



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究
Author(s)	佐藤, 佑樹
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第12648号
Issue Date	2017-03-23
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k12648
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/65699
Type	doctoral thesis
File Information	Yuki_Sato.pdf



SSI-DT79145043

博士論文

モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究

佐藤 佑樹

2017 年 3 月

北海道大学 大学院情報科学研究科
システム情報科学専攻

本論文は北海道大学大学院情報科学研究科に
博士(工学)授与の要件として提出した博士論文である。

佐藤 佑樹

指導教員：		五十嵐一	教授
審査委員：	主査	五十嵐一	教授
	副査	小笠原悟司	教授
		北裕幸	教授

モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究*

佐藤 佑樹

概要

近年、電気システムに用いられているインダクタや変圧器、モータ等の開発・設計の過程では、数値シミュレータによる電磁界解析が行われている。これらの電磁界解析では、電磁機器の特性・性能を容易に概算できるため、電磁機器の設計・開発の過程では非常に有効な手段である。その一方で、従来のこれらの機器の設計・開発の過程では2次元における電磁界解析で近似的に特性・性能評価が行われてきた。さらなる高効率、省エネルギーな電磁機器の開発・設計のために、電磁機器の3次元構造を考慮した3次元電磁界解析の要請が高まっている。境界要素法やFDTD法等の様々な3次元電磁界解析手法が提案されているが、現在では有限要素法が広く用いられてる。有限要素法は他の手法に比べて、要素形状を四面体、六面体、三角柱と選択可能で表現能力に非常に優れている。また、非線形問題に対しても他手法と比較して非常に有効な手法である。しかし、2次元有限要素解析と比べて、3次元問題のような大規模問題となればなるほど、計算時間が長大となってしまう。

そこで、3次元有限要素解析の高速化を目的として、力学、流体解析分野等で用いられているモデル縮約法(MOR:Model Order Reduction)に着目した。モデル縮約法では、有限要素方程式の数十万から数千万次元の解ベクトルを少数の基底ベクトルではられた部分空間に射影し、その空間において解を近似的に求める手法である。モデル縮約法は、近年電磁界解析の分野でも盛んに研究されている。しかし、解の精度はその部分空間を生成する基底ベクトルの本数やその生成法に依存してしまう。また、線形問題には非常に有効な手段だが、非線形問題では解の精度が大幅に劣化してしまう。上記の問題を解決するために、部分領域モデル縮約法とDiscrete Empirical Interpolation法を併用した手法を提案した。この手法を用いることで非線形問題の解の精度を維持しながら計算時間も従来のモデル縮約法とほぼ同程度の解析時間で実行できることを示した。

電気システム全体の特性評価を行う場合、解析時間の観点からパワーエレクトロニクス回路内の電磁機器は等価回路で表現される。しかし、従来のこれらの等価回路は、(a)周波数特性を評価できない、(b)初期磁化やヒステリシス特性を評価できない、(c)渦電流損やヒステリシス損を評価できないといった欠点を有している。これらの問題点を解決するために、3次元有限要素モデルによる電磁機器の等価回路生成手法を提案した。この手法では、まず有限要素モデルをモデル縮約法を用いて電磁機器のアドミタンス関数を周波数の陽な有理関数にしている。有理関数算出後、この有理関数を満たすような等価回路を生成する。このとき、物理的な意味を有しているCauer型の等価回路とすることで、非線形

*北海道大学 大学院情報科学研究科 システム情報科学専攻 博士論文, SSI-DT79145043, 2017年3月23日。

特性を評価することが可能となる。本手法を DC-DC コンバータ内のインダクタや誘導加熱装置等に適用し、通常の 3 次元有限要素解析と同精度の解析を行えることを示した。

また、電磁機器は、損失低減や高効率化のためにモータやインダクタ、変圧器等には Litz 線や電磁鋼板、圧粉磁心等が用いられており、3 次元的に非常に微細な構造をしている。これらの 3 次元的に微細な構造を持つ機器の特性同定は非常に重要となるが、これらを用いている電磁機器はマルチスケール性の大きい問題になってしまうため、これらの機器の 3 次元有限要素解析の計算時間は長大になってしまう。これらの特性同定のためには、均質化が非常に有効な手段となる。そこで、マルチターンコイルと圧粉磁心の特性評価同定のための均質化手法を提案した。この手法では任意形状における表皮効果や近接効果を考慮した透磁率をあらかじめ解析的、数値的に求めておき、その透磁率を Ollendorff の式に代入することで巨視的な透磁率を算出する。任意形状のこの巨視的な透磁率を求める際に本手法では、モデル縮約法を用いている。この巨視的な透磁率を用いて、有限要素解析を行うことで従来の有限要素解析と比較して、大幅にメッシュ数を削減することができ、従来の有限要素解析とほぼ同精度の解析が行うことができる。本手法の妥当性を示すために、200 本の円形、楕円形、四角形型の断面を持つマルチターンコイルの巨視的な透磁率を算出し、有限要素解析に適用した。周波数、時間領域ともに従来の有限要素解析と同等の結果を計算時間を大幅に短縮し、得ることができた。また、圧粉磁心の特性同定のために、圧粉磁心を用いているインダクタの時間領域解析を行った。本解析では、巨視的な透磁率の Cauer 型の等価回路を各要素に振り分けることにより、圧粉磁心を用いたインダクタの時間領域解析を実現した。本手法では、非線形性を有している圧粉磁心にも適用可能で、本論文では圧粉磁心が非線形性を有していない場合と有している場合で比較を行い、本手法の有効性を示した。

キーワード: モデル縮約法, 有限要素法, 等価回路生成, 均質化手法

Study on Application of Model Order Reduction to Electromagnetic Field Analysis[†]

Yuki Sato

Abstract

Recently, finite element method(FEM) has been widely used for development and designing of electromagnetic devices. In FEM, it is easy to model complicated shape because FEM can use various elements such as tetrahedral and hexahedral meshes. However, 3-D analysis has heavy computational burden because 3-D FE analysis has many degree of freedoms(DoFs) which is much larger than that of 2-D FE analysis.

To accelerate the 3-D FEM, we focus on model order reduction(MOR). In MOR, the original vector can be projected onto the subspace spanned by some basis vectors obtained by principal component analysis, Krylov subspace method and so on. Because MOR can reduce the number of DoF using the basis vector, we can reduce the computational time to analyze the electromagnetic fields.

In this paper, we present new methods to

- accelerate the nonlinear electromagnetic FE analysis using MOR
- synthesize the equivalent circuit using FEM and MOR.
- effectively analyze the multi-scale problems using FEM, homogenization and MOR.

The effectiveness is shown by applying these present methods using MOR to the these above problems.

Keywords: Model order reduction, finite element method, synthesis of equivalent-circuit, homogenization method

[†]Doctoral Thesis, Division of Systems Science and Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University, SSI-DT79145043, March 23, 2017.

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	2
1.2.1	モデル縮約法を用いた過度解析の高速化	2
1.2.2	電磁機器の等価回路生成における研究	3
1.2.3	マルチスケール問題のための均質化手法の開発	3
1.3	本論文の構成	4
第 2 章	有限要素法	5
2.1	Maxwell 方程式	5
2.2	支配方程式	6
2.2.1	静磁場における支配方程式	6
2.2.2	時間領域準静磁場における支配方程式	7
2.2.3	周波数領域準静磁場における支配方程式	8
2.2.4	高周波における支配方程式	8
2.3	有限要素方程式の導出	9
2.3.1	重み付き残差法	9
2.3.2	静磁場における有限要素方程式	10
2.3.3	時間領域準静磁場における有限要素方程式	10
2.3.4	周波数領域準静磁場における有限要素方程式	11
2.3.5	高周波における有限要素方程式	12
2.4	要素の定義	12
2.4.1	一次節点要素補間関数	13
2.4.2	一次辺要素補間関数	13
2.4.3	一次六面体要素	13
2.4.4	一次四面体要素	14
2.5	有限要素方程式の離散化	17
2.5.1	空間の離散化	17
2.5.2	時間方向の離散化	19
2.6	境界条件	19
2.7	有限要素行列の構築	20
2.7.1	六面体要素の場合	20
2.7.2	四面体要素の場合	25
2.8	電流項	26
2.9	有限要素方程式と回路方程式との連成解析	27

第 3 章	モデル縮約法	29
3.1	PVL	29
3.1.1	線形システムの伝達関数	29
3.1.2	Asympototic waveform evaluation	31
3.1.3	双 Lanczos 法の利用	32
3.1.4	伝達関数の Padé 近似	35
3.2	固有直交分解法	36
3.2.1	主成分分析	36
3.2.2	有限要素方程式への適用	38
第 4 章	非線形渦電流場の時間領域有限要素解析	39
4.1	部分領域モデル縮約法	40
4.2	DEI 法	41
4.2.1	定式化	41
4.2.2	P の作成方法	42
4.2.3	準静磁場有限要素方程式への適用	43
4.3	提案手法	44
4.3.1	定式化	44
4.3.2	領域自動決定手法	45
4.4	数値解析	47
4.5	TP-EEC 法と MOR の併用手法	51
4.5.1	TP-EEC	51
4.5.2	MOR と TP-EEC 法の併用	52
4.5.3	解析結果	53
4.6	4 章のまとめ	59
第 5 章	電磁機器の等価回路生成法	61
5.1	PVL による等価回路生成法	61
5.1.1	Foster 型等価回路	62
5.1.2	Cauer 型等価回路	64
5.2	電磁鋼板の等価回路の比較	68
5.2.1	解析解による等価回路	68
5.2.2	電磁鋼板の等価回路	71
5.3	非線形特性の考慮方法	75
5.4	電磁機器の等価回路生成	77
5.4.1	インダクタモデル	77
5.4.2	誘導加熱装置	78
5.5	5 章のまとめ	82
第 6 章	均質化手法を用いた	
	マルチスケール問題の有限要素解析	85
6.1	複素実効透磁率を用いた均質化有限要素解析	86

6.1.1	複素実効透磁率	86
6.1.2	Ollendolff の式	88
6.1.3	周波数領域におけるマクロ複素実効透磁率を用いた有限要素方程式	90
6.1.4	100 回巻マルチターンコイル解析	90
6.2	マルチターンコイルの均質化解析	90
6.2.1	任意断面形状における均質化有限要素解析	91
6.2.2	時間領域均質化有限要素解析	101
6.3	圧粉磁心の均質化解析	108
6.3.1	定式化	108
6.3.2	ユニットセル解析による精度検証	111
6.3.3	有限要素方程式との連成	112
6.3.4	インダクタ解析	114
6.4	6 章のまとめ	117
第 7 章	総括	119
7.1	非線形渦電流場の時間領域有限要素解析	119
7.2	電磁機器の等価回路生成法	119
7.3	均質化手法を用いたマルチスケール問題の有限要素解析	120
7.4	今後の展望	120
	参考文献	123
	謝辞	131
	付 録 A Newton-Raphson 法	139
	付 録 B Perfect Matched Layer	141
B.1	PML の概要	141
B.2	有限要素法への導入	141
B.2.1	PML 領域内の平面波	141
B.2.2	PML 領域への入射	143
B.2.3	パラメータの配置	144
B.2.4	異方性 PML	145

目 次

1.1	スナップショット法を用いたモデル縮約法	2
2.1	六面体要素 (デカルト座標系)	15
2.2	六面体要素 (一般曲線座標系)	15
2.3	四面体要素	16
2.4	外部回路との連成	28
4.1	非線形方程式の解法アルゴリズム	40
4.2	BH curve の領域分割	46
4.3	自動領域分割アルゴリズム	47
4.4	解析モデル	48
4.5	有限要素モデルを含む回路	48
4.6	各手法, 各モデルにおける速度向上率	49
4.7	各手法, 各モデルにおける解析誤差	49
4.8	各時刻における誤差	50
4.9	各手法における磁束密度分布	50
4.10	TP-EEC 法と MOR の併用アルゴリズム	53
4.11	インダクタモデル	53
4.12	線形問題における $C = 1\mu F$ 時の電流の時間変化	55
4.13	線形問題における $C = 100\mu F$ 時の電流の時間変化	56
4.14	非線形問題における $V = 2V$ 時の電流の時間変化	57
4.15	非線形問題における $V = 8V$ 時の電流の時間変化	58
5.1	Cauer 型等価回路	62
5.2	電磁鋼板	63
5.3	Foster 直列型回路	63
5.4	Foster 並列型回路	64
5.5	電磁機器の Cauer 型等価回路	68
5.6	打ち切り誤差による影響	72
5.7	段数を打ち切った場合の電磁鋼板の複素透磁率の周波数特性	72
5.8	Cauer 型等価回路の物理的意味	76
5.9	非線形 Cauer 型等価回路	76
5.10	インダクタモデル	78
5.11	BH カーブ	78
5.12	インダクタの周波数特性	79

5.13 インダクタの等価回路と DC-DC コンバータ	80
5.14 インダクタの Φ - i 特性	80
5.15 DC-DC コンバータの解析結果	81
5.16 誘導加熱装置モデル	81
5.17 誘導加熱装置の周波数特性	82
5.18 誘導加熱装置の Φ - i 特性	83
5.19 誘導加熱装置の時間領域解析	83
5.20 被加熱材のジュール損	84
6.1 均質化手法	86
6.2 孤立した導体 (左: 円筒導体, 右: 球導体)	87
6.3 複素実効透磁率の周波数特性	88
6.4 解析モデル	90
6.5 100 回巻マルチターンコイルのインピーダンスの周波数特性	91
6.6 交番磁界が印可された任意導体	92
6.7 楕円型, 角型の反磁界係数	94
6.8 楕円型の複素実効透磁率の周波数特性	95
6.9 長方形型の複素実効透磁率の周波数特性	96
6.10 200 回巻ターンコイルモデル	97
6.11 マクロ複素実効透磁率の周波数特性	98
6.12 200 回巻ターンコイルのインピーダンス	99
6.13 磁束線の比較	100
6.14 速度向上率	101
6.15 数値解析モデル	105
6.16 コイルに流れる電流波形 (線形問題)	106
6.17 コイルに流れる電流波形 (非線形)	106
6.18 9 ステップ目における磁束線の比較	107
6.19 計算時間の比較	108
6.20 マクロ複素透磁率の Cauer 型等価回路	110
6.21 ユニットセル解析モデル	111
6.22 磁気エネルギー, ジュール損の周波数特性	112
6.23 BH 特性	113
6.24 ユニットセル内の磁場の比較	113
6.25 時間領域均質化解析の概念図	115
6.26 圧粉磁心を用いたインダクタ	115
6.27 磁束密度の比較	116
6.28 渦電流損の比較	117
B.1 解析領域と PML 領域	142
B.2 平面波の入射	144
B.3 パラメータの配置	145

表 目 次

2.1	各辺座標	14
4.1	線形問題の計算時間と速度向上率とタイムステップ数	54
4.2	非線形問題の計算時間と速度向上率とタイムステップ数	56
5.1	展開点の変化による誤差の変化	74
5.2	展開点のの変化による Foster 型の素子値の比較	74
5.3	負の素子値を除いた場合の誤差の変化	74
5.4	展開点の変化による Cauer 型の素子値の比較	74
5.5	総段数の変化による誤差の変化	74
5.6	総段数の変化による Foster 型の素子値の比較	75
5.7	総段数の変化による Cauer 型の素子値の比較	75
5.8	1/8 モデルにおけるインダクタの回路の素子値	79
5.9	1/8 モデルにおける誘導加熱装置の Cauer 型等価回路の素子値	82
6.1	各解析に要した要素数	101

第1章 序論

本章ではまずはじめに本研究の研究背景を述べる．続いて研究目的について述べ，最後に本論文の構成について述べる．

1.1 研究背景

計算機の性能向上により，リアクトルやモータなどの電磁機器の電磁界解析が広く行われるようになってきた．しかし，電磁機器の3次元の有限要素解析は未知数が膨大であり，計算時間が長大となるため，電磁機器の設計，開発等に3次元有限要素解析を使用することが難しい．また，電磁機器の制御系や駆動系の設計においては依然として計算負荷の小さい等価回路や磁気回路法が用いられている [1]-[2]．これらの手法は電磁機器と制御系や駆動系との連成解析は可能であるが，解析精度には限界がある．このため，さらに高品質な電磁機器の設計，開発を行うためには，電磁機器の3次元有限要素解析と制御系，駆動系との連成解析の高速化が強く望まれる．

また，電磁機器の設計において，有限要素モデルに基づく構造や形状，材質等の最適化の有効性が確認されている [3]-[10]．電磁機器の最適化計算では，遺伝的アルゴリズムのような多数点同時探索法を用いることが有効である．この手法は多数の個体に対して有限要素解析を行う必要がある．しかし，3次元の有限要素解析には膨大な時間が必要となるため，3次元の形状最適化はほとんど実用化されていない．そのため，2次元の有限要素モデルを代用することがほとんどであった．しかし，2次元モデルでは，解析時間は短いが解析精度が悪いという問題点がある．これらの理由より，電磁機器の様々な要求を満たすような最適化設計や形状最適化を行うためには，3次元有限要素解析の高速化が強く望まれている．

この3次元有限要素解析の計算時間を短くする手法の一つとして，モデル縮約法 (Model Order Reduction: MOR) と呼ばれる手法が提案されている [11]-[24]．モデル縮約法は，基底変換により，元問題の未知数を大幅に減らす手法である．このモデル縮約法と呼ばれる手法は，大きく2つの種類に分けられる．一つは，元問題のシステム行列の次元数を直接縮約する手法である [12]-[16]．この手法では，Pade via Lanczos (PVL) [12][13] や Passive Reduced Interconnect Macromodeling Algorithm (PRIMA) [14] と呼ばれる手法を用いて，正規直交基底を作成し，システムの伝達関数の次元数を小さくする．これらの手法は，線形システムにおける伝達関数の有理関数を高速に求める手法で，電磁波問題や伝送線路等の高周波の解析において有効性が確認されている [15][16]．しかし，これらの手法は原理的に非線形問題に適用することが難しいといった欠点がある．

一方で，固有直交分解法と呼ばれる電磁界の分布のスナップショットから正規直交基底を作成することにより，元問題の未知数を縮約する手法が提案されている [17]-[24]．この

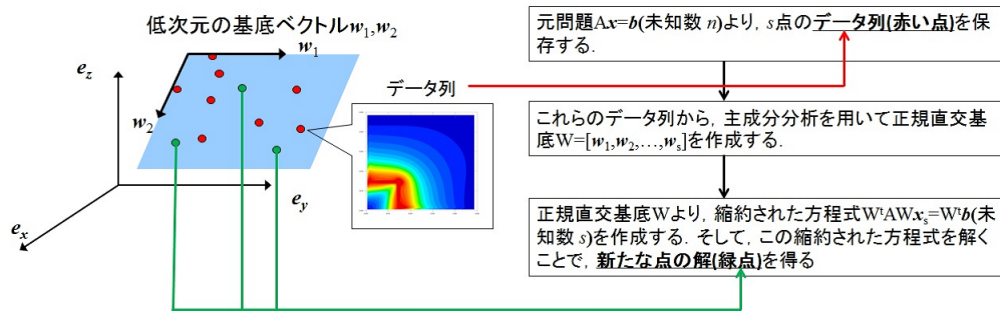


図 1.1: スナップショット法を用いたモデル縮約法

手法は時間や周波数の変化による電磁界分布をスナップショットすることで、様々な問題に適用することができる。また、本手法は原理的に非線形問題に適用することが可能である。図 1.1 に固有直交分解法を用いたモデル縮約法の概略図を示す。まず、固有直交分解法によるモデル縮約法は、時間や周波数、形状の変化による電磁界分布をスナップショットする。そのスナップショットした解から主要な基底を主成分分析を用いて作成する。この作成した新たな基底を用いて、元問題の未知数を新たな基底を持つ空間へと写像する。これにより、その縮約された未知数を元問題に代入することにより、元問題の方程式も小さくなり、高速に元問題を解くことができる。これにより、非線形準静磁場問題 [20][21]、準静電場問題 [19]、最適化問題 [22]、高周波問題 [18][22] 等、様々な問題に適用されている。

1.2 研究目的

本研究の目的は、電磁機器の設計・開発をより高効率に行うための数理モデルの構築である。本研究では、この数理モデルを開発するために、電磁界有限要素法とモデル縮約法を用いて行っている。近年では、非常にモデル縮約法の研究が電磁場解析の分野でも盛んに研究が行われているが、適用されている分野はごく一部である。そこで、著者らは、以下の3つ問題に対して、モデル縮約法を用いて従来よりもより高効率な数理モデルの構築を行った。

- 非線形渦電流場における非定常解析の高速化
- 電磁機器の等価回路生成における研究
- マルチスケール問題のための均質化手法の開発

1.2.1 モデル縮約法を用いた過度解析の高速化

非線形特性と渦電流を考慮した非定常電磁界解析を行う場合、以下のような3重ループの計算過程を踏まなければならない。

- 反復法による連立方程式の反復

- 非線形反復解法 of 非線形反復
- 過度解析 of 反復

この3重ループのため、時間領域の電磁界解析は周波数領域の電磁界解析と比べて非常に計算時間が膨大となるといった問題点がある。この問題点を解決するために、非線形非定常解析のためのモデル縮約法は提案されているが、様々な欠点を持っている。そこで、我々はこの問題点を解決するために、新たなモデル縮約法を提案した。本研究では、従来の非線形準静磁場非定常解析のために開発された他2手法と比較を行い、本手法の有効性を明らかにしている。

1.2.2 電磁機器の等価回路生成における研究

インダクタやリアクトル、変圧器等の電磁機器の通常、外部回路と連成している。そのため、システム全体の系として解析を行う際には、これらの電磁機器は等価回路として表現される。しかし、従来の等価回路は以下の3点を考慮できていない。

1. 広い周波数帯における特性評価
2. 磁性コアの非線形特性の考慮 (初期磁化曲線, ヒステリシス特性)
3. ヒステリシス損失, 渦電流損失の評価

本研究では、この3点を考慮するために、有限要素モデルから等価回路を生成する手法を提案した。本手法の有効性を示すため、電磁鋼板モデル、インダクタモデル、誘導加熱装置に本手法を適用した。また、本手法と有限要素解析との比較を行い、本手法の有効性を示している。

1.2.3 マルチスケール問題のための均質化手法の開発

マルチターンコイルやLitz線、圧粉磁心や電磁鋼板等の非常に微細な構造を持った電気電子機器が電気、電磁システムには用いられている。しかし、これらの機器を解析を行う際、これらの微細な素線や材料は近似的な物理定数が用いられ、これらの特性を詳細に評価できていない。その一方で、駆動周波数の上昇により、これらの微細な構造が電磁機器、素子に影響を与えるようになってきている。本研究では、これらの特性・影響を評価するための均質化手法を提案する。主に以下の点に関して着目し、研究を行った。

1. マルチターンコイル
 - (a) 角型、楕円型のような任意断面形状における均質化手法の開発
 - (b) 時間領域均質化手法の開発
2. 圧粉磁心
 - (a) 圧粉磁心の非線形特性を考慮した時間領域均質化手法の開発

1.3 本論文の構成

以下に、本論文の内容を各章ごとに概説する。

第1章 序論

本研究の背景について述べる。次に、本研究の目的について述べる。最後に本論文の構成について述べる。

第2章 有限要素法

有限要素法の概要を述べる。また、本研究で扱う六面体、四面体要素、静磁場、準静磁場、高周波における有限要素法の定式化について述べる。

第3章 モデル縮約法

本研究で用いている Padé Approximation via the Lanczos Processes と固有直交分解法に関して述べる。

第4章 非線形渦電流場の時間領域有限要素解析

非線形渦電流場の従来よりもより効率的な手法を提案し、その有効性を示す。

第5章 電磁機器の等価回路生成法

モデル縮約法を用いて電磁機器の等価回路生成手法を提案する。インダクタ、誘導加熱装置に実際に適用し、本手法の有効性を示す。

第6章 均質化手法を用いたマルチスケール問題の有限要素解析

マルチターンコイル、圧粉磁心コアの特性評価のための均質化手法を提案する。

第7章 結論

本論文の総括を行う。

第2章 有限要素法

有限要素法 (FEM: Finite Element Method)[25]-[29] とは、解析的に解くことが困難な微分方程式について、その近似解を数値計算により得る手法の一つである。有限要素法では、まず解析領域全体を要素と呼ばれる小領域に分割する。そして、要素に含まれる節点や辺上に定義される物理量を簡単な式で近似し、連立方程式を作成する。最後にその連立方程式を解くことにより、解析領域内のポテンシャル分布を求めることができる。有限要素法は要素に六面体や四面体等のさまざまな形の要素を用いることができ、複雑な形状を持った解析対象においても分割可能となる。また、解析対象の形状や境界条件が大きく異なっても同様に計算を行うことができるため、汎用的なプログラムを作成できる利点もある。これらの利点から、有限要素法は構造力学や流体力学、熱力学などの様々な分野で応用されている。

2.1 Maxwell 方程式

本節では、静磁場、準静磁場、高周波有限要素方程式の導出のために必要となる Maxwell 方程式について述べる。Maxwell 方程式は以下の 4 式で与えられる。

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.1b)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.1c)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

ここで、 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \rho$ はそれぞれ、電界、磁界、電束密度、磁束密度、電流密度、電荷密度である。これら 4 式は、上からファラデーの法則、アンペールの法則、電束密度に関するガウスの法則、磁束密度に関するガウスの法則と呼ばれる。また、アンペールの法則の右辺の電流密度は 3 つの項に分けることができる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_0 \quad (2.2a)$$

ここで、 $\mathbf{J}_c, \mathbf{J}_d, \mathbf{J}_0$ は、それぞれ伝導電流、変位電流、強制電流密度と呼ばれる。また、伝導電流、変位電流は、以下のように書き換えることができる。

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

ここで、 σ は導電率である。(2.2a), (2.3), (2.4) 式を (2.1b) 式に代入すると、以下の式を得ることができる。

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_0 \\ &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_0\end{aligned}\quad (2.5)$$

これより、Maxwell 方程式をまとめると、以下の 4 式となる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

2.2 支配方程式

本節では、静磁場、時間領域・周波数領域における準静磁場、高周波における支配方程式の導出方法について述べる。

2.2.1 静磁場における支配方程式

静磁場における、支配的な Maxwell 方程式は以下の 2 式となる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

静磁場において、伝導電流項、変位電流項は無視することができるので、(2.5) 式は以下の式となる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (2.6)$$

ここで、 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ が成り立つと仮定すると、(2.1d) 式より、

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (2.7)$$

となる磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を定義することができる。また、磁界と磁束密度の関係式は、以下となることが知られている。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.8)$$

ここで、 μ は透磁率である。これより、(2.7), (2.8) 式を (2.6) 式に代入すると、次式を得ることができる。

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_0 \quad (2.9)$$

ここで, ν は磁気抵抗率であり,

$$\nu = \frac{1}{\mu} \quad (2.10)$$

である. ここで, (2.9) 式が静磁場における支配方程式となる.

2.2.2 時間領域準静磁場における支配方程式

時間領域準静磁場における, 支配的な Maxwell 方程式は以下の3式となる.

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (2.5)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

準静磁場において, 変位電流項は無視することができるため, (2.5) 式は, 以下の式となる.

$$\text{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \quad (2.11)$$

ここで, (2.1a) 式に (2.7) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{A} \\ \text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

となり, 電界 $\mathbf{E}$ は以下のように定義することができる.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \quad (2.13)$$

ここで, φ は磁気スカラーポテンシャルである. (2.11) 式に (2.7), (2.13) 式を代入すると,

$$\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} = \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right) + \mathbf{J}_0 \quad (2.14)$$

となる. また, (2.14) 式の発散を取ると,

$$\text{div} \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right) = 0 \quad (2.15)$$

となる. これより, 準静磁場における支配方程式は以下の2式となる.

$$\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right) = \mathbf{J}_0 \quad (2.14)$$

$$\text{div} \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right) = 0 \quad (2.15)$$

この2式を支配方程式として有限要素方程式を構築して, 方程式を解く方法を一般に $A - V(A - \varphi)$ 法と呼ぶ. また, $\varphi = 0$ として, 解く方法もあり, そちらは一般に A 法と呼ぶ. この2法では, 有限要素方程式を解く際の ICCG 法の収束特性が異なり, A 法を用いた場合の方が収束特性が悪化することが知られている [30]-[33].

2.2.3 周波数領域準静磁場における支配方程式

前項でも述べたが，準静磁場における支配的な Maxwell 方程式は以下の 3 式となる．

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

ここで，解析領域内において周波数を一定と考えると，周波数領域準静磁場における支配的な Maxwell 方程式は，

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_0 \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

となる．また，準静磁場において変位電流項は無視することができるので，(2.17) 式は，

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \quad (2.18)$$

となる．電界は，(2.16) 式より，

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi \quad (2.19)$$

と定義することができる．これより，(2.18) 式に (2.7)，(2.19) 式を代入すると，

$$\operatorname{rot} \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} = \sigma (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) + \mathbf{J}_0 \quad (2.20)$$

を得ることができる．また，時間領域準静磁場のとき同様に (2.20) 式の両辺の発散を取ると，

$$\operatorname{div} \sigma (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (2.21)$$

を得る．これより，周波数領域準静磁場における支配方程式は，以下の 2 式となる．

$$\operatorname{rot} \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} + \sigma (j\omega \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{J}_0 \quad (2.20)$$

$$\operatorname{div} \sigma (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (2.21)$$

2.2.4 高周波における支配方程式

高周波における支配的な Maxwell 方程式は，以下の 3 式となる．

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

解析領域内において、周波数を一定と考えると、高周波における Maxwell 方程式は以下のよう書き換えることができる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_0 \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

電束密度と電界の間には以下の関係式が成り立つことが知られている。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.22)$$

ここで、 ϵ は誘電率である。これより、(2.7), (2.8), (2.19), (2.22) 式を (2.17) 式に代入すると、

$$\operatorname{rot} \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} = \sigma (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) + j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) + \mathbf{J}_0 \quad (2.23)$$

を得ることができる。また、複素誘電率を以下のように定義する。

$$\dot{\epsilon} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \quad (2.24)$$

これより、(2.23) 式は、

$$\operatorname{rot} \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} + j\omega \dot{\epsilon} (j\omega \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{J}_0 \quad (2.25)$$

となる。また、(2.23) 式の両辺の発散を取ることにより、以下の式を得ることができる。

$$j\omega \dot{\epsilon} \operatorname{div} (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (2.26)$$

これより、高周波における支配方程式は、以下の2式となる。

$$\operatorname{rot} \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} + j\omega \dot{\epsilon} (j\omega \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{J}_0 \quad (2.25)$$

$$j\omega \dot{\epsilon} \operatorname{div} (-j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (2.26)$$

2.3 有限要素方程式の導出

本節では、それぞれの支配方程式から有限要素方程式の導出を行う。

2.3.1 重み付き残差法

有限要素方程式を求めるために、各支配方程式に対して重み付き残差法を適用する。重み付き残差法とはそれぞれの支配方程式の残差 $\mathbf{R}_\Omega, r_\Omega$ に重み関数を掛けて解析領域 Ω で積分した値がゼロとなる条件を用いて近似解を求める方法である。それぞれの支配方程式における残差 $\mathbf{R}_\Omega, r_\Omega$ は、磁気ベクトル・スカラーポテンシャル $\mathbf{A}, \varphi$ の近似解 $\mathbf{A}', \varphi'$ を用いて、

$$\mathbf{R}_\Omega(\mathbf{A}', \varphi') \neq \mathbf{0} \quad (2.27a)$$

$$r_\Omega(\mathbf{A}', \varphi') \neq 0 \quad (2.27b)$$

となる．(2.27a), (2.27b) 式は近似解 $\mathbf{A}', \varphi'$ を用いているため $\mathbf{0}, 0$ とはならない．ここで、重み $\mathbf{W}, w$ を掛けて、解析領域全体を積分したものが 0 となることを考える．

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{R}_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (2.28a)$$

$$\int_{\Omega} w r_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (2.28b)$$

(2.28a), (2.28b) 式を同時に解くことにより、磁気ベクトル・スカラーポテンシャルの分布を求めることができる．

2.3.2 静磁場における有限要素方程式

静磁場における支配方程式 (2.9) 式に対して、重み付き残差法を適用する．

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot (\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (2.29)$$

ここで、 $\mathbf{W}$ は重みである．(2.29) 式の左辺に、ベクトル公式 $\mathbf{A} \cdot (\text{rot} \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\text{rot} \mathbf{A}) - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を適用する．

$$\int_{\Omega} \{\text{rot} \mathbf{W} \cdot \nu \text{rot} \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{W} \times \nu \text{rot} \mathbf{A})\} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (2.30)$$

また、(2.30) 式の第 2 項に対して、ガウスの発散定理を適用すると、

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{W} \cdot \nu \text{rot} \mathbf{A} d\Omega - \int_S (\mathbf{W} \times \nu \text{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (2.31)$$

となる．ここで、 S は解析領域 Ω の境界面である．(2.29) 式では、未知数 $\mathbf{A}$ に対して 2 階微分が要求されていたのに対し、(2.31) 式では、未知数 $\mathbf{A}$ に対する微分の階数が 1 階低くなっているのがわかる．これは、未知数 $\mathbf{A}$ に対し要求する条件が弱くなっている．このことを (2.31) 式は、(2.29) 式に対しての弱形式と呼ぶ．最終的に、この弱形式 (2.31) 式が静磁場における有限要素方程式となる．

2.3.3 時間領域準静磁場における有限要素方程式

時間領域準静磁場における支配方程式 (2.14), (2.15) 式の対称性考慮して、重み付き残差法を適用する．

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left\{ \text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.32a)$$

$$\int_{\Omega} w \left\{ \text{div} \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (2.32b)$$

ここで, w は重みである. (2.32a) 式に対してベクトル公式 $\mathbf{A} \cdot (\text{rot} \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\text{rot} \mathbf{A}) - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (2.32b) 式に対してベクトル公式 $\varphi \text{div} \mathbf{A} = \text{div} \varphi \mathbf{A} - \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{A}$ を適用する.

$$\int_{\Omega} \left\{ \text{rot} \mathbf{W} \nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{A}) + \sigma \mathbf{W} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.33a)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \text{div} w \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \text{grad} w \cdot \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (2.33b)$$

ここで, (2.33a) の左辺第2項, (2.33b) 式の左辺第1項に対して, ガウスの発散定理を適用する.

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{W} \nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} d\Omega - \int_S (\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega} \sigma \mathbf{W} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.34a)$$

$$\int_S w \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \text{grad} w \cdot \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad (2.34b)$$

この (2.34a), (2.34b) 式が時間領域準静磁場の有限要素方程式となる.

2.3.4 周波数領域準静磁場における有限要素方程式

周波数領域準静磁場における支配方程式 (2.20), (2.21) 式の対称性考慮して, 重み付き残差法を適用する.

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \{ \text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} + \sigma (j\omega \mathbf{A} + j\omega \text{grad} \varphi) \} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.35a)$$

$$\int_{\Omega} w \{ \text{div} \sigma (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) \} d\Omega = 0 \quad (2.35b)$$

(2.35a) 式に対してベクトル公式 $\mathbf{A} \cdot (\text{rot} \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\text{rot} \mathbf{A}) - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (2.35b) 式に対してベクトル公式 $\varphi \text{div} \mathbf{A} = \text{div} \varphi \mathbf{A} - \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{A}$ を適用する.

$$\int_{\Omega} \{ \text{rot} \mathbf{W} \nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{A}) + \sigma \mathbf{W} \cdot (j\omega \mathbf{A} + j\omega \text{grad} \varphi) \} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.36a)$$

$$\int_{\Omega} \text{div} w \{ \sigma (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) - \text{grad} w \cdot \sigma (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) \} d\Omega = 0 \quad (2.36b)$$

ここで, (2.36a) の左辺第2項, (2.36b) 式の左辺第1項に対して, ガウスの発散定理を適用する.

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{W} \nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} d\Omega - \int_S (\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega} \sigma \mathbf{W} \cdot (j\omega \mathbf{A} + j\omega \text{grad} \varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.37a)$$

$$\int_S w \sigma (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \text{grad} w \cdot \sigma (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) d\Omega = 0 \quad (2.37b)$$

この (2.37a), (2.37b) 式が周波数領域準静磁場の有限要素方程式となる.

2.3.5 高周波における有限要素方程式

高周波における支配方程式 (2.23), (2.23) 式の対称性考慮して, 重み付き残差法を適用する.

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \{\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} + j\omega \epsilon (j\omega \mathbf{A} + j\omega \text{grad} \varphi)\} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.38a)$$

$$\int_{\Omega} w \{\text{div} j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi)\} d\Omega = 0 \quad (2.38b)$$

(2.38a) 式に対してベクトル公式 $\mathbf{A} \cdot (\text{rot} \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\text{rot} \mathbf{A}) - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (2.38b) 式に対してベクトル公式 $\varphi \text{div} \mathbf{A} = \text{div} \varphi \mathbf{A} - \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{A}$ を適用する.

$$\int_{\Omega} \{\text{rot} \mathbf{W} \nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{A}) + j\omega \epsilon \mathbf{W} \cdot (j\omega \mathbf{A} + j\omega \text{grad} \varphi)\} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.39a)$$

$$\int_{\Omega} \text{div} w \{j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) - \text{grad} w \cdot j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi)\} d\Omega = 0 \quad (2.39b)$$

ここで, (2.39a) 式の左辺第 2 項, (2.39b) 式の左辺第 1 項に対して, ガウスの発散定理を適用する.

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{W} \nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} d\Omega - \int_S (\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega} j\omega \epsilon \mathbf{W} \cdot (j\omega \mathbf{A} + j\omega \text{grad} \varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.40a)$$

$$\int_S w j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \text{grad} w \cdot j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \text{grad} \varphi) d\Omega = 0 \quad (2.40b)$$

この (2.40a), (2.40b) 式が高周波における有限要素方程式となる.

2.4 要素の定義

有限要素法では, 解析領域を要素と呼ばれる小分割に分割し, それぞれの要素内における物理量を単純な関数で近似をして解析を行う. 要素の形状は一般的に, 二次元の場合は多角形, 三次元の場合は多面体を用いる. また, 要素は, 未知数の定義の仕方によって, 節点要素や辺要素などの種類に分けられる. 節点要素では要素の節点における物理量について, その各方向成分を未知数とする. 辺要素では, 物理量の各辺への射影成分を辺に沿って積分した値を未知数とする. 未知数を一次関数で近似して取り扱う要素を一次要素, 二次関数で近似して取り扱う要素を二次要素という.

電磁場の有限要素解析を行う際に未知数として電界 $\mathbf{E}$ や磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いる場合が多い. しかし, 節点要素において未知ベクトルを定義したとき, 節点要素では物理的に要求される未知ベクトルの不連続性をうまく表現できない欠点があり, それが原因で計算精度が悪くなる可能性がある. 辺要素においては未知ベクトルの不連続性をうまく表現することができる. 本研究では, 六面体, 四面体辺要素を取扱い, 本節ではそれについて述べる. なお計算時間の考慮から一次要素を用いることとする.

2.4.1 一次節点要素補間関数

2.4.2 一次辺要素補間関数

辺要素において、未知変数 T_c は、次式のように求めたい物理量 $\mathbf{T}$ の辺 c への射影成分を辺 c に沿って矢印方向に積分した値と定義する。

$$T_c = \int_c \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.41)$$

ここで、 c は要素内で相対的につけたローカル番号である。辺要素では、求めたい物理量のうち辺方向を向いている成分を未知数とする。

また、辺要素は、次の2つの条件を満足するように構成される [34][35]。

(1) 節点要素で表されたスカラー関数の勾配が、辺要素基底で表現されること。

$$\nabla \omega_i = \sum_j G_{ji} \mathbf{N}_j \quad (2.42)$$

(2) 以下の直交性を満足すること

$$\int_{c_j} \mathbf{N}_i \cdot d\mathbf{s} = \delta_{ij} \quad (2.43)$$

このとき、 ω_i は節点要素補間関数、 G_{ji} は勾配行列、 $\mathbf{N}_j$ は辺要素補間関数、 c_j は辺の積分路、 $\mathbf{s}$ は辺ベクトルである。また、 i は、節点番号であり、 j は、辺番号を示している。勾配行列 G_{ji} とは、 j 番目の辺が i 番目の節点に流入するとき 1、流出するとき -1、それ以外と 0 とする。

2.4.3 一次六面体要素

一次六面体要素は、図 2.1 のように 6 個の節点、8 個の面、12 個の辺から成る。六面体要素は、解析対象の形状によって図 2.1 のように崩れた六面体の形となることがある。このため、図 2.1 のような六面体要素を考えるときは一般曲線座標系 (r, s, t) を用いる。一般曲線座標系は、 (r, s, t) がお互いに直交していない座標系のことを指す。一般曲線座標系を導入することで図 2.1 は図 2.2 のように書くことができる。図 2.2 のような六面体内の位置ベクトルは (2.44) 式で表すことができる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^8 N_i(r, s, t)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \quad (2.44)$$

$\mathbf{x}_0$ は、基準ベクトルであり、 $\mathbf{x}_i$ は、デカルト座標系における六面体の各節点の座標値である。 $N_i(r, s, t)$ は節点における補間関数であり、

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{8}(1 + r_i r)(1 + s_i s)(1 + t_i t) \quad (2.45)$$

で定義される．このとき， r_i, s_i, t_i は，図 2.2 に示しているように一般曲線座標系における六面体の各節点座標である．また， r, s, t の範囲は図 2.2 より， $-1 \leq r, s, t \leq 1$ となる．これより，(2.42)，(2.43) を満たす一次六面体辺要素は，以下のように定義される．

$$r \text{ 方向辺 } (j = 1, 2, 3, 4) \quad \mathbf{N}_j = \frac{1}{8}(1 + s_j s)(1 + t_j t) \nabla r \quad (2.46a)$$

$$s \text{ 方向辺 } (j = 5, 6, 7, 8) \quad \mathbf{N}_j = \frac{1}{8}(1 + t_j t)(1 + r_j r) \nabla s \quad (2.46b)$$

$$t \text{ 方向辺 } (j = 9, 10, 11, 12) \quad \mathbf{N}_j = \frac{1}{8}(1 + r_j r)(1 + s_j s) \nabla t \quad (2.46c)$$

となる．このとき， r_j, s_j, t_j は表 2.1 のようになる．

表 2.1: 各辺座標

j	r_j	s_j	t_j	j	r_j	s_j	t_j
1	0	-1	1	7	1	0	-1
2	0	1	1	8	-1	0	-1
3	0	-1	-1	9	1	-1	0
4	0	1	-1	10	1	1	0
5	1	0	1	11	-1	-1	0
6	-1	0	1	12	-1	1	0

2.4.4 一次四面体要素

一次四面体要素は，図 2.3 のように 4 個の節点，4 個の面，6 個の辺から成る．四面体要素では，体積座標を用いて要素内の座標を決定する．これより，四面体内の位置ベクトルを求めるために体積座標を導入する．

$$\lambda_\alpha = \frac{V_\alpha}{V} \quad (2.47)$$

ここで， α は要素内で相対的につけたローカルな節点番号であり， V, V_α は要素の体積，頂点 V_α 以外と任意の点 $p(x, y, z)$ が作る体積である．また，点 p が要素外，頂点 α 上，点 p と向かい合う面上ににある場合，体積座標は，

$$\lambda_\alpha = 0 \quad (\text{要素外}) \quad (2.48a)$$

$$\lambda_\alpha = 1 \quad (\text{頂点 } \alpha \text{ 上}) \quad (2.48b)$$

$$\lambda_\alpha = 0 \quad (\text{点 } p \text{ と向かい合う面上}) \quad (2.48c)$$

となる．これより，体積座標は以下を満足することがわかる．

$$\sum_{\alpha=1}^4 \lambda_\alpha = 1 \quad (2.49)$$

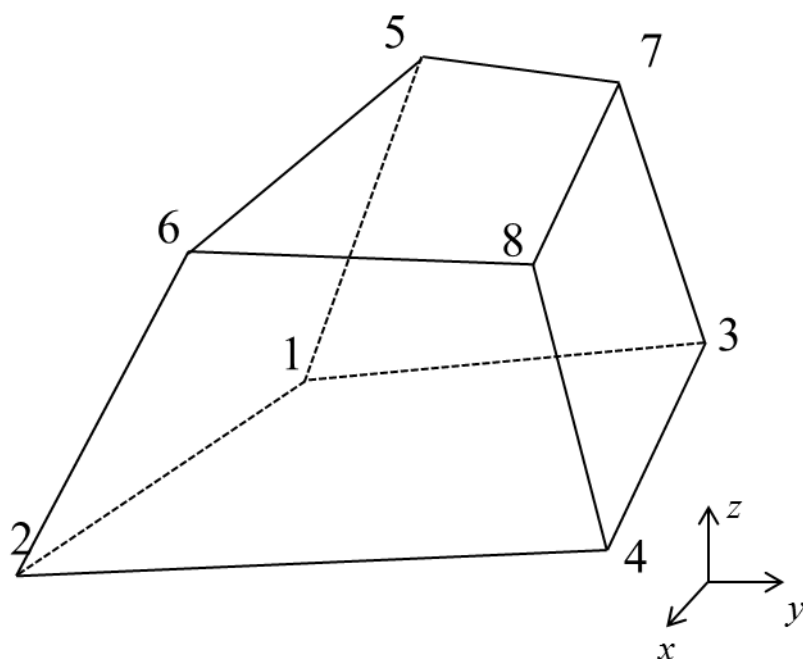


図 2.1: 六面体要素 (デカルト座標系)

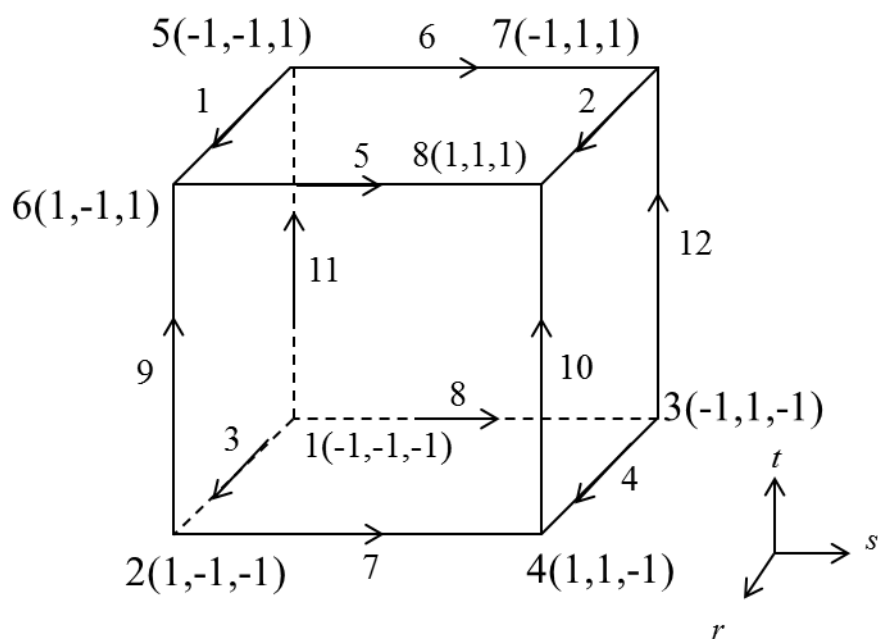


図 2.2: 六面体要素 (一般曲線座標系)

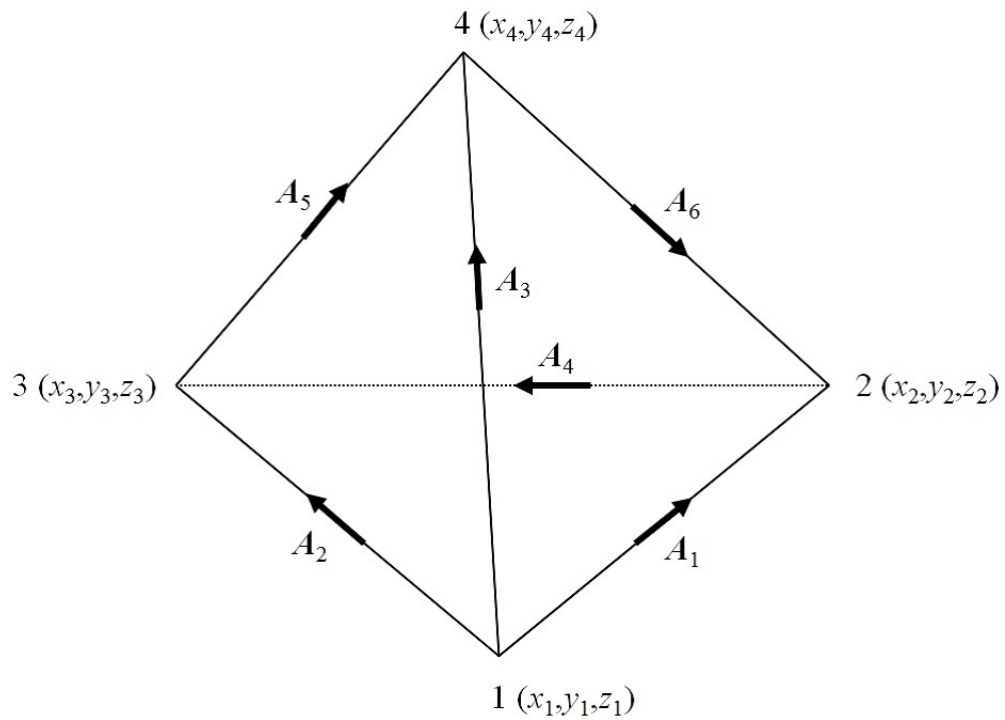


図 2.3: 四面体要素

また，点 $p(x, y, z)$ の位置ベクトル $\mathbf{p}$ は，以下のように求めることができる．

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 + \sum_{\alpha=1}^4 \lambda_{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_0) \quad (2.50)$$

ここで， $\mathbf{x}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$ である．これより，一次四面体要素の節点補間関数は λ_{α} であることがわかる．(2.50) 式を行列形式で書くと，

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

となり，節点補間関数は，以下のように求めることができる．

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.52a)$$

ここで, $V, a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ は次式のように書くことができる.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.52b)$$

$$a_\alpha = \sigma_k \begin{vmatrix} x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \\ z_l & z_m & z_n \end{vmatrix} \quad (2.52c)$$

$$b_\alpha = -\sigma_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_l & y_m & y_n \\ z_l & z_m & z_n \end{vmatrix} \quad (2.52d)$$

$$c_\alpha = -\sigma_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_m & x_n \\ z_l & z_m & z_n \end{vmatrix} \quad (2.52e)$$

$$d_\alpha = \sigma_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \end{vmatrix} \quad (2.52f)$$

なお, k, l, m, n には, 1,2,3,4, 2,1,3,4, 3,1,2,4, 4,1,2,3 の関係が成り立つ. また, $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_4 = 1$ である. これより, (2.42), (2.43) を満たす一次四面体辺要素は, 以下のように定義される.

$$\mathbf{N}_i = \lambda_k \text{grad} \lambda_l - \lambda_l \text{grad} \lambda_k \quad (2.53)$$

ここで, k, l は辺 i における始点・終点の節点番号である.

2.5 有限要素方程式の離散化

2.5.1 空間の離散化

前節で定義した節点補間関数と辺要素補間関数を用いて, それぞれの有限要素方程式の離散化を行う. それぞれの有限要素方程式の未知数は磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と磁気スカラーポテンシャル φ である. これらの物理量は, 節点要素, 辺要素補間関数要素内で以下のように定義することができる.

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^e A_j \mathbf{N}_j \quad (2.54a)$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi_k N_k \quad (2.54b)$$

ここで, e, n は各要素形状における辺, 節点の数である. また, 本研究では重み関数 $\mathbf{W}, w$ に補間関数 $\mathbf{N}, N$ を採用するガラーキン法と呼ばれる手法を用いる. それぞれの有限要素方程式に対して, (2.54a), (2.54b) 式とガラーキン法を適用すると以下の式が得られる.

- 静磁場

$$\sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega - \sum_{j=1}^e A_j \int_S (\mathbf{N}_i \times \nu \text{rot} \mathbf{N}_j) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.55)$$

- 時間領域準静磁場

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \left\{ \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j + \sigma \mathbf{N}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial t} \right\} d\Omega - \sum_{j=1}^e A_j \int_S (\mathbf{N}_i \times \nu \text{rot} \mathbf{N}_j) \cdot d\mathbf{S} \\ & + \sum_{k=1}^n \varphi_j \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} \frac{\partial N_k}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (2.56a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \text{grad} N_u \cdot \sigma \frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial t} d\Omega - \sum_{j=1}^e A_j \int_S N_u \sigma \frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ & + \sum_{k=1}^n \varphi_k \int_{\Omega} \text{grad} N_u \cdot \sigma \text{grad} \frac{\partial N_k}{\partial t} d\Omega - \sum_{k=1}^n \varphi_k \int_S N_u \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (2.56b)$$

- 周波数領域準静磁場

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \{ \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j + \sigma \mathbf{N}_i \cdot j\omega \mathbf{N}_j \} d\Omega - \sum_{j=1}^e A_j \int_S (\mathbf{N}_i \times \nu \text{rot} \mathbf{N}_j) \cdot d\mathbf{S} \\ & + \sum_{k=1}^n \varphi_j \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_i \cdot j\omega \text{grad} N_k d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (2.57a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \text{grad} N_u \cdot j\omega \sigma \mathbf{N}_j d\Omega - \sum_{j=1}^e A_j \int_S j\omega N_u \sigma \mathbf{N}_j \cdot d\mathbf{S} \\ & + \sum_{k=1}^n \varphi_k \int_{\Omega} \text{grad} N_u \cdot \sigma j\omega \text{grad} N_k d\Omega - \sum_{k=1}^n \varphi_k \int_S j\omega \sigma N_u \text{grad} \varphi \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (2.57b)$$

- 高周波

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \{ \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j - \omega^2 \epsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \} d\Omega - \sum_{j=1}^e A_j \int_S (\mathbf{N}_i \times \nu \text{rot} \mathbf{N}_j) \cdot d\mathbf{S} \\ & - \sum_{k=1}^n \varphi_j \int_{\Omega} \omega^2 \epsilon \mathbf{N}_i \cdot j\omega \text{grad} N_k d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (2.58a)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^e A_j \int_{\Omega} \omega^2 \epsilon \text{grad} N_u \cdot \mathbf{N}_j d\Omega + \sum_{j=1}^e A_j \int_S \omega^2 \epsilon N_u \mathbf{N}_j \cdot d\mathbf{S} \\ & - \sum_{k=1}^n \varphi_k \int_{\Omega} \omega^2 \epsilon \text{grad} N_u \cdot \text{grad} N_k d\Omega + \sum_{k=1}^n \varphi_k \int_S \omega^2 \epsilon N_u \text{grad} \varphi \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (2.58b)$$

これより、(2.55)-(2.58b) 式が離散化された有限要素方程式である。

2.5.2 時間方向の離散化

(2.56a), (2.56b) 式のように時間領域で解析行う場合は, 時間方向にも離散化を行わなければならない. ここで, (2.56a), (2.56b) 式を以下のように行列形式で記述する.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^t & \mathbf{M} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

ここで, 各成分の行列は,

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega \quad (2.60a)$$

$$N_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega \quad (2.60b)$$

$$S_{iu} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} N_u d\Omega \quad (2.60c)$$

$$b_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (2.60d)$$

となる. ここで, 未知数ベクトルを以下のように定義する.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

まず, 時間微分を後退差分により, 次のように近似する.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\Delta t} \quad (2.62)$$

ここで, m は時間ステップである. また, 未知数ベクトル, 右辺ベクトルは以下のように表すことができる.

$$\mathbf{u}^m = \theta \mathbf{u}^m + (1 - \theta) \mathbf{u}^{m-1} \quad (2.63a)$$

$$\mathbf{b}^m = \theta \mathbf{b}^m + (1 - \theta) \mathbf{b}^{m-1} \quad (2.63b)$$

これより, (2.59) 式は,

$$\begin{aligned} & \left(\theta \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^t & \mathbf{M} \end{bmatrix} \right) \mathbf{u}^m = \\ & \left(-(1 - \theta) \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^t & \mathbf{M} \end{bmatrix} \right) \mathbf{u}^{m-1} + \begin{bmatrix} \theta \mathbf{b}^m + (1 - \theta) \mathbf{b}^{m-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる. これより, (2.64) 式は, 時間方向に離散化された有限要素方程式である.

2.6 境界条件

有限要素方程式 (2.55)-(2.58b) 式には, 境界項が含まれている. この境界項には, 解析領域の境界上において, 適切な境界条件を適用する必要がある. 境界条件には, Dirichlet

条件 (固定境界条件), Neumann 条件 (自然境界条件) やインピーダンス境界条件 [36][37] 等があるが, 本節は本研究で使用している Dirichlet 条件 (固定境界条件), Neumann 条件 (自然境界条件) について述べる.

- Dirichlet 条件
この境界条件は,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.65a)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.65b)$$

を満たす磁束密度, 電界を設定する. ここで, $\mathbf{n}$ は境界の法線方向の単位ベクトルである. これより, 磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}, \varphi$ においては, 以下の条件を満たすように設定する.

$$\text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.66a)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.66b)$$

$$\text{grad} \varphi \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.66c)$$

- Neumann 条件
この境界条件は,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.67a)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.67b)$$

を満たす磁束密度, 電界を設定する. これより, 磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}, \varphi$ においては, 以下の条件を満たすように設定する.

$$\text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.68a)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.68b)$$

$$\text{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.68c)$$

これらの境界条件を解析領域のそれぞれの境界上において, 適用することにより, 有限要素方程式の境界項を 0 とすることができる.

2.7 有限要素行列の構築

本節では, 六面体・四面体要素を用いた場合における有限要素行列の構築方法について述べる.

2.7.1 六面体要素の場合

共変反変・基底ベクトル

有限要素行列を計算するにあたり, 共変, 反変基底ベクトルの概念が必要となるので説明する. 共変基底ベクトルは以下のように定義されている.

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{e}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \quad (2.69b)$$

$$\mathbf{e}_t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.69c)$$

また，反変基底ベクトルは，以下のように定義されている．

$$\mathbf{e}^r = \nabla r \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{e}^s = \nabla s \quad (2.70b)$$

$$\mathbf{e}^t = \nabla t \quad (2.70c)$$

ここで，共変，反変基底ベクトルの関係式を導く．まず，それぞれのヤコビ行列 J, j を次のように定義する．

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_t \end{bmatrix}^t \quad (2.71a)$$

$$j = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r & \mathbf{e}^s & \mathbf{e}^t \end{bmatrix}^t \quad (2.71b)$$

共変ベクトルと反変ベクトルの内積は，

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij} \quad (2.72)$$

となるので， $Jj = I$ となる． $j = J^{-1}$ より，

$$j = J^{-1} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

となる．このとき， $\sqrt{g}$ は，

$$\sqrt{g} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \quad (2.74)$$

であり、それぞれの成分は、

$$J_{11} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} = (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)_x \quad (2.75a)$$

$$J_{12} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} = (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)_y \quad (2.75b)$$

$$J_{13} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} = (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)_z \quad (2.75c)$$

$$J_{21} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)_x \quad (2.75d)$$

$$J_{22} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)_y \quad (2.75e)$$

$$J_{23} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial r} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)_z \quad (2.75f)$$

$$J_{31} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)_x \quad (2.75g)$$

$$J_{32} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)_y \quad (2.75h)$$

$$J_{33} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)_z \quad (2.75i)$$

と表される．(2.75a)-(2.75i) 式より、以下の関係式を導くことができる．

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\sqrt{g}} \quad (2.76a)$$

$$\mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\sqrt{g}} \quad (2.76b)$$

$$\mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\sqrt{g}} \quad (2.76c)$$

補間関数の回転

補間関数の回転を示す前にまず、補間関数を反変基底ベクトルの成分で分解したとき、以下のように書くことができる．

$$\mathbf{N}_j = N_{jr} \nabla r + N_{js} \nabla s + N_{jt} \nabla t \quad (2.77)$$

このときの回転は、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{N}_j = & \left(\frac{\partial N_{it}}{\partial s} - \frac{\partial N_{is}}{\partial t} \right) (\nabla s \times \nabla t) + \left(\frac{\partial N_{ir}}{\partial t} - \frac{\partial N_{it}}{\partial r} \right) (\nabla t \times \nabla r) \\ & + \left(\frac{\partial N_{is}}{\partial r} - \frac{\partial N_{ir}}{\partial s} \right) (\nabla r \times \nabla s) \end{aligned} \quad (2.78)$$

である．これより、補間関数の回転は、以下のようになることが分かる．

$$r \text{ 方向 } \nabla \times \mathbf{N}_j = \frac{1}{8} \{ (1 + s_j s) t_j (\nabla t \times \nabla r) - s_j (1 + t_j t) (\nabla r \times \nabla s) \} \quad (2.79a)$$

$$s \text{ 方向 } \nabla \times \mathbf{N}_j = \frac{1}{8} \{ (1 + t_j t) r_j (\nabla r \times \nabla s) - t_j (1 + r_j r) (\nabla s \times \nabla t) \} \quad (2.79b)$$

$$t \text{ 方向 } \nabla \times \mathbf{N}_j = \frac{1}{8} \{ (1 + r_j r) s_j (\nabla s \times \nabla t) - r_j (1 + s_j s) (\nabla t \times \nabla r) \} \quad (2.79c)$$

ここで、前項で導いた共変、反変基底ベクトルの関係式を導入すると、

$$r \text{ 方向 } \nabla \times \mathbf{N}_j = \frac{1}{8} \left\{ (1 + s_j s) t_j \frac{\mathbf{e}_s}{\sqrt{g}} - s_j (1 + t_j t) \frac{\mathbf{e}_t}{\sqrt{g}} \right\} \quad (2.80a)$$

$$s \text{ 方向 } \nabla \times \mathbf{N}_j = \frac{1}{8} \left\{ (1 + t_j t) r_j \frac{\mathbf{e}_t}{\sqrt{g}} - t_j (1 + r_j r) \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g}} \right\} \quad (2.80b)$$

$$t \text{ 方向 } \nabla \times \mathbf{N}_j = \frac{1}{8} \left\{ (1 + r_j r) s_j \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g}} - r_j (1 + s_j s) \frac{\mathbf{e}_s}{\sqrt{g}} \right\} \quad (2.80c)$$

となる。(2.80a)-(2.80c) 式を用いて補間関数の計算を行うことができる。

共変、反変基底ベクトルの内積

六面体辺要素補間関数は、反変基底ベクトルで定義され、その回転も共変基底ベクトルで定義されることを前項までに説明した。これより、離散化された有限要素方程式は共変、反変基底ベクトル同士の内積を計算しなければならない。ここでは計量テンソルを用いることによって計算を行うことができることを説明する。ここで、計量テンソル G は以下のように定義される。

$$G = J J^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

まず、共変基底ベクトル同士の内積について示す。補間関数の回転を共変基底ベクトルに分解すると、以下のように書くことができる。

$$\nabla \times \mathbf{N}_i = N_i^r \mathbf{e}_r + N_i^s \mathbf{e}_s + N_i^t \mathbf{e}_t \quad (2.82)$$

これより、共変成分同士の内積は、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \mathbf{N}_i &= (N_i^r \mathbf{e}_r + N_i^s \mathbf{e}_s + N_i^t \mathbf{e}_t) \cdot (N_i^r \mathbf{e}_r + N_i^s \mathbf{e}_s + N_i^t \mathbf{e}_t) \\ &= (N_i^r)^2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + (N_i^s)^2 \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s + (N_i^t)^2 \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t \\ &\quad + 2N_i^r N_i^s \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s + 2N_i^s N_i^t \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_t + 2N_i^t N_i^r \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.83a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \mathbf{N}_j &= (N_i^r \mathbf{e}_r + N_i^s \mathbf{e}_s + N_i^t \mathbf{e}_t) \cdot (N_j^r \mathbf{e}_r + N_j^s \mathbf{e}_s + N_j^t \mathbf{e}_t) \\ &= N_i^r N_j^r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + N_i^s N_j^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s + N_i^t N_j^t \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t + (N_i^r N_j^s + N_j^r N_i^s) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s \\ &\quad + (N_i^s N_j^t + N_j^s N_i^t) \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_t + (N_i^t N_j^r + N_j^t N_i^r) \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.83b)$$

となる．(2.81),(2.83a),(2.83b) 式より，共変成分同士の内積は計量テンソルを用いて以下のように計算することができる．

$$\nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} N_i^r & N_i^s & N_i^t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} N_i^r & N_i^s & N_i^t \end{pmatrix} G \right\}^t \quad (2.84a)$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \mathbf{N}_j = \begin{pmatrix} N_i^r & N_i^s & N_i^t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} N_j^r & N_j^s & N_j^t \end{pmatrix} G \right\}^t \quad (2.84b)$$

同様に反変基底ベクトル同士の内積も考える．補間関数を反変基底ベクトルに分解すると，

$$\mathbf{N}_i = N_{ri}\mathbf{e}^r + N_{si}\mathbf{e}^s + N_{ti}\mathbf{e}^t \quad (2.85)$$

となる．これより，共変と同様に計算を進めていくと，以下の式で計算することができる．

$$\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} N_{ri} & N_{si} & N_{ti} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} N_{ri} & N_{si} & N_{ti} \end{pmatrix} G^{-1} \right\}^t \quad (2.86a)$$

$$\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j = \begin{pmatrix} N_{ri} & N_{si} & N_{ti} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} N_{rj} & N_{sj} & N_{tj} \end{pmatrix} G^{-1} \right\}^t \quad (2.86b)$$

このとき， G^{-1} は以下のように定義されている．

$$G^{-1} = jj^t = (JJ^T)^{-1} \quad (2.87)$$

2.7.2 四面体要素の場合

四面体辺要素補間関数の回転

四面体辺要素の補間関数は, (2.52a), (2.53) 式より, 以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (c_1 + c_2x + c_3y + c_4z)(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z) \\ &\quad - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (a_1 + a_2x + a_3y + a_4z)(c_2\mathbf{e}_x + c_3\mathbf{e}_y + c_4\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.88a)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (a_1 + a_2x + a_3y + a_4z)(b_2\mathbf{e}_x + b_3\mathbf{e}_y + b_4\mathbf{e}_z) \\ &\quad - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (b_1 + b_2x + b_3y + b_4z)(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.88b)$$

$$\begin{aligned} N_3 &= \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (b_1 + b_2x + b_3y + b_4z)(c_2\mathbf{e}_x + c_3\mathbf{e}_y + c_4\mathbf{e}_z) \\ &\quad - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (c_1 + c_2x + c_3y + c_4z)(b_2\mathbf{e}_x + b_3\mathbf{e}_y + b_4\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.88c)$$

$$\begin{aligned} N_4 &= \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (c_1 + c_2x + c_3y + c_4z)(d_2\mathbf{e}_x + d_3\mathbf{e}_y + d_4\mathbf{e}_z) \\ &\quad - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (d_1 + d_2x + d_3y + d_4z)(c_2\mathbf{e}_x + c_3\mathbf{e}_y + c_4\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.88d)$$

$$\begin{aligned} N_5 &= \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (a_1 + a_2x + a_3y + a_4z)(d_2\mathbf{e}_x + d_3\mathbf{e}_y + d_4\mathbf{e}_z) \\ &\quad - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (d_1 + d_2x + d_3y + d_4z)(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.88e)$$

$$\begin{aligned} N_6 &= \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (b_1 + b_2x + b_3y + b_4z)(d_2\mathbf{e}_x + d_3\mathbf{e}_y + d_4\mathbf{e}_z) \\ &\quad - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (d_1 + d_2x + d_3y + d_4z)(b_2\mathbf{e}_x + b_3\mathbf{e}_y + b_4\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.88f)$$

これより, 四面体辺要素に補間関数の回転は, 以下のように表すことができる.

$$\text{rot} \mathbf{N}_1 = 2 \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \{(c_3a_4 - a_3c_4)\mathbf{e}_x - (c_2a_4 - a_2c_4)\mathbf{e}_y + (c_2a_3 - a_2c_3)\mathbf{e}_z\} \quad (2.89)$$

他の辺における回転も同様に求めることができる.

四面体節点要素補間関数の勾配

四面体節点補間関数の勾配は,

$$\text{grad} N_1 = \frac{1}{6V} (a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z) \quad (2.90)$$

となる. ほかの節点における勾配も同様に求めることができる.

体積分の評価

補間関数の回転同士の内積を求める場合、節点補間関数の積の体積分を評価しなければならない。この場合、以下の積分公式を用いて評価を行う。

$$\int_{\Omega} \lambda_1^w \lambda_2^x \lambda_3^y \lambda_4^z d\Omega = 6V \frac{w!x!y!z!}{(w+x+y+z+3)!} \quad (2.91)$$

また、補間関数同士の内積においては、以下のような積分を評価する。

$$\int_{\Omega} xy d\Omega = \frac{V}{20} \{ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) \} \quad (2.92a)$$

$$\int_{\Omega} x^2 d\Omega = \frac{V}{20} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (2.92b)$$

2.8 電流項

電磁場を有限要素法を用いて解析する場合、コイル中の電流分布を与えなければいけない。コイルに強制的に電流を手法として、電流ベクトルポテンシャルを用いる手法と磁気スカラーポテンシャルを用いる方法がある。電流ベクトルポテンシャルは、電流値を要素の辺に電流ベクトルポテンシャルを与えることで強制的に電流を流す手法である。一方で、電流スカラーポテンシャルは、要素の節点にスカラーポテンシャルを与えることで電流を流す手法である。以下に双方の特徴を述べる。

- 電流ベクトルポテンシャル

電流の連続性を考慮して、電流ベクトルポテンシャルを与えるため、電流が不連続になることがない。一方で、辺に電流ベクトルポテンシャルを与えるため、木-補木分解を行わなければならない。

- 磁気スカラーポテンシャル

節点に電流スカラーポテンシャルを与えるため、木-補木分解をする必要がない。一方で、電流の連続性が考慮されていないので、補正を行わなければならない。

本研究では、磁気スカラーポテンシャルを用いて電流を表現しているので、この手法について述べる。電流項は、有限要素方程式で以下のように表されている項である。

$$\mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{N}_i d\Omega \quad (2.93)$$

この項の強制電流密度 $\mathbf{J}_0$ が連続性を満たしていない場合、方程式が解けない場合がある。ここで、強制電流 $\mathbf{J}_0$ に対して、連続性を持たせるためには、以下の条件を満たしていないなければならない。

$$\text{div} \mathbf{J}_0 = 0 \quad (2.94)$$

また、電流密度はオームの法則より、

$$\mathbf{J}_0 = \sigma \mathbf{E} \quad (2.95)$$

と定義される。また、コイル中に渦電流が流れないと仮定すると、ファラデーの法則より、

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

となる。これより、電界は、

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi \quad (2.97)$$

となる。ここで、 ϕ は磁気スカラーポテンシャルである。これより、(2.95) 式を (2.97) 式に代入すると、

$$\mathbf{J}_0 = -\sigma \text{grad} \phi \quad (2.98)$$

となる。ここで、(2.94) 式に (2.98) 式を代入すると、以下の式が得られる。

$$\text{div} \sigma \text{grad} \phi = 0 \quad (2.99)$$

このとき、境界条件は、以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} I &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_S \text{grad} \phi \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.100)$$

これより、流入・流出面に一定の ϕ を与えることによって強制的に電流を与えることができる。

しかし、電流連続の方程式は近似的に満足されているので、求めた電流密度の発散が 0 になるといった保証がない。そこで、電流密度の発散が 0 となるように補正を行う。(2.99) 式から求めた電流密度 $\mathbf{J}_0$ を以下のように修正する。

$$\mathbf{J}'_0 = \mathbf{J}_0 - \text{grad} z \quad (2.101)$$

ここで、 $\mathbf{J}'_0$ は修正後の電流密度であり、 $\text{div} \mathbf{J}'_0 = 0$ を満たす。これより、修正後の $\mathbf{J}'_0$ は以下の方程式で z を求めることにより得られる。

$$\text{div} \sigma \text{grad} \phi = \text{grad} z \quad (2.102)$$

(2.99), (2.102) 式を離散化し、解くことで電流密度分布を得ることができる。

2.9 有限要素方程式と回路方程式との連成解析

電磁機器は、通常外部回路と連成されている。そのため、外部回路と電磁機器を連成して解析を行う必要がある。また、連成解析を行わない場合、電流が入力となるため、電磁機器のインピーダンスやアドミタンスを計算できないが、回路と連成することで電圧入力となるので、インピーダンスやアドミタンスを求めることができる。図 2.4 に示すような簡単な回路を考える。ここで、 R_{dc} は直流抵抗である。また、このモデルにおいて、コイ

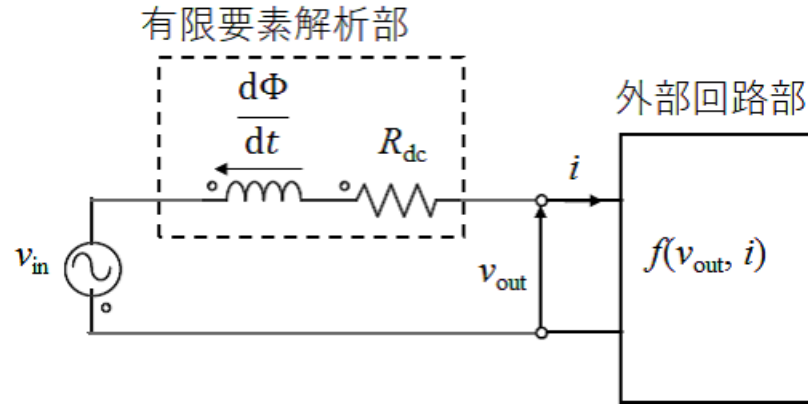


図 2.4: 外部回路との連成

ル中には渦電流が流れないと仮定する．有限要素解析部と書かれている部分が，有限要素法により解析を行う部分である．このとき，回路方程式は，

$$v_{in} = \frac{d\Phi}{dt} + R_{dc}i + v_{out} \quad (2.103a)$$

$$f(v_{out}, i) = 0 \quad (2.103b)$$

となる．ここで，第1項は有限要素解析領域内の誘起起電力であり， Φ は有限要素モデル内のコイルの鎖交磁束を表現している．有限要素モデル内のコイルの鎖交磁束は，

$$\Phi = \frac{n_c}{S_c} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.104)$$

で表現できる．ここで， n_c, S_c はコイルの巻き数，コイルの断面積である．これより，この回路方程式(2.103)式と有限要素方程式を連成して解くことにより，回路が連成されている場合においても解析を行うことができる．

電磁機器のインピーダンスやアドミタンスを求める場合は， $v_{out} = 0$ とし，有限要素方程式を解くことで電流 i を求め， $Z = v_{in}/i$ とすればよい．

第3章 モデル縮約法

近年では、スーパーコンピュータの登場により、数千万から数億規模のシステムやモデルの数値解析を行うことが可能となってきた [38]-[40]。しかし、これらの解析もまだ受け入れ難いほどの計算時間を必要とし、それらの計算の高速化を行う必要がある。これらのような大規模の計算を高速化する手法の一つとして、モデル縮約法 (MOR: Model Order Reduction) が挙げられる [11]-[24]。モデル縮約法は様々な定義があるが、そのひとつとしては高次元のシステムやモデルを複数本の基底ベクトルで張られた部分空間に射影し、それらの情報をなるべく損なわず低次元化する手法である。制御の分野で初めて開発され、その後回路解析や数値流体力学、数値電磁気学等の数値解析の分野に広がっていった。モデル縮約法の種類としては、大規模な回路解析に用いられている Asymptotic waveform evaluation (AWE) 法 [41][42]、Padé Approximation via the Lanczos Processes (PVL) [12]、Passive Reduced Interconnect macromodeling Algorithm (PRIMA) [14] や非線形問題にも適用可能で様々な分野、問題へ適用可能な平行実現 [17]、固有直交分解法 [18]-[22] がある。本研究では、Padé Approximation via the Lanczos Processes (PVL) と固有直交分解法を電磁界解析へ適用しており、3章ではこの2つの手法に関して述べる。

3.1 PVL

3.1.1 線形システムの伝達関数

1 入力 1 出力の線形システムを考える。

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}u \quad (3.1a)$$

$$y = \mathbf{l}^t \mathbf{x} \quad (3.1b)$$

ここで、 $\mathbf{K}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{l}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ である。また、 $u, y \in \mathbb{R}^1$ であり、それぞれシステムの入力、出力である。(3.1) 式にラプラス変換を適用する。

$$\mathbf{K}\mathbf{X}(s) + s\mathbf{N}\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}U(s) \quad (3.2a)$$

$$Y(s) = \mathbf{l}^t \mathbf{X}(s) \quad (3.2b)$$

ここで、 $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y]$, $U(s) = \mathcal{L}[u]$ である。これより、このシステムの伝達関数は、

$$H(s) = \mathbf{l}^t (\mathbf{K} + s\mathbf{N})^{-1} \mathbf{b} \quad (3.3)$$

である．また， s_0 を展開点として，伝達関数を展開すると，

$$\begin{aligned}
 H(s_0 + \Delta s) &= \mathbf{l}^t \{ \mathbf{K} + (s_0 + \Delta s) \mathbf{N} \}^{-1} \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{l}^t \{ \mathbf{K} + s_0 \mathbf{N} + \Delta s \mathbf{N} \}^{-1} \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{l}^t \{ \mathbf{I} + \Delta s (\mathbf{K} + s_0 \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N} \}^{-1} (\mathbf{K} + s_0 \mathbf{N})^{-1} \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{l}^t (\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{A})^{-1} \mathbf{r}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．ここで， $\mathbf{A} = -(\mathbf{K} + s_0 \mathbf{N})^{-1}$ ， $\mathbf{r} = (\mathbf{K} + s_0 \mathbf{N})^{-1} \mathbf{b}$ である．ここで， $\mathbf{A}$ に対して，スペクトル分解を適用する．

$$\begin{aligned}
 H(s_0 + \Delta s) &= \mathbf{l}^t (\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{S} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}^{-1})^{-1} \mathbf{r} \\
 &= \mathbf{l}^t \{ \mathbf{S} (\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{\Lambda}) \mathbf{S}^{-1} \}^{-1} \mathbf{r} \\
 &= \mathbf{l}^t \mathbf{S} (\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r} \\
 &= \mathbf{f}^t (\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{g}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで， $\mathbf{S}, \mathbf{\Lambda}$ はそれぞれ $\mathbf{A}$ の固有ベクトル，固有値が並んだ行列である．また， $\mathbf{f} = \mathbf{S}^t \mathbf{l}$ ， $\mathbf{g} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$ である．これより，(3.5) 式は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned}
 H(s_0 + \Delta s) &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \Delta s \lambda_1 & & & \\ & 1 - \Delta s \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 - \Delta s \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{f_i g_i}{1 - \Delta s \lambda_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{f_i g_i}{1 - (s - s_0) \lambda_i}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．これより，(3.1) 式の伝達関数を周波数に対して陽的な関数で記述できる．しかし，行列 $\mathbf{A}$ のスペクトル分解を必要とし，状態変数 $\mathbf{x}$ の次元数 n が大きくなってしまうと，このスペクトル分解は，非常に大きな計算負荷となってしまう．そこで，Padé 近似 (有理関数) を用いて，(3.6) 式を以下のように近似する．

$$H_{p,q}(s_0 + \Delta s) = \frac{a_p \Delta s^p + a_{p-1} \Delta s^{p-1} + a_{p-2} \Delta s^{p-2} + \cdots + a_1 \Delta s + a_0}{b_q \Delta s^q + b_{q-1} \Delta s^{q-1} + b_{q-2} \Delta s^{q-2} + \cdots + b_1 \Delta s + b_0} \tag{3.7}$$

ここで，(3.7) 式と (3.6) 式を比較すると， p と q の関係は， $q = p + 1$ となることがわかる．これより，(3.7) 式は，

$$H_q(s_0 + \Delta s) = k_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{k_j}{\Delta s - p_j} \tag{3.8}$$

となる．ここで， $q \geq q'$ である．ここで， p_j, k_j は，それぞれ (3.7) 式の極，留数である．また， k_∞ は極が 0 の時の係数である．

3.1.2 Asymptotic waveform evaluation

(3.7) 式, (3.8) 式の係数を計算する手法の一つとして, 1990 年に Pillage らによる提案された AWE 法と呼ばれる手法がある. この手法では, (3.2) 式の状態変数 $\mathbf{X}(s)$ を s_0 を展開点として, 展開する.

$$(\mathbf{I} - s_0\mathbf{A} - (s - s_0)\mathbf{A})(\mathbf{X}_0 + (s - s_0)\mathbf{X}_1 + \cdots) = \mathbf{r}U(s) \quad (3.9)$$

ここで, $\mathbf{X}_j$ はモーメントである. 入力 $U(s) = 1$ とすると, 任意の $(s - s_0)^k$ において,

$$\mathbf{X}_k = \begin{cases} (\mathbf{I} - s_0\mathbf{A})^{-1}\mathbf{r} & (k = 0) \\ (\mathbf{I} - s_0\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} & (k > 1) \end{cases} \quad (3.10)$$

が成り立つ. これより, この手法では以下のような Krylov 空間を生成していることとなる.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\mathbf{X}_0, (\mathbf{I} - s_0\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}] \\ = \text{span} \left[\mathbf{X}_0 \quad (\mathbf{I} - s_0\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_0 \quad ((\mathbf{I} - s_0\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A})^2\mathbf{X}_0 \quad \cdots \quad ((\mathbf{I} - s_0\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A})^n\mathbf{X}_0 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

最終的には, 伝達関数は以下のように書くことができる.

$$H(s) = \sum_{k=0}^m m_k (s - s_0)^k \quad (3.12)$$

ここで, $m_k = \mathbf{l}^t \mathbf{X}_k$ である. ここで, m は, 状態変数 $\mathbf{X}(s)$ を近似するためモーメントの数である. この伝達関数 (3.12) 式から (3.7) 式の係数を計算する. (3.12) 式と (3.7) 式が等しいことを利用すると,

$$\sum_{k=0}^{q-1} a_k (s - s_0)^k = \left(\sum_{k=0}^m m_k (s - s_0)^k \right) \left(\sum_{k=0}^q b_k (s - s_0)^k \right) \quad (3.13)$$

となる. この方程式は, 以下のような方程式となる.

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_q \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{q+1} \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_q & m_{q+1} & m_{q+2} & \cdots & m_{2q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{q+1} \\ b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{q+1} \\ m_{q+1} \\ m_{q+2} \\ \vdots \\ m_{2q+1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

(3.14) 式を解くことにより, b_k を求め伝達関数の Padé 近似を計算する手法が AWE 法である. AWE 法では, 伝達関数が周波数に対して陽な関数となっているため, 任意の周波数における伝達関数を求めることができる. しかし, Padé 近似の次数である q が大きくなるにつれて, (3.14) 式の係数行列の条件数が悪くなってしまう. そのため, (3.14) 式を解くために, 反復法を使用すると収束特性が非常に悪くなってしまうという欠点がある.

3.1.3 双 Lanczos 法の利用

この AWE 法の問題点を解決するために、Freund らは 1995 年に Pade Approximation via the Lanczos Processes を開発した。この手法は AWE 法とは違い、条件数の悪い係数行列を持つ方程式を解く必要がなく、双 Lanczos 法 [43] を用いて 1 入力 1 出力の伝達関数の Padé 近似を求めることができる。

まず、(3.4) 式のノイマン級数展開を行う。

$$\begin{aligned} H(s_0 + \Delta s) &= \mathbf{l}^t (\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{A})^{-1} \mathbf{r} \\ &= \mathbf{l}^t (\mathbf{I} + \Delta s \mathbf{A} + \Delta s^2 \mathbf{A}^2 + \Delta s^3 \mathbf{A}^3 + \cdots) \mathbf{r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} m_k \Delta s^k \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで、 $m_k = \mathbf{l}^t \mathbf{A}^k \mathbf{r}$ である。(3.15) 式を利用して、(3.7) 式の係数を計算すればよい。しかし、 $\mathbf{A}^k$ の計算は非常に負荷が重い。そこで、Lanczos 法を用いて、 $\mathbf{A}$ の累乗の計算を行っていく。しかし、 $\mathbf{A}$ は非対称であり、通常の Lanczos 法を適用することは難しい。そこで、非対称行列のために開発された双 Lanczos 法を適用する。

双 Lanczos 法

双 Lanczos 法 [43] は、通常の Lanczos 法と異なり、任意の 2 つのベクトルから 2 つの Krylov 部分空間を生成し、3 重対角行列を計算していく手法である。

双 Lanczos 法では、任意の非対称行列 $\mathbf{A}$ と 3 重対角行列 $\mathbf{T}_q$, $\tilde{\mathbf{T}}_q$ 間で以下の関係式を満たすような 3 重対角行列、行列 $\mathbf{V}_n, \mathbf{W}_n$ を同時に求めていく。

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{T}_n \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{W}_n = \mathbf{W}_n \tilde{\mathbf{T}}_n \quad (3.16b)$$

ここで、 $\mathbf{T}_n, \tilde{\mathbf{T}}_n, \mathbf{W}_n, \mathbf{V}_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ であり、それぞれ以下のように定義する。

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \rho_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

$$V_n = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.17c)$$

$$W_n = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \quad (3.17d)$$

ここで、 V_n と W_n は、双直交性を持つとすると、以下が成り立つ。

$$D_n = W_n^t V_n = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

また、これらの関係式から $T_q, \tilde{T}_q$ 間には、以下の関係が成り立つ。

$$\tilde{T}_n^t = D_n T_n D_n^{-1} \quad (3.19)$$

(3.16) 式, (3.17) 式から以下の2式が得られる。

$$A \mathbf{v}_k = \beta_k \mathbf{v}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{v}_k + \rho_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \quad (3.20a)$$

$$A^t \mathbf{w}_k = \gamma_k \mathbf{w}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{w}_k + \eta_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} \quad (3.20b)$$

これより,

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{A \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{v}_k - \beta_k \mathbf{v}_{k-1}}{\rho_{k+1}} \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{w}_{k+1} = \frac{A^t \mathbf{w}_k - \alpha_k \mathbf{w}_k - \gamma_k \mathbf{w}_{k-1}}{\eta_{k+1}} \quad (3.21b)$$

となる。これより、双 Lanczos 法では、双直交性を持つ $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$ を上記のように反復的にも求めていく。上記より、 T_n は以下の2つの直交している Krylov 空間により、生成されている。

$$\mathcal{K}[\mathbf{v}_1, A] = \text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & A \mathbf{v}_1 & A^2 \mathbf{v}_1 & \cdots & A^n \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \quad (3.22a)$$

$$\mathcal{K}[\mathbf{w}_1, A^t] = \text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & A^t \mathbf{w}_1 & (A^t)^2 \mathbf{w}_1 & \cdots & (A^t)^n \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} \quad (3.22b)$$

ここで、 $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ の固有値問題を近似的に求めることを考える。固有ベクトルを Krylov 部分空間の基底で $\mathbf{x} = V_n \mathbf{y}$ と近似する。また、固有値問題の残差が W_n に直交する条件 (ガレルキン法) を用いると、

$$\begin{aligned} W_n^t (A \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}) &= W_n^t (A V_n \mathbf{y} - \lambda V_n \mathbf{y}) \\ &= D_n (T_n \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。これより、 T_n の固有値と A の固有値が等しいことがわかる。また、固有ベクトルも W_n^t に対応していることがわかる。

双 Lanczos 法のアルゴリズムは、以下のように書くことができる。

1. $\mathbf{r}, \mathbf{l}$ を任意に設定
 $\rho_1 = \|\mathbf{r}\|_2, \eta_1 = \|\mathbf{l}\|_2, \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}/\rho_1, \mathbf{w}_1 = \mathbf{l}/\eta_1$
 $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \delta_0 = 1$
for $k = 1, 2, \dots$
2. $\delta_k = \mathbf{w}_k^t \mathbf{v}_k$
3. $\alpha_k = \mathbf{w}_k^t \mathbf{A} \mathbf{v}_k / \delta_k$
 $\beta_k = \delta_k \eta_k / \delta_{k-1}$
 $\gamma_k = \delta_k \rho_k / \delta_{k-1}$
4. $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{v}_k - \beta_k \mathbf{v}_{k-1}$
 $\mathbf{w} = \mathbf{A}^t \mathbf{w}_k - \alpha_k \mathbf{w}_k - \gamma_k \mathbf{w}_{k-1}$
5. $\rho_{k+1} = \|\mathbf{v}\|_2, \eta_{k+1} = \|\mathbf{w}\|_2$
 $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v} / \rho_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w} / \eta_{k+1}$

上記のアルゴリズムにより、 $\mathbf{A}$ を 3 重対角行列 $\mathbf{T}_n$ へ直交変換する。しかし、上記のアルゴリズムでは、 $\mathbf{A}$ の次元数である n 個のベクトル $\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n$ を求める必要がある。そのため、通常は精度が十分に得られるであろう q 回 ($n \gg q$) ほどの反復で打ち切る。その場合、(3.16) 式は、

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_q = \mathbf{V}_q \mathbf{T}_q + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \mathbf{v}_{q+1} \end{bmatrix} \rho_{q+1} \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{W}_q = \mathbf{W}_q \tilde{\mathbf{T}}_q + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \mathbf{w}_{q+1} \end{bmatrix} \eta_{q+1} \quad (3.24b)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{T}_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \rho_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{q-1} & \beta_q \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_q & \alpha_q \end{bmatrix} \quad (3.25a)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{q-1} & \gamma_q \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_q & \alpha_q \end{bmatrix} \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.25c)$$

$$\mathbf{W}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \quad (3.25d)$$

である。これより、 $n \times n$ の非対称行列 $\mathbf{A}$ は、2 つの直交する Krylov 部分空間により、 $q \times q$ の 3 重対角行列 $\mathbf{T}_q$ へ変換される。

3.1.4 伝達関数の Padé 近似

(3.15) 式の m_k を以下のように分解する.

$$\begin{aligned} m_k &= \mathbf{l}^t \mathbf{A}^k \mathbf{r} \\ &= \mathbf{l}^t \left(\mathbf{A}^{k_1} \mathbf{A}^{k_2} \right) \mathbf{r} \\ &= \left(\mathbf{l}^t \mathbf{A}^{k_1} \right) \left(\mathbf{A}^{k_2} \mathbf{r} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで, $k = k_1 + k_2$ である. これより, $\mathbf{A}^j \mathbf{r}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^j \mathbf{r} &= \mathbf{A}^j \rho_1 \mathbf{v}_1 \\ &= \rho_1 \mathbf{A}^j \mathbf{V}_q \mathbf{e}_1 \\ &= \rho_1 \mathbf{V}_q \mathbf{T}_q^j \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで, $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^t$ である. 次に, $\mathbf{l}^t \mathbf{A}^j$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^t \mathbf{A}^j &= \eta_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{A}^j \\ &= \eta_1 \mathbf{e}_1^t \mathbf{W}_q^t \mathbf{A}^j \\ &= \eta_1 \mathbf{e}_1^t \left(\tilde{\mathbf{T}}_q^t \right)^j \mathbf{W}_q^t \\ &= \eta_1 \mathbf{e}_1^t \left(\mathbf{D}_q \mathbf{T}_q \mathbf{D}_q^{-1} \right)^j \mathbf{W}_q^t \\ &= \eta_1 d_1 \mathbf{e}_1^t \mathbf{T}_q^j \mathbf{D}_q^{-1} \mathbf{W}_q^t \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる. 最終的にこの2式をまとめると,

$$\begin{aligned} m_k &= \left(\mathbf{l}^t \mathbf{A}^{k_1} \right) \left(\mathbf{A}^{k_2} \mathbf{r} \right) \\ &= \left(\eta_1 d_1 \mathbf{e}_1^t \mathbf{T}_q^{k_1} \mathbf{D}_q^{-1} \mathbf{W}_q^t \right) \left(\rho_1 \mathbf{V}_q \mathbf{T}_q^{k_2} \mathbf{e}_1 \right) \\ &= \eta_1 \rho_1 d_1 \mathbf{e}_1^t \mathbf{T}_q^{k_1} \mathbf{D}_q^{-1} \mathbf{W}_q^t \mathbf{V}_q \mathbf{T}_q^{k_2} \mathbf{e}_1 \\ &= \eta_1 \rho_1 d_1 \mathbf{e}_1^t \mathbf{T}_q^{k_1} \mathbf{T}_q^{k_2} \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{l}^t \mathbf{r} \mathbf{e}_1^t \mathbf{T}_q^k \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる. (3.29) 式より, (3.15) 式は,

$$\begin{aligned} H_q(s_0 + \Delta s) &= \sum_{k=0}^{\infty} m_k \Delta s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{l}^t \mathbf{r} \mathbf{e}_1^t \mathbf{T}_q^k \mathbf{e}_1 \right) \Delta s^k \\ &= \mathbf{l}^t \mathbf{r} \mathbf{e}_1^t \left(\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{T}_q \right)^{-1} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

となり, $\mathbf{T}_q$ に対して固有値分解を適用すると,

$$\begin{aligned} H_q(s_0 + \Delta s) &= \mathbf{l}^t \mathbf{r} \mathbf{e}_1^t \left(\mathbf{I} - \Delta s \mathbf{S}_q \Lambda_q \mathbf{S}_q^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{l}^t \mathbf{r} \mathbf{e}_1^t \mathbf{S}_q \left(\mathbf{I} - \Delta s \Lambda_q \right)^{-1} \mathbf{S}_q^{-1} \mathbf{e}_1 \\ &= \sum_{j=1}^q \frac{\mathbf{l}^t \mathbf{r} \mu_j \nu_j}{1 - \Delta s \lambda_j} \end{aligned} \quad (3.31)$$

最終的に, (3.8) 式のようにまとめることができる. (再掲)

$$H_q(s_0 + \Delta s) = k_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{k_j}{\Delta s - p_j} \quad (3.8)$$

ここで, k_j, p_j は,

$$p_j = \frac{1}{\lambda_j} \quad (3.32)$$

$$k_j = \frac{-\mathbf{l}^t \mathbf{r} \mu_j \nu_j}{\lambda_j} \quad (3.33)$$

であり, $\lambda = 0$ の場合の係数 k_∞ は,

$$k_\infty = \sum_{k=0}^{q-q'} \mathbf{l}^t \mathbf{r} \mu_k \nu_k \quad (3.34)$$

となる. これより, 双 Lanczos 法により, 縮約された伝達関数をできる. この手法により, 得られた伝達関数は, 周波数に対して陽な関数となっており, 任意の周波数に対して, 伝達関数値を求めることができる.

3.2 固有直交分解法

固有直交分解法 (POD: Proper Orthogonal Decomposition) は, モデル縮約法の一つであり, 最小二乗法をベースとして, 与えられたデータから適切な部分空間を求める手法である. この手法は流体力学や信号解析, パターン解析等に用いられている. 近年では, 電磁界解析の分野においても注目されており, 時間領域解析, 周波数領域解析, 最適化問題へ適用されている.

3.2.1 主成分分析

あるデータ列 (有限要素方程式を複数回解くことにより得られるデータ列等) $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{r-1}, \mathbf{x}_r]$ から, 1次元の特徴 (部分) 空間を構成する $\mathbf{w}$ を探索することを考える. ここで, $\mathbf{x}_j \in \mathbb{C}^n$ である ($n \gg r$). これは, 以下の関数を最小化する $\mathbf{w}$ を求めることに帰着する.

$$f = \sum_{j=1}^r |\mathbf{x}_j - (\mathbf{w}^t \mathbf{x}_j) \mathbf{w}|^2 \rightarrow \min \quad (3.35)$$

ここで、 $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ である。この最小化問題は、 $\mathbf{x}_j$ と $\mathbf{w}$ の内積の分散が最大となる $\mathbf{w}$ を探せばよい。これより、 $\mathbf{x}_j$ と $\mathbf{w}$ の内積の分散は、

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (\mathbf{w}^t \mathbf{x}_j)^2 \\
 &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \mathbf{w}^t \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^t \mathbf{w} \\
 &= \frac{1}{r} \mathbf{w}^t (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^t + \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^t + \cdots + \mathbf{x}_r \mathbf{x}_r^t) \mathbf{w} \\
 &= \frac{1}{r} \mathbf{w}^t \mathbf{X} \mathbf{X}^t \mathbf{w} \rightarrow \max
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

となる。この上式に対して、 $\mathbf{w}^t \mathbf{w} = 1$ という制約を課すると、レイリー商の最適化問題に帰着する。レイリー商の最大値は、ベクトル間に挟まれた行列の最大固有値に一致することが知られている。そのため、(3.36) 式の最大値は $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ の最大固有値と一致する。これより、 $\mathbf{w}$ は行列 $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ の最大固有値に対応する固有ベクトルと一致するため、 $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ の固有値問題を解くことで $\mathbf{w}$ を求めることができる。

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^t \mathbf{w} = \lambda_{\max} \mathbf{w} \tag{3.37}$$

しかし、 $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ は $n \times n$ の行列サイズであり、 n が大きくなればなるほど、計算コストが増大する。そこで、以下のような固有値問題に置き換えて、求めるのが一般的である。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}^t \mathbf{X} \tilde{\mathbf{w}} &= \lambda_{\max} \mathbf{X}^t \mathbf{w} \\
 \mathbf{X}^t \mathbf{X} \tilde{\mathbf{w}} &= \lambda_{\max} \tilde{\mathbf{w}}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

この処理により、 $n \times n$ の固有値問題を $r \times r$ の固有値問題に帰着させることができる。これより、分散を最大とする方向の $\mathbf{w}$ を求めることができる。しかし、1 本のベクトルにより構成された部分空間は非常に表現能力に乏しい。そのため、 s 本の基底ベクトルにより、構成された部分空間を構成する必要がある。その場合は、固有値問題 (3.37) 式において得られる s 番目 ($r \geq s$) までに大きい固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{w}_k$ の線形結合でオリジナルのベクトル $\mathbf{x}$ を構成する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= y_1 \mathbf{w}_1 + y_2 \mathbf{w}_2 + y_3 \mathbf{w}_3 + \cdots + y_s \mathbf{w}_s \\
 &= \mathbf{W} \mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

ここで、 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^s$ である。これより、 n 次元のオリジナルのベクトルを s 本の基底ベクトルで構成された部分空間へ射影することができる。

部分空間を構成するベクトルの本数の決定方法は、しばしば固有値の大きさに基づき決められる。すなわち、

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{r-1} + \lambda_r} \geq \epsilon \tag{3.40}$$

を満たすような最小の s を求めることである。ここで、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ 、 ϵ は $0 \leq \epsilon \leq 1$ とし、1 のとき固有ベクトルは r 本選ばれることとなる。固有ベクトルの数が増えるほど、POD による近似の精度は上がるが、それと同時に行列-行列積や逆行列等の計算量が増加するため、それらを考慮して ϵ を決める必要がある。

3.2.2 有限要素方程式への適用

まず、線形問題を考える。線形の有限要素方程式は一般的に以下のように書くことができる。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.41)$$

ここで、 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ である。(3.39) 式を (3.41) 式に代入すると、

$$AW\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (3.42)$$

となる。ここで、係数行列が長方形型となっているので、

$$W^t AW\mathbf{y} = W^t \mathbf{b} \quad (3.43)$$

とする。これより、係数行列のサイズは $r \times r$ となっており、(3.41) 式より、次元数を大幅に削減できている。

次に非線形問題を考える。非線形問題一般的に以下のように書くことができる。

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 \quad (3.44)$$

ここで、 $A(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ に対して非線形な行列である。この非線形方程式を Newton Raphson 法で解く場合の以下の線形化された方程式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.45)$$

この線形化された方程式で得られる $\delta \mathbf{x}$ を $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \delta \mathbf{x}$ のように更新していくことで非線形方程式を解く。この線形化された方程式に対して (3.39) 式を代入すると、

$$W^t \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} W \delta \mathbf{y} = -W^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.46)$$

となり、非線形方程式の求解の際にも方程式を次元縮約できる。しかし、非線形問題に対して、この従来の固有直交分解法ベースのモデル縮約法を適用を行うと、計算時間も精度も線形問題と比べて悪化してしまう。この詳細に関しては、4 章にて詳しく述べる。

第4章 非線形渦電流場の時間領域有限要素解析

インダクタやモータ等の電磁機器の非定常電磁界解析のために、有限要素解析が広く用いられている。非定常解析では、時間領域解析となるため、毎ステップごとに大規模な連立一次方程式を解く必要がある。また、これらの電磁機器では通常、非線形性を有している材料が用いられているため、Newton Raphson 法や Fixed Point 法等の反復法を用いて、非線形方程式を解く必要がある。そのため、図 4.1 のようなアルゴリズムで非定常問題を解いていく必要がある。図 4.1 は、Newton Raphson 法を用いた非線形有限要素方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ の未知ベクトル $\mathbf{x}$ を求解するためのアルゴリズムである。図 4.1 より、2 重ループとなっていることが確認できる。また、 $\delta\mathbf{x}$ を求めるために線形化された連立一次方程式を解く必要がある。3 次元有限要素解析において、この連立一次方程式は数十万から数千万の連立一次方程式を解く必要があり、通常、ICCG 法や GMRES 法等の反復法が用いられる。そのため、このアルゴリズムは実際には 3 重ループとなってしまう。この処理を定常状態に至るまで続けるため、電磁機器の有限要素法を用いた非定常解析は長大となってしまう。

これらの問題点を解決するために、近年では、Clemens らが非線形準静電場問題 [19] へ、著者らが非線形準静磁場問題 [21] へ 3.2 節で述べた固有直交分解法によるモデル縮約法の適用を行っている。固有直交分解法ベースのモデル縮約法は、線形問題においては非常に大きな計算時間の削減効果を実現できている [21]。しかし、非線形問題へこの従来の固有直交分解法ベースのモデル縮約法を適用した際、計算時間、解析精度の点から 2 つの欠点が存在する。一つは、非線形性 (磁気飽和) の強い領域において、解析精度が著しく劣化してしまう。固有直交分解法では、スナップショットされた解から構成された基底ベクトルの線形結合でオリジナルの場を表現する。しかし、これは 3.2 節でも詳細を述べたが線形代数が基礎となっており、非線形問題へ適用すると著しく精度が悪化してしまう。二つ目は、Newton Raphson 法の反復のたびに行列-行列積が 2 回必要となり、計算時間が線形問題と比べて大幅に増加してしまう。(3.46) 式の係数行列の構造を見るとわかるが、行列 $\mathbf{W}$ で挟まれているヤコビ行列は Newton Raphson 法での求解の過程において、更新する必要がある。そのため、更新の回数が増えれば増えるほど、係数行列を構成するための行列-行列の回数が大幅に増えてしまう。そのため、非線形問題では計算時間の速度向上率も線形問題と比べて非常に小さくなってしまう。

非線形領域の解析精度を改善するために、Clemens らは部分領域モデル縮約法を 2013 年に提案した [20]。この手法は、線形領域に対してのみ固有直交分解法を適用し、方程式を構成し求解を行う手法である。この手法を用いることにより、線形領域だけでなく、非線形領域の精度を保ちながら、計算時間を高速化することができる。しかし、線形領域と非線形領域の比により、計算時間の削減率が変わってしまう。非線形領域が線形領域に対

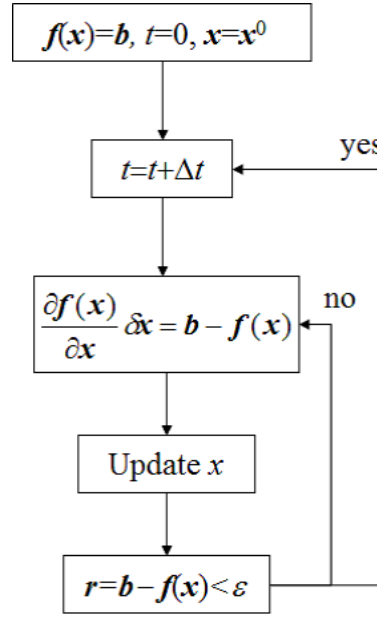


図 4.1: 非線形方程式の解法アルゴリズム

して多い問題の場合、適用すると計算時間が縮約する前より計算時間が増えてしまう場合もある。

また、非線形問題へ固有直交分解法を適用した場合の計算時間を短縮するため、Sorensenらは Discrete Empirical Interpolation(DEI) 法と呼ばれる手法を提案した [44]。この手法は、最初の数周期分のスナップショットから非線形性の強い領域を自動的に抽出し、その領域のみで非線形項を線形近似する。この手法を用いることにより、非線形項の更新や行列-行列積に要する計算時間を大幅に短縮することができる。この手法は様々な非線形問題に適用され、その有効性も示されている [22][24][45]。その一方で、解析精度は従来のモデル縮約法と比較して大幅に悪化してしまう。

これらの問題点を解決するために、部分領域モデル縮約法と DEI 法を組み合わせた新たなモデル縮約法を提案する。本章ではその提案するモデル縮約法に関して以下の流れで述べる。まず、4.1 節では、部分領域モデル縮約法に関して述べる。4.2 節では DEI 法に関して、4.3 節では著者が提案している部分領域モデル縮約法と DEI の組み合わせ手法を述べる。4.4 節では 3 つのモデルに適用し、その有効性に関して述べる。4.5 節では時間周期誤差修正法とモデル縮約法を併用した非線形渦電流場の時間領域解析の高速化手法に関して述べる。最後に、4.6 節で本章をまとめる。

4.1 部分領域モデル縮約法

非線形時間領域有限要素方程式を簡単化のために以下のように記述する。

$$Ax + b + f(x) = 0 \quad (4.1)$$

ここで, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ である. (4.1) 式の第1, 2項は線形項で第3項が非線形項とする. 部分領域モデル縮約法では非線形領域に対してはモデル縮約法を適用しない. そこで, (4.1) 式を以下のように変形する.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.2)$$

ここで, $\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_2, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ である. これより, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は, それぞれ非線形領域に関する未知ベクトルである. 部分領域モデル縮約法では, $\mathbf{x}_2$ のみ固有直交分解法により, 次元縮約を行う. ある時間ステップ $r\Delta t$ まで (4.2) を解き, 線形領域の解をスナップショットする.

$$X_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^0 & \mathbf{x}_2^1 & \mathbf{x}_2^2 & \cdots & \mathbf{x}_2^r \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ここで, $\mathbf{x}_2^k$ は k ステップ目の線形領域の解ベクトルである. このデータ行列に対して, 特異値分解を適用する.

$$\begin{aligned} X_2 &= W_2 \Sigma V_2^t \\ &= \sigma_1 \mathbf{w}_{21}^t \mathbf{v}_{21} + \sigma_2 \mathbf{w}_{22}^t \mathbf{v}_{22} + \cdots + \sigma_r \mathbf{w}_{2r}^t \mathbf{v}_{2r} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで, $\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i, \sigma_i$ は, それぞれ $X_2 X_2^t, X_2^t X_2$ の固有ベクトル, 特異値である. これより, 線形領域における未知ベクトル $\mathbf{x}_2^k$ は, 以下のように $\mathbf{w}_{2k}$ の線形結合で書くことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2^k &= y_{21} \mathbf{w}_{21} + y_{22} \mathbf{w}_{22} + \cdots + y_{2r} \mathbf{w}_{2r} \\ &= W_2 \mathbf{y}_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで, $\mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^r$ である. 最終的に, (4.2) 式に (4.5) 式を代入すると,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} W_2 \\ W_2^t A_{21} & W_2^t A_{22} W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ W_2^t \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

となる. (4.6) 式の次元数は, 最終的に $(n - m + r) \times (n - m + r)$ となっており, 非線形領域が全体の領域に比べて小さい場合, 非常に大きな次元縮約を実現しながら, 非線形領域の解の精度も向上することができる. しかし, 非線形領域が非常に線形領域に比べて大きい場合, 次元の縮約効果が小さいため, 大幅な計算時間の短縮の実現が期待できない.

4.2 DEI 法

4.2.1 定式化

(3.46) 式におけるヤコビ行列はフルモデルにおいて更新しなければならず, 縮約しない場合と同じだけの時間をヤコビ行列の更新に要してしまう. そこで, 係数行列の更新を効率よく行うため, DEI を適用する. DEI 法では (4.1) 式の非線形項を以下のように線形近似する.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = W_{\text{DEI}} \mathbf{c} \quad (4.7)$$

ここで、行列 W_{DEI} は以下の特異値分解により得られる.

$$X_{\text{DEI}} = W_{\text{DEI}} \Sigma_{\text{DEI}} V_{\text{DEI}} \quad (4.8)$$

X_{DEI} は、以下のスナップショット列により、構成される.

$$X_{\text{DEI}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) & \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) & \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{x}^p) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ここで、 $W \in \mathbb{R}^{n \times p}$ であり、 p は DEI 法のためのスナップショット数である. また、(4.7) 式 of 非線形ベクトルを非線形領域中における非線形性の強い成分のみで評価することを考える. そのために、ここで行列 P を導入する. 行列 P は、以下のように定義する.

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{d_1} & \mathbf{p}_{d_2} & \cdots & \mathbf{p}_{d_s} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ここで、 $\mathbf{p}_{d_i} = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]^t$ であり、 d_i 番目が 1 となるベクトルである. (4.7) 式に P の転置を左側から掛けていく.

$$P^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) = P^t W_{\text{DEI}} \mathbf{c} \quad (4.11)$$

これより、 $P^t U$ の逆行列が存在するとすると、ベクトル $\mathbf{c}$ は、

$$\mathbf{c} = (P^t W_{\text{DEI}})^{-1} P^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

となる. これより、(4.7) 式に (4.12) 式を代入すると、非線形項が

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = W_{\text{DEI}} (P^t W_{\text{DEI}})^{-1} P^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

となる. 実際の計算では、 $P^t \mathbf{f}(\mathbf{x})$ を直接行列更新した後に、 $W_{\text{DEI}} (P^t W_{\text{DEI}})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ を掛けることにより、大幅に更新に要する時間を削減することができる.

4.2.2 P の作成方法

行列 P は、非線形項を非線形性の強い部分で近似するために非常に重要な役割を持つ. そのアルゴリズムを以下に示す.

Input: $W_{\text{DEI}} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m]$

Output: $P = [\mathbf{p}_{d_1}, \mathbf{p}_{d_2}, \dots, \mathbf{p}_{d_m}]$

1, $\mathbf{w}_1$ の成分の中で一番大きい値を調べ、その値に対応する成分が 1, その他の成分が 0 となる $\mathbf{p}_{d_1}$ を作成する.

2, $W'_{\text{DEI}} = [\mathbf{w}_1]$, $P = [\mathbf{p}_{d_1}]$

$i = 2$ とする

3, $(P^t W'_{\text{DEI}}) \mathbf{c} = P^t \mathbf{w}_i$ を $\mathbf{c}$ について解く.

4, $\mathbf{r} = \mathbf{w}_i - U' \mathbf{c}$

5, $\mathbf{r}$ の成分の中で一番大きい値を調べ、その値に対応する成分が 1, その他の成分が 0 となる $\mathbf{p}_{d_i}$ を作成する.

6, $W'_{\text{DEI}} = [W'_{\text{DEI}}, \mathbf{w}_i]$, $P = [P, \mathbf{p}_{d_i}]$

7, $i++$, $i > m$ でなければ 3 に戻る.

4.2.3 準静磁場有限要素方程式への適用

準静磁場の有限要素方程式において、非線形項は、

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_j A_j \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu(\mathbf{x}) \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega \quad (4.14)$$

である。この非線形項に対して、DEI 法を適用すると、

$$f'_i(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_{\text{DEI}}(\mathbf{P}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}})^{-1} \mathbf{P}^t \sum_j A_j \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu(\mathbf{x}) \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega \quad (4.15)$$

となる。この DEI 法を適用した準静磁場における有限要素方程式に対して、Newton Raphson 法を適用すると、

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} = -\mathbf{g} \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{W}_{\text{DEI}}(\mathbf{P}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}})^{-1} \mathbf{P}^t \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \quad (4.16b)$$

となる。このとき、係数行列は、

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_{\text{DEI}}(\mathbf{P}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}})^{-1} \mathbf{P}^t \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

となる。ここで、 $\mathbf{F}_{11}$ は $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ のヤコビ行列である。最終的には、

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_{\text{DEI}}(\mathbf{P}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^t \mathbf{F}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

とする。ここで、 $\mathbf{F}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ に対して、 $\mathbf{P}^t \mathbf{F}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ である。 $p \ll m$ であるので、(4.17) 式の更新量に対して (4.18) 式の更新量は、大幅に計算コストが小さくなっているの
がわかる。

最終的には、通常モデル縮約法も適用して方程式を解く。モデル縮約法を適用した場合、

$$\mathbf{W}^t \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{W} \delta \mathbf{y} = -\mathbf{g}' \quad (4.19a)$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{W}^t \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{x} + \mathbf{W}^t \mathbf{b} + \mathbf{W}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}}(\mathbf{P}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}})^{-1} \mathbf{P}^t \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \quad (4.19b)$$

DEI 法とモデル縮約法を適用している (4.19) 式の係数行列は、非対称行列となってしまう。しかし、この場合、行列サイズが $r \times r$ であるので、逆行列を用いて直接解くことが可能である。また、係数行列の更新に関しては大幅に短縮することは可能であるが、非線形項を線形近似しているので、解の精度が従来のモデル縮約法よりも悪化してしまう。そのため、従来のモデル縮約法自体の解析精度が悪い場合この手法は有効を用いるとさらに解析精度が悪くなってしまう。

4.3 提案手法

4.3.1 定式化

本節では、前節までに述べてきた2つの手法を併用した新たなモデル縮約法を提案する。提案手法では、非線形領域を2つの領域に分割する。ひとつは非線形性の強い領域、もう一つはそれ以外の非線形性の弱い領域である。これより、(4.1) 式は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{strong}} \\ \mathbf{x}_{\text{weak}} \\ \mathbf{x}_{\text{linear}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\text{strong}} \\ \mathbf{b}_{\text{weak}} \\ \mathbf{b}_{\text{linear}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{strong}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_{\text{weak}}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

ここで、 $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{m_1 \times (n-m)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$, $A_{23} \in \mathbb{R}^{m_2 \times (n-m)}$, $A_{31} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m_1}$, $A_{32} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m_2}$, $A_{33} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\mathbf{x}_{\text{strong}}, \mathbf{b}_{\text{strong}} \in \mathbb{R}_1^m$, $\mathbf{x}_{\text{weak}}, \mathbf{b}_{\text{weak}} \in \mathbb{R}_2^m$, $\mathbf{x}_{\text{linear}}, \mathbf{b}_{\text{linear}} \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ である。また、 $m = m_1 + m_2$ である。strong, weak, linear はそれぞれ非線形性の強い領域、弱い領域、線形領域に対応するベクトルに対応している。本手法では、非線形性の弱い領域と線形領域に対してモデル縮約法を適用する。これより、あるタイムステップ $r\Delta t$ までのスナップショット列を以下のように作成する。

$$\mathbf{X}_{\text{weak}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{weak}}^0 & \mathbf{x}_{\text{weak}}^1 & \mathbf{x}_{\text{weak}}^2 & \cdots & \mathbf{x}_{\text{linear}}^r \end{bmatrix} \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{X}_{\text{linear}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{linear}}^0 & \mathbf{x}_{\text{linear}}^1 & \mathbf{x}_{\text{linear}}^2 & \cdots & \mathbf{x}_{\text{linear}}^r \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

このスナップショット列に対して、特異値分解を適用する。

$$\mathbf{X}_{\text{weak}} = \mathbf{W}_{\text{weak}} \Sigma_{\text{weak}} \mathbf{V}_{\text{weak}} \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{X}_{\text{linear}} = \mathbf{W}_{\text{linear}} \Sigma_{\text{linear}} \mathbf{V}_{\text{linear}} \quad (4.22b)$$

これより、未知数 $\mathbf{x}$ 以下のような線形結合で書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{W}_p \mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{\text{weak}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{\text{linear}} \end{bmatrix} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.23)$$

ここで、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1+2r}$ である。これより、(4.1) 式は、

$$\mathbf{W}_p^t \mathbf{A} \mathbf{W}_p \mathbf{y} + \mathbf{W}_p^t \mathbf{b} + \mathbf{W}_p^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.24)$$

となる。本手法では非線形性の弱い領域に対応する非線形ベクトルである $\mathbf{f}_{\text{weak}}(\mathbf{x})$ を DEI 法により、線形近似する。

$$\mathbf{f}'_{\text{weak}}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_{\text{DEI}} (\mathbf{P}^t \mathbf{W}_{\text{DEI}})^{-1} \mathbf{P}^t \mathbf{f}_{\text{weak}}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

(4.25) 式を (4.24) 式に代入する.

$$W_p^t A W_p \mathbf{y} + W_p^t \mathbf{b} + W_p^t U_{\text{DEI}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.26)$$

ここで,

$$U_{\text{DEI}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & W_{\text{DEI}}(P^t W_{\text{DEI}})^{-1} P^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

である. 最終的にこの非線形方程式に Newton Raphson 法を適用する.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} = -\mathbf{g}_p \quad (4.28)$$

ここで, $\mathbf{g}_p$ は (4.26) 式の左辺である. (4.28) 式のヤコビ行列は,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{y}} = W_p^t A W_p + W_p^t U_{\text{DEI}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} W_p \quad (4.29)$$

のように線形項と非線形項に分解できる. 第一行列は線形部の行列であるので, Newton Raphson 法の反復の度に更新の必要のない行列である. 第2項目は, 反復のたびに更新が必要な行列である. この行列は,

$$W_p^t U_{\text{DEI}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} W_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & W_{\text{DEI}}(P^t W_{\text{DEI}})^{-1} P^t & 0 \\ 0 & 0 & W_{\text{linear}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & W_{\text{weak}} & 0 \\ 0 & 0 & W_{\text{linear}} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

である. F_{kk} はヤコビ行列である. このまま計算してしまうと, 更新に要する計算量はフルモデルの有限要素解析と変わらないため, P^t をヤコビ行列内に含ませる.

$$W_p^t U_{\text{DEI}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} W_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & W_{\text{DEI}}(P^t W_{\text{DEI}})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & W_{\text{linear}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ P^t F_{21} & P^t F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & W_{\text{weak}} & 0 \\ 0 & 0 & W_{\text{linear}} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

これより, ヤコビ行列のサイズが大幅に小さくなる. そのため, このヤコビ行列を直接計算することによって, 行列の更新に必要な計算時間を大幅に短縮することが可能となる. しかし前節で述べた DEI-MOR 法とは違い, 係数行列が数千から数万の非対称行列になってしまう. そのため, 方程式を解く際には BiCGstab や GMRES 法等の非対称行列用の Solver を用いる必要がある.

4.3.2 領域自動決定手法

本手法は, 非線形領域において, 非線形性の強い領域とそれ以外の領域の2つに分割する必要がある. この領域の分け方は, 解析精度, 計算時間に大きな影響を与える. そのた

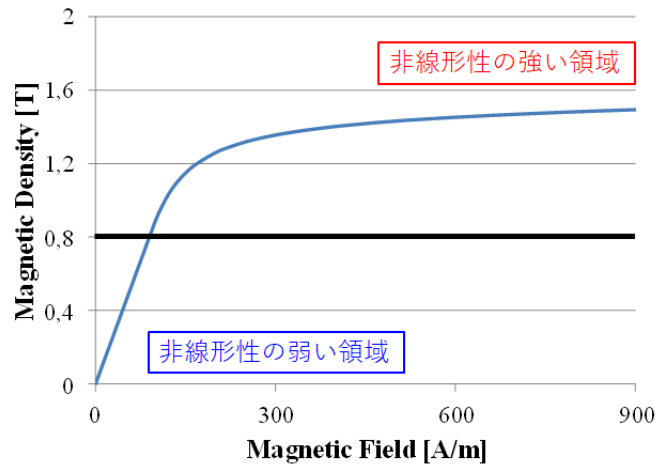


図 4.2: BH curve の領域分割

め、非線形領域の分け方は本手法において非常に重要なファクターとなる。そこで、領域分割には図 4.2 に示すような非線形特性を用いる。磁性体は通常、磁界が弱い場合にはほぼ線形に近い特性を持つ。その一方で、磁界が強くなると強い磁気飽和が起きる。この特徴を利用して、BH カーブの領域を非線形性が強い領域と弱い領域の 2 つの領域に分割する。しかし、非線形領域の磁場分布は、時間が進むごとに変化してしまう。また、どの領域が非線形性の強い領域かというのは、一度解析を行ってみないと、その判断は難しい。これらの理由から、前ステップの電磁界分布より、領域を自動的に分割することを考える。しかし、毎ステップにおいて、前ステップの電磁界分布を用いて領域を 2 つの領域に分割すると、領域が毎ステップ変化するので、毎ステップごとに W_p , U_{DEI} を作成しなければならない。そのため、計算時間が長大となってしまう。そこで、スナップショットにより得た電磁界分布を利用して、領域分割を自動的に行う。

以下に、その提案するモデル縮約法のアルゴリズムを示す。(図 4.3)

< 提案するアルゴリズム >

- 1: 時間ステップ $r\Delta t$ まで (4.1) 式を解いて電磁場解析を行う。
 - 2: 電磁場解析により得られた電磁場分布に対して図 4.2 を用いて 2 つの領域に分割する。(赤が非線形性の強い領域、青：非線形性の弱い領域)
 - 3: process2 で得られた領域分割に対して、 W_{MOR} と W_{DEI} を作成する。
 - for $n = (r + 1)\Delta t \dots$
 - 4: n ステップ目において、(4.26) 式で電磁界解析をする。
 - 5: n ステップ目で得られた電磁界分布と前処理で得られた電磁界分布で最も近い電磁界分布を探索し、その分布に対応する変換行列を $(n + 1)$ ステップの解析で用いる。
 - 6: 終了条件を満たさない場合、 $n = n + 1$ とし、process4 に戻る。
- このアルゴリズムを用いることにより、自動的に領域分割を行いながら、高速に電磁界解析を行うことができる。

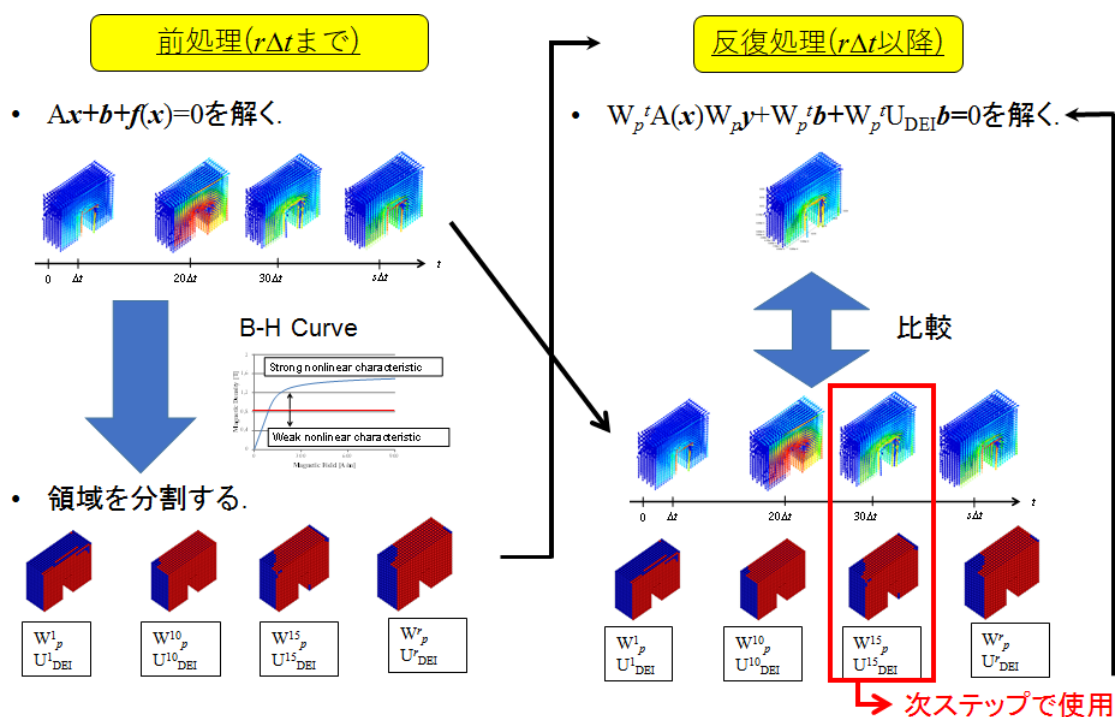


図 4.3: 自動領域分割アルゴリズム

4.4 数値解析

従来のモデル縮約法、部分領域モデル縮約法、DEI法と提案手法を図4.4に示す3つの解析モデルに適用し、解析精度、解析時間の比較を行う。各手法における連立1次方程式を解くためのソルバは、従来のモデル縮約法、DEI法は方程式の次元数が小さいので逆行列を用いて方程式を解く直接法、部分領域モデル縮約法はICCG法、提案手法はBiCGstab法を用いる。解析モデル中の磁性体コアの導電率 σ は、 $5 \times 10^6 \text{ S/m}$ と仮定する。また、解析モデルは、図4.5の回路に接続されているとする。ここで、電圧 v 、抵抗 R は、 0.008 V と $10^{-5} \Omega$ 、動作周波数は 100 Hz 、時間ステップ Δt は $2.5 \times 10^{-4} \text{ sec}$ とする。スナップショット数 r は、Model1においては20、Model2、Model3においては50とする。図4.6にそれぞれの手法を図4.4の解析モデルに適用した場合の速度向上率を示す。速度向上率は、通常の有限要素解析に要した時間 τ_{FEM} と、それぞれのモデル縮約法において要した時間 τ_{MOR} との比 $\tau_{\text{FEM}}/\tau_{\text{MOR}}$ である。このとき、それぞれのモデル縮約法において必要となるスナップショットを取る時間、変換行列を作成する時間等の前処理のための時間は含めない。図4.6より、検討した手法の中でDEI法が計算速度の速度向上率が最も高いことがわかる。これは、行列の更新サイズが大幅に小さくなったことと、Newton Raphson法の更新の度に必要となる行列-行列積((4.28)式の左辺)の計算コストが大幅に削減できたためである。その一方で通常のモデル縮約法と部分領域モデル縮約法は、フルモデルにおいて、行列を更新しなければならず、行列-行列積もフルモデルにおいて行わなければならないので、大幅な計算速度の向上を実現できていない。また、この2つの手法は、解析

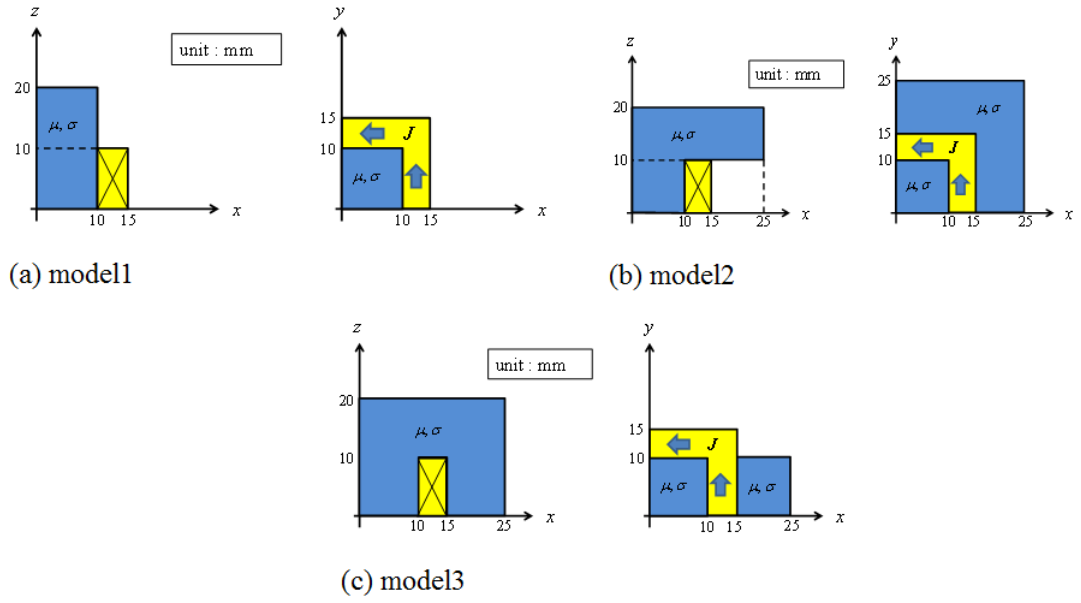


図 4.4: 解析モデル

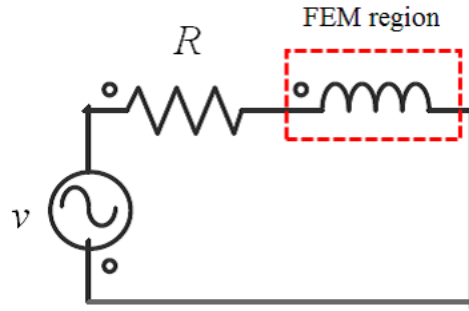


図 4.5: 有限要素モデルを含む回路

モデルに計算時間が依存していることが確認できる．提案手法においては，全ての解析モデルにおいて，3 倍以上の解析速度を向上できている．次に解析誤差を図 4.9 に示す．解析誤差は以下の式で定義する．

$$\text{error} = \frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} \sqrt{\frac{\sum_{e=1}^{N_e} |\mathbf{B}_{t,e}^{\text{FEM}} - \mathbf{B}_{t,e}^{\text{MOR}}|}{\sum_{e=1}^{N_e} |\mathbf{B}_{t,e}^{\text{FEM}}|}} \quad (4.32)$$

ここで， N_t , N_e , $\mathbf{B}_{t,e}^{\text{FEM}}$, $\mathbf{B}_{t,e}^{\text{MOR}}$ は，それぞれトータル時間ステップ数，要素数，通常の有限要素解析，MOR を用いて得られた磁束密度である．図 4.9 により，部分領域モデル縮約法と提案手法がほぼ同程度の解析精度で解析を行うことができていないことが確認できる．その一方で，計算時間短縮効果が最も高い DEI 法の解析精度は 4 つの手法の中で一番悪いことが確認できる．これは，非線形項を (4.25) 式のように線形近似するためである．次

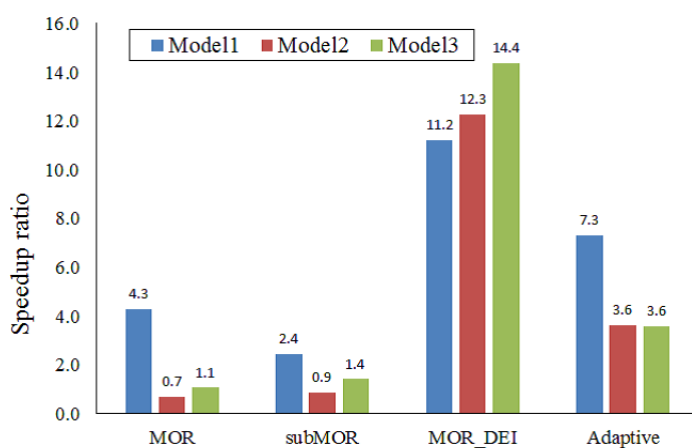


図 4.6: 各手法, 各モデルにおける速度向上率

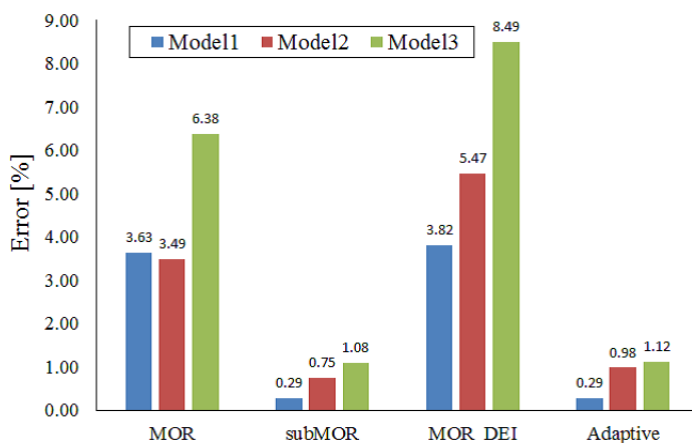


図 4.7: 各手法, 各モデルにおける解析誤差

に, 図 4.8 に各時刻における磁束密度の相対誤差を示す. 図 4.8 より, DEI 法が一番精度が悪く提案手法と部分領域モデル縮約法の解析誤差がほぼ同じとなっていることが確認できる. また, 図 4.9 に 287step における Model3 の磁束密度分布を示す. 磁束密度の大きい領域においては磁束密度分布が一致しているのが確認できるが, 磁束密度の小さい領域においては, DEI 法を適用しているため, 一致していないのが確認できる. しかし, 磁束密度が小さいため, 誤差に大きな影響を与えていないと考えられる.

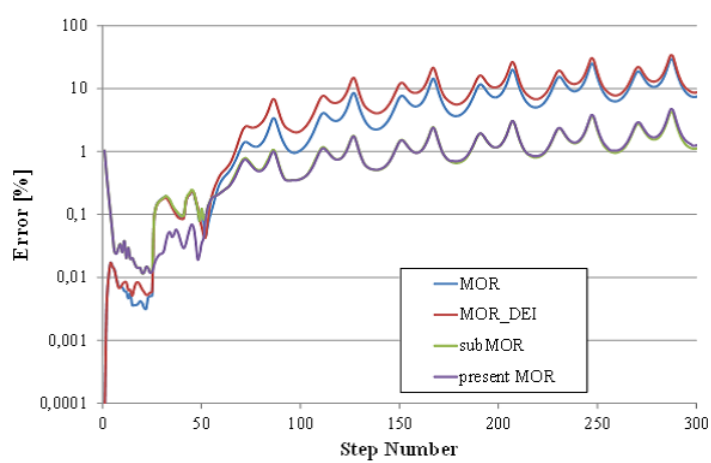


図 4.8: 各時刻における誤差

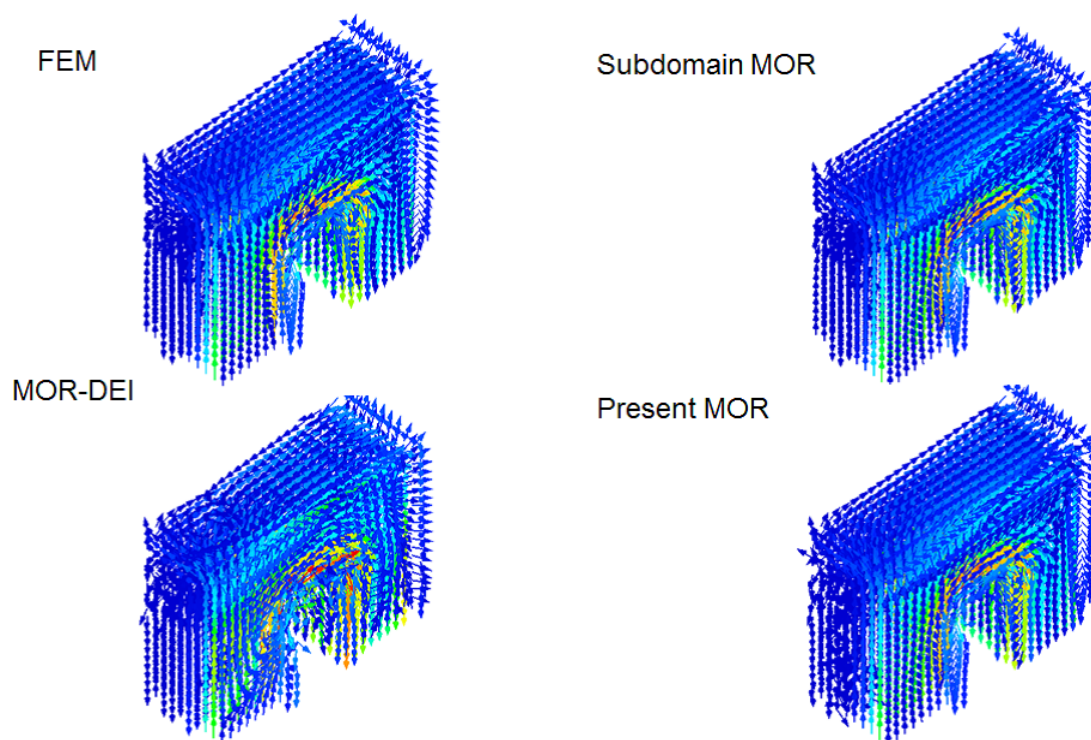


図 4.9: 各手法における磁束密度分布

4.5 TP-EEC 法と MOR の併用手法

本節では、従来のモデル縮約法と時間周期陽的誤差修正法 (TP-EEC: Time-periodic explicit error correction) [46]-[49] の併用手法に関して議論する。TP-EEC 法は、1 周期、または半周期ごとに非周期成分を抽出し、その成分を除去することにより、高速に定常解を求める手法である。外部回路との連成解析問題や誘導機等の定常解に到達するまで多くのタイムステップを要する問題に適用され、その有効性が示されている。われわれは TP-EEC 法とモデル縮約法を併用することで、今まで以上の高速化を実現できると考え、併用手法を提案した。

4.5.1 TP-EEC

非線形時間領域有限要素方程式を簡単化のため、以下のように記述する。

$$S(\mathbf{x}^n) + C \frac{d\mathbf{x}^n}{dt} = \mathbf{f}^n \quad (4.33)$$

ここで、外力項 $\mathbf{f}^n = \pm \mathbf{f}^{n+N}$ のような周期性を有しており、解ベクトルも $\mathbf{x}^n = \pm \mathbf{x}^{n+N}$ も周期性が成り立つと仮定する。ここで、 $+$ ($-$) は一 (半) 周期を示す。(4.33) 式に対して、 θ 法を適用すると、

$$\theta S(\mathbf{x}^n) + (1 - \theta)S(\mathbf{x}^{n-1}) + C \frac{\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}}{\Delta t} = \theta \mathbf{f}^n + (1 - \theta)\mathbf{f}^{n-1} \quad (4.34)$$

となる。以下のようにまとめる。

$$\hat{T}(\mathbf{x}^n) + \hat{C}(\mathbf{x}^{n-1}) = \theta \mathbf{f}^n + (1 - \theta)\mathbf{f}^{n-1} \quad (4.35)$$

ここで、

$$\hat{T}(\mathbf{x}^n) = \theta S(\mathbf{x}^n) + \frac{C}{\Delta t} \mathbf{x}^n, \hat{C}(\mathbf{x}^n) = (1 - \theta)S(\mathbf{x}^n) - \frac{C}{\Delta t} \mathbf{x}^n \quad (4.36)$$

である。この非線形方程式に対して、NewtonRaphson 法を適用する。そのときに線形化された方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^n)}{\partial \mathbf{x}^n} \delta \mathbf{x}^n = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^n) \quad (4.37)$$

となる。ここで、 $\mathbf{g}(\mathbf{x}^n)$ は、(4.35) 式の残差である。このとき、解の周期性を仮定すると、以下のような方程式を得ることができる。

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \delta \mathbf{X} = -\mathbf{G}(\mathbf{X}) \quad (4.38)$$

ここで、

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^2) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^3) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \mathbf{x}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix}, \delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}^1 \\ \delta \mathbf{x}^2 \\ \delta \mathbf{x}^3 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}^N \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

である．また，係数行列は，

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^1 & 0 & \dots & 0 & \pm \tilde{\mathbf{C}}^N \\ \tilde{\mathbf{C}}^1 & \tilde{\mathbf{T}}^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}}^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\mathbf{T}}^{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{\mathbf{C}}^{N-1} & \tilde{\mathbf{T}}^N \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

であり，

$$\tilde{\mathbf{T}}^n = \theta \frac{\partial S(\mathbf{x}^n)}{\partial \mathbf{x}^n} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \quad (4.41)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^n = (1 - \theta) \frac{\partial S(\mathbf{x}^n)}{\partial \mathbf{x}^n} - \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \quad (4.42)$$

である．(4.38) 式における $\mathbf{X}$ を収束の早い成分と遅い成分に分解する．

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' + \mathbf{U}\mathbf{p} \quad (4.43)$$

ここで， $\mathbf{p}$ は修正ベクトルである．(4.43) 式を (4.38) 式に代入すると，

$$\mathbf{U}^t \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} \mathbf{p} = -\mathbf{U}^t \mathbf{G}(\mathbf{X}) \quad (4.44)$$

ここで，直流の誤差成分にのみ着目すると， $\mathbf{U} = [\mathbf{I}, \mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}]^t$ とおくことができる．これより，最終的に，(4.44) 式は，

$$\left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial S(\mathbf{x}^i)}{\partial \mathbf{x}^i} + (1 \mp 1) \tilde{\mathbf{C}}^N \right] \mathbf{p} = -\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_N \quad (4.45)$$

となる．(4.45) 式の修正方程式を $\mathbf{p}$ について解き， $\mathbf{x}^N \leftarrow \mathbf{x}^N + \mathbf{p}$ とすることで過渡解を修正する．

4.5.2 MOR と TP-EEC 法の併用

図 4.10 に本手法の概念図を示す．本手法ではまず 1(半) 周期の間，通常の高次元方程式 (4.44) 式を解く．1(半) 周期経過後，MOR のための変換行列 (3.2 節における $\mathbf{W}$) を特異値分解により生成する．その後 (4.33) 式を縮約する．また，それと同時に TP-EEC 法による過渡解の誤差修正を行う．それ以降に関しては，縮約方程式を解き，1(半) 周期経過のたびに TP-EEC 法を適用し，誤差修正を行う．

誤差修正のための $\mathbf{p}$ の求解の際にも MOR の適用が可能である．誤差修正の $\mathbf{p}$ を以下のように縮約する．

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{q} \quad (4.46)$$

ここで， $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times s}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^s$ である．これより，(4.45) 式に代入すると，

$$\mathbf{W}^t \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial S(\mathbf{x}^i)}{\partial \mathbf{x}^i} + (1 \mp 1) \tilde{\mathbf{C}}^N \right] \mathbf{W} \mathbf{q} = -\mathbf{W}^t \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_N \quad (4.47)$$

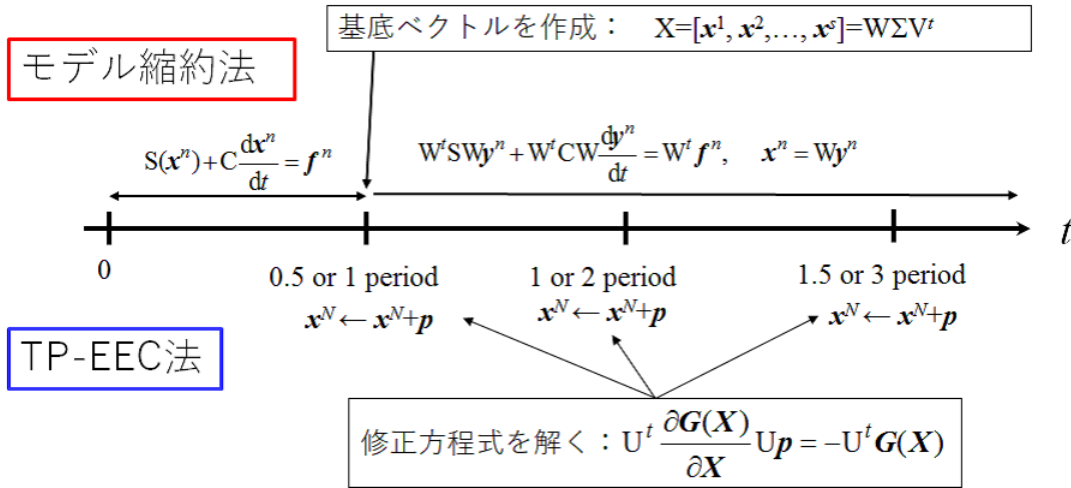


図 4.10: TP-EEC 法と MOR の併用アルゴリズム

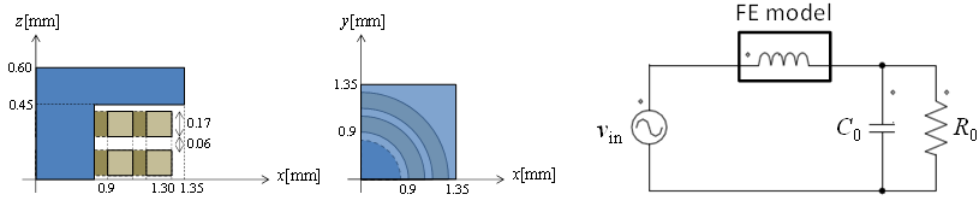


図 4.11: インダクタモデル

となる．これより，修正方程式に関しても縮約でき高速化可能である．また，一次の誤差を考慮した U を選ぶことで，より高速に定常状態まで解を収束させることが可能である．その一方で，一次成分まで考慮した場合，(4.44) 式が $2n$ 次元となり，行列も非対称行列となる．そのため，大規模な問題に対しては適用することで p の求解においても非常に長い計算時間を要する．しかし，本法を用いることで一次成分まで考慮した問題に対しても高速化可能であり，さらなる高速化を達成できることが期待できる．

4.5.3 解析結果

提案手法の有効性を確認するために，図 4.11 に示すインダクタモデルに本手法を適用する．図 4.11 に示すインダクタのコイル中には渦電流が流れ，インダクタは RC 並列の外部回路に接続されている．解析領域を四面体要素により分割を行い，節点数，要素数は，それぞれ 20985，117548 となった．コイルの導電率は， $5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$ とし，4 本のコイルは直列につながっていると仮定した．本研究では，全ての解析において 1 周期ごとに TP-EEC 法による誤差修正を行い， $N = 20$ (1 周期を 20 分割) とした．

線形問題

まず、線形問題に併用手法を適用する。磁性体部分の比透磁率を 10 とし、1MHz, 1V の電源電圧を印加した。また、 $R_0 = 0.05\Omega$ とし、異なる時定数に対する応答を考察するため、 $C_0 = 1\mu F, 100\mu F$ と仮定した。図 4.12, 4.13 に R_0 に流れる電流と、定常状態の電流との絶対誤差を示す。このとき、振幅の変化が 1 % 未満となる状態を定常状態と仮定している。FEM は回路と有限要素解析の連成解析を行った場合、TP-EEC は有限要素解析に TP-EEC 法を適用した場合、MOR は MOR により方程式の未知数を縮約した場合、TP-MOR は、提案手法で解析を行った場合である。図 4.12, 4.13 より、TP-EEC, TP-MOR は、他の 2 つの手法よりも早く定常へ収束している。図 4.13(b) より、時定数が長い問題に対しては誤差修正の効果が大きいことが確認できる。

つぎに表 4.1 に計算時間、速度向上率、定常までに要した反復回数を示す。これらの計算には、Intel Core i7-4930K/3.4GHz (32GB RAM) を用いた。また、速度向上率は通常の有限要素解析に要した計算時間 τ_1 とその他の手法で解析に要した計算時間 τ_2 の比 τ_1/τ_2 とする。1 周期の絶対誤差の平均が 0.04A 以下となったとき定常状態に到達したと判定する。表 4.1 の括弧の中は 0 ステップ目から定常に到達するまでの計算時間、括弧なしが 20 ステップ目から定常に到達するまでの計算時間 (スナップショットおよび基底ベクトルを構成する過程を抜いた計算時間) である。表 4.1 より、速度向上率は時定数の長い $C_0=0.01F$ の場合において 400 倍以上となっている。また、時定数が短い場合においても 50 倍以上の速度向上率を実現できている。

表 4.1: 線形問題の計算時間と速度向上率とタイムステップ数

(a) $C_0 = 1.0\mu F$				
	FEM	TP-EEC	MOR	Present
Elapsed time [sec.]	1140(1500)	960(1320)	36(386)	20(380)
Speed up	1.0	1.19(1.14)	31.7(3.89)	57.0(3.94)
Number of Steps	80	60	80	60
(b) $C_0 = 100\mu F$				
	FEM	TP-EEC	MOR	Present
Elapsed time [sec.]	11040(11400)	760(1140)	174(534)	26(386)
Speed up	1.0	14.5(10.0)	63.4(21.3)	425(29.5)
Number of Steps	600	80	600	80

非線形問題

つぎに、本手法を非線形問題に適用する。磁性体コア部分は 50A400 と仮定し、電源周波数は 1MHz とし、振幅を $v_{in} = 2V, 8V$ とした。また、外部回路の他の素子を $R_0 = 0.05\Omega$, $C_0 = 100\mu F$ とした。図 4.14, 4.15 に R_0 に流れる電流値と、定常状態の電流との絶対誤差を示す。印加電圧の振幅が変化しても TP-EEC, TP-MOR では、4 周期ほどで定常状

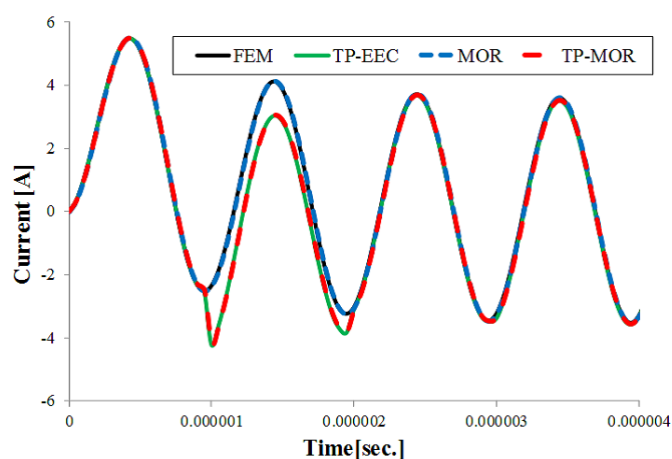
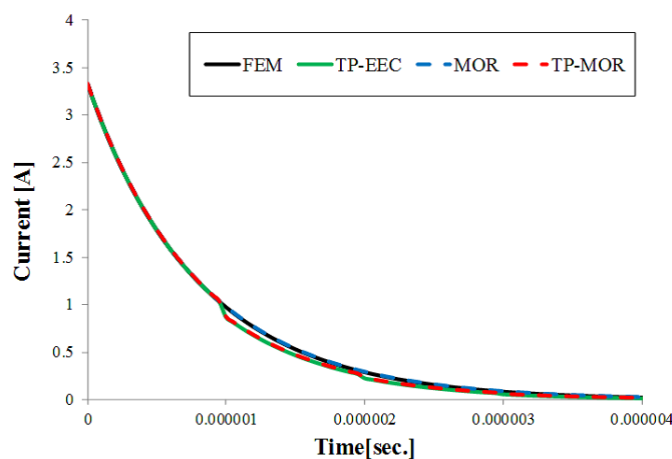

 (a) R_0 に流れる電流

 (b) R_0 に流れる電流の絶対誤差

 図 4.12: 線形問題における $C = 1\mu F$ 時の電流の時間変化

態に至っている．絶対誤差は線形の場合と比べて大きく振動しているが，どちらの場合においても通常の有限要素解析で得られた定常解との相対誤差は，1% 未満である．

表 4.2 に計算時間，速度向上率，定常までに要したタイムステップ数を示す．計算環境は線形の場合と同じとし，速度向上率の定義も同じとする．1 周期の絶対誤差の平均が $v_{in}=2V$ で $0.04A$ ， $v_{in}=8V$ で $0.4A$ となったとき，定常状態に到達したと判定した．双方の結果ともに 200 倍近い速度向上率を達成している．これより，非線形問題においても本手法の有効性が確認できた．

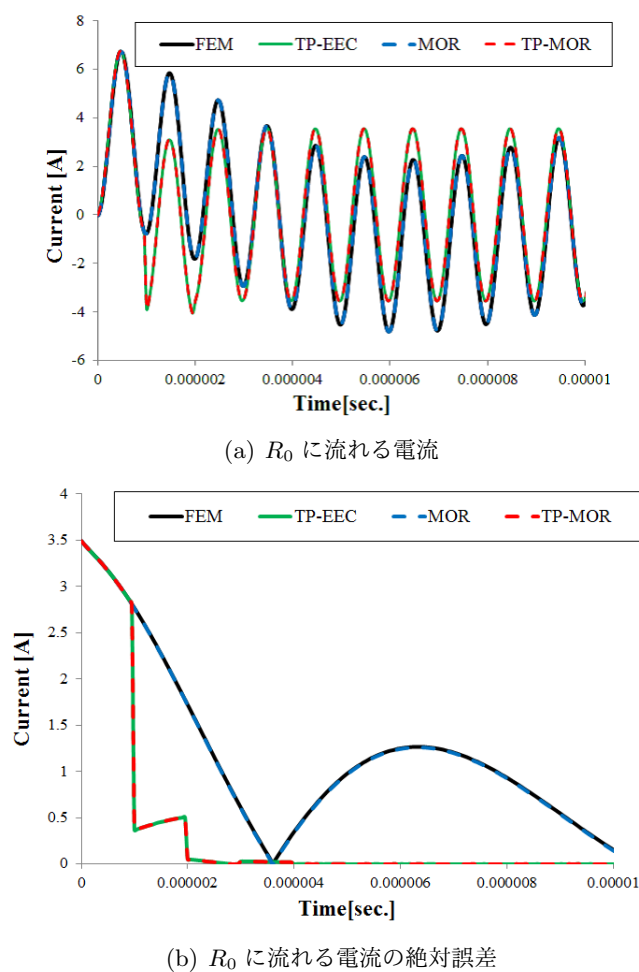
図 4.13: 線形問題における $C = 100\mu F$ 時の電流の時間変化

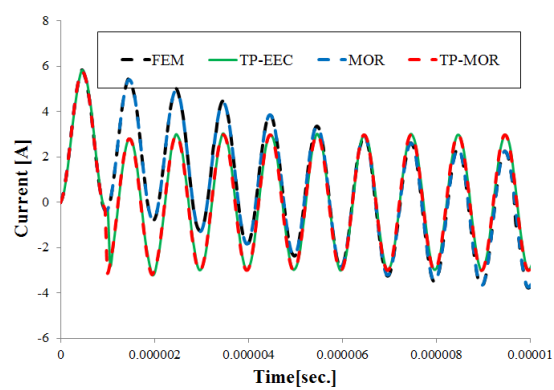
表 4.2: 非線形問題の計算時間と速度向上率とタイムステップ数

(a) $V_{in} = 2.0V$

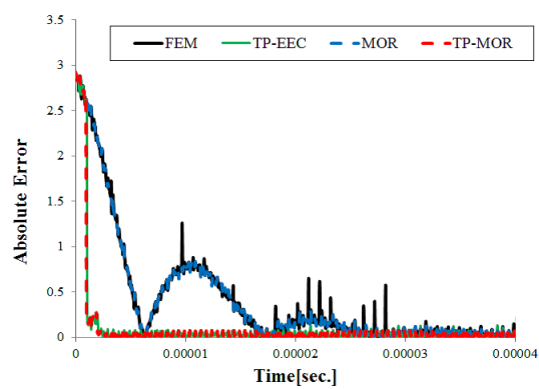
	FEM	TP-EEC	MOR	Present
Elapsed time [sec.]	14640(14940)	900(1380)	702(1002)	77(377)
Speed up	1.0	16.3(10.8)	20.9(14.9)	190(40.0)
Number of Steps	820	80	820	80

(b) $V_{in} = 8.0V$

	FEM	TP-EEC	MOR	Present
Elapsed time [sec.]	17700(18180)	1320(1800)	1146(1626)	79(559)
Speed up	1.0	13.4(10.1)	15.4(11.2)	224(32.5)
Number of Steps	840	80	840	80

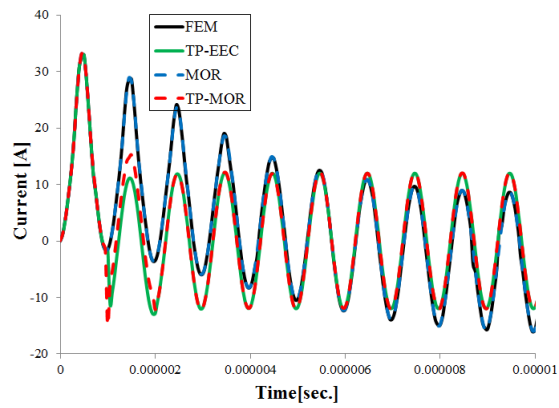
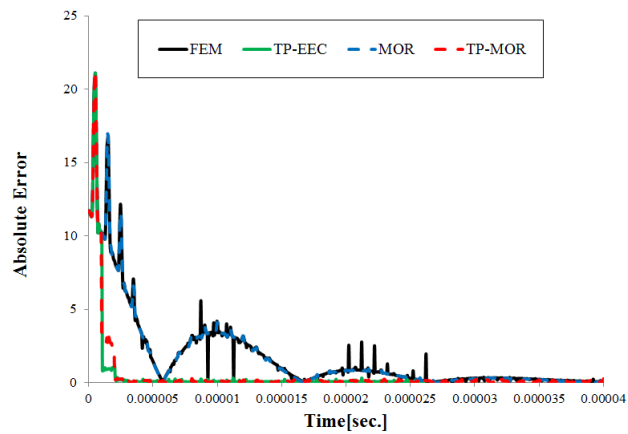


(a) R_0 に流れる電流



(b) R_0 に流れる電流の絶対誤差

図 4.14: 非線形問題における $V = 2V$ 時の電流の時間変化

(a) R_0 に流れる電流(b) R_0 に流れる電流の絶対誤差図 4.15: 非線形問題における $V = 8V$ 時の電流の時間変化

4.6 4章のまとめ

本章では、3次元有限要素法を用いた非定常解析の高速化のために、新たなモデル縮約法を提案した。本手法は、部分領域モデル縮約法とDEI法のそれぞれの欠点を補った新たな手法である。部分領域モデル縮約法では、線形領域のみをモデル縮約法により線形近似し、非線形領域に対しては、モデル縮約法を適用しない。そのため、線形領域と非線形領域の比により、未知数の次元数の削減率が変化するため、速度向上率が変動してしまう欠点を持っていた。また、DEI法は非線形項を線形近似し、高速化を実現する手法のため、解析精度が従来のモデル縮約法よりも悪化してしまう。そこで、これらの問題点を解決するために、有限要素領域を3つの領域に分ける手法を提案した。ひとつは、線形項、二つ目は非線形性の強い領域、最後の3つ目は非線形性の弱い領域である。線形領域に対してはMORを適用、非線形性の弱い領域に対してはMORとDEI法をそれぞれ適用する。これにより、非線形領域の未知数を削減でき、さらに非線形性の強い領域に関しては、線形近似を行わないので、解析精度が悪化しない。また、非線形性の強い/弱い領域というのは時々刻々変化するため、自動領域分割手法に関しても提案を行った。本手法を3つのモデルに適用した。全てのモデルにおいて速度向上率は3倍以上を実現し、さらに部分領域モデル縮約法と同等の解析精度を得ることにできた。これより、本手法の妥当性を確認することができた。

第5章 電磁機器の等価回路生成法

インダクタやリアクトル，変圧器等の電磁素子は一般的に駆動回路や制御回路等の内部に含まれている．そのため，DC-DC コンバータやインバータ等のパワーエレクトロニクス回路の設計・開発の過程においては，これらの電磁機器とパワエレ回路を連成して解析を行う必要がある．しかし，これらの電磁素子を有限要素法とし，それ以外を回路部と連成解析を行った場合，非常に膨大な計算時間がかかってしまう．そのため，通常これらの電磁素子は等価回路系に置きかられることがほとんどである．しかし，この等価回路系は動作点におけるインダクタンスと直流時における抵抗を直列に接続した簡易なものが多く，以下の3点を考慮できていないことがほとんどである．

1. 広い周波数帯における特性評価
2. 磁性コアの非線形特性の考慮 (初期磁化曲線，ヒステリシス特性)
3. ヒステリシス損失，渦電流損失の評価

これらを考慮するために，電磁鋼板の等価回路が提案されている [50]-[53]．電磁鋼板の等価回路は Helmholtz 方程式の解析解により，導出され，図 5.1 のような Cauer 型回路 [54] をしている．この Cauer 型の等価回路物理的な意味を持っており，渦電流，非線形特性を考慮可能である [53]．これより，この電磁鋼板の等価回路は上記の3つの考慮可能であり，実験的にも検証されている．しかし，平板や球型等の Helmholtz 方程式の解析解がないモデルに対しては適用が難しく，任意形状における Cauer 型等価回路の生成法が求められている．

これらの背景より，著者らは PVL をベースとしたモデル縮約法による等価回路生成法を提案した．この手法は，有限要素モデルより，直接等価回路を生成するため，任意形状の等価回路を生成することが可能である．本章では著者らが提案した等価回路生成法に関して，以下の流れで述べる．まず，5.1 節にて PVL をベースとした準静磁場における等価回路生成法に関して述べる．5.2 節では，Helmholtz 方程式の解析解により得られた電磁鋼板の等価回路と PVL をベースとした手法で得られた等価回路との比較を行い，著者らの手法の妥当性を示す．5.3 節では，非線形性の付与方法を示す．また，5.4 節では任意形状に対して本手法の適用を行う．その例として，DC-DC コンバータ内のインダクタと誘導加熱装置に本手法を適用し，その有効性を示す．最後に 5.4 節で5章をまとめる．

5.1 PVL による等価回路生成法

広い周波数帯に対応した等価回路を生成する場合，電磁機器のインピーダンスまたはアドミタンスの周波数特性を連続的な有理関数で表現する必要がある．そのため，システム

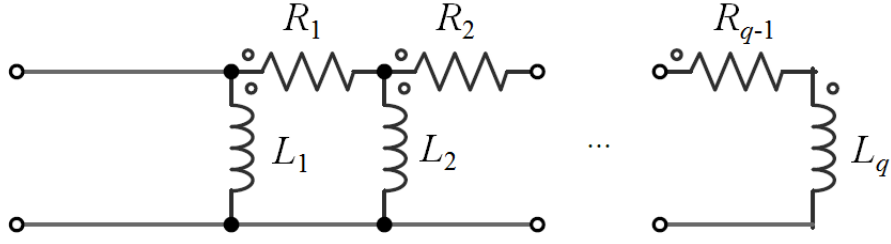


図 5.1: Cauer 型等価回路

の伝達関数を有理関数で記述できる PVL を使用する．本節では，まず Foster 回路の生成法を述べ，その後 Cauer 型の等価回路生成法に関して述べる．

5.1.1 Foster 型等価回路

本項では，電磁鋼板の複素実効透磁率の等価回路生成法，電磁機器のインピーダンスの等価回路生成法に関して述べる．

電磁鋼板の複素実効透磁率

図 5.2 に示す電磁鋼板を考える． x 軸方向のみ有限とし，それ以外を無限に長いとする．この電磁鋼板の複素実効透磁率を導出する場合，入力を電磁鋼板の厚さと表面磁場の積 dH_0 ，出力 Φ とする．

$$K\mathbf{x} + N\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}dH_0 \quad (5.1a)$$

$$\Phi = \mathbf{l}^t \mathbf{x} \quad (5.1b)$$

このとき，(5.1a) 式は T 法で定式化を行った場合の有限要素方程式である．出力方程式は，

$$\Phi = \int_{-d/2}^{d/2} \mu H_z(x) dx \quad (5.2)$$

である．これより，伝達関数は複素実効透磁率 $\dot{\mu}_r$ となる．複素実効透磁率の物理的意味に関しては 6 章で詳細を述べる．伝達関数 $\dot{\mu}_r$ は，

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_r(s) &= \frac{\Phi}{dH_0} \\ &= k_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{k_j}{(s - s_0) - p_j} \end{aligned} \quad (5.3)$$

となり，部分分数で書くことができる．これより，この複素透磁率は，

$$\dot{\mu}_r(s) = \mu_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \dot{\mu}_j \quad (5.4)$$

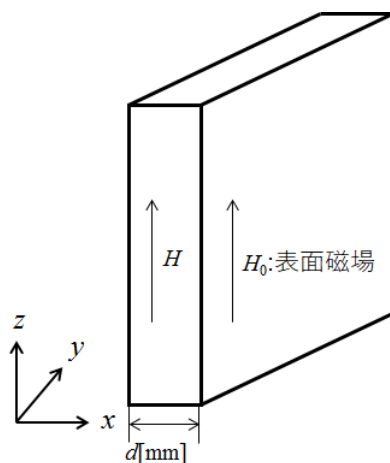


図 5.2: 電磁鋼板

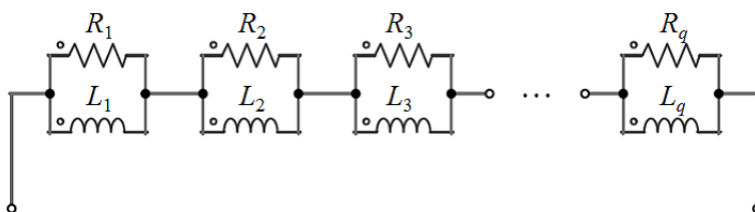


図 5.3: Foster 直列型回路

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 \dot{\mu}_j &= \mu_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{1}{\frac{s}{k_j} + \frac{-s_0 - p_j}{k_j}} \\
 &= \mu_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{1}{\frac{s}{R_j} + \frac{1}{L_j}}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

となり、図 5.3 のような直列型の Foster 等価回路となる。回路の総段数は、PVL による双 Lanczos 法の反復法と一致する。

電磁機器のインピーダンス

PVL を用いて電磁機器の等価回路を生成する場合、線形システムの伝達関数をアドミタンスまたはインピーダンスとする必要がある。そこで、入力を電圧 v 、出力を電流 i と

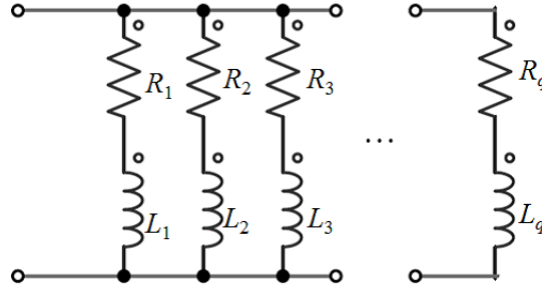


図 5.4: Foster 並列型回路

し，PVL を適用することを考える．そのとき，(3.1) 式は，

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}v \quad (5.6a)$$

$$i = \mathbf{l}^t \mathbf{x} \quad (5.6b)$$

となる．ここで，(5.6a) 式は，準静磁場有限要素方程式と外部回路との連成解析に一致する．これより，伝達関数は，アドミタンス関数となるので，PVL 適用後のアドミタンス関数は，

$$Y(s) = k_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{k_j}{(s - s_0) - p_j} \quad (5.7)$$

となる．ここで，このアドミタンス関数は以下のように書くことができる．

$$Y(s) = \frac{1}{Z_\infty} + \sum_{j=1}^{q'} \frac{1}{Z_j} \quad (5.8)$$

ここで， Z_j は，

$$\begin{aligned} Z_j &= \frac{-s_0 - p_j}{k_j} + s \frac{1}{k_j} \\ &= R_j + sL_j \end{aligned} \quad (5.9)$$

である．これより，図 5.4 のような Foster 並列型回路を導出できる．電磁機器の等価回路の総段数も，PVL による双 Lanczos 法の反復法と一致する．

5.1.2 Cauer 型等価回路

前項より，電磁鋼板と電磁機器の Foster 型の等価回路を生成することができた．しかし，Foster 型の等価回路は，この回路構造から物理的意味を見出すことが難しいため，非線形特性を付与することは難しい．そこで，物理的な意味を持っている Cauer 型の等価回路を PVL により得られた有理関数から生成することを考える．(5.5)，(5.7) 式は，以下の

ような有理関数で書くことができる.

$$H(s) = \frac{a_{q-1}s^{q-1} + a_{q-2}s^{q-2} + \cdots + a_1s + a_0}{b_qs^q + b_{q-1}s^{q-1} + b_{q-2}s^{q-2} + \cdots + b_1s + b_0} \quad (5.10)$$

ここで, $H(s)$ はそれぞれ $\dot{\mu}_r(s)$, $Y(s)$ に対応している. この式に対して, Euclid の互除法を適用することで Cauer 型の等価回路表現を実現できる.

電磁鋼板の Cauer 型表現

電磁鋼板の Cauer 型の等価回路生成では, まず $p = s^{-1}$ と変数変換を行う.

$$\dot{\mu}_r = \frac{a_0p^q + a_1p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}{b_0p^q + b_1p^{q-1} + b_2p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}p + b_q} \quad (5.11)$$

(5.11) 式を以下のように展開する.

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_r &= \frac{1}{\frac{b_0p^q + b_1p^{q-1} + b_2p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}p + b_q}{a_0p^q + a_1p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}} \\ &= \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{\left(b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0}\right)p^{q-1} + \left(b_2 - a_2\frac{b_0}{a_0}\right)p^{q-2} + \cdots + \left(b_{q-1} - a_{q-1}\frac{b_0}{a_0}\right)p + b_q}{a_0p^q + a_1p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

ここで,

$$b_k^0 = b_k - a_k \frac{b_0}{a_0} \quad (5.13)$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_r &= \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1^0p^{q-1} + b_2^0p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}^0p + b_q^0}{a_0p^q + a_1p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}} \\ &= \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{1}{\frac{a_0p^q + a_1p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}{b_1^0p^{q-1} + b_2^0p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}^0p + b_q^0}}} \\ &= \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{1}{\frac{a_0}{b_1^0p} + \frac{\left(a_1 - b_2^0\frac{a_0}{b_1^0}\right)p^{q-1} + \left(a_2 - b_3^0\frac{a_0}{b_1^0}\right)p^{q-2} + \cdots}{b_1^0p^{q-1} + b_2^0p^{q-2} + \cdots}}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。また、ここで、

$$a_k^0 = a_k - b_{k+1}^0 \frac{a_0}{b_1^0} \quad (5.15)$$

とすると、

$$\dot{\mu}_r = \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{1}{\frac{a_0}{b_1^0 p} + \frac{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p + a_{q-1}^0}{b_1^0 p^{q-1} + b_2^0 p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}^0 p + b_q^0}}} \quad (5.16)$$

となる。これを繰り返していくと、

$$\dot{\mu}_r = \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{1}{\frac{a_0}{b_1^0 p} + \frac{1}{\frac{b_1^0}{a_1^0} + \frac{1}{\frac{a_1^0}{b_2^1 p} + \frac{1}{\frac{b_2^1}{a_2^1} + \cdots}}}}} \quad (5.17)$$

となる。ここで、 a_k^n, b_k^n は、

$$a_k^n = a_k^{n-1} - b_{k+1}^n \frac{a_n^{n-1}}{b_{n+1}^n} \quad (5.18a)$$

$$b_k^n = b_k^{n-1} - a_k^{n-1} \frac{a_n^{n-1}}{b_n^{n-1}} \quad (5.18b)$$

である。最終的に、

$$\dot{\mu}_r = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{\frac{R_1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2} + \frac{1}{\frac{R_2}{s} + \frac{1}{\frac{1}{L_3} + \cdots}}}}} \quad (5.19)$$

となる。ここで、

$$L_k = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & (k = 1) \\ \frac{a_{k-2}^{k-2}}{b_{k-1}^{k-2}} & (k > 1) \end{cases} \quad (5.20a)$$

$$R_k = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & (k = 1) \\ \frac{a_{k-1}^{k-1}}{b_k^{k-1}} & (k > 1) \end{cases} \quad (5.20b)$$

これより、電磁鋼板の Cauer 型等価回路である図 5.1 の素子値を PVL より生成することができる。

電磁機器の Cauer 型表現

電磁機器の等価回路の場合においても、電磁鋼板ときのように $p = s^{-1}$ と変数変換を行い、Euclid の互除法を適用する。

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_r &= \frac{a_0 p^q + a_1 p^{q-1} + \cdots + a_{q-2} p^2 + a_{q-1} p}{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \cdots + b_{q-1} p + b_q} \\ &= \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \cdots + b_{q-1} p + b_q} \\ &= \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\frac{b_0}{a_1^0 p + \frac{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}{b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \cdots + b_{q-1} p + b_q}}} \\ &= \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\frac{b_0}{a_1^0 p + \frac{1}{\frac{a_1^0}{b_1^0} + \frac{1}{\frac{b_1^0}{a_2^1 p + \frac{1}{\frac{a_2^1}{b_2^1} + \cdots}}}}} \\ &= R_1 + \frac{1}{\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_3 + \cdots}}}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

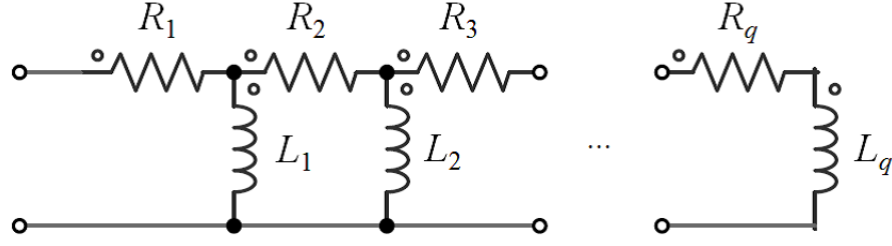


図 5.5: 電磁機器の Cauer 型等価回路

ここで、各素子値 R_k, L_k は、

$$L_k = \begin{cases} \frac{a_1^0}{b_0} & (k = 1) \\ \frac{a_k^{k-1}}{b_{k-1}^{k-2}} & (k > 1) \end{cases} \quad (5.22a)$$

$$R_k = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & (k = 1) \\ \frac{a_{k-1}^{k-2}}{b_{k-1}^{k-2}} & (k > 1) \end{cases} \quad (5.22b)$$

であり、各 a_k^n, b_k^n は、

$$a_k^n = \begin{cases} a_k - b_k \frac{a_0}{b_0} & (n = 0) \\ a_k^{n-1} - b_k^{n-1} \frac{a_n^{n-1}}{b_n^{n-1}} & (n > 0) \end{cases} \quad (5.23a)$$

$$b_k^n = \begin{cases} b_k - a_{k+1}^0 \frac{b_0}{a_1^0} & (n = 0) \\ b_k^{n-1} - a_{k+1}^n \frac{a_{n+1}^n}{b_n^{n-1}} & (n > 0) \end{cases} \quad (5.23b)$$

である。この Euclid の互除法のアルゴリズムから得られる素子値は、図 6.47b に示す初段に R_1 が存在するモデルと一致する。

5.2 電磁鋼板の等価回路の比較

5.2.1 解析解による等価回路

図 5.2 の電磁鋼板の等価回路は、Helmholtz 方程式の解析解より解析的に導出できる。まず、準静近似の Maxwell 方程式から得られる Helmholtz 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \dot{H}(x)}{\partial x^2} - j\omega\sigma\mu\dot{H}(x) = 0 \quad (5.24)$$

となる．図 5.2 は x 方向に一次元の問題であるので，(5.24) 式となる．境界条件として表面磁場を $H(x = d/2, -d/2) = H_0$ とすると，電磁鋼板中の磁場は，

$$\dot{H}(x) = \frac{\cos(kx)}{\cos(kd/2)} H_0 \quad (5.25)$$

となる．ここで， $k = \sqrt{1-j}/\delta$ ， $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ であり， δ は表皮厚である．これより，電磁鋼板を鎖交する磁束は，

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-d/2}^{d/2} \mu \dot{H}(x) dx \\ &= \frac{2\mu}{k} \tan\left(\frac{kd}{2}\right) H_0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

となる．これより，電磁鋼板中の実効的な透磁率は，

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \frac{\Phi}{dH_0} \\ &= \mu \frac{2}{kd} \tan\left(\frac{kd}{2}\right) \\ &= \mu \frac{1}{z} \tan z \end{aligned} \quad (5.27)$$

となる．ここで， $z = kd/2$ としている．正接関数 $\tan(x)$ は，以下のように部分分数展開することができる．

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2x}{x^2 - \pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (5.28)$$

これより，(5.28) 式を (5.27) 式に代入することで，以下の式を得ることができる．

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \mu \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2z}{z^2 - \pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2\mu}{\frac{d^2(-j\omega\sigma\mu)}{4} - \pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{j\omega d^2\sigma}{8} + \pi^2 \frac{(2k-1)^2}{8\mu}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{s}{R_k} + \frac{1}{L_k}} \end{aligned} \quad (5.29)$$

これより, R_k, L_k はそれぞれ

$$R_k = \frac{8}{d^2 \sigma} \quad (5.30a)$$

$$L_k = \frac{8\mu}{(2k-1)^2} \quad (5.30b)$$

となり, これらは図 5.3 の Foster 直列型等価回路の各素子値となる. これより, 電磁鋼板の Foster 直列型等価回路では, インダクタンスは回路段数 k により $(2k-1)^2$ で小さくなっていくが, 抵抗は段数によらず一定であることがわかる.

また, 正接関数 $\tan(x)$ は, 連分数展開を行うこともできる.

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \dots}}}}} \quad (5.31)$$

これより, (5.31) 式を (5.27) 式に代入することで,

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \mu \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \frac{z^2}{7 - \frac{z^2}{9 - \dots}}}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{j\omega\sigma\mu d^2/4}{3\mu - \mu \frac{j\omega\sigma\mu d^2/4}{5 - \frac{j\omega\sigma\mu d^2/4}{7 - \frac{j\omega\sigma\mu d^2/4}{9 - \dots}}}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{\frac{R_1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2} + \frac{1}{\frac{R_2}{s} + \frac{1}{\frac{1}{L_3} + \dots}}}}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

これより、各素子値 R_k, L_k は、それぞれ

$$R_k = \frac{4(2k+1)}{\sigma d^2} \quad (5.33a)$$

$$L_k = \frac{\mu}{2k-1} \quad (5.33b)$$

となり、これは図 5.1 である Cauer 型の等価回路の素子値と一致する。これより、Cauer 型の等価回路のインダクタンス、抵抗は回路段数 k により、それぞれ $2k-1$ で小さく、 $2k+1$ で大きくなる。

5.2.2 電磁鋼板の等価回路

本項では、前項で導出した解析解による電磁鋼板の Foster 回路と Cauer 回路と前節で提案した手法により得られる Foster, Cauer 回路の比較を行っていく。本解析では、図 5.2 に示す電磁鋼板の比透磁率 μ_r, σ, d はそれぞれ 100, 10^6S/m , 0.2mm とする。

回路の段数の打ち切りによる精度への影響

まず、回路の打ち切り効果に関して考察を行う。展開点 s_0 、回路の総段数 q をそれぞれ 100MHz, 25 とする。打ち切り段数を q' を 1 から 25 と変化させたときの精度検証を行う。そのときの誤差を図 5.6 に示す。誤差は、以下の式で評価した。

$$e = \frac{1}{N_F} \sum_{i=1}^{N_F} \frac{|\dot{\mu}^{\text{analytical}} - \dot{\mu}^{\text{PVL}}|}{|\dot{\mu}^{\text{analytical}}|} \quad (5.34)$$

ここで、 $\dot{\mu}^{\text{analytical}}, \dot{\mu}^{\text{PVL}}$ は、それぞれ解析解 (5.27) 式により得られた透磁率、PVL により生成された等価回路から計算された透磁率である。 N_F は周波数軸上のサンプリング数であり、本解析では 10000 点を取っている。図 5.6 より、Cauer 型の等価回路は Foster 型の等価回路よりも数値的収束性が非常によいことがわかる。そのため、Cauer 型等価回路では Foster 型の等価回路よりも少ない段数で複素透磁率を表現することができる。次に、図 5.7 に段数を $q' = 1, 5, 10$ と打ち切った場合の複素透磁率の周波数特性を示す。Cauer 型の等価回路においては、 $q' = 10$ で十分周波数特性を表現できているのに対し、Foster 回路では高周波帯において精度よく表現できていない。また、Cauer 型の等価回路では $q' = 1$ において、低周波帯で一致しているのに対し、Foster 回路では一致していないことも確認できる。これより、数値的に Cauer 型の等価回路が Foster 型の等価回路よりも数値的収束性が良いことが示すことができた。

展開点 s_0 による影響

本稿では、展開点の変化による影響を考察する。 s_0 を 0.1MHz, 1MHz, 10MHz, 100MHz と変化させ、回路の段数は $q = 25$ に固定し回路を生成した。それぞれの展開点に設定した場合の誤差を表 5.1 に示す。誤差は (5.34) 式により計算し、条件は前項と同じである。展開点を大きくすることにより、誤差が小さくなっている。次に、各 Foster, Cauer 回路の

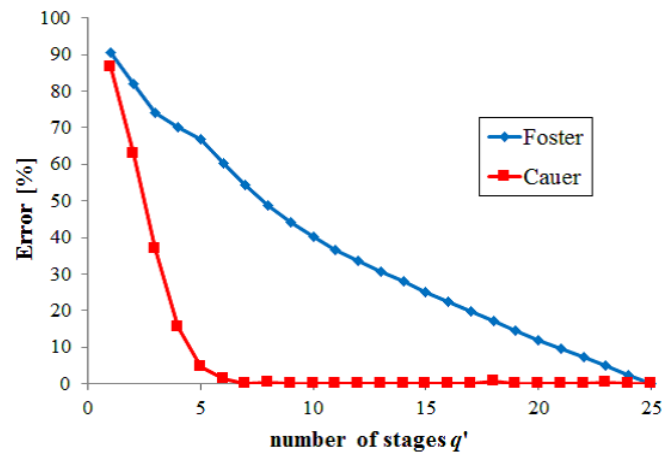
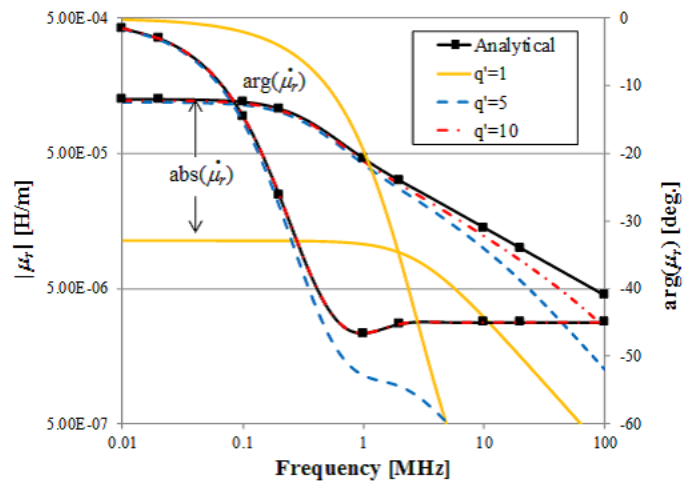
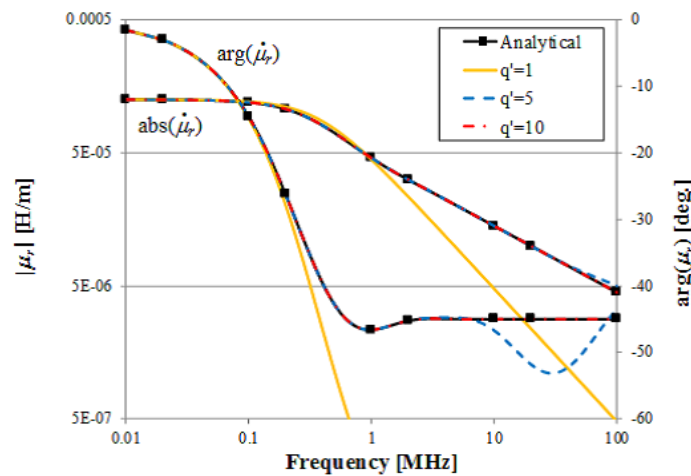


図 5.6: 打ち切り誤差による影響



(a) Foster 回路



(b) Cauer 回路

図 5.7: 段数を打ち切った場合の電磁鋼板の複素透磁率の周波数特性

各段における素子値の比較を行う。表 5.2 に展開点を 0.1MHz, 10MHz, 100MHz に設定したときの 10 段目までの素子値を示す。表中の k は素子がある各段数を表す。Foster 回路には任意性があるため、インダクタンスの絶対値が大きい順に素子値を並べた。展開点を高周波とすると、解析解により求めた素子値と一致していることが確認できる。また、提案手法では展開点を 0.1MHz とした場合、負の素子値が得られた。実際には計算では、展開点を 10MHz, 100MHz とした場合も負の素子値が得られている。しかし、それらの絶対値は低段における素子値の絶対値と比べて非常に小さい。これらの負の素子値を無視して、複素透磁率の誤差を計算した結果を表 5.3 に示す。展開点を 1-100MHz とした場合、表 5.2 の結果とほとんど変わっていないのに対して、展開点が 0.1MHz の場合、表 5.2 の誤差と比べて非常に大きくなってしまっている。Foster 直列回路は図 5.4 に示すように RL 並列回路が繋がれている回路であるので、他の素子値と比べて絶対値が小さい場合、無視することが可能である。そのため、展開点を 1-100MHz の場合、負の素子値の絶対値が非常に小さいので、それらの素子値を無視することが可能である。しかし、展開点を 0.1MHz とした場合、負の素子値の絶対値のオーダーが大きいため、負の素子値による影響が大きく負の素子値を無視できないことがわかる。

表 5.4 に解析解および提案手法を適用して生成した Cauer 回路の素子値を示す。提案手法 n においては展開点を 10, 100MHz とした場合、Foster 回路の負の素子値を無視して、0.1MHz とした場合負の素子値を無視せず、Cauer 回路を生成した。高周波に展開点を設定することにより、高段まで提案手法で得られた素子値が解析により得られた素子値と一致していることが確認できる。しかし、展開点を 0.1MHz, 10MHz とした場合、素子値が負となってしまった。0.1MHz の場合は、負の素子値を残して Cauer 型の等価回路を生成してしまっていることがこの原因であると考えられる。一方で、10MHz でインダクタンスが負となった理由は、有理関数 (5.10) 式に対して、Euclid の互除法を適用する過程で減算を行わなければならないためであると考えられる。そのため、Foster 回路の素子が全て正であっても Cauer 回路の素子値が必ずしも正にならない。また、Cauer 回路ははしご型回路なので、Foster 回路と違い、負の素子値を無視することは難しい。そのため、負の素子値が生成されないような展開点を設定しなければならないが、現状そのような展開点の決め方は提案されておらず、今後の課題である。しかし、展開点を高周波とすることで Cauer 回路においても、特に支配的な寄与を持つ低段の素子値を精度よく求められることが確認できた。

回路の総段数の変化による影響

回路への総段数の変化による影響を考察する。PVL において、双 Lanczos 法の反復数を $q = 15, 20, 25$ と変化させて回路を生成する。展開点は $s_0 = 100\text{MHz}$ とする。表 5.5 に誤差を示す。総段数を増やすことにより、誤差が小さくなっていることがわかる。次に、解析解により得られた Foster, Cauer 回路の素子値と PVL により得られた Foster, Cauer 回路の素子値を比較する。それらの素子値を表 5.6, 5.7 に示す。どちらの回路においても、総段数を増やすことにより、高段ににおいても一致していることが確認できる。しかし、Cauer 型の等価回路の場合は総段数が少ないと負の素子値が現れてしまっている。

表 5.1: 展開点の変化による誤差の変化

s_0 [MHz]	0.1	1.0	10	100
e [%]	122	0.268	0.00537	0.0133

表 5.2: 展開点のの変化による Foster 型の素子値の比較

k	L_k [H/m]				R_k [Ω /m]			
	Analytical	0.1MHz	10MHz	100MHz	Analytical	0.1MHz	10MHz	100MHz
1	1.02e-04	9.87e-05	9.97e-05	1.02e-04	2.00e+02	1.94E+02	1.96e+02	2.00e+02
2	1.13e-05	2.71e-05	1.13e-05	1.13e-05	2.00e+02	5.32E+01	1.99e+02	2.00e+02
3	4.07e-06	2.41e-05	4.07e-06	4.07e-06	2.00e+02	2.23E+04	2.00e+02	2.00e+02
4	2.08e-06	-2.29e-05	2.15e-06	2.08e-06	2.00e+02	-2.96E+04	4.22e+00	2.00e+02
5	1.26e-06	1.66e-05	2.08e-06	1.26e-06	2.00e+02	3.37E+04	2.00e+02	2.00e+02
6	8.42e-07	-1.25e-05	1.26e-06	8.42e-07	2.00e+02	-8.94E+03	2.00e+02	2.00e+02
7	6.03e-07	-1.22e-05	8.42e-07	6.03e-07	2.00e+02	-4.65E+04	2.00e+02	2.00e+02
8	4.53e-07	1.13e-05	6.02e-07	4.53e-07	2.00e+02	2.00E+02	2.00e+02	2.00e+02
9	3.52e-07	9.93e-06	4.55e-07	3.53e-07	2.00e+02	1.01E+05	2.01e+02	2.00e+02
10	2.82e-07	-6.69e-06	3.51e-07	2.83e-07	2.00e+02	-2.96E+03	7.32e+03	2.00e+02

表 5.3: 負の素子値を除いた場合の誤差の変化

s_0 [MHz]	0.1	1.0	10	100
e [%]	700	0.268	0.00538	0.0127

表 5.4: 展開点の変化による Cauer 型の素子値の比較

k	L_k [H/m]				R_k [Ω /m]			
	Analytical	$q = 15$	$q = 20$	$q = 25$	Analytical	$q = 15$	$q = 20$	$q = 25$
1	1.26e-04	1.27e-04	1.26e-04	1.26e-04	3.00e+02	2.89e+02	3.00e+02	3.00e+02
2	2.51e-05	3.45e-05	2.51e-05	2.51e-05	7.00e+02	1.60e+02	7.00e+02	7.00e+02
3	1.40e-05	4.97e-05	1.40e-05	1.40e-05	1.10e+03	-1.37e+03	1.10e+03	1.10e+03
4	9.67e-06	-2.60e-03	9.67e-06	9.67e-06	1.50e+03	2.05e+03	1.50e+03	1.50e+03
5	7.39e-06	-7.28e-07	7.39e-06	7.39e-06	1.90e+03	-8.25e-02	1.87e+03	1.90e+03
6	5.98e-06	6.92e-07	2.16e-05	5.99e-06	2.30e+03	7.91e+02	5.96e+01	2.30e+03
7	5.03e-06	3.45e-05	8.15e-06	5.02e-06	2.70e+03	4.76e+02	2.31e+03	2.70e+03
8	4.33e-06	9.84e-06	3.16e-06	4.32e-06	3.10e+03	-7.70e+02	-4.34e+01	3.08e+03
9	3.81e-06	-1.57e-04	-8.94e-06	3.78e-06	3.50e+03	2.31e+03	2.76e+03	3.46e+03
10	3.49e-06	7.67e-06	5.76e-06	3.33e-06	3.90e+03	1.83e+03	3.87e+02	3.80e+03

表 5.5: 総段数の変化による誤差の変化

	$q = 15$	$q = 20$	$q = 25$
e [%]	0.0177	0.0133	0.0127

表 5.6: 総段数の変化による Foster 型の素子値の比較

k	L_k [H/m]				R_k [Ω /m]			
	Analytical	$q = 15$	$q = 20$	$q = 25$	Analytical	$q = 15$	$q = 20$	$q = 25$
1	1.02e-04	1.01e-04	1.02e-04	1.02e-04	2.00e+02	2.02e+02	2.00e+02	2.00e+02
2	1.13e-05	1.13e-05	1.13e-05	1.13e-05	2.00e+02	2.03e+02	2.00e+02	2.00e+02
3	4.07e-06	4.10e-06	4.07e-06	4.07e-06	2.00e+02	2.07e+02	2.00e+02	2.00e+02
4	2.08e-06	2.14e-06	2.08e-06	2.08e-06	2.00e+02	2.17e+02	2.00e+02	2.00e+02
5	1.26e-06	1.34e-06	1.26e-06	1.26e-06	2.00e+02	2.35e+02	2.00e+02	2.00e+02
6	8.42e-07	9.47e-07	8.42e-07	8.42e-07	2.00e+02	2.65e+02	2.00e+02	2.00e+02
7	6.03e-07	7.19e-07	6.04e-07	6.03e-07	2.00e+02	3.08e+02	2.01e+02	2.00e+02
8	4.53e-07	5.76e-07	4.61e-07	4.53e-07	2.00e+02	3.73e+02	2.04e+02	2.00e+02
9	3.52e-07	4.80e-07	3.80e-07	3.53e-07	2.00e+02	4.72e+02	2.19e+02	2.00e+02
10	2.82e-07	4.15e-07	3.38e-07	2.83e-07	2.00e+02	6.29e+02	2.51e+02	2.00e+02

表 5.7: 総段数の変化による Cauer 型の素子値の比較

	L_k [H/m]				R_k [Ω /m]			
1	1.26e-04	1.24e-04	1.26e-04	1.26e-04	3.00e+02	3.02e+02	3.00e+02	3.00e+02
2	2.51e-05	2.46e-05	2.51e-05	2.51e-05	7.00e+02	5.82e+02	7.00e+02	7.00e+02
3	1.40e-05	1.35e-05	1.40e-05	1.40e-05	1.10e+03	1.17e+04	1.10e+03	1.10e+03
4	9.67e-06	-1.92e-03	9.67e-06	9.67e-06	1.50e+03	-9.96e+03	1.50e+03	1.50e+03
5	7.39e-06	4.65e-06	7.39e-06	7.39e-06	1.90e+03	1.62e+04	1.90e+03	1.90e+03
6	5.98e-06	-4.04e-04	5.99e-06	5.99e-06	2.30e+03	-1.25e+04	2.30e+03	2.30e+03
7	5.03e-06	3.36e-06	5.02e-06	5.02e-06	2.70e+03	3.93e+03	2.70e+03	2.70e+03
8	4.33e-06	2.43e-06	4.32e-06	4.32e-06	3.10e+03	8.66e+03	3.08e+03	3.08e+03
9	3.81e-06	-8.79e-06	3.78e-06	3.78e-06	3.50e+03	-1.81e+03	3.46e+03	3.46e+03
10	3.49e-06	1.46e-06	3.33e-06	3.33e-06	3.90e+03	5.76e+03	3.80e+03	3.80e+03

5.3 非線形特性の考慮方法

前節では、提案手法である PVL を用いた電磁機器の等価回路生成法が電磁鋼板の等価回路を生成できることが示し、解析解から得られる等価回路の素子値と提案手法から得られる等価回路の素子値が一致することも示すことができた。しかし、前節で示した回路は線形の等価回路である。一般に使われているインダクタや変圧器、モータ等には非線形材料が使われており、非線形特性を考慮した等価回路を生成する必要がある。文献 [50]-[53] より、Cauer 型の等価回路を用いることで非線形性を付与できることが報告されている。そこで、本手法で生成される回路においても [50]-[53] の基に等価回路を用いた非線形特性解析を導入する。

非線形性の付与は、Cauer 型等価回路は物理的意味を利用している。図 5.2 の電磁鋼板を例に考える。その物理的意味を図 5.8 に示す。 H_0 が外部から印可されると、電磁鋼板に渦電流が流れる。この渦電流により消費されるジュール損は、 R_1 で消費される損失と等しい。また、渦電流が流れることにより、磁界が発生する。その磁界は、 H_1 である。さらに H_1 により、渦電流が流れる。この渦電流により、発生する渦電流損は R_2 により消費される渦電流である。これより、Cauer 型の等価回路では、一次のインダクタンスが主

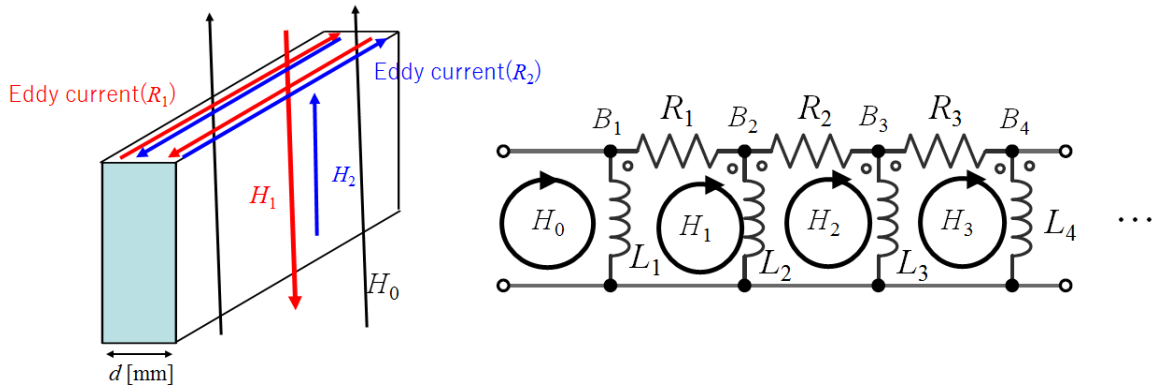


図 5.8: Cauer 型等価回路の物理的意味

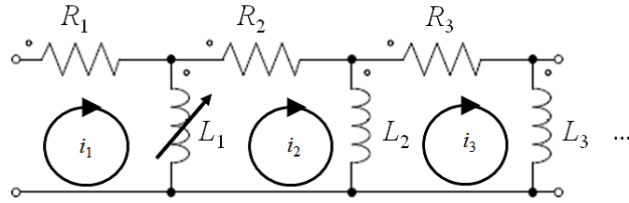


図 5.9: 非線形 Cauer 型等価回路

磁束に対応するインダクタンスであり、それ以降の素子は高周波となることにより、影響を与える素子である。この物理的な意味を利用して、[52],[53]ではヒステリシス特性を考慮している。図 5.8 は電磁鋼板の複素実効透磁率の等価回路であるが、PVL を用いた電磁機器の等価回路である図 6.47b においても物理的な意味を付与できる。図 6.47b においては、 R_1 が電磁機器の直流抵抗で L_1 が主磁束のインダクタンスに相当する。

初期磁化曲線の非線形性を PVL で生成した等価回路へと導入する。本手法では、主磁束が高周波に与える影響が小さく、主磁束が支配的と考える。これより、初期磁化曲線であらわされる非線形性は L_1 にのみ付与すればよいと考えられる。これより、図 5.9 に示す等価回路は以下のような回路方程式で表すことができる。

$$\begin{aligned}
 v_{in} &= R_1 i_1 + \frac{d\Phi(i_1 - i_2)}{dt} \\
 0 &= R_2 i_2 + L_1 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} + L_2 \frac{d(i_2 - i_3)}{dt} \\
 0 &= R_3 i_3 + L_2 \frac{d(i_3 - i_2)}{dt} + L_3 \frac{d(i_3 - i_4)}{dt} \\
 &\vdots \\
 0 &= R_q i_q + L_{q-1} \frac{d(i_q - i_{q-1})}{dt} + L_q \frac{di_q}{dt}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

ここで、 $\Phi(i)$ は電流 i に対する磁束特性である。これは、等価回路を生成した電磁機器の静磁場の有限要素解析により、磁束特性を評価しておく必要がある。電流値を変化させて

離散的に磁束を求め、アキマ補間等で補間を行い微分可能にし、(5.35) 式を解く。

5.4 電磁機器の等価回路生成

本章では、解析的に等価回路を生成できないモデルに対して、本手法が有効であるか示していく。解析モデルとして、インダクタと誘導加熱装置とし、提案手法により等価回路を生成していく。インダクタモデルでは、等価回路生成後、DC-DC コンバータ内に設置し解析を行い、本手法の有効性を示す。また、インダクタ、誘導加熱装置ともに磁性体コアの非線形性を考慮して解析を行う。

5.4.1 インダクタモデル

図 5.10 に示すインダクタの等価回路を生成する。このインダクタのコイルの導電率 σ は $5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$ であり、磁性体コアは 50A400 を仮定している。50A400 の初期磁化曲線を図 5.11 に示す。この初期磁化曲線も等価回路で表現する。等価回路生成する際には、線形の有限要素モデルに対して、PVL を適用する。そのため、この初期磁化曲線の 0T 付近の μ_r を用いる。50A400 の 0T 付近の $\mu_r = 7234$ である。このインダクタモデルは四面体要素でメッシュを切っており、コイルの表皮厚を 1MHz まで考慮してメッシュを切っている。そのため、この四面体メッシュの未知数は 117,548 である。また、PVL における展開点は $s_0 = 1\text{MHz}$ 、回路の段数に一致する Lanczos 法の反復数は $q = 5$ とした。

このときに得られた素子値を表 5.8 に示す。Foster, Cauer 回路ともに R_1, L_1 は dc 抵抗、静磁場におけるインダクタンスとなっている。次に、これらの素子値を用いて、計算を行ったインダクタのインピーダンスの周波数特性を図 5.12 を示す。黒点が FEM による周波数サンプリング点で、赤線が Foster, Cauer 型の等価回路による周波数特性である。FEM の解と等価回路による解が一致しているのが確認できる。

周波数特性が一致していることが確認できたので、次に時間領域の解析を行う。図 5.13 に示しているように DC-DC コンバータ内のインダクタを等価回路に置き換える。図 5.13 では、Cauer 型の等価回路となっているが、Foster 型の等価回路に置き換えてもよい。DC-DC コンバータは、スイッチング周波数 1MHz、デューティ比を 0.9 として、駆動する。DC-DC コンバータ中の抵抗 R_0 は、 0.05Ω とする。また、Cauer 型の等価回路では非線形特性を L_1 に付与する。このときの $\Phi - i$ 特性は図 5.14 に示す。この特性は静磁場において、50A400 を用いてインダクタを解析して求めることができる。また、Foster 回路は直接非線形性を導入することは難しいので、動作電流における透磁率分布から等価回路を生成して、近似的に非線形を考慮して、解析を行った。

今回は、2つの場合において解析を行った。電源電圧 $E = 5.0\text{V}$ 、コンデンサ $C_0 = 1\mu\text{F}$ のときと $E = 1.2\text{V}$ 、 $C_0 = 100\mu\text{F}$ である。その解析結果が図 5.15 である。Cauer 型の等価回路は非線形も考慮できているため、過渡領域だけでなく、定常状態においても有限要素解析の結果と一致している。その一方で、Foster 回路は動作点のみしか考慮できていないので、定常状態の平均値は一致しているが、定常状態におけるリップル、過渡領域は一致していない。

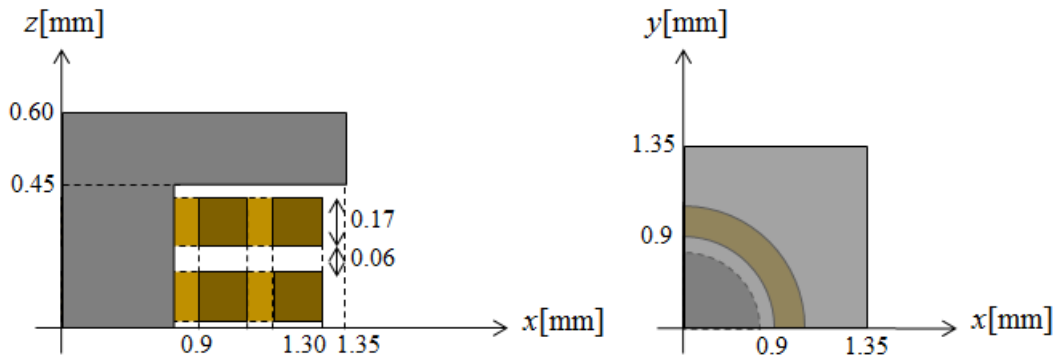


図 5.10: インダクタモデル

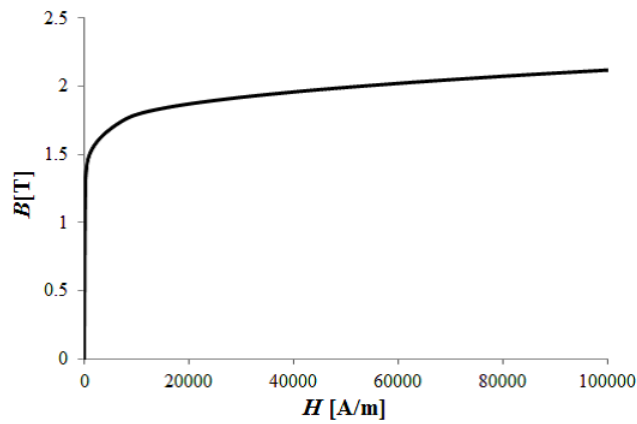


図 5.11: BH カーブ

5.4.2 誘導加熱装置

次に図 5.16 に示す誘導加熱装置の等価回路を生成する．図 5.16 に示す誘導加熱装置の被加熱材の導電率は $1.25 \times 10^6 \text{ S/m}$ を設定し，インダクタの磁性体は，インダクタモデルと同じ 50A400 を仮定した．今回のモデルも四面体で要素切りを行い，その要素数は，692,792 である．今回は，1000Hz における被加熱材の表皮厚を考慮して要素を切りを行った．また，PVL における条件は，展開点 $s_0 = 1000$, $q = 5$ とした．

磁性体コアの比透磁率を 7234 と仮定して，等価回路を生成した場合の Cauer 型等価回路の素子値を表 5.9 に示す．誘導加熱装置モデルでは，前項で Cauer 型等価回路の有効性が示されているので，Cauer 型等価回路のみ生成した．誘導加熱装置の等価回路の初段 L_1, R_1 もインダクタモデルと同様，静磁場におけるインダクタンス，dc 抵抗となっている．図 5.17 に周波数特性を示す．インダクタの時と同様に，有限要素解析と本手法で得られた等価回路が同じ特性を示していることが確認できる．

次に，時間領域解析を行う．時間領域解析では磁性体コアの非線形性を考慮して解析を行う．そのため，Cauer 型等価回路の L_1 に対して非線形性を導入する． L_1 に付与する非線形特性を図 5.18 に示す．この特性もインダクタの時と同様で，静磁場において 50A400

表 5.8: 1/8 モデルにおけるインダクタの回路の素子値

(a) Foster 回路

L_1 [H]	L_2 [H]	L_3 [H]	L_4 [H]	L_5 [H]
1.11e-07	1.59e-06	8.72e-06	9.55e-06	5.69e-05
R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
4.13e-03	1.03e+01	9.87e+02	3.27e+02	8.03e+02

(b) Cauer 回路

L_1 [H]	L_2 [H]	L_3 [H]	L_4 [H]	L_5 [H]
4.58e-08	1.05e-06	4.92e-06	1.43e-05	1.38e-05
R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
4.12e-03	7.40	121	272	791

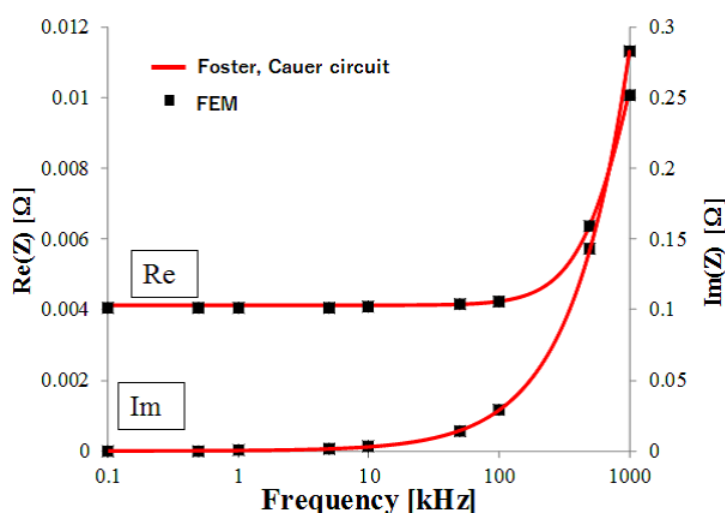


図 5.12: インダクタの周波数特性

を用いて解析を行って評価した。図 5.19 に誘導加熱装置のコイルに流れる電流の時間変化を示す。本解析では、比較のために L_1 に対して非線形特性を付与していない線形の Cauer 型の等価回路を用いて解析も行った。図 5.19 より、 $E = 1V$ 時には非線形性があまり強くなく線形の Cauer 型の等価回路においてもほぼ一致している。その一方で、 $E = 2V$ の場合、非常に強い非線形性が過渡領域において見られている。非線形性を考慮した Cauer 型の等価回路は有限要素解析と一致しているが、線形の等価回路は一致していないことが確認できる。

誘導加熱装置において、高段の素子値の物理的な意味はインダクタとモデルとは異なる。インダクタモデルでは、高段にいくにつれコイルに流れる渦電流に起因するインダクタンス、抵抗であったが、誘導加熱装置モデルでは、コイルに渦電流を流れないと仮定しているため、高段の抵抗、インダクタンスは被加熱材に起因するものである。そのため、被加

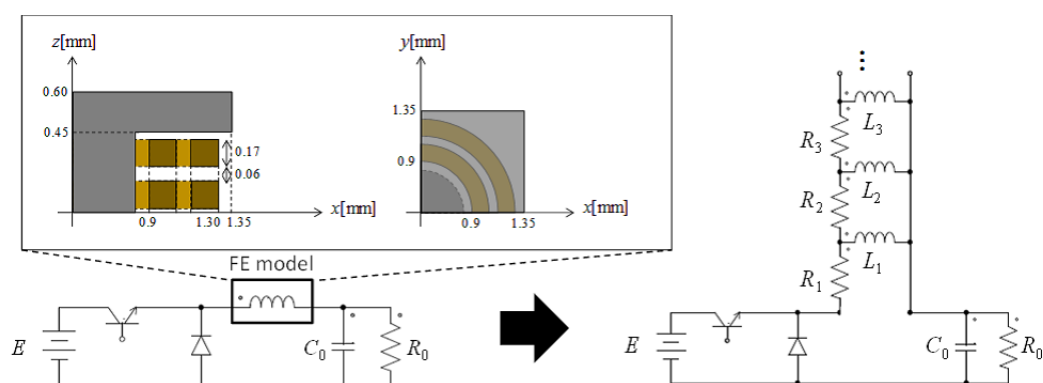
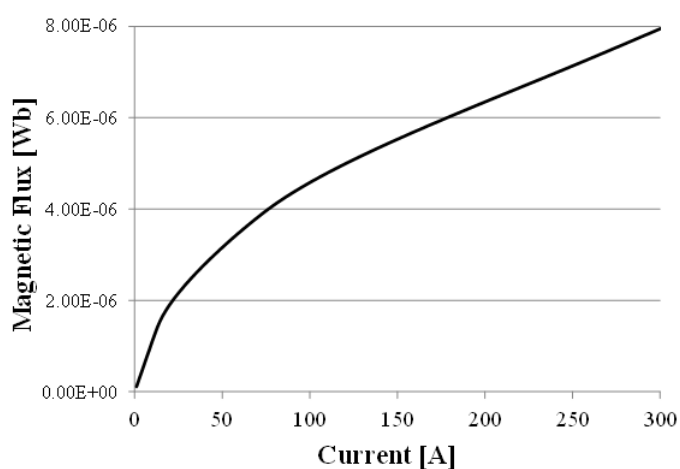


図 5.13: インダクタの等価回路と DC-DC コンバータ

図 5.14: インダクタの Φ - i 特性

熱材のジュール損 $w_e[\text{J/m}^3]$ は以下の式で容易に書くことができる。

$$w_e = \sum_{j=2}^5 R_j i_j^2 \quad (5.36)$$

ここで、 i_j は抵抗 R_j に流れる電流である。図 5.20 に定常状態における渦電流損の時間変化を示している。Cauer 型の等価回路で得られたジュール損は有限要素解析により、得られたジュール損とよく一致していることが確認できる。

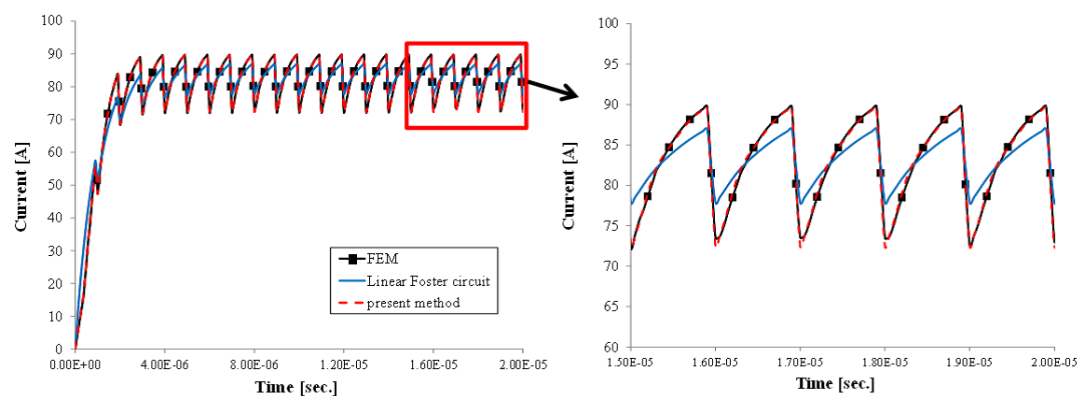
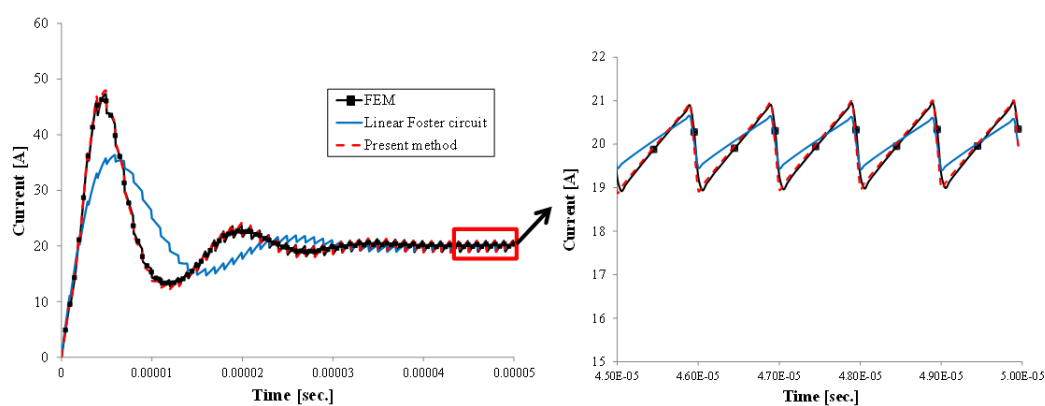
(a) $E = 5V, C_0 = 1\mu F$ (b) $E = 1.2V, C_0 = 100\mu F$

図 5.15: DC-DC コンバータの解析結果

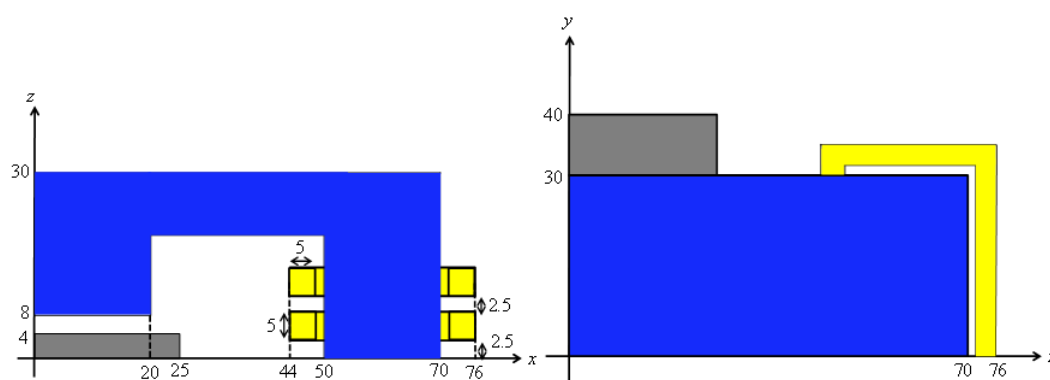


図 5.16: 誘導加熱装置モデル

表 5.9: 1/8 モデルにおける誘導加熱装置の Cauer 型等価回路の素子値

L_1 [H]	L_2 [H]	L_3 [H]	L_4 [H]	L_5 [H]
1.20e-06	4.15e-06	2.76e-05	1.17e-04	1.49e-04
R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
4.10e-05	4.61e-02	1.26	8.98	6.75

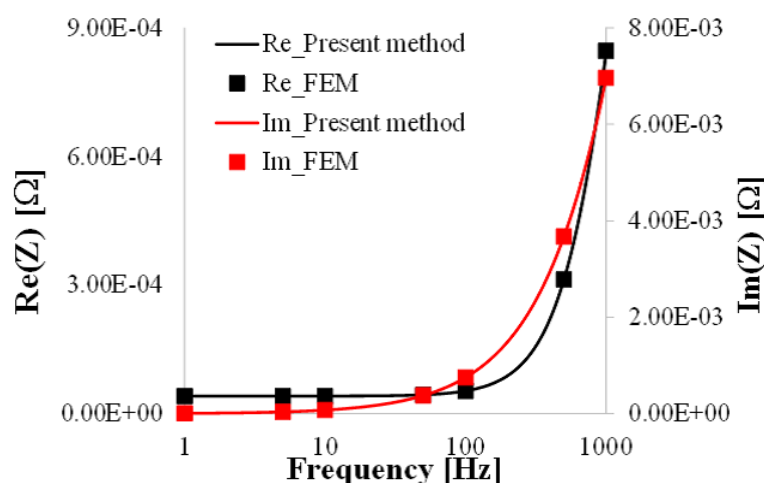


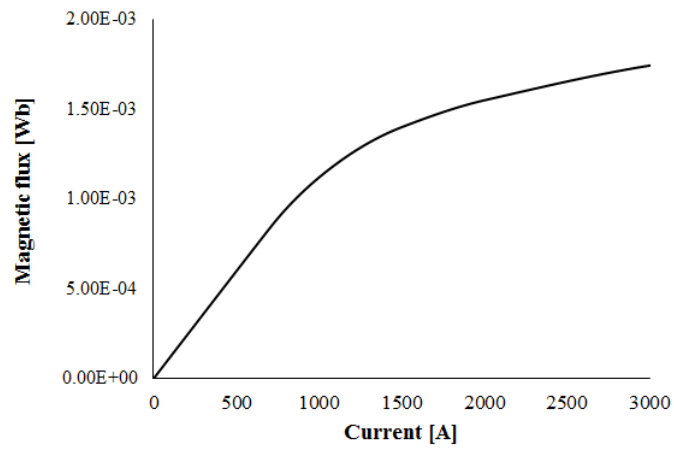
図 5.17: 誘導加熱装置の周波数特性

5.5 5章のまとめ

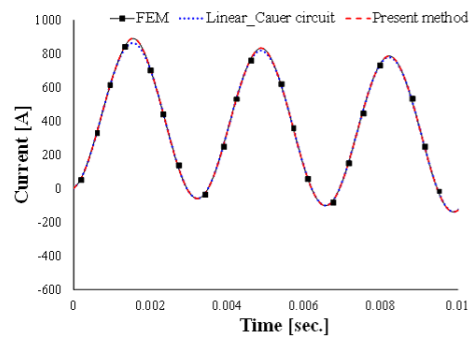
従来の等価回路生成手法は、以下の3点が考慮することが難しかった。

1. 広い周波数帯における特性評価
2. 磁性コアの非線形特性の考慮 (初期磁化曲線, ヒステリシス特性)
3. ヒステリシス損失, 渦電流損失の評価

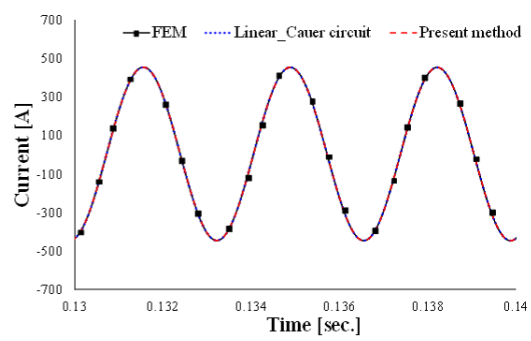
これらの問題点を解決するため、著者らは有限要素モデルからモデル縮約法を用いて Cauer 型の等価回路を生成する手法を提案した。これにより、広い周波数帯における特性評価が可能となった。また、本手法では、Cauer 型の等価回路の物理的意味により、非線形性の付与を行うことができる。これにより、上記の3つの欠点を克服できる等価回路生成手法となっている。本手法をインダクタモデル、誘導加熱装置モデルに適用した。これにより、周波数領域、時間領域ともに従来の有限要素解析と同等の結果を得ることができた。また、非線形性を考慮した解析を行うこともできた。今後は、ヒステリシスを考慮した等価回路やモータ等の回転を考慮した等価回路生成手法の開発が望まれる。

図 5.18: 誘導加熱装置の $\Phi - i$ 特性

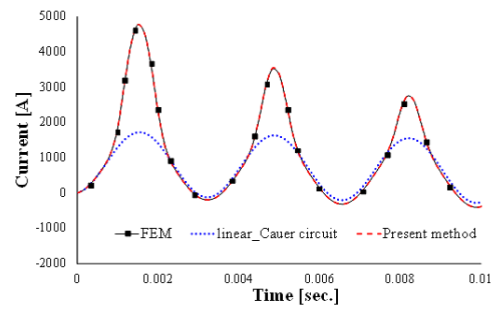
Transient state



Steady state

(a) $E = 1V$

Transient state



Steady state

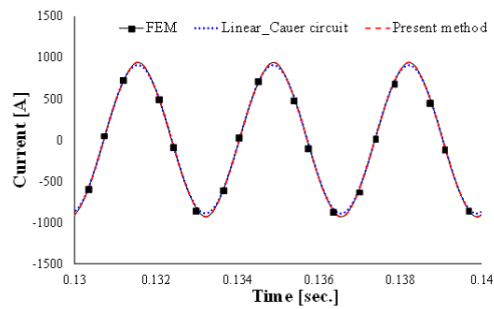
(b) $E = 2V$

図 5.19: 誘導加熱装置の時間領域解析

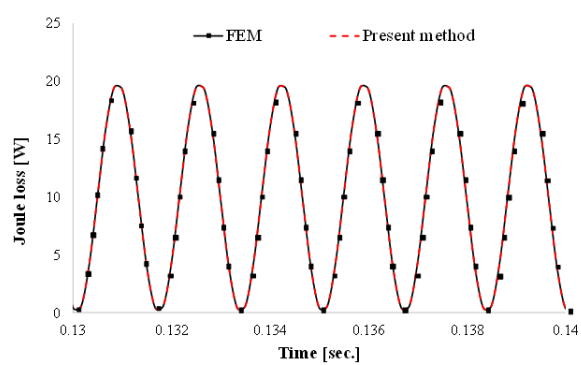
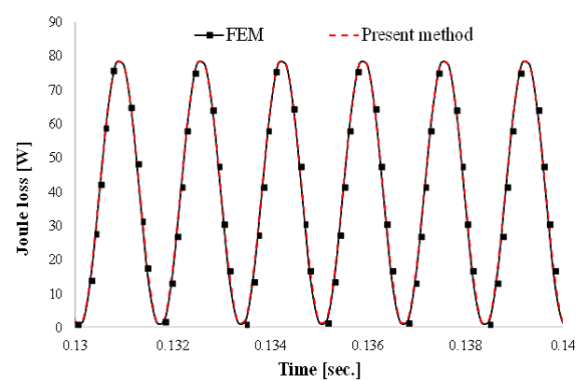
(a) $E = 1V$ (b) $E = 2V$

図 5.20: 被加熱材のジュール損

第6章 均質化手法を用いた マルチスケール問題の有限要素解析

電気電子機器には、効率低下を抑えることを目的として、コイル部にはマルチターンコイルやLitz線、磁性体部には電磁鋼板や圧粉磁心等が用いられている。これらは非常に微細な構造をしているため、これらを用いている電磁機器は非常に大きなマルチスケール性を有している。また、Litz線や電磁鋼板、圧粉磁心は3次元的に複雑な構造をしている。そのため、数値シミュレーションに導入するための高精度の数値解析モデルの作成が非常に難しい。

一方で、スーパーコンピュータの登場により、スーパーコンピュータを用いたマルチターンコイルやLitz線の特性解析が行われるようになってきている。測定結果と比較して、非常に良好な解析結果を得ることができており、Litz線の特性評価等にスーパーコンピュータは非常に強力なツールである。しかし、Litz線の形状に合わせて要素を切るため、非常に膨大な未知数となってしまう。これに伴い、スーパーコンピュータを用いても非常に長大な計算時間を要する。そのため、スーパーコンピュータ以外の計算機で行う場合、メモリ不足となるか受け入れがたいほどの計算時間を必要とする。今後、より高効率な高品質な電磁機器の開発のためには、このようなマルチスケール性を有しているモデルのための高精度で高速な解析手法、数値モデルが必要となってきている。

この問題点を解決するために、均質化手法と呼ばれる手法が提案されている [55]-[65]。均質化手法とは、図 6.1 に示すような、微細な構造中の物理量を実効的に等価な物理量に置き換え、解析を行う手法である。微細な構造のままであると、微細構造に合わせて要素生成を行う必要があるが、均質化手法を用いることで、均質化領域において実効的に等価な物理量を有しているので、微細構造に合わせて要素切りを行う必要がない。

均質化手法には要素内の物理量の体積平均やエネルギーの保存則がベースとなった手法が提案されている。また、Ollendorff の式 [55] や Maxwell Garnet の式等の様々な手法が提案されている。これらの手法は静磁場における均質化手法がほとんどである。しかし、マルチターンコイルや電磁鋼板、圧粉磁心等は、周波数が上昇すると、渦電流の影響を大きく受ける。さらに近年では、電磁機器の駆動周波数が上昇しており、これらの渦電流損を考慮しなければならなくなってきた。そのため、渦電流を考慮した均質化手法が切望されていた。

この問題点を解決するために、五十嵐は渦電流を考慮したマルチターンコイル、圧粉磁心の均質化手法を提案した [63]-[65]。この手法では、Helmholtz 方程式の解析解より、円筒型や球型の複素実効透磁率を導出し、その後その複素実効透磁率を Ollendorff の式に代入することで、巨視的なマクロ複素実効透磁率を導出する手法である。円筒型の複素実効透磁率を用いた場合マルチターンコイル、球型を用いた場合、圧粉磁心の均質化手法に利用できる。

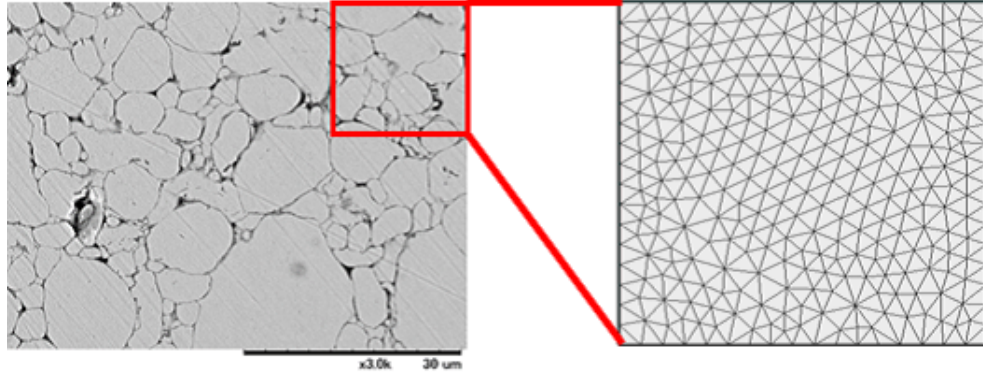


図 6.1: 均質化手法

その一方で、電磁機器のマルチターンコイルの断面形状には、角形や楕円型がしばしば用いられている。しかし、上記の均質化手法は円筒のみに適用可能であり、楕円や角形の形状に対しては適用できない。また、圧粉磁心は通常非線形特性を持っているが、上記の手法では非線形特性も考慮できない。さらに、Helmholtz 方程式の解析解は三角関数やベッセル関数で表わされ、時間領域解析へも直接適用できない。

そこで、著者らは、マルチターンコイル、圧粉磁心の均質化に着目し、モデル縮約法を用いて上記の問題点を解決する手法提案した。本章では、以下の手法に関して述べていく。

1. マルチターンコイル

- (a) 角型、楕円型のような任意断面形状における均質化手法の開発
- (b) 時間領域均質化手法の開発

2. 圧粉磁心

- (a) 圧粉磁心の非線形特性を考慮した時間領域均質化手法の開発

6.1 複素実効透磁率を用いた均質化有限要素解析

6.1.1 複素実効透磁率

図 6.2 に示すような円筒や球の磁性体を考える。これらの磁性体は、 σ, μ_r を持っており、それぞれが孤立しているとする。これらの磁性体に対して、一様な交番磁界 $H_0 \exp(j\omega t)$ を印可する。この条件下において、Helmholtz 方程式を解析的に解くと、以下の実効透磁率を得ることができる。

- 円筒導体

$$\dot{\mu}_r = \mu_r \frac{J_1(z)}{zJ_0(z) - J_1(z)} \quad (6.1a)$$

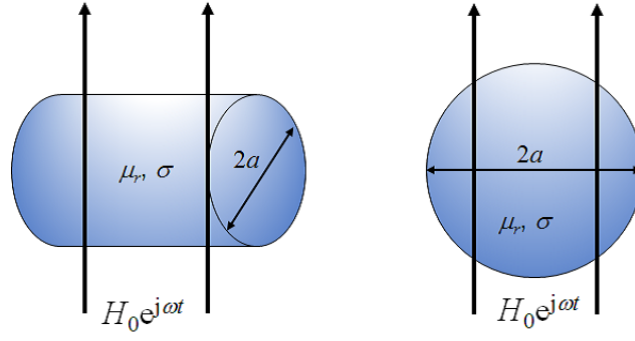


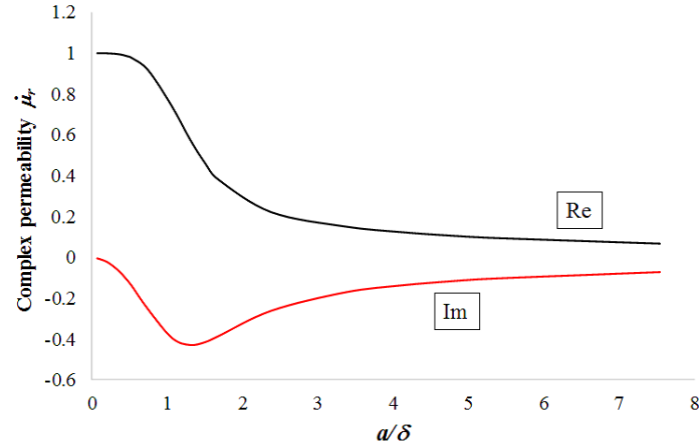
図 6.2: 孤立した導体 (左: 円筒導体, 右: 球導体)

- 磁性球

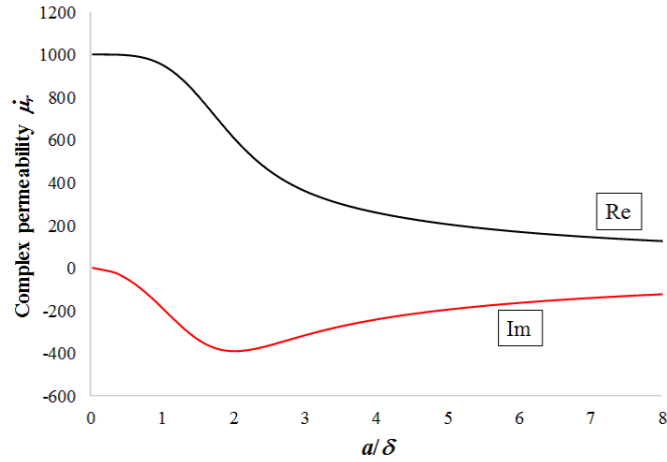
$$\dot{\mu}_r = \mu_r \frac{2(z - \tan z)}{\tan z - z - z^2 \tan z} \quad (6.1b)$$

ここで, $z = a\sqrt{-j\omega\sigma\mu}$ で, J_i は i -th 種ベッセル関数である. これらは, 円筒導体, 磁性球の実効的な透磁率となっており, 複素数となっている. この複素実効透磁率の実部は, クラシカルな透磁率を表しており, 虚部は近接効果に起因する渦電流損失による抵抗を表している. 図 6.3 に円筒導体, 磁性球の複素実効透磁率の周波数特性を示す. 円筒導体は, $\sigma = 5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 1.0$, 磁性球は, $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 1000$ である. 横軸は規格化された周波数であり, a/δ である. ここで, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ で表皮厚である. 実部が周波数が大きくなると小さくなるのは, 周波数の上昇とともに渦電流の影響が大きくなり, 反磁界の影響が大きくなるためである. 虚部がピークを持つのは, 周波数の上昇とともに渦電流が大きくなるため, ある周波数までは大きくなるが, それ以降の周波数では表皮厚も大きくなるため, 小さくなる.

図 6.3 よりわかるように, 複素実効透磁率はこの物理量の中に比透磁率と導電率の情報が含まれている. そのため, 複素実効透磁率を用いる場合は, 静磁場の有限要素方程式を解くことで, 渦電流も考慮した解析を行うことができる. これより, 複素実効透磁率を用いることで, 磁性球や円筒導体を有限要素解析により解析する際には表皮厚を考慮してメッシュを切る必要がなくなる. しかし, マルチターンコイルはこの円筒導体が数 100 本や数千本から構成されている. また, 圧粉磁心においてはこの磁性球の絶縁膜が施されたものを圧縮成形して生成される. 複素実効透磁率の利用により, 表皮厚を考慮してメッシュを切る必要はなくなるが, これらの構造を考慮してメッシュを切らなければならないため, あまり大きな要素数の削減効果を得ることは難しい. そのため, 本手法ではマルチターンコイルにおける円筒導体と空気, 圧粉磁心における磁性粒子と絶縁膜というようにこれらを複合材料と考え, この複合材料のマクロな磁気特性を算出し, それにより均質化を実現する. 次節にて, 詳細を述べる.



(a) 円筒導体



(b) 磁性球

図 6.3: 複素実効透磁率の周波数特性

6.1.2 Ollendorff の式

本均質化手法では、マクロな磁気特性を算出するために、Ollendorff の式を用いる。Ollendorff の式は、2つの材料からなる複合材料の等価透磁率を算出する手法の一つである。Ollendorff の式と Maxwell Garnett の式や Clausius-Mosotti の式は本質的にも等価である。Ollendorff の式を導出するにあたり、複合材料は、充填率 η の磁性体と充填率 $1 - \eta$ の非磁性体を持つとする。

複合材料全体に巨視的な H が印可されているとする。この複合材料中の磁性体に印可されている局所磁界は、磁性体を取り除いた時のその場の局所的な磁界であるので、

$$H_l = H + NM \quad (6.2)$$

のように書くことができる。ここで、 M は複合材料全体の巨視的な磁化である。また、 N は反磁界係数であり、磁性体の形状によって変化する反磁界の影響を表す係数である。磁

性体中の磁界 H_{in} は、局所的に印可されている磁界 H_l と磁性体中の反磁界 H_d を用いて以下のように書くことができる。

$$H_{in} = H_l - H_d \quad (6.3)$$

ここで、 $H_d = NM_{in}$ であり、 M_{in} は磁性体中の磁化を表している。磁化 M_{in} は、以下のように定義される。

$$M_{in} = \frac{B_{in}}{\mu_0} - H_{in} = (\mu_r - 1) H_{in} \quad (6.4)$$

(6.3) 式を (6.4) に代入することで、

$$M_{in} = \frac{\mu_r - 1}{1 + N(\mu_r - 1)} H_l \quad (6.5)$$

を得る。巨視的な磁化 M は、磁性体中の磁化 M_{in} の和により、得られるので、

$$\begin{aligned} M &= \eta M_{in} \\ &= \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(\mu_r - 1)} H_l \end{aligned} \quad (6.6)$$

となる。(6.2) 式を (6.6) 式に代入すると、

$$M = \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(\mu_r - 1)} (H + NM) \quad (6.7)$$

となり、 M に関してまとめると、

$$M = \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\mu_r - 1)} H \quad (6.8)$$

となる。最終的に B, H, M の関係式より、

$$\begin{aligned} B &= \mu_0(H + M) \\ &= \mu_0 \left(1 + \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\mu_r - 1)} \right) H \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。これより、巨視的な透磁率を $\langle \mu \rangle = \frac{B}{H}$ とすると、

$$\langle \mu \rangle = \mu_0 \left(1 + \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\mu_r - 1)} \right) \quad (6.10)$$

となる。これより、複合材料のマクロな視点における磁気特性を示したマクロ複素実効透磁率を導出できた。この Ollendorff の式は静磁場にのみ有効であるが、前章において導出した複素実効透磁率をこの (6.10) 式に代入することで、複合材料中の渦電流を考慮したマクロな複素実効透磁率を導出することができる。すなわち、

$$\langle \dot{\mu} \rangle = \mu_0 \left(1 + \frac{\eta(\dot{\mu}_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\dot{\mu}_r - 1)} \right) \quad (6.11)$$

である。これより、本手法を用いることにより、巨視的なマクロ複素実効透磁率を算出できたので、マルチターンコイルや圧粉磁心を一つの物理量でとらえることができる。そのため、有限要素解析を行う場合は表皮厚や円筒導体、磁性粒子を考慮してメッシュ切りを行う必要がないため、図 6.1 のように荒くメッシュを切ることによって解析を行うことができる。

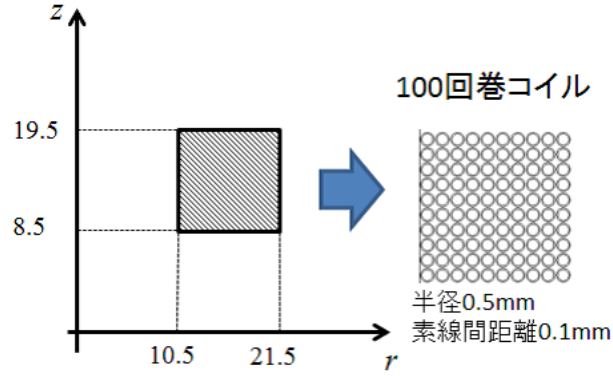


図 6.4: 解析モデル

6.1.3 周波数領域におけるマクロ複素実効透磁率を用いた有限要素方程式

準静磁場において，マルチターンコイルや圧粉磁心コア以外に渦電流が流れる系を考える．そのときの有限要素方程式は，

$$\sum_j A_j \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (6.12)$$

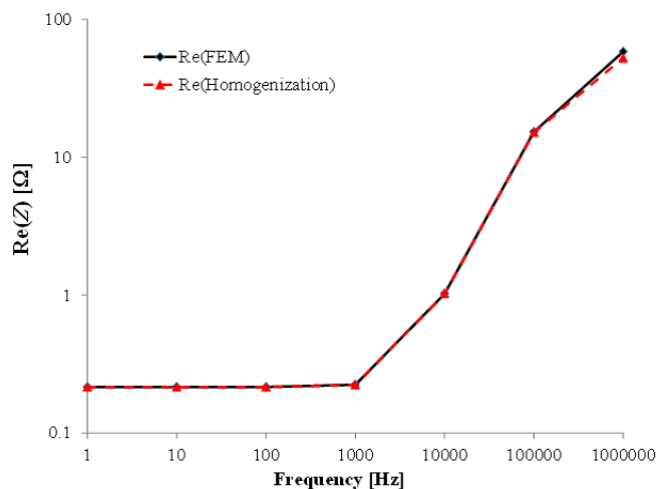
となり，均質化領域 Ω_h において，マクロな複素実効透磁率を定義する．これより，(6.12) 式を解くことにより，周波数領域における均質化有限要素解析を実現できる．

6.1.4 100 回巻マルチターンコイル解析

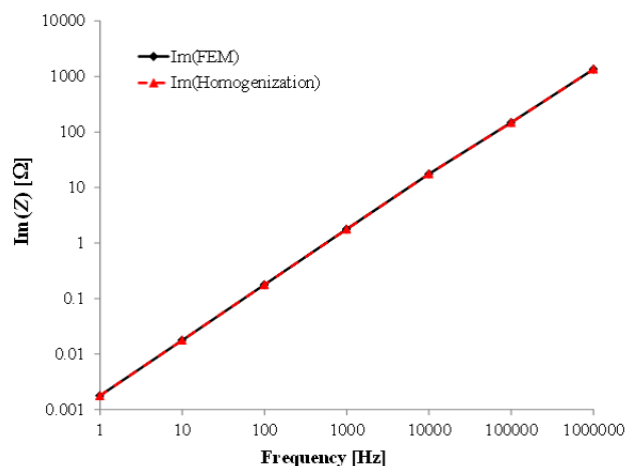
本均質化の手法が有効であるか確認するために，図 6.4 に示す 100 回巻のマルチターンコイルに本手法を適用する．図 6.4 のモデルをフルモデルにおける 2 次元軸対象有限要素解析と 2 次元軸対象均質化有限要素解析を行い，解析結果の比較を行う．フルモデルにおける解析は，1MHz における細線 1 本 1 本の表皮厚を考慮してメッシュを切っている．1 本の円筒導体の半径は 0.5mm，素線間距離は 0.1mm としている．また，円筒導体の導電率は $5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$ である．図 6.5 に 100 回巻マルチターンコイルのインピーダンスの周波数特性を示す．実部，虚部ともにインピーダンスの周波数特性が一致していることが確認できる．これより，本手法の有効性を確認することができた．本節では，マルチターンコイルにおける本手法の有効性を示した．本手法を用いた圧粉磁心の均質化に関する有効性は論文 [65] により，有効性が示されているため，本論文では割愛する．

6.2 マルチターンコイルの均質化解析

本節では，マルチターンコイルの均質化解析に焦点を絞る．6.1.3 節では，100 回巻の断面が円筒のマルチターンコイルへ前節の手法を適用し，本手法の有効性を示した．しかし，上記手法は円筒導体断面にのみ適用可能である．そのため，楕円型や角型のモデルに対し



(a) 実部



(b) 虚部

図 6.5: 100 回巻マルチターンコイルのインピーダンスの周波数特性

て適用は難しい．また，上記手法は複素実効透磁率がベッセル関数を含んでいるため，直接時間領域解析に適用することが難しい．そこで，本節では上記 2 点に関して，本手法を拡張したので，記述する．

6.2.1 任意断面形状における均質化有限要素解析

実際の電磁機器に使われているマルチターンコイルの断面形状は，円型だけでなく楕円型や角型も使われている．そのため，楕円型や角型の細線が使われているモデルに対する有効な均質化手法が求められている．しかし，前節で説明した均質化手法は円型の導体のみ使用可能で，楕円型や角型に適用できない．そこで，著者らは，楕円型や角型等の任意断面形状の複素実効透磁率を導出する手法を提案する．本手法では，有限要素法とモデル縮約法を用いて，任意断面形状の複素実効透磁率の有理関数を算出する．その後，その

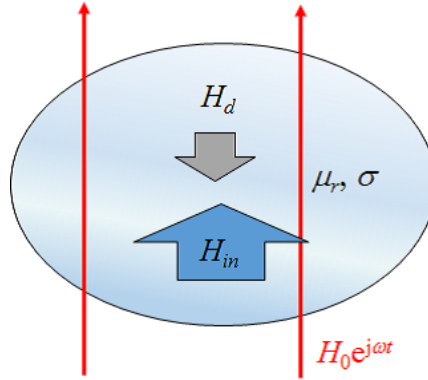


図 6.6: 交番磁界が印可された任意導体

有理関数を Ollendorff の式に代入することで，マクロ複素実効透磁率を周波数に陽な形で得ることができる．以降本手法の導出方法を示す．

複素実効透磁率

図 6.6 に示すような孤立した任意導体を考える．その導体には一様な交番磁界 $H_0 \exp(j\omega t)$ が印可されている．また，その導体は μ_r, σ を持つ．このとき，磁性体中の磁界 H_{in} は，

$$H_{in} = \frac{H_d}{\chi N} \quad (6.13)$$

である．ここで， H_d, χ は反磁界，磁化率である．導体境界における境界条件は，

$$H_0 - H_d = H_{in} = \frac{M}{\chi} \quad (6.14)$$

となる．これより，磁化 M は，

$$M = \frac{\chi H_0}{1 + \chi N} \quad (6.15)$$

である．また，導体中の磁束密度は，以下のように表現できる．

$$B_{in} = \mu_0 (H_{in} + M) \quad (6.16)$$

(6.15) 式を (6.16) 式に代入すると，

$$B_{in} = \frac{\mu_r}{1 + N(\mu_r - 1)} B_0 \quad (6.17)$$

となる．このままでは，静磁場における理論のままなので，複素実効透磁率を導入する．($\mu \rightarrow \dot{\mu}$)

$$B_{in} = \frac{\dot{\mu}_r}{1 + N(\dot{\mu}_r - 1)} B_0 \quad (6.18)$$

最終的に、複素実効透磁率でまとめると、

$$\dot{\mu}_r = \frac{(1-N)\frac{B_{in}}{B_0}}{1+N\frac{B_{in}}{B_0}} \quad (6.19)$$

となる。これより、 B_0 を任意導体に印可したときの導体中の磁束密度 B_{in} から実効的な透磁率を得ることができる。(6.19) 式は任意導体の複素実効透磁率なので、最終的に Ollendorff の式に代入することでマルチターンコイル等のマクロ視点における複素実効透磁率を得ることができる。

しかし、任意導体となると、解析解より導体中の B_{in} を求めるのは困難である。そのため、著者らは有限要素法を用いてこの B_{in} を求める。このとき、その導体は無限に長いと考え、2次元場において、一様磁場 B_0 を入力として、解析を行う。そのときの導体中の応答磁束密度は、断面導体の平均として、以下のように計算を行う。

$$B_{in} = \frac{1}{S_c} \int_{S_c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' dS \quad (6.20)$$

ここで、 $S_c, \mathbf{B}, \mathbf{n}'$ はそれぞれ細線断面の面積、磁束密度、印可磁場と同じ方向の単位ベクトルである。これにより、任意形状においても複素実効透磁率を求めることが可能である。

しかし、この手法は周波数点ひとつひとつにおいて、有限要素解析を行わなければならない。そこで、著者らは PVL によるモデル縮約法を用いて (6.19) 式を有理関数で表現することを考える。(6.19) 式における B_0 と B_{in} を (3.2) 式における入力、出力と考えると、

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{B_{in}}{B_0} \\ &= \frac{a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + a_{p-2} s^{p-2} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + b_{q-2} s^{q-2} + \cdots + b_1 s + b_0} \\ &= \frac{f(s)}{g(s)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

のような伝達関数を得ることができる。これより、(6.19) 式に代入すると、

$$\dot{\mu}_r = \frac{(1-N)\frac{f(s)}{g(s)}}{1+N\frac{f(s)}{g(s)}} \quad (6.22)$$

となる。これより、ひとたび有限要素法と PVL により、(6.21) 式を求めてしまえば、どの周波数帯においても複素実効透磁率を計算することができる。

反磁界係数

前節では、任意形状における複素実効透磁率の算出方法を示したが、(6.22) 式中には反磁界係数が含まれている。反磁界係数 N は形状に依存する係数であり、円筒や球の場合

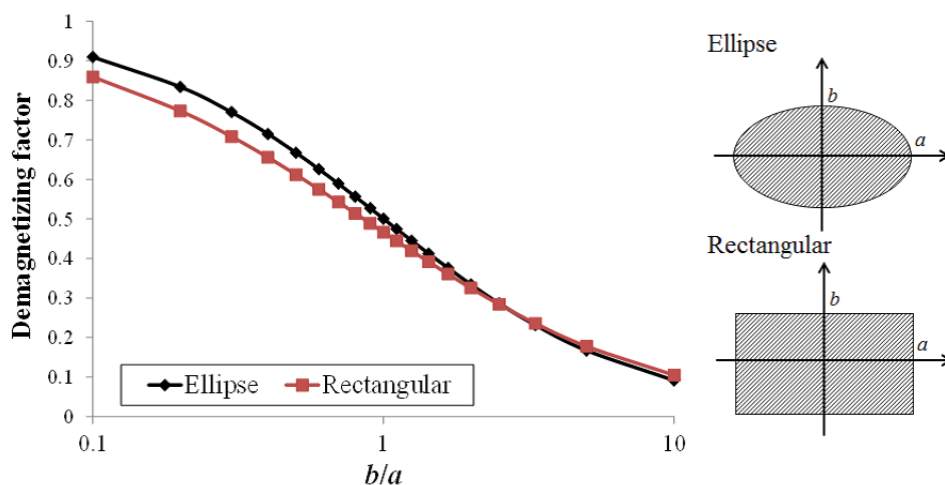


図 6.7: 楕円型, 角型の反磁界係数

解析的に求めることが可能であるが, それ以外の場合, 解析的に求めることが難しい. そこで, 近似的ではあるが, 有限要素法を用いて任意形状における反磁界係数を計算する. (6.17) 式は, 反磁界係数に関してまとめると,

$$N = \frac{\mu_r B_0 - B_{in}}{(\mu_r - 1) B_{in}} \quad (6.23)$$

となる. 複素実効透磁率を求めた時と同様に, 入力を B_0 , 出力を B_{in} として, 反磁界係数を有限要素解析により求める. このとき, 静磁場において計算を行う.

(6.23) 式より, 反磁界を楕円型, 角型において計算を行った. その計算結果を図 6.7 に示す. グラフの横軸は b/a で, 横軸と縦軸の比である. B_0 は, 図に対して上向きに対して印可している. 図 6.7 より, 縦長となればなるほど, 反磁界係数が大きくなっていることが確認できる. また, 楕円で縦横比が 1 のときは断面が円となるが, 反磁界係数は 0.5 となっている.

複素実効透磁率の周波数特性

楕円型, 長方形型の複素実効透磁率の周波数特性を (6.22) 式を用いて計算した. このとき, 素線の導電率は $5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$ である. 解析結果を図 6.8, 6.9 に示す. 横軸は, a, b の大きい値と表皮厚 δ との比である. 楕円型, 長方形型ともに, 複素実効透磁率の実部が周波数が大きくなると, 小さくなっている. これは高周波となるに従い, 渦電流による反磁界が支配的なり, 実効的な透磁率が小さくなるためである. また, b/a が大きくなると, 実部が下がる周波数帯が高周波にずれていく. これは, b/a が小さくなると, 反磁界係数も小さくなるため, 反磁界による影響が小さくなるためである. 虚部も同様の理由からピークの位置が高周波のほうにずれている.

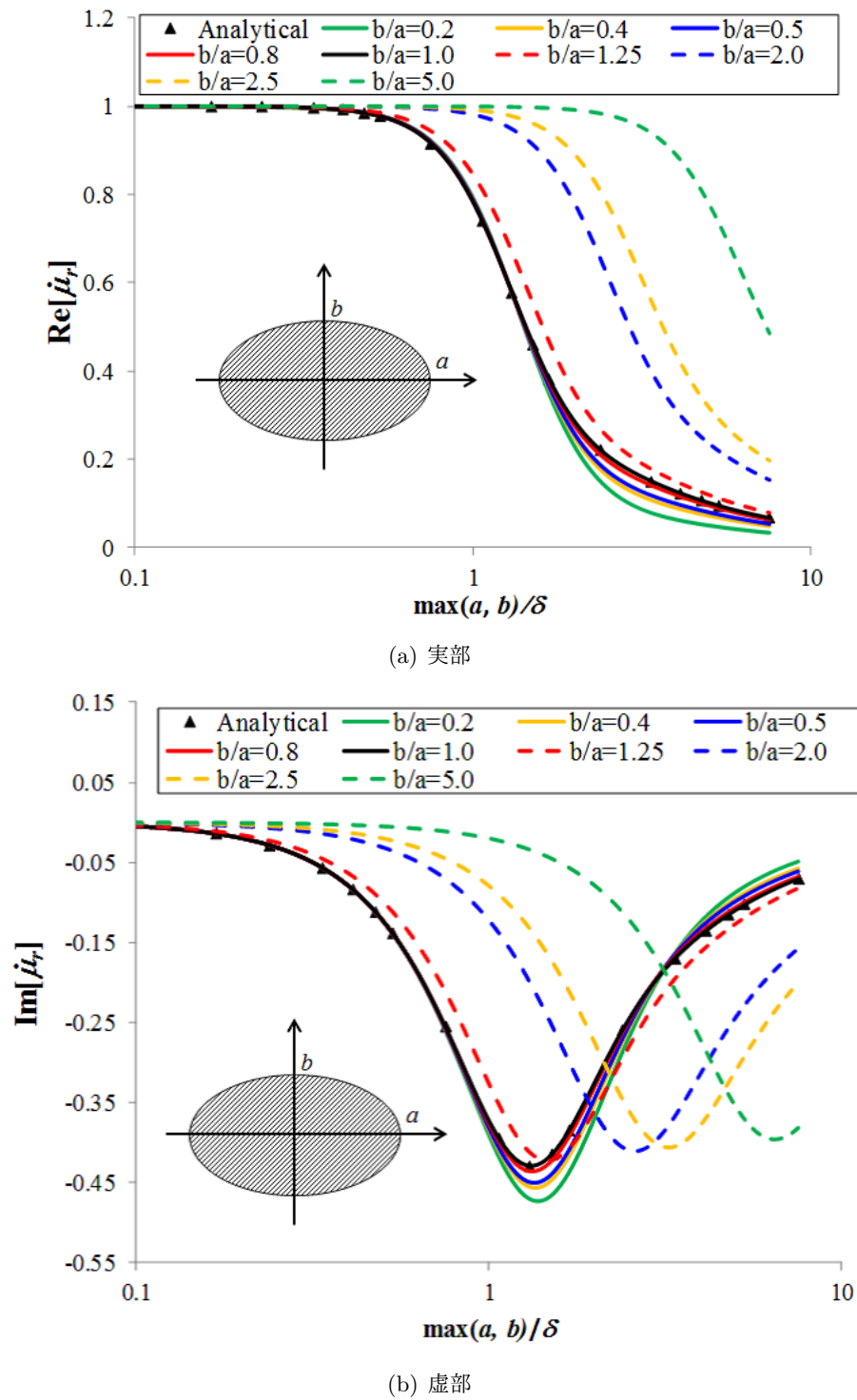


図 6.8: 楕円型の複素実効透磁率の周波数特性

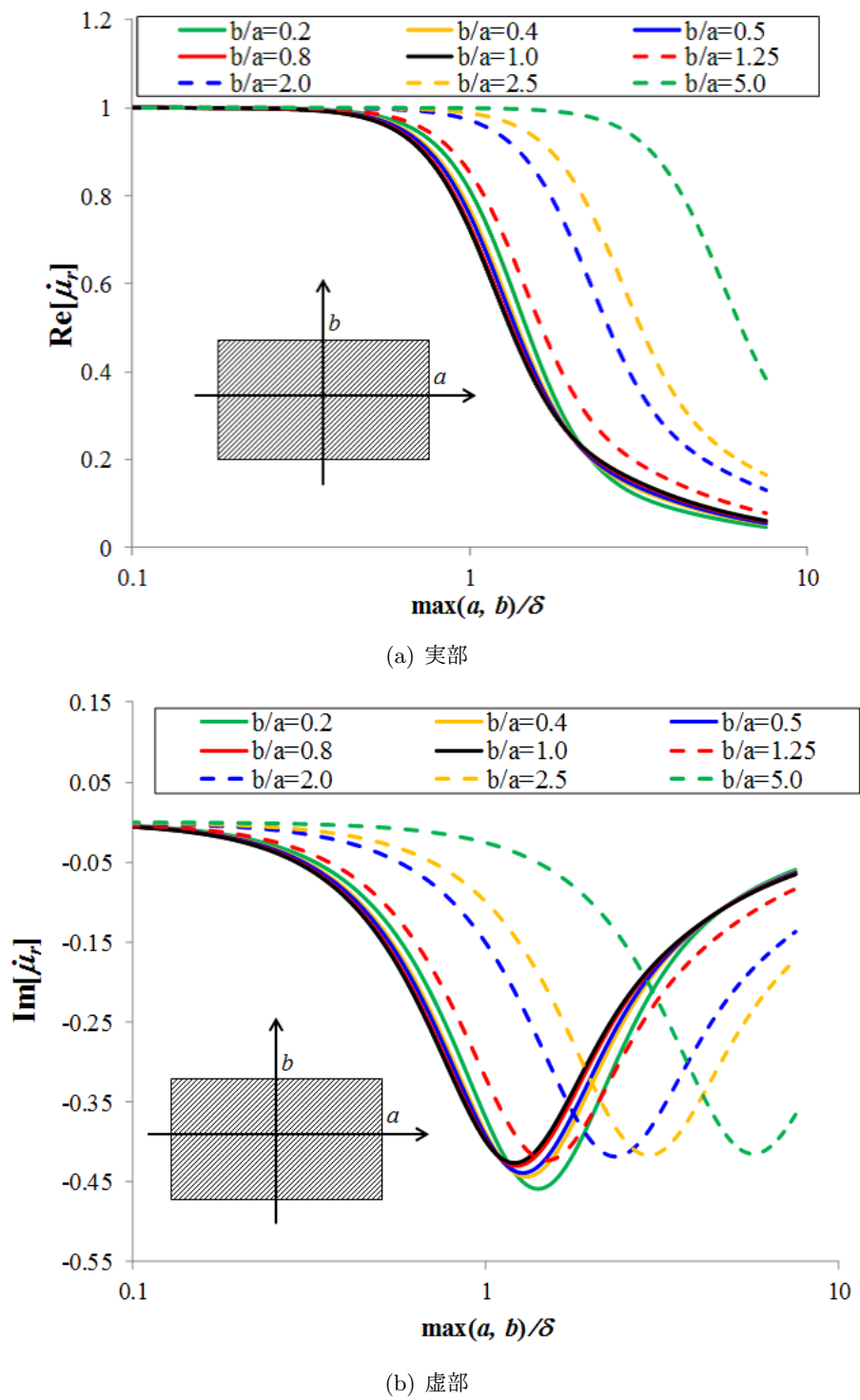


図 6.9: 長方形型の複素実効透磁率の周波数特性

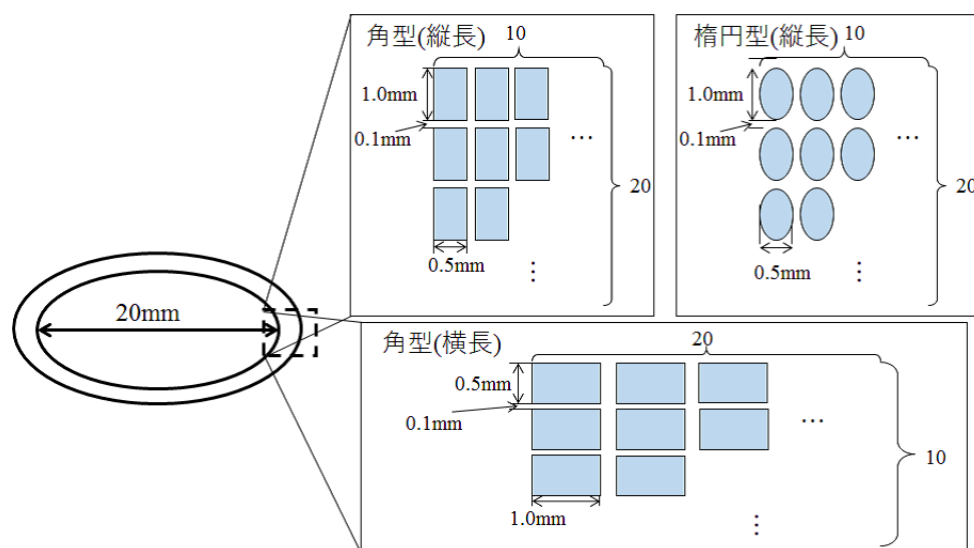


図 6.10: 200 回巻ターンコイルモデル

200 回巻マルチターンコイル解析

本手法の有効性を示すために、図 6.10 に示す 200 回巻のマルチターンコイルに本手法を適用する。200 回巻のマルチターンコイルの断面は、楕円型、角型を持つとする。コイルの導電率は $5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$ である。

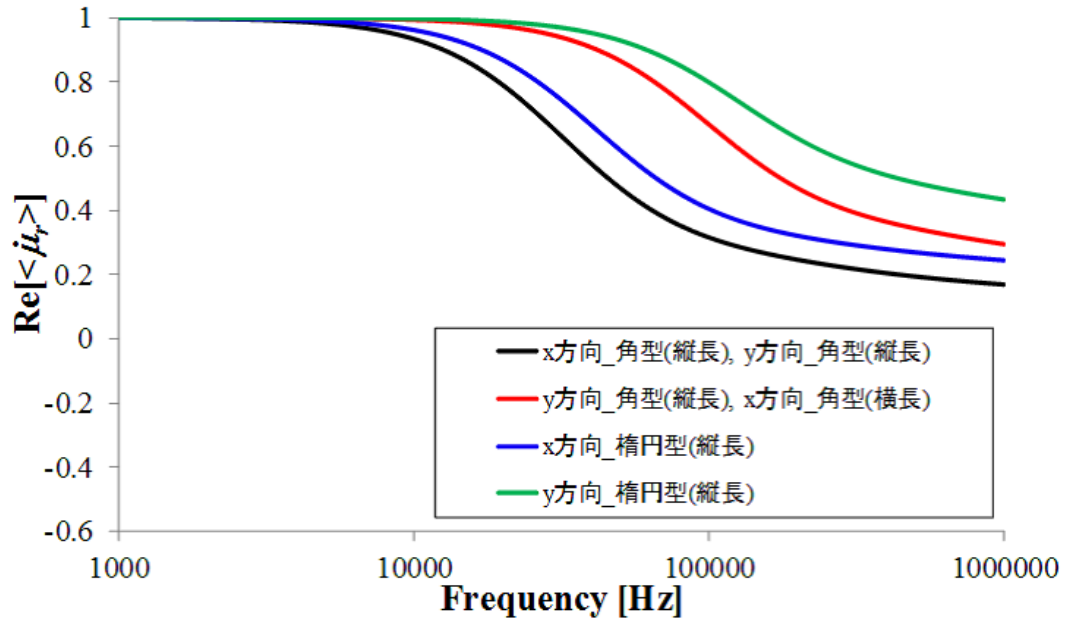
これらのマルチターンコイルは、コイルの構造より、異方性を持っていることがわかる。そのため、この異方性を考慮した解析を行う必要がある。異方性を考慮した場合のコイルの透磁率は以下のようなテンソル型となる。

$$\langle \dot{\mu} \rangle = \begin{bmatrix} \langle \dot{\mu}_x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \dot{\mu}_y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

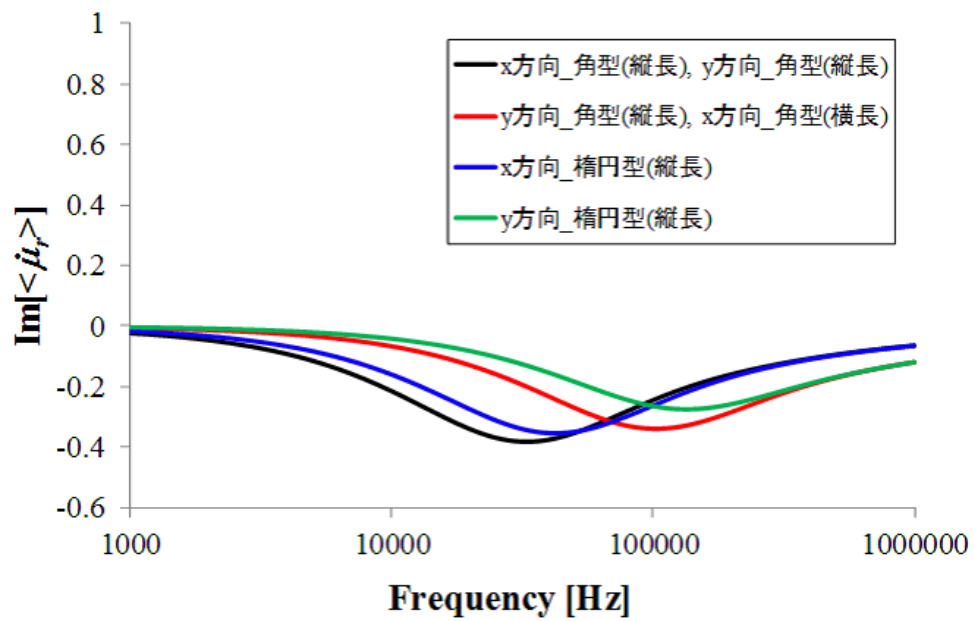
この式を有限要素方程式に代入し、解析を行う。図 6.11 に図 6.10 に対応するマクロ複素実効透磁率の周波数特性を示す。図 6.11 より、x 方向、y 方向においてそれぞれ異なる磁気特性を得ることができている。また、楕円型、角型においても異なる特性を持っていることがわかる。

最後に、図 6.11 の特性を用いて、図 6.10 に対して均質化解析を行った。本解析では、フルモデルにおける 2 次元の軸対象有限要素解析と均質化 2 次元軸対象有限要素解析により、マルチターンコイルのインピーダンスの比較を行った。インピーダンスの周波数特性を図 6.12 に示す。図 6.12 より、従来の有限要素解析とほぼ同精度の解析を行うことができていた。また、楕円型 (縦型) と角型 (縦型) において、ほぼインピーダンスに違いがないことが分かった。これより、解析精度の面から本手法の有効性が確認できた。

図 6.13 に角型 (縦型) モデルの磁束線分布を示す。動作周波数は 1MHz である。コイル内外ともに一致していることが図 6.13 から確認できる。これより、均質化していてもほぼ同じ磁束線分布を得られることが分かった。

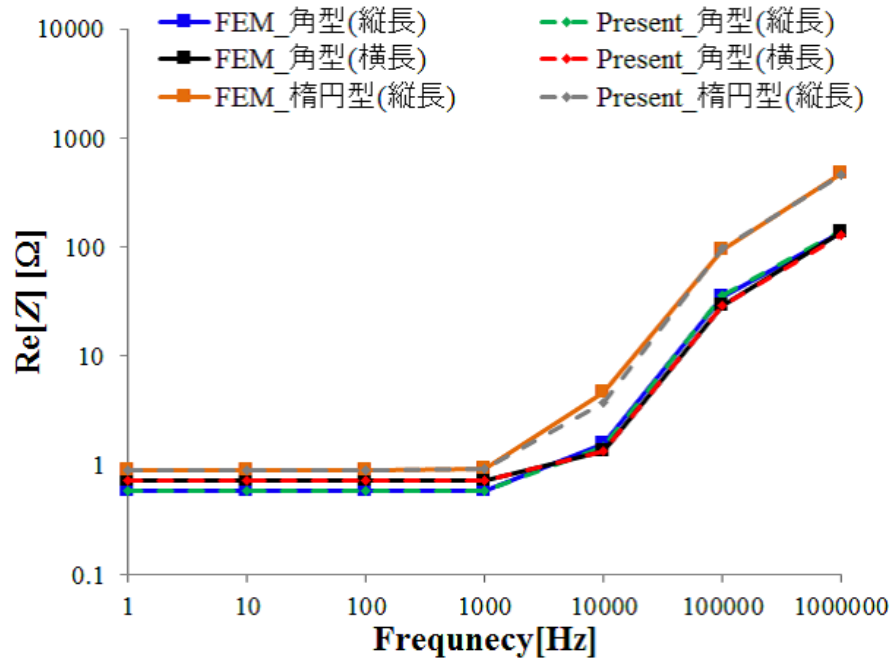


(a) 実部

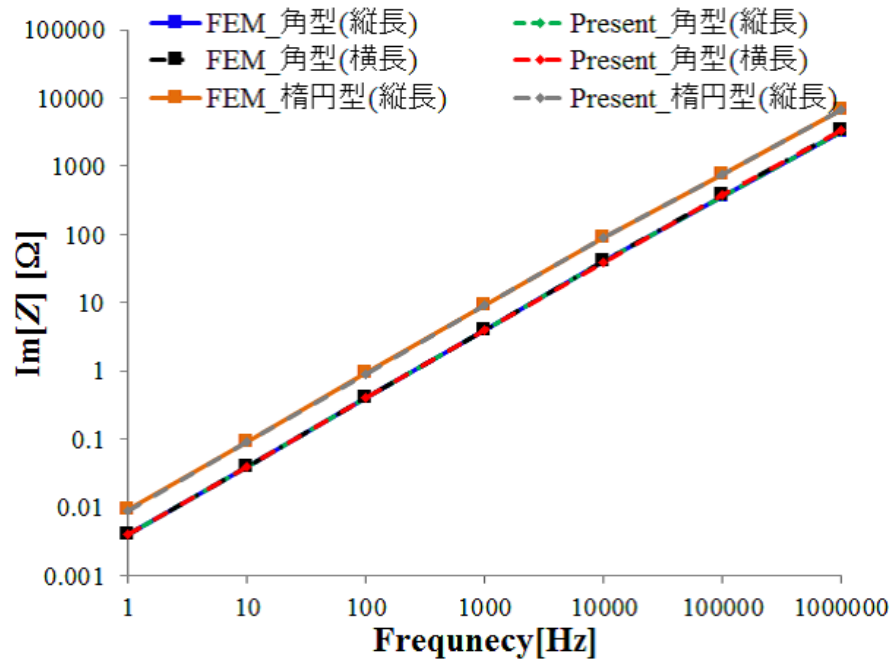


(b) 虚部

図 6.11: マクロ複素実効透磁率の周波数特性



(a) 実部



(b) 虚部

図 6.12: 200 回巻ターンコイルのインピーダンス

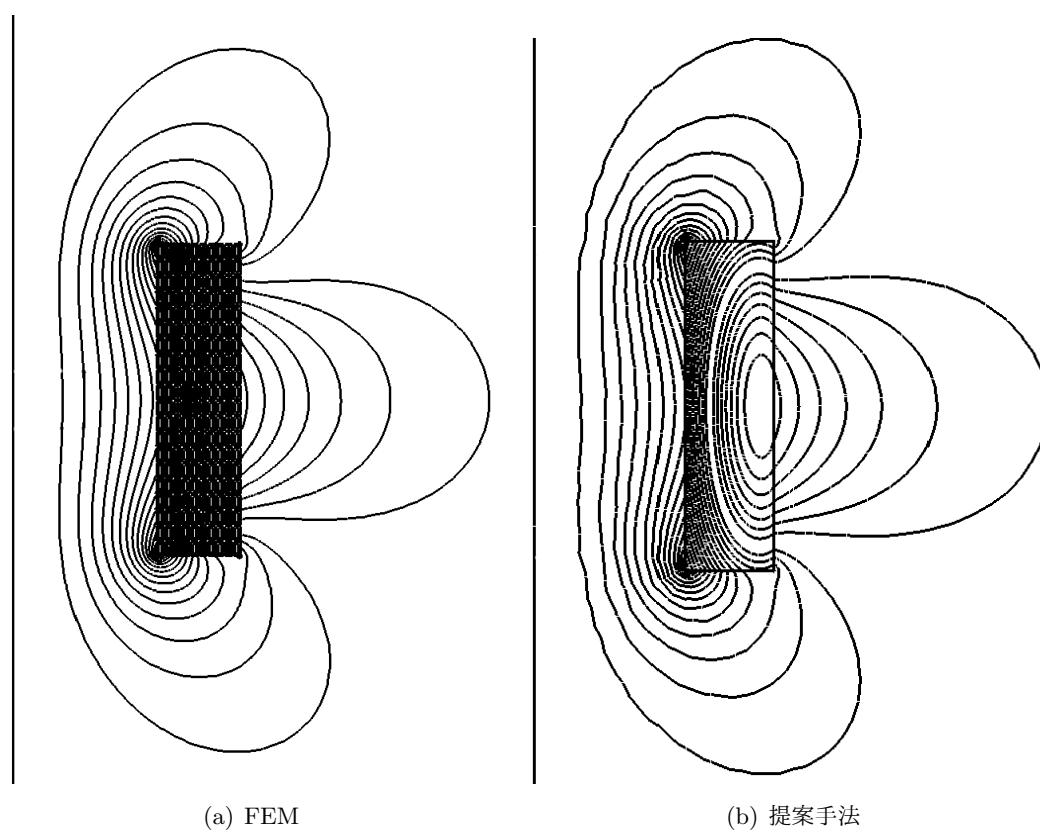


図 6.13: 磁束線の比較

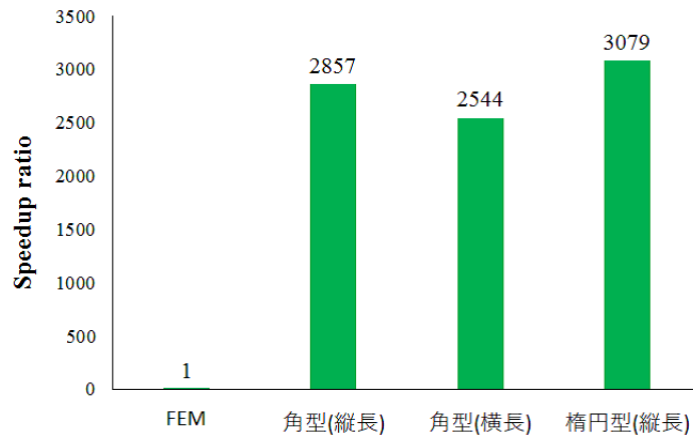


図 6.14: 速度向上率

表 6.1: 各解析に要した要素数

	FEM	Homogenization
角型 (横長)	2,256,955	14664
角型 (縦長)	2,406,370	14664
楕円型 (縦長)	2,406,370	14664

最後に計算時間の比較を行う．図 6.14 に各モデルにおける速度向上率の比較を示す．速度向上率は， τ_{FEM} と τ_{Homo} の比 $\tau_{\text{FEM}}/\tau_{\text{Homo}}$ より計算している．ここで， τ_{FEM} ， τ_{Homo} は，フルモデルにおける有限要素解析，均質化法を用いた場合の計算時間である．各解析に用いたメッシュの要素数，表 6.1 の通りである．表 6.1 より，100 倍以上の要素数削減を実現している．計算時間も各解析においても 2000 倍以上の速度向上を実現しており，解析時間の面からみても本手法の有効性を示すことができた．

6.2.2 時間領域均質化有限要素解析

6.1 節の手法は，複素実効透磁率の表現のために，ベッセル関数が使われている．そのため，直接逆ラプラス変換，逆フーリエ変換できないため，時間領域解析へ拡張することが難しい．そこで，本節では，6.1.2 節の方法を時間領域解析へ拡張する手法を提案する．本節では円筒導体を使用したマルチターンコイルに着目し，その時間領域解析手法を提案する．

定式化

円筒導体の複素実効透磁率を再掲する.

$$\dot{\mu}_r = \mu_r \frac{J_1(z)}{zJ_0(z) - J_1(z)} \quad (6.25)$$

この複素実効透磁率にはベッセル関数が含まれている. このため, 時間領域への変換が難しい. そこで, 以下のベッセル関数の漸化式を用いる.

$$\frac{zJ_0(z)}{J_1(z)} = 2 - \frac{z^2}{4 - \frac{z^2}{8 - \frac{z^2}{10 - \dots}}} \quad (6.26)$$

(6.25) に (6.26) 式に代入する.

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_r &= \mu_r \frac{1}{z \frac{J_0(z)}{J_1(z)} - 1} \\ &= \mu_r \frac{1}{2 - \frac{z^2}{4 - \frac{z^2}{8 - \frac{z^2}{10 - \dots}}} - 1} \\ &= \frac{c_{q-1}s^{q-1} + c_{q-2}s^{q-2} + \dots + c_1s + c_0}{d_qs^q + d_{q-1}s^{q-1} + d_{q-2}s^{q-2} + \dots + d_1s + d_0} \end{aligned} \quad (6.27)$$

これより, 複素実効透磁率は有理関数となる. この有利多項式を Ollendorff の式に代入し, また同様に有利多項式化する. これより, マクロ複素実効透磁率が有利多項式で書くことができるようになる. その後, マクロ複素実効透磁率の逆数を以下のような部分分数の和へと分解する.

$$\begin{aligned} \langle \dot{\nu} \rangle &= \frac{1}{\mu_0 \langle \dot{\mu}_r \rangle} \\ &= \nu_\infty + \sum_j \frac{k_j}{s + p_j} \end{aligned} \quad (6.28)$$

このように部分分数の形に変換できれば, 以下のようにラプラス変換も容易にできる.

$$\begin{aligned} \langle \dot{\nu} \rangle(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu} \rangle(s)] \\ &= \nu_\infty \delta(t) + \sum_j k_j \exp(-p_j t) \end{aligned} \quad (6.29)$$

これより, 時間領域解析へ導入できる.

時間領域有限要素解析

マルチターンコイル以外に導電体がないと仮定した場合、有限要素方程式は以下のようになる。

$$\sum_j A_j \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu(s) \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (6.30)$$

これより，マルチターンコイルがある領域において， Ω_h とし，その領域において $\langle \nu \rangle$ を定義する．これより，有限要素方程式は，以下のように変換できる．

$$\sum_j A_j \int_{\Omega/\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu(s) \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega + \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \langle \nu(s) \rangle \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (6.31)$$

この式に対して，逆ラプラス変換を適用すると，

$$\sum_j A_j \delta(t) \int_{\Omega/\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu(s) \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega + \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \mathcal{L}^{-1}[\langle \nu(s) \rangle \mathbf{B}] d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (6.32)$$

となる．左辺第2項は，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\langle \nu(s) \rangle \mathbf{B}] &= \nu_{\infty} \mathbf{B}(t) + \int_0^t \mathbf{B}(t-\tau) \sum_j k_j \exp(-p_j \tau) d\tau \\ &= \nu_{\infty} \mathbf{B}(t) + \mathbf{B}(t) \int_0^{\Delta t} \sum_j k_j \exp(-p_j \tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{B}((n-m)\Delta t) \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \sum_j k_j \exp(-p_j \tau) d\tau \\ &= \nu_{\infty} \mathbf{B}(t) + \mathbf{B}(t) \sum_j \frac{k_j}{p_j} \{1 - \exp(-p_j t)\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{B}((n-m)\Delta t) \sum_j \frac{k_j}{p_j} \exp(-mp_j t) \{1 - \exp(-p_j t)\} \end{aligned} \quad (6.33)$$

と評価できる．そのため，(6.33) 式を (6.32) 式に代入することで，時間領域表現を得ることができる．

RC 法

(28) 式の中では畳み込み積分が現れるため，タイムステップが進むたびに計算時間が長大する．また，過去の値をすべて保存しておく必要もあり，メモリが膨大となってしまう．そこで，分散性媒質等の FDTD 法を用いた電磁界解析で有効性が示されている RC 法を用いる．RC 法では畳み込み積分を帰納的に計算することができ，メモリを大幅に削減でき，さらに計算時間も短縮することができる．

(6.33) 式は磁界なので, n ステップ目の磁界を $\mathbf{H}^n$ とする. これより, (6.33) 式は以下のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^n &= \nu_\infty \mathbf{B}^n + \int_0^{n\Delta t} \chi(\tau) \mathbf{B}(n\Delta t - \tau) \\
&= \nu_\infty \mathbf{B}^n + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{B}^{n-m} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi(\tau) d\tau \\
&= \nu_\infty \mathbf{B}^n + \chi^0 \mathbf{B}^n + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{B}^{n-m} \chi^m \\
&= (\nu_\infty + \chi^0) \mathbf{B}^n + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbf{B}^{n-m-1} \chi^{m+1}
\end{aligned} \tag{6.34}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\chi^m &= \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \sum_j k_j \exp(-p_j \tau) d\tau \\
&= \sum_j \frac{k_j}{p_j} \exp(-mp_j \Delta t) \{1 - \exp(-p_j \Delta t)\}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

である. $n-1$ ステップ目の磁界 $\mathbf{H}^{n-1}$ は,

$$\mathbf{H}^{n-1} = \nu \mathbf{B}^{n-1} + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbf{B}^{n-m-1} \chi^m \tag{6.36}$$

となる. これより, $\mathbf{H}^n - \mathbf{H}^{n-1}$ の差は,

$$\mathbf{H}^n - \mathbf{H}^{n-1} = (\nu_\infty + \chi^0) \mathbf{B}^n - \nu_\infty \mathbf{B}^{n-1} - \sum_{m=0}^{n-2} \mathbf{B}^{n-1-m} \Delta \chi^m \tag{6.37}$$

となる. ここで, $\Delta \chi^m$ は,

$$\begin{aligned}
\Delta \chi^m &= \chi^m - \chi^{m+1} \\
&= \sum_j \frac{k_j}{p_j} \exp(-mp_j \Delta t) \{1 - \exp(-p_j \Delta t)\} \\
&\quad - \sum_j \frac{k_j}{p_j} \exp(-(m+1)p_j \Delta t) \{1 - \exp(-p_j \Delta t)\} \\
&= \sum_j \frac{k_j}{p_j} \exp(-mp_j \Delta t) \{1 - 2\exp(-p_j \Delta t) + \exp(-2p_j \Delta t)\} \\
&= \sum_j \frac{k_j}{p_j} \exp(-mp_j \Delta t) \{1 - \exp(-p_j \Delta t)\}^2
\end{aligned} \tag{6.38}$$

である. これより,

$$\mathbf{H}^n - \mathbf{H}^{n-1} = (\nu_\infty + \chi^0) \mathbf{B}^n - \nu_\infty \mathbf{B}^{n-1} - \Phi^{n-1} \tag{6.39}$$

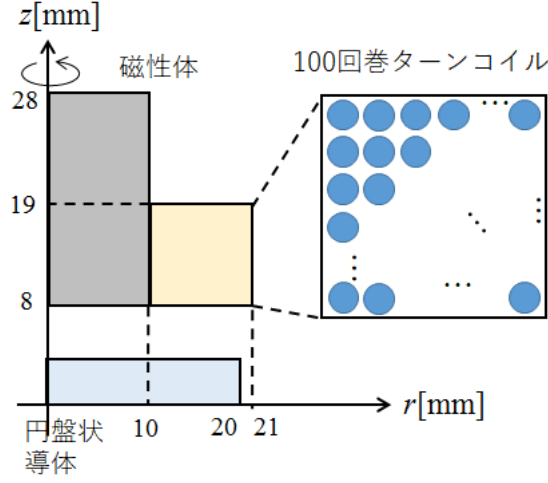


図 6.15: 数値解析モデル

とすると,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= B^{n-1} \Delta \chi^0 + \sum_{m=1}^{n-2} B^{n-1-m} \Delta \chi^m \\
 &= B^{n-1} \Delta \chi^0 + \sum_{m=0}^{n-3} B^{n-1-(m+1)} \Delta \chi^{m+1} \\
 &= B^{n-1} \Delta \chi^0 + \exp(-p_j \Delta t) \sum_{m=0}^{n-3} B^{n-2-m} \Delta \chi^m \\
 &= B^{n-1} \Delta \chi^0 + \exp(-p_j \Delta t) \Phi^{n-2}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

となるため, 最終的に以下のように帰納的に書くことができる.

$$\mathbf{H}^n = (\nu_\infty + \chi^0) \mathbf{B}^n - \nu_\infty \mathbf{B}^{n-1} - \Phi^{n-1} + \mathbf{H}^{n-1} \tag{6.41}$$

この式を有限要素方程式 (6.32) 式に代入することで帰納的に計算することが可能となり, 効率的に時間領域解析を行うことができる.

数値解析結果

図 6.15 のモデルに対して, 均質化を用いた時間領域解析手法 (電圧入力) を適用する. 磁性体の比透磁率を $\mu_r = 1000$, 電源電圧は振幅 1V, スイッチング周波数 100kHz, デューティ比を 0.9 のパルス波とする. 均質化の妥当性を確認するために, 表皮効果, 近接効果を考慮して要素分割した従来の有限要素解析 (full FEM) と比較する. 電圧を印可した時に流れる電流を図 6.16 に示す. パルス波のような高調波が含まれている問題でも, 提案手法により求めた電流波形は従来手法による波形とよく一致しており, 本手法の有効性が確認できる. つぎに, 磁性体を 50A400 として磁気飽和を考慮した非線形解析を行う. 本解

析では 100kHz の正弦波を入力電圧とする．結果を図 6.17 に示す．マルチターンコイル周辺に非線形材質が含まれていても，提案手法により得られた電流波形は，従来の有限要素解析により得られた波形とよく一致している．図 6.18 に 9 ステップ目 ($t = 4.5\mu\text{sec.}$) における磁束線分布を示す．均質化により得られた磁束線分布は，通常の有限要素解析で得られた磁束線分布と全ての領域においてよく一致している．

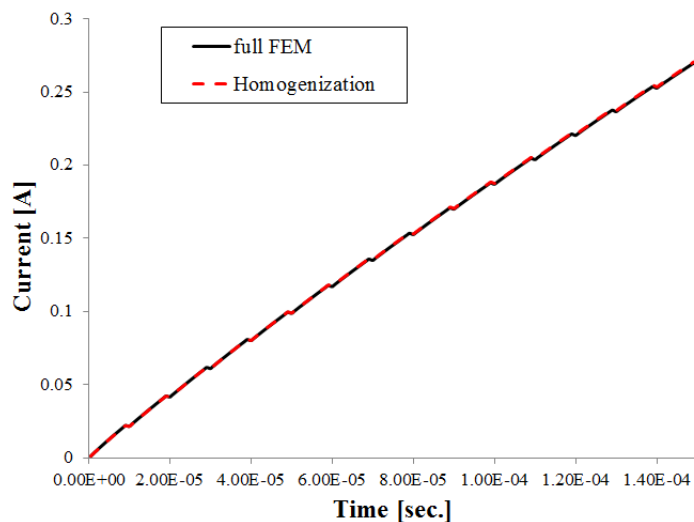


図 6.16: コイルに流れる電流波形 (線形問題)

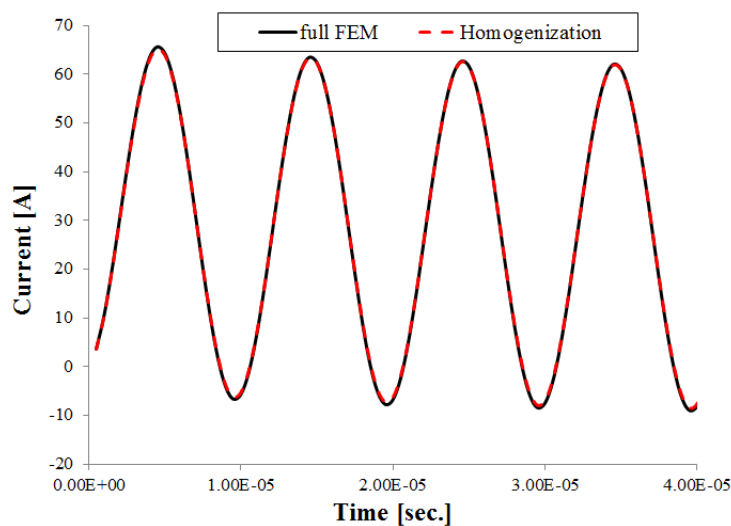
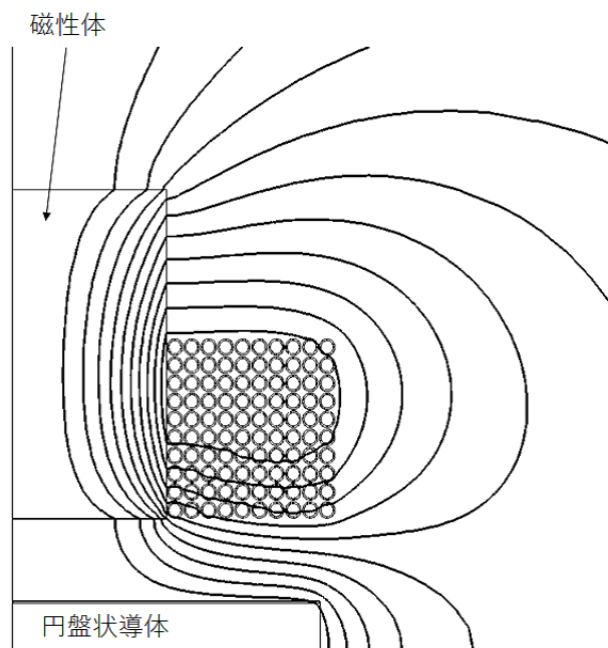
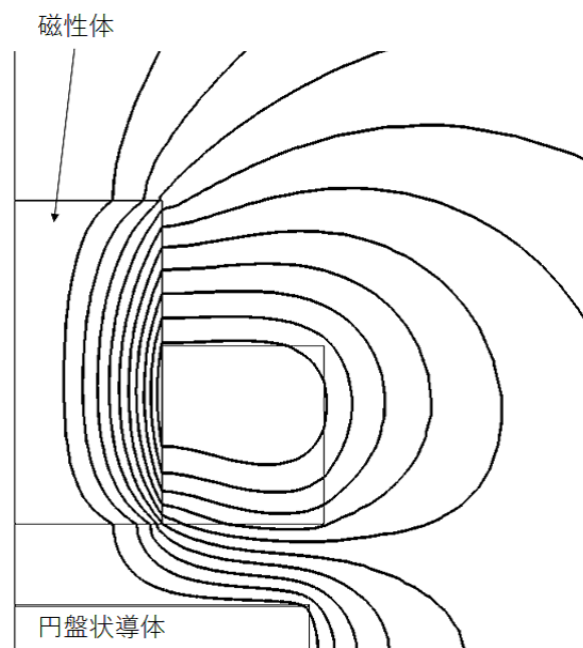


図 6.17: コイルに流れる電流波形 (非線形)

つぎに計算時間の比較を行う．従来の有限要素解析，均質化法に RC 法を適用した場合，しない場合の計算時間を比較する．従来の有限要素解析，均質化解析の要素数はそれぞれ 2,990,610 および 282,680 である．使用した計算機は，Xeon E5-2665(2.4GHz, コア数 16) である．図 6.17, 6.18 に示した非線形解析に要した計算時間の比較を図 6.19 に示す．RC



(a) FEM



(b) 提案手法

図 6.18: 9 ステップ目における磁束線の比較

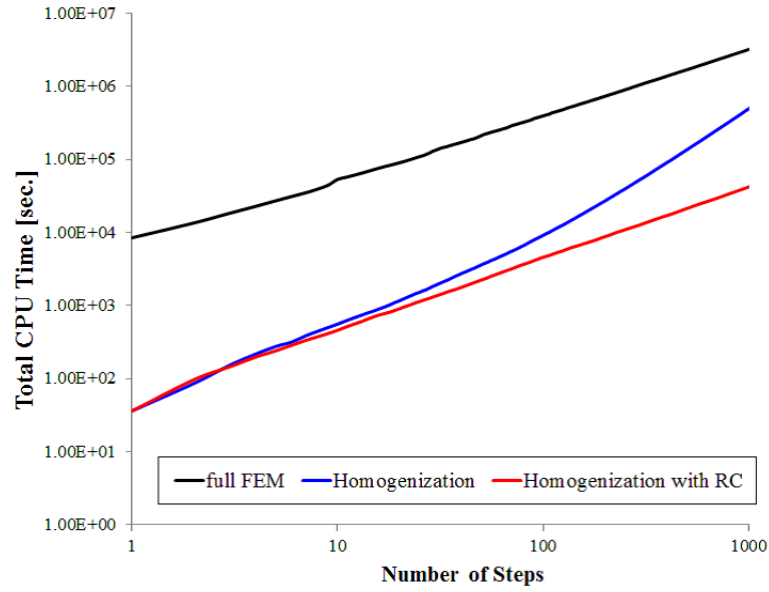


図 6.19: 計算時間の比較

法を適用していない均質化解析の計算時間がステップ数の増加とともに通常の有限要素解析に近づいているのが確認できる。その一方で、通常の有限要素解析と RC 法を用いた均質化解析は双方ともに計算時間がほぼ線形で増加している。計算時間の増加率を表す図 6.19 のグラフの傾きもほぼ同じであり、通常の有限要素解析と比較して RC 法を用いた場合約 100 倍の高速化を実現している。

6.3 圧粉磁心の均質化解析

つぎに、圧粉磁心特性評価のための均質化解析手法を述べる。6.1 節で述べた均質化手法は、周波数領域にのみ適用可能であった。そのため、駆動周波数や動作点がわかっているならば、有効となるが、その駆動周波数や動作点が変われば、等価材料定数を求めなおしをしなければならない。また、非定常解析は当然行うことができない。また、ヒステリシスのような非線形特性を考慮することは困難である。そこで、本章では圧粉磁心の非線形性を考慮した均質化非定常有限要素解析手法を提案する。

6.3.1 定式化

圧粉磁心の均質化解析では、磁性粒子一つ一つを球の形状と仮定する。そのため、複素実効透磁率は、

$$\dot{\mu}_r = \mu_r \frac{2(z - \tan z)}{\tan z - z - z^2 \tan z} \quad (6.42)$$

を用いることができる。前節で述べたマルチターンコイルの時間領域解析手法の時と同様で、正節関数 $\tan$ が含まれているため、このまま直接逆ラプラス変換、逆フーリエ変換を

適用できない．そこで，等価回路生成手法の5.2.1節で用いた $\tan$ の連分数展開を用いて， $\dot{\mu}_r$ を有理関数へと変換する． $\tan$ は5.2.1節に示しているように部分分数展開も行うことが可能である．しかし，部分分数展開と，連分数展開では数値的収束性の特性が異なる．連分数展開は部分分数展開と比較して，非常に数値的収束性が良い．そのため，本研究では連分数展開を用いる．この考察に関しては，付録に記述している． $\tan$ の連分数展開を再掲する．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} \tan z &= \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \dots}}} \\
&= \frac{\beta_0 + \beta_2 z^2 + \beta_4 z^4 + \dots + \beta_{2(q-1)} z^{2(q-1)}}{\alpha_0 + \alpha_2 z^2 + \alpha_4 z^4 + \dots + \alpha_{2(q-1)} z^{2(q-1)} + \alpha_{2q} z^{2q}} \\
&= \frac{f(z^2)}{g(z^2)} \\
&= \frac{f_1(s)}{g_1(s)}
\end{aligned} \tag{6.43}$$

この連分数展開式を球の複素実効透磁率へ代入する．

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_r &= \frac{2\mu_r \left(1 - \frac{f_1(s)}{g_1(s)}\right)}{\frac{f_1(s)}{g_1(s)} - 1 - z^2 \frac{f_1(s)}{g_1(s)}} \\
&= \frac{f_2(s)}{g_2(s)}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

この式を Ollendorff の式に代入し，同様に有理関数展開を行うと，

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\mu} \rangle &= 1 + \frac{\eta(\dot{\mu}_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\dot{\mu}_r - 1)} \\
&= 1 + \frac{\eta \left(\frac{f_2(s)}{g_2(s)} - 1 \right)}{1 + N \left((1 - \eta) \left(\frac{f_2(s)}{g_2(s)} - 1 \right) \right)} \\
&= \frac{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 s + \tilde{\beta}_2 s^2 + \dots + \tilde{\beta}_{q-1} s^{q-1} + \tilde{\beta}_q s^q}{\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 s + \tilde{\alpha}_2 s^2 + \dots + \tilde{\alpha}_{q-1} s^{q-1} + \tilde{\alpha}_q s^q}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

を得る．マクロ複素透磁率が有理関数の形をしているので，前節のマルチターンコイルの時間領域解析のときのように部分分数展開することで，時間領域均質化解析を実現できる．しかし，前節の手法は非線形性を含んでいない系に対する時間領域解析には非常に有効な手段だが，非線形性を考慮しなければならない場合，用いることは難しい．そこで，前章

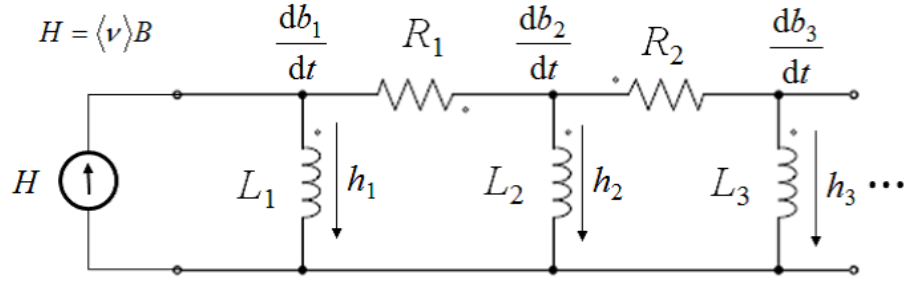


図 6.20: マクロ複素透磁率の Cauer 型等価回路

の等価回路生成の時にも用いた Cauer 型の等価回路を本手法に導入する．(6.45) 式に対して，連分数展開を適用する．

$$\dot{\mu}_r = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{\frac{R_1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2} + \frac{1}{\frac{R_2}{s} + \frac{1}{\frac{1}{L_3} + \dots}}}}} \quad (6.46)$$

連分数展開方法は，5.1.2 節にてすでに述べているので割愛する．これより，図 6.20 が得られる．この回路は， $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ より，以下の回路方程式を導く．

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{b}_1}{L_1} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\mathbf{b}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \right) \quad (6.47a)$$

$$0 = \frac{\mathbf{b}_2}{L_2} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\mathbf{b}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{d\mathbf{b}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_3}{dt} \right) \quad (6.47b)$$

$$\vdots$$

$$0 = \frac{\mathbf{b}_q}{L_q} + \frac{1}{R_{q-1}} \left(\frac{d\mathbf{b}_q}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_{q-1}}{dt} \right) + \frac{1}{R_q} \left(\frac{d\mathbf{b}_q}{dt} \right) \quad (6.47c)$$

Cauer 型の等価回路は，前章の 5.3 節で Cauer 型回路構造により，非線形性を導入できることを示した．そして，その有効性も前章で示している．そこで，圧粉磁心の非線形性もこの手法を利用する．これより， L_1 が主磁束，主磁界に対するインダクタンスに対応しているので，本均質化においても第 1 素子の L_1 に対してのみ非線形性を導入する．これよ

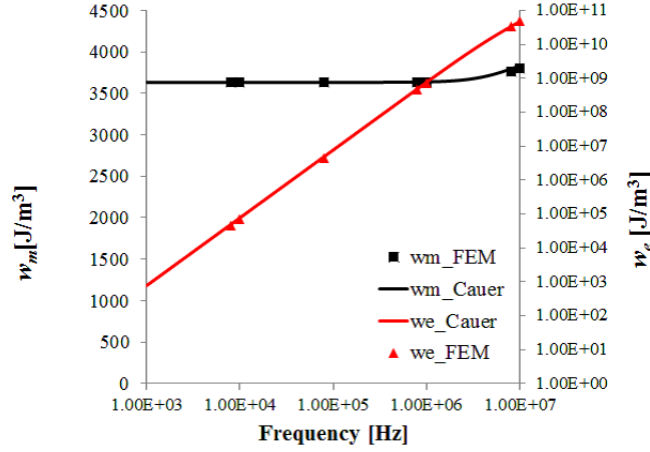


図 6.21: ユニットセル解析モデル

り，回路方程式は，

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_1(\mathbf{b}_1) + \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\mathbf{b}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \right) \quad (6.48a)$$

$$0 = \frac{\mathbf{b}_2}{L_2} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\mathbf{b}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{d\mathbf{b}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_3}{dt} \right) \quad (6.48b)$$

⋮

$$0 = \frac{\mathbf{b}_q}{L_q} + \frac{1}{R_{q-1}} \left(\frac{d\mathbf{b}_q}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_{q-1}}{dt} \right) + \frac{1}{R_q} \left(\frac{d\mathbf{b}_q}{dt} \right) \quad (6.48c)$$

となる．ここで， $\mathbf{h}_1(\mathbf{b}_1)$ は非線形特性を $\mathbf{b}_1$ に対する $\mathbf{h}_1$ の応答であり，非線形性を有している．

6.3.2 ユニットセル解析による精度検証

本手法の有効性，精度検証のため，図 6.21 に示すユニットセルの解析を行い，本手法とフルモデルの FEM 解析との比較を行う．従来の有限要素解析においては，図 6.21 に示すような境界条件を与え，一様な交番磁界をこの磁性体に与えたときの解析を行う．一方で，提案手法では (6.48) 式を解く．しかし，(6.48) 式は磁性球を仮定して導出された回路である．磁性球が敷き詰められているモデルの充填率は最大でも 0.5 である．しかし，実際の圧粉磁心の充填率は 0.5 以上である．そこで，本手法では図 6.21 のようなモデルに対して適用する場合には，磁性球の体積と立方体の体積を等しくなるように磁性球の半径を設定し，充填率を実際の充填率としてマクロ複素実効透磁率を算出する．今回のモデルでは， $a = 6.204 \mu\text{m}$, $\eta = 0.95$ と設定した．

まず，線形により本手法の有効性を確認する．磁性体の透磁率，導電率は $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$, $\mu = 1000 \mu_0 \text{ H/m}$ とする．このときの磁気エネルギー $w_m [\text{J/m}^3]$ ，ジュール損 $w_e [\text{J/m}^3]$ を計算

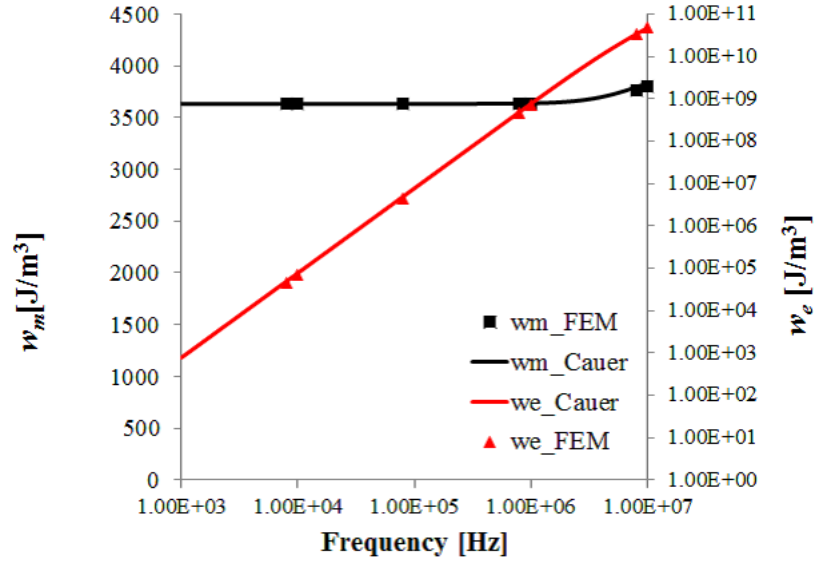


図 6.22: 磁気エネルギー，ジュール損の周波数特性

した．Cauer 型の等価回路においては，以下の式で計算を行った．

$$w_m = \text{Re}[\dot{w}], \quad w_e = 2\omega \text{Im}[\dot{w}], \quad \dot{w} = \frac{1}{4}b_1 H \quad (6.49)$$

磁束密度 1T 与えた時の磁気エネルギー，ジュール損の周波数特性を図 6.22 に示す．図 6.22 より，有限要素解析と Cauer 型の等価回路解析で，周波数特性が一致していることが確認できる．これより，線形問題において本手法の有効性を確認できた．

つぎに，磁性体に対して非線形性を付与する．磁性体の BH 特性は 50A400 を仮定する．また，このとき (6.48) 式中の $h_1(b_1)$ はユニットセルの静磁場解析により，得ることができる． B を 0T から，2.5T まで変化させて得たユニットセルの BH 特性を図 6.23 に示す．オリジナルの BH カーブと比べて，初期の透磁率が小さくなっているのが確認できる．

この BH 特性を用いて時間領域の非線形解析を行った．入力磁界は， $b_1 = \sum_{j=1}^4 2/(2n-1)\sin(2(j-1)\omega t)$ とする．ここで， $\omega = 2\pi \times 10^6 \text{rad/sec.}$ である．比較のために， L_1 に対して非線形性を導入していない Cauer 回路においても解析を行った．その解析結果を図 6.24 に示す．図 6.24 より，非線形特性を考慮した Cauer 型の等価回路による解析と有限要素解析における結果がほぼ一致していることが確認できる．一方で，線形の Cauer 型の等価回路では磁気飽和の影響を考慮できていないため，一致していないことが確認できる．これらの結果より，本手法の有効性を示すことができた．

6.3.3 有限要素方程式との連成

ユニットセルにおいて本手法の有効性を示すことができた．本項では，インダクタ等の圧粉磁心を用いている電磁機器の特性解析のために，本手法を有限要素解析へ導入してい

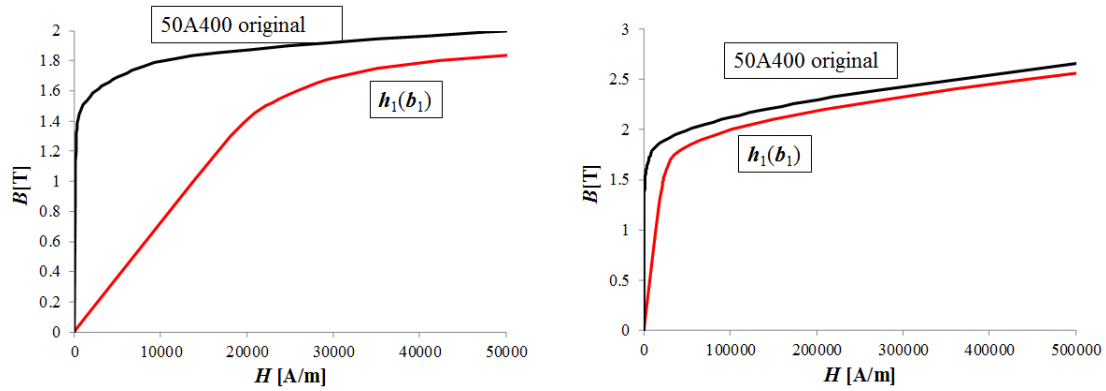


図 6.23: BH 特性

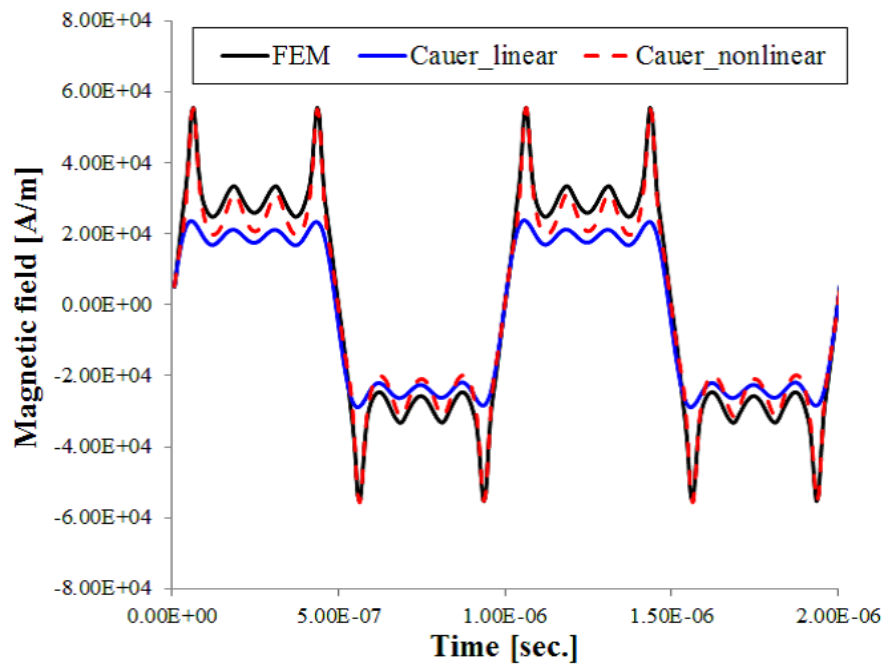


図 6.24: ユニットセル内の磁場の比較

く、圧粉磁心以外に渦電流が流れない系を考える。

$$\sum_j A_j \int_{\Omega/\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega + \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \langle \nu(s) \rangle \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (6.50)$$

これより、圧粉磁心コアにおいては均質化を適用するため、その領域において $\langle \nu \rangle$ を定義している。これより、 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の関係式から、有限要素方程式は、以下のように変換できる。

$$\sum_j A_j \int_{\Omega/\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega + \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{H} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (6.51)$$

左辺第2項の $\mathbf{H}$ は均質化領域の $\mathbf{H}$ であり、この $\mathbf{H}$ と Cauer 型の等価回路を連成する。(6.48) 式の第1式を (6.51) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_j A_j \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \nu \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega + \sum_j A_j \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \frac{1}{L_1} \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega \\ + s \sum_j A_j \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \frac{1}{R_1} \text{rot} \mathbf{N}_j d\Omega - s \sum_k b_{2k} \int_{\Omega_h} \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \frac{1}{R_1} \mathbf{i}_k d\Omega = i \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (6.52)$$

となる。ここで、 $\mathbf{b}_2$ は、

$$\mathbf{b}_2 = b_{2x} \mathbf{i}_x + b_{2y} \mathbf{i}_y + b_{2z} \mathbf{i}_z \quad (6.53)$$

と離散化している。 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ はそれぞれの方向の単位ベクトルである。(6.48) 式のほかの磁束密度 $\mathbf{b}_j$ も (6.53) 式のように離散化して、(6.52) 式と連立して解くことで、時間領域有限要素解析を実現できる。しかし、この Cauer 回路との連成解析は、Cauer 型の等価回路を一つ一つを要素内に設定していることと等価である。(図 6.25) これにより、周波数領域の均質解析と比較して非常に未知数が多くなってしまう。周波数領域の均質化解析では、未知数は辺の数だけであるが、時間領域の均質化解析では、辺の数 + $3 \times (\text{Cauer 回路の段数} - 1) \times \text{圧粉磁心コアの要素数}$ となる。

6.3.4 インダクタ解析

本手法を用いて、図 6.26 に示す圧粉磁心コアを用いたインダクタの解析を行う。圧粉磁心コアのアップ磁心特性は、6.3.2 項で解析した圧粉磁心を用いる。解析では、電流源解析とし駆動周波数は 1MHz とする。本解析ではこのインダクタは四面体で要素分割を行い、42,484 の要素数である。この中で、圧粉磁心コア内は 11649 で要素分割されており、最終的な未知数は 194,148 となった。

15 ステップ目における磁束密度分布を図 6.27 に示す。 L_1 に対して、非線形性を付与した問題、付与していないもので解析を行った。図 6.27 より、非線形性を付与している問題は磁気飽和が見られているが、非線形性を付与していない解析では、非線形性が見られていない。これより、本手法の有効性を確認できる。

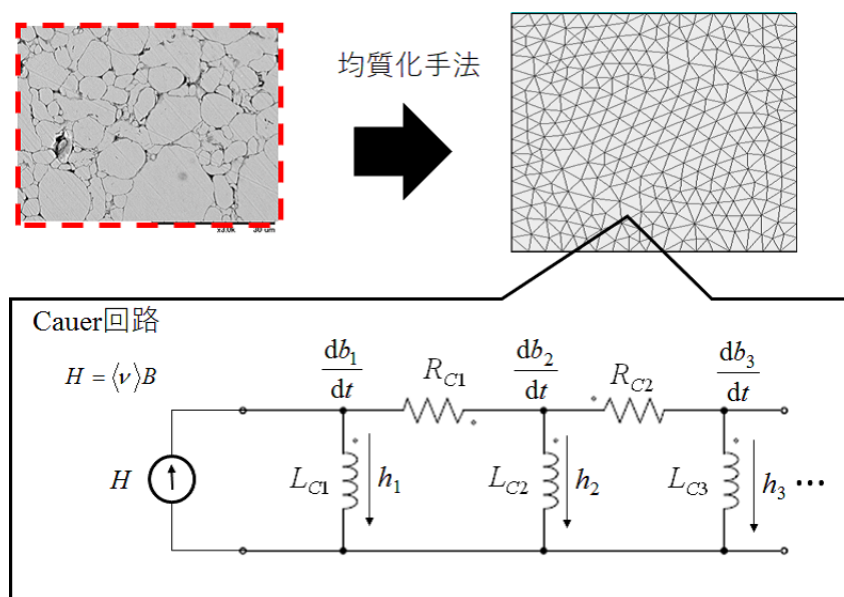


図 6.25: 時間領域均質化解析の概念図

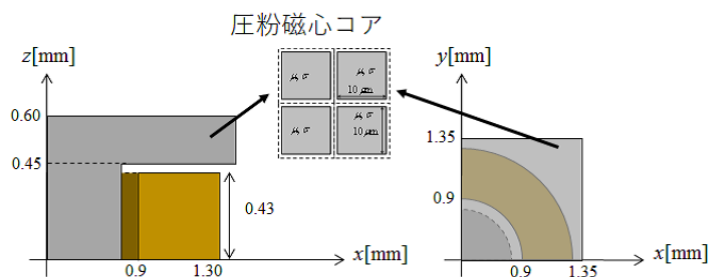
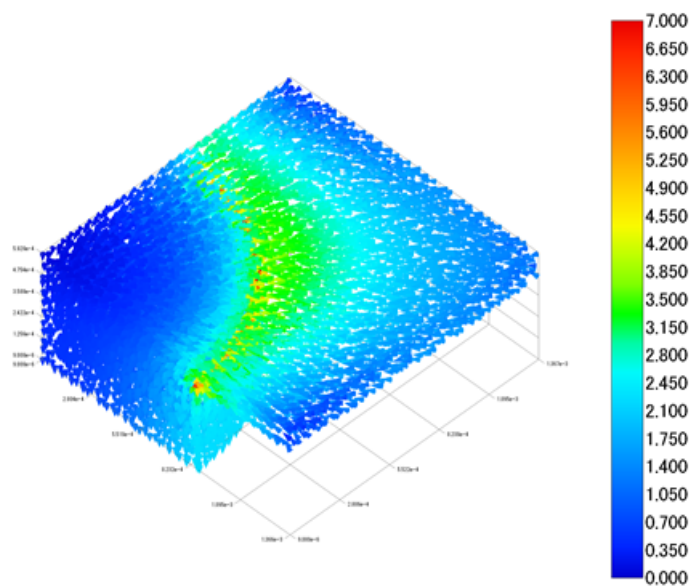


図 6.26: 圧粉磁心を用いたインダクタ

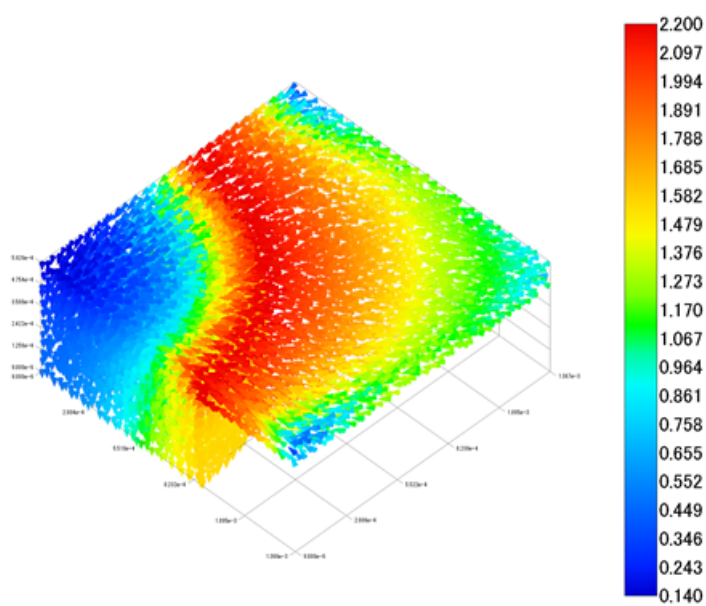
最後にジュール損の比較を行う．ジュール損は，以下の式より計算を行う．

$$w_e = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \left(\sum_{j=1}^5 R_j (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{j+1}) \cdot \frac{d(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{j+1})}{dt} \right) dV \quad (6.54)$$

V_c は SMC コアの体積である．解析結果を図 6.28 に示す．図 6.28 より，線形の場合外部電流に対して 2 乗で大きくなっているのに対して，非線形は磁気飽和の影響により，外部電流が 50A を超えたあたりから，線形となっていることが確認できる．



(a) 線形



(b) 非線形

図 6.27: 磁束密度の比較

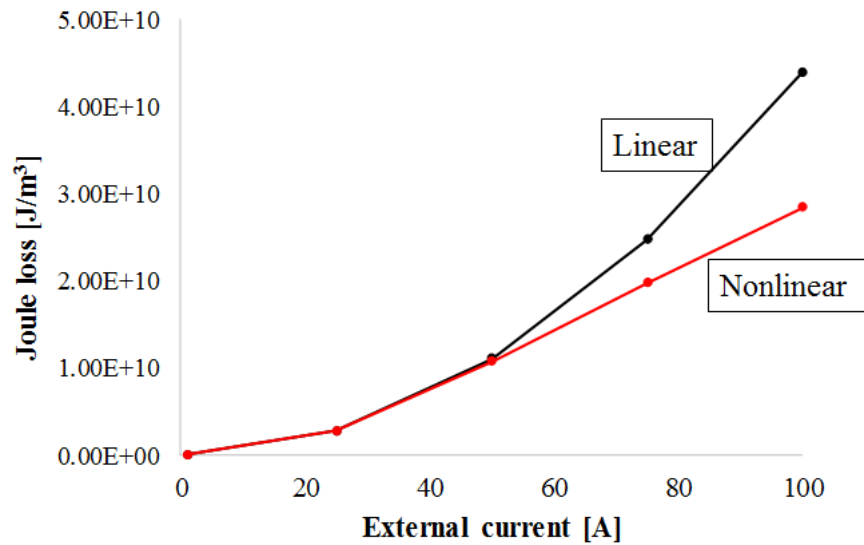


図 6.28: 渦電流損の比較

6.4 6章のまとめ

本章では，マルチターンコイルと圧粉磁心の特性評価を目的として，均質化手法を提案した．

1. マルチターンコイル

(a) 角型，楕円型のような任意断面形状における均質化手法の開発

PVL をベースとしたモデル縮約法と有限要素解析を用いて，任意形状の複素実効透磁率を導出する手法を提案した．本手法を角型，楕円型の 200 回巻マルチターンコイルに適用を行い，本手法の有効性を確認した．

(b) 時間領域均質化手法の開発

従来の手法では直接の時間領域への適用が難しかったが，ベッセル関数の漸化式，RC の利用により，非常に高速な均質化時間領域解析手法を提案した，本手法をテストモデルに適用を行い，本手法の有効性を確認した．

2. 圧粉磁心

(a) 圧粉磁心の非線形特性を考慮した時間領域均質化手法の開発

マルチターンコイルの時間領域解析同様，直接時間領域への適用が難しかったが，Cauer 型の等価回路を利用することで，非線形も考慮した時間領域解析手法を提案した．本手法をユニットセルモデルに適用を行い，従来の有限要素解析との比較を行った．また，インダクタモデルにも適用を行い，その有効性を確認した．

第7章 総括

本研究では、電磁機器、電磁素子の設計・開発の高効率化・高度化を目的として、有限要素法とモデル縮約法に基づく数理モデルの構築に関して以下の3つのに対して検討を行った。

7.1 非線形渦電流場の時間領域有限要素解析

有限要素法を用いて、非定常解析を行う場合3重ループに陥ってしまうため、非常に計算時間必要となっていた。そのため、これらの高速化のためにモデル縮約法の適用が近年では盛んにおこなわれていた。しかし、解析精度は通常有限要素法の解と同等の解を得ることができるが、計算時間が非常に悪化してしまう部分領域モデル縮約法であったり、その逆で計算時間を大幅に削減することができるが、解析精度が悪化してしまう Discrete Empirical Interpolation 法が提案されていた。

そこで、著者らは、これらの問題点を解決するためにこれら2手法を組み合わせた新たなモデル縮約法を開発した。この手法では非線形性の強い領域と弱い領域に分割する。そして、この非線形性の弱い領域はほぼ線形特性を持っているので、線形近似を行う。また、強い領域と弱い領域は時々刻々と変化するため、事前に判断することは難しい。そこで、本研究では、1ステップ前の解から自動的に非線形性の強い領域、弱い領域を決定する手法を提案した。本手法を3つのモデルに適用を行い、全ての問題において解析精度を悪化させずに、計算時間を短縮させることを実現した。

7.2 電磁機器の等価回路生成法

5章では、電磁機器の等価回路生成に関して検討を行った。従来の電磁機器の等価回路は、広い周波数帯の特性表現や非線形性の考慮、渦電流損、ヒステリシス損の考慮を行うことができなかった。そこで、本研究では有限要素法とモデル縮約法を用いた等価回路生成手法を提案した。本手法では、まず電磁機器のインピーダンスやアドミタンスをモデル縮約法を用いて、有理関数化する。その後、その有理関数に対して部分分数展開または連分数展開を行う。この式展開により、最終的に Foster 回路や Cauer 回路を生成することができる。Foster 回路や Cauer 回路は広い周波数特性を表現できる。また、Cauer 型の等価回路の物理的な意味により、非線形特性を導入することも容易である。これにより、広い周波数特性、非線形性と考慮した等価回路生成を行うことができた。

5章では、まず本手法の有効性を確認するために、解析解より Foster, Cauer 型等価回路が導出可能な電磁鋼板の等価回路と比較を行った。モデル縮約法により得られた等価回路は、解析解により得られた等価回路と同等の性能有しており、さらに素子値が一致する

ことも示した。その後、実際に解析的に導出が難しいインダクタや誘導加熱装置に対して本手法を適用し、本手法の有効性を確認することができた。

7.3 均質化手法を用いたマルチスケール問題の有限要素解析

6章ではマルチターンコイルや圧粉磁心の特性解析に有効な均質化手法を検討した。近年の駆動周波数の上昇により、マルチターンコイルや圧粉磁心の微細構造を考慮した解析が必要となってきた。このような微細構造を考慮した解析には、均質化手法が有効であることが知られており、盛んに研究されている。著者らが用いている均質化手法は、この微細構造と等価な巨視的な透磁率を算出する。その後、その透磁率を均質化領域に配置し、解析を行うことで、効率よく微細構造を考慮した解析を行うことができる。しかし、従来の手法では時間領域解析や非線形性の考慮、任意形状における巨視的な透磁率の導出が難しかった。これより、6章ではこれらの従来手法の問題点を解決するための手法を提案した。

まず、マルチターンコイルの断面形状が任意形状においても複素実効透磁率を導出できる手法を提案した。本手法により、楕円型や角型の複素実効透磁率を導出することを実現した。この手法を均質化有限要素解析に適用し、従来の有限要素解析と比較を行い、本手法の有効性を確認することができた。

つぎに、マルチターンコイルの均質化時間領域解析手法を提案した。本手法はマクロ複素実効透磁率を有理関数で表現し、その後部分分数展開を行い、逆ラプラス変換を容易に行える形へと変換した。しかし、この手法では畳み込み積分が現れ、時間ステップの発展とともに計算時間が大幅に増大してしまう。そこで、本手法ではRC法を導入し、畳み込み積分を帰納的に計算する手法を考案した。これにより、時間ステップとともに増大していた手法が、線形増加となり、従来の有限要素法とほぼ同精度で100倍近い高速化を実現した。

最後に、圧粉磁心を用いた電磁機器の時間領域解析手法を提案した。圧粉磁心は非線形特性を有しているため、マルチターンコイル同様の手法をもちいることが難しい。そこで、マクロ複素実効透磁率の有理関数から等価回路生成時に用いたCauer回路を生成する。Cauer回路は物理的な意味を持っているので、非線形特性を付与できる。そこで、このマクロ複素実効透磁率のCauer回路と有限要素方程式を連成することで、時間領域非線形均質化有限要素解析を実現することができる。本手法の有効性を確認するために、まずユニットセルにおいて解析を行い、従来の有限要素解析と比較を行った。これより、非線形性を有していても従来の有限要素解析と同等の解析を得られた。最後に、圧粉磁心コアを持つインダクタに対して本手法の適用した。本手法を用いることで、磁性体コア中に磁気飽和が見られ、さらに、渦電流損が電流の増加とともに線形特性となっていくことも確認できた。

7.4 今後の展望

本論文では、本章も含め7章にわたりモデル縮約法を用いた電磁界解析の数値モデルの構築に関して述べてきた。本論文で提案している手法は静止器のみへの適用であった。近

年では、回転機や振動系に対するモデル縮約法も様々提案されている [66]-[69] が、非線形性の強い領域においてはまだまだ解析精度が著しく悪い。また、リラクタンスネットワーク等の磁気回路をベースとした等価回路モデルが提案されているが、これらの手法は電磁鋼板の渦電流損を考慮できていない。そのため、電磁鋼板の渦電流を考慮したモータの等価回路モデルというのも今後の課題である。

本論文で提案しているモデルに対してはまだヒステリシス特性を考慮できていない。松尾、進藤らが電磁鋼板の Cauer 型の等価回路を用いてヒステリシス特性の評価方法を提案している [52][53]。5 章で提案しているモデル縮約法を用いた等価回路生成法においても、同様のアプローチでヒステリシス特性も考慮可能と考えている。これが実現できれば、任意形状において等価回路を生成でき、さらに渦電流、ヒステリシス損を考慮できるため、非常に有効な手段であると考えられる。

また、高周波機器の等価回路生成も行っていく必要がある。高周波機器の周波数特性にはキャパシタンス成分も含まれるため、5 章のようなアプローチでは生成することは困難である。また、高周波機器の等価回路生成法はいくつも提案されている [70]-[71] が、回路素子値が一意とならないものがほとんどである。例えば、Vector fitting 法 [70] と呼ばれる手法は、初期値として設定する極の値により、最終的に得られる回路素子値が変化する。今後は、有限要素解析とモデル縮約法をベースとした回路素子値が一意と定まり、物理的に意味のある高周波機器の等価回路モデルというのも今後の課題と考えられる。

6 章で提案した均質化手法は Litz コイルのようなねじっているようなモデルに対しては適用できない。積分方程式を用いたねじりを考慮した手法は提案されている [72] が、有限要素法ベースではまだ提案されていない。ねじりの効果を導入した均質化手法の開発が望まれる。また、圧粉磁心の均質化解析も実際の圧粉磁心を用いたインダクタと比較を行ったわけではない。そのため、実際の「もの」に対して有効なのかどうかの確認を行っていく必要がある。また、実際の圧粉磁心磁性粒子のサイズにばらつきがある。本手法ではこのばらつきに関しても考慮できていない。実際の圧粉磁心を用いた電磁素子との比較をすることで数理モデル構築していく必要があると考えられる。

参考文献

- [1] K. Nakamura, H. Yoshida and O. Ichinokura, "Electromagnetic and Thermal Coupled Analysis of Ferrite Orthogonal-Core Based on Three-Dimensional Reluctance and Thermal-Reluctance Network Model," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 4, pp.2050-2052, 2004.
- [2] 中村 健二, 一ノ倉 理, : リラクタンスネットワーク解析に基づく電磁機器動特性解析, 日本応用磁気学会誌, vol. 28, no. 11, pp. 1089-1095, 2004.
- [3] G. Marrocco, "The Art of UHF RFID Antenna Design : Impedance-Matching and Size-Reduction Techniques," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 50, no. 1, pp. 6679, Feb. 2008.
- [4] K. Watanabe , "Optimization of inductors using evolutionary algorithms and its experimental validation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3393-3396, 2010.
- [5] H. Makimura, Y. Watanabe, K. Watanabe, "Evolutional design of small antennas for passive UHF-band RFID," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 1510-1513, 2011.
- [6] Y. Sato, F. Campelo, H. Igarashi, "Meander Line Antenna Design Using an Adaptive Genetic Algorithm," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 1510-1513, 2011.
- [7] Y. Okamoto, Y. Yusuke, S. Wakao, S. Sato, "Topology design method of flux barrier in IPM motor by means of genetic algorithm implemented by multistep procedure" *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 46, no. 2, pp. 381-387, 2014.
- [8] Y. Hidaka, T. Sato, H. Igarashi, "Topology Optimization Method Based on OnOff Method and Level Set Approach," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 617-620, 2014.
- [9] T. Sato, K. Watanabe, H. Igarashi, "Multimaterial Topology Optimization of Electric Machines Based on Normalized Gaussian Network," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, Art. 7202604, 2015.
- [10] T. Mori, R. Murakami, Y. Sato, F. Campelo and H. Igarashi, "Shape Optimization of Wideband Antennas for Microwave Energy Harvesters Using FDTD," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, Art. 8000804, 2015.

- [11] W. H. Schilders, H. A. Vorst, J. Rommes, "Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications: 13 (Mathematics in Industry)," Springer, 2008
- [12] P. Feldmann and R. A. Freund, "Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process," *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 14, no. 5 pp. 639-649, 1995.
- [13] R. W. Freund, P. Feldmann, "Reduced-order modeling of large linear passive multi-terminal circuits using matrix-pad approximation" *Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe*, pp. 530-537, 1998.
- [14] A. Odabasioglu, M. Celik, and L. T. Pileggi, "PRIMA: Passive Reduced Order Interconnect Macromodeling Algorithm," *IEEE Trans. ComputerAided Design*, vol. 17, pp. 645-654, 1998.
- [15] Celik M, Cangellaris AC., "Simulation of Dispersive Multiconductor Transmission Lines by Pade Approximation via the Lanczos process," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 12, pp. 2525-2535, 1996.
- [16] A. C. Cangellaris, M. Celik, S. Pasha, and L. Zhao,, "Electromagnetic Model Order Reduction for System-Level Modeling," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, pp. 840-850, 1999.
- [17] K. Willcox and J. Peraire, "Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition," *AIAA J.*, vol. 40, no. 11, pp. 2323-2330, 2002.
- [18] W. Wang et al., "Fast Frequency Sweep of FEM Models via the Balanced Truncation Proper Orthogonal Decomposition," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 11, pp. 4142-4154, 2011.
- [19] D. Schmidthausler and M. Clemens, "Low-Order Electroquasistatic Field Simulations Based on Proper Orthogonal Decomposition," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 567-570, 2012.
- [20] D. Schmidthausler S. Schops and M. Clemens, "Reduction of Linear Subdomain for Non-Linear Electro-Quasistatic Field Simulation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1669-1672, 2012.
- [21] Y. Sato and H. Igarashi, "Model Reduction Based on the Method of Snapshots for Eddy Current Problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1697-1700, 2013.
- [22] T. Henneron and S. Clnet, "Model Order Reduction of Nonlinear Magnetostatic Problems Based on POD and DEI Methods," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, Feb., 2014.

- [23] Y. Sato, F. Campelo, H. Igarashi, "Fast Shape Optimization of Antennas Using Model Order Reduction," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51. no. 3, Art. 7204304, 2015.
- [24] T. Henneron and S. Clnet, "Model-Order Reduction of Multi-Input Non-Linear Systems Based on POD and DEI Methods," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, Mar., 2015.
- [25] Szabo, Barna Aladar, and Ivo Babuska, "Finite element analysis", Wiley. com, 1991.
- [26] G. ダット, G. トウゾー: 「有限要素法全解」, パーソナルメディア株式会社
- [27] 本間利久, 五十嵐一, 川口秀樹: 「数値電磁力学」, 森北出版, 2002.
- [28] 高橋 則雄: 「三次元有限要素法」, 電気学会, 2006.
- [29] 高橋 則雄: 「磁気工学の有限要素法」, 朝倉書店, 2013.
- [30] H. Igarashi and T. Honma, "On the Property of the Curl-Curl matrix in Finite Element Analysis with Edge Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no.5, pp.3129-3132, 2001.
- [31] H. Igarashi and T. Honma, "On the Convergence of ICCG Applied to Finite Element Equation for Quasi-Static Fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp.565-568, 2002.
- [32] H. Igarashi and T. Honma, "Convergence of Preconditioned Conjugate Gradient Method Applied to Driven Microwave Problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 3, pp.1705-1708, 2003.
- [33] H. Igarashi, N.Yamamoto, "Effect of preconditioning in edge-based finite-element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, pp.942-945, 2008.
- [34] A. Bossavit, "Computational Electromagnetism: variational formulations, complementarity, edge elements," Academic Press, 1998.
- [35] 五十嵐 一, 亀有 昭久, 加川 幸雄, 西口 磯春, A. ボサビ: 「新しい計算電磁気学」, 培風館, 2003.
- [36] Senior, T. B. A., "Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces," *Applied Scientific Research*, Section B 8.1, pp.418-436, 1960.
- [37] Hoppe, Daniel J., and Yahya Rahmat-Samii, "Impedance boundary conditions in electromagnetics," CRC Press, 1995.
- [38] 中野智仁, 河瀬順洋, 山口忠, 鵜飼 真吾, 中村雅憲, 西川憲明, 上原 均: 「地球シミュレータによる回転機の磁界解析」, 静止器回転機合同研究会, SA-09-026, RM-09-026, 2009.

- [39] 澤田 正志, 進藤 裕司, 田宮 智彰, 河瀬 順洋, 山口 忠, 中野 智仁, 片桐 弘雄, 石川 雅武 : 「並列計算システムを用いた三次元有限要素法によるリアクトルの銅損解析」, 静止器回転機合同研究会, SA-12-090, RM-12-105, 2012.
- [40] 河瀬 順洋, 山口 忠, 加藤 大地, 塚田 彰太, 井田 浩一, 伊藤 一洋, 福井 義成, 西川 憲明 : 「三次元有限要素法による磁性体基板を配置した撚り線コイルの特性解析」, 静止器回転機合同研究会, SA-15-041, RM-15-041, 2015.
- [41] Pillage, Lawrence T., and Ronald A. Rohrer, "Asymptotic waveform evaluation for timing analysis." *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* vol. 9, no. 4, 352-366, 1990.
- [42] Chiprout, Eli, and Michel S. Nakhla, "Asymptotic Waveform Evaluation," Springer, 1994.
- [43] C. Lanczos, "An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators," *J. Res. Nat. Bur. Standards*, vol. 45, pp. 255-282, 1950.
- [44] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen, "Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 32, no. 5, pp. 2737-2764, 2010.
- [45] B. Preherdtorfer, D. Butnaru, K. Willcox and H. Bungartz, "Localized Discrete Empirical Interpolation Method," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 36, no. 1, pp. A168-A192, 2014.
- [46] Y. Takahashi, T. Tokumasu, M. Fujita, S. Wakao, T. Iwashita, and M. Kanazawa, "Improvement of convergence characteristic in nonlinear transient eddy-current analyses using the error correction of time integration based on the time-periodic FEM and the EEC method," *IEEJ Trans. PE*, vol. 129, no. 6, pp. 791-798, 2009.
- [47] Y. Takahashi, T. Tokumasu, M. Fujita, A. Kameari, H. Kaimori, M. Fujita, T. Iwashita and S. Wakao, "Convergence Acceleration of Time-Periodic Electromagnetic Field Analysis by the Singularity Decomposition-Explicit Error Correction Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46 no. 8, pp. 2947-2950, 2010.
- [48] H. Igarashi, Y. Watanabe and Y. Ito, "Why Error Correction Methods Realize Fast Computations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 415-418, 2012.
- [49] Y. Watanabe, H. Igarashi, "Accelerated FDTD Analysis of Antennas Loaded by Electric Circuits," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 60, no. 2, pp. 958-963, 2012.
- [50] E. J. Tarasiewicz, A. S. Morched, A. Narang, E. P. Dick, "Frequency Dependent Eddy Current Models for Nonlinear Iron Cores," *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 8 no. 2, pp. 588-597, May, 1993.

- [51] Y. Shindo, O. Noro, “Simple Circuit Simulation Models for Eddy Current in Magnetic Sheets and Wires,” *IEEJ Trans. Fundamentals and Materials*, vol. 134, no. 4, pp. 173-181, 2014.
- [52] T. Miyazaki et. al., “Equivalent Circuit Modeling of Dynamic Hysteretic Silicon Steel under Pulse Width Modulation Excitation,” *Journal of Applied Physics*, 117, 17D110, 2015.
- [53] Y. Shindo, T. Miyazaki, T. Matsuo, “Cauer Circuit Representation of the Homogenized Eddy-Current Field Based on the Legendre Expansion for a Magnetic Sheet,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, Art. 6300504, 2015.
- [54] W. Cauer, “Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit,” *Archiv für Elektrotechnik*, vol. XVII, 1926.
- [55] F. Ollendorff, “Magnetstatik der Massekerne,” *Arch. f. Electrotechnik.*, vol. 25, pp. 436-447, 1931.
- [56] A. Podoltsev and B. Lebedev, “Analysis of effective resistance and eddy current losses in multiturn winding of high-frequency magnetic components,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 1, 2003, pp. 539548.
- [57] J. Gyselinck, P. Dular, “A Time-Domain Homogenization Technique for Laminated Iron Cores in 3-D Finite-Element Models,” *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 856-859, Mar., 2004.
- [58] J. Gyselinck, P. Dular, “Frequency-Domain Homogenization of Bundles of Wires in 2-D Magnetodynamic FE Calculations,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 5, pp. 1416-1419, May, 2005.
- [59] H. Waki, H. Igarashi, T. Honma, “Estimation of Effective Permeability of Magnetic Composite Materials Magnetics,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, no. 5, pp. 1520-1523, 2005.
- [60] H. Waki, H. Igarashi, T. Honma, “Estimation of nonlinear effective permeability of magnetic materials with fine structure,” *Physica B*, vol. 372, Issue 1-2, 383-387, 2006.
- [61] Y. Ito, H. Igarashi, “Computation of Macroscopic Electromagnetic Properties of Soft Magnetic Composite,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1953-1956, 2013.
- [62] 五十嵐一, 伊藤泰久, 佐藤孝洋, 河野健二, 鈴木理明: 「渦電流を考慮した圧粉磁芯のマクロ磁気特性」, 電気学会静止器・回転機合同研究会資料, SA-14-075, RM-14-091.
- [63] T. Sato, S. Aya, H. Igarashi, M. Suzuki, Y. Iwasaki, K. Kawano, “Loss Computation of Soft Magnetic Composite Inductors Based on Interpolated Scalar Magnetic

- Property,” *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 51, no. 3, March, Art. 8001704, 2015.
- [64] 五十嵐一, 佐藤佑樹, 伊藤泰久:「渦電流を考慮したマクロ磁気特性—細線の解析」, 電気学会静止器合同研究会, SA15-032, RM-15-024.
- [65] H. Igarashi, “Semi-Analytical Approach for Finite Element Analysis of Multiturn Coil Considering Skin and Proximity Effects”, *IEEE Trans. Magn.*, DOI: 10.1109/TMAG.2016.2601066, 2016.
- [66] T. Henneron, S Clénet, “Model order reduction applied to the numerical study of electrical motor based on POD method taking into account rotation movement.” *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* vol. 27, no. 3, pp. 485-494, 2014.
- [67] T. Sato, Y. Sato, H. Igarashi, “Model Order Reduction for Moving Objects: Fast Simulation of Vibration Energy Harvesters,” *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 34 Iss: 5, 2015.
- [68] T. Shimotani, Y. Sato, H. Igarashi, “Equivalent-Circuit Generation from Finite Element Solution Using Proper Orthogonal Decomposition,” *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 52, no. 3, Art. 7206804, 2016.
- [69] 下谷 俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一:「ブロックモデル縮約法によるモータ解析の高速化」, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-15-099, RM-15-137, 高知, 9月, 2015年.
- [70] B. Gustavsen, A. Semlyen, “Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting,” *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1052-1061, 1999.
- [71] R. Neumayer, et al, “On the synthesis of equivalent-circuit models for multiports characterized by frequency-dependent parameters.” *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 50 no. 12, pp. 2789-2796, 2002.
- [72] S. Hiruma, H. Igarashi, “Fast Three-Dimensional Analysis of Eddy Currents in Litz Wire Using Integral Equation”, *IEEE Transaction on Magnetics*, to be published in 2017.
- [73] W. C. Chew and W. H. Weedon, “A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates,” *IEEE Trans. Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 7, pp. 599-604, 1994.
- [74] J.-P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *J. Comput. Phys.*, vol. 114, pp. 195-200, 1994.

-
- [75] Z. S. Sacks et al. "A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition," *IEEE trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, pp. 1460-1463, 1995.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、多くの方々にお世話になりました。ここに深く感謝の意を表します。

本論文をまとめるにあたり、終止暖かい激励とご指導、ご鞭撻をいただいた北海道大学大学院情報科学研究科 五十嵐一教授に心より深く感謝を申し上げます。五十嵐教授には学部3年の研究室配属から、電磁界解析の基礎、モデル縮約法、均質化の研究に関して多くのご指導いただきました。また、研究の進め方、考え方、まとめ方等、研究の基礎から懇切丁寧にご教授していただきました。さらには、論文を書く際の注意や日本語論文だけでなく、英語論文の書き方、学会発表を行う際の重要にすべきこと等、非常に多角面からご教授いただきました。こころより、感謝いたします。

学位論文審査において、貴重なご指導とご助言を頂いた北海道大学大学院情報科学研究科 小笠原悟司教授、北裕幸教授に心より感謝申し上げます。先生方のご助言により、本論文の完成度が高まりました。本当にありがとうございました。

また、北海道大学大学院情報科学研究科 野口准教授には研究に関してだけでなく、計算機環境の整備もご指導いただきました。また、私生活に関しても様々なことをご教授いただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

2011年度まで、北海道大学大学院情報科学研究科助教、現室蘭工業大学大学院工学研究科 渡邊浩太准教授には本研究に対するご指導いただきました。ここに謝意を示します。

また、御退職なさるまで研究環境の整備にご尽力いただきました嘱託職員の阿倍正雄氏、研究室の雑務を肩代わりしていただいた事務補佐員の斉藤尚代女氏、技術職員の今井適氏に厚く御礼申し上げます。

ドイツの Bergische Universitt Wuppertal の Chair of Electromagnetic Theory の Prof. Markus Clemens には博士1年次に3か月間、海外インターンシップで受け入れていただきました。モデル縮約法の研究だけでなく、電磁界解析全般に関してご指導いただきました。また、私の英語能力が乏しい中最後まで、非常に熱い議論させていただきました。ここに感謝の意を示します。また、Bergische Universitt Wuppertal の Chair of Electromagnetic Theory の研究室のメンバーにもドイツの様々なことをご教授いただきました。心より感謝いたします。

また、学会参加に伴い、様々な大学の先生方に非常にお世話になりました。特に、山形大学の神谷淳教授、東京工科大学の生野壮一郎教授には、研究に関してご助言をいただいただけでなく、様々なことをご教授いただきました。ここに心より感謝いたします。

本研究の遂行にあたり、Texas Instrument Japan の河野健二氏、太陽誘電株式会社の佐藤奈津子氏、寺内直哉氏には、インダクタの技術背景やインダクタの解析法や設計法、製造過程やインダクタのデータ提供等様々な面でご協力いただきました。心より感謝いたします。

明るい雰囲気の下で研究させていただき、数々のご助言、ご協力いただき、私を支えてくださいました研究室の後輩、同輩、先輩の皆様にお礼申し上げます。特に、東芝株式会社の佐藤孝洋氏、三菱電機株式会社の日高勇氣氏には研究に関して、様々なご助言、ご指導いただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

最後になりましたが、博士課程に進学する機会を与えてくださり、ありとあらゆる場面で私を温かく見守り続けてくれた両親に深く深く感謝いたします。

2017 年 3 月

佐藤 佑樹

研究業績

論文

1. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Model Reduction of Three-Dimensional Eddy Current Problems Based on the Method of Snapshots," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 49, no. 5, pp. 1697-1700, 2013.
2. Yuki Sato, Felipe Campelo, Hajime Igarashi, "Meander Line Antenna Design Using an Adaptive Genetic Algorithm," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 49, no. 5, pp. 1889-1892, 2013.
3. Yuta Watanabe, Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Performance of 3-D Infinite Elements for High-Frequency Electromagnetic Fields," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 49, no. 5, pp. 1673-1676, 2013.
4. 佐藤 佑樹, 五十嵐 一 "部分領域モデル縮約法を用いた電磁界解析について" 日本数理工学論文集 (JASCOME), vol. 13, no. 23-121129, pp. 109-114, Nov., 2013.
5. Ronny Teguh, Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Numerical Analysis of Electromagnetic Wave Propagation in Forest," 日本 AEM 学会誌, vol. 23, no. 1, pp. 131-136, 2015.
6. Yuki Sato, Felipe Campelo, Hajime. Igarashi, "Fast Shape Optimization of Antennas Using Model Order Reduction," IEEE Transaction on Magnetics, vol. 51, no. 3, Art. 7204304, 2015.
7. Takuya Mori, Ryo Murakami, Yuki Sato, Felipe Campelo, Hajime Igarashi, "Shape Optimization of Wideband Antennas for Microwave Energy Harvesters Using FDTD," IEEE Transaction on Magnetics, vol. 51, no. 3, Art. 8000804, 2015.
8. Takahiro Sato, Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Model Order Reduction for Moving Object: Fast Simulation of Vibration Energy Harvesters," The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering(COMPEL), vol. 34, no. 5, 2015.
9. Takuya Mori, Yuki Sato, Ricard Adriano, Hajime Igarashi, "Optimal Design of RF Energy Harvesting Devices Using Genetic Algorithm," Springer Sensing and Imaging, DOI 10.1007/s11220-015-0117-0, 2015.

10. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Generation of Equivalent Circuit from Finite Element Model Using Model Order Reduction," IEEE Transaction on Magnetics, vol. 52, no. 3, Art. 1100304, 2016.
11. Yuki Sato, Markus Clemens, Hajime Igarashi, "Adaptive Subdomain Model Order Reduction with Discrete Empirical Interpolation Method for Nonlinear Magneto-Quasi-Static Problems," IEEE Transaction on Magnetics, vol. 52, no. 3, Art. 1100204, 2016.
12. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Equivalent-Circuit Generation from Finite Element Solution Using Proper Orthogonal Decomposition," IEEE Transaction on Magnetics, vol. 52, no. 3, Art. 7206804, 2016.
13. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Takahiro Sato, Hajime Igarashi, "Fast Finite-Element Analysis of Motors Using Block Model Order Reduction," IEEE Transaction on Magnetics, vol. 52, no. 3, Art. 7207004, 2016.
14. Yuki Sato, Takuya Mori, Toshihito Shimotani, Hajime Igarashi, "Equivalent Circuit of Antennas Generated by Model Order Reduction," International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, DOI: 10.3233/JAE-162061, 2016.
15. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Direct Synthesis of Equivalent Circuits from Reduced FE Models Using Proper Orthogonal Decomposition," The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering(COMPEL), vol. 35, no. 6, pp. 2035-2044, 2016.
16. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Time-Periodic Eddy Current Analysis Using Model Order Reduction and Time-Periodic Explicit Error Correction Method," 電気学会論文誌 B, vol. 137, no. 3, 2017(掲載決定).
17. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Homogenization Method Based on Model Order Reduction for FE Analysis of Multi-turn Coils," IEEE Transaction on Magnetics, 2017(掲載決定).
18. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Time-domain Analysis of Soft Magnetic Composite Using Equivalent Circuit Obtained via Homogenization," IEEE Transaction on Magnetics, 2017(掲載決定).

講演 (国際会議)

1. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "On Effectiveness of Model Order Reduction for Computational Electromagnetism," The 15th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering Proceedings, pp.340-345, Graz, Austria, Sep., 2012.

2. Yuki Sato, Hajime Igarashi “Finite Element Analysis of Contactless Power Transmission System Using Meander Line Antennas,” JSST 2012 International Conference on Simulation Technology Proceedings, OS1-7, Hyogo, Sep. 2012.
3. Yuki Sato, Felipe Campelo, Hajime Igarashi “Meander Line Antenna Design Using an Adaptive Genetic Algorithm,” The 15th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, WP4-15, Oita, Nov., 2012.
4. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Model Order Reduction for Finite Element Analysis of Eddy Current Problems,” Proc. of International workshop on HPC Krylov Subspace method and its applications, Oita, Jan., 2013.
5. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Model Order Reduction Applied to Optimization of Electromagnetic Devices,” Proceeding of ISTET2013, 1-41, Pilsen, Czech Republic, 2013.
6. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “On Proper Orthogonal Decomposition for Wave Propagation Problems,” Proceeding of Compumag 2013, PB1-9, Budapest, Hungary, June, 2013.
7. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Optimization of Electromagnetic Devices Using Model Order Reduction Technique,” JSST 2013 International Conference on Simulation Technology Proceedings, OS13-1, Sep., Tokyo, 2013.
8. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Fast Shape Optimization of Antennas Using Model Order Reduction,” The 16th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, 284 / OD1: 2, Annecy, France, 2014.
9. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Generation of Equivalent Circuit from Finite Element Model Using Model Order Reduction Based on PVL Algorithm,” International Workshop on Information Technology, Applied Mathematics and Science, Kyoto, Japan, March, 2015.
10. Yuki Sato, Markus Clemens, Hajime Igarashi, “Adaptive Subdomain Model Order Reduction with Discrete Empirical Interpolation Method for Nonlinear Magneto-Quasi-Static Problems,” Compumag 2015, PA1-11, Montreal, Canada, June-July, 2015.
11. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Generation of Equivalent Circuit from Finite Element Model Using Model Order Reduction,” Compumag 2015, PC4-15, Montreal, Canada, June-July, 2015.
12. Yuki Sato, Hajime Igarashi, “Fast Eddy Current Analysis Using Model Order Reduction and Time-Periodic Explicit Error Correction,” ISEF2015, JP166, Valencia, Spain, September, 2015.

13. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Fast Analysis of Antenna Loaded with Electric Circuit Using Model Order Reduction," ISEM2015, 3P1-B-3, Kobe, Japan, September, 2015.
14. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Time-Domain Macromodeling of Electromagnetic Devices Using Padé Approximation via the Lanczos Processes," NOLTA2015, C3L-C-6209, Hong Kong, China, December, 2015.
15. Yuki Sato, Toshihito Shimotani, Hajime Igarashi, "Synthesis of Cauer Circuit from Finite Element Model Using Model Order Reduction," EMF2016, PC-9, Lyon, France, April, 2016.
16. Yuki Sato, Shingo Hiruma, Hajime Igarashi, "Analysis of Multi-turn Coils Using Coarse Finite Element Meshes," IGTE2016, PII-8, Graz in Austria, Sep., 2016.
17. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "On Homogenization of Multi-turn Coil and Litz Wire," MSHOM2016, Vienna in Austria, Sep., 2016.
18. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Representation of Frequency Characteristics of Soft Magnetic Composite Using Cauer-Equivalent Circuit", JSST2016, SO2, Kyoto in Japan, Oct., 2016
19. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Time-domain Analysis of Soft Magnetic Composite Using Equivalent Circuit Obtained via Homogenization", CEFC2016, MO03-1, Miami in USA, Nov., 2016.
20. Yuki Sato, Hajime Igarashi, "Homogenization Method Based on Model Order Reduction fo FE Analysis of Multi-turn Coils", CEFC2016, MP041-7, Miami in USA, Nov., 2016
21. Yuki Sato, Toshihito Shimotani, Hajime Igarashi, "Synthesis of Cauer-Equivalent Circuit Based on Model Order Reduction Considering Nonlinear magnetic Property", CEFC2016, MP061-4, Miami in USA, Nov., 2016

講演 (国内会議)

1. 佐藤 佑樹, 五十嵐 一, "準静電磁界の有限要素解析へのモデルリダクションの適用," 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-12-081, RM-12-096, pp.13-18, 北海道, 9月, 2012.
2. 佐藤 佑樹, 五十嵐 一, 3次元時間領域有限要素解析へのモデルリダクションの適用, 電気・情報関係学会北海道支部連合大会講演論集, p.008, 10月, 2012
3. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, モデル縮約法を用いた電磁機器形状最適化の高速化, 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-13-065, RM-13-079, pp. 35-40, 秋田, 9月, 2013年.

4. 佐藤 佑樹, Markus Clemens, 五十嵐一, モデル縮約法を用いた非線形準静磁場問題の高速解法, プラズマ壁相互作用に関する新規シミュレーション手法開発に関する研究会, 岐阜, 1月, 2015.
5. 佐藤 佑樹, Markus Clemens, 五十嵐一, 部分領域モデル縮約法を用いた非線形準静磁場解析の高速化, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-15-014, RM-15-006, 沖縄, 3月, 2015.
6. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, モデル縮約法と TP-EEC 法を併用した時間周期渦電流問題の高速解法, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-15-086, RM-15-124, 高知, 9月, 2015.
7. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, モデル縮約法を用いた非線形定常電磁界の高速解法, 平成 27 年度電気・情報関係学会北海道支部連合大会, OS-7, 北見, 11月, 2015.
8. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, 部分領域モデル縮約法を用いた電磁界解析について (On Sub-domain Model Order Reduction for Computational Electromagnetism), 計算数理工学論文集, vol. 13, no. 23-121129, pp 109-114, 北海道, 11月, 2013 年.
9. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, 固有直交分解法を用いた電磁界の有限要素解析, 日本機械学会, 第 26 回計算力学講演会 (CMD2013), OS5-1, 佐賀, 11月, 2013 年.
10. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, モデル縮約法を用いた等価回路生成 (その 2) -Cauer 型等価回路の生成-, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-16-018, RM-16-018, 東京, 1月, 2016.
11. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, Pade Approximation via the Lanczos Process を用いた電磁機器の非線形等価回路生成, 非線形問題の解法に関する研究会, no. 10, 岐阜, 8月, 2016 年.
12. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, 非線形性と渦電流を考慮したインダクタの Cauer 型等価回路生成, 平成 28 年度電気学会産業応用部門大会, 1-70, 群馬, 8月, 2016 年.
13. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, 均質化とモデル縮約法を用いたマルチスケール問題の時間領域有限要素解析, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-16-076, RM-16-122, 沖縄, 9月, 2016.
14. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, 圧粉磁芯の均質化解析, 第 25 回 MAGDA コンファレンス, OS-14-5, 群馬, 11月, 2016.
15. 佐藤 佑樹, 五十嵐一, 均質化法を用いた圧粉磁心の時間領域有限要素解析, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-17-011, RM-17-011, 東京, 1月, 2017.

競争的資金の獲得

1. 日本学術振興会科学研究費補助金 (特別研究員奨励費)
2015 年度 : 1,200,000 円, 2016 年度 : 1,100,000 円

研究題目：磁気特性の不確定性を考慮した電磁界解析法とロバスト設計法の開発
特別研究員（DC2）・工学，課題番号：20151550

賞罰

1. 「JSST2012 Student Presentation Award」受賞 2012 年 9 月 28 日
2. 「システム情報科学専攻 専攻長賞」受賞 2014 年 3 月 25 日
3. 「The Rita Trowbridge Prize 2015 Commendation as one of the four finalists in the category for the Best Paper presented by a young resercher」受賞 2015 年 7 月 2 日
4. 「The 2015 IEEE Sapporo Section Student Paper Contest Best Award」受賞 2016 年 2 月 15 日
5. 「電気学会優秀論文発表賞（IEEJ Excellent Presentation Award）」受賞 2016 年 3 月 31 日
6. 「CEFC2016 Best Poster Presentation Award」受賞 2016 年 11 月 16 日
7. 「JSST2016 Outstanding Presentation Award」受賞 2017 年 1 月 26 日

付 録 A Newton-Raphson 法

次式に示すような N 元の実数連立方程式を考える．

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

ここで，未知数は

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (\text{A.2})$$

と表現する． n 番目の方程式 f_n を $\mathbf{X}$ からわずかにずれた $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ の周りでテイラー展開すると

$$f_n(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = f_n(\mathbf{X}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_N} \Delta x_N + O(\Delta\mathbf{X}^2) \quad (\text{A.3})$$

となる． $n = 1, 2, \dots, N$ において， $f_n(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = 0$ になるように次式から $\Delta\mathbf{X}$ を決定する．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(\mathbf{X}) \\ -f_2(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ -f_N(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

この N 元 1 次連立方程式を解いて， $\Delta\mathbf{X}$ を求め，

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 = x_2 + \Delta x_2 \\ \vdots \\ x_N = x_N + \Delta x_N \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

として真値に近い $\mathbf{X}$ を得る．

付 録 B Perfect Matched Layer

B.1 PML の概要

PML[73]-[75] は，解析領域の境界面で反射がなく，解析領域の外側の領域において電磁波が減衰するような誘電率，透磁率，導電率を持った仮想的な媒質を設け，その媒質中では電磁波を強制的に弱くするといった層のことを指す．図 B.1 に解析領域と PML 領域の概略を示す．解析領域を PML 領域が覆うように配置を行う．これにより，境界面 S_P に入射する電磁波を 0 とすることが PML を設ける目的である．

B.2 有限要素法への導入

今節では，PML を用いた有限要素法の定式化を示す．

B.2.1 PML 領域内の平面波

PML 内における Maxwell 方程式は，以下のように表現することができる．

$$\nabla_s \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla_s \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla_s \cdot \epsilon\mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla_s \cdot \mu\mathbf{H} = 0 \quad (\text{B.4})$$

このとき， ∇_s は，

$$\nabla_s = \hat{x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{B.5})$$

で定義される．そのため， ∇_s はデカルト座標系 x, y, z を個々の因子 s_x, s_y, s_z で引き伸ばしたときの作用素と考えることができる．

ここで，電界，磁界の平面波の式は，

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{H}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (\text{B.7})$$

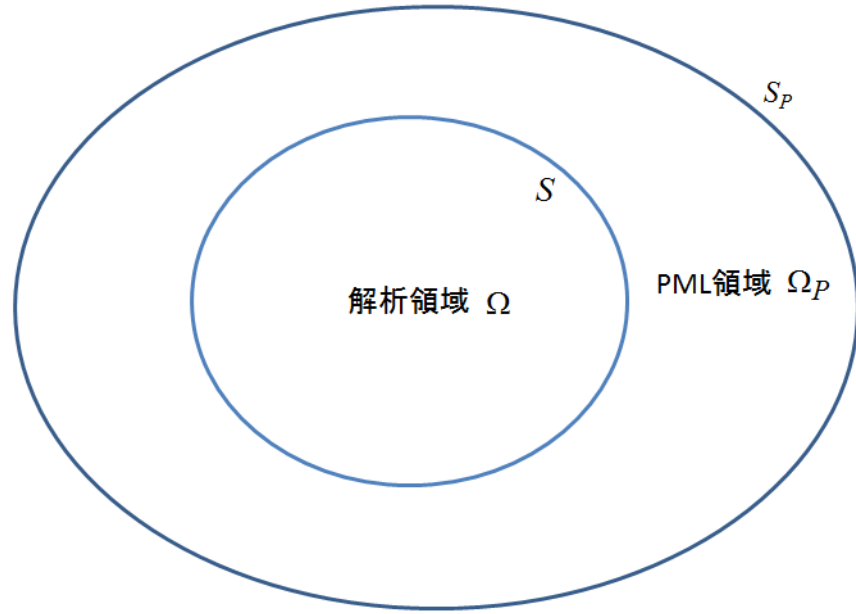


図 B.1: 解析領域と PML 領域

で与えられる．ただし， $\mathbf{k}$ は平面波の波数， $\mathbf{r}$ は位置ベクトルである．このとき，(B.6),(B.7) 式を (B.1)-(B.4) 式に代入することにより，以下の式を得ることができる．

$$\mathbf{k}_s \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{k}_s \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{B.11})$$

このとき， $\mathbf{k}_s$ は，

$$\mathbf{k}_s = \hat{x} \frac{k_x}{s_x} + \hat{y} \frac{k_y}{s_y} + \hat{z} \frac{k_z}{s_z} \quad (\text{B.12})$$

である．ここで (B.8) 式と $\mathbf{k}_s$ の外積を計算すると，

$$\mathbf{k}_s \times (\mathbf{k}_s \times \mathbf{E}) = \omega \mu \mathbf{k}_s \times \mathbf{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{B.13})$$

また，ベクトル 3 重積 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ より，(B.13) 式は，

$$(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{k}_s) \mathbf{E} = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{B.14})$$

となる。(B.13) 式より,

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{k}_s = \omega^2 \mu \epsilon = \kappa^2 \quad (\text{B.15})$$

$$\left(\frac{k_x}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{s_y}\right)^2 + \left(\frac{k_z}{s_z}\right)^2 = \kappa^2 \quad (\text{B.16})$$

という関係式を得ることが出来る。これより, k_x, k_y, k_z は (B.17)-(B.19) 式となる。

$$k_x = \kappa s_x \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B.17})$$

$$k_y = \kappa s_y \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B.18})$$

$$k_z = \kappa s_z \cos \theta \quad (\text{B.19})$$

これより, PML 内の平面波は,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.21})$$

となり, 波数が $\mathbf{k}_s$ となる。このとき, (B.20),(B.21) 式の $\mathbf{k}_s$ は, 伝搬定数とも呼ばれ, この定数における実部を減衰定数, 虚部を位相定数と呼ぶ。(B.20),(B.21) 式において s_x, s_y, s_z が複素数で表されるとき, 伝搬定数は虚部を持つので, PML 内において電磁波は減衰していくことになる。

B.2.2 PML 領域への入射

図 B.2 のような解析領域から PML 領域への入射を考える。図 B.2 において, 上の領域が解析領域であり, 下の領域が PML 領域である。このとき, 入射波, 反射波, 透過波は (B.22)-(B.24) 式と書くことが出来る。

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{E}^r = R \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}^r \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{E}^t = T \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}^t \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.24})$$

このとき, $\mathbf{E}_0$ は $\hat{z}$ 方向に一定の法線ベクトルであり, R, T は反射係数, 透過係数である。 R と T の関係は $R \leq 1, T \leq 1, R + T = 1$ である。位相整合条件と電界, 磁界の接線方向の連続性を用いると, TE 波における反射係数を得ることが出来る。

$$R^{TE} = \frac{k_{1z}s_{2z}\mu_2 - k_{2z}s_{1z}\mu_1}{k_{1z}s_{2z}\mu_2 + k_{2z}s_{1z}\mu_1} \quad (\text{B.25})$$

このとき, 下付きの数字が 1 のとき, 解析領域内のパラメータを示し, 2 のとき, PML 領域内のパラメータを示す。また, TM 波における反射係数は,

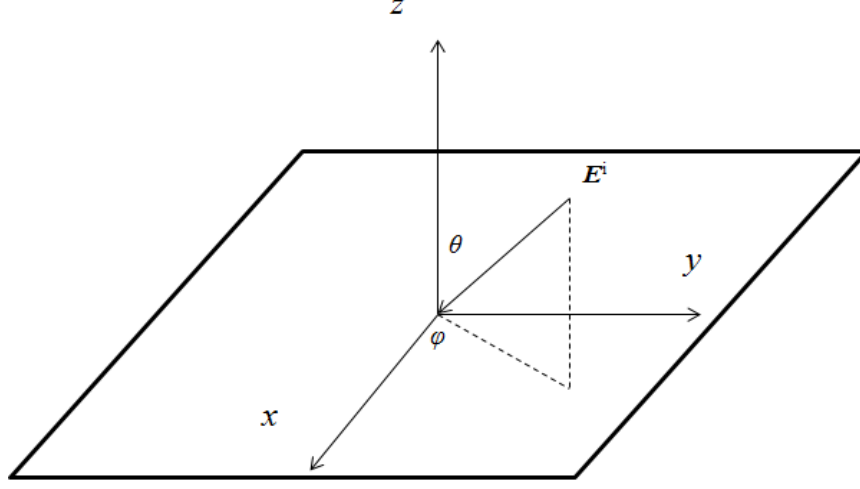


図 B.2: 平面波の入射

$$R^{TM} = \frac{k_{1z}s_{2z}\epsilon_2 - k_{2z}s_{1z}\epsilon_1}{k_{1z}s_{2z}\epsilon_2 + k_{2z}s_{1z}\epsilon_1} \quad (\text{B.26})$$

で与えられる。このときの下付きも同様である。また、位相整合条件 $k_{1x} = k_{2x}$, $k_{1y} = k_{2y}$ から、

$$\kappa_1 s_{1x} \sin \theta_1 \cos \phi_1 = \kappa_2 s_{2x} \sin \theta_2 \cos \phi_2 \quad (\text{B.27})$$

$$\kappa_1 s_{1y} \sin \theta_1 \cos \phi_1 = \kappa_2 s_{2y} \sin \theta_2 \cos \phi_2 \quad (\text{B.28})$$

を得ることができ、 $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $s_{1x} = s_{2x}$, $s_{1y} = s_{2y}$ を選ぶと、

$$\theta_1 = \theta_2, \phi_1 = \phi_2 \quad (\text{B.29})$$

となり、結果として、

$$R^{TE} = 0, R^{TM} = 0 \quad (\text{B.30})$$

となる。ここで、上の条件を用いると、 s_{1z}, s_{2z} を何を選んでも、どの角度で入射しても、周波数の大きさに関わらず、反射係数が0となり、入射波がすべて透過波となることが明らかである。

B.2.3 パラメータの配置

次にパラメータ s_ζ ($\zeta = x, y, z$) の配置方法について示す。解析領域内のパラメータ s_x, s_y, s_z は以下のように設定することとする。

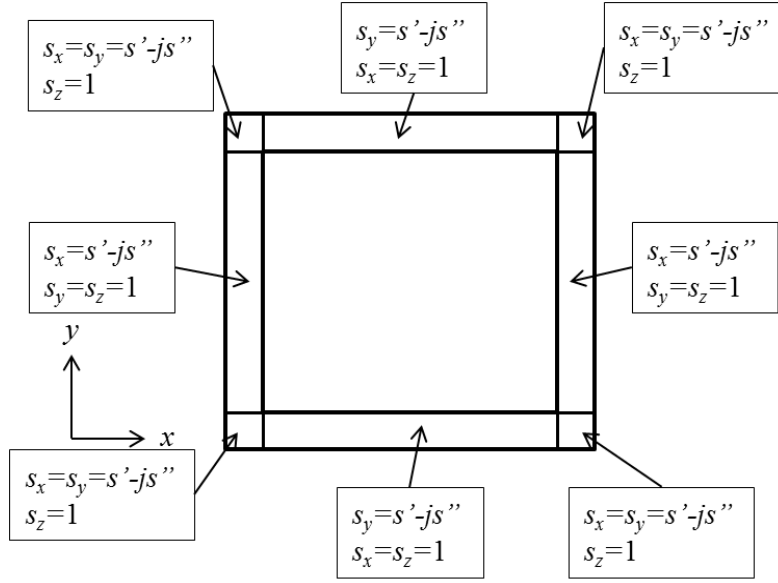


図 B.3: パラメータの配置

$$s_x = s_y = s_z = 1 \quad (\text{B.31})$$

(B.31) 式を (B.1)-(B.4) 式に代入することにより、通常の Maxwell 方程式となる。これより解析領域内については (B.31) 式のようにパラメータの設定を行う。PML 領域内については、以下のようにパラメータを設定する。

$$s_x = s_y = s_z = s' - js'' \quad (\text{B.32})$$

PML 内においては (B.32) 式で設定を行う。ここで、 s' は位相定数であり、 s'' は減衰定数となる。このとき、 s'' は減衰定数であるので PML へ透過してきた波がこの減衰定数の大きさにより、波が減衰することとなる。また、本研究では位相定数 s' は、1 と設定する。

ここで、前項よりパラメータ s_z は z 方向に入射することを考えたが、 s_x, s_y は双方の領域内で同じしなかった。これより、ほかの 2 方向に入射することを考えたとき、同様に考えることが出来るので、 x 方向に入射するときは s_y, s_z 、 y 方向に入射するときは s_x, s_z を双方の領域内において等しくする必要がある。以上のことを考慮して PML の配置を行うと、図 B.3 となる。図 B.3 は xy 平面でしか考えていないが、 xz 、 yz 平面でも同様に考えることができる。

B.2.4 異方性 PML

パラメータ s_z を有限要素方程式へ導入するために、異方性 PML と呼ばれるモデルを考える。まず、異方性媒質中における Maxwell 方程式を考える。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} \quad (\text{B.33})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{B.34})$$

$$\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{B.36})$$

このとき, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ は対角誘電率, 透磁率テンソルであり, 以下の式で与えられる.

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

ここで, (B.1)-(B.4) 式と (B.33)-(B.36) 式が等しくなるように $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ を決定する. このとき, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ は,

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \quad (\text{B.39})$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mu \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \quad (\text{B.40})$$

となり, $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ は,

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}} = \hat{x}\hat{x}\frac{s_y s_z}{s_x} + \hat{y}\hat{y}\frac{s_x s_z}{s_y} + \hat{z}\hat{z}\frac{s_x s_y}{s_z} \quad (\text{B.41})$$

である. これより, (B.1)-(B.4) 式の電界を E_ζ^a , 磁界を H_ζ^a , (B.33)-(B.36) 式の電界を E_ζ^c , 磁界を H_ζ^c とすると, 以下の関係式が成り立つことが分かる.

$$E_\zeta^a = s_\zeta E_\zeta^c \quad (\text{B.42})$$

$$H_\zeta^a = s_\zeta H_\zeta^c \quad (\text{B.43})$$

したがって (B.1)-(B.4) 式と (B.33)-(B.36) 式が等価となる.

また, (B.41) 式はデカルト座標系におけるパラメータ配置であるが, 円筒座標系や球座標系においても適用することが出来る. そのとき, $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ は,

$$\text{円筒座標系} \quad \bar{\boldsymbol{\Lambda}} = \hat{\rho}\hat{\rho}\frac{\tilde{\rho} s_z}{\rho s_\rho} + \hat{\phi}\hat{\phi}\frac{\rho}{\tilde{\rho}}(s_z s_\rho) + \hat{z}\hat{z}\frac{\tilde{\rho} s_\rho}{\rho s_z} \quad (\text{B.44})$$

$$\text{球座標系} \quad \bar{\boldsymbol{\Lambda}} = \hat{r}\hat{r}\frac{\tilde{r}}{r}\frac{1}{s_r} + (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi})s_r \quad (\text{B.45})$$

となる. これより, PML はデカルト座標系だけでなくほかの座標系においても適用することが出来る.