セルオートマトンとエルゴード理論

行木孝夫

ABSTRACT. ライフゲームに代表されるセルオートマトンは簡明な定義からなる系でありながら多様な挙動を示すものとして広く研究されてきた。本稿ではエルゴード理論、力学系のごく簡単な導入を行い、エントロピーや変分原理など関連する事項を整理するとともに力学系としてのセルオートマトンの特徴を明らかにする。

1. はじめに

セルオートマトンは時間発展が局所的な写像から一様に定義される格子上の離散力学系である。簡単な定義で与えられる系でありながら、その豊富な挙動は容易に特徴付けることができない。本稿では力学系としての扱いを中心に紹介したい。

歴史的には 50 年代に自己増殖系の一つとして von Neumann が提案したモデル [8, 29] に始まる。70 年代に Conway が与えたライフゲームは一種のブームを呼び、その性質は未だに問題を多く含んでいる。80 年代には Wolfram らが 2 状態 3 近傍で書かれる 256 種類の局所写像に関する集中的な数値実験を行い、非線形力学系の典型例として認識された [45]。近年は保存系を中心に可積分系との関連が注目されている。

定義 1. S を有限集合 *(*状態*)*、$L = \mathbb{Z}^d$ を d 次元格子、S^L を配置空間とする。Λ を L の有限部分集合 *(*近傍系*)* として、局所写像 *(*ルール*)* $f : S^\Lambda \to S$ を決めておく。時間発展 $\tau : S^L \to S^L$ は各配置 $x = (x_i)_{i\in L} \in S^L$ の像 τx について $(\tau x)_i = f(x_{i+\lambda}; \lambda \in \Lambda)$ と定める。このような系をセルオートマトンとよぶ。

例 2 (Conway's Game of LIFE)**.** まず、ライフゲームを例として紹介しよう。$S = \{0, 1\}$, $d = 2$, $\Lambda = \{(\pm1, 0), (0, \pm1), (\pm1, \pm1)\}$ *(*複合任意*)*,$s = \#\{\lambda \in \Lambda;\ x_\lambda = 1\}$ *(*$\#$ は集合の濃度*)* とし、f を次で与える。

$$f(x_\lambda; \lambda \in \Lambda) = \begin{cases} 1 & if\ s = 3 \\ x_0 & if\ s = 2 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

簡単にいえば、ある格子点の周囲 *8* 点にある *1* の数が *3* ならば、その格子点は次のステップで状態 *1* をとり,*2* ならばそのまま、それ以外では *0* となる。この手順を同時に各格子点について行う。初期配置に応じて様々な挙動を示すが、一例を図 *1* に示す。

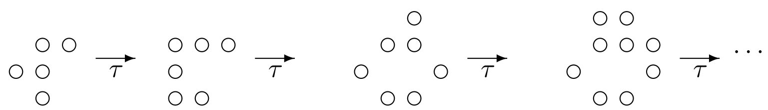
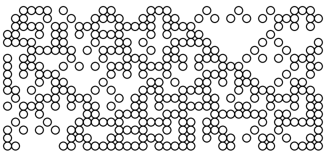


FIGURE 1. LIFE による初期配置 F ペントミノからの時間発展。定常状態に至るまで 1000 ステップ以上を要する。

例 3 (Rule 90)**.** $S = \{0, 1\}$, $\Lambda = \{1, -1\}$, $f(x_{-1}, x_1) = x_{-1} + x_1 \mod 2$ で定義する。後に述べるように、このルールは *Bernoulli* 分割を持つ一様双曲的な力学系であり、多くの結果が得られている [20, 23]。一点のみ 1 という初期配置から開始すると、適当なスケーリング極限で $\mathbb{R}^2$ 上の自己相似集合を得る [22, 40]。、図のような軌道を得る。



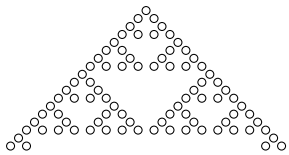


FIGURE 2. Rule 90 のダイナミクス。縦方向は時間発展、横方向は配置空間。左はランダムな初期配置、右は一点のみ 1 とする初期配置。

注意 4. $S = \{0, \cdots, N-1\}$, $f : S^{p+1} \to S$ に対し、ルールの番号を次のように決めることができる。

$$\sum_{s_0, \ldots, s_p \in S} f(s_0, \ldots, s_p) N^{\sum_{i=0}^{p} s_i N^i}$$

Wolfram は $N = 2$,$p = 2$,$\Lambda = \{-1, 0, 1\}, \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ について網羅的な計算機実験を行い [45]、漸近挙動について「*(1)* 固定点 *(2)* 周期点 *(3)* 配置空間全域でカオス的 *(4)* 最終的に周期的となるが局所的にカオス的な挙動が長時間残る」という *4* 種の分類を提唱した。

セルオートマトンの問題設定は一斉射撃問題やパターンの複製問題 [17] など背景とする研究領域に応じて多様である。その一つに力学系としての性質、すなわち、初期配置 $x \in S^L$ に対する時間発展軌道 $\{\tau^n x\}_{n=0}^{\infty}$ の性質を解析する問題がある。本稿では、セルオートマトンが持つ力学系としての特徴をエルゴード理論との関連を中心として見ることにする。

2 節では力学系とエルゴード理論の導入を行い、例 3 に関するエントロピー解析を取り上げる。3 節ではシフト可換な連続写像としてセルオートマトンを特徴づけ、配置空間上全射の場合の結果を述べる。4 節では漸近挙動を取り上げ、保存系にも触れる予定である。

2. エルゴード理論と力学系

力学系の参考書としては [1] などがある。集合 X とその上の写像 T との組 (X, T) を X 上の力学系とよぶ。特に X を位相空間、T を (区分) 連続写像あるいは同相写像などとするとき、位相力学系という。力学系における問題の一つは各点 $x \in X$ について軌道 $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ の構造を調べることである。セルオートマトンは配置空間 S^L 上の力学系と考えられるから、配置空間の構造を決めておきたい。以下では特に断らない限り $d = 1$ とする。

2.1. 配置空間とシフト.

配置空間に直積位相を入れるとコンパクトになる。開集合族は筒集合 $[a_k \ldots a_l] = \{x \in S^{\mathbb{Z}};\ x_i = a_i \in S \ \ for\ k \leq i \leq l\}$ から生成されている。同値な距離として $d_\theta(x, y) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \theta^{|i|} d_S(x_i, y_i)$ $(0 < |\theta| < 1)$ をとれる。ただし、d_S は S 上の距離である。つまり、x, y の異なる座標が原点から遠いほど距離は近くなる。

$S^{\mathbb{Z}}$ 上の写像 σ, $(\sigma x)_i = \sigma_{i+1}$ をシフト (または推移写像) とよぶ。配置 x を左に一つずらす写像である。これは直積位相に関して連続であり、$S^{\mathbb{Z}}$ はシフトで閉じている。$(S^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ の組は位相力学系となり、フルシフトと呼ぶ。$\#S = N$ の場合のフルシ

フトを (Σ_N, σ) と書くことが多い。一般に、シフトと $S^{\mathbb{Z}}$ のシフト不変閉集合との組を記号力学系とよぶ。

位相力学系の性質として次で定義される位相推移性と位相混合性とは重要である。

定義 5. ある $x \in X$ についてその軌道が X で *dense* なら位相推移的 *(transitive)* という。これは、任意の開集合 U, V についてある n が存在し、$T^n U \cap V \neq \emptyset$ となることに同値。また、任意の開集合 U, V についてある N が存在し、任意の $n > N$ について $T^n U \cap V \neq \emptyset$ となるとき、位相混合的とよぶ。

フルシフト (Σ_N, σ) は位相混合的である。位相混合的ならば位相推移的であるが、逆は成り立たない。

$X = S^{\mathbb{Z}}$ とし X の閉部分集合 Y を σ 不変とする。記号力学系 (Y, σ) をサブシフトと呼ぶ。$w \in S^n$ は $y \in Y$ が存在して $w = y_i \cdots y_{i+n-1}$ なる i があればサブシフト Y の語 (word) あるいは許可語とよぶ。Y に決して出現しない語を禁止語という。有限個の禁止語によって決まるサブシフトを SFT(subshift of finite type) と呼ぶ。SFT のファクター (シフト可換な連続写像による像) として定義できるシフトを sofic シフトという。ファクターに関して sofic シフトは閉じている。

SFT は構造行列 M によって定義される Markov 連鎖の路の全体と同一視できる。これを (Σ_M, σ) と書く。M が既約であれば (Σ_M, σ) は位相推移的であり、M が aperiodic であれば位相混合的である。

セルオートマトンを定義する写像 τ の作用によって配置空間は一般にシフト不変集合の減少列となる。まずシフトを中心として力学系、エルゴード理論の結果をまとめておく。詳細は [3, 6, 43] などを参照してほしい。

2.2. **エルゴード理論.** エルゴード理論は測度空間上の可測写像が構成する力学系の挙動を研究する手段である。写像の不変測度を通じ零集合を無視して力学系を解析するのである。以下に基本的な定義と事実をまとめておく。

定義 6. X 上の *Borel* 確率測度 μ が T 不変とは、任意の可測集合 B について $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ なること。さらに、任意の T 不変集合 $B(TB = B)$ について $\mu(B) = 0$ または $\mu(B^c) = 0$ ならば μ あるいは (X, T, μ) をエルゴード的と呼ぶ。また、任意の可測集合 B, C について $\lim_{n\to\infty} \mu(B \cap T^{-n}C) = \mu(B)\mu(C)$ なるとき、混合的 *(mixing)* という。

後述する例 13 の (I, T), (Σ_2, σ) は混合的であり、従ってエルゴード的である。

定理 7 (エルゴード定理)**.** μ をエルゴード的、$f \in L^1(X, \mu)$ とする。μ-*a.e.* かつ $L^1(\mu)$ で次が成立。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f d\mu$$

ここで出てきた軌道上の和 $\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ を $S_n f(x)$ と書くことが多い。

2.3. **エントロピー.** 不変測度 μ についてエントロピー $h_\mu(X, T)$ が定義できる。α を X の可算可測分割とする。α のエントロピーを $H(\alpha) = -\sum_{C\in\alpha} \mu(C) \log \mu(C)$ で定義する。このとき、 $\alpha_n = \vee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\alpha$ として (X, T, μ, α) のエントロピーを

$$h_\mu(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_n)$$

で定義する。収束は劣加法性と μ の T 不変性からわかる。(X, T, μ) のエントロピーは次。

$$h_\mu(X, T) = \sup_\alpha h_\mu(\alpha)$$

定理 8. $\vee_{k=0}^{\infty} T^{-k}\alpha$ が各点への分割になるとき、α を生成分割という。生成分割 α について

$$h_\mu(X,T) = h_\mu(\alpha)$$

つまり、力学系のエントロピーは生成分割のエントロピーに一致する。

フルシフト (Σ_N, σ) のエントロピーを考える。第 0 座標での分割 $\alpha = \{[a]_0; a \in S\}$ は生成分割。Σ_N に S 上の確率ベクトル $p = (p_a)_{a\in S}$ の直積測度 (Bernoulli 測度)μ_p を与える。$h_{\mu_p}(\Sigma_N, \sigma)$ は確率ベクトル p のエントロピー、つまり Shannon のエントロピー $h_p = -\sum_{a\in S} p_a \log p_a$ に一致する。

フルシフトと Bernoulli 測度の組 (Σ_N, σ, μ) を Bernoulli シフトとよぶ。確率行列 P に付随する構造行列 M から決まる SFT を (Σ_M, σ) と書く。これと P が定める推移確率から定まるシフト不変測度 μ の組を Markov シフトとよぶ。

エントロピーに関して次の二つの定理は基本的なものである。特に Ornstein の同型定理はエントロピーが求まれば同型かどうかを判定できるという意味で重要な定理である。

定理 9 (Shanon-McMillan-Breiman)**.** μ をエルゴード的、有限分割 α は $H(\alpha) < \infty$ を満たすとする。*μ-a.e.x* および L^1 で次の極限が存在する。

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(\alpha_n(x)) = h_\mu(X,T)$$

ただし、$\alpha_n(x)$ は α_n の元で x を含むもの。

定理 10 (Ornstein の同型定理 [43])**.** エントロピーは弱 *Bernoulli* 系の完全不変量である。つまり、エントロピーが一致すれば同型である。

位相的なエントロピーも可測分割のかわりに開被覆を用いて定義される。

定義 11 (位相エントロピー)**.** α を X の開被覆とする。α_n を分割の場合と同様に定義して、$H_n(\alpha) = \log \#\alpha_n$ とする。

$$h(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_n(\alpha)$$

を開被覆 α の位相エントロピーとよび、$h(X,T) = \sup_\alpha h(\alpha)$ を位相エントロピーとよぶ。

フルシフト (Σ_N, σ) の位相エントロピーは $\log N$ であり、SFT(Σ_M, σ) の位相エントロピーは M の最大個有値を λ として $\log\lambda$ となる。

定理 12. 連続なコンパクト力学系 (X,T) と X 上の *Borel* 確率測度 μ について $h(X,T) = \sup_\mu h_\mu(X,T)$ が成立。

$h(X,T) = h_\mu(X,T)$ を満たす μ が存在する時、最大エントロピー測度とよぶ。存在しても一意とは限らない。

位相混合的な SFT の最大エントロピー測度は一意に存在する。これは、対応する Markov 連鎖の構造行列が aperiodic にとれるので、最大固有値の一意性と単純性からわかる。位相混合性と位相推移性とはファクターで保存されるので、位相混合的な sofic シフトの最大エントロピー測度も存在して一意である。

例 13 はエルゴード理論による力学系の解析の初歩的な例である。カオス研究の一つの基礎でもあるが、シフトの重要性を端的に示すものでもある。

例 13. 単位区間 $I = [0,1]$ とし、$T : I \to I$ を $x \in I$ について $Tx = 2x \mod 1$ で定義する。この組から決まる力学系の軌道を考えれば、これは初期値から一意に決まる点列である。次に (Σ_2, σ) をとる。$\pi : \Sigma_2 \to I$ を $s \in \Sigma_2$ について、$\pi(s) := \sum_i x_i 2^{-i}$

(実数の二進展開) で定義する。$\pi(\sigma s) = T(\pi(s))$ となるので、(Σ_2, σ) と (I, T) は共役である。$\pi(\Sigma_2)$ は $[0, 1]$ の無理数値で *1* 対 *1* であり、有理数値では *2* 対 *1* である。今、Σ_2 上に一様 *Bernoulli* 測度 μ, $\mu([0]) = \mu([1]) = 1/2$ をとれば、I 上のルベーグ測度は π によって μ に誘導される。従って力学系 (I, T) の軌道はルベーグ測度に関して殆ど全ての点で (Σ_2, σ) と対応していることになる。

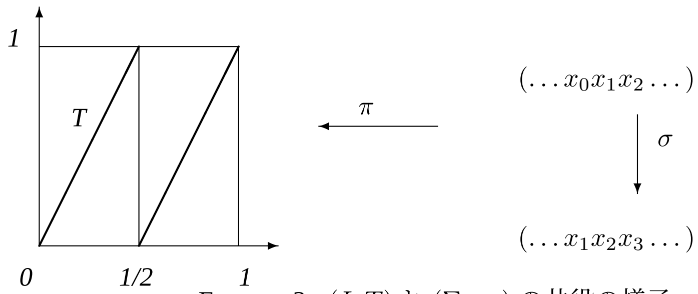


FIGURE 3. (I, T) と (Σ_2, σ) の共役の様子。

例 14. *Rule90* のエントロピーを求めよう。後に述べる定理 *17* により一様 *Bernoulli* 測度が不変である。有限分割 $\alpha = \{[x_0x_1]; x_0x_1 = 00, 01, 10, 11\}$ を定義する。α の各元の逆像を作ると、次のようになる。

$$\tau_{90}^{-1}[00] = [0000] \cup [1010] \cup [0101] \cup [1111]$$
$$\tau_{90}^{-1}[01] = [0001] \cup [1011] \cup [0100] \cup [1110]$$
$$\tau_{90}^{-1}[10] = [1000] \cup [0010] \cup [1101] \cup [0111]$$
$$\tau_{90}^{-1}[11] = [1001] \cup [0011] \cup [1100] \cup [0110]$$

各 $[00]$ などの逆像は各 $[00], [01], [10], [11]$ の部分集合の和集合だから、細分をとることで集合の和が全て分解され、$\alpha \vee \tau^{-1}\alpha = \{[x_{-1}x_0x_1x_2]\}$ となる。これを繰り返し、$\alpha \vee \tau^{-1}\alpha \vee \cdots \vee \tau^{-(n-1)}\alpha = \{[x_{-n} \ldots x_{n+1}]\}$ を得る。$\mu([x_{-n} \ldots x_{n+1}]) = 1/2^{n+1}$ から $H(\alpha \vee \tau^{-1}\alpha \vee \cdots \vee \tau^{-(n-1)}\alpha) = 2n \log 2$ となり、生成分割であることを考えれば $h_\mu(\tau_{90}) = 2 \log 2$ となる。

特に、(Σ_2, τ_{90}) と (Σ_4, σ) とが同型であることもわかった。$h(\tau_{90}) = 2 \log 2$ もわかるので、μ は最大エントロピー測度でもある。

次の定理は混合性に関するものである。

定理 15 ([36]). $f = f(x_r, \ldots, x_s)$ とする。$r < 0 \leq s$ で f が x_r について置換的であるか、または、$r \leq 0 < s$ で f が x_s について置換的であれば *Bernoulli* 測度は不変測度で混合的である。ただし、f が x_s について置換的とは、f について x_s 以外を固定し、x_s のみを変える場合に常に $f(x_r, \ldots, x_s)$ が S 上で全射となることである。

3. シフトの自己準同型とセルオートマトン

エルゴード理論を用いて力学系の研究を展開するには不変測度が必要であるから、与えられた力学系に関する自然な不変測度を導入したい。この場合には不変測度を入れる前に位相力学系としての性質を明確にしなければならない。X をコンパクト距離空間、T を連続写像とする。以下の二つの性質はそれぞれエルゴード性、混合性に対応するものである。

次の定理は基本的である。

定理 16 (Hedlund[14])**.** (X,σ) をサブシフトとする。X 上のシフト可換な連続写像 τ *(*全ての $x \in X$ について $\sigma(\tau x) = \tau(\sigma x)$ で連続*)* は定義 *1* の構造を持つ。つまりセルオートマトンを定義している。

定理 16 により、配置空間をシフト不変集合とみなすことでセルオートマトンの性質とシフトの性質とを関連づけることができる。

定理 16 から、ファクターはセルオートマトンの構造を持ち、逆も明らかである。シフトのファクターに関する結果を見ていこう。次の定理は基本的である。

定理 17. 位相混合的な *sofic* シフト (X,σ) と最大エントロピー測度 μ*,* ファクター π について次は同値。

(1) $\sup_{x\in X} \#\pi^{-1}(x) < \infty$、特に $m \in \mathbb{N}$ が存在して μ*-a.e.* で *m* 対 *1*。
(2) 任意の X の許可語 w についてその π による像 $\pi(w)$ は自然に定義でき、$\sup_{w\in W(X)} \#\pi^{-1}(w) < \infty$。
(3) π は全射。
(4) π は μ を不変にする。

全射の場合は上の定理から最大エントロピー測度が不変になり、写像として m 対 1 になる。これはセルオートマトンの定常状態に相当するが、適当な拡大性の条件 (closing 等) があれば例 13 のようにカオス的力学系の枠組みで扱える。例 3 は各点で 4 対 1 になっており、最も簡単な例だった。

シフトの準同形は那須 [27, 28] や Boyle[7] らを中心として進展している。特に、[28] では次の定理が示された。

定理 18. $S^{\mathbb{N}}$ 上で *1* 対 *1* の拡大的なセルオートマトンは *SFT* に同型となる。

いくつかの結果を以下に紹介する。

定理 19. (X,σ) を位相混合的 *sofic* シフト、位相エントロピーは $\log\lambda$ とする。X 上のファクター τ の逆像の数 $deg(\tau)$ について、正整数の有限集合 E と $u \in \mathbb{Z}[1/\lambda]$ で逆元をもつ正整数 u が存在し、$deg(\tau) = eu$ となる。

定理 20 ([7])**.** τ は Σ_J 上の各点で N 対 *1* かつ局所的に同相なファクターとする。一様 *Bernoulli* 測度 μ の正方向、負方向への制限を μ_+,μ_- とする。つまり、$i,j>0$ と $B = [x_{-i}x_{-i+1}\ldots x_j]$ について $\mu_+(B) = J^{-j-1}$,$\mu_-(B) = J^{-i}$ である。このとき空でない筒集合 C で τ の C への制限が単射になるようなものをとれば次が成立。

(1) $\mu(\tau C) = N\mu(C)$
(2) $l_\tau = \mu_-(\tau C)/\mu_-(C), r_\tau = \mu_+(\tau C)/\mu_+(C)$ は C によらない。
(3) $l_\tau r_\tau = N$
(4) l_τ, r_τ はそれぞれ J の素因数の整数べきの積となっている。

l_τ,r_τ の一方が 1 よりも小さくなる場合、その方向が力学系の安定方向に相当する。

4. セルオートマトンの漸近挙動

前節ではセルオートマトンをシフトのファクターと見なした場合の議論を紹介した。高々m 対 1 写像という性質から自然な Markov 分割の存在を議論することができ、力学系研究の流れに沿った形での議論が可能なのである。しかし、全射性が崩れた瞬間に一点の逆像が非可算無限個となる。この状況は力学系として非常に特異な性質であり、全射の場合とは違って力学系研究の流れにそった一般的な議論ができない。しかし、次節で見る漸近挙動の解析には避けられないのである。

まず、アトラクタの構造を見ておこう。$X_0 = S^L$ とする。格子の次元は任意。$Y \subset X_0$ について、ある開集合 $U, Y \subset U$ が存在し、$\tau\bar{U} \subset U, \cap_k \tau^k U = Y$ なるとき、

Y を τ の位相アトラクタとよぶ。$B(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\tau^{-n}U$ を A の basin とよぶ。$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をアトラクタの可算無限列とする。$Q = \cap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ を擬アトラクタとよぶ。

連続性とシフトとの可換性からセルオートマトンのアトラクタが持つべき構造が決ってくる。

定理 21 (Hurley[16])**.** セルオートマトンのアトラクタは次のいずれかの性質を持つ。

(1) シフト不変な最小のアトラクタ A が一意に存在し、$B(A)$ は *dense* かつ全測度を持つ。任意のアトラクタは A を含む。

(2) シフト不変な最小の擬アトラクタ Q が一意に存在し、任意のアトラクタは Q を含む。次の *(a)* または *(b)* が成立。

  (a) $B(Q)$ は全測度を持つ。

  (b) 鎖回帰集合 *([])* の *basin* は常に測度 0 である。

(3) 共通部分を持たない二つのアトラクタが存在し、非可算無限個の擬アトラクタが存在する。このとき、全ての鎖回帰集合の *basin* は測度 0 である。

Wolfram が提唱した分類は厳密に定義できるものではないが、定理 21 により、アトラクタの構造と対応させることが可能である。特に、class 4 は複雑系の数理的な解析という面からも非常に興味深いものであるが、これに相当すると言われている多くの系の挙動と定理 21 との対応関係は興味深い問題であると思われる。

これまで見たように、一次元無限系セルオートマトンの配置空間は力学系の言葉を用いるとシフト不変集合と見なせる。初期配置 $X_0 = S^{\mathbb{Z}}$ を考える。X_0 にセルオートマトンを一度作用すると、X_0 の部分集合 $X_1 = \tau X_0$ を得る。これも同様にシフト不変になるが、初期状態としてのみ存在しうる配置を除外することになるので、一般には真部分集合となる。力学系としては位相混合的な sofic シフトで $h(X_0) \geq h(X_1)$ となる。

このようにして配置空間の列 X_n を得るが、これらは位相混合的 sofic シフトなので、特徴づける量として位相エントロピー $h(X_n)$ とその一般化である位相圧力 (自由エネルギー) とが常に定義される。これらは非増加であり、$h(X_n)$ の挙動を調べることでセルオートマトンの挙動を一部なりともつかめると考えられる。

シフトに次の性質を持つ Gibbs 測度を導入しよう [6, 38]。(X, σ) を位相混合的 Markov サブシフト, $U : X \to \mathbb{R}$ を Hölder 連続関数とする。この時、次を満たす μ_U が一意に存在する。

$$P(U) = \sup_{\mu}\{h_\mu + \int_X U d\mu\} = h_{\mu_U} + \int_X U d\mu_U$$

また、全ての $x \in X$ について定数 $C > 1$ が存在し次が成立。

$$C^{-1} < \mu_U[x_0 x_1 \cdots x_{n-1}]/\exp(nP(U) + S_n U(x)) < C$$

ここで与えた Gibbs 測度はもっとも強い意味での定義であり、他の定義については [3] 等を参照のこと。

U に関する分配関数を $Z_k(U) = \sum_{x\in\mathrm{Fix}(X,\sigma^k)} \exp(-\sum_{i=0}^{k-1} U(\sigma^i x))$ と定義する。Fix$(X, \sigma^k) = \{x \in X; \sigma^k = x\}$ である。分配関数から決まる自由エネルギー (位相圧力) $P_U(X) = P_U(X, \sigma) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log Z_k(U)$ は U が Hölder 連続なら存在する。母関数

$$\zeta_X(z) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} Z_k(U))$$

を力学系のゼータ関数とよび、収束半径は $e^{P(U)}$ である [35]。特に $U = 0$(定数関数) の場合は $\zeta_X(z) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \#\mathrm{Fix}(X, \sigma^k))$ となる。

ゼータ関数は力学系の周期点の情報を全て持っている。SFT および sofic シフトの場合、許可語集合を有限オートマトンの受理語とみなし、正則言語を構成することで非常に見通しがよくなる。正確な定義は [15] などを参照。

例 22. $\{0,1\}$ 上のシフトで 11 を禁止語とするすると *Markov* になる。これは正則言語 $\langle 0, 01\rangle$ で定義される。

例 23. 正則言語 $\langle 1, 00\rangle$ で定義されるシフトは *Markov* でない。*Sofic* のゼータ関数に関しては [12] 参照。

更に、[39] に従って言語 L を軌道基 B に分類することでゼータ関数を与える手続きを構成できる。これは、シフトに適切な再帰写像を与えることに相当する。

定理 24 ([39])**.** B を軌道基とする。B が定めるシフトのゼータ関数は $\zeta(z)^{-1} = 1 - \sum_{w\in B} z^{|w|}$ となる。

4.1. エントロピーの時間発展.

命題 25 (degree function)**.** (X,σ) を位相混合的 *sofic* シフト、τ をその上のファクターとする。$x \in X$ に対し $d(x_0 \dots x_{n-1}) = \#\tau^{-1}(x_0 \dots x_{n-1})$ とおく。$\nu = \mu\circ\tau^{-1}$ として次が成立。

$$h_\mu(X,\sigma) - h_\nu(X,\sigma) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(x_0 \dots x_{n-1})$$

等号は、V を τX 上の *Hölder* 連続関数として、μ が $V = U\circ\tau$ に関する *Gibbs* 測度 $\mu = \mu_V$ の場合に成立する。

$h(X_n,\sigma)$ を考える。

命題 26. X_n を決める軌道基が $B_n = Bw^n$ と書けるとする。このとき、(X_n,σ) のゼータ関数は次の形になり、

$$\zeta_n(z)^{-1} = \zeta_L(z)^{-1} - (1-\zeta_B(z)^{-1})z^{|w|n}$$

配置空間について

$$h(X_n) - h(X_\infty) = \begin{cases} O(\lambda^n) & if\ h(X_u) \le h(X_s) \\ O(\log n/n) & if\ h(X_u) > h(X_s) \end{cases}$$

となる。

注意 27. 定理 *21* から安定な不変集合は唯一に定まるので、不安定な不変集合の位相エントロピーの大小関係がオーダーを決める。以上は自由エネルギー *(*位相圧力*)* に関しても同様。

4.2. 保存系における相転移.

まず、保存量の定義を与えよう。

定義 28 ([13])**.** 配置空間上の *Hölder* 連続関数 $U : S^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ について U がセルオートマトン $(S^{\mathbb{Z}},\tau)$ の保存量であるとは、任意の n-周期的な配置 x について $S_nU(x) = S_nU(\tau x)$ なること。

保存量を持つ系は武末 [41] によって可逆なセルオートマトンから統計力学を構成する立場から研究されてきた。保存量を持つ必要十分条件は [13] で与えられている。これは配置空間の二つのポテンシャル関数のコサイクル条件に相当し、$U(\cdot)$ と $U(\tau\cdot)$ による Gibbs 測度が一致する。

命題 29. U が保存量である必要十分条件は、次を満たす *Hölder* 連続関数 u が存在することである。

$$U(\tau x) = U(x) + u(x) - u(\sigma x)$$

保存系は自己複製系の立場からも注目されているが、1998 年頃から交通流をセルオートマトンで解析する研究が進展している。交通流のモデルは全て保存系であることが要求され、豊富な具体例が [32] に紹介されている。これらのうち、Rule184 を含む FI,BCA などの性質のよいモデルでは [4, 5] に示されている通り、平均流量が Lyapunov 関数としての振舞いを見せる。これによって、密度の低い場合にはアトラクタの構造を流量から定めることができる。

命題 30. $S_n u(x) \le S_n u(\tau x)$

Rule184 などの保存系では初期分布における臨界確率の前後で明らかな相転移を観測できる。臨界点では収束が少なくともベキ程度になると考えられるが、先に示した空間的エントロピーの評価では指数関数的な収束しか出てこない。そこで、原点からの相互作用半径 R を次で定義し、R の挙動を見ることにする。

定義 31. $S = \{0,1\}$,$x \in S^{\mathbb{Z}}$ について、

$$U(x) = \begin{cases} 1 & (x_0 = 1) \\ -1 & (x_0 = 0) \end{cases},\ R(x) = \begin{cases} \inf\{k; S_k U(x) = 0\} & (x_0 = 1) \\ 0 & (x_0 = 0) \end{cases}$$

と定義する。

R は酔歩の再帰時間と考えられるから、保存系の配置を酔歩の路の空間と同一視することで、臨界密度付近での R の挙動を平均再帰時間で下から評価できる [26]。

命題 32. μ_p-*a.e.*x について極限

$$E[R] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n R(x) = \int_X R d\mu_p$$

は存在し、かつ $E[R] \sim |p - p_c|^{-1}$ $(p \to p_c - 0)$ である。

Rule184 では $p_c = 1/2$ であり、これを拡張した最大速度 m の FI モデル [11] では $p_c = 1/(m+1)$ である。また、最大収束時間 T についても [9] の結果を用いて評価可能である。これは $T \sim |p - p_c|^{-2}$ となる。

5. おわりに

セルオートマトンについて力学系、エルゴード理論の視点から簡単なサーベイと最近の結果を紹介した。セルオートマトンと力学系の関係についてはまだまだ多くの問題が残っているが、触れなかった部分も多い。本稿が何らかの寄与になれば幸いである。

REFERENCES

[1] 青木統夫, 力学系・カオス : 非線形現象の幾何学的構成, 共立出版,1996

[2] Arnold, V., I., and Avez, A., Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classiqe,Gaunthier-Villars, 1967

[3] Baladi, V., Positive Transfer Operators and Decay of Correlations, World Scientific, 2000

[4] Belitsky, V., Krug, J., Neves, J. E., and G. M. Schötz, A cellular automaton model for two-lane traffic, J. Statist. Phys. 103 (2001), no. 5-6, 945–971.

[5] Blank, M., Variational principles in the analysis of traffic flows.(Why it is worth to go against the flow), Markov Processes and Related Fields, 6:3 (2000) 287–304

[6] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics 470, Springer, 1974

[7] Boyle, M., and Maass, A., Expansive invertible onesided cellular automata, J. Math. Soc. Japan 52 (2000), no. 4, 725–740.

[8] Codd, E. F., Cellular Automata, Academic Press, 1968

[9] Dembo, A., Karlin, S., and Zeitouni, O., Critical phenomena for sequence matching with scorring, Ann. Prob. 22 (1994) 1993–2021

[10] Domain, C., and Gutowitz, H., The topological skeleton of cellular automaton dynamics, Lattice dynamics (Paris, 1995). Phys. D 103 (1997), no. 1-4, 155–168.
[11] Fukś, H., Exact results for deterministic cellular automata traffic models, Phys. Rev. E 60 (1999), 197-202
[12] Fried, D., Finitely presented dynamical systems, Ergodic Theory and Dynamical Systems 7 (1987) 489-507
[13] Hattori, T., and Takesue, S., Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, Physica D 49 (1991), 295-322
[14] Hedlund, G., A., Endomorphisms and automorphisms of shift dynamicsl system, Mathematical systems theory 3 (1969) 320-375
[15] Hopcroft, J., E., and Ullman, J., D., Introduction to Automata Theory, languages, and computation, Addison-Wesley, 1979
[16] Hurley, M., Attractors in cellular automata, Ergodic Theory and Dynamical Systems 10(1990) 131-140
[17] Imai, K., and Morita, K., A computation-universal two-dimensional 8-state triangular reversible cellular automaton, Universal machines and computations (Metz, 1998). Theoret. Comput. Sci. 231 (2000), no. 2, 181–191.
[18] Kůrka, P., Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata, Ergodic Theory Dynam. Systems 17 (1997), no. 2, 417–433.
[19] Lind, D., A., and Marcus, B., An introduction to Symbolic Dynamics and Coding, Cambridge
[20] Matsumoto, K, C^*-algebras associated with cellular automata. Math. Scand. 75 (1994), no. 2, 195–216.
[21] 松本健吾, 記号力学系と C^* 環, 数学 53 巻 3 号 (2001) 259–278
[22] Matsuto, M., Convergence to the limit set of linear cellular automata. II., SUT J. Math. 36 (2000), no. 2, 199–224
[23] Miyamoto, M., Stationary measures for automaton rules 90 and 150, J. Math. Kyoto Univ. 34 (1994), no. 3, 531–538.
[24] Namiki, T., The degree function for cellular dynamics, Proceedings of the Japan Academy Vol. 71, Ser. A, no. 1 (1995) 10-12
[25] Namiki, T., A thermodynamic formalism for one dimensional cellular automata, Proceedings of the Japan Academy Vol. 75, Ser. A, no. 2 (1999) 16-17
[26] Namiki, T., Asymptotic behavior of one-dimensional cellular automata traffic models In: Proceedings of Cellular Automata 2001, pp. 130–134, ed. by S. Morishita, (The Japan Society of Mechanical Engineers, 2001 Tokyo)
[27] Nasu, M., Textile Systems for Endomorphisms and Automorphisms of the Shift, Mem. Amer. Math. Soc. (1995)
[28] Nasu, M.,The dynamics of expansive invertible onesided cellular automata, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 10, 4067–4084
[29] von Neumann, J., Theory of Automata: construction, reprodution, homogeneity, Part II of “Theory of self-reproducing automata”, University of Illinois Press, 1966
[30] Nishinari K., and Takahashi, D., A new deterministic CA model for traffic flow with multiple states, J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999) 93-104
[31] Nishinari K., and Takahashi, D., Multi-value cellular automaton models and metastable states in a congested phase, J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000) 7709-7720
[32] 西成活裕, 交通流のセルオートマトンモデルについて, 応用数理 12 巻 2 号 (2002) 128–139
[33] Petersen, K., Ergodic Theory, Cambridge, 1989
[34] Parry, W., Cohomology of permutative cellular automata, Israel J. Math. 99 (1997), 315–333.
[35] Parry, W., and Pollicott, M., Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics, ASTÉRISQUE 187-188, SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
[36] Shirvani, M., and Rogers, T., D., On ergodic one-dimensional cellular automata, Comm. Math. Phys. 136 (1991), no. 3, 599–605.
[37] Shereshevsky, M., A., Lyapunov exponents for one-dimensional cellular automata, J. Nonlinear Sci. 2 (1992), no. 1, 1–8
[38] Takahashi, Y., Entropy functional (free energy) for dynamical systems and their random perturbations, Proceedings of Taniguchi Symposium on Stochastic Analysis (1982) 437-467
[39] Takahashi, Y., Shift with Orbit Basis and Realization of one Dimensional Maps, Osaka Journal of Mathematics, 20 (1983) 599–629
[40] 高橋智, 釜江哲朗, エルゴード理論とフラクタル, シュプリンガー東京, 1993
[41] Takesue, S., Relaxation properties of elementary reversible cellular automata, Physica D 45 (1990) 278-284
[42] Tisseur, P., Cellular automata and Lyapunov exponents, Nonlinearity 13 (2000), no. 5, 1547–1560.
[43] 十時東生, エルゴード理論入門, 共立出版, 1971
[44] Walters, P., An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982

[45] Wolfram, S., Theory and Applications of Cellular Automata, World Scientific (1984)

060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail address: nami@math.sci.hokudai.ac.jp