HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理について : Nikaido(1956, 57)を中心にして
Author(s)	久保田, 肇
Citation	Discussion Paper, Series B, 154, 1-23
Issue Date	2017-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/67612
Type	departmental bulletin paper
File Information	DPB154.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Discussion Paper, Series B, No.2017-154

古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理について：Nikaido(1956, 57)を中心にして

久保田　肇

2017 年 11 月

北海道大学大学院経済学研究院

060-0809　札幌市北区北 9 条西 7 丁目

古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理について：Nikaido(1956，57)を中心にして

久保田肇[1]
〒060-0809 札幌市北区北9条西7丁目
北海道大学大学院経済学研究院

平成29年11月

[1]本論文の作成においては、一橋大学名誉教授の池間誠先生やロチェスター大学教授のロナルド・ジョーンズ先生との有益な討論に負っており、ここで記して感謝する。

概 要

本論文では、Nikaido(1956,57) において扱われた、古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理を取り上げ、それらの内容を再考する。Nikaido(1956) では純粋交換経済やレオンティエフ型世界経済における競争均衡の存在定理を、角谷の不動点定理から導かれたゲール・二階堂の補題に基づいて証明した。この純粋交換経済では、各消費者は非負象限を消費集合として持ってその初期保有点として全ての財を保有するという、また、レオンティエフ型世界経済では、各国が非負象限を消費集合として持って全ての財を生産できるという、かな強い条件が課されていた。その補足的な論文である Nikaido(1957) では、消費集合はそのままにして、純粋交換経済では各消費者が初期保有点として一部の財のみ保有して、全体では全ての財を保有するという、また、レオンティエフ型世界経済では、各国が一部の財を生産でき、世界全体では全ての財を生産できるという、より一般的な状況において競争均衡の存在定理を示した。そこでは、価格集合全体での需要対応のグラフが閉になるとは限らないので、純粋交換経済では各消費者の所得が正になる、または、レオンティエフ型世界経済では各国の所得が正になる価格集合を考えて、このような価格集合上に制限した需要対応のグラフの閉凸包から、全価格集合上の新たな需考対応を構成して、Nikaido(1956) の不動点を用いた議論を適用して、元経済の競争均衡の存在を示した。

This paper consides the equilibrium existence theorem obtained in Nikaido(1956) and its supplementary Nikaido(1957). Nikaido(1956) established the existence of competitive equilibrium in exchance economies and that in Leontief world economies based on Gale-Nikaido lemma which is derived from Kakutani fixed point theorem. In the exchange economies, each consumer is assumed to have all goods as his initial endowment, and in the Leontief world economies, each country is assumed to produce all goods. Since these are strong conditions, it is desirable to establish the existence of competitive equilibium in these ecnomies with a weaker condition on initial endowment or production sets. This is indeed the purpose pf the supplementary Nikaido(1957). In the pure exchange ecnomies, each consumer is assumed to some of goods as his initial endowment and consumers are to have all of goods as their aggregate initial endowment. In the Leontief world economies, each country is assumed to produce some goods, but world economy as a whole can produce all goods. This weaker condition prevents demand correspondences of consumers from upper semi-continuou over entire price set. Since every demand correspondence is upper semi-continuou on the set of prices where his income is positive or the country's income is positive, the demand correspondence drived from the closure of the demand correpondences restricted to thse sets is upper semi-contuous, the fixed point argument of Nikaido(1956) still applies to this situation and the existence of competitive equilibrium is established as well.

1　はじめに

本論文では、Nikaido(1956,57) において扱われた、古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理を取り上げて、それらの内容を再考する。

まず、Nikaido(1956) では純粋交換経済やレオンティエフ型世界経済における競争均衡の存在定理を、角谷の不動点定理から導かれたゲール・二階堂の補題に基づいて証明した。[1]　この純粋交換経済では、どの消費者も非負象限を、その上で定義された連続準凹強単調効用関数が存在する消費集合として持ち、その初期保有点として全ての財を保有するという、かなり強い条件が課されていて、これらの条件の下で需要対応が凸値閉対応となって、ゲール・二階堂の補題によりこの経済における競争均衡の存在が示されている。更に、生産性可能集合に基づいた形で企業を導入した生産経済を考えて、供給対応が需要対応と同様の凸値閉対応という性質を持つものとして抽象（生産）経済を定義すると、需要対応から供給対応を引いて与えられる超過需要対応も需要対応と同じ凸値閉対応という性質を持つので、純粋交換経済の時と同様にゲール・二階堂の補題が適用可能となって、この抽象生産経済に競争均衡が存在する事が示せる。[2]　この結果を、生産性可能集合に基づいた形で生産を導入したレオンティエフ世界経済モデルに適用して、この世界経済における自由貿易均衡としての競争均衡が存在する事を示した。[3]　このレオンティエフ型世界経済では、生産性可能集合や選好関係 (効用関数) を前提としていて、各国が非負象限を消費集合として持ち、更に各国は全ての財を生産できるという、かな強い条件が課されていた。[4]　そして、このレオンティエフ型世界経済モデルで利用した証明方法を少し変更すれば、McKenzie(1954) で示されたグレアム型世界貿易モデルにもゲール・二階堂の補題が適用できる事を示して、McKenzie(1954) において示されたグレアム型世界貿易モデルの自由貿易均衡の存在定理に別証を与えている。なお、McKenzie(1954) で扱われたグレアム型世界貿易モデルでは、線形生産構造とミル・ヴァイナー型需要関数の存在を前提としているが、レオンティエフ型世界貿易モデルは、生産性可能集合や選好関係 (効用関数) を前提としていて、両者には微妙な差異がある。[5]

次に、Nikaido(1956) に補足的な論文 (1957) では、Nikaido(1956) における抽象（生産）経済としてのレオンティエフ型世界貿易モデルにおける競争均衡の存在を、各国の消費集合や効用関数はそのままにして、各国が一部の財は生産可能で全ての国全体では全ての財を生産可能となるケースに拡張した。[6]　各国が全ての財を生産可能という条件は、証明を簡潔

[1]Nikaido(1956) ではゲール・二階堂の補題を角谷の不動点定理を用いて証明しているが、Gale(1955) では、まず連続関数のケースを KKM 補題を利用して示して、その後に、Kakutani（1941）においてブラウワーの不動点定理を用いて角谷の不動点定理を証明する際に用いた単体分割による近似の議論を用いて、対応のケースの証明を行っている。なお、Kuhn(1956a) では、ゲール・二階堂の補題を角谷の不動点定理より一般的なアイレンベルグ・モントゴメリーの不動点定理を利用して証明しているが、実際には、この Nikaido(1956) のように角谷の不動点定理で十分なので、なぜ角谷の不動点定理ではなくてアイレンベルグ・モントゴメリーの不動点定理を用いたのか、その理由は不明である。なお、Debreu(1956) では、ゲール・二階堂の補題を非負象限からアフィン部分空間でないような閉凸錐へ一般化したが、そこでも角谷の不動点定理が利用されている。ただし、Gale(1955),Kuhn(1956), Debreu(1959) は参考文献に挙げられているが、Nikaido(1956) には触れられていない。Nikaido(1956) には Arrow から Gale（1955）が同様の結果を得ているという事を聞いているので、なぜ Debreu(1956) で Nikaido(1956) には触れられていないのか不明である。

[2]純粋交換経済と同様という事より、実際には証明は行われていないが、本稿では以下で与えておく。

[3]Leontief（1932, QJE)

[4]ここでは全ての財が最終財として貿易されるとして非貿易財の存在を明示的には考えていないが、伝統的な国際貿易論においてのように、労働や資本が非貿易財となっていても、消費面では余暇は消費には明示的には入らず、また、生産面では資本と労働は資源制約によって生産可能性集合を決める際に利用されて、ここでは生産物の収入は全て資本と労働に帰するとしている。

[5]McKenzie(1954) モデルや Arrrow-Debreu(1954) モデルの同値性については Toda() 参照。

[6]純粋交換経済では、消費集合は以前と同様に非負象限にして、各消費者が初期保有点として一部の財のみ

にするという意味では有益であるが、経済的な仮定としてかなり厳しいものであり、各国が一部の財は生産可能で世界全体では全ての財が生産可能という方向への拡張は望ましい。しかしながらこの変更に伴って、生産可能な財の価格がゼロになるような価格では各国の所得額より支出額が小さいような消費点が存在するという安価点条件を満たさななくなって需要対応の閉性が成立しないかもしれず、そのために価格集合全体上での需要対応の閉性が成立しなくなってNikaido(1956)の証明を修正する必要が発生する。安価点条件が成立する集合上では需要対応の閉性が成立し、全ての財の価格が正となる点では安価点条件が成立するので、安価点条件が成立する価格は価格集合の中で稠密である。そこでNikaido(1957)では、この事を利用して、安価点条件が成立する価格上の需要対応を対応の閉性が維持されるように価格集合全体へ拡張するという工夫を用いた。[7]　すると、このように修正された需要対応は価格集合全体で閉性が成立するのでNikaido(1956)のレオンティエフ型世界貿易モデルにおける競争均衡の存在を示した議論を適用して競争均衡の候補を見つける事が出来る。この時にもしもある財の価格がゼロとすると、世界全体では全ての財が生産可能という事より、どこかの国では安価点条件が成り立ってその国の需要対応は拡張する前の当初のものと同じになるが、すると需要条件と効用関数の強単調性により自由財条件が成立して、この財の価格が正となり、全ての財の価格が正になる。すると、この価格の下では全ての国で安価点条件が成立することになり、各国の需要対応は拡張する前の当初のものと同じになって、全ての財の需給一致が成立し、各国で生産可能な財に関する条件をより一般化したレオンティエフ型世界貿易モデルにおける競争均衡の存在が成立する。ここでも用いられた需要対応の拡張という手法は、これ以降の安井・二階堂(1957-8)、二階堂(1960)、そしてNikaido(1968)でも用いられている。

なお、Nikaido(1956,57)では効用関数の強単調性によりどの財も消費者(各国)にとって望ましいとしていいるが、全てではなくて幾つかの財が望ましいという方向へ拡張することも望ましいく、Arrow-Debreu(1954)では欲求される財と生産的な投入財という概念を用いてこの問題を扱っている。[8]　Nikaido(1957)ではそこまでの一般化は行っていないが、安井・二階堂(57-58)では、欲求される財と生産的な投入財があるケースのアロー・ドブリュー(1954)の私的所有生産経済における競争均衡の存在定理、Nikaido(1957)で用いた需要対応の拡張に基づいて示されている。Nikaido(1956、57)では生産可能性集合に基づく特殊な生産構造を持った生産経済における競争均衡が扱われていたのであるが、安井・二階堂(57-58)では標準的なアロー・ドブリュー(1954)型の私的所有生産経済が取り上げられている。まず、各消費者に初期保有点より全ての数量が大きいような消費点が存在するアロー・ドブリュー(1954)の第一定理を、需要対応の拡張を用いる事なく示し、その後で、Nikaido(1957)で行われた需要対応の拡張を利用して、欲求された財や生産的投入財を用いたアロー・ドブリュー(1954)の第2定理を示している。[9]

保有し、消費者全体では全ての財を保有するという事になる。

[7]この点については、Nikaido(1957)ではKuhn(1956b)による証明にヒントを得たと記されている。ただし、実際にはDebreu(1962)のように、安価点条件が成り立たない価格ではその需要集合としてその時の予算集合を用いれば、このように修正された需要対応は安価点条件が成立する価格では当初の需要集合と同じであり、しかも全価格集合上で閉対応となって、Nikaido（1957）で必要となる事がより容易に得られる。

[8]更には、初期保有点が消費集合に属さないという条件の下で競争均衡の存在が示される事がより望ましいが、これはMoore(1975)やMcKenzie(1981)によって既約性(Irreducibility)という条件の下で示されている。これについては久保田（、）参照。

[9]安井・二階堂(57-58)以降には、二階堂(1960)とNikaido(1968)があり、これらで扱われている競争均衡の存在問題について簡潔に触れておく。二階堂(1960)では、安井・二階堂(57-58)と同様にアロー・ドブリュー型の私的所有生産経済を利用して、初期保有点よりも全ての財で数量が大きくなくてもある財では数量が大きいような消費点の存在を前提にして、安井・二階堂(57-58)での消費集合の下方有界性や閉凸性、選好の凸性

2　純粋交換経済における競争均衡の存在

まずここで、Nikaido(1956) に沿って最初に純粋交換経済における競争均衡の存在が示す。この経済に存在する財の数を l として財空間を l 次元ユークリッド空間 R^l とする。[10]　価格は $p \in R^l_+$ で表し、価格集合を l 次元ユークリッド空間 R^l の基本単体 $S^l = \{p \in R^l_+ : \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\}$ とする。[11]　この経済には H 人の消費者がおり、各消費者はその消費集合 $X^h(= R^l_+)$ 上で定義される効用関数 U^h を持ち、また、$a^h \in X^h$ を初期保有点として所持しているとする。[12]

初期保有点や効用関数に関する仮定は以下である。

A.1　$a^h > 0, h = 1, \cdots, H,$

A.2 U^h は R^l_+ 上で準凹、強単調、そして、連続である，　$h = 1, \cdots, H$。[13]

次にこの経済の競争均衡を定義する。$(H+1)$ 個の組 $[x^1, \cdots, x^H, p](\in R^{Hl}_+ \times (R^l_+ \backslash \{0\}))$ は以下の条件が満たされる時に競争均衡と呼ぶ：[14]

(α) $\sum_{h=1}^{H} x^h = a(= \sum_{h=1}^{H} a^h)$[15]

や局所非飽和性、欲求された財や生産的投入財の代わりに、非負象限としての消費集合や選好の強単調性を利用して、競争均衡の存在証明を簡潔にしている。これは多くの非専門家にも競争均衡の存在問題を知ってもらうテキストとして二階堂 (1960) を考えていたからであると思われる。一方 Nikaido(1968) では、再びアロー・ドブリュー (1954) の私的所有生産経済における競争均衡の第 2 定理に戻り、消費集合の下方有界性や閉凸性、選好の凸性や局所非飽和性、欲求された財や生産的投入財を前提にして、競争均衡の存在を示している。これは Nikaido(1968) を多くの専門家に競争均衡の存在問題を説明する研究書としてのテキストとして考えていたからであると思われる。なお、Nikaido(1968) では、二階堂 (1960) では扱われなかったそれ以降の競争均衡に関する、一意性や安定性、凸総生産集合の下での競争均衡の存在、宇沢の同値定理、厚生経済学の基本定理、更にはコアーの極限定理等の数々の重要な結果も紹介されている。安井・二階堂 (57-58) についても、二階堂 (1960) と Nikaido(1968) とともに、本稿に引き続く論稿で解説を加える予定である。

[10]通常のように R^l には、ベクトル演算、内積、大小関係、ユークリッド距離による位相等が与えられているとして、本稿の以下の部分でもこれを踏襲する。二つの点 x, y を $x = (x_1, \cdots, x_l), y = (y_1, \cdots, y_l)$ とする。その時にそれらのベクトル和やスカラー積はそれぞれ $x+y = (x_1+y_1, \cdots, x_l+y_l)$、$\alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_l)$ とする。そして、それらの大小関係は、$x \geqq y \Leftrightarrow x_i \geqq y_i, i = 1, \cdots l, x \geq y \Leftrightarrow x \geqq y$ かつ $x \neq y, x > y \Leftrightarrow x_i > y_i, i = 1, \cdots, l$ とする。更に、それらの内積を $x \cdot y = \sum_{i=1}^{l} x_i y_i$ として、それらの距離を $||x-y|| = [(x-y \cdot (x-y)]^{1/2} = (\sum_{i=1}^{l} (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ とする。また、R^l の非負領域を $R^l_+ = \{x \in R^l : x \geqq 0\}$、正領域を $R^l_{++} = \{x \in R^l : x > 0\}$ とする。

[11]また、正の価格集合を $S^l_{++} = \{p \in R^l_{++} : \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\}$ とする。これらも本稿の以下の部分で踏襲する。

[12]なお、Nikaido(1956) では $l = k, H = m$ である。

[13]U^h の準凹性は $\{x \in R^l_+ : U^h(x) \geqq \alpha\}$ が $\forall \alpha \in R$ に対して凸となる事、また、U^h の強単調性は $x \geq y \Rightarrow U^h(x) > U^h(y)$ となる事である。$e^1 = (1, 0, \cdots, 0)$ とする。$x \geqq y$ とすると $x + \alpha e^1 \geq y, \forall \alpha > 0$ となるので U^h の強単調性より $U^h(x + \alpha e^1) > U^h(y)$ となるが、$x + \alpha e^1 \to x(\alpha \to 0)$ なので U^h の連続性より $U^h(x + \alpha e^1) \to U^h(x)(\alpha \to 0)$ となり、$U^h(x) \geqq U^h(y)$ となる。これより $x \geqq y \Rightarrow U^h(x) \geqq U^h(y)$ となって U^h の弱単調性も成立する。もちろん、$x > y \Rightarrow x \geq y \Rightarrow U^h(x) > U^h(y)$ となって U^h の単調性も成立する。

[14]Nikaido(1956) では $feasible \quad solution$ と呼ばれている。また、具体的な証明は行っていないが、Arrow(1951) との比較で、$[x^1, \cdots, x^H]$ がパレート最適であればある $p \geq 0$ が存在して $U^h(x^h) = \max\{U^h(x) : p \cdot x = p \cdot x^h, x \in R^l_+\}$ となる事、一方、$[x^1, \cdots, x^H, p]$ が競争均衡であれば $[x^1, \cdots, x^H]$ がパレート最適である事に、触れている。Nikaido(1956, 2.5. p.138)。

[15]一般には自由財の可能性を認めて、$\sum_{h=1}^{H} x^h \leqq a(= \sum_{h=1}^{H} a^h), p_i > 0 \to \sum_{h=1}^{H} x^h_i = a_i$ とするのであるが、以下で見るように、U^h の強単調性より $p > 0$ となるので、ここでは $\sum_{h=1}^{H} x^h = a(= \sum_{h=1}^{H} a^h)$ としている。

(β) $U^h(x^h) = \max\{U^h(x) : p \cdot x = p \cdot a^h, x \in R^l_+\}, h = 1, \cdots, H.$[16]

総初期保有点 a より全ての座標で大きい点 $c(> a)$ を任意に一つ固定して、$E = \{x \in R^l_+ : x \leqq c\}$ とする。すると、上記の条件 (β) が (α) の下では次の (β') と同値となる。

補題 1.1 $A.1, A.2$ と (α) の下では、(β) は次の (β') と同値となる。[17]

(β') $U^h(x^h) = \max\{U^h(x) : p \cdot x = p \cdot a^h, x \in E\}, x = 1, \cdots, H.$

証明. まず、x^h が (β) を満たしているとすると、(α) より $(0 \leqq)x^h \leqq \sum_{h'=1}^{H} x^{h'} = a < c$ より $x^h \in E$ となって (β') が成立する。次に、$[x^1, \cdots, x^H, p]$ が (α) と (β') を満たしているとする。$\exists i \in \{1, \cdots, l\}$ に対して $p_i = 0$ とすると、追加費用無しで第 i 財の消費量をいくらでも増やす事が出来るが、U^h の強単調性より第 i 財の消費量を出来るだけ増やす事が望ましいので $x^h_i = c_i$ となって $\sum_{h=1}^{H} x^h_i = Hc_i > c_i$ となり、(α) に矛盾する。これより、$p > 0$ である。今、$\exists h \in \{1, \cdots, H\}$ に対して x^h が (β) を満たしておらず、$\exists z^h \in R^l_+ \backslash E$ に対して $U^h(z^h) > U^h(x^h), p \cdot z^h = p \cdot a^h$ とする。まず、$z^h \neq x^h$ である。まず、$z^h \in R^l_+ \backslash E$ より $z^h \geq 0$ である。また、$p, a^h > 0$ と $p \cdot x^h = p \cdot a^h > 0$ より $x^h, z^h \geq 0$ である。z^h と x^h を結ぶ線分で E に属して z^h に一番近い点を w^h とすると、そのような点は確かに存在して、$\exists \alpha' \in (0, 1), w^h = \alpha' z^h + (1 - \alpha')x^h$ と表され、$w^h \neq x^h, w^h \neq z^h$ である。[18] この時 $p \cdot x^h = p \cdot z^h = p \cdot a^h$ より $p \cdot w^h = p \cdot (\alpha' z^h + (1 - \alpha')x^h) = \alpha' p \cdot z^h + (1 - \alpha')p \cdot x^h = p \cdot a^h$ となるので x^h の定義より $U^h(x^h) \geqq U^h(w^h)$ である。$(A.2)$ の U^h の強単調性によって $x^h \geq 0$ より $U^h(x^h) > U^h(0)$ となる。また、$\beta \in [0, 1]$ に対して $U^h(\beta z^h)$ を β の連続関数とみなすと、$\beta = 0$ の時に $U^h(0)$ で $\beta = 1$ の時に $U^h(z^h)(> U^h(x^h))$ なので、連続関数の中間値定理より $\exists \beta' \in (0, 1)$ に対して $U^h(\beta' z^h) = U^h(x^h)$ となる。$z^h \geq 0$ と $\alpha' \in (0, 1)$ より $\alpha'\beta' z^h + (1 - \alpha')x^h \leq \alpha' z^h + (1 - \alpha')x^h = w^h$ となるので、U^h の強単調性から $U^h(\alpha'\beta' z^h + (1 - \alpha')x^h) < U^h(w^h)$ となるが、U^h の準凹性より $U^h(\alpha'\beta' z^h + (1 - \alpha')x^h) \geqq \min\{U^h(\beta' z^h), U^h(x^h)\} = U^h(x^h)$ なので $U^h(w^h) > U^h(x^h)$ となり、$U^h(x^h) \geqq U^h(w^h)$ に矛盾が起こる。[19] 故に、このような z^h は存在せず、x^h が E 上で $p \cdot x = p \cdot a^h$ の制約で $U^h(x)$ 最大にしていれば、x^h は R^l_+ 上で $p \cdot x = p \cdot a^h$ の制約で $U^h(x)$ 最大にしている事になる。[20] □

[16]予算制約は一般には $p \cdot x \leqq p \cdot a^h, x \in R^l_+$ であるが、もしも $p \cdot x^h < p \cdot a^h$ とすると、$(p \cdot a^h - p \cdot x^h > 0$ の）余りの所得を追加的な財の購入に充てれば $A.2$ の U^h の強単調性より x^h より望ましい消費点が購入可能になって、x^h の需要条件に矛盾が起こるので、ここでのように $p \cdot x = p \cdot a^h, x \in R^l_+$ としておいてよい。ただし、以下の需要対応の閉性を示す際には、予算集合として $p \cdot x \leqq p \cdot a^h, x \in R^l_+$ を用いる。

[17]Arrow-Debreu(1954) では、アロー・ドブリュー型の凸生産経済においてこの事を示している。Arrow-Debreu(1954, 3.4.0-1, p,279)。

[18]$\alpha' = \sup\{\alpha \in [0, 1] : \alpha z^h + (1 - \alpha)x^h \in E\}$ として α' を定義すると、$\alpha = 0$ の時に $\alpha z^h + (1 - \alpha)x^h = x^h \in E$ となる事よりこの上限は存在するが、$x^h \leqq \sum_{h=1}^{H} x^h_i = a < c$ より、充分に小さい $\alpha''(> 0)$ に対して $\alpha'' z^h + (1 - \alpha'')x^h \in E$ となるので $\alpha' > 0$ である。また、1 に十分に近い任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して E の閉性より $\alpha z^h + (1 - \alpha)x^h \notin E$ なので $\alpha' \leqq \alpha < 1$ である。上限の性質より $\exists(\alpha^n) \subset [0, 1], \alpha^n \to \alpha'(n \to 0)$ となり、$\alpha^n z^h + (1 - \alpha^n)x^h (\in E) \to \alpha' z^h + (1 - \alpha')x^h$ となるが、E は閉集合なので $\alpha' z^h + (1 - \alpha')x^h \in E$ となる。また、上限の性質より $(1 \geqq)\alpha > \alpha' \to \alpha z^h + (1 - \alpha)x^h \notin E$ なので、結局 z^h と x^h を結ぶ線分で E に属して z^h に一番近い点 w^h は $w^h = \alpha' z^h + (1 - \alpha')x^h \in E$ となる。$z^h \neq x^h$ と $\alpha' \in (0, 1)$ より $w^h \neq x^h, w^h \neq z^h$ である。

[19]Nikaido(1956) の証明のこの部分では、$\exists \delta > 0, \delta w^h \in (\beta' z^h, x^h)$ となると述べているが、実際には $\delta w^h = \alpha'\beta' z^h + (1 - \alpha')x^h$ となっている。

[20]もしも予算制約を $p \cdot x \leqq p \cdot a^h, x \in R^l_+$ として与えて、$p \cdot z^h \leqq p \cdot a^h$ と $p \cdot w^h \leqq p \cdot a^h$ として議論を進めても、特にそれ以外に変更を加える事なく、これと同様の結果がそのまま成立する。なお、二階堂 (1960) からは、この補題の証明に変更が加わっている。

この補題より、消費者の消費集合を R^l_+ にした本来の経済の競争均衡の存在を示すには、消費集合を E に制限した経済で競争均衡を見つければ良い事になる。以下では、消費集合を E に制限した時の消費者の需要対応と価格設定者の存在を前提にして、角谷不動点定理を利用して消費集合を E に制限した経済で競争均衡を見つけだす。

そこでまず、この E に制限した経済において価格設定者が $p \in S^l$ を設定した時の消費者 h の需要対応を、$\phi^h(p) = \{x \in E : p \cdot x = p \cdot a^h, p \cdot x' = p \cdot a^h \rightarrow U^h(x) \geqq U^h(x')\} = \arg\max\{U^h(x) : p \cdot x = p \cdot a^h, x \in E\}$ と定義する。総需要対応を $\phi(p) = \sum_{h=1}^{H} \phi^h(p) = \{\sum_{h=1}^{H} x^h : x^h \in \phi^h(p), h = 1, \cdots, H\}$ と定義する。この時、$\phi(p) \subset E$ となるとは限らないが、もちろん、$\phi(p) \subset \Gamma = \{z : 0 \leqq z \leqq Hc\}$ となる。もしも価格設定者が決めた価格 $p \in S^l$ の下で $\phi(p) \ni a$ となれば、$x^h \in \phi^h(p), h = 1, \cdots, H, \sum_{h=1}^{H} x^h = a$ とすると補題 1.1 より $[x^1, \cdots, x^H, p]$ は競争均衡となる。しかし通常価格設定者はこのように上手く価格を決められるとは限らないので、そのような時に価格設定者がどのように価格を変更して新価格を決めるか考える必要がある。$x^h \in E, h = 1, \cdots, H$ として $x = \sum_{h=1}^{H} x^h \in \Gamma$ とする時に、$x \neq a$ ならば x の a からの乖離を小さくすればいいので、そのためにここでは超過需要額 $q \cdot (x - a), q \in S^l$ を最大にするように新しい価格 q を決めると考えて、新価格対応を $\theta(x) = \{p \in S^l : p \cdot (x - a) = \max q \cdot (x - a), q \in S^l\}, x \in \Gamma$ として定義する。もしも $\exists(\overline{p}, \overline{x}) \in S^l \times \Gamma$ に対して $\overline{x} \in \phi(\overline{p}), \overline{p} \in \theta(\overline{x})$、つまり、$(\overline{x}, \overline{p}) \in (\phi(\overline{p}) \times \theta(\overline{x}))$ となったとすると、$\overline{x} = \sum_{h=1}^{H} \overline{x^h}, \overline{x^h} \in \phi^h(\overline{p}), h = 1, \cdots, H$ とすれば、定義より $\overline{p} \cdot \overline{x^h} = \overline{p} \cdot a^h, h = 1, \cdots, H$ なので $\overline{p} \cdot \overline{x} = \overline{p} \cdot a$ であり、$\overline{p} \in \theta(\overline{x})$ より $0 = \overline{p} \cdot (\overline{x} - a) \geqq q \cdot (\overline{x} - a), q \in S^l$ なので、$q = e^i = (0, \cdots, 0, 1(i), 0, \cdots, 0), i = 1, \cdots, l$ とすれば、$0 \geqq e^i \cdot (\overline{x} - a) = \overline{x_i} - a_i, i = 1, \cdots, l$ となって $0 \geqq (\overline{x} - a)$ となる。[21] $\overline{p} \in S^l$ と $0 \geqq \overline{x_i} - a_i, i = 1, \cdots, l$ によって $0 \geqq \overline{p}_i(\overline{x_i} - a), i = 1, \cdots, l$ となるが、$0 = \overline{p} \cdot (\overline{x} - a)$ なので $\overline{p}_i(\overline{x_i} - a) = 0, i = 1, \cdots, l$ となる。そして、効用関数の強単調性のために需要条件より $\overline{p} > 0$ なので、$(\overline{x_i} - a) = 0, i = 1, \cdots, l$ となって $(\overline{x} - a) = 0$ となる。補題 1.1 を考慮すれば、これより $[\overline{x^1}, \cdots, \overline{x^H}, \overline{p}]$ は競争均衡となる。[22]

今二つの対応 ϕ と θ の直積 $\phi \times \theta : \Gamma \times S^l \rightarrow \Gamma \times S^l, (\phi \times \theta)(x, p) = \phi(p) \times \theta(x)$ を考えると、上の議論よりこの対応 $\phi \times \theta$ の不動点を見つけて $(\overline{x}, \overline{p}) \in (\phi \times \theta)(\overline{x}, \overline{p}) = (\phi(\overline{p}) \times \theta(\overline{x}))$ となれば、競争均衡を見つけた事になる。そして、対応 $\phi \times \theta : \Gamma \times S^l \rightarrow \Gamma \times S^l$ が角谷不動点定理の条件を満たせば対応 $\phi \times \theta$ に不動点が存在するので、$\Gamma \times S^l$ が (非空) 凸コンパクトで $\phi \times \theta$ が凸値閉対応である事を示せばよい。[23] Γ と S^l の凸コンパクト性からそれらの直積集合 $\Gamma \times S$ は (非空) 凸コンパクトなので、$\phi \times \theta$ が凸値閉対応である事さえを示せばよい。そこでまず、ϕ と θ が各々凸値閉対応である事を示し、その後で ϕ と θ が凸値閉対応であれば $\phi \times \theta$ が凸値閉対応である事を示す。

θ の方から先に考える。ワイエルシュトラスの最大最小定理によって S^l のコンパクト性と内積 $\cdot$ の連続性より $\max\{q \cdot (x - a) : q \in S^l\}$ には最大解が存在するので $\theta(x) \neq \varnothing$ である。$p, p' \in \theta(x), a \in (0, 1)$ とする。$p \cdot (x - a) \geqq q \cdot (x - a), p' \cdot (x - a) \geqq q \cdot (x - a), \forall q \in S^l$ なの

---

[21] 予算制約を $p \cdot x \leqq p \cdot a^h, x \in R^l_+$ として与えて、$\overline{p} \cdot \overline{x^h} \leqq \overline{p} \cdot a^h, h = 1, \cdots, H$ としても $\overline{p} \cdot \overline{x} \leqq \overline{p} \cdot a$ となるので、$\overline{p} \in \theta(\overline{x})$ より $0 \geqq \overline{p} \cdot (\overline{x} - a) \geqq q \cdot (\overline{x} - a), q \in S^l$ となり、$q = e^i, i = 1, \cdots, l$ とすれば、$0 \geqq e^i \cdot (\overline{x} - a) = \overline{x_i} - a_i, i = 1, \cdots, l$ となって、やはり $0 \geqq (\overline{x} - a)$ となる。

[22] U^h の強単調性より $\overline{p} > 0$ であるが、この自由財排除の条件を利用せず、$\overline{p} \geq 0$ のみしか得られず自由財の存在を認めるような時には $\overline{x} - a \leqq 0$ しか得られない。

[23] Nikaido(1956) では角谷定理の条件として閉対応でなく上半連続性としているが、実際には閉対応を利用している。ここでのようにコンパクトな値域のケースでは、もちろん両者は同一である。

で $[ap+(1-\alpha)p']\cdot(x-a)=ap\cdot(x-a)+(1-\alpha)p'\cdot(x-a)\geqq aq\cdot(x-a)+(1-\alpha)q\cdot(x-a)=q\cdot(x-a),\forall q\in S^l$ となって $[ap+(1-\alpha)p']\in\theta(x)$ となり、$\theta(x)$ は凸である。次に、$x^n\in\Gamma,n=1,\cdots,x^n\to x\in\Gamma(n\to\infty),p^n\in\theta(x^n)(\subset S^l),n=1,\cdots,p^n\to p\in R^l(n\to\infty)$ とする。$p^n\in S^l$ と S^l の閉性より $p\in S^l$ である。任意に所与の $q\in S^l$ に対して $p^n\in\theta(x^n)$ より $p^n\cdot(x^n-a)\geqq q\cdot(x^n-a)$ となり、内積 $\cdot$ の連続性より $p\cdot(x-a)\geqq q\cdot(x-a)$ となり、これが任意の $q\in S^l$ に対して成立するので $p\cdot(x-a)=\max\{q\cdot(x-a):q\in S^l\}$ となる。これより $p\in\theta(x)$ となって θ は閉対応である。

次に ϕ の方を考えるが、最初にその構成成分である ϕ^h を考える。$B^h(p)=\{x\in E:p\cdot x=p\cdot a^h\}$ を消費者 h の予算集合とすれば $\phi^h(p)=\arg\max\{U^h(x):x\in B^h(p)\}$ である。$a^h\in B^h(p)$ より $B^h(p)\neq\varnothing$ であり、また、内積の連続性と線形性と E の凸コンパクト性から $B^h(p)$ は凸コンパクトである。ワイエルシュトラスの最大最小定理によって $U^h(\cdot)$ の連続性より $\max\{U^h(x):x\in B^h(p)\}$ には解が存在して $\phi^h(p)\neq\varnothing$ である。$x,x'\in\phi^h(p),a\in(0,1)$ とすると、$B^h(p)$ の凸性より $ax+(1-\alpha)x'\in B^h(p)$ である。すると $A.2$ の U^h の準凹性より、$U^h(\alpha x+(1-\alpha)x')\geqq\min[U^h(x),U^h(x')]=U^h(x)(=U^h(x'))\geqq U^h(z),\forall z\in B^h(p)$ なので $\alpha x+(1-\alpha)x'\in\phi^h(p)$ となり、$\phi^h(p)$ は凸である。次に、$p^n\to p\in S^l(n\to\infty),x^n\in\phi^h(p^n),n=1,\cdots,x^n\to x\in R^l(n\to\infty)$ とする。$x^n\in E,n=1,\cdots$ と E の閉性より $x\in E$ である。$p^n\cdot x^n=p^n\cdot a^h,n=1,\cdots$ と内積 $\cdot$ の連続性より $p\cdot x=p\cdot a^h$ となり、$x\in B^h(p)$ である。$z\in B^h(p)$ に対して $U^h(x)\geqq U^h(z)$ を示す。$a^h>0$ と $p\geq 0$ より $p\cdot z=p\cdot a^h>0$ なので充分に大きい n' に対して $p^n\cdot a^h>0,p^n\cdot z>0,\forall n>n'$ である。そこで $\lambda^n=p^n\cdot a^h/\max\{p^n\cdot a^h,p^n\cdot z\},\forall n>n'$ とすると $\max\{p^n\cdot a^h,p^n\cdot z\}\geqq p^n\cdot a^h>0$ より $\lambda^n\in(0,1]$ であり、$p\cdot z=p\cdot a^h$ なので数列の極限の性質より $\lim_{n\to\infty}\max\{p^n\cdot a^h,p^n\cdot z\}=\max\{\lim_{n\to\infty}p^n\cdot a^h,\lim_{n\to\infty}p^n\cdot z\}=\max\{p\cdot a^h,p\cdot z\}=p\cdot a^h$ となって、$\lambda^n\to 1(n\to\infty)$ となる。そこで、$z^n=\lambda^n z,\forall n>n'$ とすると $E(\ni 0)$ の凸性より $z^n\in E$ であり、$\lambda^n\to 1(n\to\infty)$ より $z^n\to z(n\to\infty)$ である。[24]

また、$p^n\cdot z^n=p^n\cdot\lambda^n z=\lambda^n p^n\cdot z\leqq\lambda^n\max\{p^n\cdot a^h,p^n\cdot z\}=p^n\cdot a^h$ より $z^n\in\overline{B}^h(p^n)=\{x\in E:p\cdot x\leqq p\cdot a^h\},\forall n>n$ なので $x^n\in\phi^h(p^n)$ より $U^h(x^n)\geqq U^h(z^n),\forall n>n'$ となる。[25] すると、$z^n\to z,x^n\to x(n\to\infty)$ と U^h の連続性から $U^h(x)\geqq U^h(z),\forall z\in B^h(p)$ となって $x\in\phi^h(p)$ となり、ϕ^h は閉対応である。[26]　すると、$\phi(p)=\sum_{h=1}^{H}\phi^h(p)$ なので各 $\phi^h(p)$ の非空凸コンパクト性から $\phi(p)$ の非空凸コンパクト性も成立する。次に、$p^n\to p\in S^l(n\to\infty),x^n\in$

[24] これが $B^h(\cdot)$ の p における下半連続性であり、Nikaido(1957) 以降で a^h に関する条件を $\exists z^h\in X^h,a^h\geq z^h,\forall z\in X^h,a^h\not\geq z^h$ に弱めた時には一般には成立しなくなって、後に見るように、これを回避するため需要対応の拡張という手法を用いる事になる。なお、Nikaido(1956) のこの部分では、$z\in B^h(p^n)$ に対して z^n として z から $B^h(p^n)$ 内への最短距離を満たす点として $z^n\to z(n\to\infty)$ となるという事を述べているが、その証明は与えられていない。ここでは、その議論を安井・二階堂 (1957-8) 以降の著作で使われている、Arrow-Dereu(1954) で用いられた手法と同様の議論に、置き換えた。なお、安井・二階堂 (1957-8) 以降の著作ではなぜこのように変更したのかという事について、説明は与えられていない。たぶん、直観的には最短距離の議論が成立しそうなのであるが、その証明は Arrow-Dereu(1954) で用いられた手法に比べるとやや混み入った形になってしまうからではないかと思われる。

[25] $p^n\cdot z^n\leqq p^n\cdot a^h$ であるが、$p^n\cdot z^n=p^n\cdot a^h$ とは限らないので、ここでだけ予算制約を $p\cdot x=p\cdot a^h,x\in R^l_+$ ではなくて $p\cdot x\leqq p\cdot a^h,x\in R^l_+$ として与えて、$z^n\in\overline{B}^h(p^n)=\{x\in E:p\cdot x\leqq p\cdot a^h\}$ としているが、U^h の強単調性より $\phi^h(p^n)=\arg\max\{U^h(x):x\in\overline{B}^h(p^n)\}$ でもあるので、$x^n\in\phi^h(p^n)$ と $z^n\in\overline{B}^h(p^n)$ より $U^h(x^n)\geqq U^h(z^n)$ となる。

[26] ここでは、$a^h>0$ と $p\geq 0$ より $p\cdot z=p\cdot a^h>0$ として $\phi^h(\cdot)$ の p における閉性を示した訳であるが、この事を示すのに実際に用いたのは $p\cdot a^h>0$ という事なので、ここでの議論より、$p\cdot a^h>0$ であれば $\phi^h(\cdot)$ の p における閉性が成立する。なお、付録 2 では、この結果の Gale(1955) による証明を与える。そこでは $x\notin\phi^h(p)$ として矛盾を導いて結果を示している。

$\phi(p^n), n = 1, \cdots, x^n \to x \in R^l (n \to \infty)$ とする。$x^n \in \Gamma, n = 1, \cdots$ と Γ の閉性から $x \in \Gamma$ である。各 $n = 1, 2, \cdots$ において $x^n \in \phi(p^n) = \sum_{h=1}^{H} \phi^h(p)$ より $x^n = \sum_{h=1}^{H} x^{hn}, x^{hn} \in \phi^h(p^h) \subset E, h = 1 \cdots, H$ となるが、E のコンパクト性から各 $(x^{hn})_{n=1}^{\infty}$ には収束部分列 $(x^{hn_q})_{q=1}^{\infty}$ が存在して $x^{hn_q} \to x^h \in E (q \to \infty), h = 1 \cdots, H$ となり、$x^{n_q} = \sum_{h=1}^{H} x^{hn_q} \to \sum_{h=1}^{H} x^h (q \to \infty)$ となって極限の一意性から $x = \sum_{h=1}^{H} x^h$ となる。すると、$p^{n_q} \to p \in S^l (n \to \infty), x^{hn_q} \in \phi^h(p^{n_q}), \in x^{hn_q} \to x^h \in E (q \to \infty), h = 1 \cdots, H$ となるが、ϕ^h の閉性から $x^h \in \phi^h(p), h = 1 \cdots, H$ となって $x = \sum_{h=1}^{H} x^h \in \sum_{h=1}^{H} \phi^h(p) = \phi(p)$ となり、ϕ は閉対応である。[27]

すると、$\phi(p)$ と $\theta(x)$ の非空凸値性から $[\phi \times \theta](x, p) = \phi(p) \times \theta(x) \subset \Gamma \times S^l$ は非空凸値である。また、$(x^n, p^n) \in \Gamma \times S^l, (x^n, p^n) \to (x, p) \in \Gamma \times S^l (n \to \infty), (z^n, q^n) \in (\phi \times \theta)(x^n, p^n) = \phi(p^n) \times \theta(x^n), n = 1, \cdots, (z^n, q^n) \to (z, q) (n \to \infty)$ とすると $\Gamma \times S^l$ の閉性より $(z, q) \in \Gamma \times S^l$ であるが、$p^n \to p, z^n \to z, z^n \in \phi(p^n), x^n \to x, q^n \to q, q^n \in \theta(x^n)$ なので ϕ と θ の閉性から $z \in \phi(p), q \in \theta(x)$ となって $(z, q) \in \phi(p) \times \theta(x) = (\phi \times \theta)(x, p)$ となり、$\phi \times \theta$ は閉対応である。[28]　これより、$\Gamma \times S^l$ や $\phi \times \theta$ は角谷不動点定理の条件を満たすので $\phi \times \theta$ には不動点が存在して、この純粋交換経済には競争均衡が存在する。[29]　以上より以下の結果が得られる。

定理 1.1 *A*.1 と *A*.2 を満たす交換経済には競争均衡 $[x^1, \cdots, x^H, p]$ が存在する。この時 $p > 0$ である。

なお、$\Lambda = \{x \in R^l : -Hc \leqq x \leqq Hc\}, f(p) = \phi(p) - a, p \in S^l$ とすると $f(p) \subset \Lambda, p \in S^l$ となって $f : S^l \to \Lambda$ は非空凸値閉対応で $z \in f(p), p \in S^l$ に対して $p \cdot z = 0$ となるので、ここでの角谷不動点定理を用いた議論より、$\exists \overline{p} \in S^l$ が存在して $\overline{z} \leqq 0, \exists \overline{z} \in f(\overline{p})$ となる。[30] この議論が次のゲール・二階堂の補題と呼ばれる結果である。[31]

命題 1.1 $\Lambda (\subset R^l)$ を非空凸コンパクト集合として、対応 $f : S^l \to \Lambda$ が非空凸値閉対応で $z \in f(p)$ に対して $p \cdot z \leqq 0$ とすると、$\exists \overline{p} \in S^l, f(\overline{p}) \cap -(R^l_+) \neq \varnothing$ となる。

3　レオンチェフ型世界貿易モデルにおける競争均衡の存在

次に、生産可能性集合によって特徴付けられる生産経済における競争均衡の存在を示し、それを各国が効用関数を持っているようなレオンチェフ型世界貿易モデル (1933) に適用し

[27] これより二つのコンパクトな値域を持つ (凸値) 閉対応のベクトル和対応も (凸値) 閉対応になるが、この議論を繰り返せば、有限個のコンパクトな値域を持つ (凸値) 閉対応のベクトル和対応も (凸値) 閉対応になる。

[28] これより二つのコンパクトな値域を持つ (凸値) 閉対応の直積対応も (凸値) 閉対応になり、この議論を繰り返せば、有限個のコンパクトな値域を持つ (凸値) 閉対応の直積対応も (凸値) 閉対応になる。

[29] この $\phi \times \theta$ に不動点が存在して $0 \geqq (\overline{x} - a), \exists \overline{x} \in \phi(\overline{p})$ となる部分を以下の命題 1.1 において再度取り上げて、ゲール・二階堂の補題として定式化しておく。

[30] なお、既に触れておいたように、$z \in f(p), p \in S^l$ に対して $p \cdot z \leqq 0$ としてもこの結果は成立するが、定理 1. 1 のように、$\overline{p} > 0$ となるとは限らないので $\overline{z} = 0$ となるとは限らない。

[31] この結果は Nikaido(1956) と Gale(1955) で独立に証明されている。Nikaido(1956) ではここで見たように角谷不動点定理を利用しているが、Gale(1955) では KKM 補題、ブラウワー不動点定理、そして重心分割を利用している。付録 2 で、この Gale(1955) によるゲール・二階堂補題の別証を与える。なお、この結果は Debreu(1956) で更に R^l_+ から原点を頂点とする閉凸錐へ拡張されたが、その証明でもここでの Nikaido(1956) の証明方法と同様に角谷の不動点定理を用いている。ただし、Debreu(1956) では Nikaido(1956) には全く触れていない。なお、ここでの Nikaido(1956) の証明方法は Debreu(1959) にゲール・二階堂の補題の証明として採用されたものと同様である。

て、その経済における競争均衡の存在を示す。ミル-ヴァイナー-グレアム型世界貿易モデルでは各国がミル-ヴァイナー型の需要関数を持つ事を前提にしているが、このレオンチェフ型世界貿易モデルでは各国が効用関数を持っているとしている。

最初に、需要対応 $\phi : S^l \to \Gamma$ と供給対応 $\varphi : S^l \to \Lambda$ が与えられている抽象 (生産) 経済を考える。$\Gamma, \Lambda (\subset R^l_+)$ は各々非空凸コンパクトで ϕ と φ は非空凸値閉対応する。また、$p \in S^l, x \in \phi(p), y \in \varphi(p)$ ならば $p \cdot x = p \cdot y$ として、消費部門の所得が生産部門の生産所得になっているとする。[32]　ここでは $\varphi(p) \subset R^l_+$ としていて最終財のみが生産されており、生産のみに使われる産出物である中間財はないとする。更に自由財排除の仮定として、$p_i = 0$ ならば $x_i > y_i, x \in \phi(p), y \in \varphi(p)$ として、価格がゼロになっている財には超過需要が発生するとする。[33]　前節の純粋交換経済モデルはこの生産経済モデルにおいて $\varphi(p) = a$ $\forall q \in S^l, \Lambda = \{a\}$ とした特殊例である。

この生産経済の価格調節関数 $\theta : \Gamma \times \Lambda \to S^l$ を $(x, y) \in \Gamma \times \Lambda \to \theta(x, y) = \{p \in S^l : p \cdot (x - y) = \max_{q \in S^l} q \cdot (x - y)\}$ によって定義する。ワイエルシュトラスの最大最小定理、S^l のコンパクト性、そして、内積 $\cdot$ の連続性より $\max\{q \cdot (x - y) : q \in S^l\}$ には最大解が存在して $\theta(x, y) \neq \varnothing$ である。$p, p' \in \theta(x, y), a \in (0, 1)$ とする。$p \cdot (x - y) \geqq q \cdot (x - y), p' \cdot (x - y) \geqq q \cdot (x - y), \forall q \in S^l$ なので $[ap + (1 - \alpha)p'] \cdot (x - y) = ap \cdot (x - y) + (1 - \alpha)p' \cdot (x - y) \geqq aq \cdot (x - y) + (1 - \alpha)q \cdot (x - y) = q \cdot (x - y), \forall q \in S^l$ となって $[ap + (1 - \alpha)p'] \in \theta(x, y)$ となり、$\theta(x, y)$ は凸である。次に、$(x^n, y^n) \in \Gamma \times \Lambda, n = 1, \cdots, (x^n, y^n) \to (x, y) \in \Gamma \times \Lambda (n \to \infty), p^n \in \theta(x^n, y^n), n = 1, \cdots, p^n \to p \in R^l (n \to \infty)$ とすると $p^n \in S^l, n = 1, \cdots,$ と S^l の閉性より $p \in S$ である。任意に所与の $q \in S^l$ に対して $p^n \in \theta(x^n, y^n)$ より $p^n \cdot (x^n - y^n) \geqq q \cdot (x^n - y^n)$ となり、内積 $\cdot$ の連続性より $p \cdot (x - y) \geqq q \cdot (x - y)$ となるが、これが任意の $q \in S^l$ に対して成立するので $p \cdot (x - y) = \max\{q \cdot (x - y) : q \in S^l\}$ となり、$p \in \theta(x, y)$ となって θ は閉対応である。

ここで直積写像 $\phi \times \varphi \times \theta : \Gamma \times \Lambda \times S^l \to \Gamma \times \Lambda \times S^l, (\phi \times \varphi \times \theta)(x, y, p) = \phi(p) \times \varphi(p) \times \theta(x, y)$ を考えると、各写像の非空凸値閉性からこの直積写像 $\phi \times \varphi \times \theta$ の非空凸値閉性が成立する。[34]　すると角谷の不動点定理より不動点 (x^*, y^*, p^*) が存在して $(x^*, y^*, p^*) \in (\phi \times \varphi \times \theta)(x^*, y^*, p^*) = \phi(p^*) \times \varphi(p^*) \times \theta(x^*, y^*)$ となり、$x^* \in \phi(p^*), y^* \in \varphi(p^*), p^* \in \theta(x^*, y^*)$ となる。$p^* \cdot x^* = p^* \cdot y^*$ なので $q = e^i, i = 1, \cdots, l$ とすると、$0 = p^* \cdot (x^* - y^*) \geqq e^i \cdot (x^* - y^*) = x^*_i - y^*_i, i = 1, \cdots, l$ となって $0 \geqq x^* - y^*$ となる。[35]　そして、$p^*_i = 0$ とすると自由財排除の仮定より $x^*_i > y^*_i$ となって $0 \geqq x^*_i - y^*_i$ に矛盾するので $p^* > 0$ となる。すると、$p^* \cdot (x^* - y^*) = 0$ と $0 \geqq x^* - y^*$ より $x^* - y^* = 0$, つまり $x^* = y^*$ となって需給が一致して $(\phi(p^*) \cap \varphi(p^*)) \neq \varnothing$ となる。これより、以下の抽象生産経済における競争均衡の存在命題が得られた。

命題 2.1 需要対応 $\phi : S^l \to \Gamma$ と供給対応 $\varphi : S^l \to \Lambda$ が与えられている抽象 (生産) 経済において、$\Gamma, \Lambda (\subset R^l_+)$ は各々非空凸コンパクトで ϕ と φ は非空凸値閉対応とし、$p \in S^l, x \in \phi(p), y \in \varphi(p)$ ならば $p \cdot x = p \cdot y$ で、$p_i = 0$ ならば $x_i > y_i, x \in \phi(p), y \in \varphi(p)$ となるとすると、ある $p^* (\in S^l) > 0$ が存在して $(\phi(p^*) \cap \varphi(p^*)) \neq \varnothing$ となる。

以上の抽象生産経済の一例としてレオンチェフ型世界貿易モデルを考えて、この抽象生産経済の均衡存在命題をそのモデルに適用する。この世界経済では l 個の財が存在してこれらは

[32] $p \in S^l, x \in \phi(p), y \in \varphi(p)$ に対して $p \cdot x = p \cdot y$ としているが、$p \cdot x \leqq p \cdot y$ とする場合には以下の部分では $x^* \leqq y^*$ となるだけで、$x^* = y^*$ となるとは限らない。

[33] 境界条件と呼ばれる事も多い。

[34] これについては脚注 () ですでに述べた。

[35] $x^* \in \phi(p^*), y^* \in \varphi(p^*), p^* \in \theta(x^*, y^*)$ となるが、$p^* \cdot x^* \leqq p^* \cdot y^*$ とするケースでも、$q = e^i, i = 1, \cdots, l$ とするば、$0 \geqq p^* \cdot (x^* - y^*) \geqq e^i \cdot (x^* - y^*) = x^*_i - y^*_i, i = 1, \cdots, l$ となって $0 \geqq x^* - y^*$ となる。

最終財として貿易されてるが、中間財としては貿易されないとし、価格集合を S^l とする。[36] この世界経済には m 個の国があり、各国はそれ自身の技術と有限の本源的生産要素の利用により産出可能となる最終財の生産可能性集合を $\Lambda^h(\subset R^l_+)$ とする。ここでは、他国で生産された財を輸入して中間財として生産工程に投入する事は出来ないとしている。$\Lambda = \sum_{h=1}^{H} \Lambda^h$ を総世界生産集合とする。各国は l 個の財最終財に関する社会的効用関数 $U^h : R^l_+ \to R$ を持ち、この U^h は $A.2$ を満たして準凹連続強単調的とする。[37]　この世界経済では各国に存在する本源的生産要素だけが非貿易財となり、これはその国の効用関数の中へは明示的に入れていない。Λ^h については以下を仮定する。

A.1′　各 $h = 1, \cdots, H$ について Λ^h は非空凸コンパクトで $(\Lambda^h \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ である。[38]

この世界経済の競争均衡、つまり自由貿易均衡を定義する。以下の条件が満たされる時に $(2H+1)$ 個の組 $[x^1, \cdots, x^H, y^1, \cdots, y^H, p](\in R^{2Hl}_+ \times (R^l_+ \backslash \{0\}))$ を競争均衡 (自由貿易均衡) と呼ぶ：[39]

(a) $\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{h=1}^{H} y^h$

(b) $U^h(x^h) = \max\{U^h(x) : p \cdot x = p \cdot y^h, x \in R^l_+\}, h = 1, \cdots, H.$[40]

(c) $p \cdot y^h = \max\{p \cdot z : z \in \Lambda^h\}, h = 1, \cdots, H.$

ここで h 国の所得関数 $I^h : S^l \to R_+$ を $I^h(p) = \max\{p \cdot z : z \in \Lambda^h\}$ とすると、内積の連続性と Λ^h のコンパクト性から I^h は S^l 上で連続である。[41]　また、$(\Lambda^h \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ より $\overline{y}^h \in (\Lambda^h \cap R^l_{++})$ とすれば $I^h(p) \geqq p \cdot \overline{y}^h > 0$ となるので $\forall p \in S^l, I^h(p) > 0$ である。

前節の純粋交換経済のケースの補題 1.1 と同様に、この経済の競争均衡を見つけるには、経済を充分に大きな範囲に制限すればよい。具体的には、$\Lambda = \sum_{h=1}^{H} \Lambda^h$ を総世界生産集合とすると、各 Λ^h が非空凸コンパクトなので Λ も同じ性質を持って上に有界である。そこで、

---

[36]労働や資本などの本源的生産要素は国際間を移動出来ない非貿易財であるが、これら l 個の最終財は全て国際貿易されて最終財には非貿易は存在しない。

[37]ここでのレオンチェフ型世界貿易モデルでは、このように各国が効用関数を持っているとしていて、これがミル-ヴァイナー-グレアム型世界貿易モデルにおいて各国がミル-ヴァイナー型の需要関数を持つという事との差異である。

[38]Nikaido(1956) では $(\Lambda^h \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ という条件は明示的に述べていないが、この条件があれば各国の需要関数が閉対応になるので、ここでは明示的に述べておいた。なお、リカード型生産可能性集合はこの Λ^h の具体的な例の一つである。

[39]Nikaido(1956) では $feasible\ solution$ と呼ばれている。

[40]予算制約は $p \cdot x \leqq p \cdot y^h, x \in R^l_+$ であるが、U^h の強単調性よりここでも $p \cdot x = p \cdot y^h, x \in R^l_+$ としておいてよい。需要対応の閉性を示す際に $p \cdot x \leqq p \cdot y^h, x \in R^l_+$ の予算制約を用いる。

[41]今 $p^n \in S^l, n = 1, \cdots, p^n \to p(\in S^l)(n \to \infty)$ とする。まず、内積の連続性と Λ^h のコンパクト性から $I^h(p^n) = p^n \cdot z^n : \exists z^n \in \Lambda^h, n = 1, \cdots, I^h(p) = p \cdot z : \exists z \in \Lambda^h$ となるが、コーシー・シュワルツの不等式より $(0 \leqq) I^h(p^n) = p^n \cdot z^n \leqq ||p^n|| ||z^n||$ なので、Λ^h と S^l のコンパクト性から右辺は有界であり、故に、$(I^h(p^n))_{n=1}^{\infty}$ は有界数列である。すると、$I^h(p^n) \to I^h(p)$ は $(I^h(p^n))_{n=1}^{\infty}$ の任意の収束部分列 $(I^h(p^{n_q}))_{q=1}^{\infty}$ の極限が $I^h(p)$ である事を示せばよい。そこで $I^h(p^{n_q}) \to \alpha(q \to \infty)$ とする。$I^h(p^{n_q}) = p^{n_q} \cdot z^{n_q} : \exists z^{n_q} \in \Lambda^h, q = 1, \cdots,$ であるが、Λ^h のコンパクト性から $(z^{n_q})_{q=1}^{\infty}$ には収束部分列が存在するが、それに応じて $I^h(p^{n_q}) = p^{n_q} \cdot z^{n_q}$ の更なる部分列を取ってもその極限は α なので、$z^{n_q} \to z'(\in \Lambda^h)(q \to \infty)$ として $p^{n_q} \cdot z^{n_q} \to p \cdot z' = \alpha$ として良い。今 $z \in \Lambda^h$ を任意に固定すると $I^h(p^{n_q}) = p^{n_q} \cdot z^{n_q} \geqq p^{n_q} \cdot z$ なので $q \to \infty$ とした極限では $p \cdot z' = \alpha \geqq p \cdot z$ となって、$\alpha = p \cdot z' = \max\{p \cdot z : z \in \Lambda^h\} = I^h(p)$ となり、故に、$I^h(p^n) \to I^h(p)(n \to \infty)$ となって $I^h(\cdot)$ は S^l 上で連続である。

$c(\in R^l_{++})$ を $c > y, \forall y \in \Lambda$ となるように選んで、各国の消費集合を $E = \{x \in R^l_+ : x \leqq c\}$ に制限し、更に、世界経済全体での消費集合を $\Gamma = \{x \in R^l_+ : x \leqq Hc\}$ に制限すればよい。すると、

補題 2.1 (a) と (c) の下では、(b) は次の (b') と同値となる。[42]

(b') $U^h(x^h) = \max\{U^h(x) : p \cdot x = p \cdot y^h, x \in E\}, x = 1, \cdots, H.$

証明. まず、x^h が (b) を満たしているとすると、(a) より $(0 \leqq)x^h \leqq \sum_{h'=1}^{H} x^{h'} = \sum_{h=1}^{H} y^h = y < c$ より $x^h \in E$ となって (b') が成立する。次に、$[x^1, \cdots, x^H, y^1, \cdots, y^H, p]$ が $(a), (b'), (c)$ を満たしているとする。$\exists i \in \{1, \cdots, l\}$ に対して $p_i = 0$ とすると、追加費用無しで第 i 財の消費量をいくらでも増やす事が出来て、しかもそのような消費点は U^h の強単調性より元の点 x^h よりも望ましく、故に、$x^h_i = c_i$ となって、$\sum_{h=1}^{H} x^h_i = Hc_i \geqq c_i > \sum_{h=1}^{H} y^h = y$ となり、(a) に矛盾する。これより $p > 0$ である。今、$\exists h \in \{1, \cdots, H\}$ に対して x^h が (b') を満たしているが (b) は満たしておらず、$\exists z^h \in R^l_+ \backslash E$ に対して $U^h(z^h) > U^h(x^h), p \cdot z^h = I^h(p)$ とする。$z^h \neq x^h$ である。また、$p \cdot y^h = I^h(p) > 0$ より $p \cdot x^h = p \cdot z^h = I^h(p) > 0$ なので $x^h, z^h \geq 0$ である。z^h と x^h を結ぶ線分で E に属して z^h に一番近い点を w^h とすると、そのような点は確かに存在して、$\exists \alpha' \in (0,1), w^h = \alpha' z^h + (1-\alpha')x^h$ と表され、$w^h \neq x^h, w^h \neq z^h$ である。[43] この時 $p \cdot x^h = p \cdot z^h = I^h(p)$ より $p \cdot w^h = p \cdot (\alpha' z^h + (1-\alpha')x^h) = \alpha' p \cdot z^h + (1-\alpha')p \cdot x^h = I^h(p)$ となるので x^h の定義より $U^h(x^h) \geqq U^h(w^h)$ である。U^h の強単調性と $x^h \geq 0$ より $U^h(x^h) > U^h(0)$ となる。$\beta \in [0,1]$ に対して $U^h(\beta z^h)$ を β の連続関数とみなすと、$\beta = 0$ の時に $U^h(0)$ で $\beta = 1$ の時に $U^h(z^h)(> U^h(x^h))$ なので、連続関数の中間値定理より $\exists \beta' \in (0,1)$ に対して $U^h(\beta' z^h) = U^h(x^h)$ となる。$z^h \geq 0$ と $\alpha' \in (0,1)$ より $\alpha'\beta' z^h + (1-\alpha')x^h \leq \alpha' z^h + (1-\alpha')x^h = w^h$ となるので、U^h の強単調性から $U^h(\alpha'\beta' z^h + (1-\alpha')x^h) < U^h(w^h)$ となるが、U^h の準凹性より $U^h(\alpha'\beta' z^h + (1-\alpha')x^h) \geqq \min\{U^h(\beta' z^h), U^h(x^h)\} = U^h(x^h)$ なので $U^h(w^h) > U^h(x^h)$ となり、(b') ぶよる $U^h(x^h) \geqq U^h(w^h)$ に矛盾する。故に、このような z^h は存在せず、x^h が E 上で $p \cdot x = I^h(p)$ の制約で $U^h(x)$ 最大にしていれば、x^h は R^l_+ 上で $p \cdot x = I^h(p)$ の制約で $U^h(x)$ を最大にしている事になる。 □

これより、各国の消費集合を $E = \{x \in R^l_+ : x \leqq c\}$ に制限し、更に、世界経済全体での消費集合を $\Gamma = \{x \in R^l_+ : x \leqq Hc\}$ に制限した経済において、競争均衡を見つければよい。そこでこの制限された世界経済における各国の需要対応 $\phi^h : S^l \to E$ と供給対応 $\varphi^h : S^l \to \Lambda^h$ をそれぞれ、$\phi^h(p) = \{x \in E : p \cdot x = I^h(p), p \cdot x' = I^h(p) \to U^h(x) \geqq U^h(x')\} = \arg\max\{U^h(x) : p \cdot x = I^h(p), x \in E\}, h = 1, \cdots, H$ と $\varphi^h(p) = \{y^h \in \Lambda^h : p \cdot y^h = I^h(p)\}, h = 1, \cdots, H,$ とによって定義する。[44] そして、これらを各々総和して世界総需要対応 $\phi : S^l \to \Gamma$ と世

[42] Arrow-Debreu(1954,p,) 参照。

[43] $\alpha' = \sup\{\alpha \in [0,1] : \alpha z^h + (1-\alpha)x^h \in E\}$ として α' を定義すると、$\alpha = 0$ の時に $\alpha z^h + (1-\alpha)x^h = x^h \in E$ となる事よりこの上限は存在するが、(c) より $\exists y \in \Gamma, x^h \leqq \sum_{h=1}^{H} x^h_i = \sum_{h=1}^{H} y^h_i < c$ なので、充分に小さい $\alpha''(> 0)$ に対して $\alpha'' z^h + (1-\alpha'')x^h \in E$ となり、$\alpha' > 0$ である。また、1 に十分に近い適当な $\alpha \in (0,1)$ に対して E の閉性より $\alpha z^h + (1-\alpha)x^h \notin E$ なので $\alpha' \leqq \alpha < 1$ である。上限の性質より $\exists(\alpha^n) \subset [0,1], \alpha^n \to \alpha'(n \to 0)$ となり、$\alpha^n z^h + (1-\alpha^n)x^h (\in E) \to \alpha' z^h + (1-\alpha')x^h$ となるが、E は閉集合なので $\alpha' z^h + (1-\alpha')x^h \in E$ となる。また、上限の性質より $(1 \geqq)\alpha > \alpha' \to \alpha z^h + (1-\alpha)x^h \notin E$ なので、結局 z^h と x^h を結ぶ線分で E に属して z^h に一番近い点 w^h は $w^h = \alpha' z^h + (1-\alpha')x^h \in E$ となる。$z^h \neq x^h$ と $\alpha' \in (0,1)$ より $w^h \neq x^h, w^h \neq z^h$ である。

[44] $U^h(\cdot)$ の強単調性より、$\phi^h(p)$ の定義において $p \cdot x \leqq I^h(p)$ としておいてもよい。

界総供給対応 $\varphi : S^l \to \Lambda$ を $\phi(p) = \sum_{h=1}^{H} \phi^h(p), \varphi(p) = \sum_{h=1}^{H} \varphi^h(p)$ によって定義する。この時、$p \cdot x = \sum_{h=1}^{H} I^h(p) (= I(p)) = p \cdot y, \forall x \in \phi(p), y \in \varphi(p), \forall p \in S^l$ である。[45] そして、これらの ϕ や φ が抽象生産経済における ϕ や φ の性質を満たせば、$\exists p \in S^l, (\phi(p) \cap \varphi(p)) \neq \varnothing$ となるので、ここでの ϕ や φ がこれらの性質を満たす事を示せばよい。そこでまず、各 ϕ^h や φ^h がこれらの性質を満たす事を示す。

まず、供給対応 φ^h が非空凸値閉対応である事から始める。$\varphi^h(p) \neq \varnothing$ は内積 $\cdot$ の連続性と S^l のコンパクト性より成立する。$\varphi^h(p)$ の凸値性は内積 $\cdot$ の線形性と Λ^h の凸性より成立する。$\varphi^h(p)$ の閉性は所得 (利潤) 関数 $I^h(\cdot)$ の連続性と Λ^h と S^l のコンパクト性より成立する。実際、$p^n \to p \in S^l, y^n \in \varphi^h(p^n), y^n \to y$ とすると、Λ^h の閉性より $y \in \Lambda^h$ であるが、内積 $\cdot$ の連続性より $p^n \cdot y^n = I^h(p^n) \to p \cdot y$ となり、$I^h(\cdot)$ の連続性より $I^h(p^n) \to I^h(p)$ となるので、極限の一意性から $I^h(p) = p \cdot y$ となって $y \in \varphi^h(p)$ となり、φ^h は閉となる。すると、前節の純粋交換経済のケースの最後の部分で $\phi^h : S^l \to \Gamma^h$ が非空凸値閉対応の時に $\phi = \sum_{h=1}^{H} \phi^h : S^l \to \Gamma$ が非空凸値閉対応になったのと同様にして、$\varphi : S^l \to \Lambda$ も非空凸値閉対応になる。[46]

次に、需要対応 ϕ^h が非空凸値閉対応である事を示す。$B^h(p) = \{x \in E : p \cdot x = I^h(p)\}$ を第 h 国の予算集合とすれば $\phi^h(p) = \arg\max\{U^h(x) : x \in B^h(p)\}$ であるが、$\exists y \in \Lambda^h, I^h(p) = p \cdot y (> 0), y \geqq 0$ より $y \in B^h(p)$ なので $B^h(p) \neq \varnothing$ であり、また、E のコンパクト性より $B^h(p)$ もコンパクトなので、ワイエルシュトラスの最大最小定理によって $U^h(\cdot)$ の連続性より $\max\{U^h(x) : x \in B^h(p)\}$ には解が存在して $\phi^h(p) \neq \varnothing$ である。内積 $\cdot$ の線形性と E の凸性から $B^h(p)$ は凸である。[47] $x, x' \in \phi^h(p), a \in (0,1)$ とすると U^h の準凹性より、$U^h(\alpha x + (1-\alpha)x') \geqq \max[U^h(x), U^h(x')] = U^h(x) (= U^h(x')) \geqq U^h(z), \forall z \in B^h(p)$ なので $\alpha x + (1-\alpha)x' \in \phi^h(p)$ となり、$\phi^h(p)$ は凸である。次に、$p^n \to p \in S^l (n \to \infty), x^n \in \phi^h(p^n), n = 1, \cdots, x^n \in E, n = 1, \cdots, x^n \to x (n \to \infty)$ とすると E の閉性より $x \in E$ であり、$p^n \cdot x^n = I^h(p^n), n = 1, \cdots$ なので $I^h(\cdot)$ と内積 $\cdot$ の連続性より $p \cdot x = I^h(p)$ となって $x \in B^h(p)$ である。$z \in B^h(p)$ に対して $U^h(x) \geqq U^h(z)$ を示す。$I^h(p) > 0$ と $I^h(\cdot)$ の連続性より充分に大きい n' に対して $p^n \cdot x^n = I^h(p^n) > 0, \forall n > n'$ となる。そこで $\lambda^n = I^h(p^n) / \max\{I^h(p^n), p^n \cdot z\}, \forall n > n'$ とすると $\max\{I^h(p^n), p^n \cdot z\} \geqq I^h(p^n) > 0$ より $\lambda^n \in (0,1]$ であり、$p \cdot z = I^h(p)$ なので数列の極限の性質より $\lim_{n\to\infty} \max\{I^h(p^n), p^n \cdot z\} = \max\{\lim_{n\to\infty} I^h(p^n), \lim_{n\to\infty} p^n \cdot z\} = \max\{I^h(p), p \cdot z\} = I^h(p)$ となって $\lambda^n \to 1 (n \to \infty)$ となる。そこで、$z^n = \lambda^n z, \forall n > n'$ とすると $E(\ni 0)$ の凸性より $z^n \in E$ であり、$z^n \to z (\in E) (n \to \infty)$ である。[48] また、

---

[45] $\phi^h(p)$ の定義において $p \cdot x \leqq I^h(p)$ として時には $p \cdot x \leqq p \cdot y = \sum_{h=1}^{H} I^h(p), \forall x \in \phi(p), y \in \varphi(p), \forall p \in S^l$ となる。また、$y \in \varphi(p)$ とすると $y = \sum_{h=1}^{H} y^h, y^h \in \varphi(p)$ となるので $p \cdot y = p \cdot \sum_{h=1}^{H} y^h = \sum_{h=1}^{H} p \cdot y^h = \sum_{h=1}^{H} I^h(p) (= I(p))$ となり、$y' \in \Lambda$ とすると $y' = \sum_{h=1}^{H} y^{h\prime}, y^{h\prime} \in \Lambda^h$ より $p \cdot y = \sum_{h=1}^{H} I^h(p) \geqq \sum_{h=1}^{H} p \cdot y^{h\prime} = p \cdot \sum_{h=1}^{H} y^{h\prime} = p \cdot y'$ となるので $I(p) = \max\{p \cdot y : y \in \Lambda\}$ であり、$\varphi(p) = \arg\max\{y \in \Lambda : p \cdot y = I(p)\}$ である。

[46] 脚注 21)。

[47] 実際、$x, x' \in E$ で E は凸なので $[ax + (1-\alpha)x'] \in E$ であり、また、$p \cdot [ax + (1-\alpha)x'] = ap \cdot x + (1-\alpha)x' = aI^h(p) + (1-\alpha)I^h(p) = I^h(p)$ なので $ax + (1-\alpha)x' \in B^h(p)$ であり、$B^h(p)$ は凸である。

[48] 図 1-2 と脚注 () 参照。脚注 () で述べたように、これが $B^h(\cdot)$ の p における下半連続性であり、Nikaido(1956) のこの部分では明示的に述べていないが、$I^h(p) > 0, \forall p \in S^l$ が必要なので、本稿では、$(\Lambda^h \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ より $\overline{y}^h \in (\Lambda^h \cap R^l_{++})$ として $I^h(p) \geqq p \cdot \overline{y}^h > 0$ を保証している。

$p^n \cdot z^n = p^n \cdot \lambda^n z = \lambda^n p^n \cdot z \leqq \lambda^n \max\{I^h(p^n), p^n \cdot z\} = I^h(p^n)$ となり、$\overline{B}^h(p^n) = \{x \in E : p \cdot x \leqq I^h(p)\}$ とすると $z^n \in \overline{B}^h(p^n), \forall n > n'$ となるが、(A-2) の選好の強単調性より $\phi^h(p) = \arg\max\{U^h(x) : x \in \overline{B}^h(p)\}$ なので $x^n \in \phi^h(p^n)$ より $U^h(x^n) \geqq U^h(z^n), \forall n > n'$ となる。[49] すると、$z^n \to z, x^n \to x (n \to \infty)$ と U^h の連続性から $U^h(x) \geqq U^h(z)$ となって $x \in \phi^h(p)$ となり、ϕ^h は閉対応である。[50] 故に、φ と同様に、$\phi = \sum_{h=1}^{H} \phi^h : S^l \to \Gamma$ も非空凸値閉対応となる。

最後に、$p_i = 0$ とすると U^h の強単調性より $\phi_i^h(p) = c_i$ となるが、c_i の定義より $\phi_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \phi_i^h(p) = Hc_i \geqq c_i > \varphi_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \varphi_i^h(p)$ となって自由財排除条件も成立する。故に、この世界経済における φ と ϕ は抽象生産経済の φ と ϕ の条件を満たすのでその帰結より $\exists \overline{p} \in S^l, (\phi(\overline{p}) \cap \varphi(\overline{p})) \neq \varnothing$ となり、更に自由財排除条件より $\overline{p} > 0$ である。そして、この競争均衡は c による制限がない元の経済における競争均衡でもあるので、以下が証明された事になる。

定理 2.1 *$A.1'$ と $A.2$ を満たすレオンティエフ型世界経済には、$p > 0$ となる貿易均衡 (競争均衡)$[\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^H, \overline{y}^1, \cdots, \overline{y}^H, \overline{p}]$ が存在する。*

Nikaido(1956) では、McKenzie(1954) によるグレアム (Graham) 型世界経済モデルにおける自由貿易均衡の存在定理に、命題 1.1 のゲール・二階堂の補題に基づく別証を与えていて、ここでもその事を取り上げる。最初に、McKenzie(1954) によるグレアム (Graham) 型世界経済モデルをここでの議論に対応した形で簡潔に紹介する。h 国の技術はリカード型線形生産構造になっていて、第 i 財の労働投入係数を $a_i^h (> 0)$ $\forall i = 1, \cdots, l, h = 1, \cdots, H$ として h 国の技術行列を $A^h = \begin{bmatrix} a_1^h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^h & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_l^h \end{bmatrix}$、$h$ 国の労働利用可能量 (所与) を $l^h (> 0)$ とすると、h 国の生産集合 $\Lambda^h (\subset R_+^l)$ は $\Lambda^h = \{x \in R_+^l : A^h x \leqq l^h\}$ となる。a_i^h が正、A^h が非負行列、そして l^h が正で所与である事よりこの Λ^h は非空凸コンパクトで $(\Lambda^h \cap R_{++}^l) \neq \varnothing$ であり、この Λ^h は上で扱ったレオンティエフ型世界経済の Λ^h の例の一つである。すると、h 国の所得関数 $I^h : S^l \to R_+$ を $I^h(p) = \max\{p \cdot z : z \in \Lambda^h\}$ とすると、レオンティエフ型世界経済の時と同様にして、S^l 上で連続である。$(\Lambda^h \cap R_{++}^l) \neq \varnothing$ より $\exists \varepsilon > 0, I^h(p) \geqq \varepsilon \forall p \in S^l$ である。[51] また、$\Lambda = \sum_{h=1}^{H} \Lambda^h$ を世界生産集合とすると各 Λ^h が有界なので、$\exists c (\in R_{++}^l), c > y, \forall y \in \Lambda$ と出来る。$\varphi^h : S^l \to \Lambda^h$ を $\varphi^h(p) = \{y \in \Lambda^h : p \cdot y = I^h(p)\}$ として h 国の供給対応とすれば、この Λ^h をレオンティエフ型世界経済の Λ^h とみなす事で、同様にして φ^h は非空凸値閉対応であり、$\varphi : S^l \to \Lambda$ を $\varphi(p) = \sum_{h=1}^{H} \varphi^h(p)$ として世界供給対応

[49] $B^h(p) = \{x \in E : p \cdot x = I^h(p)\}$ を第 h 国の予算集合とすれば定義より $\phi^h(p) = \arg\max\{U^h(x) : x \in B^h(p)\}$ であるが、$\overline{B}^h(p) = \{x \in E : p \cdot x \leqq I^h(p)\}$ とすると (A-2) の選好の強単調性より $\phi^h(p) = \arg\max\{U^h(x) : x \in \overline{B}^h(p)\}$ となるので、ここではこの事を明示的に利用した。

[50] ここでは、$(\Lambda^h \cap R_{++}^l) \neq \varnothing$ より $I^h(p) > 0, \forall p \in S^l$ として S^l 上での ϕ^h の閉対応性を示したが、たとえ $I^h(p) > 0, \forall p \in S^l$ となっていなくても、ここでの議論より $I^h(p) > 0$ となる $p \in S^l$ においてこの ϕ^h の閉対応性が成立する。そして、この事は次節で議論する Nikaido(1957) において利用されている。

[51] $\widetilde{y}^h \in (\Lambda^h \cap R_{++}^l)$ とすると内積 $\cdot$ の連続性とワイエルシュトラス定理より $\min\{p \cdot \widetilde{y}^h : p \in S^l\} = q \cdot \widetilde{y}^h, \exists q \in S^l$ となるが、$\widetilde{y}^h > 0, q \geq 0$ より $q \cdot \widetilde{y}^h > 0$ なので $\varepsilon (> 0) = q \cdot \widetilde{y}^h$ とすれば $\varepsilon \leqq p \cdot \widetilde{y}^h \leqq I^h(p)$ $\forall p \in S^l$ となる。

とすれば φ も非空凸値閉対応である。世界所得関数 $I : S^l \to R_+$ を $I(p) = \sum_{h=1}^{H} I^h(p)$ とすると、$I(p) = \sum_{h=1}^{H} I^h(p) = \sum_{h=1}^{H} p \cdot \varphi^h(p) = p \cdot \sum_{h=1}^{H} \varphi^h(p) = p \cdot \varphi(p)$ である。

一方、h 国の需要関数はミル-ヴァイナー型となっていて、$b_i^h (> 0), i = 1, \cdots, l, h = 1, \cdots, H$ は支出性向で $\sum_{i=1}^{l} b_i^h = 1$ として、h 国の (一価) 需要関数 $\phi^h : S_{++}^l \to R_+^l$ は $\phi_i^h(p) = b_i^h I^h(p)/p_i, i = 1, \cdots, l$ で与えられる。[52] $I^h(\cdot)$ の連続性より ϕ^h は S^l の内部 S_{++}^l 上で連続であるが、S^l の境界 ∂S^l 上の p に対しても $p_i > 0$ であれば $I^h(\cdot)$ の連続性より $\phi_i^h(\cdot)$ も p において連続である。ただし、S^l の境界 ∂S^l 上の p に対しては $p_i > 0$ であれば $I^h(p)$ が p について上に有界である事から $\phi_i^h(p) = b_i^h I^h(p)/p_i < +\infty$ となって $\phi_i^h(p)$ を有限の大きさとして定義出来るが、$p_i = 0$ となっている i に対しては、$I^h(p)$ が p について一様に $\varepsilon (> 0)$ 以上である事から $\phi_i^h(p) = b_i^h I^h(p)/p_i = +\infty$ となって $\phi_i^h(p)$ を有限の大きさとして定義することが出来ず、S^l の境界 ∂S^l 上では ϕ^h に対して通常の意味での連続性を考える事が出来ない。この点を回避するために、McKenzie(1954) では、$\phi_i^h(p) = b_i^h I^h(p)/p_i > c$ となる $p (\in S^l, p_i > 0)$ は均衡価格になりえない事を考慮して、S_{++}^l 上の p や S^l の境界 ∂S^l 上の p で $p_i > 0$ となる i に対しては $\phi_i^h(p)$ の値を c 以下に制限して $\widehat{\phi}_i^h(p) = \min\{b_i^h I^h(p)/p_i, c\}, i = 1, \cdots, l$ とし、S^l の境界 ∂S^l 上の p で $p_i = 0$ となる i に対しては $\widehat{\phi}_i^h(p)$ の値を c とする事によって新しい需要関数 $\widehat{\phi}^h : S^l \to R_+^l$ を定義すると、$\widehat{\phi}^h$ は S^l 上で連続になる。実際、ϕ_i^h を一つ取り上げ、$p^n (\in S^l) \to p (\in S^l) (n \to \infty)$ とすると、$p_i > 0$ か $p_i = 0$ となるが、$p_i > 0$ とすると $p_i^n > 0, n = 1, \cdots,$ となるので $I^h(\cdot)$ の p における連続性より $\phi_i^h(\cdot)$ も p において連続であり、$\widehat{\phi}_i^h(p) = \min\{\phi_i^h(p), c\} = \min\{\lim_{n\to\infty} \phi_i^h(p^n), c\} = \lim_{n\to\infty} \min\{\phi_i^h(p^n), c\} = \lim_{n\to\infty} \widehat{\phi}_i^h(p^n)$ となって $\widehat{\phi}_i^h(\cdot)$ の p における連続性が成立する。次に $p_i = 0$ とすると、充分に先のある $\overline{n}$ から $p_i^n = 0 \to p_i = 0$ かまたは $\exists p_i^{n_q} > 0, q = 1, \cdots, p_i^{n_q} \to p_i = 0 (q \to \infty)$ となるが、後者では n_q として $p_i^{n_q} > 0$ なる全てを取り出しておいて $p_i^n = 0 \forall n \neq n_q, q = 1, \cdots,$ としておく。前者では定義より $\widehat{\phi}_i^h(p^n) = c \to \widehat{\phi}_i^h(p) = c (n \to \infty)$ となる。また、後者では充分に大きい q に対して $p_i^{n_q}$ が十分に小さくなるので $b_i^h I^h(p^{n_q})/p_i^{n_q} \geqq b_i^h \varepsilon / p_i^{n_q} > c$ となって $\widehat{\phi}_i^h(p^{n_q}) = c$ となり、また $\forall n \neq n_q$ に対して $p_i^n = 0$ より $\widehat{\phi}_i^h(p^n) = c$ なので、いずれにしても充分に大きい n に対して $\widehat{\phi}_i^h(p^n) = c$ であり、$\widehat{\phi}_i^h(p^n) = c \to \widehat{\phi}_i^h(p) = c (n \to \infty)$ となる。どちらのケースでも $\widehat{\phi}_i^h(p^n) = c \to \widehat{\phi}_i^h(p) = c (n \to \infty)$ となる。故に、$\widehat{\phi}_i^h(\cdot)$ は任意の $p \in S^l$ における連続性が成立するが、$i = 1, \cdots, l$ は任意に取り上げていたので、結局 $\widehat{\phi}^h$ は S^l 上で連続である。[53]

今、h 国の消費集合を $E = \{x \in R_+^l : x \leqq c\}$ に制限すると $\widehat{\phi}^h(S^l) \subset E$ となって $\widehat{\phi}^h : S^l \to E$ となる。この時、$p_i > 0$ とすると $p_i \widehat{\phi}_i^h(p) \leqq p_i \min\{b_i^h I^h(p)/p_i, c\} \leqq p_i b_i^h I^h(p)/p_i = b_i^h I^h(p)$ であり、また、$p_i = 0$ とすると $(0 \leqq) p_i \widehat{\phi}_i^h(p) \leqq p_i c = 0$ より $p_i \widehat{\phi}_i^h(p) = 0$ なので、$p \cdot \widehat{\phi}^h(p) = \sum_{i=1}^{l} p_i \widehat{\phi}_i^h(p) = \sum_{p_i > 0} p_i \widehat{\phi}_i^h(p) \leqq \sum_{p_i > 0} b_i I^h(p) = I^h(p) \sum_{p_i > 0} b_i \leqq I^h(p) \sum_{i=1}^{l} b_i = I^h(p)$ である。更に、世界経済全体での消費集合を $\Gamma = \{x \in R_+^l : x \leqq Hc\}$ に制限して $\widehat{\phi} : S^l \to \Gamma$ を $\widehat{\phi}(p) = \sum_{h=1}^{H} \widehat{\phi}^h(p)$ とすると S^l 上で連続であり、$p \cdot \widehat{\phi}(p) = p \cdot \sum_{h=1}^{H} \widehat{\phi}^h(p) = \sum_{h=1}^{H} p \cdot \widehat{\phi}^h(p) \leqq \sum_{h=1}^{H} I^h(p) = I(p)$ で

[52] 通常は支出性向 $b_i (> 0), i = 1, \cdots, l$ を各国に共通とするが、ここでは Nikaido(1956、p.144) の脚注に従って各国の支出性向が国ごとに異なってもよいとした。

[53] $\widehat{\phi}^h$ は S^l 上の連続関数なので凸値閉対応の特殊ケースである。

ある。この時、$p_i = 0$ ならば $\widehat{\phi}_i^h(p) = c$ より $\widehat{\phi}_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \widehat{\phi}_i^h(p) = Hc > y_i, \forall y \in \varphi(p)$ となり、自由財排除仮定が成立する。すると、世界総需要関数 $\widehat{\phi} : S^l \to \Gamma$ と世界総供給対応 $\varphi : S^l \to \Lambda$ はそれぞれ凸値閉対応であり、$p \cdot \widehat{\phi}(p) \leqq I(p), \forall p \in S^l$ と自由財排除仮定が成立するので、抽象生産経済における競争均衡の存在条件が全て満たされて、$\exists \overline{p} \in S^l, \widehat{\phi}(\overline{p}) \in \varphi(\overline{p})$ となる。更に、自由財排除仮定が成立しているので $\overline{p} > 0$ であり、$\varphi_i(\overline{p}) < c, i = 1, \cdots, l$ より $\widehat{\phi}_i(\overline{p}) < c, i = 1, \cdots, l$ なので $(0 \leqq)\widehat{\phi}_i^h(\overline{p}) \leqq \sum_{k=1}^{H} \widehat{\phi}_i^k(\overline{p}) = \widehat{\phi}_i(\overline{p}) < c, h = 1, \cdots, H$ となって $\widehat{\phi}_i^h(\overline{p}) = \phi_i^h(\overline{p}) = b_i^h I^h(\overline{p})/\overline{p}_i, i = 1, \cdots, l$ となる。$\overline{x}_i^h = b_i^h I^h(\overline{p})/\overline{p}_i, i = 1, \cdots, l, h = 1, \cdots, H$、$\overline{y}^h \in \varphi^h(\overline{p}), h = 1, \cdots, H$ で $\sum_{h=1}^{H} \overline{x}^h = \sum_{h=1}^{H} \overline{y}^h \in \sum_{h=1}^{H} \varphi^h(\overline{p})$ となるように選べば、この $[\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^H, \overline{y}^1, \cdots, \overline{y}^H, \overline{p}]$ は McKenzie(1954) によるグレアム (Graham) 型世界経済モデルにおける競争均衡 (自由貿易均衡) である。したがって、上記の抽象生産経済における競争均衡の存在定理より以下の結果が示された事になる。[54]

定理 2.2 McKenzie(1954) によるグレアム型世界経済モデルには、$\overline{p} > 0$ となる自由貿易均衡 (競争均衡)$[\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^H, \overline{y}^1, \cdots, \overline{y}^H, \overline{p}]$ が存在する。

以上で Nikaido(1956) の主内容を見てきたが、その最終節で更なる一般化について議論している。まず、レオンティエフ世界経済モデルにおける効用関数は自国の消費点にしか依存させていないが、他国の消費点にも依存する形にしても、角谷の不動点定理を適用する写像を適宜修正すれば、競争均衡の存在が問題なく示せるという事を述べている。この問題は McKenzie(1955) において取り扱われていて、実際 Nikaido(1957) の参考文献に挙げられている。また、レオンティエフ世界経済モデルの生産集合では、最終財のみを産出する事を考えているが、消費財としては使われない中間財の投入を考慮してレオンティエフ世界経済モデルを拡張する事を述べている。これについては、各国の生産集合として、投入を負値、産出を生値として扱うアロード・ブリュー・ヒックス型の生産集合を用いればよく、以降の安井・二階堂 (1957)、二階堂 (1960)、Nikaido（1968）で扱うのはこのアロード・ブリュー・ヒックス型の私的所有経済のみである。

ただし、純粋交換経済では各個人が全ての財の数量が正となっている初期保有点を保有し、また、レオンティエフ世界経済モデルでは、各国が常に全ての財を生産できるとしていて、このような純粋交換経済にしてもレオンティエフ世界経済モデルにしても、これによってどのような価格でも正の所得があるので需要対応の (価格集合上での) 閉性が成立するが、この点を緩めたらどうなるのかという点については Nikaido(1956) の更なる一般化に関する最終節では触れていない。この問題については、アロー・ドブリュー (1954) は望ましい財と生産的要素を利用して分析し、その後アロー・ハーン (1971) ではこれらをより一般化した資源関連性を利用して分析し、また、マッケンジー (1959) では既約性を使用して分析している。この問題についての二階堂による分析が次節で扱う Nikaido(1957) で、以降の安井・二階堂 (1957)、二階堂 (1960)、Nikaido（1968）でも用いられている。

[54] McKenzie(1954) での証明の概略は以下である。まず、$p \in S^l$ に対して $\widehat{\phi}(p)$ を対応させ、次に原点 0 からこの $\widehat{\phi}(p)$ までの直線の点で Λ の境界上にある点を $h(\widehat{\phi}(p))$ とし、更に、この点で Λ と直交する点の部分集合を S^l に制限した集合を $g(h(\widehat{\phi}(p))) = (g \circ h \circ \widehat{\phi})(p)$ として、対応 $(g \circ h \circ \widehat{\phi}) : S^l \to S^l$ を構成する。そして、これが非空凸値閉対応である事を示して角谷の不動点定理を適用すると、不動点 $\overline{p} \in (g \circ h \circ \widehat{\phi})(\overline{p})$ が均衡価格である事を示している。

他には、Nikaido(1956) の参考文献の中に forthcoming(Journal of mathematical Society of Japan) として“On a certain coincidence problem”が挙げられているが、実はこれには Nikaido(1956) や Gale（1955）のゲール・二階堂の補題を無限次元財空間で考察したものが含まれていて、Debreu(1954) は 1970〜80 年代に無限次元財空間経済モデルが話題となった時にも先駆的論文として言及される事が多いが、この Nikaido の論文は近年になるまで全く言及される事のない論文である。[55]　この論文は 1959 年に大阪大学社会経済研究所の DP として発表され、Journal of mathematical Society of Japan には 1960 年に発表されて、Nikaido（1968）の参考文献にも挙げられている。

4 Nikaido(1957)

本論文は Nikaido(1956) への補論的なものである。Nikaido(1956) の純粋交換経済では、各消費者の初期保有点に関して全ての財を保有するという、また、その抽象生産経済 (レオンティエフ型世界経済モデル) では、各国が全ての財を生産可能という、かなり厳しい条件を課していた。それを Nikaido(1957) において、純粋交換経済では、各消費者の初期保有点に関して全ての財ではなくてある財を保有し、消費者全体の総初期保有点に関して全ての財を保有するという、また、抽象生産経済 (レオンティエフ型世界経済モデル) では各国が少なくとも 1 つの財を生産して世界全体では全ての財を生産可能という、より緩やかな条件へ変更して、純粋交換経済や抽象生産経済 (レオンティエフ型世界経済モデル) における競争均衡の存在を確立した。ただし、これらの変更は、より現実的な条件として望ましいものであるが、この変更に伴って価格集合全体上での需要対応の閉性が成立しなくなるために、前節までで解説してきた Nikaido(1956) の証明に修正を施す事が必要となる。そこで Nikaido(1957) では、この問題を解決するために、所得が正になるような価格の集合上では需要対応の閉性が成立するので、そのような集合が価格集合の中で稠密である事を利用して、閉性が維持されるようにこの需要対応を価格集合全体へ拡張するという工夫を用いた。[56]　以降の安井・二階堂 (1957-8)、二階堂 (1960)、そして Nikaido(1968) でもこの手法が用いられている。[57]

ここでは、この議論を抽象生産経済 (レオンティエフ型世界経済モデル) において考える。[58]　A.1′ における Λ^h に関する条件を以下の A.1″ に変更して、各国の生産集合 Λ^h には半正な点が存在して $(\Lambda^h \cap R^l_+ \backslash \{0\}) \neq \varnothing$ であり、更に、総世界生産集合 Λ には正な点が存在して $\Lambda(=\sum_{h=1}^{H} \Lambda^h) \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ とする。[59]

A.1″　各 $h = 1, \cdots, H$ について Λ^h は非空凸コンパクトで $(\Lambda^h \cap R^l_+ \backslash \{0\}) \neq \varnothing$ であり、$\Lambda(=\sum_{h=1}^{H} \Lambda^h) \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ である。

[55] このあたりの事情については、久保田 (2006) を参照。Urai(,) が詳細に分析を行っている。次節の最後の部分でもこれに関連した議論をしている。

[56] 所得が正になる価格集合上では需要対応の閉性が成立する事については脚注 (19、37) で触れた。また、この拡張については、Nikaido(1957) では Kuhn(1956) による証明にヒントを得たと記されている。

[57] これらについても引き続き別稿で解説を行う予定である。

[58] Nikaido(1957) では、純粋交換経済はレオンティエフ型世界経済モデルの一例となっている事から、レオンティエフ型世界経済モデルのみを取り上げている。

[59] この事は、純粋交換経済では各消費者が初期保有点として少なくとも 1 つの財を持ち、消費者全体では初期保有点として全ての財を持っている事になる。アロー・ドブリュー・ヒックス型生産経済を用いる、後の安井・二階堂 (1957-8)、二階堂 (1960) や Nikaido(1968) では、初期保有点についてこの条件を仮定していて、別稿としての続編の安井・二階堂 (1957-8) の解説の際にも初期保有点についてこの条件を利用する。

$S_h^l=\{p\in S^l: I^h(p)>0\}$ とすると、$A.1''$ の最初の部分の $(\Lambda^h\cap R_+^l\backslash\{0\})\neq\varnothing$ より $p\in S_{++}^l$ に対して $I^h(p)>0$ となるので $S_{++}^l(\neq\varnothing)\subset S_h^l$ となる。ϕ^h を S_h^l に制限した対応を $\phi^h|_{S_h^l}$ として、$\overline{\phi}^h: S^l\to E(\subset R_+^l)$ を $\overline{\phi}^h(p)=\{x\in E:(p,x)\in cl_{S^l\times E}(gr(\phi^h|_{S_h^l}))\}$ として定義する。つまり、$gr(\phi^h|_{S_h^l})(\subset S_h^l\times E)$ を $S^l\times E$ の部分集合とみなして $S^l\times E$ におけるその閉包を新しい対応 $\overline{\phi}^h: S^l\to E$ のグラフと考える。すると、$\overline{\phi}^h$ は $S^l\times E$ において閉グラフを持つので、閉対応の性質より $\overline{\phi}^h: S^l\to E$ は閉対応となる。[60] そして、$x\in\overline{\phi}^h(p)$ とすると閉包の定義より $\exists(p^n,x^n)\in gr(\phi^h|_{S_h^l})(i.e.,p^n\in S_h^l,x^n\in\phi^h(p^n))\ n=1,2,\cdots,(p^n,x^n)\to(p,x)(n\to\infty)$ となって $p^n\cdot x^n\to p\cdot x(n\to\infty)$ となるが、$I^h(\cdot)$ の S^l 上での連続性と $p^n\cdot x^n=I^h(p^n)$ より $p\cdot x=I^h(p)$ となり、$p\in S^l$ において $p\cdot x=I^h(p)\ \forall x\in\overline{\phi}^h(p)$ となる。また、$gr(\phi^h|_{S_h^l})\subset cl_{S^l\times E}(gr(\phi^h|_{S_h^l}))$ より $p\in S_h^l$ に対して $\phi^h(p)\subset\overline{\phi}^h(p)$ となるが、$x\in\overline{\phi}^h(p)$ とすると、閉包の定義より $\exists(p^n,x^n)\in gr(\phi^h|_{S_h^l})(i.e.,p^n\in S_h^l,x^n\in\phi^h(p^n)),n=1,2,\cdots,(p^n,x^n)\to(p,x)$ となり、$p\in S_h^l$ より $I^h(p)>0$ となっていて ϕ^h は p において (S^l 上で) 閉なので $x\in\phi^h(p)$ となり、$\overline{\phi}^h(p)\subset\phi^h(p)$ となって $\overline{\phi}^h(p)=\phi^h(p)$ となる。[61]　すると、$p\in S_h^l$ に対しては $\overline{\phi}^h(p)=\phi^h(p)$ なので、$\overline{\phi}^h$ は $\phi^h|_{S_h^l}$ の S^l 上への拡張である。　ただし、$\phi^h(p)$ は凸 $\forall p\in S_h^l$ であるが、$\overline{\phi}^h(p)$ は凸 $\forall p\in S^l$ とは限らないので、更に新しい対応 $\widetilde{\phi}^h: S^l\to E$ を $\widetilde{\phi}^h(p)=conv(\overline{\phi}^h(p))\forall p\in S^l$ として定義すると、凸集合に関するカラテオドリー定理より $\widetilde{\phi}^h: S^l\to E$ は凸値閉対応となり、また、$p\in S^l$ において $p\cdot x=I^h(p)\ \forall x\in\widetilde{\phi}^h(p)$ となる。[62]　もちろん、$p\in S_h^l$ では $\overline{\phi}^h(p)=\phi^h(p)$ で $\phi^h(p)$ は凸なので $\widetilde{\phi}^h(p)=\phi^h(p)$ であり、$p\cdot x=I^h(p)>0\ \forall x\in\widetilde{\phi}^h(p)$ である。

ここで、総需要対応 $\widetilde{\phi}: S^l\to\Gamma$ を $\widetilde{\phi}(p)=\sum_{h=1}^{H}\widetilde{\phi}^h(p)$ によって定義すると $\widetilde{\phi}$ は S^l 上の非空

---

[60] ここでは Nikado(1957) にしたがって $\phi^h|_{S_h^l}$ のグラフ $gr(\phi^h|_{S_h^l})$ の閉包 $cl_{S^l\times E}(gr(\phi^h|_{S_h^l}))$ に基づいて、$I^h(p)=0$ となる $p\in S^l\backslash S_h^l$ に対して $\overline{\phi}^h(p)$ を定義した。後の Debreu(1962) では、$\phi^h(p)\subset B^h(p),p\in S^l$ より $gr(\phi^h|_{S_h^l})\subset gr(B^h)$ なので $cl_{S^l\times E}(gr(\phi^h|_{S_h^l}))\subset gr(B^h)$ となり、$\overline{\phi}^h(p)\subset B^h(p)\ p\in S^l$ となる事を考慮して、$p\in S_h^l$ に対して $\overline{\phi}^h(p)=\phi^h(p)$、$p\in S^l\backslash S_h^l$ に対して $\overline{\phi}^h(p)=B^h(p)$ として、$\phi^h|_{S_h^l}$ の拡張 $\overline{\phi}^h$ を定義した。この場合は B^h の凸値閉対応性から $p\in S^l\backslash S_h^l$ でも $\overline{\phi}^h$ は閉で $\overline{\phi}^h(p)$ が凸なので、$\overline{\phi}^h$ から更に $\widetilde{\phi}^h$ まで拡張する必要はない。この Debreu(1963) による $\phi^h|_{S_h^l}$ の拡張 $\overline{\phi}^h$ と同様のものが McKenzie（1981）でも用いられている。なお、Majumdar(2007) では、この Debreu(1962) による拡張を Nikaido(1957) の需要対応の拡張としている。

[61] ϕ^h の p における (S^l 上での) 閉性については、脚注 (37) 参照。

[62] $p^n\to p,x^n\in\widetilde{\phi}^h(x^n),x^n\to x$ とする。カラテオドリー定理より $x^n=\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i^n x^{in},x^{in}\in\overline{\phi}^h(p^n),\lambda_i^n\geqq 0,i=1,\cdots,l+1,\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i^n=1$, 更となるが、$(x^{in})_{n=1}^{\infty}\subset E,(\lambda_i^n)_{n=1}^{\infty}\subset[0,1],i=1,\cdots,l+1$ なので E と $[0,1]$ のコンパクト性よりは $x^{in_q}\to x^i\in E(q\to\infty),\lambda_i^n\to\lambda_i\in[0,1](q\to\infty),i=1,\cdots,l+1,\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i=1$ となって、$\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i^{n_q}x^{in_q}\to\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i x^i$ となり、$x^{n_q}\to x$ より $x=\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i x^i$ となる。そして、$p^{n_q}\to p(q\to\infty),x^{in_q}\in\overline{\phi}^h(p^{n_q}),x^{in_q}\to x^i,i=1,\cdots,l+1$ となって $\overline{\phi}^h$ の閉性より $x^i\in\overline{\phi}^h(p),i=1,\cdots,l+1$ となるので、$x=\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i x^i\in conv(\overline{\phi}^h(p))=\widetilde{\phi}^h(p)$ となり、$\widetilde{\phi}^h$ は p で閉である。また、$x\in\widetilde{\phi}^h(p)$ であれば、カラテオドリー定理より $x=\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i x_i,x_i\in\overline{\phi}^h(p),\lambda_i\geqq 0,i=1,\cdots,l+1,\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i=1$, 更となるが、$p\cdot x_i=I^h(p),i=1,\cdots,l+1$ なので $p\cdot x=\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i p\cdot x_i=\sum_{i=1}^{l+1}\lambda_i I^h(p)=I^h(p)$ となる。に新しい対応 $\widetilde{\phi}^h: S^l\to E$ を $\widetilde{\phi}^h(p)=conv(\overline{\phi}^h(p))\forall p\in S^l$ として定義すると、凸集合に関するカラテオドリー定理より $\widetilde{\phi}^h: S^l\to E$ は凸値閉対応となり、また、$p\in S^l$ において $p\cdot x=I^h(p)\ \forall x\in\widetilde{\phi}^h(p)$ となる。

凸値閉対応となり、$p \in S^l$ において $I(p)(=\sum_{h=1}^{H} I^h(p)) = p \cdot x \ \forall x \in \widetilde{\phi}(p)$ である。[63] 各国の供給対応 $\varphi^h : S^l \to \Lambda^h$ は Λ^h の非空凸コンパク性より依然として非空凸値閉対応であり、$p \in S^l$ において $I^h(p) = p \cdot y^h \geqq 0 \ \forall x \in \varphi^h(p)$ で、$p \in S^l_h$ においては $I^h(p) = p \cdot y^h > 0 \ \forall x \in \varphi^h(p)$ である。そして、総供給対応 $\varphi : S^l \to \Gamma$ を $\phi(p) = \sum_{h=1}^{H} \phi^h(p)$ によって定義すると ϕ は $\widetilde{\phi}$ と同様に非空凸値閉対応であり、A.1″ の後半部分より $p \in S^l$ において $I(p) = \sum_{h=1}^{H} I^h(p) = p \cdot y > 0 \ \forall y \in \varphi(p)$ である。[64] 今 $p \in S^l$ で $p_i = 0$ とすると、A.1″ の後半部分からの $I(p) = \sum_{h=1}^{H} I^h(p) = p \cdot y > 0$ より $\exists k, I^k(p) > 0$ となって $p \in S^l_k$ となる。すると、$\widetilde{\phi}^k(p) = \phi^k(p)$ となって U^h の強単調性より $\phi^k_i(p) = c_i$ となるが、$\widetilde{\phi}^h_i(p) \geqq 0 \ \forall h = 1, \cdots, H$ と c_i の定義より $\widetilde{\phi}_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \widetilde{\phi}^h_i(p) \geqq \phi^k_i(p) = c_i > \varphi_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \varphi^h_i(p)$ となって、$\widetilde{\phi}$ と φ に対して自由財排除条件も成立せる。[65] 故に、この世界経済における φ と $\widetilde{\phi}$ は抽象生産経済の φ と ϕ の条件を満たすのでその帰結より $\exists \overline{p} \in S^l, (\widetilde{\phi}(\overline{p}) \cap \varphi(\overline{p})) \neq \varnothing$ となり、更に自由財排除条件より $\overline{p} > 0$ である。すると、A.1″ の前半部分から $I^h(\overline{p}) > 0 \ \forall h = 1, \cdots, H$ となって $\overline{p} \in S^l_h \ \forall h = 1, \cdots, H$ となり、$\widetilde{\phi}^h_i(\overline{p}) = \phi^h(\overline{p}) \ \forall h = 1, \cdots, H$ となって、$\phi(\overline{p}) = \sum_{h=1}^{H} \phi^h_i(\overline{p})$ とすれば $(\phi(\overline{p}) \cap \varphi(\overline{p})) \neq \varnothing$ となる。[66] すると補題 2.1 より、この競争均衡は c による制限がない元の経済における競争均衡なので、以下が証明された事になる。

定理 3.1 *A.1″ と A.2 を満たすレオンティエフ世界経済モデルには、自由貿易均衡 (競争均衡)* $[\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^H, \overline{y}^1, \cdots, \overline{y}^H, \overline{p}]$ *が存在し、この時* $\overline{p} > 0$ *である。*

以上が Nikaido(1956) の結果を補完する Nikaido(1957) の議論である。Arrow-Debreu(1954) においてアロー・ドブリュー・ヒックス型の私的所有経済の枠組みの中で、A2.1″ は各消費者がその初期保有点に生産的な財を十分に多く保有しているという条件として利用されており、その第 2 定理においてこの条件の下で競争均衡の存在が示されている。そして、安井・二階堂 (1956-7) や Nikaido(1968) においても、このアロー・ドブリューによる第 2 定理を、本節で用いた需要対応の閉拡張という手法を用いて示している。[67] なお、A2.1″ は Arrow-

[63]脚注 (21) で述べたように、$\widetilde{\phi}^h$ の (S^l 上の) 非空凸値閉対応によって $\widetilde{\phi}$ の (S^l 上の) 非空凸値閉対応も成立する。

[64]脚注 () 参照。また、$I(p) = \max\{p \cdot y : y \in \Lambda\}$ なので $(\Lambda \cap R^l_{++}) \neq \varnothing$ より $I(p) > 0, p \in S^l$ である。

[65]Debreu(1962) による $\phi^h|_{S^l_h}$ の拡張 $\overline{\phi}^h$ を利用すると、$\widetilde{\phi}^h(p)$ まで拡張する必要はなく $\overline{\phi}^h$ までで良いが、やはり、$\exists k, I^k(p) > 0$ となって $p \in S^l_k$ となる事には変わりがないために $\overline{\phi}^k(p) = \phi^k(p)$ となり、U^h の強単調性より $\phi^k_i(p) = c_i$ となるので、$0 \leqq \overline{\phi}^h_i(p) (\subset B^h(p)) \quad \forall h = 1, \cdots, H$ と c_i の定義よりやはり $\overline{\phi}_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \overline{\phi}^h_i(p) \geqq \phi^k_i(p) = c_i > \varphi_i(p) = \sum_{h=1}^{H} \varphi^h_i(p)$ となって、Debreu(1962) による $\phi^h|_{S^l_h}$ の拡張 $\overline{\phi}^h$ を利用しても $\overline{\phi}$ と φ に対して自由財排除条件も成立し、以下で $\widetilde{\phi}^h$ の代わりに $\overline{\phi}^h$ を用いても定理 3.1 が証明される。

[66]ここで見つけた $(\widetilde{\phi}(\overline{p}) \cap \varphi(\overline{p})) \neq \varnothing$ となる $\overline{p} \in S^l$ が、自由財排除条件より $\overline{p} > 0$ となるので $\overline{p} \in S^l_h$ となって $\widetilde{\phi}^h(\overline{p}) = \phi^h(\overline{p})$ となり、$\overline{p}$ において用いるのが拡張した $\widetilde{\phi}^h$ ではなくて当初の需要対応 ϕ^h となる。これが、ϕ^h それ自身ではなくて ϕ^h を S^l_h に制限した対応を $\phi^h|_{S^l_h}$ を拡張して新しい需要対応を用いた理由である。もしも $\phi^h|_{S^l_h}$ の拡張でなくて ϕ^h それ自身の拡張では $\overline{p} > 0$ でも $\overline{\phi}^h(\overline{p}) = \phi^h(\overline{p})$ とならない可能性があり、$(\widetilde{\phi}(\overline{p}) \cap \varphi(\overline{p})) \neq \varnothing$ でも $(\phi(\overline{p}) \cap \varphi(\overline{p})) = \varnothing$ となる可能性がある。

[67]本稿の続編では安井・二階堂 (1956-7) による、アロー・ドブリューによる第 2 定理の証明を取り上げる。

Hahn(1971) では資源関連性 (Resource Relatedness) という条件に、McKenzie(1959,81) では既約性 (Irreducibility) という条件に一般化されている。

ところで、Nikaido(1957) の参考文献の中に“On the existence of competitive equilibrium for infinitely many commodities”(Dept of Econ, Stanford University) が挙げられているが、これはNikaido(1956) やGale（1955）のゲール・二階堂の補題を無限次元財空間で考察したもので、その修正版が“Existence of competitive equilibrium based on Walras law”として1957年に大阪大学社会経済研究所のDPとして発表されている。ただし、どちらも雑誌には掲載されていない。どちらも無限次元ノルム空間上でゲール・二階堂の補題の証明を行っているが、前者では、有界数列の集合である l_∞ のような正象限が非空な内部を持つケースで議論を進め、後者では、2乗総和可能数列の集合である l_2 のような正象限が非空な内部を持たないケースに拡張して議論を進めている。この後者の正象限が非空な内部を持たないケースの取り扱い方は、1980年代のMas-Colell(1986) 等で取り上げられたプロパーネス条件を彷彿させる。Debreu(1954) は厚生経済学の基本定理を無限次元財空間で扱ったもので、1970〜80年代に無限次元財空間経済モデルが話題となった時にも先駆的論文として言及される事が多いが、Debreu(1954) はそのような無限次元財空間を持った経済の競争均衡の存在には全く触れていない。一方、これらのNikaidoの論文はNikaido(1956) の参考文献にあった、より一般的な“On a certain coincidence problems”(1960) Journal of mathematical Society of Japan と共に、無限次元財空間でのゲール・二階堂の補題を扱っているので、Debreu(1954) よりも無限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在問題により近づいているという意味で、先駆的で重要な論文である事には違いはない。しかし、無限次元財空間経済モデルに関する文献で近年になるまで全く参照されていないというのは、甚だ残念である。[68]

5 終わりに

以上でNikaido(1956) とそれに補完的なNikaido(1957) の解説を終える。そこで扱われた生産経済では、生産可能性集合が生産集合となっている特殊な生産構造を持ったレオンティエフ型世界経済であるが、Gale(1955) では、有限個の企業が凸生産集合を持つようなアロー・ドブリュー・ヒックス型の私的所有生産経済における競争均衡の存在定理である、$A.1$ に基づくArrow-Debreu(1954) の定理1の証明を、Nikaido(1956) とは独立に示したゲール・二階堂の補題を利用して示しているので、Gale(1955) の方がより一般的な生産経済を扱っている事になる。この点を考慮して、後の安井・二階堂 (1957-8)、二階堂 (1960)、Nikaido(1968) では、アロー・ドブリュー・ヒックス型の私的所有生産経済を用いて、$A.1$ に基づく Arrow-Debreu(1954) の定理1や、更には、Gale(1955) では扱われなかった、各消費者がその初期保有点に生産的な財を十分に多く保有しているという、$A.1''$ に対応する条件に基づく Arrow-Debreu(1954) の定理2を、前節で用いた需要対応の閉拡張という手法を用いて示している。[69]

ところで、$A.1$ に基づく Arrow-Debreu(1954) の定理1の彼らによる証明では、Debreu(1952) の抽象経済のナッシュ均衡の存在定理を利用しているので、ゲール・二階堂の補題を利用しているGale(1955) の証明の方がより直接的で分かりやすい。しかし、以下の付録2で見るように、Gale(1955) によるゲール・二階堂の補題の証明はKakutani(1941) による角谷の不

[68] このあたりの事情についても、久保田 (2006) を参照。

[69] 本稿の続編で、安井・二階堂 (1956-7) による、アロー・ドブリューによる第2定理の証明を取り上げるが、その際には、対応の閉拡張を用いない Arrow-Debreu(1954) の証明や Arrow-Hahn(1971) の資源関連性に基づく証明も同時に取り上げる。

動点定理の証明と同様な単体分割の議論を使っているためにやや煩雑で、角谷の不動点定理に基づいNikaido(1956)の証明の方がはるかに簡潔であり、この点ではNikaido(1956)の方がGale(1955)より優れていると思われる。[70]　ゲール・二階堂の補題を非負象限からアフィン部分空間でないような閉凸錐へ一般化したDebreu(1956)でも、その証明でも角谷の不動点定理が利用されている。[71]　Debreu(1959)のゲール・二階堂の補題の証明でも、Gale(1955)のものではなくてNikaido(1956)のものが採用されたのである。[72]

さて、既に触れたように、Nikaido(1956)とNikaido(1957)のどちらの参考文献においても、前者で示したゲール・二階堂の補題を無限次元財空間モデルに拡張するNikaido(1957b、59)が挙げられていて、Peleg-Yarri(1970)やBewley(1972)によって始められて1980年代に話題となった無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在定理の先駆けとなっているにも係らず、これらの論文は1980年代に行われた無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在定理やゲール・二階堂の補題を無限次元財空間モデルへ拡張するという文献において、1950年代の文献としてDebreu(1954)には言及されるが、不思議な事に近年になるまで全く触れられていない。この機会に再度、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題を確立した二階堂先生の先見の明を強調しておきたい。[73]

本稿では、古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理に関してNikaido(1956,57)を取り上げたが、この問題は安井・二階堂の小冊子(57-58)、及び二階堂の著作(60,68)においても扱われているので、ここで簡潔にこれらについて触れておく。安井・二階堂(57-58)においては、アロー・ドブリュー(1954)の私的所有生産経済における競争均衡の二つの存在定理が、需要対応の拡張に基づいて示されていて、望ましい財や生産的投入財を用いたアロー・ドブリュー(1954)の第2定理も示されている。二階堂(1960)では、扱う私的所有生産経済とし安井・二階堂(57-58)のものを基本的に踏襲していて、安井・二階堂(57-58)での消費集合の下方有界性や閉凸性、選好の凸性や局所非飽和性、欲求された財や生産的投入財の代わりに、非負象限としての消費集合、選好の強単調性、そして、各消費者が初期保有点として少なくてもある財は保有している事を利用して、証明を簡潔にしている。これは多くの非専門家にも競争均衡の存在問題を知ってもらうテキストとして二階堂(1960)を考えていたからであると思われる。しかし、Nikaido(1968)では再びArrow-Debreu(1954)の私的所有生産経済における競争均衡の第1定理と2定理に戻り、消費集合の下方有界性や閉凸性、選好の凸性や局所非飽和性、望ましい財や生産的投入財を前提にしたアロー・ドブリュー・ヒックス型私的所有生産経済における競争均衡の存在を示している。これはNikaido(1968)を多くの専門家に競争均衡の存在問題を説明する研究書としてのテキストとして考えていたからであると思われる。もちろん、Nikaido(1968)では、安井・二階堂(57-58)や二階堂(1960)では扱われなかったそれ以降の競争均衡に関する、大域的一意性や安定性、厚生経済学の基本定理、アロー・ドブリュー・ヒックス型私的所有生産経済におけるコアーの極限定理、更には最適成長経路に関するターンパイク定理等の数々の結果も紹介されている。

---

[70]なお、Kuhn(1956a)は、角谷の不動点定理より一般的なアイレンベルグ・モントゴメリーの不動点定理を利用してゲール・二階堂の補題を証明しているが、実際には、このNikaido(1956)のように角谷の不動点定理で十分である。

[71]ただし、Debreu(1956)ではGale(1955)は参考文献に挙げられているが、Nikaido(1956)は挙げられておらず全く触れられていない。Nikaido(1956)にはArrowからGale（1955）が同様の結果を得ているという事を聞いていて、アローとドブリューが共同論文を書く程の関係であるのに、なぜDebreu(1956)でNikaido(1956)には触れられていないのか不明である。

[72]Debreu(1959, pp.82-3、邦訳 pp.138-41)

[73]この点については久保田(2006)やKubota(2007)で詳しく解説しているので、興味ある読者は参照されたい。また、Nishimura(2008)でもこの事に触れている。Urai()も参照。

付録1：Gale(1955)によるϕ^hの閉対応の証明

この付録では、Gale(1955)による$A.1$と$A.2$の下での需要対応ϕ^hの閉性の証明を与える。Gale(1955)では反射完備推移連続的な選好関係用いて証明しているが、ここでは連続な効用関数を進める。[74]　なお、Gale(1955)では$\overline{B}^h(p^n)=\{x\in E: p\cdot x\leqq p\cdot a^h, x\in E\}$としていて、ここでもこの形を利用する。

需要対応ϕ^hの閉性の別証. $p^n\to p\in S^l(n\to\infty), x^n\in\phi^h(p^n)(\subset E), n=1,\cdots, x^n\to x$とする。$E$の閉性より$x\in E$であり、$p^n\cdot x^n\leqq p^n\cdot a^h, n=1,\cdots$と内積$\cdot$の連続性より$p\cdot x\leqq p\cdot a^h$となって、$x\in\overline{B}^h(p)$である。そこで$x\notin\phi^h(p)$とすると、$\exists y\in\overline{B}^h(p), p\cdot y\leqq p\cdot a^h$で$U^h(y)>U^h(x)$であり、効用関数の連続性より$\exists B_\varepsilon(y), B_\varepsilon(x), y'\in B_\varepsilon(y), x'\in B_\varepsilon(x)\to U^h(y')>U^h(x')$となる。$x^n\to x$より$\exists n', x^n\in B_\varepsilon(y), \forall n>n'$で$y'\in B_\varepsilon(y)\to U^h(y')>U^h(x^n)$と出来るので、最初から$y'\in B_\varepsilon(y)\to U^h(y')>U^h(x^n)\ \forall n$としておく。$x^n\in\phi^h(p^n)$なので$\overline{B}^h(p^n)\cap B_\varepsilon(y)=\varnothing$であり、$p^n\cdot y>p^n\cdot a^h$である。すると、$p^n\cdot y>p^n\cdot a^h$より$p\cdot y\geqq p\cdot a^h$となるので$p\cdot y\leqq p\cdot a^h$より$p\cdot y=p\cdot a^h$となる。$A.1$より$\exists\widehat{z}\in E$に対して$\widehat{z}<a^h$となるので、$\mu_n=p^n\cdot(y-a^h)+p^n\cdot(a^h-\widehat{z})(=p^n\cdot(y-a^h)-p^n\cdot(\widehat{z}-a^h))(>0)$とすると、$p^n\cdot a^h\to p\cdot a^h, p^n\cdot y\to p\cdot y, p\cdot y=p\cdot a^h$より$p^n\cdot(y-a^h)\to 0$なので$\mu_n\to p\cdot(a^h-\widehat{z})$であり、$p^n\cdot(y-a^h)/\mu_n\to 0, p^n\cdot(a^h-\widehat{z})/\mu_n\to 1$である。ここで、$y^n$を$\widehat{z}$と$y$の$\mu_n$による凸結合として$y^n=[p^n\cdot(y-a^h)\widehat{z}+p^n\cdot(a^h-\widehat{z})y]/\mu_n$とすると、$E$の凸性より$y^n\in E$で、$p^n\cdot(y-a^h)/\mu_n\to 0$と$p^n\cdot(a^h-\widehat{z})/\mu_n\to 1$より$y^n\to y$であり、充分に大きい$n$に対して$y^n\in B_\varepsilon(y)$である。そして、$y^n-a^h=[p^n\cdot(y-a^h)(\widehat{z}-a^h)-p^n\cdot(\widehat{z}-a^h)(y-a^h)]/\mu_n=[p^n\cdot(y-a^h)(\widehat{z}-a^h)+p^n\cdot(a^h-\widehat{z})(y-a^h)]/\mu_n$より、$p^n\cdot(y^n-a^h)=[p^n\cdot(y-a^h)(p^n\cdot(\widehat{z}-a^h))-p^n\cdot(\widehat{z}-a^h)(p^n\cdot(y-a^h))]/\mu_n=0$なので$p^n\cdot y^n=p^n\cdot a^h$となり、$y^n\in\overline{B}^h(p^n)$となる。すると、充分に大きい$n$に対して$y^n\in\overline{B}^h(p^n)\cap B_\varepsilon(y)$となって$\overline{B}^h(p^n)\cap B_\varepsilon(y)=\varnothing$に矛盾するので、$x\in\phi^h(p)$となり、$\phi^h$の$p$における閉性が成立する。 □

第2節の需要対応ϕ^hの閉性のNikaido(1956)の証明では、$p^n\to p\in S^l(n\to\infty), x^n\in\phi^h(p^n)(\subset E), n=1,\cdots, x^n\to x$とする時に$x\in\phi^h(p)$となる事を示すために、$z\in\overline{B}^h(p)$に対して$U^h(x)\geqq U^h(z)$となる事を示す。$\lambda^n=p^n\cdot a^h/\max\{p^n\cdot a^h, p^n\cdot z\}(\in(0,1])$とすると$\lambda_n\to 1$となる事を示して、$z^n=\lambda^n z$とすると、$p^n\cdot z^n=p^n\cdot\lambda^n z=\lambda^n p^n\cdot z\leqq\lambda^n\max\{p^n\cdot a^h, p^n\cdot z\}=p^n\cdot a^h$より$z^n\in\overline{B}^h(p^n)$となって$x^n\in\phi^h(p^n)$より$U^h(x^n)\geqq U^h(z^n)$となり、$\lambda_n\to 1$より$z^n\to z$で$x^n\to x$なので$U^h$の連続性から$U^h(x)\geqq U^h(z)$となる。一方、上記のGale(１９５６)の証明では、凸コンパクトな消費集合$C(\subset R^l_+)$を用いているが、上で見たように、$x\notin\phi^h(p)$として矛盾を導いて$x\in\phi^h(p)$を示しているので、もしもNikaido(１９５６)のように$E=\{x\in R^l_+: x\leqq c\}$とすれば、$p^n\to p\in S^l(n\to\infty), x^n\in\phi^h(p^n)(\subset E), n=1,\cdots, x^n\to x$とする時に$x\notin\phi^h(p)$となるとすると、$\exists y\in\overline{B}^h(p), p\cdot y=p\cdot a^h$で$U^h(y)>U^h(x)$であり、$x^n\to x$と$U^h$の連続性より$U^h(y)>U^h(x^n)$となるので$x^n\in\phi^h(p^n)$より$p^n\cdot y>p^n\cdot a^h>0$となって$p\cdot y\geqq p\cdot a^h$となるが、$p\cdot y\leqq p\cdot a^h$なので$p\cdot y=p\cdot a^h$であり、$\lambda_n=p^n\cdot a^h/p^n\cdot y(\in(0,1))$とすると$\lambda_n\to 1$となる。そこで$y^n=\lambda_n y$とすると$p^n\cdot y^n=p^n\cdot a^h$より$y^n\in\overline{B}^h(p^n)$であり、$\lambda_n\to 1$より$y^n\to y$となるので充分に大きい$n$に対して$y^n\in\overline{B}^h(p^n)\cap B_\varepsilon(y)=\varnothing$となり、より容易に矛盾が導ける。

付録2：Gale(1955)によるゲール・二階堂の補題の証明

[74]もちろん、Debreu(1954,59)の連続効用関数表現定理より、反射完備推移連続的な選好は連続な効用関数によって表現されるので、実際にはどちらを用いてもよいのである。また、Gale(1955)の凸コンパクトな消費集合$C(\subset R^l_+)$を用いる場合には、$A.1$は$\exists\widehat{z}\in C, \widehat{z}<a^h$となり、$\widehat{z}\in E\cap C$である。以下では$C\cap E$を$E$として議論を進める。

この付録では、Gale(1955) による命題 1.1 のゲール・二階堂の補題の証明を与える。ドブリュー (1959) で Nikaido(1956) による角谷の不動点定理を利用したゲール・二階堂の補題の証明が採用されて以降、ゲール・二階堂の補題の証明はこの Nikaido(1956) によるものが主になったが、ここでは比較のために、Gale(1955) によるゲール・二階堂の補題の証明を与える。Gale(1955) による証明では、最初に f が連続関数のケースで KKM 補題を利用してこの結果を示し、Kakutani(1942) による角谷の不動点定理の証明で用いた基本単体 S^l の重心分割に f が連続関数のケースの結果を適用して、一般的な対応のケースの結果を示す。

命題１．１の別証. まず、$f : S^l \to \Lambda$ が連続関数で $p \in S^l$ に対して $p \cdot f(p) \leqq 0$ とする。$C_j = \{p \in S^l : f_j(p) \leqq 0\}, j = 1, \cdots, l$ とすると f の連続性より C_j は閉集合になる。$J(\neq \varnothing) \subset I = \{1, \cdots, l\}$ に対して $p \in S_J = [e^j]_{j \in J} = \{q \in S^l : q = \sum_{j \in J} \alpha_j e^j, \alpha_j \geqq 0, j \in J, \sum_{j \in J} \alpha_j = 1\}$ とすると、$p \cdot f(p) = \sum_{j \in J} p_j f_j(p) \leqq 0$ なので $\alpha_j > 0$ となる全ての $j \in J$ に対して $f_j(p) > 0$ とすると $p \cdot f(p) = \sum_{j \in J} p_j f_j(p) > 0$ となって矛盾が起こるので、$\exists j' \in J, f_j(p) \leqq 0$ となって $p \in C_{j'}$ となり、$p \in \cup_{j \in J} C_j$ となって $S_J \subset \cup_{j \in J} C_j$ となる。これより、$\{C_j : j = 1, \cdots, l\}$ は KKM 補題の条件を満たすので $\cap_{j \in I} C_j \neq \varnothing$ となり、$\overline{p} \in \cap_{j \in I} C_j$ とすると $f_j(\overline{p}) \leqq 0, j = 1, \cdots, l$ となって $f(\overline{p}) \leqq 0$ となる。[75]

次に、$f : S^l \to \Lambda$ が凸値閉対応で $p \in S^l$ に対して $p \cdot x \leqq 0 \ \forall x \in f(p)$ とする。$\eta = Hc$ とすると $\forall x \in \Lambda, ||x|| \leqq \eta$ である。今 S^l に ν 次重心分割 $\{S_i^\nu : i = 1, \cdots, m_\nu\}$ を施して $\delta^\nu = \max\{d(S_i^\nu) : i = 1, \cdots, m_\nu\} < 1/((\eta + 1)\nu)$ となっているとする。[76] そして、$f^\nu : S^l \to R^l$ を次のようにして構成する。まず、S_i^ν の各頂点 $p_{i_h}^\nu, h = 1, \cdots, l, i = 1, \cdots, m_\nu$ に対して $f^\nu(p_{i_h}^\nu) \in f(p_{i_h}^\nu) - e/\nu$ を 1 つ取り上げる。[77] そして、$p \in S^l$ とすると $S^l = \cup_{i=1}^{m_\nu} S_i^\nu$ より $\exists S_i^\nu, p \in S_i^\nu$ なので $p = \sum_{h=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu p_{i_h}^\nu, \lambda_{i_h}^\nu \geqq 0, h = 1, \cdots, l, \sum_{h=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu = 1$ であり、そこで $f^\nu(p) = \sum_{h=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu f^\nu(p_{i_h}^\nu)$ とすると、S_i^ν の各頂点 $p_{i_h}^{l\nu}, h = 1, \cdots, l$ のアフィン独立性より各 $\lambda_{i_h}^\nu$ は一意的でしかも (S^l 上で)p について連続なので f^ν も (S^l 上で)p について連続である。[78] $||f^\nu(p)|| \leqq \sum_{h=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu ||f^\nu(p_{i_h}^\nu)|| \leqq \max\{||f^\nu(p_{i_h}^\nu)|| : h = 1, \cdots, l, i = 1, \cdots, m_\nu\} \leqq \eta + 1$ より半径 $B_{\eta+1}$ に対して $f^\nu(S^l) \in B_{\eta+1}, \nu = 1, \cdots$ となる。$p \in S^l$ とすると $\exists S_i^\nu, p \in S_i^\nu$ なので $p = \sum_{h=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu p_{i_h}^\nu, \lambda_{i_h}^\nu \geqq 0, h = 1, \cdots, l+1, \sum_{h=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu = 1, p_{i_h}^\nu, S_i^\nu$ の各頂点 $, h = 1, \cdots, l$ であり、$||p_{i_h}^\nu - p_{i_{h'}}^\nu|| \leqq \delta^\nu, h, h' = 1, \cdots, l, ||p_{i_h}^\nu - p|| \leqq \delta^\nu, h = 1, \cdots, l$ である。今、$x_{i_h}^\nu = f^\nu(p_{i_h}^\nu), h =$

---

[75] KKM 補題については、例えば小山 () や Border(1987) を参照。

[76] ここで、$d(S_i^\nu) = \max\{||x - x'|| : x, x' \in S_i^\nu\}$ である。S^l の ν 次重心分割 $\{S_i^\nu : i = 1, \cdots, m_\nu\}$ の詳細については、例えば二階堂 (1960)、Nikaido(1968)、小山 ()、Border(1987) 等を参照。

[77] この時、$f^\nu(p_{i_h}^\nu) \in f(p_{i_h}^\nu) - e/\nu$ より $-Hc - e \leqq -Hc - e/\nu \leqq f^\nu(p_{i_h}^\nu) \leqq Hc - e/\nu \leqq Hc + e$ なので $||f^\nu(p_{i_h}^\nu)|| \leqq \eta + 1$ である。

[78] $p \in S_i^\nu$ として $p = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu p_{i_h}^\nu, \lambda_{i_h}^\nu > 0, i = 1, \cdots, m_\nu, \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu = 1$ であるが、S_i^ν の各頂点 $p_{i_h}^\nu, h = 1, \cdots, l$ のアフィン独立性より各 $\lambda_{i_h}^\nu$ は S_i^ν 上で p について連続になるので、$f^\nu(\cdot) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu f^\nu(p_{i_h}^\nu)$ は p において連続となる。もしもいつくかの $h' \in \{1, \cdots, l\}$ で $\lambda_{i_{h'}}^{l\nu} = 0$ で p が S_i^ν の $(l-2)$ 以下の次元の辺単体上にあれば、p に収束する点列は、その辺単体を共通に持つ幾つかの S_i^ν を通過して p に収束していくが、$\lambda_{i_h}^\nu > 0$ となる h' の係数が $\lambda_{i_h}^\nu > 0$ に収束するだけでなく、$\lambda_{i_{h'}}^\nu = 0$ となっている h' の係数もやはり $\lambda_{i_{h'}}^\nu = 0$ に収束するので、このケースでも $f^\nu(\cdot) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i_h}^\nu f^\nu(p_{i_h}^\nu)$ は p において連続となる。

$1,\cdots,l, x=f^{\nu}(p)$ とすると $x=\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}x^{\nu}_{i_h}$ となるが、$||p^{\nu}_{i_h}-p||\leqq\delta^{\nu}<1/((\eta+1)\nu), ||x^{\nu}_{i_h}||\leqq\eta+1, h=1,\cdots,l$ なので $p\cdot x^{\nu}_{i_h}-p^{\nu}_{i_h}\cdot x^{\nu}_{i_h}=(p-p^{\nu}_{i_h})\cdot x^{\nu}_{i_h}\leqq||p-p^{\nu}_{i_h}||\times||x^{\nu}_{i_h}||<1/\nu$ となる。$f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h})\in f(p^{\nu}_{i_h})-e/\nu$ より $p^{\nu}_{i_h}\cdot(f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h})+e/\nu)\leqq 0$ となるので $p^{\nu}_{i_h}\cdot x^{\nu}_{i_h}=p^{\nu}_{i_h}\cdot f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h})\leqq -p^{\nu}_{i_h}\cdot e/\nu=-1/\nu$ となり、$p\cdot x^{\nu}_{i_h}=p\cdot f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h})<p^{\nu}_{i_h}\cdot x^{\nu}_{i_h}+1/\nu\leqq 0, h=1,\cdots,l$ となって、$p\cdot x=p\cdot\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}x^{\nu}_{i_h}=\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}p\cdot x^{\nu}_{i_h}\leqq 0$ となる。これより、$p\cdot f^{\nu}(p)\leqq 0, \forall p\in S^l$ となる。すると、f が連続関数の時の結果より $\exists\{p^{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}\subset S^l, f^{\nu}(p^{\nu})\leqq 0, \nu=1,2,\cdots$ となる。$p^{\nu}\in S^l$ より $\exists i\in\{1,\cdots,m_{\nu}\}, p^{\nu}\in S^{\nu}_i$ なので $p^{\nu}=\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}p^{\nu}_{i_h}, \lambda^{\nu}_{i_h}\geqq 0, h=1,\cdots,l, \sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}=1$ であり、また、$x^{\nu}_{i_h}=f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h}), h=1,\cdots,l, x^{\nu}=f^{\nu}(p^{\nu})=\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h})=\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}x^{\nu}_{i_h}(\leqq 0), \nu=1,2,\cdots$ である。$\{p^{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}, \{p^{\nu}_{i_h}\}_{\nu=1}^{\infty}\subset S^l, \{x^{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}, \{x^{\nu}_{i_h}\}_{\nu=1}^{\infty}\subset\{z\in R^l : ||z||\leqq\eta+1\}, \{\lambda^{\nu}_{i_h}\}_{\nu=1}^{\infty}\subset[0,1], h=1,\cdots,l, \sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}=1, \nu=1,2,\cdots$ なので $\{p^{\nu}, p^{\nu}_{i_h}, x^{\nu}, x^{\nu}_{i_h}, \lambda^{\nu}_{i_h}\}_{\nu=1}^{\infty}, h=1,\cdots,l$ には収束部分列が存在して、一般性を失うことなく、$(p^{\nu}, p^{\nu}_{i_h}, x^{\nu}, x^{\nu}_{i_h}, \lambda^{\nu}_{i_h})\to(\overline{p}, \overline{p}_{i_h}, \overline{x}, \overline{x}_{i_h}, \overline{\lambda}_{i_h})(\nu\to\infty), \overline{p}, \overline{p}_{i_h}\in S^l, \overline{x}, \overline{x}_{i_h}\in\{z\in R^l : ||z||\leqq\eta+1\}, \overline{\lambda}_{i_h}\in[0,1], \sum_{h=1}^{l}\overline{\lambda}_{i_h}=1, h=1,\cdots,l$ となる。$x^{\nu}=\sum_{h=1}^{l}\lambda^{\nu}_{i_h}x^{\nu}_{i_h}(\leqq 0), \nu=1,2,\cdots$ より $\overline{x}=\sum_{h=1}^{l}\overline{\lambda}_{i_h}\overline{x}_{i_h}(\leqq 0)$ である。また、$||p^{\nu}_{i_h}-p^{\nu}||<1/\nu, h=1,\cdots,l$ より $\overline{p}_{i_h}=\overline{p}, h=1,\cdots,l$ である。そして、$x^{\nu}_{i_h}=f^{\nu}(p^{\nu}_{i_h})\in f(p^{\nu}_{i_h})-e/\nu$ より $\exists y^{\nu}_{i_h}\in f(p^{\nu}_{i_h}), h=1,\cdots,l, x^{\nu}_{i_h}=y^{\nu}_{i_h}-e/\nu$ となるが、$e/\nu\to 0$ と $x^{\nu}_{i_h}\to\overline{x}_{i_h}$ より $y^{\nu}_{i_h}\to\overline{x}_{i_h}, h=1,\cdots,l$ となる。すると、f の閉性より $p^{\nu}_{i_h}\to\overline{p}, y^{\nu}_{i_h}\in f(p^{\nu}_{i_h}), y^{\nu}_{i_h}\to\overline{x}_{i_h}\Longrightarrow\overline{x}_{i_h}\in f(\overline{p}), h=1,\cdots,l$ となるが、$f(\overline{p})$ の凸性より $\overline{x}=\sum_{h=1}^{l}\overline{\lambda}_{i_h}\overline{x}_{i_h}\in f(\overline{p})\cap -(R^l_+)$ となって $f(\overline{p})\cap -(R^l_+)\neq\varnothing$ である。[79] □

参考文献

[1] Arrow, K, J and G, Debreu.(1954):"Existence of an equilibrium for a competitive economy." *Econometrica* 22, p. 265 - 290.

[2] ———、and F.Hahn(1971) : General Competitive Analysis. Holden-Day (San-Francisco, CA).(邦訳『一般競争分析』福岡・川又訳岩波書店 1976)

[3] Bewley,T.(1972):"Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities." *Journal of Economic Theory* 4, p. 514 - 540.

[4] Border,K(1985) : *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theorey.* Cambridge University Press, (Cambridge, MA)

[5] Debreu,G.(1954):"Valuation equilibrium and Pareto optimal." *Proceedings of National Academy of Science* 40, p. 588 - 94.

[79] ここでは、Gale(1955) の証明に従って、Kakutani(1941) における角谷の不動点定理の証明で用いられた基本単体の重心分割を用いているが、安井・二階堂 (1957-8)、二階堂 (1960)、Nikaido(1968) の角谷の不動点定理の証明ではブラウワーの不動点定理とクラトフスキー写像を用いているので、ここで用いた KKM 補題と基本単体の重心分割の代わりにブラウワーの不動点定理とクラトフスキー写像を用いる事もできると思われる。

[6] ————————.(1956):“Market Equilibrium.” *Proceedings of National Academy of Science* 42, p. 876 - 8.

[7] ————————.(1959):*Theory of Value*, John Wiley and Sons(New York, NY)(邦訳 『価値の理論』 丸山徹訳 東洋経済新報社 (1977))

[8] 福岡正夫 (1979): 『一般均衡理論』　創文社

[9] Gale, D.(1955):“The law of supply and demand.” *Mathematica Scandinavica* 3, p.155 - 69.

[10] Kakutani, S.(1941):“A generalization of Brouwer’s fixed point theorem.” *Duke Mathematical Journal* 8, p.457 - 9.

[11] Kuhn, H.(1956):“A note on “The law of supply and demand.’ ” *Mathematica Scandinavica* 4, p.143 - 6.

[12] 小山昭雄 (1994): 『経済数学教室　3　線形代数と位相 (上)』　岩波書店

[13] Leontief,W.(1933):“The Use of indifference curves in the analysis of foreign trade”, *Quaterly Journal of Economics* 47-3, pp.493-503

[14] Mas-Colell, A.(1986):“The price existence problem in topological vector lattices.” *Econometrica* 54, p.1039 - 54.

[15] McKenzie, L. W.(1954):“On equilibrium in Graham’s model of world trade and other competitive systems.” *Econometrica* 22, p. 147 - 161.

[16] ————————.(1959):“On the existence of general equilibrium for a competitive market.” *Econometrica* 27, p. 54 - 71

[17] ————————.(1981):“The classical theorem on existence of competitive equilibrium.” *Econometrica* 49, p. 819 - 841.

[18] Nikaido,H.(1956):“On the classical multilateral exchange problem.” *Metroeconomica* 3, p.135 - 45.

[19] ————————.(1957):“A Supplementary note to ‘On the classical multilateral exchange problem.’ ” *Metroeconomica* 9, p.209 - 10.

[20] ————————.(1957b):“Existence of equilibrium based on Walras’ law.” *ISER Discussion Paper No.2, Institute of Social and Economic Reserch, Osaka University, Japan.*

[21] ————————.(1959):“Coincidence and some systems of inequalities.” *Journal of Mathematical Society of Japan* 11(4), p.354 - 73.

[22] ————————.(1968):*Convex Structure and Economic Theory.* Academic Press, (New York, NY)

[23] 二階堂副包 (1960): 『現代経済学の数学的方法』　岩波書店

[24] Peleg, B. and M. E. Yaari.(1970):“Markets with countably many commodities.” *International Economic Review* 11, p. 369 - 77.

[25] 安井琢磨・二階堂副包 (1957 － 58) :「経済理論における数学的研究-均衡解の存在問題-」岩波講座現代応用数学 岩波書店