HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Recognition of plane-to-plane map-germs and its application to projective differential geometry [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	加葉田, 雄太朗
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第12685号
Issue Date	2017-03-23
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/65335
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Yutaro_Kabata_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　加葉田　雄太朗

学 位 論 文 題 名

Recognition of plane-to-plane map-germs and its application to projective differential geometry

（平面から平面への写像芽の認識問題とその射影微分幾何学への応用）

本論文では，C^∞ 級可微分写像芽 $f:\mathbb{R}^2,0\to\mathbb{R}^2,0$ の $\mathcal{A}$-認識問題とその応用として曲面の射影微分幾何学的局所論を扱う．2 つの写像芽がソースとターゲットの適当な座標変換（局所微分同相芽）で一致するとき，これらは $\mathcal{A}$-同値（右左同値）であるという． 座標変換を単に位相同型とするならば，位相的 $\mathcal{A}$-同値という．写像芽の $\mathcal{A}$-分類とは，写像芽全体の空間における同値類（$\mathcal{A}$-軌道）の余次元が小さいものから順に分類を与えるものである．例えば，余次元 2 以下の写像芽は，正則点，*fold*（折り目），*cusp*（くさび）の 3 タイプであり，これらが安定写像芽（微小摂動で安定）であることは H. Whitney による古典的な結果である．余次元 $r\,(\geq 3)$ の写像芽とは，$(r-2)$ 個のパラメータを持つ一般の位置にある写像族に現れる不安定な特異点を意味する．J. H. Rieger によって写像芽の $\mathcal{A}$-分類が余次元 6 まで与えられている．

さて，ある写像芽が具体的に与えられたとき，この写像芽が分類表の中のいずれの $\mathcal{A}$-同値類に属するのか，どのように判定できるだろうか？これは「写像芽の認識問題」と呼ばれている．Rieger の分類手順を逐次追うことはたいへん技術的でありかつ非明示的でもあるので，あまり賢明ではない．そこで，この認識問題に対する簡明なアプローチとして，佐治氏（神戸大）は Whitney の安定写像芽に対する判定法を余次元 3 の写像芽に対して拡張した．この判定法は単純な幾何的量（内在的微分）によって記述されており，そのため非専門家でも簡単に扱える “ユーザーフレンドリー” な方法である．本論文第 3 章の目的は，この種の幾何的判定法を Rieger の分類表の全ての $\mathcal{A}$-同値類（余次元 6 以下の約 30 種類）に対して拡張することである．主結果（定理 3.2）は，$\mathcal{A}$-同値類毎に対する次のような判定法から成る．

コランク 1（微分の核次元が 1）の写像芽 $f:\mathbb{R}^2,0\to\mathbb{R}^2,0$ が与えられたとき，f の Jacobian を $\lambda(\boldsymbol{x})=\det[df(\boldsymbol{x})]$ とおき，$\lambda=0$ 上の各点で $\ker df$ を張る $\mathbb{R}^2$ 上の原点周りの C^∞ ベクトル場芽 $\eta(\boldsymbol{x})$ を任意に取る．C^∞ 関数 $g(\boldsymbol{x})$ に対して，帰納的に $\eta^k g=\eta(\eta^{k-1}g)$ と表記する．このとき，次のような命題が成り立つ：

- $j^5f(0)\sim_{\mathcal{A}}(x,xy+y^5)\iff$

$$d\lambda(0)\neq 0,\ \ \eta\lambda(0)=\eta^2\lambda(0)=\eta^3\lambda(0)=0,\ \ \eta^4\lambda(0)\neq 0.$$

- $f=(x,xy+y^5+\sum_{i+j\geq 6}c_{ij}x^iy^j)$ のように表すとき，

$$c_{07}-\tfrac{5}{8}c_{06}^2\neq 0 \iff f\sim_{\mathcal{A}}(x,xy+y^5\pm y^7)\ \text{butterfly}\quad \boxed{6}$$
$$c_{07}-\tfrac{5}{8}c_{06}^2=0 \iff f\sim_{\mathcal{A}}(x,xy+y^5)\ \text{elder butterfly}\quad \boxed{7}$$

最初の「幾何的微分の条件」は位相的 $\mathcal{A}$-分類の同値類に関して重要なジェットの形を決定し，後の「Taylor 係数の条件」は写像芽の $\mathcal{A}$-型を決定するものである．証明の要点は，前者においては条件の座標不変性を示すことであり，後者においてはマザーの補題等を使った際には見えなくなってしまう “適切な座標変換” を具体的（技巧的）に構成することである．

第 4 章では曲面の中心射影の特異点分類を上記の $\mathcal{A}$-認識問題の観点から扱った．3 次元射影空間の滑らかな曲面 M をある視点 $p \in \mathbb{R}^3 - M$ から眺めるとき，いわゆる中心射影

$$\varphi_p : M \to \mathbb{R}P^2, \quad x \mapsto [x - p]$$

が定まる．これは局所的には 3 自由度のパラメータ p をもつ平面写像族と見なされることから，中心射影 φ_p には余次元 5 以下の特異点が現れるだろうと予想される．しかし実際には，良く知られる V. I. Arnold と O. A. Platonova の分類において，$\mathcal{A}$-分類における 3 タイプ（Rieger の記号で 12, 16, 8 型）が含まれない．この違いは写像 φ_p の幾何学的構成に依るものに他ならないが，その理由はいままで明らかにされていなかった．我々の判定法は，その違いを非常に明確な形で説明する―位相的 $\mathcal{A}$-同値類に関する「幾何的微分の条件」が曲面の Monge 形式を決定し，「Taylor 係数の条件」が視点の位置を決定するのである．結果として，J. Bruce の横断性定理を用いた Arnold-Platonova の定理の平明な証明，さらにはその一般化と言える 1 パラメータ曲面族の中心射影に現れる特異点分類を得ることができた（定理 4.6）．

第 4 章の副産物として中心射影の特異点分類に対応した Monge 形式のジェットの空間の階層化が得られるが，第 5 章ではその各層に射影変換による簡易な標準形を与える（定理 5.1）．古典的には非退化な（Pick 普遍量が 0 でない）双曲点で Monge 形式が

$$xy + x^3 + y^3 + \alpha x^4 + \beta y^4 + \cdots$$

（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ はモジュライパラメーター）のように書けることが知られていたが，放物点を含む退化した点における Monge 形式が扱われたのは最近のことで O. A. Platonova のジェネリックな曲面の Monge 形式のジェットの射影分類による．本章での結果（定理 5.1）は 2 パラメーター曲面族の分岐にジェネリックに現れる曲面芽の Monge 形式の射影分類であり，Platonova の自然な拡張になっている．

第 6 章では曲面上の放物点曲線とフレクノード点曲線について考察する．ジェネリックな曲面においては放物点曲線とフレクノード点曲線は滑らかな曲線であり（フレクノード点曲線は横断的な自己交差を持ち得る），cusp of Gauss（あるいは godron）と呼ばれる点で接することが知られている．ではパラメーター曲面族においてこれらの 2 曲線はどのように振る舞うであろうか？本章の目的は第 5 章で得られた Monge 形式の標準形を (1)Davydov，Bruce，Tari 等による BDE（binary differential equation）の局所分類や，(2)Uribe-Vargas による 1 パラメーター曲面族での放物点曲線とフレクノード点曲線に関する分岐のリスト，という異なる 2 つの結果と比較することである．特に，各分岐の瞬間の曲面芽は我々の標準形のモジュライパラメーターたちによって特徴づけることができる．

第 7 章ではクロスキャップ曲面の局所射影 · アフィン微分幾何学を扱う．West は学位論文において，ジェネリックなクロスキャップの直交射影の特異点分類やクロスキャップ点の近くでの放物点曲線の解析を行っている．本章の目的はこれらを射影 · アフィン微分幾何学の枠組みで拡張することで，特に以下の 2 つの結果を得られた．(i) ジェネリックなクロスキャップの中心射影に現れる特異点分類（定理 7.1）．(ii) 楕円型クロスキャップ点近傍での放物点曲線とフレクノード点曲線の接触のオーダーの決定（定理 7.2）．