に大きくなり，新規ノードの参入はクラスターの併合よりも，既存の最大連結成分の中に取り込まれる可能性が高くなったためである．このような状況では，最大連結成分に取り込まれた新規参入ノードが有するエッジはショートカットの役割を果たすことになり，スモールワールド性が発現するようになると考えられる．実際，図 7.9(b) を見ると，$t = t_3$ ではフラクタル性が弱まっ

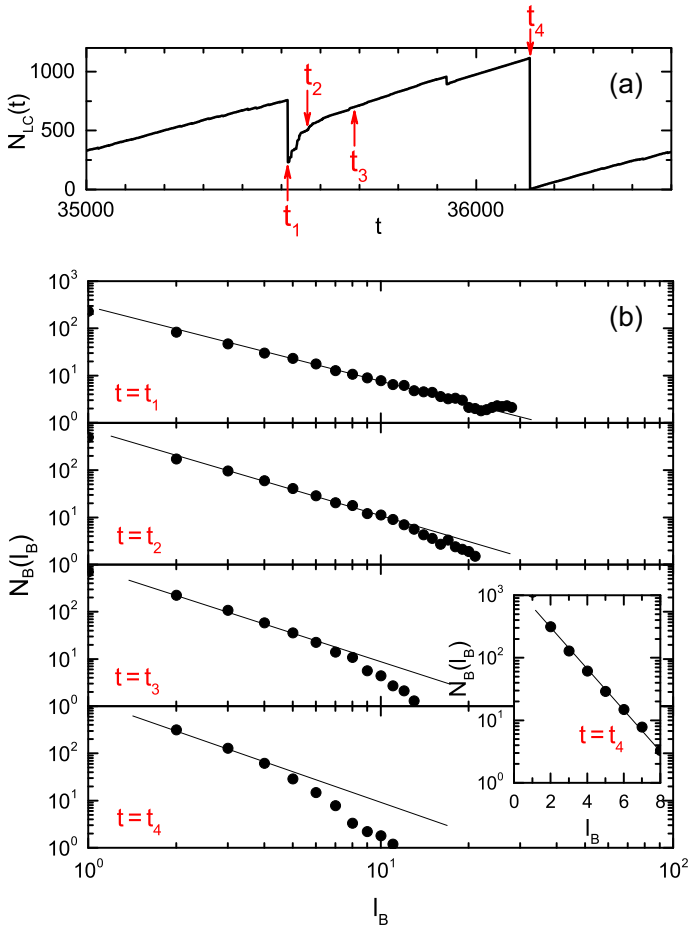

図 7.9: (a)$m = 7.0$ における $\mathcal{G}(t)$ の最大連結成分のサイズ $N_{\rm LC}(t)$ の時間依存性. 矢印は $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ を計算した時刻を指し示している. (b) 最上段から順に, $\mathcal{G}(t_1)$, $\mathcal{G}(t_2)$, $\mathcal{G}(t_3)$, $\mathcal{G}(t_4)$ の最大連結成分に対する $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ の $l_{\rm B}$ 依存性. 各直線は結果の直線性を見やすくするために表示している. $t = t_3$ および $t = t_4$ において, $l_{\rm B} \gg l_{\rm co}$ で $N_{\rm B}(l_{\rm B})$ が急速に減衰しているが, これは最大連結成分が $l_{\rm co}$ より大きなスケールでスモールワールド性を有することを示している. インセットは, $t = t_4$ での結果を片対数プロットで表したものである. 文献 [38] より引用.

ていることが確認できる. より正確に言うと, 新規参入ノードによって導入されたショートカット・エッジの両端ノード間の平均的な距離 $l_{\rm co}$ より長いスケールではスモールワールド性が現れ, それよりも短いスケールではフラクタル性が維持されている. この状況は, WS モデルにおけるランダムなエッジの繋ぎ替えが格子状のネットワークをスモールワールド・ネットワークに変化させる状況と同じである [69]. 図 7.9(b) のインセットに示したように, $t = t_4$ になると, ショートカット・エッジの増

加によって $l_{\rm co}$ の値は非常に小さくなり, $l_{\rm B}$ に関して広い範囲でスモールワールド性が見られるようになる.

7.6 自己組織化臨界性の発現条件

7.5 節までに示した結果は, モデル・パラメータを特定の値に固定して得られたものである. 得られた性質や特徴がこれらのパラメータの値に特有のものであるならば, 本モデルを SOC モデルと呼ぶことはできない. しかしながら, これまでに見てきた結果は, パラメータの値が適切な範囲にある限り, 本質的にはパラメータの値に依存しないことが確認されている. 本節では, その適切なパラメータ領域とは具体的にどのような領域であるのかについて議論する.

まず, 臨界カスケードや完全崩壊が無い場合にはネットワークがどこまで成長できるのかを考えてみよう. 結論から述べると, このような場合でさえ, ネットワークは無限に大きくなることはできない. ある時刻に除去されるノード数の期待値 $\langle S\rangle$ は, $N(t)$ の増加とともに大きくなる. その結果, ある時刻において $\langle S\rangle$ は新規ノード参入による単位時間あたりの $N(t)$ の増加量と等しくなる. 一度この状況が実現すると, ネットワークはそれ以上成長しなくなる. このために, $N(t)$ は定常値の周りで小さく揺らぎ続けることになる. 定常値 $N_{\rm st}$ は, 過負荷故障確率を用いることで大まかに見積もることができる. 臨界カスケードや完全崩壊が無いことを考慮すると, 全ての過負荷故障カスケードはカスケードの最初のステップで終了し, それ以上カスケードが広がることはないと近似的にみなすことができる. この近似に基づけば, 定常状態のある時刻において除去されるノード数の期待値 $\langle S\rangle$ は,

$$\langle S\rangle = N_{\rm st}\sum_{k}\mathcal{P}_{\rm st}(k)F_{W(N_{\rm st})}(k) \tag{7.10}$$

と表される. ここで, $\mathcal{P}_{\rm st}(k)$ は定常状態におけるネットワーク $\mathcal{G}_{\rm st}$ の次数分布関数であり, $F_{W(N_{\rm st})}(k)$ は $\mathcal{G}_{\rm st}$ における次数 k のノードの過負荷故障確率である. 不完全ベー

タ関数を用いて $F_{W(N_{\rm st})}(k)$ を表すと,

$$F_{W(N_{\rm st})}(k) = I_{k/\mu N_{\rm st}}\left[\lfloor q_\mu(N_{\rm st})\rfloor + 1, W(N_{\rm st}) - \lfloor q_\mu(N_{\rm st})\rfloor\right] \tag{7.11}$$

となる. ただし,

$$q_\mu(N_{\rm st}) = \frac{a\mu}{2} + m\sqrt{\frac{a\mu}{2}\left(1 - \frac{1}{N_{\rm st}}\right)} \tag{7.12}$$

であり,

$$W(N_{\rm st}) = \frac{a\mu N_{\rm st}}{2} \tag{7.13}$$

である. ここで, $\mathcal{G}_{\rm st}$ の平均次数を μ とする近似が用いられている. この近似は, ノード除去が無い場合の平均次数が 2μ であるのに対して, μ よりも大きな次数をもつノードは過負荷故障で除去されやすいことに基づいている. 定常状態では, $\langle S\rangle$ は単位時間あたりのノード数の増加量 $(=1)$ と等しくなければならない. このことと (7.10) 式から, $N_{\rm st}$ は

$$N_{\rm st} = \frac{1}{\sum_k \mathcal{P}_{\rm st}(k) F_{W(N_{\rm st})}(k)} \tag{7.14}$$

と表せる. 臨界カスケードや完全崩壊が無いとすると, ネットワークはこの超越方程式を解くことで得られるサイズ $N_{\rm st}$ まで成長できることになる. しかし, 実際には, $N_{\rm st}$ が $N_{\rm pre}$ よりも大きい場合, ネットワーク・サイズが $N_{\rm st}$ となる前に臨界カスケードや完全崩壊が起こることになる. このような状況であれば, 本モデルのダイナミクスは SOC を示し, 臨界カスケードによるフラクタル・ネットワークの構築が実現することになる. したがって, ダイナミクスが SOC を示すための条件は,

$$N_{\rm st} \gg N_{\rm pre} \gg 1 \tag{7.15}$$

となる. ここで, $N_{\rm pre} \gg 1$ という条件は, システムが真の意味での SOC を示すほど十分に大きいことを保証している. (7.15) 式で表される条件と本モデルのパラメータとの関係はどのようになっているのだろうか. 本モデルの幾つかのパラメータのうち, 初期ネットワーク $\mathcal{G}(0)$ に関するものが (7.15) 式の条件と無関係であることは

明らかである. すなわち, SOC の発現は $N_{\rm ini}$, $M_{\rm ini}$, $\mathcal{G}(0)$ のトポロジーには左右されない. これに対して, $N_{\rm st}$ や $N_{\rm pre}$ が a, m, μ, $r(N)$ の関数形にどのように依存するのかを明らかにすることは重要である.

$N_{\rm st}$ は a, m, μ に依存する. このことは, (7.14) 式から理解することができる. $\mathcal{G}_{\rm st}$ の中に次数が μ より遥かに大きなノードがあれば, それは過負荷故障を起こしやすく削除されることになるので, $\mathcal{P}_{\rm st}(k)$ は $k=\mu$ に鋭いピークをもつことになる. したがって, $\mathcal{P}_{\rm st}(k)$ は $N_{\rm st}$ にほとんど依存しない. さらに, 不完全ベータ関数の性質より, (7.11) 式で表される過負荷故障確率 $F_{W(N_{\rm st})}(k)$ も $N_{\rm st}$ に非常に弱くしか依存しない. これらの事実から, (7.14) 式は実質的には超越方程式ではなく, $N_{\rm st}$ は $\mathcal{P}_{\rm st}(k)$ と適当な値 $N(\gg\mu)$ から得られる $F_{W(N)}(k)$ によって評価することができる. $F_{W(N)}(k)$ が全ての k に対して m, μ の減少関数となることから, $N_{\rm st}$ は $\mathcal{P}_{\rm st}(k)$ に依らず m, μ の増加関数となることが分かる. 一方, $F_{W(N)}(k)$ の a 依存性は, k の値によって異なる. $F_{W(N)}(k)$ は $k>\mu$ のとき a の増加関数であるが, $k<\mu$ の場合は a の減少関数となる. また, a が一定の場合, $F_{W(N)}(k)$ は $k<\mu$ で無視できるほど小さくなる. したがって, $\mathcal{P}_{\rm st}(k)$ に依らず, (7.14) 式中の和に寄与するのは主に $k<\mu$ での $F_{W(N)}(k)$ である. これより, $N_{\rm st}$ は a の減少関数となることが分かる. 以上の議論から, 大きな $N_{\rm st}$ を得るためには, m, μ を大きくし, a を小さくすることが必要であるといえる.

$N_{\rm pre}$ は, 負荷低減パラメータ r がネットワーク固有の臨界値 $r_{\rm c}$ に等しくなるネットワーク・サイズの典型値である. $r_{\rm c}$ はネットワークのサイズ N だけでなくネットワークの履歴にも依存するが, r は N から一意に定まる. 前臨界ネットワークの典型的なサイズを, 典型的な前臨界ネットワーク $\mathcal{G}_{\rm pre}$ のサイズで近似できるとすると, $N_{\rm pre}$ は

$$r(N_{\rm pre}) = r_{\rm c}[\mathcal{G}_{\rm pre}(N_{\rm pre})] \tag{7.16}$$

を満たすべきである. ここで, $r_{\rm c}[\mathcal{G}_{\rm pre}(N_{\rm pre})]$ は, サイズが $N_{\rm pre}$ の $\mathcal{G}_{\rm pre}$ における負荷低減パラメータの臨界値である. (7.16) 式の右辺は a, m, μ, $N_{\rm pre}$ の関数であるから, (7.16) 式の解として得られる $N_{\rm pre}$ は, $r(N)$ の関数形だけでなく, これらのパラメータの値にも依存することになる. しかし, $r(N)$ が N の緩やかな減少関数である場合は,

$r_{\rm c}$ の正確な値よりも $r(N)$ の関数形が $N_{\rm pre}$ の値を支配する．したがって, $N_{\rm pre} \gg 1$ とするためには, $r(N)$ を非常に緩やかな N の減少関数とする必要がある．(7.5) 式で表される $r(N)$ の場合は, $N_{\rm max}$ を十分に大きな値とすればよい．

以上の議論をまとめると, 本モデルで SOC ダイナミクスを実現するためには, m と μ は大きく, a は小さくし, $r(N)$ を N の緩やかな減少関数とすればよい．ただし, μ を大きくすることは結果にほとんど影響しない．なぜなら, 新規参入ノードが有するエッジの本数である μ が取り得る値は $2 \leq \mu \leq N_{\rm ini}$ の狭い範囲に限定されているからである．7.1 節の最後で述べた各パラメータの値は, 上述の条件を満たす適切な領域内にある．また, 指数 η, λ, τ, およびフラクタル次元 $d_{\rm B}$ によって特徴づけられる SOC の普遍クラスは, (7.15) 式で表される条件を満たしている限り, パラメータの値に依存しないことが確認されている．さらに, $r(N)$ が N の緩やかな減少関数である限り, $r(N)$ の関数形は SOC ダイナミクスに影響を与えないことも確認されている．

第8章　結論

本研究は, 現実の複雑ネットワークがどのようなメカニズムによってフラクタル性を獲得するのかを明らかにすることを目的としていた. また, 現実ネットワークで観測されているフラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバー・メカニズムを同一のダイナミクスによって説明することも目指した. 本研究では, ユークリッド空間に埋め込まれたフラクタル構造が自己組織化臨界性 (SOC) を示すダイナミクスによって形成されることに着目し, 複雑ネットワークにおけるフラクタル構造も何らかのSOCダイナミクスによって形成されるものと考えた. 固定されたネットワーク上における内部自由度のSOCダイナミクスに関する研究はこれまでに数多く行われてきた. しかし, フラクタル構造発現メカニズムを明らかにするためには, 内部自由度のダイナミクスとネットワーク構造との相互依存関係を考慮する必要がある. このような相互依存関係を通じて非自明なネットワーク構造を形成するネットワーク・モデルもこれまでに数多く提唱されてきたが, いずれもネットワーク構造自体のSOCモデルとは言い難いものであった. 以上のことを踏まえ, 本研究では, 内部自由度のダイナミクスとネットワーク構造との相互作用を通じてネットワーク構造自身の時間発展がSOCを示すモデルを構築した.

まず, 第5章では, ネットワーク構造の不均一性がSOCダイナミクスに与える影響を明らかにするため, 様々な不均一性を有する固定されたネットワーク上の触媒反応ダイナミクスを数値的に調べた. Awazu ら [23] の研究により, 比較的均質な構造をもつランダム・グラフ上の触媒反応ダイナミクスがSOCを示すことは既に明らかにされていたが, 本研究の結果, SOCの普遍クラスがスケールフリー性, コミュニティ性, 次数相関といったネットワークの構造的不均一性には依存しないことが明らかになった. この結果は, 単一の普遍クラスに属するSOCダイナミクスを通じて

多様なネットワーク構造が形成されることを示唆しているという点で重要である.

第 7 章では, 第 6 章で説明した Mizutaka ら [39] による過負荷故障カスケード過程の下でのパーコレーション問題の研究を基礎とし, 新規ノード参入によるネットワークの成長過程も考慮したネットワーク構造の時間発展モデルを構築した. 本モデルでは, 現実の機能性ネットワークにおいて, その規模 (ノード数) が大きくなるほど総負荷量低減が困難になることを考慮し, 負荷低減パラメータをノード数の減少関数としている. 系統的で詳細な数値計算の結果, ネットワーク構造の時間発展ダイナミクスは SOC を示し, 臨界カスケード直後のネットワークにはフラクタル性が発現し, 直前のネットワークにはスモールワールド性が見られることが明らかになった. また, 臨界カスケード直後からの時間発展に伴い, フラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバーが起こることが示された. さらに, この構造クロスオーバーの起源が新規ノードの参入によるショートカット・エッジの形成にあることを説明している. この章の最後では, SOC ダイナミクスが見られるパラメータの領域についての詳細な議論が行われ, 本モデルでは現実的かつ広いパラメータ領域で SOC が観測されることを示している.

本研究で構築したネットワーク構造の SOC モデルにより, フラクタル・ネットワークの構造形成メカニズムとフラクタル構造からスモールワールド構造へのクロスオーバー機構が初めて明らかにされた. ネットワーク構造自身の SOC モデルを提唱した研究も本研究が初めてのものであり, フラクタル性とスモールワールド性を単一のダイナミクスに基づいて説明した研究も他にはない. 一方, 本研究で構築した SOC モデルで形成されたネットワークにスケールフリー性は見られなかった. フラクタル性に加えて, 多くの現実ネットワークに見られるスケールフリー性を発現させるための機構を提案することは, 現実ネットワークの構造形成機構をより深く理解する上で重要である. また, 本研究で得られた SOC の普遍クラスは, モデル・パラメータに依存せず一定であった. このことはモデルの普遍性を物語っていることになるが, 同時に他の普遍クラスに属する SOC をどのように構成すべきかという新たな問題を提起することにもなっている. これらの問題は, 今後に残された重要な課題の一

つである. 本研究を契機に, ネットワーク構造の形成機構に関する活発な議論が行われることが期待される.

謝辞

本研究を遂行するにあたり, 懇切丁寧にご指導してくださった矢久保考介教授に深く感謝いたします. また, 浅野泰寛准教授・小布施秀明助教との活発な議論も, 本研究を進める上で大いに役立ちました. 心から感謝いたします. 事務員の富樫杏子様, 数理物理工学研究室の皆様にも大変お世話になりました. 皆様の温かい励ましが心の支えとなり, 大学での研究生活を楽しむことができました. 今後も数理物理工学研究室で学んだことを忘れずに, 一層の努力を続けていく所存です.

参考文献

[1] R. Albert and A.-L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).

[2] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, (Oxford University Press, Oxford, U. K. , 2003).

[3] R. Cohen and S. Havlin, *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*, (Cambridge University Press, Cambridge, U. K. , 2010).

[4] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature **393**, 440 (1998).

[5] C. Song, S. Havlin, and H. A. Makse, Nature **433**, 392 (2005).

[6] G. Csányi and B. Szendröi, Phys. Rev. E **70**, 016122 (2004).

[7] G. Concas, M. F. Locci, M. Marchesi, S. Pinna, and I. Turnu, Europhys. Lett. **76**, 1221 (2006).

[8] M. Guida and F. Maria, Chaos Solitons & Fractals **31**, 527 (2007).

[9] F. Kawasaki and K. Yakubo, Phys. Rev. E **82**, 036113 (2010).

[10] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).

[11] H. Takayasu and H. Inaoka, Phys. Rev. Lett. **68**, 966 (1992).

[12] A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, E. Ijjasz-Vasquez, and R. L. Bras, Phys. Rev. Lett. **70**, 822 (1993).

[13] B. Sapoval, A. Baldassarri, and A. Gabrielli, Phys. Rev. Lett. **93**, 098501 (2004).

[14] E. Bonabeau, J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 327 (1995).

[15] K. Christensen, R. Donangelo, B. Koiller, and K. Sneppen, Phys. Rev. Lett. **81**, 2380 (1998).

[16] L. de Arcangelis and H. J. Herrmann, Physica A **308**, 545 (2002).

[17] Y. Moreno and A. Vazquez, EPL **57**, 765 (2002).

[18] K.-I. Goh, D.-S. Lee, B. Kahng, and D. Kim, Phys. Rev. Lett. **91**, 148701 (2003).

[19] N. Masuda, K.-I. Goh, and B. Kahng, Phys. Rev. E **72**, 066106 (2005).

[20] M. Lin and T. L. Chen, Phys. Rev. E **71**, 016133 (2005).

[21] G. L. Pellegrini, L. de Arcangelis, H. J. Herrmann, and C. Perrone-Capano, Phys. Rev. E **76**, 016107 (2007).

[22] B. Luque, O. Miramontes, and L. Lacasa, Phys. Rev. Lett. **101**, 158702 (2008).

[23] A. Awazu and K. Kaneko, Phys. Rev. E **80**, 010902(R) (2009).

[24] H. Bhaumik and S. B. Santra, Phys. Rev. E **88**, 062817 (2013).

[25] A. Watanabe and K. Yakubo, Phys. Rev. E **89**, 052806 (2014).

[26] D. Marković and C. Gros, Phys. Rep. **536**, 41 (2014).

[27] P.-A. Noël, C. D. Brummitt, and R. M. D'Souza, Phys. Rev. E **89**, 012807 (2014).

[28] F. Slanina and M. Kotrla, Phys. Rev. Lett. **83**, 5587 (1999).

[29] D. Garlaschelli, A. Capocci, and G. Caldarelli, Nat. Phys. **3**, 813 (2007).

[30] T. P. Peixoto and C. P. C. Prado, Phys. Rev. E **69**, 025101(R) (2004).

[31] T. P. Peixoto and J. Davidsen, Phys. Rev. E **77**, 066107 (2008).

[32] P. Fronczak, A. Fronczak, and A. Hłyst, Phys. Rev. E **73**, 046117 (2006).

[33] D. Hughes, M. Paczuski, R. O. Dendy, P. Helander, and K. G. McClements, Phys. Rev. Lett. **90**, 131101 (2003).

[34] S. Bornholdt and T. Rohlf, Phys. Rev. Lett. **84**, 6114 (2000).

[35] M. Rybarsch and S. Bornholdt, PLoS ONE **9**, e93090 (2014).

[36] G. Bianconi and M. Marsili, Phys. Rev. E **70**, 035105(R) (2004).

[37] C.-W. Shin and S. Kim, Phys. Rev. E **74**, 045101(R) (2006).

[38] A. Watanabe, S. Mizutaka, and K. Yakubo, J. Phys. Soc. Jpn. **84**, 114003 (2015).

[39] S. Mizutaka and K. Yakubo, Phys. Rev. E **92**, 012814 (2015).

[40] S. Furuya and K. Yakubo, Physica A **389**, 5878 (2010).

[41] F. Fu, L. Liu, and L. Wang, Physica A **387**, 675 (2008).

[42] F. Machado, M. Santos, V. Almeida, and D. Guedes, in *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*, **33**, 44 (Springer, Heiderberg, 2010).

[43] D. M. Green and I. Z. Kiss, J. Bio. Dynam. **4**, 431 (2010).

[44] W. W. Zachary, J. Anthropol. Res. **33**, 452 (1977).

[45] M. E. J. Newman and M. Girvan, Phys. Rev. E **69**, 026113 (2004).

[46] P. Erdös and A. Rényi, Publ. Math. **6**, 290 (1959).

[47] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, A. N. Samukhin, Nucl. Phys. B **653**, 307 (2003).

[48] B. Bollobás and O. Riordan, Phys. Rev. E **69**, 036114 (2004).

[49] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, J. M. Hendrickx, and R. M. Jungers, Phys. Rev. E **76**, 066101 (2007).

[50] F. Chung and L. Lu, Adv. Appl. Math. **26**, 257 (2001).

[51] A.-L. Barabási and R. Albert, Science **286**, 509 (1999).

[52] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, Phys. Rev. E **64**, 026118 (2001).

[53] M. Molly and B. Reed, Rand. Struc. Alg. **6**, 161 (1995).

[54] M. Molly and B. Reed, Combin. Prob. Comp. **7**, 295 (1998).

[55] E. A. Bender and E. R. Canfield, J. Combin. Theory, Ser. A **24**, 296 (1978).

[56] J. Travers and S. Milgram, Sociometry **32**, 425 (1969).

[57] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins, and J. Wiener, Comput. Netw. **33**, 309 (2000).

[58] Q. Chen, H. Chang, R. Govindan, S. Jamin, S. J. Shenker, and W. Willinger, Proc. the 21st Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, 2002.

[59] 杉山浩平, 大崎博之, 今瀬真, 電子情報通信学会技術研究報告 (IN2006-15), 85 (2006).

[60] M. E. J. Newman, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **98**, 404 (2001).

[61] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthélemy, and H. E. Stanley, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **97**, 11149 (2000).

[62] R. F. i Cancho and R. V. Solé, Proc. Roy. Soc. London B **268**, 2261 (2001).

[63] S. Valverde, R. F. Cancho and R. V. Solé, Europhys. Lett. **60**, 512 (2002).

[64] R. F. i Cancho, C. Janssen, and R. V. Solé, Phys. Rev. E **64**, 046119 (2001).

[65] A. Barrat, M. Barthélemy, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **101**, 3747 (2004).

[66] H. Jeong, S. Mason, A.-L. Barabási, and Z. N. Oltvai, Nature **411**, 41 (2001).

[67] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, and A.-L. Barabási, Nature **407**, 651 (2000).

[68] 矢久保考介,「複雑ネットワークとその構造」(共立出版, 2013).

[69] M. Barthélemy and L. A. N. Amaral, Phys. Rev. Lett. **82**, 3180 (1999).

[70] M. E. J. Newman and D. J. Watts, Phys. Lett. A **263**, 341 (1999).

[71] A. Barrat and M. Weight, Eur. Phys. J. B, **13**, 547 (2000).

[72] M. E. J. Newman, C. Moore, and D. J. Watts, Phys. Rev. Lett. **84**, 3201 (2000).

[73] H. D. Rozenfeld, S. Havlin, and D. ben-Avraham, New J. Phys. **9**, 175 (2007).

[74] C. Song, S. Havlin, and H. A. Makse, Nat. Phys. **2**, 275 (2006).

[75] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, (Freeman, San Francisco, 1982).

[76] M. Kitsak, S. Havlin, G. Paul, M. Riccaboni, F. Pammolli, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **75**, 056115 (2007).

[77] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **85**, 4626 (2000).

[78] B. Drossel and F. Schwabl, Phys. Rev. Lett. **69**, 1629 (1992).

[79] Z. Olami, H. J. S. Feder, and K. Christensen, Phys. Rev. Lett. **68**, 1244 (1992).

[80] P. Bak and K. Sneppen, Phys. Rev. Lett. **71**, 4083 (1993).

[81] P. Alstrøm, Phys. Rev. A **38**, 4905 (1988).

[82] M. Paczuski, S. Maslov, and P. Bak, Phys. Rev. E **53**, 414 (1996).

[83] H. Flyvbjerg, K. Sneppen, and P. Bak, Phys. Rev. Lett. **71**, 4087 (1993).

[84] C. Guill and B. Drossel, J. Theor. Biol. **251**, 108 (2008).

[85] M. Eigen and P. Schuster, *The Hypercycle* (Springer, New York, 1979).

[86] P. F. Stadler, W. Fontana, and J. H. Miller, Physica D **63**, 378 (1993).

[87] S. A. Kauffman, *The Origin of Order* (Oxford University Press, New York, 1993).

[88] D. Segre, D. Ben-Eli, and D. Lancet, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **97**, 4112 (2000).

[89] S. Jain and S. Krishna, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **98**, 543 (2001).

[90] K. Kaneko, Adv. Chem. Phys. **130**, 543 (2005).

[91] C. Furusawa and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **90**, 088102 (2003).

[92] B. Hess and A. S. Mikhailov, Science **264**, 223 (1994).

[93] Y. Togashi and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **86**, 2459 (2001).

[94] N. M. Shnerb, Y. Louzoun, E. Bettelheim, and S. Solomon, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **97**, 10322 (2000).

[95] A. Awazu and K. Kaneko, Phys. Rev. E **76**, 041915 (2007).

[96] D. T. Gillespie, J. Comput. Phys. **22**, 403 (1976).

[97] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai, and A.-L. Barabási, Science **297**, 1551 (2002).

[98] R. Guimerà, and L. A. N. Amaral, Nature **433**, 895 (2005).

[99] M. E. J. Newman, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **103**, 8577 (2006).

[100] K. Takemoto and S. Borjigin, PLoS ONE **6**, e25874 (2011).

[101] S. Maslov and K. Sneppen, Science **296**, 910 (2002).

[102] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **67**, 026126 (2003).

[103] R. Cohen, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Phys. Rev. E **66**, 036113 (2002).

[104] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, Rev. Mod. Phys. **80**, 1275 (2008).

[105] T. Jonsson and J. F. Wheater, arXiv:cond-mat/9607087.

[106] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, Phys. Rev. Lett. **85**, 5468 (2000).

[107] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **86**, 3682 (2001).

[108] M. E. J. Newman, Phys. Rev. Lett. **89**, 208701 (2002).

[109] P. Holme, B. J. Kim, C. N. Yoon, and S. K. Han, Phys. Rev. E **65**, 056109 (2002).

[110] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, Phys. Rep. **424**, 175 (2006).

[111] L. C. Freeman, Sociometry **40**, 35 (1977).

[112] A. E. Motter and Y.-C. Lai, Phys. Rev. E **66**, 065102(R) (2002).

[113] P. Holme, Phys. Rev. E **66**, 036119 (2002).

[114] P. Crucitti, V. Latora, and M. Marchiori, Phys. Rev. E **69**, 045104(R) (2004).

[115] J. J. Wu, H. J. Sun, and Z. Y. Gao, Physica A **386**, 407 (2007).

[116] Z. J. Bao, Y. J. Cao, L. J. Ding, and G. Z. Wang, Physica A **388**, 4491 (2009).

[117] Y. Xia and D. J. Hill, Physica A **389**, 1281 (2010).

[118] B.-L. Dou, X.-G. Wang, and S.-Y. Zhang, Physica A **389**, 2310 (2010).

[119] M. A. de Menezes and A.-L. Barabási, Phys. Rev. Lett. **92**, 028701 (2004).

[120] S. Meloni, J. Gómez-Gardeñes, V. Latora, and Y. Moreno, Phys. Rev. Lett. **100**, 208701 (2008).

[121] Z. Zhou, Z.-G. Huang, L. Huang, Y.-C. Lai, L. Yang, and D.-S. Xue, Phys. Rev. E **87**, 012808 (2013).

[122] V. Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amritkar, Phys. Rev. Lett. **106**, 188701 (2011).

[123] V. Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amritkar, Phys. Rev. E **85**, 056120 (2012).

[124] J. D. Noh and H. Rieger, Phys. Rev. Lett. **92**, 118701 (2004).

[125] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1964).

[126] C. Song, L. K. Gallos, S. Havlin, and H. A. Makse, J. Stat. Mech. P03006 (2007).

[127] D. Sornette, Intl. J. Terraspace Sci. Eng. **2**, 1 (2009).

[128] D. Sornette and G. Ouillon, Eur. Phys. J.: Spec. Top. **205**, 1 (2012).

[129] H. L. D. de S. Cavalcante, M. Oriá, D. Sornette, E. Ott, and D. J. Gauthier, Phys. Rev. Lett. **111**, 198701 (2013).

[130] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, (MIT Press, 2001).