



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	或る存在証明について
Author(s)	田中, 嘉浩
Citation	経済學研究, 66(2), 5-8
Issue Date	2016-12-08
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/65508
Type	departmental bulletin paper
File Information	ES_66(2)_005-008.pdf



或る存在証明について

田 中 嘉 浩

1. はじめに

2部グラフは König の定理が成立する理論的に美しく重要なクラスであり、メカニズムデザインで中心となる Top-Trading-Cycles (TTC) や Gale-Shapley 等のマッチングのアルゴリズムもこのクラスで考えられている。

本稿では、難解な問題が2部グラフに対する重要な定理を適用することにより鮮やかに解ける例を紹介する。

2. 問題

次の問題を考える。

問題0 トランプ52枚をシャッフルして4枚ずつ13組に分ける。それぞれの組から1枚ずつ上手く選べば1~13のカードが揃うかどうかを考えよ。

この問題は実は筆者の学部向け講義でこの何年間か扱っている問題の1つだが、何のヒントもなく出されると面喰う難易度であり、殆どの方は途中で投げ出してしまうに違いない(と思う)。

より一般的には、

問題 n 種の各財から k 個ずつ $k \cdot n$ 個の財をシャッフルして k 個ずつ n 組に分ける。それぞれの組から1個ずつ上手く選べば n 種の財が揃うかどうかを考えよ。

という問題を考えたい。

3. 存在証明

2節の問題は、 n 組の1つずつを頂点とする1つの集合 S 、財の種類毎に頂点とする n 頂点の別の集合 T で互いの集合で対応する頂点を辺で繋ぐことに依り、多重辺を許す2部グラフの完全マッチング(全ての頂点に辺が接続する)が存在するか否かという問題と考えることができる。

1935年に Philip Hall は次の定理 (Hall の結婚定理とも言われる) を証明した、

Hall の定理 [3] 2部グラフ $G = (S + T, E)$ (多重辺も可) に関して、 S の任意の部分集合 X に対して、 X の近傍 $N(X)$ (X に接続する T の部分集合) が、

$$|X| \leq |N(X)|$$

を満たすことと、 S をカバーするマッチングが存在することは同値である。□

次の系の結果も知られている ([2] Corollary 2.1.3)。

系H k 正則 (どの頂点の次数も $k, k \geq 1$; 多重辺可) な2部グラフ $G = (S + T, E)$ は完全マッチングを持つ。□

以上の準備の下で問題0は簡単に解ける。

解答 題意は4正則な2部グラフで表現できる

から、系 H から完全マッチングを持つ。よって 1~13 のカードは揃う。

より一般的には、

定理 1 問題でそれぞれの組から 1 個ずつ上手く選べば n 種の財が揃う。更にこの操作を財がなくなる迄 k 回連続することができる。

〔証明〕 問題は k 正則な 2 部グラフで表現できるから、系 H から完全マッチングを持つ。よって n 種の財が揃う。 n 種の財を選んだ後は $k-1$ 正則な 2 部グラフで表現できるから、系 H から完全マッチングを持つ。数学的帰納法で題意は従う。□

定理 2 問題で任意の組の任意の財を含む n 種の財の選び方が存在する。

〔証明〕 定理 1 から k 回連続する選び方が存在する。その中で任意の組の任意の財を含む選び方でいい。□

問題 0 に定理 2 を適用すれば、
「(例えば) スペードの A を含む選び方が必ず存在する」
となるが、多くの人の直感と異なる結果と思える。

4. 解法

3 節で問題の解の存在は証明された。しかしながら、その解をどうやって計算するかをこの節では考えたい。

4.1 ネットワーク算法

3 節で解の存在を証明した枠組の延長として、 S の左に入口 s , T の右に出口 t を加え、 s から S の全ての頂点、 T の全ての頂点から t を有向辺、 S と T の間の辺も全て S から T への有

向辺とする (対応するフローネットワークを考える)。結果のグラフを、 $G' = (V', E')$ とする。

全ての有向辺の容量を 1 と考えることに依り、完全マッチングを s から t への最大フローを求める問題と考えることが出来る。依って次の定理が成立する。

定理 3 k 正則な 2 部グラフの完全マッチングは対応するフローネットワークの最大フローを Ford-Fulkerson 法で求めることにより求まる。その時、計算量は $O(|V||E|) = O(kn^2)$ になる。

〔証明〕 2 部グラフでは各辺の容量が 1 となるので、Ford-Fulkerson 法では最大フローも各有向辺のフローも整数値を取る [1, Theorem 26.10 Integrality Theorem (整数性定理)]。この時、計算時間は [1, Corollary 26.11 後] から $O(|V||E|) = O(kn^2)$ で求まる。□

4.2 最適化

ネットワーク算法は専門家以外には馴染みがない事が多く実行しにくいと思えるので別の解法を考える。

自然に思い付くのが、 S の頂点 i と隣接した T の頂点 j を繋ぐ辺のフローを x_{ij} ($0 \leq x_{ij} \leq 1$) として、次の様な輸送問題を考える方法であろう。

頂点 i と隣接した頂点集合 $N(i)$ に対して、行列 A を、

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1, \quad j \in N(i), \quad i = 1, \dots, n, \\ a_{ij} &= 0, \quad \text{otherwise}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

で定義することにより、

輸送問題 I

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij} \\ &\text{subject to} \quad \sum_j x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\quad \quad \quad \sum_i x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1,$$

と定式化される。

x_{ij} は $a_{ij} = 1$ の部分だけ考えればよく、 kn 変数（数字の重複は別変数にする）しか考えなくてよい。

問題は3節で解が有る事が分っているので、定式化した輸送問題Iは0-1計画問題で実行可能であり、問題0程度では52変数の問題であるから形式的に整数計画のプログラムを使えば取り敢えず比較的高速に解くことができる問題である。

しかしながら、整数計画はプログラムを容易に利用しにくいことや、計算複雑度がNP困難であることから n が大きい時に解くことが困難になることが予想される。

ところで、制約の係数行列は二重確率行列 (doubly stochastic matrix) であることを考えると、Birkhoff (1946) と John von Neumann (1953) が独立に発見した次の定理が成立する。

Birkhoff の定理 [5] 二重確率行列は置換行列の凸結合で表せる。□

この定理の考え方から、輸送問題の0-1制約を連続変数に緩和した次の線形計画 (Linear Programming, LP) 問題

輸送問題 L

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij} \\ & \text{subject to} && \sum_j x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ & && \sum_i x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & && x_{ij} \geq 0, \end{aligned}$$

との関係を考えることが出来る。

このままでは問題0では $x_{ij} = \frac{1}{4}$ for $a_{ij} = 1$ 等も解になってしまうので、線形計画の解法を制限する。

定理 4 k 正則な2部グラフの完全マッチングは輸送問題LをSimplex法で解くことにより得られる。

[証明] 輸送問題Iに於いて、

$$x = (x_{11_1, \dots, 11_k}, x_{22_1, \dots, 22_k}, \dots, x_{nn_1, \dots, nn_k}) \in \mathbb{R}^{kn}$$

で、行列 A の要素の部分集合からなる置換行列の1に対応する要素を1、他を0にすると、置換行列 P^ℓ に実行可能解 x^ℓ が対応する。全ての可能な置換行列 $P^{\ell_1}, \dots, P^{\ell_N}$ ($\exists N \gg 0$) で全ての実行可能解 $x^{\ell_1}, \dots, x^{\ell_N}$ を表せる。

実行可能解 $x^{\ell_1}, \dots, x^{\ell_N}$ の凸結合は、

$$\{x \mid x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x^{\ell_i}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1\}$$

となるが、Birkhoffの定理に依り、輸送問題Lの全ての制約領域を表せられる。よって $x^{\ell_1}, \dots, x^{\ell_N}$ は輸送問題Lの全ての実行可能基底解になる。

ところでSimplex法の解は実行可能基底解になる [4, Theorem 13.4] ので、輸送問題Iの解は輸送問題LをSimplex法で解くことにより得られる。□

定理4から問題はSimplex法で解けるので、手軽に一般に高速に解くことができる。

例. 問題0 ($n=13, k=4$) を実際にトランプをシャッフルして得た表1のデータで試す。

第1組を

$$x_{17} + x_{1J} + x_{1Q} + x_{1K} = 1$$

等で表し (第6組も4変数を使う) 、

$x_1 = x_{17}, x_2 = x_{1J}, \dots$ 等と付け替えて52変数、26制約の問題になる。

表 1 実験データ

第 1 組	♣ 7	◇ K	♣ J	◇ Q
第 2 組	♣ 8	♣ 9	♣ 6	♠ Q
第 3 組	◇ 7	◇ 8	◇ 9	♣ 5
第 4 組	♠ J	♡ 9	♠ K	◇ 3
第 5 組	♡ 8	♠ A	◇ 6	♠ 2
第 6 組	♡ Q	♣ 3	◇ 5	♠ 5
第 7 組	♡ A	♣ 2	♠ 6	♠ 7
第 8 組	♣ K	♡ 4	♡ 5	♣ Q
第 9 組	♣ 4	♠ 10	♡ 6	♡ 7
第 10 組	♡ K	♡ 2	♡ 3	◇ A
第 11 組	♡ 10	◇ 2	♡ J	♠ 8
第 12 組	♠ 4	♣ 10	♣ A	♠ 3
第 13 組	◇ 10	♠ 9	◇ J	◇ 4

PC 上で Simplex 法で解くと、二段階法でフェーズ 1 のピボット演算を 54 回繰り返して、それぞれの組から

(◇ K, ♣ 9, ◇ 8, ♠ J, ♠ 2, ♡ Q, ♠ 6, ♡ 5, ♡ 7, ♡ 3, ♡ 10, ♣ A, ◇ 4)

を選ぶ解を得た。

この解をそれぞれの組から除外して 39 変数, 26 制約の問題を解くと、フェーズ 1 のピボット演算を 32 回繰り返して、それぞれの組から (♣ J, ♣ 8, ◇ 7, ◇ 3, ◇ 6, [♠ 5], ♡ A, ♣ Q, ♠ 10, ♡ K, ◇ 2, ♠ 4, ♠ 9) を選ぶ解を得た。

更にそれぞれの組からこの解も除外して 26 変数, 26 制約の問題を解くと、フェーズ 1 のピボット演算を 28 回繰り返して、それぞれの組から

(♣ 7, ♠ Q, ◇ 9, ♠ K, ♡ 8, [◇ 5], ♣ 2, ♡ 4, ♡ 6, ◇ A, ♡ J, ♠ 3, ◇ 10)

を選ぶ解を得た([・] は第 2 解, 第 3 解で可変)。

残りの

(◇ Q, ♣ 6, ♣ 5, ♡ 9, ♠ A, ♣ 3, ♠ 7, ♣ K, ♣ 4, ♡ 2, ♠ 8, ♣ 10, ◇ J)

も解になる。

この例に対しては Simplex 法は高速な解法に

なっている。

5. おわりに

本稿の様な 2 部グラフの構造を持つ問題では、Hall の定理を応用することにより、定理 2 の様に必ずしも直感と一致しない結果を得られた。しかも解は Ford-Fulkerson 法や Simplex 法で高速に解くことができる。

一般の最大フロー問題（各辺の容量が全部整数）では、Ford-Fulkerson 系列の方法を用いると整数性定理に依り、すべての $f(u, v)$, $u \in S, v \in T$ の値や最大フローが整数値の解を得られる。

一般の整数変数の輸送問題（目的関数の変数の係数や制約式の右辺が 1 とは限らない整数）では Birkhoff の定理の考え方を使えないので普通は LP では解けない。

参考文献

- [1] Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., and Stein, C., *Introduction to Algorithms-3rd ed.*, The MIT Press, 2009.
- [2] Diestel, R., *Graph Theory-4th ed.*, Springer, Heidelberg, 2010.
- [3] Hall, P., "On representatives of subsets," *Journal of the London Mathematical Society*, 10(1935), 26-30.
- [4] Nocedal, J. and Wright, S.J., *Numerical Optimization-2nd ed.*, Springer, Berlin, 2006.
- [5] Schrijver, A., *Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin, 2003.