HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	KONFORME INVARIANTEN IM FINSLERSCHEN RAUME II
Author(s)	Hombu, Hitoshi
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 4(1), 51-66
Issue Date	1936
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/64043
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFS_HIU_v4n1-51.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

KONFORME INVARIANTEN IM FINSLERSCHEN RAUME, II

Von

Hitoshi HOMBU

EINLEITUNG.

Das Äquivalenzproblem von den RIEMANNschen Räumen[1] ist bisher von zwei verschiedenen Seiten aus betrachtet worden. Erstens beruht die Methode von E. CARTAN darauf, dass zu einer bestimmten MONGEschen Gleichung

$$g_{\lambda\mu}\,dx^{\lambda}\,dx^{\mu} = 0$$

umkehrbar eindeutig eine sogenannte *normale konforme* Übertragung zugeordnet wird, so dass die Äquivalenz der RIEMANNschen Räume auf die der konformen Übertragungen zurückgeführt wird. Zweitens hat T. Y. THOMAS direkt mit Hilfe der Eliminationsmethode das System der konformen Grössen gesucht; das wurde kürzlich schematisch in zwei Arten sehr vereinfacht, die eine von J. L. VANDERSLICE und die andere von J. LEVINE.

Andererseits hat M. S. KNEBELMAN[2] das konforme Problem des FINSLER*schen Räume* in seiner eigenen Weise auseinandergesetzt und studiert. In meiner früheren Arbeit habe ich mich auch mit ihr in dem Fall der zwei-dimensionalen FINSLERschen Räume beschäftigt und

(1) E. CARTAN, Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Polon. math., 2 (1923), S. 171–221; T. Y. THOMAS, Differential invariants of generalized spaces, Cambridge Univ. Press (1934), S. 66–83; J. L. VANDERSLICE, Conformal tensor invariants, Proc. Nat. Acad. Sc., 20 (1934), S. 672–677; J. LEVINE, Conformal-affine connections, Proc. Nat. Acad. Sc., 21 (1935), S. 165–167; V. HLAVATÝ, Zur Konformgeometrie, I. Eichinvariante Konnexion, Proc. Kon. Akad. Wet., 38 (1935), S. 281–286.

(2) M. S. KNEBELMAN, Conformal geometry of generalized metric spaces, Proc. Nat. Acad. Sc., 15 (1929), S. 376–379.

ein vollständiges System der konformen Kovarianten hergeleitet[3]. Die dabei anzuwendende Methode, die eine Art Eliminationsmethode ist, wird im allgemeinen ohne weiteres auf den Fall von n Dimensionen erweitert (§§ 1, 2). Aber es gelang mir noch nicht, statt dieser Eliminationsmethode vom Standpunkte der konformen Übertragung aus das Problem aufzulösen.

Gelegentlich in § 3, über die konformen Invarianten des unitären Raumes wird eine kleine Bemerkung gemacht.

Vor kurzer Zeit hat T. HOSOKAWA eine notwendige Bedingung dafür untersucht, dass zwei konforme FINSLERschen Räume (im oben genannten Sinne) projektiv aufeinander abgebildet werden können[4]. Ich möchte hier diese Gelegenheit benutzen, eine Antwort auf diese Frage zu geben. Die Extremalen zweier Räume mit $ds = \mathfrak{L}(x, dx)$ und $d\bar{s} = \rho^{\frac{1}{2}}\mathfrak{L}(x, dx)$ sind nämlich

$$x^{r\prime\prime} + 2G^r = 0 \qquad \text{und} \qquad x^{r\prime\prime} + 2\bar{G}^r = 0 ,$$

wobei

$$\bar{G}^r = G^r + \frac{1}{2}\sigma_h H^{hr} ; \tag{16}$$

dafür, dass die Räume sich zueinander projektiv abbilden lassen, muss

$$\bar{G}^r = G^r + \phi x^{r\prime}$$

sein, daraus folgt

$$\phi x^{r\prime} = \frac{1}{2}\sigma_h H^{hr}{}^{(5)}$$

oder

$$\sigma_h = \psi F_{;h} \qquad \left(\psi = \frac{1}{F}(\sigma_m x^{m\prime} - 2\phi)\right) .$$

(3) H. HOMBU, Konforme Invarianten im FINSLERschen Raume, dieses Journal, 2 (1934), S. 157–168.

(4) T. HOSOKAWA, Conformal property of a manifold B_n, Jap. Journ. of Math., 9 (1932), S. 59–62.

(5) Diese Gleichung ergibt sich auch aus T. HOSOKAWA, a. a. O., (11), überschiebend mit $x^{\lambda\prime}x^{\mu\prime}$.

Differenzierend die letzte Gleichung nach $x^{k'}$, haben wir

$$\psi g_{kh} = -\psi_{;k} F_{;h} ,$$

folglich

$$|\psi g_{kh}| = 0 , \quad \psi = 0 , \quad \sigma_h = 0 ;$$

daher ist ρ konstant.

§ 1. KONFORM-AFFINE ÜBERTRAGUNG ABGELEITET IN EINEN FINSLERSCHEN RAUME.

1. In der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n wird die FINSLER-sche Massbestimmung bekanntlich folgendermassen definiert:

$$(1) \qquad ds = \Omega(x , dx) ,$$

wobei die Funktion $\Omega(x, dx)$ in Bezug auf die Argumente dx^1, dx^2, ..., dx^n positiv-homogen erster Ordnung ist.

Die Mannigfaltigkeit X_n ergänzt sich in die verallgemeinerte Mannigfaltigkeit erster Ordnung $K_n^{(1)}$, indem zu jedem Punkte in X_n jedes System von Differentialen dx^i adjungiert wird, d. h. $K_n^{(1)}$ ist der Inbegriff der Linienelemente erster Ordnung in X_n. Die Metrik in jedem Elemente (x, x') der $K_n^{(1)}$ wird natürlicherweise[6] aus der FINSLERschen (1) in X_n hergeleitet:

$$(2) \qquad \begin{cases} g_{ij}(x , x')dx^i dx^j , \\ g_{ij} = \Omega \cdot \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x^{j'}} . \end{cases}$$

Setzt man

$$(3) \qquad F(x, x') = \frac{1}{2} \Omega^2(x , x') ,$$

(6) Vgl. E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, 1934; auch L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschr., 25 (1926), S. 40–73.

so ist

$$(4) \qquad g_{ij} = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} .$$

Von dem Fundamentaltensor g_{ij} setzen wir voraus, dass die Determinante

$$(5) \qquad g = |g_{ij}|$$

nicht verschwindet[7]. Dann werden die Parameter Γ^i_{jk}, C^i_{jk} der metrischen Übertragung in $K^{(1)}_n$

$$(6) \qquad dv^i = -(\Gamma^i_{jk} dx^k + C^i_{jk} dx^{k'}) v^j$$

durch die folgenden Formeln gegeben:

$$(7) \qquad g_{hk} \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right) + C_{ijr}\frac{\partial G^r}{\partial x^{h'}} - C_{hjr}\frac{\partial G^r}{\partial x^{i'}} ,$$

$$(8) \qquad g_{hk} C^k_{ij} = C_{ihj} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F}{\partial x^{i'} \partial x^{h'} \partial x^{j'}} ,$$

und es ist

$$(9) \qquad g_{hr} G^r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^{h'} \partial x^{k}} x^{k'} - \frac{\partial F}{\partial x^h}\right) .$$

Die Torsionsgrösse A_{ijk} und die Krümmungsgrösse $R^{\cdot\cdot\cdot j}_{khi}$ der Übertragung nehmen die Form an:

$$(10) \qquad A_{ijk} = \mathfrak{Q} C_{ijk} ,$$

---

(7) D. h. die F_1-Funktion der Variationsrechnung des Integral

$$s = \int \mathfrak{x}(x, dx)$$

verschwindet nicht. Siehe L. BERWALD, a. a. O., S. 44.

$$(11)\qquad R_{khi}^{\cdots j} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial G^m}{\partial x^{h'}} - \left(\frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial G^m}{\partial x^{k'}}\right)$$

$$+ C_{im}^{j}\left(\frac{\partial^2 G^m}{\partial x^{k'}\partial x^h} - \frac{\partial^2 G^m}{\partial x^{h'}\partial x^k} - G_{kr}^{m}\frac{\partial G^r}{\partial x^{h'}} + G_{hr}^{m}\frac{\partial G^r}{\partial x^{k'}}\right)$$

$$+ \Gamma_{ik}^{*m}\Gamma_{mh}^{*j} - \Gamma_{ih}^{*m}\Gamma_{mk}^{*j},$$

$$\left(\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^{k} - C_{jr}^{k}\frac{\partial G^r}{\partial x^{i'}},\quad G_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{*k} + \frac{x^{h'}}{\mathfrak{L}}\Gamma_h A_{ij}^{k}\right),$$

während zwei andere Krümmungsgrössen S_{khij}, P_{khij} von der Torsionsgrösse A_{ijk} und ihren kovarianten Ableitungen gebildet werden:

$$S_{khij} = A_{jk}^{m}A_{ihm} - A_{jh}^{m}A_{ikm},$$

$$P_{khij} = \Gamma_i A_{jkh} - \Gamma_j A_{ikh} + \frac{x^{l'}}{\mathfrak{L}}A_{ikm}\Gamma_l A_{jh}^{m} - \frac{x^{l'}}{\mathfrak{L}}A_{jkm}\Gamma_l A_{ih}^{m}.$$

Die zur Übertragung (6) gehörigen kovarianten Ableitungen eines Vektors v^i werden durch

$$(12a)\qquad \Gamma_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{\partial v^i}{\partial x^{m'}}\frac{\partial G^m}{\partial x^{k'}} + \Gamma_{jk}^{*i}v^j,$$

$$(12b)\qquad \Gamma_k^{(1)} v^i = \mathfrak{L}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^{k'}} + C_{jk}^{i}v^j\right)$$

gegeben.

Die von E. CARTAN herrührende Theorie[8] schliesst, dass $\frac{x^{i'}}{\mathfrak{L}}$, g_{ij}, A_{ijk}, R_{khij} und deren sukzessive kovarianten Ableitungen ein vollständiges System von Differentialkomitanten bilden.

2. Die Differentialinvarianten des FINSLERschen Raumes sind Funktionen der $\mathfrak{L}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^{i'}}$, ..., die für die Gruppe aller topologischen Transformationen Invarianteneigenschaften haben. Wir verlangen nun ausserdem von diesen Funktionen noch Invarianz bei den Transformationen der Gestalt

(8) E. CARTAN, Les espaces de FINSLER.

$$\bar{\mathfrak{L}} = \big(\rho(x)\big)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{L}\,, \qquad \bar{F} = \rho F\,, \tag{13}$$

folglich auch

$$\bar{g}_{ij} = \rho g_{ij}\,, \tag{14}$$

wo ρ eine positive, willkürliche Funktion bedeutet. Die Transformation (13) wollen wir als die konforme bezeichnen (nach KNEBELMAN). Um alle Invarianten zu ermitteln, möchten wir vorerst die Transformationen von den Übertragungsparametern bei (13) auffinden. Dies gelingt durch leichte Rechnung:

$$\bar{C}^i_{jk} = C^i_{jk}\,, \tag{15}$$

$$\bar{G}^r = G^r + \frac{1}{2}\sigma_h H^{hr}\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} &+ \frac{1}{2}(A^k_i\sigma_j + A^k_j\sigma_i - g_{ij}g^{kh}\sigma_h)\\ &+ \frac{1}{2}g^{mk}(C_{ijr}H^{rh}_{;\,m} - C_{mjr}H^{rh}_{;\,i})\sigma_h\,,\end{aligned} \tag{17}$$

wobei gesetzt ist:

$$H^{ij} = x^{i\prime}x^{j\prime} - Fg^{ij}\,, \tag{18}$$

$$\sigma_h = \frac{\partial \log\rho}{\partial x^h}\,, \qquad H^{ij}_{;\,m} = \frac{\partial H^{ij}}{\partial x^{m\prime}}\,.$$

Hiermit erhält man nach (16) für ein beliebiges Skalar f

$$\bar{\nabla}_k f = \nabla_k f - \frac{1}{2}\sigma_h H^{hj}_{;\,k} f_{;\,j} \tag{19a}$$

und nach (15) für einen beliebigen Affinor $\Phi^{r_1\cdots r_\alpha}_{s_1\cdots s_\beta}$

$$\bar{\nabla}^{(1)}_k \Phi^{r_1\cdots r_\alpha}_{s_1\cdots s_\beta} = \nabla^{(1)}_k \Phi^{r_1\cdots r_\alpha}_{s_1\cdots s_\beta}\,. \tag{19b}$$

3. Eine allgemeine Grösse H heisst konform mit Gewicht p, die sich bei konformer Transformation (13) transformiert:

$$\overline{H} = \rho^p H ,$$

z. B. ist der Fundamentaltensor g_{ij} vom Gewicht eins.

Jetzt wenden wir uns zum Probleme, eine konform-affine Übertragung abzuleiten, dadurch mag das Reduktionsproblem für konforme Transformationen leicht gelöst werden.

Erstens setzen wir voraus, über ein konformes Skalar von nicht verschwindendem Gewicht verfügen zu dürfen. Dann wird aus ihm ein anderes Skalar K vom Gewicht -1 konstruiert, und ferner ein gewöhnlicher (Gewicht 0) Tensor zweiter Stufe

$$h_{ij} = K g_{ij} . \tag{20}$$

Der Tensor h_{ij} ist im allgemeinen kein von einer FINSLERschen Metrik abgeleiteter Fundamentaltensor, ausser wenn das Skalar K nur vom Orte abhängig ist; aber die FINSLERsche Metrik

$$ds^{*2} = \mathfrak{L}^{*2} = h_{ij}(x , dx)\, dx^i dx^j \tag{21}$$

ist konform invariant. Aus $\mathfrak{L}^*$ konstruiert man

$$g^*_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathfrak{L}^{*2}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = K g_{ij} + (K_{;i} F_{;j} + K_{;j} F_{;i}) + K_{;i;j} F .$$

Mit A^*_{ijk}, R^*_{khij} bezeichnen wir die Torsions- und die Krümmungsgrösse der zu h_{ij} gehörigen CARTANschen Übertragung δ^*. Damit gewinnt man den *Reduktionssatz* für die Gruppe aller topologischen Transformationen und konformen Transformationen: *Die Differentialkomitanten sind die algebraischen Komitanten der Grössen* $\frac{x^{j'}}{\mathfrak{L}^*}$, g^*_{ij}, h_{ij}, A^*_{ijk}, R^*_{khij} *und deren* δ^**-Ableitungen.* Denn, wenn die Transformationsgleichungen

$$h_{ij} = {}'h_{\alpha\beta}\frac{\partial' x^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial' x^\beta}{\partial x^j}$$

für die Bestimmungszahlen h_{ij}, ${}'h_{\alpha\beta}$ der Tensoren, deren jeder sich wie (20) aus dem zu einer FINSLERschen Metrik gehörigen Funda-

mentaltensor bilden lässt, unter einer Abbildung $x \to {}'x$ bestehen, so sind diese zwei Metriken wirklich konform[9].

Anstatt der δ^*-Ableitung, kann man eine zu h_{ij} gehörige (metrische) Konnexion in $K_n^{(1)}$ auffinden. Zu diesem Zwecke legen wir vorest die Grundübertragung der CARTANschen Übertragung $G^{*i}_{;m}$ als diejenige[10] der gesuchten zugrund und sodann fordern wir, dass die letzten zwei von den Forderungen[11], welche bei der Bestimmung von E. CARTAN eingeführt wurden, erfüllt werden. Somit haben wir die Parameter Π^i_{jk}, D^i_{jk} der Übertragung

$$(22)\quad \begin{cases} h_{hk}\Pi^k_{ij} = \dfrac{1}{2}(h_{ih,j}+h_{jh,i}-h_{ij.h})+D_{ijr}G^{*r}_{;h}-D_{hjr}G^{*r}_{;i}, \\ h_{hk}D^k_{ij} = \dfrac{1}{2}h_{ih;j}, \qquad\qquad \Pi^{*k}_{ij} = \Pi^k_{ij}-D^k_{ir}G^{*r}_{;j} \end{cases}$$

und zugehöriges kovariantes Ableitungsverfahren

$$'\Gamma_j v^k = v^k{}_{,j} - v^k_{;r}G^r_{;j}+\Pi^{*k}_{ij}v^i, \qquad '\Gamma^{(1)}_j v^k = \Omega^*(v^k_{;j}+D^k_{ij}v^i).$$

Das Reduktionssystem besteht offenbar aus $\dfrac{x^{i'}}{\Omega^*}$, h_{ij}, *Torsions- und Krümmungsgrössen, und deren* Γ'*-Ableitungen.*

Bemerkung. Ein konformes Skalar von nicht verschwindendem Gewicht gewinnt man aus einem beliebigen konform-invarianten Vektor. Z. B., wenn eine nur vom Orte abhängige Invariante I vom Gewicht 0 (d. h. $\bar{I}=I$ bei (13)) gegeben wird, so ist der kovariante Vektor $I_i \equiv \Gamma_i I$ konform-invariant (vgl. (23)) und folglich

$$\bar{g}^{ij}\bar{I}_i\bar{I}_j = \rho^{-1}g^{ij}I_iI_j.$$

4. *Zweitens* betrachten wir den Fall, dass sich eine konforme Invariante I angeben lässt, welche wirklich von der Richtung (x') des Linienelementes abhängig ist.

(9) Siehe M. S. KNEBELMAN, a. a. O.

(10) A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rend. Circ. Mat. Palermo, 56 (1932), S. 245–276, insbesondere § 1.

(11) E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, S. 10, D, E.

Nach (19a) erhält man für diese $\bar{I} = I$

$$\bar{\Gamma}_k \bar{I} - \Gamma_k I = -\frac{1}{2}\sigma_h H^{hj}_{;k} I_{;j} , \tag{23}$$

und hiermit wegen der Homogenität von H^{hj}

$$\bar{\Gamma}_0 \bar{I} - \Gamma_0 I = -\sigma_h H^{hj} I_{;j} \qquad (\Gamma_0 I \equiv x^{k'} \Gamma_k I) ,$$

woraus folgt durch Differenzierung nach $x^{k'}$ und vermöge (23)

$$(2\bar{\Gamma}_k \bar{I} - (\bar{\Gamma}_0 \bar{I})_{;k}) - (2\Gamma_k I - (\Gamma_0 I)_{;k}) = \sigma_h H^{hj} I_{;j;k} . \tag{24}$$

Jedes von (23), (24) wird bezüglich σ_h in der Form

$$\sigma_h = \alpha_h - \bar{\alpha}_h \tag{25}$$

mit nicht konform-invariantem, kovariantem Vektor α_h gelöst, wenn die Determinanten

$$|H^{hj}_{;k} I_{;j}| \qquad \text{bzw.} \qquad |I_{;j;k}|^{(12)}$$

nicht verschwindend sind. Wenn eine Gleichung von der Form (25) im allgemeinen besteht (vgl. die Endbemerkung der Nr. 6), können wir ohne weiteres eine konform-invariante Übertragung Δ herstellen, deren Parameter ausser C^k_{ij}, α_j

$$K^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2}(A^k_i \alpha_j + A^k_j \alpha_i - g_{ij} g^{kh} \alpha_h) + \frac{1}{2} g^{mk} (C_{ijr} H^{rh}_{;m} - C_{mjr} H^{rh}_{;i}) \alpha_h \tag{26a}$$

sind, und folglich deren Grundübertragungsparameter

$$L^k_j \equiv K^k_{ij} x^{i'} = G^k_{;j} + \frac{1}{2} H^{kr}_{;j} \alpha_r . \tag{26b}$$

---

(12) Da ist
$$H^{ij} g_{ik} g_{jl} = F_k F_l - F F_{kl} = \mathfrak{L}^2 (\mathfrak{L}_k \mathfrak{L}_l - \mathfrak{L}\mathfrak{L}_{kl}) ,$$
$$|H^{ij}| \cdot g^2 = \mathfrak{L}^{2n} |\mathfrak{L}_i \mathfrak{L}_j - \mathfrak{L}\mathfrak{L}_{ij}| ;$$
nach P. DELENS (La métrique angulaire des espaces de FINSLER, 1934, Paris, S. 11) verschwindet die rechte Seite nicht, also auch $|H^{ij}|$ nicht.

Die zugehörige Δ-Ableitungen für einen Vektor v^i vom Gewicht p sind

$$\Delta_h v^i = v^i_{,h} - v^i_{;m} L^m_h + K^{\cdot\cdot i}_{kh} v^k + p\alpha_h v^i ,$$

$$\Delta^{(1)}_h v^i = \mathfrak{L}(v^i_{;h} + C^i_{kh} v^k) , \quad (K^{\cdot\cdot i}_{kh} = K^i_{kh} - C^i_{km} L^m_h) ,$$

die letzte von höherem Gewicht um $\frac{1}{2}$ als v^i ist, während die erste von demselben Gewicht wie v^i. Man bestätigt leicht, dass der Tensor g_{ij} (Gewicht eins) bei Δ-Übertragung kovariant konstant ist:

$$\Delta_h g_{ij} = 0 , \qquad \Delta^{(1)}_h g_{ij} = 0 ;$$

deswegen darf diese Übertragung konform-affin genannt werden. *Das Reduktionssystem von allen konform-kovarianten und folglich auch konforminvarianten Komitanten besteht aus g_{ij}, den Torsions- und den Krümmungsgrössen, und deren Δ-Ableitungen* (vgl. Nr. 7).

Hiermit, wenn es zu verlangen ist, lässt sich eine konforminvariante affine Übertragung Δ' angeben, denn wir können im allgemeinen aus den konform-kovarianten Komitanten eine Kovariante mit nicht verschwindendem Gewicht wählen.

§ 2. KONFORME INVARIANTEN.

5. Nun wenden wir uns zum Aufsuchen von einigen konformen Invarianten, so dass das Aufstellungsproblem eines Reduktionssystemes nach Nr. 4 prinzipiell gelöst wird. Wir schliessen den Fall aus, dass die Metrik (1) RIEMANNsch ist,

Nach (19 b) sehen wir, dass die Affinoren

$$(27) \qquad \mathfrak{L} g_{i_1 i_2 i_3} , \quad \mathfrak{L}^2 g_{i_1 i_2 i_3 i_4} , \quad \ldots , \quad \mathfrak{L}^{m-2} g_{i_1 i_2 \ldots i_m} , \quad \ldots .$$

$$(g_{i_1 i_2 \ldots i_{m+1}} \equiv g_{i_1 i_2 \ldots i_m ; i_{m+1}})$$

konform-kovariant und von den Gewichten $\frac{3}{2}, 2, \ldots, \frac{m}{2}, \ldots$ sind[13]. Jeder von diesen Affinoren verschwindet nicht identisch, denn aus dem

(13) Es ist evident, dass im allgemeinen das System von g_{ij} und (27) nicht vollständig ist.

Verschwinden des einen $\Omega^{m-2}g_{i_1\ldots i_m}$ folgt ohne weiteres das des Affinors $\Omega g_{i_1 i_2 i_3}$ wegen der EULERschen Formeln für homogene Funktionen. Das Gewicht jedes von g_{ij} und (27) ist gleich seiner mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten Gradeszahl, also alle von diesem System gebildete Simultaninvarianten sind notwendig vom Gewicht Null. Es ist genug an den Satz zu erinnern, dass im allgemeinen jede Simultankomitante sich nur mit Hilfe der Addition, der Multiplikation und der Überschiebung aus den Grössen des Systems konstruieren lässt. Setzen wir voraus, dass die quadratische Form $g_{ij}\delta x^i \delta x^j$ positiv definit sei, so gibt es unendlich viele, nicht identisch verschwindende Invarianten, z. B.

$$(28)\qquad \underset{m}{I} = g^{i_1\alpha_1}\ldots g^{i_m\alpha_m}(\Omega^{m-2}g_{i_1\ldots i_m})(\Omega^{m-2}g_{\alpha_1\ldots\alpha_m}) \quad (m = 3, 4, \ldots);$$

$\underset{m}{I}$ verschwindet nicht identisch, sonst $g_{i_1 i_2\ldots i_m} = 0$.

Von den betreffenden Invarianten haben die nur von g_{ij}, Ωg_{ijk} gebildeten Invarianten, z. B.

$$\underset{3}{I},\ g^{ij}A_iA_j \qquad \left(A_i = \frac{1}{2}\Omega g^{ij}g_{ijk}\right),$$

die niedrigste Differentiationsordnung 3 nach x' von der Funktion Ω. Ist $|H^{hj}_{;k}I_{;j}| \neq 0$ von einer Invariante I erfüllt, so werden a_h und somit die wie in Nr. 4 definierte Δ-Übertragung von den Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung von Ω abhängig.

6. Im Folgenden betrachten wir das Gleichungssystem

$$(29)\qquad \Xi^h_m\sigma_h = \beta_m - \bar{\beta}_m,$$

wobei Ξ^h_m ein konform-invarianter Affinor ist und β_m, $\bar{\beta}_m$ nicht konforminvariante Vektoren sind. Ist $|\Xi^h_m| \neq 0$, kehren wir zu dem Fall in Nr. 4 zurück; also wird so vorausgesetzt, dass $|\Xi^h_m| = 0$, oder der Rang r von der Matrix (Ξ^h_m) kleiner als n ist. Es folgt so aus (29)

$$0 = \Xi^{h_1}_{[m_1}\Xi^{h_2}_{m_2}\ldots\Xi^{h_r}_{m_r}\Xi^{h}_{m]}\sigma_h = \Xi^{h_1}_{[m_1}\Xi^{h_2}_{m_2}\ldots\Xi^{h_r}_{m_r}(\beta_{m]} - \bar{\beta}_{m]});$$

das besagt, dass der Affinor

$$\sum_{m_1 m_2 \ldots m_r m}^{h_1 h_2 \ldots h_r} = \Xi_{[m_1}^{h_1} \Xi_{m_2}^{h_2} \ldots \Xi_{m_r}^{h_r} \beta_{m]}$$

konform-invariant. *Ist Σ nicht identisch verschwindend*, so gibt es mehrere, nicht verschwindende Kovarianten ; z. B.

$$K = g_{h_1 k_1} \ldots g_{h_r k_r} g^{m_1 n_1} \ldots g^{m_r n_r} g^{mn} \sum_{m_1 \ldots m_r m}^{h_1 \ldots h_r} \sum_{n_1 \ldots n_r n}^{k_1 \ldots k_r}$$

ist vom Gewicht -1 .

Man sieht daher nach Nr. 3, dass in diesem Fall eine konform-invariante metrische Übertragung bestimmt wird, welche, wie wir bereits gesehen haben, in unserem Problem eine wichtige Rolle spielt, und welche speziell im Fall (23), (24) von den Differentialquotienten bis zur 7- bzw. 8-ter Ordnung von ξ abhängig ist.

Damit ist nur der Fall $\sum = 0$ üblich.

Bemerkung 1. Durch die Differentiation erster Art von einer beliebigen Simultankomitante vom System (27) gewinnt man statt (29) folgende Gleichung, berücksichtigt auf (16), (17):

$$\Xi_{\mathfrak{A}}^{h} \sigma_h = \beta_{\mathfrak{A}} - \bar{\beta}_{\mathfrak{A}} ,$$

wo $\mathfrak{A}$ zu einem bestimmten Indizesgebiete gehört. Diese ist vielleicht nützlich für einen einzelnen Raum.

2. Im Fall $n = 2$, kann man leicht bestätigen, dass $|I_{;j;k}|$ von Null verschieden, insofern I wirklich von der Richtung des Linienelementes abhängig ist. Nach Nr. 4 und der Bemerkung von Nr. 3 wird das konforme Problem gelöst, ausser wenn Simultaninvarianten von (27) konstant sind. In meiner bereits zitierten Arbeit habe ich die fundamentale Invariante $I\left(I^2 = g^{ij} A_i A_j \text{ und auch } = I_3\right)$ benutzt und im Fall $I =$ konst. die analytische Form des Raumes angegeben[14].

3. Existieren zwei verschiedene Gleichungen von der Form (25), so ist die Differenz der zugehörigen Vektoren (β) konform-invariant.

(14) Dabei wurde die Bedingung beseitigt, dass die quadratische Form $g_{ij} \delta x^i \delta x^j$ positiv definit sei.

7. Krümmungsgrössen und andere fundamentale Grössen für die Δ-Übertragung (Nr. 4) werden folgendermassen berechnet:

$$(30)\quad \begin{cases} K^{\cdots i}_{khj} = K^{*i}_{jk,h} - K^{*i}_{jh,k} + K^{*i}_{lh} K^{*l}_{jk} - K^{*i}_{lk} K^{*l}_{jh} + K^{*i}_{jk;l} L^l_h - K^{*i}_{jh;l} L^l_k + \\ \qquad\qquad + C^i_{jl}(L^l_{k,h} - L^l_{h,k} + L^l_{h;m} L^m_k - L^l_{k;m} L^m_h)\,, \\ Q^{\cdots i}_{khj} = \mathfrak{L}(K^{*i}_{jk;h} - C^i_{jh,k} + C^i_{jh;m} L^m_k - C^m_{jh} K^{*i}_{mk} + C^i_{mh} K^{*m}_{jk} \\ \qquad\qquad + C^i_{jm} L^m_{k;h})\,, \\ S^{\cdots i}_{khj} = A^i_{mk} A^m_{jh} - A^i_{mh} A^m_{jk}\,; \end{cases}$$

$$(31)\quad A_{kh} = \Delta_{[k} a_{h]}\,, \qquad A'_{kh} = -\frac{1}{2}(\Delta^{(1)}_h a_k + \mathfrak{L} C^l_{kh} a_l)\,;$$

$$(32)\quad \begin{cases} K^{\cdots i}_{kh0} = K^{\cdots i}_{khj} \cdot \dfrac{x^{j'}}{\mathfrak{L}}\,, & Q^i_{kh} = Q^{\cdots i}_{khj} \cdot \dfrac{x^{j'}}{\mathfrak{L}}\,, \\ A^{\cdots i}_{kh} = \mathfrak{L} C^i_{kh}\,, & \mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}_{;k}\,, \end{cases}$$

deswegen haben wir die Relationen für einen Vektor v^i vom Gewicht p

$$(33)\quad \begin{cases} 2\Delta_{[k}\Delta_{h]} v^i = -K^{\cdots i}_{khj} v^j + K^{\cdots l}_{kh0} \Delta^{(1)}_l v^i + 2p A_{kh} v^i\,, \\ (\Delta_k \Delta^{(1)}_h - \Delta^{(1)}_h \Delta_k) v^i = -Q^{\cdots i}_{khj} v^j + A^l_{kh} \Delta_l v^i + Q^l_{kh} \Delta^{(1)}_l v^i + 2p A'_{kh} v^i\,, \\ 2\Delta^{(1)}_{[k} \Delta^{(1)}_{h]} v^i = -S^{\cdots i}_{khj} v^j + \mathfrak{L}_{[k} \Delta^{(1)}_{h]} v^i\,. \end{cases}$$

Die Grössen $K^{\cdots i}_{khj}$, $Q^{\cdots i}_{khj}$, $S^{\cdots i}_{khj}$, A_{kh}, A'_{kh} sind die Krümmungsgrössen von den Gewichten $0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}$, insbesondere die letzten zwei treten für den Vektor mit dem Gewicht ein, was zu beachten ist, und die übrigen Grössen $K^{\cdots i}_{kh0}$, Q^i_{kh}, A^i_{kh}, $\mathfrak{L}_k$ sind die Torsionsgrössen von den Gewichten $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.[15] *Diese Grössen und deren Δ-Ableitungen, zusammen mit g_{ij}, bilden ein vollständiges System für die konformkovarianten Differentialkomitanten.*

(15) Für die Krümmungs- und die Torsionsaffinoren werden die BIANCHIschen Identitäten bekannterweise verallgemeinert, die hier aber übergangen werden. Vgl. A. KAWAGUCHI, a. a. O., S. 266–268.

§ 3. KONFORMKRÜMMUNG VOM UNITÄREN RAUM.

8. In der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit sei eine unitäre Metrik $ds^2 = \mathfrak{L}(x^\lambda, x^\Lambda, dx^\lambda, dx^\Lambda)$ angegeben, wo die Funktion $\mathfrak{L}$ in Bezug auf dx^λ und auch dx^Λ homogen von erster Ordnung ist. Transformation der Metrik von der folgenden Form wollen wir konform nennen, analog wie in den RIEMANNschen und den FINSLERschen Räumen:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \rho \mathfrak{L} , \tag{34}$$

dabei ist ρ nur vom Orte abhängige reelle Funktion.

Einfachheitshalber beschäftigen wir uns mit dem gewöhnlichen unitären Raume

$$ds^2 = g_{\lambda M} dx^\lambda dx^M .^{(16)}$$

Bei der Transformation (34) transformieren sich $g_{\lambda M}$, $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$, $R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ folgendermassen:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{g}_{\lambda M} = \rho g_{\lambda M} , \qquad \bar{g}^{M\nu} = \rho^{-1} g^{M\nu} , \\ \bar{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda}\sigma_{,\mu} \quad (\sigma = \log\rho) , \\ \bar{S}^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{[\lambda}\sigma_{,\mu]} , \quad \bar{S}^{\cdot\cdot\pi}_{\mu\pi} = S^{\cdot\cdot\pi}_{\mu\pi} - \dfrac{n-1}{2}\sigma_\mu , \\ \bar{R}^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - A^{\nu}_{\lambda}\sigma_{,\omega,\mu} , \quad \text{konj.} \end{array}\right. \tag{35}$$

Setzt man

$$\left\{\begin{array}{l} a_\mu = \dfrac{2}{n-1} S^{\cdot\cdot\pi}_{\mu\pi} \quad (n \geqq 2) , \qquad K^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda} a_\mu , \\ T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + \dfrac{2}{n-1} A^{\nu}_{[\lambda} S^{\cdot\cdot\pi}_{\mu]\pi} = S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{[\lambda} a_{\mu]} , \quad \text{konj.}, \end{array}\right. \tag{36}$$

(16) Siehe J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Über unitäre Geometrie, Math. Ann., 103 (1930), S. 319-346; H. HOMBU, Zur Theorie der unitären Geometrie, dieses Journal, 3, S. 27-42.

so ist

$$\sigma_{\mu\cdot} = a_{\mu} - \bar{a}_{\mu} \ , \quad \text{konj.}, \tag{37}$$

$$\begin{cases} \bar{K}^{\nu}_{\lambda\mu} = K^{\nu}_{\lambda\mu} \ , \qquad K^{\nu}_{[\lambda\mu]} = T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} \ , \\ T^{\cdot\cdot\pi}_{\mu\pi} = 0 \ . \end{cases} \qquad \text{konj.} \tag{38}$$

Die Funktionen $K^{\nu}_{\lambda\mu}$ definieren eine affine Übertragung, zusammen mit

$$K^{\nu}_{\lambda M} = K^{\nu}_{M\lambda} = 0 \ , \qquad K^{\nu}_{M\Lambda} = 0 \ , \qquad \text{konj.},$$

da die Differenz $K^{\varsigma}_{\mathfrak{q}\mathfrak{P}} - \Gamma^{\varsigma}_{\mathfrak{q}\mathfrak{P}}$ ein Affinor ist. Das kovariante Differential δv^{ν} eines Vektors v^{ν} vom Gewicht p und folglich die Ableitungen $\mathcal{J}v^{\nu}$ werden in folgender Weise definiert:

$$\delta v^{\nu} = dv^{\nu} + K^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda} dx^{\mu} + p v^{\nu} (a_{\mu} dx^{\mu} + a_{M} dx^{M}) \ , \quad \text{konj.}$$

$$\mathcal{J}_{\mu} v^{\nu} = v^{\nu}_{\cdot\mu} + K^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda} + p a_{\mu} v^{\nu} \ , \quad \mathcal{J}_{M} v^{\nu} = v^{\nu}_{\cdot M} + p a_{M} v^{\nu} \ , \quad \text{konj.}$$

Der Fundamentaltensor $g_{\lambda M}$ vom unitären Raume ist kovariant konstant, wie leicht bestätigt wird.

Es besteht

$$2\Gamma_{[\mathfrak{q}}\Gamma_{\mathfrak{P}]} v^{\varsigma} = -K^{\cdot\cdot\cdot\varsigma}_{\mathfrak{P}\mathfrak{q}\mathfrak{T}} v^{\mathfrak{T}} + 2T^{\cdot\cdot\mathfrak{T}}_{\mathfrak{P}\mathfrak{q}} \Gamma_{\mathfrak{T}} v^{\varsigma} + 2p A_{\mathfrak{P}\mathfrak{q}} v^{\varsigma} \ ,$$

wo

$$\begin{cases} K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = -2A^{\nu}_{\lambda} A_{\omega\mu} \ , \qquad K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\Lambda} = 0 \ , \\ K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\Omega\mu\lambda} = R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\Omega\mu\lambda} - A^{\nu}_{\lambda} a_{\mu,\Omega} \ , \qquad K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\Omega\mu\Lambda} = 0 \ , \\ K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\Omega M\mathfrak{T}} = 0 \ , \qquad \text{konj.} \end{cases} \tag{39}$$

$$T^{\cdot\cdot\Lambda}_{\omega\mu} = T^{\cdot\cdot\varsigma}_{\Omega\mu} = 0 \ , \quad T^{\cdot\cdot\lambda}_{\omega\mu} \ , \quad A_{\mathfrak{P}\mathfrak{q}} = a_{[\mathfrak{q},\mathfrak{P}]} \qquad \text{konj.} \tag{40}$$

$K^{\cdot\cdot\cdot\varsigma}_{\mathfrak{P}\mathfrak{q}\mathfrak{T}}$, $T^{\cdot\cdot\mathfrak{T}}_{\varsigma\mathfrak{q}}$, $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{q}}$ sind die fundamentalen konform-invarianten Grössen (d. h. vom Gewicht Null). Infolgedessen, dafür dass der Raum kon-

(17) D. h. abbildbar auf den Raum $ds^2 = \delta_{\lambda M} dx^{\lambda} dx^{M}$.

form-HERMITEsch[17] sei, ist es notwendig und hinreichend, dass diese Grössen alle identisch verschwinden, oder

$$a_{\mu,\omega} = a_{\omega,\mu}, \qquad a_{\mu,\Omega} = a_{\Omega,\mu},$$

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = -A_{[\lambda}^{\nu} a_{\mu]}, \quad R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = A_{\lambda}^{\nu} a_{\mu,\Omega}.$$

Wenn also der Raum nicht konform-HERMITEsch ist, so gibt es nicht verschwindende konform-invariante Grössen und damit im allgemeinen eine Kovariante K vom Gewicht -1. *$Kg_{\lambda M}$ mit $K_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{D}}^{\cdot\cdot\mathfrak{G}}$, $T_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}^{\cdot\cdot\mathfrak{D}}$, $A_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$, und deren Δ-Ableitung bilden sodann ein Reduktionssystem für die konformen Differentialkomitanten.*

Juli 1935.