



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第8回数学総合若手研究集会：数学を中心とした広範な知識の交流
Author(s)	Takasao, Keisuke; Ito, Tsubasa; Sugai, Tomo et al.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 151, 1-289
Issue Date	2012-02
DOI	https://doi.org/10.14943/81513
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/68075
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech151.pdf



第8回数学総合若手研究集会
～数学を中心とした広範な知識の交流～

The 8th Mathematics Conference for Young Researchers
– MCYR8 –

世話人

高埴 圭介 伊藤 翼 菅井 智 陶山 大輔
中島 規博 宮川 尚紀 矢野 充志

札幌, 2012

Series #151. February, 2012

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #128 T. Nakazi and S. Miyajima, 第 16 回関数空間セミナー報告集, 105 pages. 2008.
- #129 M. Kon, 学位論文 Doctoral thesis “Minimal submanifolds immersed in a complex projective space”, 77 pages. 2008.
- #130 S. Minabe, 第 14 回 COE 研究員連続講演会『開ミラー対称性における最近の進展』, 8 pages. 2008
- #131 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium, Final “Nonlinear Partial Differential Equations”, 73 pages. 2008.
- #132 H. Kang, 第 16 回 COE 研究員連続講演会『CHAOS IN TRAVELING WAVES IN LATTICE SYSTEMS OF UNBOUNDED MEDIA』, 13 pages. 2008.
- #133 G.-J. Chung, editor:Y. Kimura, Introduction to Various Models in Image Processing, 61 pages. 2008.
- #134 H. Takagi and R. Uno, 研究会報告書『動的システムの情報論 (7)』, 110 pages. 2008.
- #135 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, 第 33 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 72 pages. 2008.
- #136 T. Sakajo, Y. Nishiura, H. Suito, K. Nishinari, M. Nagayama and T. Amemiya, JST さきがけ研究集会『環境問題における数理の可能性』, 83 pages. 2008.
- #137 H. Hida, T. Ito, H. Katsurada, K. Kitagawa (transcribed by T. Suda), Y. Taguchi, A. Murase and A. Yamagami. K. Arai, T. Hiraoka, K. Itakura, T. Kasio, H. Kawamura, I. Kimura, S. Mochizuki, M. Murata and T. Okazaki, 整数論札幌夏の学校, 201 pages. 2008.
- #138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.
- #139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.
- #140 T. Suda, Y. Umeta, K. Kasai, M. Kasedou, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.
- #141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.
- #142 K. Kasai, H. Kuroda, T. Nagai, K. Nishi, S. Tsujie and T. Yamaguchi, 第 6 回数学総合若手研究集会, 267 pages. 2010.
- #143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.
- #144 Liang Chen, Doctoral thesis “On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space”, 79 pages. 2010.
- #145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.
- #146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.
- #147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.
- #148 T. Fukunaga, N. Nakashima, A. Sekisaka, T. Sugai, K. Takasao and K. Umeta, 第 7 回数学総合若手研究集会, 280 pages. 2011.
- #149 M. Kasedou, Doctoral thesis “Differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space”, 69 pages. 2011.
- #150 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.

はじめに

「第8回数学総合若手研究集会～数学を中心とした広範な知識の交流～」(以下 MCYR8) は、大学院生および若手研究者により運営される研究集会です。

本研究集会は、

- 数学に関わる様々な分野における若手研究者の「交流の場」
- 新しい研究テーマを見つける「発見の場」

を主な狙いとしています。

本研究集会では、数学専攻はもちろんのこと、数学に関わる物理・化学・生物・経済・工学など、広い分野の若手研究者の方々のご講演およびポスター発表が行われます。

講演は、口頭発表であるシングルセッションとパラレルセッション、そしてポスター発表からなります。シングルセッションでは、すべての分野の参加者に聴講して頂けるように、講演者の方にはできるだけ入門的な内容、とくに問題の背景、動機から話して頂くようお願いしております。パラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分けて講演して頂きますので、より専門的な内容の講演をお聴きになることが出来ます。

このテクニカルレポート集は講演者の方々から事前に集めた原稿を印刷したものです。本研究集会の目的に合わせ、講演者の方には多分野の方々にも分かり易いように、入門的な事項を含めて書いて頂きました。参加者の皆様が講演をより深く理解し、活発で広範な知識の交流を行い、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

なお、この研究集会は、

- 北海道大学大学院理学研究院数学部門

の援助を受けて開催されます。

最後になりましたが、開催にあたり、

- 北大数学教室の先生方、
- 数学事務の方々、
- 講演者の皆様、参加者の皆様、
- 過去の MCYR 世話人の方々

から、多大なるご支援を頂きました。皆様のおかげで今年度も無事に MCYR を開催することが出来ました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

2012年2月

MCYR8 世話人

高棹圭介 伊藤翼 菅井智 陶山大輔
中島規博 宮川尚紀 矢野充志

第8回 数学総合若手研究集会

～数学を中心とした広範な知識の交流～

The 8th Mathematics Conference for Young Researchers

日時：2012年2月27日(月)～3月1日(木)

場所：北海道大学 学術交流会館

A：第2会議室(パラレル会場)

B：第3会議室(パラレル会場)

C：第4会議室(パラレル会場)

D：小講堂(シングル・パラレル会場)

E：第1会議室(ポスター会場・休憩所)

URL:<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2012/>

● シングルセッション (D)

松澤 泰道 (Yasumichi MATSUZAWA)

北海道大学大学院理学院

Popa の埋め込み問題について

小林 雅人 (Masato KOBAYASHI)

東京工業大学理工学研究科

あみだ＝コクセター群＋ブリュア順序

寺本 央 (Hiroshi TERAMOTO)

北海道大学電子科学研究所

局所スペクトル解析による大自由度力学系の解析

本田 淳史 (Atsufumi HONDA)

東京工業大学大学院理工学研究科

3次元球面の外的平坦曲面

栗原 大武 (Hirotake KURIHARA)

東北大学大学院理学研究科

デザインと excess theorem

池田 正弘 (Masahiro IKEDA)

大阪大学大学院理学研究科

臨界冪と劣臨界冪の非線形項を持つシュレディンガー方程式における小さな初期値に対する解の爆発

田中 守 (Mamoru TANAKA)

東北大学大学院理学研究科

有限グラフの第 l 固有値

鹿野 豊 (Yutaka SHIKANO)

東京工業大学大学院理工学研究科

Discrete Time Quantum Walks and Integrability

● パラレルセッション 幾何学会場 (A, B)

菊田 伸 (Shin KIKUTA)

東北大学大学院理学研究科

カラテオドリー測度双曲多様体上の標準束及び余接束の正值性

北澤 直樹 (Naoki KITAZAWA)

東京工業大学理工学研究科

多様体上の折り目写像

北別府 悠 (Yu KITABEPPU)

東北大学大学院理学研究科

測度距離空間の Coarse Ricci 曲率

野口 和範 (Kazunori NOGUCHI)

信州大学理学部

category のオイラー標数と重心細分

大鳥羽 暢彦 (Nobuhiko OTOBA)
スカラー曲率一定計量の新しい例

慶応義塾大学大学院理工学研究科

隅田 大貴 (Daiki SUMIDA)

九州大学数理学府

ミルナー束の組が誘導するトーラスへの可微分写像の特異点

佐藤 寛之 (Hiroyuki SATO)

京都大学大学院情報学研究科

リーマン多様体上の最適化アルゴリズムおよびその行列計算への応用

野坂 武史 (Takefumi NOSAKA)

京都大学数理解析研究所

カンドルと低次元トポロジー

加藤 諒 (Ryo KATO)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

Towards algebraic K -theory of local fields at the prime 2

竹内 司 (Tsukasa TAKEUCHI)

東京理科大学理学研究科

力学系における Hamiltonian についての recursion operator の構成

阿部 拓 (Hiraku ABE)

首都大学東京理工学研究科

重み付きグラスマンの (有理係数) T -同変コホモロジーについて

大森 俊明 (Toshiaki OMORI)

東北大学大学院理学研究科

指数調和写像を用いた調和写像の存在定理

今田 充洋 (Mitsuhiro IMADA)

慶応義塾大学理工学研究科

Normality of complex contact manifolds

飯田 麻理 (Mari IIDA)

東京理科大学理学研究科

1 変数 star 積の適用

• パラレルセッション 代数学会場 (B)

高橋 祐人 (Yuto TAKAHASHI)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

拡大次数を制限した類体塔の無限性

宮坂 有憲 (Yuken MIYASAKA)

東北大学理学部

Torsion on theta divisors of hyperelliptic Jacobians and p -adic Sato theory

岡本 卓也 (Takuya OKAMOTO)

名古屋大学多元数理科学研究科

On alternating analogues of the Mordell-Tornheim double and triple zeta values

田坂 浩二 (Koji TASAKA)

九州大学数理学府

自然数を $8s$ 個の平方数で表す方法の個数の明示公式

長谷川 武博 (Takehiro HASEGAWA)

工学院大学学習支援センター

Some remarks on superspecial curves of low genus

安武 和範 (Kazunori YASUTAKE)

九州大学大学院数理学府

相対反標準束がネフになる射影空間束の構造について

矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

九州大学数理学府

$\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1$ となる射影多様体について

• パラレルセッション 数理科学会場 (C)

二口 伸一郎 (Shinichiro FUTAKUCHI)

北海道大学大学院理学院

木村 恵二 (Keiji KIMURA) 京都大学大学院理学研究科
回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題の安定性と分岐構造及び熱対流が両側球に及ぼす影響

石本 健太 (Kenta ISHIMOTO) 京都大学数理解析研究所
微生物の流体力学と帆立貝定理

ダニエル・パックスウッド (Daniel PACKWOOD) 京都大学理学研究科
連続時間の酔歩過程に対する緩和関数

山本 健 (Ken YAMAMOTO) 早稲田大学大学院先進理工学研究科
破壊現象におけるベキ分布を説明する可解な確率モデルについて

周 冠宇 (Guanyu ZHOU) 東京大学数理科学研究科
Analysis of the fictitious domain method with H^1 -penalty for parabolic problem

犬伏 正信 (Masanobu INUBUSHI) 京都大学大学院理学研究科
Kolmogorov 流の共変 Lyapunov 解析

寺西 功哲 (Noriaki TERANISHI) 北海道大学大学院理学院
Absence of Ground States of Generalized Spin Boson Model

● パラレルセッション 解析学会場 (C, D)

柿澤 亮平 (Ryohei KAKIZAWA) 東京大学大学院数理科学研究科
Determining nodes for semilinear parabolic evolution equations in Banach spaces

高江洲 俊光 (Toshimitsu TAKAESU) 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
確率解析的手法による二階の線形偏微分方程式の固有関数の減衰評価について

王 艶艶 (Yanyan WANG) 名古屋大学多元数理科学研究科
On the parameter dependence of the Bergman kernels of rectangles

近藤 信太郎 (Shintaro KONDO) 慶應義塾大学大学院理工学研究科
Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence with Stepanov-almost-periodic initial data

坂田 繁洋 (Shigehiro SAKATA) 首都大学東京理工学研究科
ポテンシャルの最大点に関する幾何学的考察

増田 茂 (Shigeru MASUDA) 流体数理古典理論研究所
Navier-Stokes 方程式定立時の Navier と Poisson の数理論争

石田 敦英 (Atsuhide ISHIDA) 神戸大学大学院理学研究科
定電場へと漸近する時間変動電場内での 2 体散乱問題

森岡 悠 (Hisashi MORIOKA) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
On absence of embedded eigenvalues and a unique continuation property for discrete Schrödinger operators

香川 智修 (Toshinao KAGAWA) 東京理科大学大学院理工学研究科
Weyl Transforms and Solutions to Schrödinger Equations for Time-Dependent Hermite Operators

小林 徹平 (Teppei KOBAYASHI) 明治大学先端数理科学インスティテュート

摂動管状領域における Navier-Stokes 方程式の時間周期問題

若杉 勇太 (Yuta WAKASUGI) 大阪大学大学院理学研究科
変数係数の摩擦項を持つ半線形波動方程式の大域解の存在について

杉山 裕介 (Yuusuke SUGIYAMA) 東京理科大学理学研究科
ある準線形双曲型方程式の解の爆発について

若狭 恭平 (Kyohei WAKASA) 公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科
非線形波動方程式の一般論に対する最適性の最終問題

富澤 佑季乃 (Yukino TOMIZAWA) 中央大学大学院理工学研究科
不動点問題と均衡問題への近似法

● ポスターセッション (E)

赤澤 眞之 (Masayuki AKAZAWA) 北海道大学大学院工学院
大型ヘリカル装置の磁場分布逆解析結果に対する最外殻磁気面の数値的同定

伊東 杏希子 (Akiko ITO) 名古屋大学多元数理科学研究科
実二次体の類数の非可除性について

大久保 岳 (Gaku OKUBO) 北海道大学大学院工学院
ひねりコーシー条件面法を用いた非軸対称核融合プラズマの境界形状逆解析

岡崎 建太 (Kenta OKAZAKI) 京都大学数理解析研究所
 E_6 , E_8 型部分因子環の平面代数と 3 次元多様体の状態和不変量の組み合わせ的構成について

甲谷 里奈 (Rina KABUTOYA) 奈良女子大学大学院
大域結合振動子系における遷移現象

金城 絵利那 (Erina KINJO) 東京工業大学理工学研究科
Two metrics on Teichmüller spaces

香田 竜彦 (Tatsuhiko KODA) 室蘭工業大学大学院工学研究科
対称群及び交代群における方程式の解の個数

小鳥居 祐香 (Yuka KOTORII) 東京工業大学大学院理工学研究科
Finite type invariants for cyclic equivalence classes of nanophrases

佐藤 将樹 (Masaki SATO) 室蘭工業大学大学院工学研究科
対称群及び交代群による環積における方程式の解の個数

永幡 裕 (Yutaka NAGAHATA) 北海道大学生命科学院
ある 2 自由度ハミルトン系双曲×双曲型固定点における、化学反応と標準形

富士 香奈 (Kana FUJI) 奈良女子大学大学院人間文化研究科
生体分子の分子動力学に対する時系列解析 — 集団運動の揺らぎと構造変化の関係を探る —

布田 徹 (Toru FUDA) 北海道大学大学院理学院
連続測定を受ける量子系の状態の時間発展について

世話人： 高棹圭介 (代表) 伊藤翼 菅井智 陶山大輔
中島規博 宮川尚紀 矢野充志

Schedule

2月27日(月)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	松澤 泰道 (解析)			
11:20-12:20	小林 雅人 (代数)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	菊田 伸 (幾何)	高橋 祐人 (代数)	二口 伸一郎 (数理)	柿澤 亮平 (解析)
15:00-15:30	北澤 直樹 (幾何)	宮坂 宥憲 (代数)	木村 恵二 (数理)	高江洲 俊光 (解析)
16:00-16:30	北別府 悠 (幾何)	野口 和範 (幾何)	王 艷艷 (解析)	近藤 信太郎 (解析)
17:00-17:30	大鳥羽 暢彦 (幾何)		坂田 繁洋 (解析)	増田 茂 (解析)

2月28日(火)

10:00-11:00	寺本 央 (数理)			
11:20-12:20	本田 淳史 (幾何)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	隅田 大貴 (幾何)	岡本 卓也 (代数)	石本 健太 (数理)	石田 敦英 (解析)
15:00-15:30	佐藤 寛之 (幾何)	田坂 浩二 (代数)	D. Packwood (数理)	森岡 悠 (解析)
16:00-16:30	野坂 武史 (幾何)	加藤 諒 (幾何)	山本 健 (数理)	香川 智修 (解析)
17:00-18:30	ポスターセッション			

2月29日(水)

10:00-11:00	栗原 大武 (代数)			
11:20-12:20	池田 正弘 (解析)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	竹内 司 (幾何)	長谷川 武博 (代数)	周 冠宇 (数理)	小林 徹平 (解析)
15:00-15:30	阿部 拓 (幾何)	安武 和範 (代数)	犬伏 正信 (数理)	若杉 勇太 (解析)
16:00-16:30	大森 俊明 (幾何)	矢城 信吾 (代数)	寺西 功哲 (数理)	杉山 裕介 (解析)
17:00-17:30	今田 充洋 (幾何)	飯田 麻理 (幾何)	若狭 恭平 (解析)	冨澤 佑季乃 (解析)
18:00-20:00	懇親会			

3月1日(木)

10:00-11:00	田中 守 (幾何)			
11:20-12:20	鹿野 豊 (数理)			
12:20-12:30	閉会			

シングルセッション

Popa の埋め込み問題について

松澤 泰道（北海道大学・日本学術振興会特別研究員 PD）

概要

このテクニカルレポートでは、Sorin Popa 氏が 2005 年に提起した Polish 群の埋め込み問題について基本的なことから解説したいと思います。この研究は安藤浩志君（京都大学）との共同研究です。

1 はじめに

良く知られているように^{*1}，コンパクト Lie 群は適当な次数のユニタリ群 $U(n)$ に埋め込むことができます。この意味でユニタリ群 $U(n)$ は Lie 群の中でも特別な位置を占めています。このことを考慮すると， $U(n)$ 上の Lie 群論を無限次元ユニタリ群上にまで拡張しようとするのは自然な試みのように思えます。ここで無限次元ユニタリ群とは，無限次元 Hilbert 空間上のユニタリ作用素全体のなす群のことです。位相は各点収束位相を入れて，位相群と考えています。しかし無限次元ユニタリ群上で Lie 群論を展開するのは極めて困難であることが分かります。というのも，無限次元ユニタリ群の一径数部分群の生成子全体が全然 Lie 環にならないからです。生成子はいわゆる非有界作用素となり，定義域の問題に遭遇します。無限次元ユニタリ群は Lie 環を持つには大き過ぎるのです。そんな中で私は安藤浩志君と共同で，無限次元ユニタリ群の部分群で，Lie 環を持つクラスを発見しました。

定理 1.1 (Ando-M 2010). 有限 von Neumann 環のユニタリ群の閉部分群に同形な Polish 群は Lie 環を持つ。

次のステップは，どのような Polish 群が有限 von Neumann 環のユニタリ群の閉部分群に同形かを決定することです。実はこの問題は私たちとは全く独立に，2005 年に Sorin Popa によって提起されていたことが後になって分かりました。Popa 氏は氏の cocycle 超剛性定理を述べる際に target group としてこのようなクラスの Polish 群を導入し，有限型 Polish 群と名付けました。この有限型 Polish 群が本講演の主題です。Popa 氏が有限型 Polish 群を導入した後に提起した，有限型 Polish 群の特徴づけの問題を紹介します。

このテクニカルレポートでは，この問題を理解するために必要なことを基本的なことから詳しく解説することを目標としました。そのため，有限型 Polish 群の細部にはあまり触れられませんでしたが，興味を持たれた方は直接声をかけて頂けると嬉しいです。

テクニカルレポートの内容を説明します。第二節は Polish 群を定義し，無限次元ユニタリ群を理解する為に不可欠な Hilbert 空間を導入し，線形作用素，そしてユニタリ群を導入します。第三節では Popa の問題を理解するのに必要な von Neumann 環を必要最小限に絞って解説します。最後の第四節で有限型 Polish 群を定義し，Popa の問題を紹介します。

^{*1} この節で用いた概念や用語は後の節で詳しく解説しています。ご存知のない概念があっても気になさらずに先に進んでください。

2 Polish 群・Hilbert 空間・ユニタリ群

2.1 Polish 群

まずは基本的な用語の復習から始めたいと思います。位相群とは位相を備えた群であって、積と逆元をとる演算が連続になっているもののことです。Polish 空間とは完備可分距離空間に同相な位相空間のことです。位相群が位相空間として Polish 空間であるとき、Polish 群といいます。数学に現れる多くの群が Polish 群になっています。いくつか例を挙げますが、無定義語もあります。ご存知のない言葉が出てきたときはあまり気にせず先に進んでください。

- 第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 位相群は Polish 群です。例えば一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$, 特殊線形群 $SL(n, \mathbb{C})$, ユニタリ群 $U(n)$, 直交群 $O(n)$, $ax+b$ 群, Heisenberg 群, Lorentz 群, $\mathbb{C}^n \rtimes U(n)$, 等々。加法群として $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ も局所コンパクトな Polish 群です。
- 上記の一例ですが、可算離散群は Polish 群です。特に有限群は Polish 群です。可算離散群の例としては整数 $\mathbb{Z}$ や自由群 $\mathbb{F}_n$ 等があります。
- 可分な Banach 空間を加法群とみなすと Polish 群です。例えば l^p 空間 ($1 \leq p < \infty$) や連続関数空間 $C[0, 1]$ は Polish 群です。しかし l^∞ はノルムに関して可分ではないので Polish ではありません。Banach 空間が無限次元なら局所コンパクトでないので、ここで紹介した Polish 群は局所コンパクトではないことに注意してください。
- 距離付け可能なコンパクト空間 X 上の自己同相全体のなす群 $\text{Homeo}(X)$ にコンパクト開位相を入れると Polish 群になります。具体的には Cantor 空間 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ や Hilbert 立方体 $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ 上の自己同相群があります。この例も一般には局所コンパクトになりません。
- 自然数の集合 $\mathbb{N}$ 上の全単射全体のなす群 S_∞ は各点収束位相に関して Polish 群となります。ここで各点収束位相とは、 S_∞ を直積空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}$ の部分集合とみなしたときの、直積位相から決まる相對位相のことです。 $\mathbb{N}$ の位相は離散位相ですが、その直積空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の位相は離散ではないので注意してください。 S_∞ の点列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ と元 $\sigma \in S_\infty$ に対して

$$\sigma_n \rightarrow \sigma \iff \sigma_n(k) \rightarrow \sigma(k) \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

となります。これが各点収束位相という呼称の由来です。 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が距離付け可能な可分位相空間なので、その部分空間である S_∞ も可分です。完備な距離は例えば

$$d(\sigma, \tau) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \delta_{\sigma(k), \tau(k)}}{2^k} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - \delta_{\sigma^{-1}(l), \tau^{-1}(l)}}{2^l}, \quad \sigma, \tau \in S_\infty$$

で与えられます。ここで $\delta_{\cdot, \cdot}$ は Kronecker のデルタです。この Polish 群 S_∞ を無限対称群といいます。無限対称群も局所コンパクトではありません。

- Polish 群の可算直積は再び Polish 群です。従って $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は Polish 群です。しかしこれらはもう局所コンパクトではありません。

2.2 Hilbert 空間

Hilbert 空間とは内積を備えた線形空間で、内積から定まる自然な距離に関して完備なもののことです。以下では係数体は常に複素数体を考え、Hilbert 空間を $\mathcal{H}$, そのベクトルを ξ, η, ζ 等で表します。内積 $\langle \xi, \eta \rangle$ は η に関して線形とし、内積から定まるノルムを $\|\xi\| := \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ と書きます。基本的な例を確認します。

- 有限次元空間 $\mathbb{C}^n$ は内積 $\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^n \overline{z_k} w_k$ に関して Hilbert 空間です。逆に有限次元 Hilbert 空間は全てこの形に内積を込めて同型です。
- 二乗総和可能な複素数列のなす空間 $l^2 := \{a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\}$ は内積 $\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} b_k$ に関して Hilbert 空間となります。 l^2 空間は可分かつ無限次元です。逆に可分な無限次元 Hilbert 空間は全て l^2 空間に内積を込めて同型です。
- 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の二乗可積分関数全体の空間

$$L^2(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ は可測かつ } \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

は内積

$$\langle f, g \rangle := \int_X \overline{f(x)} g(x) d\mu(x), \quad f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$$

に関して Hilbert 空間です。ここで、ほとんどいたるところ等しい関数は同一視していることに注意してください。適当な条件の下で L^2 空間は可分になります。例えば、 X を第二可算公理を満たす位相空間とし、 $\mathcal{B}$ を開集合系から生成される完全加法族、 μ を外部正則な測度とすると $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ は可分です。扱っている完全加法族が明らかなき場合は $\mathcal{B}$ を省略して $L^2(X, \mu)$ と書くこともあります。

可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間や L^2 空間以外にも色々な形で実現されますが、重要なことはどれも互いに同型ということです。これは一見すると Hilbert 空間がつまらない対象であることを示しているようにも見えますが、そうではありません。この結果によってその上部構造を安心して研究することができます。Hilbert 空間の表現を自由に取り替えながら研究できるのも魅力です。見え方が様々でも本質は一つという性格は、量子力学にも通じています。

2.3 線形作用素

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ からそれ自身への線形写像のことを**線形作用素**または単に**作用素**といいます。連続な線形作用素のことを**有界**といいます。この用語は Hilbert 空間の単位球面上で有界になることから来ています：

$$\text{線形作用素 } x \text{ が連続} \iff \sup\{\|x\xi\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1\} < \infty.$$

有界という呼称からは $\mathcal{H}$ 全体の上で $\sup$ をとるのが自然でしょう。しかし線形作用素は線形なので、 $\mathcal{H}$ 全体で $\sup$ をとるとスカラー倍を施すことによって常にその値を無限にすることができてしまいます ($x \neq 0$)

のとき). これが単位球面上に制限して $\sup$ をとる理由です.

- $n \times n$ 複素行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})$ と表します. 各行列 $a \in M_n(\mathbb{C})$ は自然に $\mathbb{C}^n$ 上の線形作用素と見えます. 更に実は連続です. これは成分を計算すれば直ぐに分かります.

- l^2 空間上の作用素 S を

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) := (0, a_1, a_2, a_3, \dots), \quad a = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in l^2$$

と定めます. 容易に分かるようにこの作用素は有界です. これを**シフト作用素**といいます.

余談ですが, 量子力学に現れるような作用素は連続にはなり得ません.

さて, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と表すことにします. この集合は和とスカラー倍と積 (写像の合成) に関して閉じています. 実はもう一つ, 対合と呼ばれる演算 $*$ を備えています. 作用素 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対してその**共役作用素** $x^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を

$$\langle \xi, x^* \eta \rangle = \langle x \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

を満たす作用素として定義します. このような作用素の存在は自明ではありませんが, 唯一つ存在することが Riesz の表現定理を通して分かります. 対応 $x \mapsto x^*$ が**対合**と呼ばれる演算です.

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ のときは $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$ です. このとき, 共役作用素は共役行列になります.

- l^2 空間上のシフト作用素 S の共役作用素は

$$S^*(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots), \quad \forall a = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in l^2$$

となります.

いよいよ本講演の主演であるユニタリ作用素とそれらのなす群を定義します. 有界作用素 $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が**ユニタリ**であるとは, $u^*u = uu^* = 1$ を満たすときにいいます. ここで $1 = 1_{\mathcal{H}}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の恒等写像です. ユニタリ作用素は全単射であり $u^{-1} = u^*$ です. 更に内積を保ちます:

$$\langle u\xi, u\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

逆に内積を保つ $\mathcal{H}$ 上の全単射線形作用素はユニタリです. ユニタリ作用素全体の集合を $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ と書き, **ユニタリ群**と呼びます. 実際, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ は写像の合成に関して群になります. ユニタリ作用素は Hilbert 空間上の自己同形なので, ユニタリ群とは Hilbert 空間上の自己同形群ということです.

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ のときはユニタリ作用素とはユニタリ行列のことです. 従って $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = U(n)$ となります.
- G を局所コンパクト Hausdorff 位相群とし, μ をその Haar 測度とします. 各 $g \in G$ に対して Hilbert 空間 $L^2(G, \mu)$ 上のユニタリ作用素 $\lambda(g)$ を

$$(\lambda(g)\varphi)(x) := \varphi(g^{-1}x), \quad \varphi \in L^2(G, \mu), \quad x \in G$$

と定義することができます. 写像 $\lambda: G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G, \mu))$ は G の**左正則表現**と呼ばれ, 群の準同形になっています.

- 行列 $u \in M_n(\mathbb{C})$ が $u^*u = 1$ または $uu^* = 1$ を満たしていれば自動的にユニタリになることは良く知られています。しかし無限次元の場合はこの事実は成り立ちません。例えば l^2 空間上のシフト作用素 S は $S^*S = 1$ を満たしますが

$$SS^*(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_2, a_3, a_4, \dots), \quad \forall a = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in l^2$$

となり、 $SS^* \neq 1$ です。

次にユニタリ群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ に位相を入れます。位相の入れ方はいくつかありますが、ここでは各点収束位相を入れます。すなわち、 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への写像全体の空間 $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} = \prod_{\xi \in \mathcal{H}} \mathcal{H}$ の部分集合とみなして、直積位相から定まる相対位相を入れます。この位相が各点収束位相と呼ばれる理由は次の通りです。すなわち、 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ のネット $\{u_i\}_{i \in I}$ とユニタリ作用素 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ について

$$u_i \rightarrow u \iff u_i \xi \rightarrow u \xi \quad (\forall \xi \in \mathcal{H}).$$

ネットとは点列の一般化です。ご存知のない方は点列だと思って頂いて問題ありません^{*2}。各点収束位相を入れることでユニタリ群は位相群になります。同形な二つの Hilbert 空間に対してはそれらのユニタリ群も同形なので、可分な無限次元 Hilbert 空間上のユニタリ群を $\mathcal{U}(l^2)$ と書いたりします。

有限次元のユニタリ群 $U(n)$ はコンパクトですが、無限次元の場合はコンパクトどころか局所コンパクトにすらなりません。まずは基本的な性質を紹介します。

定理 2.1. ユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ について次が成り立つ。

- (1) $\mathcal{U}(l^2)$ は局所コンパクトでない。
- (2) $\mathcal{U}(l^2)$ は Polish 群。
- (3) $\mathcal{U}(l^2)$ は完備かつ左不変な距離で距離付けできない。
- (4) $\mathcal{U}(l^2)$ は両側不変距離で距離付けできない。

無限次元ユニタリ群の面白さを感じて頂くために、より深く強力な定理をいくつか述べておきます。

定理 2.2 (Stoyanov 1984). ユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ から Hausdorff 位相群への連続な群準同形は自動的に開写像。

定理 2.3 (Tsankov 2011). ユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ から可分な Hausdorff 位相群への群準同形は自動的に連続。

系 2.4. 各点収束位相はユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ 上の唯一つの Polish 群位相。

Proof. もう一つ Polish 群位相があったとして、その位相を $\mathcal{O}$ と書きます。 $\mathcal{U}(l^2)$ 上の恒等写像 id を考えると、Tsankov の定理から、各点収束位相と $\mathcal{O}$ 位相に関して連続です。よって Stoyanov の定理から開写像なので、 id は同相になります。□

定理 2.5 (Gromov-Milman 1983). ユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ のコンパクト Hausdorff 空間への連続な作用は必ず不動点を持つ。

定理 2.6. ユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ は稠密な共役類を持つ。

定理 2.7. ユニタリ群 $\mathcal{U}(l^2)$ は可縮。

^{*2} 実際、ユニタリ群の各点収束位相は距離化可能なので点列で十分です。

有限次元のユニタリ群は可縮ではないので、最後の結果は有限次元と無限次元のユニタリ群がホモトピー論的に大きく異なることを主張しています。

3 von Neumann 環

有界線形作用素全体の集合 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は和とスカラー倍と積と対合を備えていました。恒等写像 $1 = 1_{\mathcal{H}}$ を含む $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合がこれら四つの演算で閉じていて、更に然るべき位相で閉集合になっているときに、von Neumann 環といいます。正確な定義を述べる前に、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の位相を明確にしておきたいと思います。

ユニタリ群上にもいくつかの位相があるように、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上にもいくつかの位相が入ります。それぞれ特徴があるのですが、ここでも今までと同じように各点収束位相を入れます。すなわち、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を直積空間 $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} = \prod_{\xi \in \mathcal{H}} \mathcal{H}$ の部分集合とみなし、直積位相の相対位相を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に入れます。これが各点収束位相です。各点収束位相はまた**強作用素位相**や**強位相**とも呼ばれます。収束の様子は今までと同様です。つまり、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のネット $\{x_i\}_{i \in I}$ と作用素 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について

$$x_i \rightarrow x \iff x_i \xi \rightarrow x \xi \quad (\forall \xi \in \mathcal{H}).$$

各点収束位相に関して $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の和とスカラー倍は連続になります。しかし対合と積は連続でないことに注意してください。定義を与えます。

定義 3.1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{M}$ が恒等写像 1 を含み、和、スカラー倍、積、対合、各点収束位相で閉じているとき、 $\mathcal{M}$ を **von Neumann 環**という。更に $\mathcal{M}$ が $v^*v = 1$ かつ $vv^* \neq 1$ なる元 $v \in \mathcal{M}$ を持たないとき、 $\mathcal{M}$ を**有限 von Neumann 環**という。

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は von Neumann 環ですが、 $\mathcal{H}$ が無限次元のときは有限ではありません。実際、シフト作用素 S は $S^*S = 1$ かつ $SS^* \neq 1$ を満たします。
- $M_n(\mathbb{C})$ は有限 von Neumann 環です。実際、行列 $v \in M_n(\mathbb{C})$ が $v^*v = 1$ を満たせば、

$$\mathrm{Tr}(1 - vv^*) = \mathrm{Tr}(1) - \mathrm{Tr}(vv^*) = \mathrm{Tr}(1) - \mathrm{Tr}(v^*v) = \mathrm{Tr}(1) - \mathrm{Tr}(1) = 0$$

となります。一方、 $1 - vv^*$ の固有値は全て正なので $1 - vv^* = 0$ です。

- 測度空間を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ とします。 X 上の本質的に有界な関数^{*3}全体の集合を $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ とします^{*4}。 $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ は自然に $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ に有界線形作用素として作用しています。このとき、 $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ は有限 von Neumann 環です。実際、 $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ は可換なので有限であることは直ちに従います。逆に可換な von Neumann 環はこの形に同形になります。すなわち、

可換 vonNeumann 環 = 測度論

です。これが理由で von Neumann 環は**非可換積分論**と呼ばれたりします。注意が必要ですが、「非可換測度空間」というものが存在するわけではなく、測度論のアナロジーが von Neumann 環の上で展開できる、という意味です。具体的には非可換 L^p 空間を構成し、 $(L^p)^* = L^q$ といった馴染みある等式

^{*3} 測度 0 の集合を除いたところで有界な複素数値可測関数。

^{*4} ほとんどいたるところ等しい関数は同一視します。

を証明したりすることができます。その際、積分に対応するものが「トレース」です。トレースについては後で詳しく述べます。

- Γ を可算無限離散群, λ をその左正則表現とします。集合 $\{\lambda(s) \in \mathcal{B}(l^2(\Gamma)) : s \in \Gamma\}$ から生成される von Neumann 環を $L(\Gamma)$ と書き, **群 von Neumann 環** と呼びます。群 von Neumann 環 $L(\Gamma)$ は有限です。これは $L(\Gamma)$ がトレースを持つことから従います。つまり, Hilbert 空間 $l^2(\Gamma) \cong l^2$ の標準基底を $\{\delta_s\}_{s \in \Gamma}$, Γ の単位元を $e \in \Gamma$ とすると, 線形汎関数

$$\tau(x) := \langle \delta_e, x \delta_e \rangle, \quad x \in L(\Gamma)$$

は次の性質を持ちます。ただし, $\mathcal{M} := L(\Gamma)$ としています。

$$(T.1) \quad (\text{トレース性}) \quad \tau(xy) = \tau(yx), \quad \forall x, y \in \mathcal{M}.$$

$$(T.2) \quad (\text{正性}) \quad \tau(x^*x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{M}.$$

$$(T.3) \quad (\text{忠実性}) \quad \tau(x^*x) = 0 \text{ ならば } x = 0.$$

$$(T.4) \quad (\text{規格性}) \quad \tau(1) = 1.$$

$$(T.5) \quad (\text{正規性}) \quad \tau \text{ は } \sigma \text{ 強連続}^{*5}.$$

よって, $v \in \mathcal{M}$ が $v^*v = 1$ を満たすとなると,

$$\tau(1 - vv^*) = \tau(1) - \tau(vv^*) = 1 - \tau(v^*v) = 1 - 1 = 0$$

となります。一方で $1 - vv^* \geq 0$ なので $1 - vv^* = 0$ です。以上から群 von Neumann 環が有限であることが分かりました。

さて, 以上の証明を見ると, 群 von Neumann 環であるかどうかに関わらず, 性質 (T.1)~(T.5) を満たす線形汎関数を持てば有限 von Neumann 環であると結論できます。実は逆も成り立つことが分かっています。

定理 3.2. 可分 Hilbert 空間上の von Neumann 環が有限であるためには, 性質 (T.1)~(T.5) を満たす線形汎関数を持つことが必要十分である。このような線形汎関数を**トレース**という。

4 有限型 Polish 群

有限 von Neumann 環 $\mathcal{M}$ のユニタリ元全体を $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ と表します。すなわち, $\mathcal{U}(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \cap \mathcal{U}(\mathcal{H})$ です。 $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ は $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の部分群なので, それ自身位相群です。そこでこの $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ のユニタリ群と呼びます。我々の興味はこのような群の部分群として実現できる位相群です。

定義 4.1 (Popa 2005). Polish 群 G が適当な可分 Hilbert 空間上に作用する有限 von Neumann 環のユニタリ群の閉部分群に同形なとき, G を**有限型**という。

有限型 Polish 群 G は両側不変距離で距離付けできます。有限 von Neumann 環 $\mathcal{M}$ はトレース τ を持つので, これを用いて距離

$$d(u, v) := \tau((u - v)^*(u - v))^{1/2}, \quad u, v \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$$

^{*5} 各点収束位相より若干強い位相。あまり気にしないでください。

が定義できます。これは両側不変です。実際,

$$d(wu, wv) = \tau((u-v)^* w^* w (u-v))^{1/2} = \tau((u-v)^* (u-v))^{1/2} = d(u, v).$$

また,

$$\begin{aligned} d(uw, vw) &= \tau(w^* (u-v)^* (u-v) w)^{1/2} = \tau((u-v)^* (u-v) w w^*)^{1/2} \\ &= \tau((u-v)^* (u-v))^{1/2} = d(u, v). \end{aligned}$$

以上から d が両側不変距離であることが分かりました。 G は $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ の閉部分群だったので, G も両側不変距離で距離付けできます。 Sorin Popa が提起した問題とは, この性質が有限型 Polish 群を特徴付けるかという問題です。

Problem 4.2 (Sorin Popa 2005). $\mathcal{U}(l^2)$ の閉部分群に同形な Polish 群が両側不変距離で距離付け可能ならば有限型か。

私は安藤浩志君との共同研究で, 特定のクラスの Polish 群については Popa の問題を肯定的に解きました。有限型 Polish 群の例を含め, この辺の話は講演でお話します。紙数が尽きてしまったので, ここで筆を置きたいと思います。

あみだ＝コクセター群＋ブリュア順序

小林 雅人*

2012年2月

第8回数学総合若手研究集会 (北海道大学)

概要

対称群に純代数な方法（コクセター群）で半順序（ブリュア順序）を導入する。この2つのアイデアをまとめて理解するには、「あみだ」を考えるのが助けになる。読者には群の知識を仮定する。

1 イン트로ダクション

計量ベクトル空間やリー群など、複数の構造を併せもつ数学的対象が存在する。実は、対称群もそうである。ある特殊な群の構造を利用して、純代数な方法で半順序を導入できる。このあらすじを述べるのが本稿の目的である。

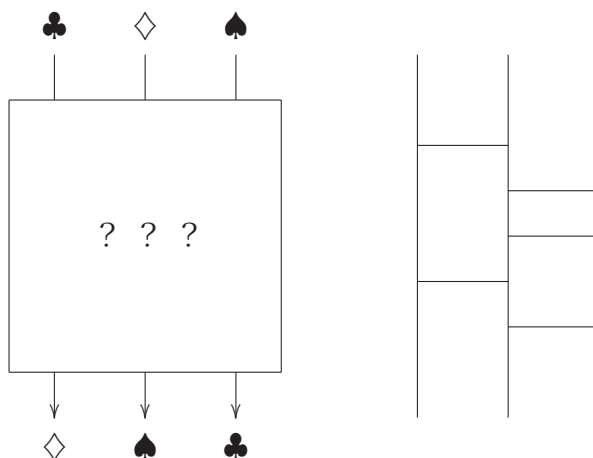
タイトルの「コクセター群」は前述の「純代数的」、「ブリュア順序」は「半順序」に相当する。この2つのアイデアをまとめて理解するには、「あみだ」を考えるのが助けになる。これがタイトルの意味である。

「あみだくじ」の数学的に厳密な定義を考えてみよう。これはそれほど自明ではなく、少なくとも2通りの解釈ができる。ひとつは置換（くじ）として（図1左、置換としてだけ考えるなら横線をすべて隠してしまっても構わない!）。もうひとつは横線の情報まで含めた図形（図1右）として。もちろん、普段は混同しているわけだ。これは数学としては「ある対象とその同値類の同一視」にほかならない（この種の混同はよくある）。次節から、詳細をはっきりさせていこう。

読者には群の知識を仮定する。なお理論の概説が目的なので、定理や事実の証明はすべて省略する。詳しく知りたい方は [1, Chapters 1, 2] あるいは [2, Chapters 1, 5] をじっくり読んでほしい。

*東京工業大学理工学研究科 (kobayashi@math.titech.ac.jp)

図 1: あみだは「くじ」か「横線つきの図形」か？



2 モノイドと語

定義 2.1. **モノイド**¹は結合法則を満たす積と単位元を備えた代数系のことである。集合 S に対し、 S 語とは S から有限個の元を選び出して順序をつけて並べたものをいう。すなわち k 重デカルト積 S^k の元 $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ のことである。ただし、簡単に $r_1 r_2 \cdots r_k$ と書くことが多い。 k を語の**長さ**という。形式的に長さ 0 の**空語**も考え、 e で表す。 $w = r_1 r_2 \cdots r_k$ に対して、 $r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_j}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq k$) の形の語を w の**部分語**と呼ぶ。 e はすべての語の部分語と考える。**自由モノイド** S^* とは、 S 語全体の集合 (すなわち $S^* = \bigcup_{k \geq 0} S^k$) に語を並べて書くことを積、 e を単位元とするモノイドのことである。

定義 2.2. G をモノイド、 $S \subseteq G$ を部分集合、 $w \in G$ をモノイドの元とする。 $w = r_1 r_2 \cdots r_k$ ($r_i \in S$) が成り立つとき、語 $r_1 r_2 \cdots r_k$ は w を**表示する**という。

当然、 w を表示する語は一意的とは限らない。また、

$$r_1 r_2 \cdots r_k = w = r'_1 r'_2 \cdots r'_j \quad (j < k)$$

のようにより短い語で表示できることもある。

¹図 2 からわかるように、あみだの横線を並べて表示する発想には逆元概念は全く必要がない。なるべく素朴な感覚を出発点に、より適切な数学を構成していく方針は捨てがたい (横線に向きをつける手はあるが、いくらか直感とは離れてしまう)。よって、あえて群よりも一般的なモノイドの観点から話を始めることにした。第 4 節で見ると、コクセター生成元は $s^{-1} = s$ を満たすので、モノイドでも群でも結局は同じことなのだ。

3 対称群

定義 3.1. 自然数 n に対して $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とおく。 $[n]$ 上の全単射を**置換**と呼び、その集合を記号 S_n で表す。

S_n には写像の合成（記号 $\circ$ は省略）を積、恒等写像を単位元、逆写像を逆元として自然に群構造が入る。その構造をもう少し詳しく知るために、次の生成元に注目しよう：

定義 3.2. 各 $i \in [n-1]$ に対して、**コクセター生成元** s_i を

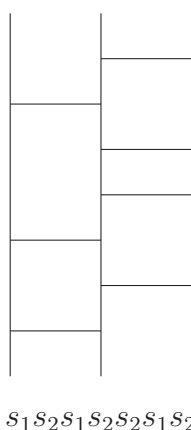
$$s_i(j) = \begin{cases} i+1 & j = i \\ i & j = i+1 \\ j & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する。その全体を記号 $S := \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ で表し、**コクセター生成集合**と呼ぶ。

厳密に言えば、 S_n の部分集合を S で表すのは混乱を起こしかねない。しかし文献ではよく使われているので、ここでもそれにしたがうことにする。

例 3.3. 各 s_i はあみだの横線と理解してよい。すると、横線を引いたあみだくじは S 語として自然に表示できる（図 2）。ただし、写像の合成の順序と一貫させるために上から引いた横線を語の右から書くものとする。

図 2: あみだを横線（ S 語）で表示



$s_1 s_2 s_1 s_2 s_2 s_1 s_2$

ここで重要な事実を確認しておこう：

事実 3.4. どんな $w \in S_n$ に対しても、ある有限個の $r_1, r_2, \dots, r_k \in S$ が存在して

$$w = r_1 r_2 \cdots r_k$$

が成り立つ。いいかえれば、すべての $w \in S_n$ に対して S 語の表示が存在する。

ゆえに、 S_n の群構造は本質的に S の元の間関係式に帰着できる。

4 コクセター関係式

命題 4.1 (コクセター関係式). すべての $i, j \in [n-1]$, $|j-i| \geq 2$ に対して、 $(s_i s_i)^1 = (s_i s_{i+1})^3 = (s_i s_j)^2 = e$ が成り立つ。

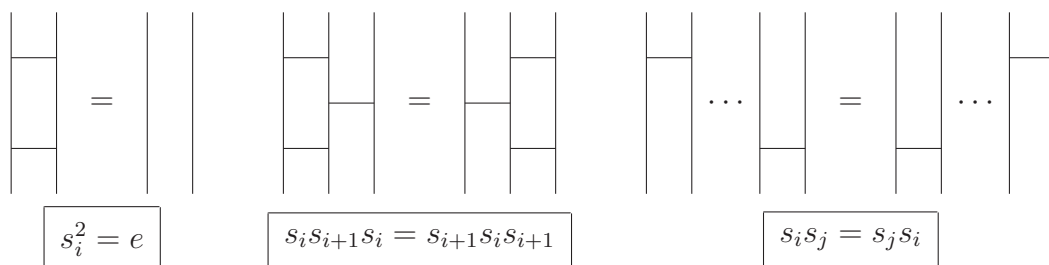
注意 4.2. より具体的には

$$\begin{aligned} s_i^2 &= e, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j &= s_j s_i \end{aligned}$$

とかけることを注意しておく (図 3)。

注意 4.3. 一般に、(無限でもよい) 群 G に生成集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ が存在して関係式 $(s_i s_j)^{m(i,j)} = e$ (ただし $m(i, j)$ は自然数で、 $m(i, i) = 1$, $m(i, j) \geq 2$ ($i \neq j$) を満たす) が成り立つとき G を**コクセター群**、 S を**コクセター生成集合**という。この観点では、 S_n は $m(i, i+1) = 3$, $m(i, j) = 2$ ($|j-i| \geq 2$) のタイプのコクセター群というわけだ。伝統的に「タイプ A_{n-1} 」という名前がある。 n でなくて $n-1$ なのは、コクセター生成元の数を明示するのが慣例であることから。

図 3: コクセター関係式



5 ブリュア順序

まずは少し用語の準備をする。以下、特に断らない限り u, v, w は S_n 、 r_i は S の元、 e は恒等写像を表す。

定義 5.1. w の長さを

$$\ell(w) = \min\{k \geq 0 \mid w = r_1 r_2 \cdots r_k, r_i \in S\}$$

で定める。ただし、 e は空語で表示できると約束して $\ell(e) = 0$ と定義する。 w を表示する語の中で、長さがちょうど $\ell(w)$ のものを**被約語**と呼ぶ。

定義 5.2. u, v が**共役**であるとは、ある w が存在して $u = w^{-1}vw$ が成り立つことをいう。特に記号 $T := \bigcup_{w \in S_n} w^{-1}Sw$ で S の元に共役な置換全体を表す。

このふたつの概念を用いて、ブリュア順序の基本になる二項関係を導入する：

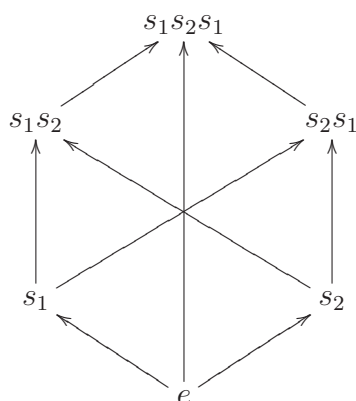
定義 5.3. v が w の**リダクション**であるとは、ある $t \in T$ が存在して $v = tw$ かつ $\ell(v) < \ell(w)$ が成り立つことをいう。このとき $v \longrightarrow w$ と表す。

定義 5.4 (ブリュア順序). $u \leq w$ を、ある $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in S_n$ が存在して

$$u = v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_k = w$$

が成り立つことと定める。

図 4: S_3 のブリュア順序



この関係により、 $(S_n, \leq, \ell)$ は半順序集合になる。なおこの順序や長さは S_n だけでなく、その中の特別な生成集合 S を指定して構成できたことを改めて強調しておく。したがって $\leq_S, \ell_S$ とでも書くべきだが、簡単のために以下でも省略する。

例 5.5. 図 4 は S_3 のリダクションあるいはブリュア順序を示す。例えば

$$s_1 \longrightarrow s_2 s_1 \longrightarrow s_1 s_2 s_1$$

であるから、 $s_1 < s_1 s_2 s_1$ である。また、 $s_2 s_1$ と $s_1 s_2$ の間にリダクションの列は存在しないので、 $s_2 s_1 \not\leq s_1 s_2$ かつ $s_1 s_2 \not\leq s_2 s_1$ が成り立つ。要するに、このふたつは比較不可能である。

注意 5.6. T を互換、 $\ell(w)$ を転倒数と解釈してブリュア順序を導入する方法もある。実は、その方が直感的にわかりやすい。しかし、それは [3] の第 3～5 章に書いたもので、ここでは一般的な方法をとった。我々の方法をそのまま用いれば、どんなコクセター群にもブリュア順序を定義できる。詳しくは [1, Chapters 1, 2] を参照せよ。

6 応用 A：部分語の性質

コクセター群のアイディアは単純に見えるが、実はきわめて強力な理論である。本節と次節では応用を紹介する。

事実 6.1 (削除性質). $w = r_1 r_2 \cdots r_k$ を被約語、 $t \in T$ とする。もし $tw \longrightarrow w$ ならある $j \in [k]$ が存在して、

$$tw = r_1 r_2 \cdots \hat{r}_j \cdots r_k$$

が成り立つ。ただし、 $\hat{r}_j$ は取り除くことを意味する。

つまり、「リダクションを矢印と逆の向きに進むこと」は「ある部分語をとること」に対応する。ただし $r_1 r_2 \cdots \hat{r}_j \cdots r_k$ は必ずしも被約とは限らない。したがって、場合によっては $\ell(w) - \ell(tw)$ は 1 よりも大きくなる。

例 6.2. $w = s_1 s_2 s_7 s_5 s_3$, $t = s_1 s_2 s_1$ とおく (両方とも被約)。コクセター関係式を用いれば

$$tw = (s_1 s_2 s_1)(s_1 s_2 s_7 s_5 s_3) = s_1 \underbrace{s_2 s_1 s_1 s_2}_e s_7 s_5 s_3 = s_1 s_7 s_5 s_3$$

が成り立つので、 tw は $s_1 s_2 s_7 s_5 s_3$ からちょうど s_2 を取り除いたものになる。

定理 6.3 (部分語の性質). $w = r_1 r_2 \cdots r_k$ を被約語とする。次の 2 つは同値：

- (1) $u \leq w$,
- (2) ある $i_1, i_2, \dots, i_j \in [k]$ が存在して、 $i_1 < i_2 < \cdots < i_j$ かつ $u = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_j}$ が成り立つ。つまり、 u は語 $r_1 r_2 \cdots r_k$ の部分語の表示をもつ。

語の包含関係がそのままブリュア順序の大小である、という非常にわかりやすいアイデアだ。念のため詳細を確認しておく：定理の主張は、「 w の任意の被約語 $r_1 r_2 \cdots r_k$ に対して、(1) $\iff$ (2) が成り立つ」である（事実 6.1 も同様）。 u, w の被約語はたくさん存在するので、実は相当に強い結果である。

例 6.4. (1) $u = s_2 s_5 s_3, w = s_1 s_2 s_7 s_5 s_3$ とする。いま、語 $s_1 s_2 s_7 s_5 s_3$ が被約とわかったとしよう。すると、部分語の性質から直ちに $u < w$ が成り立つ。実際、 $s_2 s_5 s_3$ は $s_1 s_2 s_7 s_5 s_3$ と部分語として現れる。 w の他の被約語 $s_5 s_1 s_2 s_7 s_3$ に対しては、部分語 $s_5 s_2 s_3$ が u を表示する。

- (2) 図 4 では、部分語の性質が確かに成り立っている。また、最大元を表示する語 $s_1 s_2 s_1$ の代わりに $s_2 s_1 s_2$ をとっても、やはり部分語の性質が成り立つ。

7 応用 B：群の同型性

もうひとつの応用として、コクセター関係式は群全体の構造を決定してしまうことを見る。

定義 7.1. $u, v \in S^*$ が**コクセター同値**とは、 u からコクセター関係式 4.1 のいずれかを有限回用いて v まで移れることとする。このとき $u \sim v$ と表す。

例 7.2. $u = s_1 s_2 s_1 s_2 s_2 s_1 s_2, v = s_1$ とおく。

$$s_1 s_2 s_1 s_2 s_2 s_1 s_2 \sim s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 \sim s_1 s_2 s_2 \sim s_1$$

より、 $u \sim v$ が成り立つ。

その名の通り、 $\sim$ は S^* 上に同値関係を定義する。これから生ずる商群（商モノイド） $S^*/\sim = \{S \text{ 語のコクセター同値類} \}$ は S_n と同型になる：

定理 7.3. 群 G が $n-1$ 個の元からなる生成集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ を持ち、コクセター関係式 4.1 のみを満たすと仮定する。このとき、 G は S_n と群として同型である。

つまり、このような群は本質的に一つしかない。ここで「パラダイムシフト」が起こる。我々は、対称群を置換の合成で成す群として導入した。しかしそれをすべて忘れて、単にコクセター関係式から群 S_n を定義してもよいと定理は主張する（ちょうど、行列式の具体的な和の表示を忘れて多重線形性と正規性からも抽象的に定義できるように）：

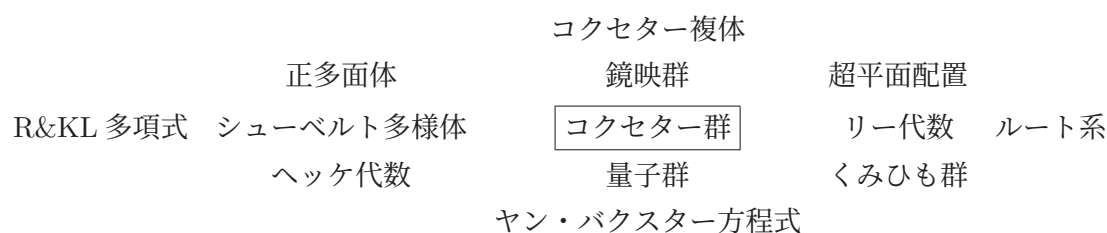
$$[S_n \text{ のもうひとつの顔}]$$

$$\text{Perm}[n] \longrightarrow \boxed{S_n} \longleftarrow S^*/\sim$$

ちなみに、定理の仮定のもとで G は（ブリュア順序で） S_n と順序同型にもなる。

8 発展

コクセター群は多面体や鏡映の対称性を記述する理論として 20 世紀前半に始まり、周辺の数学を大きく巻き込んで発展して来た。現代では、特に組み合わせ理論・代数幾何学・表現論と仲が良い：



どのトピックも膨大な量の文献があるので、ここで個々に紹介することはできない。[1] にある豊富な参考文献を活用するとよいだろう。

参考文献

- [1] Andres Björner and Francesco Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 231, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [2] James Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [3] 小林雅人、あみだくじの数学、数学のかんどころ 5、共立出版、2011.

局所スペクトル解析による大自由度力学系の解析

○寺本 央¹、戸田 幹人²、小松崎 民樹¹

¹北海道大学電子科学研究所、²奈良女子大学理学部物理学科

概要：

自由度が増えるとその自由度が介在する動力学も質的に変化する。そのような質的な違いは力学系の性質によって理解できるはずであるが、自由度の増加とともに力学系がどのような性質を獲得しうるのかという組織的で普遍的な議論は無い。我々は、新しい局所スペクトル解析と呼ばれる解析手法を提案し、大自由度力学系で起こる現象のスペクトルレベルでの分解、解剖を試みる。また、大自由度力学系特有の新規現象の解明とその概念化を行う。我々の局所スペクトル解析は、振動的な自由度だけではなく、指数関数的増大、減少や、冪的な挙動も取り出すことができる。また、時系列だけから局所スペクトルを抽出する理論を作り、時系列解析全般に利用できる汎用性の高い方法論を作ることを目標とする。

1. 背景（力学系の定義されている空間の次元とその空間で現れる現象あるいは構造に関して）：

天体の運動から生命現象に至るまで、万物のダイナミクスは力学系の言葉で記述されるが、そのダイナミクスに介在する自由度の数はさまざまである。例えば、二体の天体を記述するケプラー問題は3自由度系であるし、比較的小規模なたんぱく質は、約数十万自由度からなり、我々生命体に至ってはアボガドロ数ほどの自由度から構成されている。その自由度の増加に伴い、そのダイナミクスの複雑さは増大する。ケプラー問題は、可積分系であるが、一体余分に天体を増やすだけで、そのダイナミクスはカオスと呼ばれる大変複雑な挙動を示す。たんぱく質に至っては、少数多体系よりもさらに複雑な動力学を示し、多数の自由度で構成されているということから、そのダイナミクスは部分的には統計的性質を帯びる。生命体にいたっては、先の非生物に比べると、質的に異なるダイナミクスを持つように見える。しかしながら、なにがそれらのダイナミクスを質的に分けているのかについては、はっきりとした普遍的な説明はまだ与えられていない。基本的な物理法則は、ニュートン方程式、シュレディンガー方程式等、時間発展方程式で記述されているはずなので、以上のような質的な違いもそれらの時間発展方程式によって記述される力学系の言葉により理解できるはずであると考えられる。

力学系の自由度によって、その力学系の性質がどのように異なるのか？は、低自由度力学系においてはよく知られている。簡単のために、ここでは、力学系のうちベクトル場から生成される連続力学系に限ることにする(写像力学系に興味がある読者は、適宜、次元を調整してください)。例えば2次元自励系ではカオスが発生しない。しかし、3次元自励系においては、有名なローレンツ方程式に代表されるように、その動力学はカオスを呈することができる。このようなカオスも力学系の次元の増加とともに力学系が獲得しうる一つの重要な性質である。また、3次元自励系では、解軌道は3次元空間中の紐であり、例えば、周期軌道が周期倍分岐

するときに、周期軌道間の絡み目、あるいは、周期軌道自身の結び目等が発生する(Uezu ら Prog. Theor. Phys. 68, 1907 (1982)、日本語の関連する文献としては、本池ら、カオスとトポロジー、培風館)。しかし、4 次元以上の自励系では、4 次元空間中での 1 次元の周期軌道はいつでもほどこことができるので、そのような結び目、絡み目等によるトポロジーの制約を受けない(4 次元以上の空間においても、力学系の流れが実質的に 3 次元空間に閉じ込められている場合には、やはり、トポロジーの制約を受ける。Gilmore ら Rev. Mod. Phys. 70, 1455 (1998) を参照)。代わって、4 次元以上の力学系で初めて登場しうる構造に近年盛んに研究されている Heterodimensional cycle とそれによって生じる Blender 構造と呼ばれるものがある(入門的な文献としては Bonatti ら Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, Springer 2005)。Heterodimensional cycle とは、異なる不安定性指数をもつ二つの双曲型固定点がお互いの安定/不安定多様体同士の交差により形成されるサイクル構造である。異なる不安定性指数を持つとは、例えば、一つの固定点安定方向 2 つ、不安定方向 1 つ、軌道の時間発展の方向 1 つを持っており、もう一つの固定点安定方向 1 つ、不安定方向 2 つ、軌道の時間発展の方向 1 つを持っている場合である。この Heterodimensional cycle は非双曲力学系の代表的な構造である。なぜなら Palis 予想によると、ある力学系は、ホモクリニック接触と呼ばれる安定多様体と不安定多様体が接触するということがなく、かつ Heterodimensional cycle を持たなければ、双曲力学系と呼ばれる性質がよくわかっている力学系でいくらでもよく近似できる、からである。つまり、上述のホモクリニック接触と Heterodimensional cycle は、非双曲力学系と双曲力学系を分ける重要な構造である。また、この Heterodimensional cycle は、構造安定ではないが、摂動によって robust に保持されるという性質を持ち、その性質は Blender 構造と呼ばれる構造によって保証されている(Bonatti ら arXiv:1104.0980v1, 2011)。この構造は、低次元カオスにおいて典型的に現れるスメールの馬蹄とは質的に異なる構造であり、Heterodimensional cycle とともに、3 次元以下の自励系では現れ得ない大自由度力学系特有の構造である。また、ホモクリニック接触に関しては、最近、共変 Lyapunov ベクトル(方法論としては Eckmann ら Rev. Mod. Phys. 57, 617 (1985), Ginelli ら Phys. Rev. Lett. 99, 130601 (2007), 大自由度力学系への応用 Yang ら Phys. Rev. Lett. 102, 074102 (2009), 斉木ら JSIAM lett. 2, 107 (2010), Navier-Stokes 乱流への応用の日本語の記事としては、犬伏ら、数理解析研究所講究録 1742, 33 (2011)を参照)を用いた解析が大自由度力学系に対してもなされるようになったが、その構造がダイナミクスにどのように寄与するのかということに関してはまだわかっていないことが多い。また、Hamilton 力学系に限れば、2 自由度(3 次元等エネルギー空間)で、初めてカオスが発生しうる。このカオスは、3 自由度以上(5 次元等エネルギー空間)の系で生じるカオスとは質的に異なっている。その理由は Hamilton 力学系特有のトーラスと呼ばれる構造に起因する。そのトーラスは自由度と同じ数だけの次元を持っており、2 自由度系では 2 次元、3 自由度系では 3 次元となるのだが、2 次元トーラスが 3 次元等エネルギー空間を分断できるのに対して、3 次元トーラスは 5 次元等エネルギー空間を分断できないという質的な違いがある。この違いゆえに、3 自由度以上の Hamilton 系では、アーノルド拡散と

呼ばれる軌道がトラス間を行き来する現象が生じる(Arnoldら Sov. Math. Dokl. 5, 581, (1964), Chilikovら Phys. Rep. 52, 263 (1979))。また、法双曲不変多様体という、法線方向の不安定性/安定性のほうが接線方向のそれらよりも大きい不変多様体の崩壊は 3 自由度以上の Hamiltonian で、初めておこることが我々によって示された(寺本ら Phys. Rev. Lett. 106, 054101 (2011))。この法双曲不変多様体は、後に述べるように、高次元力学系における構造安定な不変多様体の代表的ものである。さらに大自由度の力学系では、例えば、ミルナーアトラクターは金子らによって 7 次元程度でカオス結合系で主要な役割を果たすようになると議論されている(金子ら Phys. Rev. E 66, 055201(R)(2002))が、どの程度その議論が普遍性を持っているのかは明らかになっていない。また、カオスの遍歴(池田ら Prog. Theor. Phys. Suppl. 99, 295 (1989), 金子ら Physica D 41, 137 (1990), 津田ら Microcomputers and Attention, Manchester University Press, pp. 430 (1991))は現象論レベルでは提出されているが、まだその確たる定義はなく、カオスの遍歴と呼ばれる現象もさまざまで、分類が望まれている状況である(小室ら、数理解析研究所講究録 1118 巻 1999 年 96-114 で、先の金子らのカオス結合系の場合には、カオスの遍歴を生み出す機構の明確な説明はあるが、小室氏曰く「カオスの遍歴の発生メカニズムはどのシステムでも同じであるとは限らないと思う。むしろ、いくつかの典型的な発生メカニズムが存在している可能性がある」と私は考えている(小室ら、同、本文より)」。このカオス結合系においては、結合系を構成している任意の素子の組が完全に同期している空間は、このカオス結合系の不変面になっており、かなりきれいな対称性を持っている。他のカオスの遍歴を示す力学系でこのような対称性を持っていないものもあり、それらは、小室らの提案するメカニズムとは質的に異なるカオスの遍歴の発生機構を持っている可能性もある。)。一般の力学系は上記のカオス結合系のようなきれいな対称性を持たないと考えられ、その場合には、以上のような大自由度力学系の動力学を解析する手法としては有力な手法が無いのが現状であり、そのような手法が望まれる。

以上の背景を踏まえ、本研究課題では、力学系の解軌道に沿って、その解軌道の時間局所的なスペクトルを、その解軌道の各点における Green 関数の極として抽出する手法を開発する。Conley によると任意の力学系の相空間は、あるポテンシャルの勾配に沿って流れる gradient と呼ばれる部分と、それ以外の chain recurrent set と呼ばれる再帰的な部分に分解できる(この事実は、國府ら、力学系の大域的構造に対する計算機援用解析、数理科学 8, 14 (2011)でわかりやすく解説されているので、参照のこと。)。力学系の長時間挙動を決めているのは、後者の再帰的な部分であり、そのような再帰挙動の構造は、その解軌道の持つスペクトルに反映されると期待されるので、解軌道のスペクトルの構造を抽出することを通して、再帰的な部分に隠された力学系の構造を解明する。また、カオスの遍歴は、冪的間欠的なダイナミクスとして特徴付けられることから、その冪的な振る舞いを一本の解軌道から抽出するための方法論をつくり、カオスの遍歴と呼ばれている現象の分類およびその概念の精緻化を行う。さらに、アーノルド拡散は、異なる自由度の周波数の共鳴により引き起こされることがわかっているが、大自由度 Hamilton 系で時空間階層的に分布する共鳴の構造等を抽出することによりア

アーノルド拡散の高次元空間における様相を理解する。

大自由度力学系でも、不安定周期軌道の抽出、共変 Lyapunov ベクトルの解析などが行われるようになってきたが、不安定周期軌道は抽出が困難な上に、実際にその不安定周期軌道が系の統計的な性質を反映しているか、あるいは、その不安定周期軌道が力学系の大域的な流れを理解するのにどのくらい重要なかはアприオリにはわからない(散逸力学系の相関関数等の統計量を不安定周期軌道から再構成する取り組みとしては、藤坂ら、散逸力学系カオスの統計力学、培風館、および、その一連の引用文献を参照のこと。)。また、共変 Lyapunov ベクトルの方向はあくまでその方向に軌道をずらしたときに時間無限大で一番(n 番目に)伸びる方向であり、その方向は必ずしも時空間局所的な相空間の構造を反映するとは限らないし、その性質上時間周期的な運動を取り出すことは困難である。しかし、カオスの遍歴、アーノルド拡散等の現象は、まさにその時空間局所的な相空間の構造によって引き起こされているものであると考えられるので、我々の局所スペクトル解析は、それらの手法と相補的な情報を与えるものと期待される。また、同様の時空間局所的なスペクトルを取り出せる手法に(ここでは特に力学系への応用に限る)、Wavelet 解析(Chandre ら Physica D, 181 (2003); PRAMANA- journal of physics, 64, 371 (2005), 小路口ら Laser Phys. (Russia) 16 (2006)), 短時間 Fourier 解析(Laskar, Physica D 67, 257 (1993)), Wigner 分布、Padé Laplace 法(Claverie ら Comp. Phys. Rep. 9, 247 (1989))があるが、先の三つは周期的な運動しか取り出せない点(指数関数的増大、減少、あるいは、冪的な挙動を取り出せない)、Padé Laplace 法は冪的な挙動を取り出せない点、Wavelet 解析は Mother Wavelet の選択に、短時間 Fourier 解析は、短時間窓の選択に任意性があり、その選択によって異なるスペクトルを出すことが知られている。また、Padé Laplace 法は数値積分を必要とすること、および Padé の展開の原点の選択に任意性があることが知られている。我々の手法は、周期的な運動だけではなく指数関数的増大、減少あるいは冪的な挙動を抽出するでき、しかも、上述の他の手法に見られる任意性も持たず、系に内在的なスペクトル構造を取り出せる。この手法により高次元力学系における、カオス的遍歴の明確な概念化、アーノルド拡散の高次元特有の階層構造の解明、さらには、それらの概念を超える高次元力学系の新規な現象の発見及び概念化が期待される。

2. 方法論：

2-1. 概要：

大自由度力学系の時空間局所的なスペクトルの構造を局所 Green 関数とその極を用いて抽出するための方法論を作る。その局所 Green 関数は、解軌道が十分滑らかであり、力学系の相空間がコンパクトである、または、有界な領域から出て行くスピードが高々指数関数で抑えられるならば、無限遠点で解析的である。その解析性を用いると、無限遠点で局所 Green 関数を展開することができ、対角 Padé 近似を用いることでその極を抽出できる。また、その方法論を用いると、力学系の振動的、指数関数的な振る舞いだけではなく、その冪的な挙動も

抽出することができる。

2-2. 設定：

相空間の各点、各自由度に対する局所的なスペクトルを計算するための理論的枠組み、計算方法を確立する。局所的なスペクトルを以下のように構成する。ある相空間上に力学系が定義されているとする。その力学系の時刻 $t = 0$ において初期条件 z_0 から出発した解軌道を z_t とし、その解の時間発展方程式が $\frac{d}{dt} z_t = iLz_t$ で与えられているとする。ここで iL は時間推進演算子であり、連続力学系であれば、常にこの形で時間発展方程式を書くことができる。例えば、Hamilton 力学系の場合には L は Liouville 演算子と呼ばれており、Schrödinger 方程式の場合には、 L は Hamilton 演算子と呼ばれる。電磁気学の Maxell 方程式もスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いると Hamilton 形式の方程式に変換することができるので、物理の基礎的なほとんどの法則は $\frac{d}{dt} z_t = iLz_t$ の形の方程式によって記述される。この時間発展方程式の形式解は $z_t = e^{iLt} z_0$ と書くことができ(特に L が自己共役作用素であるときには、Stone's Theorem と呼ばれている。)、この演算子 L のスペクトルの構造が解軌道の持つ時間スケールを決定している。このスペクトルの構造は対応する resolvent $R(\omega) = \frac{1}{\omega - L}$ が有界作用素となる ω の補集合に一致している。この resolvent を初期位置 z_0 において評価したものの $\frac{1}{\omega - L} z \Big|_{z=z_0}$ を位置 z_0 における局所 Green 関数とよび、その表現が発散する ω の集合をその位置における局所的なスペクトルと呼ぶことにする。

2-3. 局所スペクトルの数値的計算方法：

具体的に、resolvent の極を計算するために、ここでは、まず resolvent を $\omega = \infty$ で展開する。ここで、問題となるのは、一般には時間推進演算子 L は非有界作用素になるということである。例えば、H. Spohn によつて、Hamilton 系の場合には、自明な例を除いては、ほとんどの場合に非有界作用素となることが指摘されている(Spohn ら、Physica A, 80, 323-338 (1975))。時間推進演算子が非有界な場合、resolvent は $\omega = \infty$ で解析的ではないので、resolvent 自体は $\omega = \infty$ で展開することはできない。しかし、局所 Green 関数は、解軌道が十分滑らかであり、相空間がコンパクトな場合あるいは軌道が有界な領域から離れていくスピードが時間の増大とともに高々指数関数程度の速さならば、 $\omega = \infty$ で解析的になることが証明できる。

$$\text{次に、局所 Green 関数を } \omega = \infty \text{ で } \left. \frac{i}{i\omega - iL} z \right|_{z=z_0} = \frac{i}{i\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iL}{i\omega} \right)^n \left. z \right|_{z=z_0} = \frac{i}{i\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\omega} \right)^n \left. \frac{d^n z}{dt^n} \right|_{t=0}$$

のように展開する。ここで、展開係数は解軌道の時間に対する微分になっている。この微分は大自由度の系においても Picard の逐次近似法および高速自動微分を用いれば簡単に評価できる。次に、 $\omega = \infty$ 近傍でこのような解析的な展開を持つ関数を解析接続することで、局所 Green 関数の極を計算する。ここではその解析接続を Padé 近似を用いて行う。この Padé 近似が収束するかどうかは、局所 Green 関数の性質によって異なる。局所 Green 関数が有理関数あるいは有理型関数の場合には収束定理が Padé 近似の次数を上げていくと収束することが知られている(Baker ら Padé approximants, Cambridge University Press (1996))。局所 Green 関数が解析的であるだけでは、一般に収束性は保証されない(一部の Padé 近似に対しては近似列の部分列をうまく選ばないと収束しない。先の Baker ら本の第 6 章の議論を参照のこと)が、スチルチェス級数と呼ばれる特殊なクラスの関数に対しては収束定理が存在する。また、Lubinsky らは、解析関数よりも強い、係数が次数とともにそんなに変動しない、クラスの関数に対しては、関数の定義域の一部の領域で収束性が示せることを示した(局所 Green 関数が branch cut や真性特異点を持つ場合がその Padé 近似が収束しない典型的な事例であると考えられる。このような場合には数値的には、Padé 近似の極は branch cut に沿って並ぶ、あるいは、真性特異点の周りに分布する、傾向があることが経験的に知られており、その振る舞いはそんなに絶望的なわけではない。詳しくは、Baker らの本を参照のこと)。数値的な誤差によって、Padé 近似は、局所 Green 関数の極とは別の位置に極を持ってしまう場合が考えられるが、そのような極は局所 Green 関数の極と次のように判別できる。一つ目は、 z_t と $\frac{dz_t}{dt}$ は

定数を除いて同じスペクトルを持つということに着目し、おのこの局所 Green 関数を計算し、両者が $\omega = 0$ を除いて同じ位置にスペクトルを持つことを確認する方法である。二つ目は、局所 Green 関数の Padé 近似の分母の多項式のゼロ点と分子の多項式のゼロ点を重ねてみることである。もし、分母の多項式の根が分子の多項式の根と一致していたのなら、その根は分子と分母でキャンセルするはずであり、それは極ではないと結論できる。このような、分子と分母の多項式の近接するゼロ点の組は Froissart doublet (Basdevant, Fortschritte der Physik (Berlin) 20 (1972))と呼ばれており、Padé 近似の擬似的な極をとして現れるものの典型である。また、一般には展開の仕方によって、Padé 近似の極が違ってしまふということが一般には起こり

$$\text{うる。例えば、局所 Green 関数を、} \left. \frac{1}{\omega - L} z \right|_{z=z_0} = \frac{1}{(\omega - \omega_0) - (L - \omega_0)} \left. z \right|_{z=z_0} \text{ と表現すれば、}$$

$\frac{1}{\omega - \omega_0}$ の冪による局所 Green 関数の別の展開を得る。Padé 近似の極の位置は、一般には ω_0 の選択に依存してしまうが、Padé 近似のうち対角 Padé 近似と呼ばれる分子と分母が同じ

次数を持っているものを用いると、その極は ω_0 の選択によらずに一意的に定まることが、対角 Padé 近似の homographic invariance という対称性から証明できる。

3. 局所スペクトル解析を用いた大自由度力学系の解析

以上の方法論を用いると、力学系が定義されている相空間の各点の周りでの局所的な構造を抽出することができる。大自由度力学系の相空間構造がどうなっているのかは、いまだに解明されていない。例えば、金子ら（金子ら *Chaos*, 13, 926 (2003)）には、そのポンチ絵（図 1 にその概念図の骨子をまとめる）が示されている。

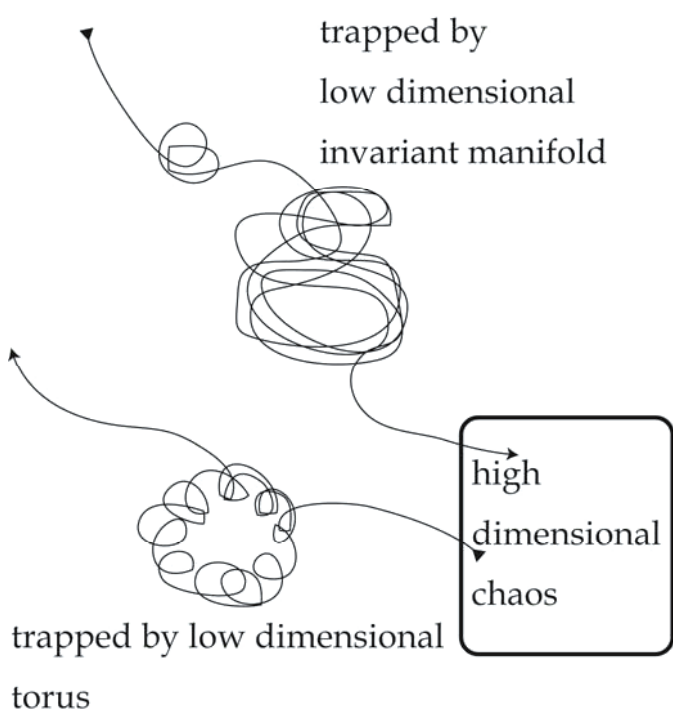


図 1 (金子ら *Chaos*, 13, 926 (2003)を参考に書いた大自由度力学系の相空間の概念図) 軌道が通過する領域の相空間の幾何構造を反映して、間欠的に低次元 torus 等の低次元不変多様体にトラップされたり、あるいは、その近傍を飛び出し複雑な運動 (high dimensional chaos) をしたりする。

図 1 では、軌道が、現在いる相空間の構造に応じて、周期的にある不変多様体にくるくる巻きついたり、間欠的に、その不変多様体近傍から別の不変多様体近傍へと安定多様体と不安定多様体のホモクリニック交差を通して移動するさまが描かれている。また、その間欠的な移動の際に、系の実効的な次元が上昇することが経験的に知られている（カオス結合系の場合には、各々の素子がめいめいばらばらに運動する。これが、図 1 の”high dimensional chaos”の部分に相当する。ここではどのような運動描像が描けるのかはよくわからない。）。しかし、実際にこのような動力学が繰り返し広がられている相空間は、超巨大な自由度からなる空間であり、この空間の動力学が実際にどうなっているかを眼で見ることはもはや不可能である。けれども、軌道が時々刻々どのような運動をしているかは、その軌道が持つスペクトルに反映されるはずであるから、局所スペクトルを見ることでその背後にある構造を推察できるのではないかと期待している（孤立スペクトルだけではなく、連続スペクトルが本質的な役割を果たす可能性がある。例えば、金子ら、複雑系のカオスのシナリオ、朝倉書店。藤坂ら、散逸力学系カオスの統計力学、

培風館の p.65 の下の行に非双曲力学系の場合に連続スペクトルが重要になる可能性が示唆されている。)。高次元における力学系において主要な構造の一つに法双曲的不変多様体がある（不変多様体であり、法線方向の安定/不安定指数が接線方向のそれに比べて大きいもの(Fenichel ら *Indiana Univ. Math. J.* 21, 193 (1972))。その法双曲的不変多様体の近傍では、適切な座標変換によって、法双曲的不変多様体の法線方向のダイナミクスを線形化することができることが知られている(Pugh ら *Inventiones math.* 10, 187 (1970))。軌道がその近傍を通過する際には、その軌道の局所スペクトルにその線形化されたダイナミクスの指数を反映して動くことが期待される。この法双曲不変多様体は、構造安定である(Fenichel ら *Indiana Univ. Math. J.* 21, 193 (1972))。また、逆に C^1 位相での摂動をベクトル場に与えたときに頑強に残る孤立した不変多様体は法双曲的である(Mañé ら *Trans. Math. Soc.* 246, 261 (1978))。この二つの事実より法双曲的不変多様体は構造安定な不変多様体の代表的な構造であることがわかる（しかし、3次元以上の力学系では、構造安定な構造は C^1 位相で稠密ではないことに注意。）。また、局所的にある不変多様体に巻きついている、あるいは、Hamilton 系において、共鳴トーラスの sticky な領域にトラップされている(相澤ら *Prog. Theor. Phys.* 81, 249 (1989))ときには、局所スペクトルにも周期的な成分が現れることが期待される。これらの時空間局所的な構造は通常の L^2 の意味でのスペクトルでは捉えることが難しい（通常の意味でのスペクトルによりどのような相空間の構造が捉えられるかを Hamilton 系において論じた論文に(Spohn ら, *Physica A*, 80, 323-338 (1975))がある。*"It should be noted that the specification of L up to unitary equivalence contains, in general, much less information than the complete solution of Hamilton's equations of motion. The spectrum only accounts for certain gross features of the Hamiltonian system."* due to H. Spohn)。我々の提案する局所スペクトルは通常の resolvent を相空間の各点に制限することにより、相空間のより局所的な構造を反映した情報を引き出すことを可能とするものである。本発表では、2 で紹介した局所スペクトル解析とそれを時系列から復元できるように改良したもの（寺本ら、投稿準備中）を、たんぱく質の動態等をモデルする Hamilton 系やカオスの遍歴を示す大自由度力学系に適用することによりその背後にある時空間局所的な相空間の構造を抽出し、そのダイナミクスの機構を明らかにすることを目標とする。

4. 謝辞

この一連の研究は日本学術振興会基盤研究(B)、文部科学省「物質・デバイス領域共同研究拠点」、岡崎国立共同研究機構計算科学センター、特定領域「実在系の分子理論」、日本学術振興会若手研究(B)（寺本）、北海道大学総長室事業推進経費（寺本）、奈良女子大学学長特別経費（戸田）などの援助を受けています。この場を借りて感謝いたします。

3 次元球面の外的平坦曲面

本田 淳史^{*†}

東京工業大学大学院理工学研究科

概要

O'Neill-Stiel の定理により、3 次元球面内の完備な外的平坦曲面 (ガウス・クロネッカー曲率が常に消える曲面) は全測地的なものに限ることが知られているが、ある種の特異点を許容すると非自明な例が数多く存在する。本講演では、それらの分類結果を紹介する。分類の応用として、双対性と焦面に関する結果も述べる。

1 背景

双曲平面 H^2 から H^3 への等長はめ込み、すなわち H^3 の完備な外的平坦曲面 (ガウス・クロネッカー曲率が常に消える曲面) は非自明な例が数多く存在する ([1], [4])。一方、Hartman-Nirenberg の定理により $\mathbf{R}^3$ の完備な外的平坦曲面は柱面となり、自明なものに限る ([2], [15])。

ここで、ある種の特異点を許容した外的平坦曲面である外的平坦フロントを考える。 C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が外的平坦フロントであるとは、各点 $p \in M^2$ に対し、その近傍 $U \subset M^2$ と C^∞ -写像 $\nu: U \rightarrow S^2$ が存在して、 $\langle df(TM), \nu \rangle = 0$, $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ かつ $(f, \nu): U \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込みであるものをいう。さらに、外的平坦フロント $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が完備であるとは、 M^2 上のコンパクトな台を持つ 2 階の対称共変テンソル T が存在し、 $ds^2 + T$ が M^2 上の完備な計量となることをいう。このような完備外的平坦フロントは完備外的平坦曲面の一般化であり、非自明な例が数多く存在する。Murata-Umehara [16] はそれらを研究し、次の結果を得た。

事実 1.1 ([16]). 完備外的平坦フロント $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は、特異点集合が空でないならば臍点を持たず、向き付け可能であり余向き付け可能である。それらは変曲点を持たない正則閉曲線 $\hat{\xi}: S^1 \rightarrow S^2$ と S^1 上の 1 次微分形式 α で

$$\int_{S^1} \hat{\xi} \alpha = 0$$

を満たすものと対応する。さらに、 f の全てのエンドが埋め込みであるならば、 f のカスプ辺でない特異点は少なくとも 4 つ存在する。

^{*} 10d00059@math.titech.ac.jp

[†] 本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:23・9534) の助成を受けたものである。

一方で、O'Neill-Stiel[17] の定理から球面 S^3 の外的平坦曲面は完備ならば全測地的となる。しかし、外的平坦フロントを考えると、完備、より強く閉である非自明なものが数多く存在する。ここでは、そのような S^3 の外的平坦閉フロントを研究した結果を紹介する。主結果は以下の通りである。その系として得られる双対性と焦点に関する結果も紹介する (第 4 節を参照)。

主定理. 全測地的でない S^3 の外的平坦閉フロントは、2 次元球面 S^2 の正則閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ で

$$\kappa_1(s) > -\kappa_2(s), \quad s \text{ は弧長パラメータ,} \quad \text{長さが有理比}$$

を満たすものと 1 対 1 に対応する (ただし各 $k = 1, 2$ に対し、 κ_k は γ_k の測地的曲率)。

また、 $\mathbf{R}^3$ の外的平坦フロントは平坦フロントでもある。 S^3 の平坦フロントは Kitagawa-Umehara [10] により調べられている。 H^3 の平坦フロントについては多くの先行研究があり、主として [7, 8, 9, 11, 12, 13, 14] などが挙げられる。一般に、外的平坦フロントと平坦フロントは異なる性質を持つ。例えば、平坦フロントの平行フロントは平坦フロントであるが、外的平坦性は平行フロントをとる操作で保たれない。しかし、類似する性質として、平坦性も外的平坦性も焦点をとる操作で不変であることがわかった。これについても第 4 節で紹介する。

2 準備：3 次元球面内の外的平坦フロントについて

本節では、主結果を理解するために必要な S^3 の外的平坦フロントの基本的性質を紹介する。 S^3 を特殊ユニタリ群 $SU(2)$ と同一視する：

$$S^3 = SU(2) = \{X \in \mathbf{H}; \det X = 1\} \quad \left(\text{ただし } \mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}; z, w \in \mathbf{C} \right\} \right).$$

ここで $\mathbf{H}$ は四元数体と同型である。また、 $\mathbf{H}$ に内積 $\langle A, B \rangle := \text{trace}(AB^{-1})/2$ (ただし $A, B \in \mathbf{H}$) を与えるとき、4 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ と等長的である。単位接ベクトル束

$$T_1 S^3 = \{(p, v) \in S^3 \times S^3; \langle p, v \rangle = 0\} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$$

は標準的接触形式 (Liouville 形式) Θ を持つ。 S^3 への自然な射影を π とするとき、 S^3 のフロントは次のように定義される。

定義 2.1 (フロント). 2 次元多様体 M^2 から S^3 への C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow S^3$ が **フロント** (front) であるとは、各点 $p \in M^2$ に対し、その近傍 $U \subset M^2$ と Legendre はめ込み $L: U \rightarrow T_1 S^3$ が存在して、 $\pi \circ L = f$ となることをいう。

曲面、つまり M^2 から S^3 へのはめ込みは、その (局所的に定義される) 単位法線ベクトル場 ν を用いて定まる写像 $L = (f, \nu)$ が Legendre はめ込みを与えるので、フロントである。また、特異点 (すなわち $\text{rank}(df)_p \leq 1$ となる点 $p \in M^2$) をもつ場合にもフロントとなる例が存在するので、フロントははめ込まれた曲面よりも広いクラスである。

フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ の Legendre リフト $L = (f, \nu)$ の第 2 成分として定まる S^3 への写像 ν を単位法線ベクトル場という。また, $p \in M^2$ がフロント f の臍点であるとは, $\text{rank}(d\nu)_p = 0$ となるときをいう。次の補題は定義から明らかであるが, 有用である。

補題 2.2. フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ の臍点 $p \in M^2$ は非特異である。

フロントにおける外的平坦性を次のようにして定義する。

定義 2.3 (外的平坦フロント). フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ が**外的平坦** (extrinsically flat) であるとは, その単位法線ベクトル場 ν が常に退化しているときをいう。

フロントに対して, 主曲率関数 λ_1, λ_2 は特異点において定義されないが, その拡張として実射影直線 $\mathbf{R} \cup \{\infty\} = P^1(\mathbf{R})$ へ値を持つ写像である主曲率写像 Λ_1, Λ_2 を定義することができる。外的平坦フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ に対しては $\Lambda_2 \equiv [0:1]$ とできるので, $\Lambda := \Lambda_1: M^2 \rightarrow P^1(\mathbf{R})$ を**主曲率写像**と呼ぶことにする。 $p \in M^2$ が臍点であることと, $\Lambda(p) = [0:1]$ となることは同値である。さらに, 滑らかな場合の主曲率半径関数にあたる関数

$$\rho := \frac{\psi_2}{\psi_1}: M^2 \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \quad (\Lambda = [\psi_1: \psi_2])$$

を**主曲率半径関数**という。外的平坦フロント f の臍点集合を $\mathcal{U}_f$ とすると, 非臍点集合 $M^2 \setminus \mathcal{U}_f$ 上では ρ は実数値 C^∞ -関数である。

S^3 の大円の運動の軌跡として得られるフロントを**線織的**であるといい, 線織的な外的平坦フロントを**可展的**という。

3 主結果

外的平坦閉フロントとは, 外的平坦フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ で M^2 がコンパクトであり $\partial M = \emptyset$ を満たすものである。主定理はそれらの分類を与える。

主定理. 全測地的でない S^3 の外的平坦閉フロントは, 2次元球面 S^2 の閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ で

$$(3.1) \quad \kappa_1(s) > -\kappa_2(s), \quad s \text{ は弧長パラメータ,} \quad \text{長さが有理比}$$

を満たすものと 1 対 1 に対応する (ただし各 $k = 1, 2$ に対し, κ_k は γ_k の測地的曲率)。

この対応は, 以下のように具体的に表される。立体射影 π_N により, S^2 をリーマン球面 $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と同一視する。このとき, 条件 (3.1) を満たす S^2 の閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ に対し, $\mu_k(s) = \pi_N(\gamma_k(s))$ とし

$$M_k(s) := \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu_k|^2}} \begin{bmatrix} 1 & \mu_k(s) \\ -\bar{\mu}_k(s) & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t) := \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$$

($k = 1, 2$) とするとき、写像

$$(3.2) \quad f(s, t) = M_1(s) \sigma(t) M_2(s)^{-1} \in \mathrm{SU}(2) = S^3$$

は外的平坦閉フロントを与える。逆に、すべての外的平坦閉フロントはこのようにして得られる。
主定理の証明は、次の 2 ステップに分けられる：

- (1) 外的平坦閉フロントは可展的であることを示す。
- (2) 可展的フロントを構成する。

ステップ 1：外的平坦閉フロントの臍点

滑らかな場合と同様に、外的平坦フロントは臍点を持たないならば可展的である。従ってここでは、外的平坦閉フロントには臍点が存在しないことを示す。

命題 3.1. 全臍的でない外的平坦閉フロントは、臍点を持たず可展的である。

このために、補題を用意する。フロント $f : M^2 \rightarrow S^3$ と実数区間 $J \subset \mathbf{R}$ に対し、曲線 $c = c(t) : J \rightarrow M^2$ で $\langle \hat{c}''(t), \nu \rangle = 0$ (ただし $\hat{c} = f \circ c$) を満たすものを**漸近線**と呼ぶ。

補題 3.2 (一般化された球面的 Massey の補題). 外的平坦フロント $f : M^2 \rightarrow S^3$ の臍点集合を $\mathcal{U}_f$, $J \subset \mathbf{R}$ を区間とする。非臍点集合 $M^2 \setminus \mathcal{U}_f$ に含まれる漸近線 $c = c(t) : J \rightarrow M^2 \setminus \mathcal{U}_f$ で、 t を弧長パラメータとすると、主曲率半径写像 ρ は $c(t)$ 上で

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = -\rho$$

を満たす。

(命題 3.1 の証明). $\mathcal{U}_f \neq \emptyset$ として矛盾を導く。非臍点集合 $M^2 \setminus \mathcal{U}_f$ では、 $\mathrm{rank}(d\nu) = 1$ 。従って、曲率線座標系 (s, t) で $\nu_s \neq 0, \nu_t = 0$ となるものが存在する。漸近線は t -曲線 (一意的)。一般化された球面的 Massey の補題より、 $f|_{M^2 \setminus \mathcal{U}_f} : M^2 \setminus \mathcal{U}_f \rightarrow S^3$ は漸近的完備な可展的フロントである。各 $q \in \partial \mathcal{U}_f$ に対し、 $\{q_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset M^2 \setminus \mathcal{U}_f$ で、 $q_n \rightarrow q$ となるものが存在する。各非臍点 $q_n \in M^2 \setminus \mathcal{U}_f$ を通る漸近線を $\gamma_n(t)$ とすると、 $\gamma_n \rightarrow \exists \gamma$. γ は $q \in \partial \mathcal{U}_f$ を通る漸近線。従って、 $\partial \mathcal{U}_f$ の像は S^3 の測地線に含まれる。よって、 $q \in \partial \mathcal{U}_f$ は漸近的完備な可展的フロント上の臍点と思える。従って、次の補題 3.3 を示せば十分である。 $\square$

補題 3.3. 漸近的完備な可展的フロントは、全臍的でないならば臍点をもたない。

ステップ 2：測地線の空間から見た可展面

命題 3.1 から、外的平坦閉フロントは (臍点を持たない) 可展的閉フロントと同値であることがわかった。ここでは、可展的フロントの構成方法を与える。

線織面は S^3 の大円，すなわち測地線の運動の軌跡であるので，測地線の空間の曲線を与える．逆にそのような曲線は線織面を与えるので，次の対応を得る：

$$S^3 \text{ の線織面 } \longleftrightarrow \mathcal{L}(S^3) \text{ の曲線.}$$

ここで， $\mathcal{L}(S^3)$ は S^3 の向き付けられた測地線の空間とする．この対応のもとで，可展面と対応する $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線を決定しよう．

S^3 の大円は， R^4 の 2 次元部分空間と同一視できるので， $\mathcal{L}(S^3)$ は R^4 の向き付けられた 2 次元部分空間全体のグラスマン多様体 $\tilde{\text{Gr}}_2(R^4)$ とみなすことができる．よく知られているように， $\tilde{\text{Gr}}_2(R^4)$ は $S^2 \times S^2$ と同型であるので， $\mathcal{L}(S^3) = S^2 \times S^2$ である．このとき， $\mathcal{L}(S^3)$ 上の計量 G_{tw} を次で定まる直積擬リーマン計量

$$(3.3) \quad G_{\text{tw}} = g_{\text{FS}}^1 - g_{\text{FS}}^2$$

とし，**ミニツイスター計量**と呼ぶ．ただし， g_{FS} を S^2 の標準計量とする．これを用いると，可展面と対応する $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線を記述することができる．

命題 3.4. S^3 の可展面は， $(\mathcal{L}(S^3), G_{\text{tw}})$ の *null* 曲線と対応する．

ここで，擬リーマン多様体の曲線が *null* とは，その速度ベクトルの大きさが常に 0 となるものである．測地線の空間 $(\mathcal{L}(S^3), G_{\text{tw}}) = (S^2 \times S^2, g_{\text{FS}}^1 - g_{\text{FS}}^2)$ の曲線 $\alpha(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ に対して，その G_{tw} に関する速度ベクトルの大きさは

$$0 = G_{\text{tw}}(\alpha'(s), \alpha'(s)) = |\gamma_1'(s)|^2 - |\gamma_2'(s)|^2$$

であるので， $\alpha(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ が *null* である必要十分条件は， $\gamma_1(s)$ と $\gamma_2(s)$ が常に同じ速さを持つことである．従って，とくに弧長パラメータを持つ球面曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ を与えると， $\mathcal{L}(S^3)$ の *null* 曲線を与えることができる． $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線 $\alpha(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ に対応する S^3 の線織面は式 (3.2) で与えられ，フロントである条件と閉である条件を調べることで，主定理を得る．

4 応用

双対性について

測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ をグラスマン多様体 $\tilde{\text{Gr}}_2(R^4)$ と同一視するとき， R^4 での直交補空間を与える写像

$$\tilde{\text{Gr}}_2(R^4) \ni \Pi \longmapsto \Pi^\perp \in \tilde{\text{Gr}}_2(R^4)$$

は，直交双対測地線を定める．これを用いて，線織面に対してその双対線織面が定義される．

この双対性に関する，先行研究を紹介する．可展面のあるクラスとして，接線曲面と呼ばれるものがある．すなわち， S^3 の曲線の接線方向に測地線を伸ばしてできる線織面である．Izumiya-Nagai-Saji [6] は，接線曲面の双対線織面は接線曲面であることを示している．また，この双対性のもとで，特異点の双対性が成り立つことも示した．

しかし、一般の可展面の双対線織面は可展面であるかどうかは不明である。そこで、筆者は命題 3.4 を用いてこの問題が肯定的に解決されることを示した。すなわち、可展面の双対線織面は可展面である。また、外的平坦閉フロントで、その双対と合同なもの、すなわち自己双対外的平坦閉フロントも分類することができた。

系 1. 自己双対外的平坦閉フロントは、有理長を持つ球面卵形線と 1 対 1 に対応する。

焦面について

焦面とはフロントの平行曲面の特異点の軌跡である。 $\Sigma^3 = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ の平坦フロントに対して、その焦面は平坦フロントを与えることが知られている ($\Sigma^3 = H^3$ の場合は [18], $\Sigma^3 = \mathbf{R}^3$ の場合は [16], $\Sigma^3 = S^3$ の場合は [10] 参照)。筆者は、その類似として、外的平坦フロントの焦面は外的平坦フロントを与えることを示した。

Kokubu-Rossman-Umehara-Yamada [11] は H^3 の平坦フロントの焦面を研究した。その中で、焦面の逆問題、すなわち“与えられた平坦フロントに対して、それを焦面に持つような平坦フロントは存在するか”という問題を考え、それは常に解けることを示した。さらに、完備な平坦曲面であるホロスフィアと測地線のチューブを焦面に持つ平坦フロントを分類した。

同様の問題を S^3 の外的平坦フロントについて考えると、焦面の逆問題には、解が存在しない場合があることがわかった。

系 2. 全測地的曲面を焦面に持つような、外的平坦フロントは存在しない。

付録 A 向き付けられた測地線の空間について

ここでは、向き付けられた測地線の空間とその上のミニツイスター計量の定義をし、ミニツイスター空間と標準シンプレクティック形式との関係を述べる。

3 次元空間型 $\Sigma^3 = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ の向き付けられた測地線の空間を $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ とする。すなわち、 Σ^3 の単位速度を持つ測地線 $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ が同値であるとは、ある実数 t_0 が存在して

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t + t_0) \quad (\forall t \in \mathbf{R})$$

となるときをいい、その同値類を $[\gamma(t)]$ とするとき、測地線の同値類の商集合を**向き付けられた測地線の空間**と呼び、 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ と表す。

ミニツイスター空間

3 次元空間型の測地線の空間はある複素構造 J_{tw} を持ち、ミニツイスター空間という複素曲面となる (詳細は Hitchin[3] 参照)。向き付けられた測地線の空間 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ の点 $[\gamma(t)]$ における接空間は、 $\gamma(t)$ の測地変分の $\gamma'(t)$ に直交する方向の変分ベクトル場全体と同一視できるので、 $\gamma(t)$ に沿う直交

ヤコビ場全体 $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$ と線型同型である。測地線の空間 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ において、直交ヤコビ場全体 $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$ の線型変換 $(J_{\text{tw}})_{[\gamma]} : \mathcal{J}^\perp(\gamma) \rightarrow \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ を

$$(J_{\text{tw}})_{[\gamma]}(V) := \gamma' \times_\gamma V \quad (V \in \mathcal{J}^\perp(\gamma))$$

と定義すると、これは $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ の複素構造を定める。ただし、 $\times$ は Σ^3 のベクトル積である。このとき、 J_{tw} は可積分であり [3]、複素構造 J_{tw} を **ミニツイスター複素構造**、複素曲面 $(\mathcal{L}(M^3), J_{\text{tw}})$ を M^3 の **ミニツイスター空間** と呼ぶ。

標準的シンプレクティック構造

一方、 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ 上には標準的なシンプレクティック構造 Ω が定まる。写像 $\hat{\pi} : T_1\Sigma^3 \rightarrow \mathcal{L}(\Sigma^3)$ を

$$\hat{\pi}(p, v) = [\gamma_{p,v}], \quad (p, v) \in T_1\Sigma^3$$

と定める。ただし、 $\gamma_{p,v}$ は $p \in \Sigma$ を始点とし、初速度を $v \in T_p\Sigma$ とする測地線である。このとき、 $T_1\Sigma^3$ の標準接触形式 Θ を用いて、 Ω を $\Omega = \hat{\pi}_*(d\Theta)$ と定めると、 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ 上のシンプレクティック構造を定める。 Ω を **標準シンプレクティック形式** という。

ミニツイスター複素構造から定まる計量

測地線の空間 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ のミニツイスター複素構造 J_{mt} 、標準シンプレクティック形式 Ω を用いて、 G_{mt} を

$$G_{\text{mt}} = \Omega(J_{\text{tw}} \cdot, \cdot)$$

と定めると、 $\mathcal{L}(\Sigma^3)$ の中間符号を持つ Kähler 計量を定める。これを **ミニツイスター計量** という。ミニツイスター計量は共形平坦である。 $\Sigma^3 = S^3$ のとき、 G_{mt} は (3.3) と一致する。

参考文献

- [1] K. ABE, H. MORI AND H. TAKAHASHI, A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata* **65** (1997), 31–46.
- [2] P. HARTMAN AND L. NIRENBERG, On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 901–920.
- [3] T. J. HITCHIN, Monopoles and Geodesics, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 579–602.
- [4] A. HONDA, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, to appear in *Tohoku Mathematical Journal*, arXiv : 1009.3994.
- [5] A. HONDA, Surfaces of constant Gaussian curvature-1 with singularities in the 3-Sphere, in preparation.
- [6] S. IZUMIYA, T. NAGAI AND K. SAJI, Great circular surfaces in the three-sphere, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409–425.

- [7] Y. KAWAKAMI, Value distribution of the hyperbolic Gauss maps for flat fronts in hyperbolic three-space, to appear in *Houston Journal of Mathematics*, arXiv:0908.1307.
- [8] Y. KAWAKAMI, A ramification theorem for the ratio of canonical forms of flat surfaces in hyperbolic three-space, preprint, arXiv:1110.3110.
- [9] Y. KAWAKAMI AND D. NAKAJO, Value distribution of the Gauss map of improper affine spheres, to appear in *Journal of the Mathematical Society of Japan*, arXiv:1004.1484.
- [10] Y. KITAGAWA AND M. UMEHARA, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3 , *Geom. Dedicata* **155** (2011), 105–140.
- [11] M. KOKUBU, W. ROSSMAN, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 265–299.
- [12] M. KOKUBU, W. ROSSMAN, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 799–852.
- [13] M. KOKUBU, M. UMEHARA AND K. YAMADA, An elementary proof of Small’s formula for null curves in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ and an analogue for Legendrian curves in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, *Osaka J. Math.* **40** (2003), 697–715.
- [14] M. KOKUBU, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.* **216** (2004), 149–175.
- [15] W. S. MASSEY, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space, *Tohoku Math. J.* **14** (1962), 73–79.
- [16] S. MURATA AND M. UMEHARA, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *J. Differential Geom.* **82** (2009), 279–316.
- [17] B. O’NEILL AND E. STIEL, Isometric immersions of constant curvature manifolds, *Michigan. Math. J.* **10** (1963), 335–339.
- [18] P. ROITMAN, Flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics, *Tohoku Math. J.* **59** (2007) 21–37.
- [19] S. SASAKI, On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Kodai Math. Sem. Rep.* **21** (1973), 449–457.
- [20] JU. A. VOLKOV, AND S. M. VLADIMIROVA, Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobačevskiĭ space, *Mat. Zametki* **10** (1971), 327–332.

デザインと excess theorem

栗原 大武*

東北大学大学院理学研究科数学専攻

代数的組合せ論に於いて、‘きれいな’有限集合の性質を調べるのが重要な研究対象である。ここで言う‘きれいな’有限集合とはどういうものであろうか。勿論‘きれいさ’を測る数学的に厳密な定義があるわけではない。我々の研究では、先ず様々な状況に応じて‘きれいさ’の指標を与え、その指標の下でよい有限集合の性質を調べ、分類していく。本講演ではそのような‘きれいさ’の指標であるアソシエーションスキームや距離集合やデザインの概念について述べ、それぞれの関係についてみていく。そして、デザインとアソシエーションスキームの新しい関係を与える条件について紹介したいと思う。

1 アソシエーションスキーム

色々な集合の中でも群構造を持った集合は扱いやすいことが多い。そして群の中で有限群に限っただけでも、非常に多くの群があり、深淵な理論が存在する。一方でアソシエーションスキームの概念は元々、実験計画法という統計学の分野で導入されたが、Delsarte によって改めて代数的組合せ論の立場から見直された。それにより、現在ではアソシエーションスキームは有限可移置換群の満たす性質の一般化として扱われ、そこで有限群論との関係も非常に深くなっている。詳しい解説は Bannai-Ito [2], Godsil [10] などを参照されたい。その意味でアソシエーションスキームは対称性の高いものであり、我々の興味を惹くものである。この節ではアソシエーションスキームの基本的な事柄を与える。

定義 1.1 (アソシエーションスキーム). X を有限集合とする. $R_0, R_1, \dots, R_d$ を $X \times X$ の空でない部分集合とする. 次の 4 つの条件が成り立つとき $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ をクラス d の対称なアソシエーションスキームと呼ぶ.

- (1) $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$.
- (2) $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d$. かつ $i \neq j$ であれば $R_i \cap R_j = \emptyset$.
- (3) 各 $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対して, ${}^t R_i = R_i$. ここで ${}^t R_i := \{(y, x) \mid (x, y) \in R_i\}$.
- (4) 各 $i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$ を任意に固定したときに $(x, y) \in R_k$ に対して $\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}$ に含まれる元の個数は i, j, k だけに依存して決まる. すなわち $(x, y) \in R_k$ のとり方には無関係に定まる. この定数を $p_{i,j}^k$ で表し, *intersection number* と呼ぶ.

アソシエーションスキームの例を一つ挙げよう. $X = \{x, y, z, w\}$ を 1 辺の長さが 1 の正方形の頂点集合とする. このとき X の 2 元の取りうる距離は $0, 1, \sqrt{2}$ のいずれかである. この距離の関係で $X \times X$ を分割すると, X とその分割はアソシエーションスキームになる. このようにアソシエーションスキームは対称性の

* JSPS Research Fellow, E-mail : sa9d05@math.tohoku.ac.jp

高い, 見た目にも ‘きれいな’ 集合であることが多い.

次にアソシエーションスキームの代数的な構造についてみていく. $M_{\mathbb{C}}(X)$ を行と列が X の元で添え字付けられた $\mathbb{C}$ 上の $|X|$ 次の正方行列全体の集合とする. $M_{\mathbb{C}}(X)$ の元で関係 R_i に関する隣接行列 A_i を

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in R_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する. このとき定義 1.1 の条件 (1)–(4) は

- (1) $A_0 = I$. ここで I は $|X|$ 次単位行列である.
- (2) $\sum_{i=0}^d A_i = J$. ここで J は成分が全て 1 の $|X|$ 次正方行列である. また $A_i \circ A_j = \delta_{i,j} A_i$ が成り立つ. ここで $\circ$ はアダマル積 (成分毎の積), $\delta_{i,j}$ は $i = j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 を表す.
- (3) 各 $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対して, ${}^t A_i = A_i$, つまり対称行列である.
- (4) 各 $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対して, $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{i,j}^k A_k$.

と同値である.

$A_0, A_1, \dots, A_d$ で張られるベクトル空間は同値条件の (4) より積に関して閉じていることがわかる. この代数を *Bose–Mesner* 代数と呼び, $\mathfrak{A}$ で表す. このとき同値条件の (3) と (4) より $\mathfrak{A}$ は可換代数であることが分かり, これより $\mathfrak{A}$ が半単純であることが得られる. 従って $\mathfrak{A}$ は原始冪等元からなる基底 $E_0 = \frac{1}{|X|} J, E_1, \dots, E_d$ を持つ. そこで, アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ の第一固有行列 P , 第二固有行列 Q を, $\mathfrak{A}$ の二つの基底 $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$, $\{E_0, E_1, \dots, E_d\}$ の間の変換行列として定義する:

$$(A_0, A_1, \dots, A_d) = (E_0, E_1, \dots, E_d)P, \quad |X|(E_0, E_1, \dots, E_d) = (A_0, A_1, \dots, A_d)Q$$

すなわち, $P = (P_i(j))_{j,i=0}^d, Q = (Q_i(j))_{j,i=0}^d$ と表したときに, $A_i = \sum_{j=0}^d P_i(j)E_j, |X|E_i = \sum_{j=0}^d Q_i(j)A_j$ ($0 \leq i \leq d$) が成り立つ. 特に P は $\mathfrak{X}$ の指標表とも呼ばれる.

アソシエーションスキームの中でも, P 多項式アソシエーションスキームと Q 多項式アソシエーションスキームは扱いやすいクラスである. 以下でそれらの定義を与える.

定義 1.2 (P 多項式アソシエーションスキーム). $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ を対称なアソシエーションスキームとする. このとき, 各 $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対して, 隣接行列 A_i がある i 次の多項式 v_i によって $A_i = v_i(A_1)$ と表されるときに, $\mathfrak{X}$ は関係の並べ方 $R_0, R_1, \dots, R_d$ に関して P 多項式アソシエーションスキーム, また単に P 多項式スキームと呼ぶ.

定義 1.2 では, $\{A_i\}_{i=0}^d$ から決まる多項式によって P 多項式スキームを定義しているが, 第一固有行列 P を用いて定義することも出来る. 実際に以下が同値である:

- (1) $\mathfrak{X}$ が並べ方 $R_0, R_1, \dots, R_d$ に関して P 多項式アソシエーションスキームである.
- (2) P がある i 次の多項式 v_i の組 $\{v_i\}_{i=0}^d$ によって $P = (v_i(P_1(j)))_{j,i=0}^d$ と表される.

勿論 “ P 多項式スキーム” はこの第一固有行列 P に由来する. また P 多項式スキームと双対な Q 多項式スキームも同様に定義できる.

定義 1.3 (Q 多項式アソシエーションスキーム). $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ を対称なアソシエーションスキームとする. このとき, 各 $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対して, E_i がある i 次の多項式 v_i^* によって $|X|E_i = v_i^*((|X|E_1)^\circ)$ と表されるときに, $\mathfrak{X}$ は原始冪等元の並べ方 $E_0, E_1, \dots, E_d$ に関して Q 多項式アソシエーションスキーム, 単

に Q 多項式スキームと呼ぶ。ここで多項式 f と行列 M に対して、 $f(M^\circ)$ は f にアダマール積で M を代入して得られる行列を表す。

注意 1.4. $\mathfrak{A}$ が並べ方 $R_0, R_1, \dots, R_d$ に関して P 多項式スキームであるとき、 R_2 以降の並べ方は R_1 だけに依存して決定されることが知られている。このことより、 R_2 以降の並べ方を気にしないときには、 $\mathfrak{A}$ は R_1 (もしくは A_1) に関して P 多項式スキームであると呼ぶこともある。 Q 多項式スキームに関して同様に $\{E_i\}_{i=0}^d$ の並べ方は E_1 にのみ依存するので、 $\mathfrak{A}$ は E_1 に関して Q 多項式スキームであると呼ぶこともある。

2 球面上の組合せ論

前節では抽象的な有限集合の中でも‘きれいな’構造をもつアソシエーションスキームについて見てきた。この節では球面上の有限集合に対して‘きれいさ’を与える指標を導入し、それらの性質を見ていく。以下、 $\mathbb{R}^m$ 上には標準的な内積 $x \cdot y := {}^t x y$, $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m), y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ が入っているとす。また $\mathbb{R}^m$ 内の単位球を S^{m-1} で表す。

2.1 s 距離集合

球面 S^{m-1} 上の有限集合 X に対して、 $A(X) = \{x \cdot y \mid x, y \in X, x \neq y\}$, $A'(X) = A(X) \cup \{1\}$ とする。 $|A(X)| = s$ であるときに、 X を s 距離集合と呼ぶ。 $\mathbb{R}^m$ 上の有限集合 X が、任意の $x \in X$ に対して $-x \in X$ を満たすときに X を極対的であると呼ぶ。

内積の取りうる値が s 種類と制限すると X の濃度はある程度までしか大きくならないことは想像に難くない。実際に以下の上界が知られている。

定理 2.1 (Delsarte–Goethals–Seidel [6]). (1) $X \subset S^{m-1}$ を s 距離集合とする。このとき、次が成り立つ。

$$|X| \leq \binom{m+s-1}{s} + \binom{m+s-2}{s-1}.$$

(2) 更に X が極対的であれば、次が成り立つ。

$$|X| \leq 2 \binom{m+s-2}{s-1}.$$

S^1 上の正多角形の頂点集合や S^2 上の正多面体の頂点集合などや、偶かつユニモジュラーな極限的格子 [4] の原点から一番近い点の集合など、対称性の高い点配置の集合は定理 2.1 の上界に近い濃度を持つ。それ故‘きれい’と思える有限集合を研究していく上で、我々は定理 2.1 の上界に近い濃度を持つ有限集合を‘きれいな’集合とする。実際にそのような有限集合は以下のような非常に良い性質を持つ。

定理 2.2 (Larman–Rogers–Seidel [14], Nozaki [16]). X を S^{m-1} の s 距離集合とする。また $A(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ とする。このとき $|X| \geq 2 \left(\binom{m+s-2}{s-1} + \binom{m+s-3}{s-2} \right)$ であれば、各 $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ に対して

$$K_i := \prod_{\substack{j \in \{1, 2, \dots, s\} \\ j \neq i}} \frac{1 - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

は必ず整数になる。

この定理から定理 2.1 の上界に近い濃度を持つ有限集合の内積の集合はある程度制限された値しかとれない。この定理より、定理 2.1 の上界に近い濃度を持つ集合の特徴付けや分類が行われている。詳しくは Musin–Nozaki [15] を参照されたい。

2.2 t デザイン

球面デザインの概念は 1977 年に Delsarte–Goethals–Seidel [6] によって、 s 距離集合の双対的な概念として導入された。

定義 2.3 (Spherical design). $X \subset S^{m-1}$ を空でない有限集合とし、 t を正の整数とする。このとき X が球面 t デザインであるとは任意の t 次以下の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ に対して、等式

$$\frac{1}{|S^{m-1}|} \int_{S^{m-1}} f(\xi) d\xi = \frac{1}{|X|} \sum_{\xi \in X} f(\xi)$$

が成り立つときにいう。また半径 r の球面 rS^{m-1} 上の球面 t デザイン X を、 $\frac{1}{r}X \subset S^{m-1}$ が球面 t デザインになるときに定める。

言い換えると、有限集合 $X \subset S^{m-1}$ が球面 t デザインとなるのは t 次以下の任意の多項式に対して球面での積分値の平均と X 上での値の平均が一致するときである。 X の強さ (strength) を X が t デザインになる最大の t で定義する。球面デザインの例として、 S^2 上の正 20 面体の頂点集合は 5 デザインである。

球面デザインについても、濃度の限界が知られている。

定理 2.4 (Delsarte–Goethals–Seidel [6]). X を S^{m-1} 上の球面 t デザインとする。このとき次が成り立つ。

(1) t が偶数のとき： $t = 2e$ とすると

$$|X| \geq \binom{m+e-1}{e} + \binom{m+e-2}{e-1}.$$

(2) t が奇数のとき： $t = 2e+1$ とすると

$$|X| \geq 2 \binom{m+e-2}{e-1}.$$

更に X が等号を満たすとする。このとき X は極対的である。

定理 2.4 の不等式の右辺は定理 2.1 に出てくる不等式の右辺に非常に似ている。これは決して偶然ではなく、有限集合 X の強さ t と距離の数 s には以下のような密接な関係がある。

定理 2.5 (Delsarte–Goethals–Seidel [6]). X を S^{m-1} 上の強さ t の s 距離集合とする。

(I) 以下のことが成り立つ。

(1) $t \leq 2s$

(2) 次の 3 つの条件は同値：(a) $t = 2s$, (b) X が定理 2.1 (1) の等号を満たす, (c) X が定理 2.4 (1) の等号を満たす。

(II) $-A'(X) = A'(X)$ を仮定すると以下が成り立つ。

(1) $t \leq 2s - 1$

- (2) 次の3つの条件は同値：(a) $t = 2s - 1$, (b) X が定理 2.1 (2) の等号を満たす, (c) X が定理 2.4 (2) の等号を満たす.

2.1 節で定理 2.1 の上界に近い濃度を持つ有限集合について調べることが重要であることを見てきた. そして定理 2.5 によって, その条件は t と s の関係によって言い換えられる. 実際に t と $2s$ が近い場合, もしくは極対的で t と $2s - 1$ が近い場合に, 有限集合にアソシエーションスキームが付随するという良い性質を持つ.

定理 2.6 (Delsarte-Goethals-Seidel [6], Bannai-Bannai [1]). X を S^{m-1} 上の強さ t の s 距離集合とする. $t \geq 2s - 2$ であれば, X にはクラス s の Q 多項式スキームが付随する. また X が極対的であり, $t \geq 2s - 3$ であれば, X はクラス s の Q 多項式スキームが付随する.

定理 2.6 により, 球面上のよい有限集合から Q 多項式スキームが得られることがわかった. また次節では, 逆にアソシエーションスキームから良い有限集合を得ることを見ていく.

3 アソシエーションスキームの球面への埋め込み

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^s)$ をクラス s の対称なアソシエーションスキームとし, $\mathfrak{A} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{A_i\}_{i=0}^s$ をその Bose-Mesner 代数, $\{E_i\}_{i=0}^s$ を $\mathfrak{A}$ の原始幂等元からなる基底とする. このとき各 E_i は全て実対称行列である. 一つの幂等元 E_i を固定しておく. これから E_i に関しての $\mathfrak{X}$ の球面への埋め込みを考える. いま $\mathbb{C}^{|X|}$ の標準基底 $\{e_x \mid x \in X\}$ を考える. E_i の要素は全て実数であるから $E_i e_x \in \mathbb{R}^{|X|}$ であり, E_i の階数を m_i とすると集合 $\{E_i e_x \mid x \in X\}$ すなわち E_i の列ベクトルの集合は $\mathbb{R}^{|X|}$ の m_i 次元部分空間 V_i を張っている. いま $x, y \in X$ に対して $E_i e_x$ と $E_i e_y$ の $\mathbb{R}^{|X|}$ における標準的内積を計算する.

$$(E_i e_x) \cdot (E_i e_y) = {}^t e_x {}^t E_i (E_i e_y) = {}^t e_x E_i^2 e_y = {}^t e_x E_i e_y \quad (3.1)$$

となる. すなわち $E_i e_x$ と $E_i e_y$ の内積は E_i の (x, y) 成分に等しい. $E_i = \frac{1}{|X|} \sum_{j=0}^s Q_i(j) A_j$ と表されかつ E_i の各成分は実数であるから, $Q_i(j)$ は全て実数であることがわかる. ここで $Q_i(0) = m_i$ である. 従って $x \in X$ に対してベクトル $E_i e_x$ の長さは全て $\sqrt{\frac{m_i}{|X|}}$ となる. V_i を $\mathbb{R}^{m_i}$ と同一視すれば $\{\sqrt{\frac{|X|}{m_i}} E_i e_x \mid x \in X\}$ は全て $\mathbb{R}^{m_i}$ の単位球面上に実現されるのである. また $(x, y) \in R_j$ であれば $(E_i e_x) \cdot (E_i e_y) = \frac{1}{|X|} Q_i(j)$ となっている. すなわち X から E_i を利用して $\mathbb{R}^{m_i}$ の単位球面上の高々 s 距離の集合 X' が構成されるのである.

各 $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ に対して $|Q_i(j)| \leq Q_i(0)$ が成り立つことが知られている. このとき $Q_i(j) < Q_i(0)$ ($1 \leq j \leq s$) であれば, E_i に関する $\mathfrak{X}$ の球面への埋め込み方は単射である. また $\{Q_i(j)\}_{j=0}^s$ が全て異なれば, X' は丁度 s 距離集合になることが確かめられる.

命題 3.1. $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^s)$ を対称なアソシエーションスキームとする. $\mathfrak{X}$ は $Q_i(j) < Q_i(0)$ ($1 \leq j \leq s$) となる i を持つと仮定する. E_i に関する $\mathfrak{X}$ の球面への埋め込み X' は球面 2 デザインになる.

命題 3.1 の仮定を満たすものの例として, 原始的なアソシエーションスキームの各 E_i ($1 \leq i \leq s$) や Q 多項式スキームの E_1 がある [2]. さらに $\mathfrak{X}$ がクラス s の Q 多項式スキームのときには, $\{Q_1(j)\}_{j=0}^s$ が全て異なる. つまりクラス s の Q 多項式スキーム $\mathfrak{X}$ の E_1 に関する $\mathfrak{X}$ の球面への埋め込み X' は丁度 s 距離集合になる.

このようにしていろいろなアソシエーションスキームから色々な球面上の有限集合が得られる. またこのような球面への埋め込みはこれまで色々な形でアソシエーションスキームの研究に有効に利用されてきている.

ここでアソシエーションスキームの球面への埋め込みを利用して得られた結果を一つ紹介する。

定理 3.2 (Kurihara–Nozaki [12]). $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ をクラス $d \geq 2$ の対称なアソシエーションスキームでかつ $\{Q_1(j)\}_{j=0}^d$ が全て異なるものとする。また $\mathfrak{X}$ の E_1 に関する $\mathfrak{X}$ の球面への埋め込みで得られる d 距離集合の LRS 比を $\{K_i\}_{i=1}^d$ とする。このとき以下は同値である。

- (1) $\mathfrak{X}$ は E_1 に関して Q 多項式スキームである。
- (2) 以下を満たす $l \in \{2, 3, \dots, d\}$ が存在する：任意の $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ に対して $K_i = -P_i(l)$ を満たす。

上の定理でアソシエーションスキームから得られる d 距離集合の LRS 比は

$$K_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \frac{Q_1(0) - Q_1(j)}{Q_1(i) - Q_1(j)}$$

となることが簡単な計算から分かる。これに関して代数的に双対的な定理も得ることができた。

定理 3.3 (Kurihara–Nozaki [13]). $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ をクラス $d \geq 2$ の対称なアソシエーションスキームでかつ $\{P_1(j)\}_{j=0}^d$ が全て異なるものとする。このとき以下は同値である。

- (1) $\mathfrak{X}$ は A_1 に関して P 多項式スキームである。
- (2) 以下を満たす $l \in \{2, 3, \dots, d\}$ が存在する：任意の $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ に対して

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \frac{P_1(0) - P_1(j)}{P_1(i) - P_1(j)} = -Q_i(l)$$

を満たす。

4 2 デザインと excess theorem

前節では、クラス s の Q 多項式スキームから 2 デザインである s 距離集合が構成できることを見た。それでは逆に 2 デザインである s 距離集合がどのような性質を持てば、 Q 多項式スキームが付随するのかという疑問が浮かび上がる。この節ではその問いの答えを与える excess theorem について解説する。

X を $\sqrt{m}S^{m-1}$ 上の 2 デザインで s 距離集合のものとして、 $|X| = n$ とする。また X の Gram 行列 $G \in M_{\mathbb{R}}(X)$ を $G = \frac{1}{n}(x \cdot y)_{x,y \in X}$ によって定める。 X 上の $\mathbb{R}$ 値関数からなる空間を $C(X)$ で表し、 $C(X)$ に内積を

$$(f, g) = \frac{1}{n} \sum_{x \in X} f(x)g(x), \quad f, g \in C(X)$$

によって定める。多項式 $p \in \mathbb{R}[t]$ と $a \in X$ に対して、 a での p の帯球関数 $\zeta_a(p) : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\zeta_a(p)(x) = p(a \cdot x)$ によって定める。 $C(X)$ の部分空間 $\text{Pol}_k(X)$ を以下のように帰納的に定義する。 $\text{Pol}_k(X)$ の定義は Godsil [9] が与えたものである。

- $\text{Pol}_0(X)$ は X 上の定数関数からなる空間、
- $\text{Pol}_1(X) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\zeta_a(p) \mid a \in X, \deg p \leq 1\}$,
- $\text{Pol}_k(X) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{fg \mid f \in \text{Pol}_1(X), g \in \text{Pol}_{k-1}(X)\}$ for $k \geq 2$.

この部分空間は $\text{Pol}_0(X) \subset \text{Pol}_1(X) \subset \dots$ を満たす. そして最終的に $\text{Pol}_s(X)$ は $C(X)$ と一致することが知られている. そこで X の次数 S を $S := \min\{i \in \{0, 1, \dots, s\} \mid \text{Pol}_i(X) = C(X)\}$ によって定める. 当然, 次数 S は $S \leq s$ を満たす.

$\text{Harm}_0(X) = \text{Pol}_0(X)$ とし, $k \in \{1, 2, \dots, S\}$ に対しては

$$\text{Harm}_k(X) = \text{Pol}_k(X) \cap \text{Pol}_{k-1}(X)^\perp$$

によって $\text{Harm}_k(X)$ を定義する. このとき

$$\text{Harm}_k(X) \neq \{0\} \ (0 \leq k \leq S) \text{ and } C(X) = \bigoplus_{k=0}^S \text{Harm}_k(X).$$

が成り立つ. 更に $\text{Harm}_1(X)$ は具体的に $\text{Harm}_1(X) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\zeta_a(t) \mid a \in X\}$ と表すことが出来る. また $\text{Harm}_S(X)$ の次元を X の *excess* と呼ぶ.

F_i を $C(X)$ から $\text{Harm}_i(X)$ への射影行列とする. このとき $\{F_i\}_{i=0}^S$ は $\sum_{i=0}^S F_i = I$, $F_j \neq 0$, $F_j^2 = F_j$ ($j \in \{0, 1, \dots, S\}$) を満たす. 更に F_0 と F_1 については具体的に $F_0 = \frac{1}{n}J$, $F_1 = G$ によって与えられる.

$\alpha \in A'(X)$ に対して, $\kappa_\alpha := |\{(x, y) \in X^2 \mid x \cdot y = \alpha\}|$ とする. また, X の零化多項式を $Z(t) = \prod_{\alpha \in A'(X)} (t - \alpha)$ で定義する. $\mathbb{R}[t]/(Z)$ 上の内積を

$$\langle p, q \rangle := \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha \in A'(X)} \kappa_\alpha p(\alpha) q(\alpha), \quad p, q \in \mathbb{R}[t]/(Z) \quad (4.1)$$

で定める. 今, $\mathbb{R}[t]/(Z)$ 上の多項式の列 $q_0, q_1, \dots, q_s$ で

- (1) $\deg q_k = k$ for $0 \leq k \leq s$
- (2) $\langle q_k, q_h \rangle = \delta_{k,h} q_k(m)$ for $0 \leq k, h \leq s$

を満たすものを準距離多項式と呼ぶ. 準距離多項式は三項間漸化式を満たす:

$$tq_k(t) = b_{k-1}^* q_{k-1}(t) + a_k^* q_k(t) + c_{k+1}^* q_{k+1}(t) \quad (0 \leq k \leq s), \quad (4.2)$$

ここで $b_{k-1}^*, a_k^*, c_{k+1}^* \in \mathbb{R}$ であり, $b_{-1}^* = c_{s+1}^* = 0$ とする.

以上で主結果の準備が終わった. そして以下が今回の主結果の excess theorem である.

定理 4.1 (Kurihara [11]). X を S^{m-1} 上の 2 デザインかつ s 距離集合とする. このとき以下が成り立つ:

- (1) $\dim \text{Harm}_S(X) \leq q_s(m)$.
- (2) $A'(X) = \{\alpha_0 = m, \alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ とし, $R_i = \{(x, y) \in X^2 \mid x \cdot y = \alpha_i\}$ とする. (1) の等号が成り立つための必要十分条件は, $S = s$ かつ $(X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ が G に関して Q 多項式スキームになることである.

注意 4.2. 定理 4.1 の代数的に双対な結果として, グラフの excess theorem がある. 詳しくは Fiol–Garriga [7], van Dam [5], Fiol–Gago–Garriga [8] を参照されたい. これはグラフが距離正則グラフになるための特徴づけを与えたものである. 尚, 距離正則グラフとはグラフの中でも P 多項式スキームが付随したものである. 距離正則グラフについては Brouwer–Cohen–Neumaier [3] が詳しい.

参考文献

- [1] Ei. Bannai and Et. Bannai. On antipodal spherical t -designs of degree s with $t \geq 2s - 3$, *Combin. Inform. Syst. Sci.*, (in press) Honoring the 75-th birthday of Prof. D. K. Ray-Chaudhuri.
- [2] E. Bannai and T. Ito. *Algebraic combinatorics. I.* The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984. Association schemes.
- [3] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, volume 18 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [*Results in Mathematics and Related Areas (3)*]. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [4] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, Springer-Verlag, Vol.290, lxxiv+703, 1999.
- [5] E. R. van Dam. The spectral excess theorem for distance-regular graphs: a global (over)view. *Electron. J. Combin.*, 15(1):#R 129 1–10, 2008.
- [6] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6(3):363–388, 1977.
- [7] M. A. Fiol and E. Garriga. From local adjacency polynomials to locally pseudo-distance-regular graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 71(2):162–183, 1997.
- [8] M. A. Fiol, S. Gago, and E. Garriga. A simple proof of the spectral excess theorem for distance-regular graphs. *Linear Algebra Appl.*, 432(9):2418–2422, 2010.
- [9] C. D. Godsil. Polynomial spaces. *Discrete Math.*, 73(1)–(2):71–88, 1989.
- [10] C. D. Godsil. *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.
- [11] H. Kurihara. The spectral excess theorem for polynomial spaces. *submitted to Des. Codes Cryptogr.*.
- [12] H. Kurihara and H. Nozaki. A characterization of Q -polynomial association schemes. *J. Combin. Theory Ser. A*, 119(1):57–62, 2012.
- [13] H. Kurihara and H. Nozaki. A spectral equivalent condition of the P -polynomial property. *ArXiv e-prints*, 1110.4975v1.
- [14] D. G. Larman, C. A. Rogers, and J. J. Seidel. On two-distance sets in Euclidean space. *Bull. London Math. Soc.*, 9:261–267, 1977.
- [15] O. Musin and H. Nozaki. Bounds on three- and higher-distance sets. *European J. Combin.* 32:1182–1190, 2011.
- [16] H. Nozaki. A generalization of Larman–Rogers–Seidel’s theorem. *Discrete Math.* 311:792–799, 2011.

臨界冪と劣臨界冪の非線形項を持つシュレディンガー方程式 における小さな初期値に対する解の爆発

池田 正弘

(大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士2年 (DC2))

Abstract. We study the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equation with a critical or subcritical nongauge invariant nonlinearity:

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^p, \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), \end{cases}$$

where $n \in \mathbf{N}$, $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $T > 0$, $(t, x) \in [0, T) \times \mathbf{R}^n$, $u = u(t, x) \in \mathbf{C}$ is a complex-valued unknown function of (t, x) , $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $f = f(x) \in \mathbf{C}$ is a given complex-valued function and $\varepsilon > 0$ is a positive parameter. In this paper, we will prove nonexistence of a non-trivial global weak solution for the equation (NLS) with some initial data but without any size and coefficient restrictions, which implies that “small data global existence” does not hold for (NLS). Furthermore, we will also prove the $\mathbf{L}^2$ -norm of a time local $\mathbf{L}^2$ -solution with a suitable initial data blows up at a finite time.

§1. Introduction

This is joint work with Yuta Wakasugi in Osaka University. We study existence of a blow-up solution for the nonlinear Schrödinger equation (NLS) with a critical or subcritical nongauge invariant power type nonlinearity

$$(1.1) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^p, \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbf{R}^n$$

with the initial condition

$$(1.2) \quad u(0, x) = \varepsilon f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

where $T > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $u = u(t, x) \in \mathbf{C}$ is a complex-valued unknown function of (t, x) , $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2$), $\varepsilon > 0$ is a positive parameter, $f = f(x) = f_1(x) + if_2(x) \in \mathbf{C}$ and $f_i(x) \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2$) are real-valued given functions.

First it is well-known that local well-posedness holds for the NLS (1.1) in Sobolev spaces $\mathbf{H}^s$ ($s \geq 0$) (see e.g. [11], [14], [22] and references therein). Furthermore, in the critical case of $(n, p) = (2, 2)$, nonexistence of the wave operator for NLS (1.1) was studied in papers [18] and [20]. However, there is no result about global existence of NLS (1.1) for the initial value problem. In this paper, we will show nonexistence of a non-trivial global weak solution (see Definition 2.1) for NLS (1.1) with suitable initial data. This means that “small data global existence” does not hold for NLS (1.1). More precisely, we will prove the following: Let $p \in (1, 1 + \frac{2}{n}]$,

$\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $\varepsilon > 0$. And with regard to the sign of λ_1 and λ_2 , we choose the initial data $f = f_1 + if_2 \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$ satisfying

(1.3)

$\lambda_1 \setminus \lambda_2$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_2 < 0$
$\lambda_1 = 0$	$\times$	$\int f_1 dx > 0$	$\int f_1 dx < 0$
$\lambda_1 > 0$	$\int f_2 dx < 0$	$\int f_1 dx > 0$ or $\int f_2 dx < 0$	$\int f_1 dx < 0$ or $\int f_2 dx < 0$
$\lambda_1 < 0$	$\int f_2 dx > 0$	$\int f_1 dx > 0$ or $\int f_2 dx > 0$	$\int f_1 dx < 0$ or $\int f_2 dx > 0$

and the integrand which appears in this table (1.3) is a $\mathbf{L}^1$ -function (for example if $\lambda_2 = 0$, then we assume $f_2 \in \mathbf{L}^1$). If there exists a global weak solution u for NLS (1.1) (see Definition 2.1) with the initial condition (1.2), then $u = 0$ a.e. $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n$, which leads to a contradiction to the assumption of f (for example if $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 = 0$, then $\int f_2 dx < 0$).

By using the above result, we will also prove $\mathbf{L}^2$ -norm of the time local $\mathbf{L}^2$ -solution u with a initial data $f \in \mathbf{L}^2$ satisfying the above additional conditions blows up at a finite time.

Next we introduce some notations and function spaces used in this paper. $\mathcal{F}\phi$ or $\hat{\phi}$ is the Fourier transform of ϕ defined by

$$\mathcal{F}\phi(\xi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x \cdot \xi)} \phi(x) dx,$$

and the inverse Fourier transformation $\mathcal{F}^{-1}$ is given by

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x \cdot \xi)} \phi(\xi) d\xi.$$

Denote by $U(t)$ the free evolution groups for the Schrödinger equation:

$$\begin{aligned} U(t)\phi &\equiv \mathcal{F}^{-1} \exp\left(-\frac{it}{2} |\xi|^2\right) \mathcal{F}\phi \\ &= (2\pi it)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{i}{2t} |x-y|^2} \phi(y) dy. \end{aligned}$$

We denote the usual Lebesgue space by $\mathbf{L}^p \equiv \{\phi; \|\phi\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\}$, where the norms are $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \equiv (\int_{\mathbf{R}^n} |\phi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ if $1 \leq p < \infty$ and $\|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\phi(x)|$ if $p = \infty$. Furthermore, we introduce the space-time norm

$$\|\phi\|_{\mathbf{L}_t^r(\mathbf{I}; \mathbf{L}_x^p)} \equiv \|\|\phi(t)\|_{\mathbf{L}_x^p}\|_{\mathbf{L}_t^r(\mathbf{I})},$$

where $\mathbf{I}$ is a bounded or unbounded time interval. Denote the locally integrable function space by

$$\mathbf{L}_{loc}^p \equiv \left\{ \phi; \|\phi\|_{\mathbf{L}^p(U)} < \infty \text{ for } U \text{ satisfying } U \subset \bar{U} \subset \mathbf{R}^n \text{ and } \bar{U} \text{ is compact} \right\}.$$

For $m, \kappa \in \mathbf{R}$ and $1 \leq p \leq \infty$, we introduce the weighted Sobolev space:

$$\mathbf{H}_p^{m, \kappa} \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n); \|\phi\|_{\mathbf{H}_p^{m, \kappa}} \equiv \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{\kappa/2} (1 - \Delta)^{m/2} \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\}.$$

We also write for simplicity $\mathbf{H}_2^{m, \kappa} = \mathbf{H}^{m, \kappa}$, $\mathbf{H}_p^{m, 0} = \mathbf{H}_p^m$ and $\mathbf{H}^{m, 0} = \mathbf{H}^m$, so we usually omit the index $\kappa = 0$ and $p = 2$ if it does not cause a confusion. We let $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{X})$ be the space of continuous functions from an interval $\mathbf{I}$ to a Banach space $\mathbf{X}$. For simplicity, we write $A \simeq B$ if

there exist some positive constants $C_1, C_2 > 0$ such that $C_1 B \leq A \leq C_2 B$ and we also use AB if there exists a positive constant $C > 0$ such that $A \leq CB$.

Next we recall some previous results for NLS (1.1). Since there are large amount of papers for NLS, we mention the following related to our result. Many authors have been studying NLS with a gauge invariant power type nonlinearity:

$$(1.4) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda_0 |u|^{p-1} u, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n,$$

where $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, $1 < p$. In the case of $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, Y. Tsutsumi [22] proved global existence of $\mathbf{L}^2$ -solution for an integral equation associated with NLS (1.4) with the initial condition $u(0, x) = u_0 \in \mathbf{L}^2$ without any size restriction (For other type solutions see e.g. [4] etc). It is also well known that when $n \geq 2$, $p \geq 1 + \frac{4}{n}$ and $\lambda_0 < 0$, there are solutions of (1.4) blowing up in finite time for certain initial data (see e.g. [16]). In the case of $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$ and $\lambda_0 < 0$, J. E. Barab [1] studied the asymptotic behavior of solutions for NLS (1.4) and showed that a smooth global solution u for NLS (1.4) does not tend to a free one as $t \rightarrow \pm\infty$, which implies nonexistence of the wave operator for NLS (1.4). On the other hand, in the case of $1 + \frac{2}{n} < p < 1 + \frac{4}{n}$ and $\lambda_0 > 0$, Y. Tsutsumi and K. Yajima [23] proved that the asymptotic behavior of solutions for NLS (1.4) is like a free one. From these results, the number $p = 1 + \frac{2}{n}$ can be seen a border line between the short range scattering and the long range one. Next we state some results in the critical case $p = 1 + \frac{2}{n}$. T. Ozawa [17] studied the final value problem for NLS (1.4) with $(n, p) = (1, 3)$ and showed existence of a solution u such that it tends to a modified free one $U(t)\mathcal{F}^{-1}\exp\left(-i\lambda_0|\hat{u}_+|^2\log t\right)\hat{u}_+$ as $t \rightarrow +\infty$ for a small final data $u_+ \in \mathbf{H}^{0,2}$. By the method of the paper [17], J. Ginibre and T. Ozawa [5] extended the result to higher dimensional cases $(n, p) = (2, 2), (3, \frac{5}{3})$. On the other hand, N. Hayashi and P. I. Naumkin [7] studied the initial value problem for NLS (1.4) with $p = 1 + \frac{2}{n}$ and $n = 1, 2$ and 3. They proved that for small initial data $u_0 \in \mathbf{H}^{\gamma,0} \cap \mathbf{H}^{0,\gamma}$ ($\gamma > \frac{n}{2}$), there exists a global solution u for NLS (1.4) such that it decays like a free one $\left(O\left(t^{-\frac{n}{2}}\right)\right)$ as $t \rightarrow \pm\infty$ and tends to a modified free one as $t \rightarrow \pm\infty$. In the subcritical case $1 < p < 1 + \frac{2}{n}$, N. Hayashi, E. Kaikina and P. I. Naumkin [6] studied the initial value problem for more general NLS including that of (1.4) and showed that there exists a global solution u for a small analytic initial data and it asymptotically behaves like a modified free one as $t \rightarrow \pm\infty$. We note that $\lambda|u|^p$ is not treated in paper [6]. Recently N. Kita and A. Shimomura [13] considered NLS (1.4) with $1 < p \leq 3$, $n = 1$ and $\lambda_0 \in \mathbf{C}$. It is proved that if $\text{Im } \lambda_0 < 0$ and p is close to 3, then there exists a global solution u for an arbitrarily large initial data $u_0 \in \mathbf{H}^{1,0} \cap \mathbf{H}^{0,1}$, it decays faster than a free one and behaves like a modified free one as $t \rightarrow \pm\infty$ (see also [12]). Thus, it can be seen that in the case of $\text{Im } \lambda_0 < 0$, the nonlinear term $\lambda_0 |u|^{p-1} u$ acts as a dissipation term.

Our next concern is to observe NLS with a nongauge invariant nonlinearity. In [3], J. M. Delort studied the initial value problem for the NLS in two space dimensions ($n = 2$) with a quadratic nonlinearity of a form $Q_1(u, \nabla u) + Q_2(\bar{u}, \overline{\nabla u})$ where Q_j are polynomials homogeneous of degree 2 satisfying $Q_j(u, 0) \equiv 0$. He proved the global existence of solutions in suitable weighted Sobolev spaces and their asymptotic behavior in $\mathbf{L}^\infty$. Though $u\partial_i u$, $\bar{u}\partial_i \bar{u}$, $(\partial_i u)(\partial_j u)$ and $(\partial_i \bar{u})(\partial_j \bar{u})$ ($i, j = 1, 2$) falls within the scope of the paper [3], u^2 , $|u|u$, $|u|^2$ and $\bar{u}^2$ etc. are not treated. K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi [15] studied the final state problem for NLS with the following nongauge invariant power type nonlinearities in one and two space dimensions:

$$(1.5) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = F_n, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \text{ for } n = 1, 2.$$

where

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda_{11} u^3 + \lambda_{12} u \bar{u}^2 + \lambda_{13} \bar{u}^3, \\ F_2 &= \lambda_{21} u^2 + \lambda_{22} \bar{u}^2 \end{aligned}$$

and $\lambda_{ij} \in \mathbf{C}$ ($i = 1, 2$ and $j = 1, 2, 3$). They proved existence of a solution for NLS (1.5) such that the asymptotic behavior is like a free one. From this result, we can see that the nonlinearities F_n ($n = 1, 2$) have a short range effect even if the absolute value of them behaves like $|u|^{1+\frac{2}{n}}$ near $u = 0$ such as $|u|^{\frac{2}{n}} u$. N. Hayashi and P. I. Naumkin [8] considered the initial value problem for NLS (1.5) with $n = 1$ and showed global existence of small solutions for a small analytic initial data under some coefficient conditions. In [10], N. Hayashi, P. I. Naumkin, A. Shimomura and S. Tonegawa studied the final state problem for NLS with a gauge invariant nonlinearity and nongauge invariant ones:

$$(1.6) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = G_n, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \text{ for } n = 1, 2,$$

where

$$\begin{aligned} G_1 &= \lambda_{10} |u|^2 u + F_1, \\ G_2 &= \lambda_{20} |u| u + F_2, \end{aligned}$$

$\lambda_{i0} \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2$) (see also [19]). They proved existence of a solution for NLS (1.6) such that it has a modified free profile. Thus we find that the nonlinear terms G_n ($n = 1, 2$) have a long range effect different from F_n ($n = 1, 2$) only. Even though in these studies about scattering theory, the nonlinearity $\lambda |u|^{1+\frac{2}{n}}$ is not treated. A. Shimomura [18] studied an asymptotic behavior of solution for the quadratic NLS in two space dimensions:

$$(1.7) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda_{23} |u|^2 \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2, \quad \lambda_{23} \in \mathbf{C}.$$

In [18], he showed “the almost nonexistence” of a non-trivial scattering state for NLS (1.7). More precisely, he proved that if there exist a positive time $T \geq 0$, a scattering state $u_+ \in \mathbf{H}^{0,2}$ and a solution $u \in \mathbf{C}([T, \infty); \mathbf{L}^2)$ to NLS (1.7) such that it behaves like free one as $t \rightarrow \infty$ in two senses:

$$(1.8) \quad \|u(t) - U(t)u_+\|_{\mathbf{L}^2} = O(t^{-\varepsilon}),$$

$$(1.9) \quad \left(\int_t^\infty \|u(s) - U(s)u_+\|_{\mathbf{L}^4}^4 ds \right)^{\frac{1}{4}} = O(t^{-1/4-\varepsilon}),$$

for some $\varepsilon > 0$, then u_+ is identically zero. Here the space-time norm $\mathbf{L}_t^4((t, \infty); \mathbf{L}_x^4)$ which appears in (1.9) corresponds to the well-known Strichartz estimate in two space dimensions (see [24]). We note that it is assumed that there exists a solution $u \in \mathbf{C}([T, \infty); \mathbf{L}^2)$ for the NLS (1.7) satisfying (1.9). The solution u has the same time decay property (see (1.17)) as a free one. N. Hayashi and P. I. Naumkin [9] considered the final state problem for NLS with the quadratic nonlinearities including $\lambda_{23} |u|^2$ in two space dimensions:

$$(1.10) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda_{21} u^2 + \lambda_{22} \bar{u}^2 + \lambda_{23} |u|^2, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2,$$

where $\lambda_{2i} \in \mathbf{C}$ ($i = 1, 2, 3$). They showed that if the coefficients satisfy

$$(1.11) \quad \lambda_{21} = \frac{\overline{\lambda_{23}}}{2}, \quad \lambda_{22} = \frac{\lambda_{23}^2}{2\lambda_{23}}, \quad \lambda_{23} \in \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

then for a small final data $u_+ \in \mathbf{H}^{0,2} \cap \mathbf{H}_1^2$ with $\hat{u}_+(0) = 0$, there exists a unique solution $u \in \mathbf{C}([1, \infty); \mathbf{L}^2)$ to NLS (1.10) such that the asymptotic estimates

$$(1.12) \quad \|u(t) - U(t)u_+\|_{\mathbf{L}^p} = O\left(t^{\frac{2}{p}-1}\right), \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{for } 2 < p \leq \infty$$

$$(1.13) \quad \left\| u(t) - \left(U(t)u_+ + i\lambda_{23} \int_t^\infty |U(s)u_+|^2 ds \right) \right\|_{\mathbf{H}^2} = O(t^{-1}), \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

hold. We can see that by (1.12), the solution $u \in \mathbf{C}([1, \infty); \mathbf{L}^2)$ to NLS (1.10) with the coefficient conditions (1.11) decays like a free one in $\mathbf{L}^p$ -sense ($p > 2$) and by (1.13), it tends to

$$(1.14) \quad U(t)u_+ + i\lambda_{23} \int_t^\infty |U(s)u_+|^2 ds \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathbf{L}^2.$$

In [20], A. Shimomura and Y. Tsutsumi showed the second term $\int_t^\infty |U(s)u_+|^2 ds$ of (1.14) does not converge to zero as $t \rightarrow \infty$ for $u_+ \in \mathbf{H}^{0,\kappa}$ ($\kappa > 1$). Thus it can be seen that the solution u to NLS (1.10) including $\lambda_{23}|u|^2$ with the coefficient conditions (1.11) is not asymptotically free in $\mathbf{L}^2$ -sense. We note that since $\lambda_{21} \neq 0$ and $\lambda_{22} \neq 0$ follows from the coefficient conditions (1.10), the method of the paper [9] does not seem to be applicable to (1.7) directly. In [20], A. Shimomura and Y. Tsutsumi reconsidered NLS (1.7) and improved the assumptions (1.8) and (1.9) on the convergence rate. In fact, they showed that if there exist a positive time $T \geq 0$, a scattering state $u_+ \in \mathbf{H}^{0,\kappa}$ for some $\kappa > 1$, and a solution $u \in \mathbf{C}([T, \infty); \mathbf{L}^2)$ for NLS (1.7) such that

$$(1.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - U(t)u_+\|_{\mathbf{L}^2} = 0$$

$$(1.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{4}} \left(\int_t^\infty \|u(s) - U(s)u_+\|_{\mathbf{L}^4}^4 ds \right)^{\frac{1}{4}} = 0,$$

then u_+ is identically zero. We note that as in the previous work [18], it is also assumed that there exist a solution $u \in \mathbf{C}([T, \infty); \mathbf{L}^2)$ for NLS (1.7) such that it decays like a free one. In fact by the identity (1.16) and the well-known dispersive estimate $\|U(t)u_+\|_{\mathbf{L}^4} t^{-\frac{1}{2}} \|u_+\|_{\mathbf{L}^{\frac{4}{3}}}$, we find the time decay estimate

$$(1.17) \quad \begin{aligned} & \|u\|_{\mathbf{L}_t^4((t,\infty);\mathbf{L}_x^4)} \\ & \leq \|u - U(\cdot)u_+\|_{\mathbf{L}_t^4((t,\infty);\mathbf{L}_x^4)} + \|U(\cdot)u_+\|_{\mathbf{L}_t^4((t,\infty);\mathbf{L}_x^4)} \\ & = O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) \quad \text{as } t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

under the scattering state $u_+ \in \mathbf{L}^{\frac{4}{3}}$. However according to the authors' knowledge, there is no result about global existence for the Cauchy problem at $t = 0$ for NLS (1.7). So in this paper, we will show nonexistence of a non-trivial global weak solution for NLS (1.1) with suitable initial data (see (1.3)). Furthermore, we will prove $\mathbf{L}^2$ -norm of the time local $\mathbf{L}^2$ -solution with the suitable initial data blows up at a finite time.

§2. Main Result

In this section, we state our main result. First, we introduce the definition of the weak solution precisely.

Definition 2.1. We mean u is a time “local” weak solution of NLS (1.1) with (1.2) if there exists a positive $T > 0$ such that u belongs to $\mathbf{L}_{loc}^p([0, T) \times \mathbf{R}^n)$ and satisfies the NLS (1.1) in the following sense;

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \int_{[0, T) \times \mathbf{R}^n} u \left(-i \partial_t \psi + \frac{1}{2} \Delta \psi \right) dx dt \\ &= i \varepsilon \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \psi(0, x) dx + \lambda \int_{[0, T) \times \mathbf{R}^n} |u|^p \psi dx dt, \end{aligned}$$

for any $\psi \in \mathbf{C}_0^2([0, T) \times \mathbf{R}^n)$. Moreover, if we can take $T > 0$ as any positive number, u is called a “global” weak solution.

This equation (2.1) follows from the differential equation (1.1) formally. In fact, multiplying the NLS (1.1) by a test-function $\psi \in \mathbf{C}_0^2([0, T) \times \mathbf{R}^n)$, by integration over the whole space $[0, T) \times \mathbf{R}^n$, integrating by parts with respect to time t and space x and using the initial condition (1.2), the identity (2.1) can be obtained.

Next we mention nonexistence of a nontrivial global weak solution for NLS (1.1) with a suitable initial data.

Theorem 2.1. Let $n \in \mathbf{N}$ be a space dimension, $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$ and $\varepsilon > 0$. For any $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, we assume that with regard to the sign of λ_i ($i = 1, 2$), the initial data $f = f_1 + if_2 \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$ satisfies the table (1.3) and the only integrand that appears in the table (1.3) belongs to the Lebesgue space $\mathbf{L}^1$. If there exists a global weak solution u for NLS (1.1) with $u(0, x) = \varepsilon f(x)$, then $u(t, x) \equiv 0$ for a.e. $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n$.

Remark 2.1. The conclusion of the theorem implies $u(t, x) \equiv 0$ for a.e. $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n$ is a contradiction to the assumption of the initial data f . For example, if $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 = 0$, then we assume $\int_{\mathbf{R}^n} f_2(x) dx < 0$, which leads to a contradiction.

Remark 2.2. We emphasize that in Theorem 2.1, we don't restrict on the coefficient λ and the positive parameter $\varepsilon > 0$. Furthermore, it is not necessary that both of the functions f_1 and f_2 belong to $\mathbf{L}^1$ (see (1.3)). For example, if $\lambda_1 > 0$, then we may assume $f_1 \in \mathbf{L}_{loc}^1$, $f_2 \in \mathbf{L}^1$ and $\int_{\mathbf{R}^n} f_2(x) < 0$.

Remark 2.3. The authors do not know whether or not there exists a global weak solution u for NLS (1.1) with the initial condition $u(0, x) = \varepsilon f(x)$, when the initial function f does not satisfy the assumption of our theorem (for example $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, and $\int f_2 dx \geq 0$ or $f_2 \notin \mathbf{L}^1$).

Next we state well-known local existence of $\mathbf{L}^2$ -solution for the integral equation

$$(2.2) \quad u(t) = \varepsilon U(t) f - i\lambda \int_0^t U(t-s) |u|^p ds$$

associated with (1.1) under the initial condition $u(0, x) = \varepsilon f(x)$.

Proposition 2.2. *Let $n \in \mathbf{N}$ be a space dimension and $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, $\varepsilon > 0$ and $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Then for any $f \in \mathbf{L}^2$, there exists a positive time $T > 0$ and a unique solution $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2)$ of the integral equation (2.2) such that $u \in \mathbf{L}_t^r([0, T]; \mathbf{L}_x^\rho)$, where (ρ, r) defined by $\rho = p + 1$ and $\frac{2}{r} = \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho}$.*

Proposition 2.2 can be proved easily by using the Strichartz estimate (see [24] etc) and a fixed point theorem, so we omit the proof in detail (see e.g. [14] and [22] etc). The important thing is that the local existence time $T > 0$ depends only on n and the size ε of the initial data.

Next we mention that an $\mathbf{L}^2$ -solution $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2)$ is always becomes a weak solution in the sense of Definition 2.1.

Proposition 2.3. *Let $T > 0$. An $\mathbf{L}^2$ -solution $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2)$ to the integral equation (2.2) is an example satisfying Definition (2.1) in the same time interval $[0, T]$.*

By combining Theorem 2.1, Proposition 2.2 and Proposition 2.3, we can prove existence of $\mathbf{L}^2$ -blow-up solution $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2)$ to the integral equation (2.2). Let

$$T_m \equiv \sup \{T \in [0, \infty); \text{there exists a unique solution } u \text{ to (2.2) such that } u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2) \cap \mathbf{L}_t^r([0, T]; \mathbf{L}_x^\rho)\}$$

be a maximal existence time of local $\mathbf{L}^2$ -solution, where $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $\rho = p + 1$ and $\frac{2}{r} = \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho}$. Then we have the following:

Corollary 2.4. *Let $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ and $f \in \mathbf{L}^2$. If the initial data $f = f_1 + if_2$ satisfies an additional condition in the table (1.3) with respect to the sign of λ_i ($i = 1, 2$) and the integrand which appears in the table belongs to $\mathbf{L}^1$, Then the life span $T_m < \infty$ and the $\mathbf{L}^2$ -norm of a local solution blows up at $t = T_m$:*

$$(2.3) \quad \liminf_{t \rightarrow T_m - 0} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} = +\infty.$$

References

- [1] J. E. Barab, *Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys., **25** (1984), 3270-3273.
- [2] K. Deng and H. A. Levine, *The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel*, J. Math. Anal. Appl. **243**, (2000), 85-126.
- [3] J. M. Delort, *Global solutions for small nonlinear long range perturbations of two dimensional Schrödinger equations*, Mémoires de la SMF., **91** (2002), 1-94.
- [4] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I: The Cauchy problem*, J. Funct. Anal., **32** (1979), 1-32.
- [5] J. Ginibre and T. Ozawa, *Long range scattering for non-linear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$* , Comm. Math. Phys., **151** (1993), 619-645.
- [6] N. Hayashi, E. Kaikina and P. I. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Discrete and Contin. Dyn. Syst., **5** (1999), 93-106.
- [7] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math., **120** (1998), 369-389.

- [8] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *On the asymptotics for cubic nonlinear Schrödinger equations*, Complex Variables, **49** (2004), 339-373.
- [9] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotics in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions*, Funkcialaj Ekvacioj, **49** (2006), 415-425.
- [10] N. Hayashi, P. I. Naumkin, A. Shimomura, and S. Tonegawa, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two dimensions*, Electron. J. Differential Equations, **2004** (2004), No. 62, 1-16.
- [11] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations. II. H^s -solutions and unconditional well-posedness*, J. Anal. Math., **67** (1995), 281-306.
- [12] N. Kita and A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with a sub-critical dissipative nonlinearity*, J. Differential Equations, **242** (2007), 192-210.
- [13] N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 39-64.
- [14] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer 2009.
- [15] K. Moriyama, S. Tonegawa, and Y. Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity of low degree in one or two space dimensions*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983-996.
- [16] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations, **92** (1991), 317-330.
- [17] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys., **139** (1991), 479-493.
- [18] A. Shimomura, *Nonexistence of asymptotically free solutions for quadratic nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions*, Differential Integral Equations, **18** (2005), 325-335.
- [19] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Long-range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one and two space dimensions*, Differential Integral Equations, **17** (2004), 127-150.
- [20] A. Shimomura and Y. Tsutsumi, *Nonexistence of scattering states for some quadratic nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions*, Differential Integral Equations, **19** (2006), 1047-1060.
- [21] G. Todorova and B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations, **174**, (2001), 464-489.
- [22] Y. Tsutsumi, *L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*. Funkcialaj Ekvacioj, **30** (1987), 115-125.
- [23] Y. Tsutsumi and K. Yajima, *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **11** (1984), 186-188.
- [24] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*. Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415-426.
- [25] Qi S. Zhang, *Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds*, Duke Math. J., **97** (1999) 515-539.
- [26] Qi S. Zhang, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: The critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333** (2001), 109-114.

E-mail: m-iked@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

有限グラフの第 l 固有値

田中 守

東北大学大学院理学研究科

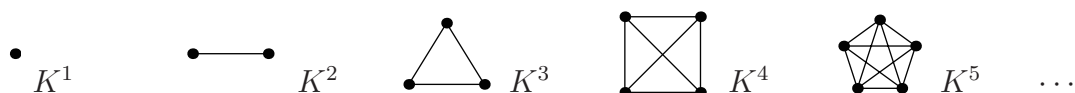
概 要

有限グラフの固有値とは, そのグラフの隣接行列を用いて定義できる離散離散ラプシアン固有値のことである. 本講演では, $l-1$ 個の有限グラフの第 2 固有値の下からの評価と, そのグラフをいくつかの辺で結び連結にしたグラフの第 l 固有値の下からの評価の関係を与えたい. さらに, 第 l 固有値の下からの評価と Hilbert 空間への一様埋め込み不可能性の関係についても述べる.

1 グラフと等周定数

まずグラフに関する基本的な定義を復習する. (グラフの基本的な定義や事実は [8] の 7 章が参考になる.) **グラフ**とは, 集合の組 $G = (V, E)$ で, E が $\{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ の部分集合であるものとする. V の元を G の**頂点**といい, E の元を G の**辺**という. 簡単のため, 辺 $\{x, y\}$ を xy と書く. **有限グラフ**とは, 頂点集合が有限なグラフである. グラフ G が**連結**であるとは, G の任意の 2 頂点 x, y に対して, G の辺の列 $(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{l-1}x_l)$ が存在して, $x_1 = x$ かつ $x_l = y$ を満たすことである. 以下, $G = (V, E)$ はいつも連結有限グラフとする. また, グラフ H に対して, V_H と書けば H の頂点集合, E_H と書けば H の辺集合を表すとする.

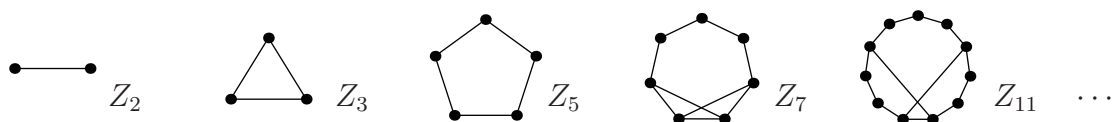
例 1.1. 完全グラフ K^n とは, $V_{K^n} := \{1, 2, \dots, n\}$ で, $E_{K^n} := \{ij : i \neq j\}$ である連結有限グラフである.



例 1.2. 素数 p に対してグラフ Z_p を, $V_{Z_p} := \mathbb{Z}_p$ で,

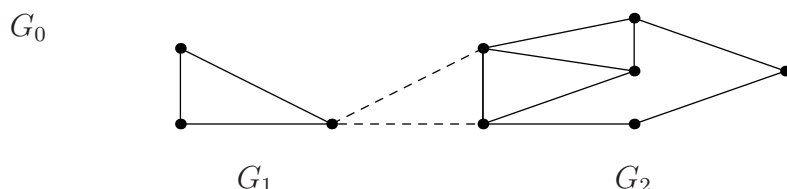
$$E_{Z_p} := \{ij : j = i + 1\} \cup \{ij : j = i - 1\} \cup \{ij : j = i^{-1}, i \neq 0, i^{-1}\}$$

であるグラフとする. これも連結有限グラフである.



G の頂点 $x \in V$ の**次数** $\deg(x)$ とは, x を含む辺の本数 $|\{xy \in E : y \in V\}|$ である. また $\deg(G)$ を G の頂点の次数の最大値とする. G の**部分グラフ** H とは, $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$ を満たすグラフのことである. 頂点集合 V の部分集合 F から**誘導される G の部分グラフ** H とは, $V_H = F$ であり, 任意の $x, y \in V_H$ に対して, $xy \in E$ ならば $xy \in E_H$ を満たす部分グラフである. G の**分割** とは, G の部分グラフの族 $\{G_i = (V_i, E_i)\}_i$ で, V が $\{V_i\}_i$ の直和であり, 各 G_i が V_i から誘導される G の部分グラフであるものである.

例 1.3. グラフ G_0 の分割 $\{G_1, G_2\}$.



定義 1.4. 有限グラフ G の**等周定数**とは,

$$h(G) := \min_{F \subset V} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \leq |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

である. ここで, $\partial F := \{xy \in E : x \in F, y \in V - F\}$ であり, F の**境界**という.

等周定数は, G の頂点集合同士の結びつきの強さを表していると思える. 例えば, 全ての頂点同士が辺で結ばれている完全グラフ K^n は $h(K^n) = n - 1$ であり, 最も結びつきの強いグラフと言える. 一方で, K^n の 1 頂点 x と K^m の 1 頂点 y を辺 xy で繋いだグラフを H とすると, $h(H) = 1 / \min\{n, m\}$ である. これは, H の部分グラフとして K^n と K^m の結びつきが弱いためと言えるであろう. 上の例 1.3 では, G_1 と G_2 の間の結びつきが弱いように見えるが, 実際に確かめてみると $h(G) = |\partial G_1| / |V_{G_1}| = 2/3$ である.

2 グラフ上の離散ラプラシアン

定義 2.1. $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{|V|}\}$ と表す. グラフ G 上の隣接行列 A とは,

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 & x_i x_j \in E \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, |V|$$

で定義される行列である. 行列 D を

$$D_{ij} := \begin{cases} \deg(x_i) & i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, |V|$$

とする. グラフ G 上の離散ラプラシアン Δ_G とは,

$$\Delta_G := D - A$$

で定義される行列である.

Δ_G は実対称行列であるので, その固有値は実数である. そこで Δ_G の固有値を, その大きさの順に

$$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_{|V|}(G)$$

と書く. (最初を第0固有値 $\lambda_0(G)$ とする習慣もある.)

$\mathbb{R}^V$ を V 上の実数値関数空間とし, $f, g \in \mathbb{R}^V$ に対し内積を $\langle f, g \rangle := \sum_{x \in V} f(x)g(x)$ と定義する. 同様に, $\mathbb{R}^E$ を E 上の実数値関数空間とし, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^E$ に対して内積を $\langle \alpha, \beta \rangle := \sum_{e \in E} \alpha(e)\beta(e)$ と定義する. それぞれの内積から定義されるノルムを $\| \cdot \|$ で表す. このとき, $\mathbb{R}^V$ を $\mathbb{R}^{|V|}$ と同一視することで, Δ_G は $\mathbb{R}^V$ から $\mathbb{R}^V$ への作用素とみなせる. 写像 $d: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^E$ を $f \in \mathbb{R}^V$ に対して, $df(xy) := |f(x) - f(y)|$ で定義する. このとき, 任意の $f \in \mathbb{R}^V$ に対して $\langle \Delta_G f, f \rangle = \langle df, df \rangle$ であることが簡単な計算で分かるので, Δ_G は半正値である. 以下も簡単に示せる事実である.

補題 2.2. (i) $\lambda_1(G) = 0$ であり, その固有関数は定数関数.

(ii) G の連結性と $\lambda_2(G) > 0$ は同値. より一般に, 連結でない有限グラフ H の連結成分の個数が l であることと, $\lambda_{l+1}(H) > 0$ かつ $\lambda_l(H) = 0$ であることは同値.

(iii) $\lambda_{|V|}(G) \leq 2 \deg(G)$.

次は, よく知られた事実である.

定理 2.3 ([1], [2], cf. [3]).

$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2 \deg(G) \lambda_2(G)}$$

この定理から, $\lambda_2(G)$ もグラフの頂点集合同士の結びつきの強さを表していることが示唆される.

この後の節では, 特に G の第 l 固有値 ($l \geq 3$) に注目する. そのとき次の等式が有用である.

$$\lambda_{l+1}(G) = \sup_{L_l} \inf_{f \in \mathbb{R}^V} \left\{ \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} : f \perp L_l, f \neq 0 \right\} = \inf_{L_{l+1}} \sup_{f \in \mathbb{R}^V} \left\{ \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} : f \in L_{l+1}, f \neq 0 \right\}. \quad (1)$$

ただし, L_l は $\mathbb{R}^V$ の l 次元部分空間である.

3 分割と離散ラプラシアン固有値の関係

補題 3.1 ([7]). 連結有限グラフ G の分割 $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^l$ に対して

$$\lambda_{l+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(G_i)$$

が成り立つ.

証明の概略. 関数 $\varphi_0 \in \mathbb{R}^V$ を値 1 を取る定数関数とし, $\psi_i \in \mathbb{R}^V$ を $i = 1, 2, \dots, l-1$ に対して,

$$\psi_i(x) = \begin{cases} |V_{i+1}| & x \in \cup_{j=1}^i V_j \text{ のとき} \\ -\sum_{j=1}^i |V_j| & x \in V_{i+1} \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する. 関数 φ_0 と各 ψ_i はそれぞれ互いに直交しているため, これらで生成される部分空間は l 次元である. この l 次元部分空間を等式 (1) の左の等式の L_l として採用することで, $\lambda_{l+1}(G)$ が下から評価できる. $\square$

この補題の G として, 「 l 個の結びつきの強いグラフを少ない辺で繋いだグラフ」を考えると, 証明中の l 次元部分空間を等式 (1) の右の等式の L_l に用いることで, $\lambda_l(G)$ は十分小さいことが示せる. 特に, $\lambda_l(G) \ll \lambda_{l+1}(G)$ となることが証明できる.

一方で, 次が成り立つ.

定理 3.2 ([7]). 或る $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$(l+3)^{l+3} \sqrt{2 \deg(G) \lambda_l(G)} \leq \lambda_{l+1}(G)$$

が成り立つとする. このとき G の或る分割 $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^l$ が存在して,

$$(l+3)^{l+3} \sqrt{2 \deg(G) \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(G_i)} \geq \lambda_{l+1}(G)$$

と

$$\min_{i=1,2,\dots,l} |V_i| \geq \frac{1}{\sqrt{2 \deg(G) \lambda_l(G)}}$$

を満たす.

この定理は, つまり $\lambda_l(G) \ll \lambda_{l+1}(G)$ のとき, G が「 l 個の結びつきの強いグラフを少ない辺で繋いだグラフ」であることを示唆している. よって, この定理と補題は「連結でない有限グラフ H の連結成分の個数が l であることと, $\lambda_l(H) = 0$ かつ $\lambda_{l+1}(H) > 0$ であることが同値である」という事実の拡張として見ることもできる.

定理 3.2 の証明の概略. 最初に, 求めたい分割 $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^l$ を帰納的に構成する. 以下, 部分グラフはすべてその頂点集合から導入されるものとする.

(1) G の部分グラフ H^0 を

$$|\partial H^0|/|V_{H^0}| = h(G) \quad \text{かつ} \quad |V_{H^0}| \leq |V|/2$$

を満たすものとし, H^1 を $V - V_{H^0}$ から導入される部分グラフとする.

(2) $h(H^{i_1}) \leq h(H^{j_1})$ とする. ただし $i_1, j_1 \in \{0, 1\}$ かつ $i_1 \neq j_1$. この時, H^{i_1} の部分グラフ $H^{i_1 0}$ として

$$|\partial_{H^{i_1}} H^{i_1 0}|/|V_{H^{i_1 0}}| = h(H^{i_1}) \quad \text{and} \quad |V_{H^{i_1 0}}| \leq |V_{H^{i_1}}|/2$$

を満たすものを取り, $H^{i_1 1}$ を $V_{H^{i_1}} - V_{H^{i_1 0}}$ から導入される部分グラフとする. ここで, $\partial_{H^{i_1}}$ は, H^{i_1} の部分グラフとしての境界である.

(3) もし $h(H^{j_1}) \leq \min\{h(H^{i_1 0}), h(H^{i_1 1})\}$ ならば, H^{j_1} の部分グラフ $H^{j_1 0}$ として

$$|\partial_{H^{j_1}} H^{j_1 0}|/|V_{H^{j_1 0}}| = h(H^{j_1}) \quad \text{and} \quad |V_{H^{j_1 0}}| \leq |V_{H^{j_1}}|/2$$

を満たすものを取り, $H^{j_1 1}$ を $V_{H^{j_1}} - V_{H^{j_1 0}}$ から導入される部分グラフとする. 一方で, もし $\min\{h(H^{i_1 0}), h(H^{i_1 1})\} < h(H^{j_1})$ ならば, $h(H^{i_1 i_2}) \leq h(H^{i_1 j_2})$ とする. ただし, $i_2, j_2 \in \{0, 1\}$ かつ $i_2 \neq j_2$. そして, $H^{i_1 i_2}$ の部分グラフ $H^{i_1 i_2 0}$ として

$$|\partial_{H^{i_1 i_2}} H^{i_1 i_2 0}|/|V_{H^{i_1 i_2 0}}| = h(H^{i_1 i_2}) \quad \text{and} \quad |V_{H^{i_1 i_2 0}}| \leq |V_{H^{i_1 i_2}}|/2$$

を満たすものを取り, $H^{i_1 i_2 1}$ を $V_{H^{i_1 i_2}} - V_{H^{i_1 i_2 0}}$ から導入される部分グラフとする. このような操作を, 構成された部分グラフ $\{H^{a_1 a_2 \dots a_m}\}$ 中の分割されていない部分グラフの個数が l 個になるまで繰り返す. この $\{H^{a_1 a_2 \dots a_m}\}$ 中の分割されていない部分グラフの族が, 求めたい分割 $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^l$ である.

この分割が定理の不等式を満たすことを示すために, さらにもう一度, 上の操作を行い $\{H^{a_1 a_2 \dots a_m}\}$ 中の分割されていない部分グラフの個数を $l+1$ 個にする. そして, その部分グラフの族を $\{H_i\}_{i=1}^{l+1}$ で表す. ただし, H_{l+1} の頂点数が $\{H_i\}$ の中で最大とする. このとき, 関数 $\varphi_0 \in \mathbb{R}^V$ を値 1 を取る定数関数とし, $\psi'_i \in \mathbb{R}^V$ を $i = 1, 2, \dots, l$ に対して,

$$\psi'_i(x) := \begin{cases} |V_{H_i}| & \text{if } x \in V - V_{H_i} \\ -|V - V_{H_i}| = |V_{H_i}| - |V| & \text{if } x \in V_{H_i}. \end{cases}$$

で定義する. 関数 φ_0 と ψ'_i で生成される部分空間は $l+1$ 次元である. この $l+1$ 次元部分空間を等式 (1) の右の等式の L_{l+1} として採用することで, $\min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(G_i)$ を用いて $\lambda_{l+1}(G)$ が上から評価できる. $\square$

4 エクスパンダーの族

エクスパンダーの族は, コンピュータネットワークの理論 (cf. [6]) や, 後の節で述べる距離空間の埋め込みなどに応用のある対象である.

定義 4.1. エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^\infty$ で以下を満たすものである:

- (i) $n \rightarrow \infty$ のとき $|V_n| \rightarrow \infty$;
- (ii) 或る $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \leq k$;
- (iii) 或る定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h(G_n) \geq C$.

定理 2.3 から, この定義の (iii) の条件は, 或る定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_2(G_n) \geq C$ であることと同値である.

例 4.2 (cf. §2.2 in [6]). 有限連結グラフの族 $\{Z_p\}_{p:\text{prime}}$ はエクスパンダーの族である.

注意 4.3. $\{K^n\}_{n=1}^\infty$ は, (i) と (iii) の条件は満たすが, (ii) の条件を満たさない.

l 個のエクspanderの族 $\{G_n^i\}_{n=1}^\infty$ ($i = 1, 2, \dots, l$) に対して, $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ を連結有限グラフの列で, 各 n で $\{G_n^i\}_{i=1}^l$ が G_n の分割になっているものとする. この時, 補題 3.1 を使うと, 或る定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_l(G_n) \geq C$ が成り立つ. 逆に, 定理 3.2 を用いると次が示せる.

系 4.4 ([7]). $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^\infty$ を有限グラフの列で以下を満たすものとする:

- (i) $n \rightarrow \infty$ のとき $|V_n| \rightarrow \infty$;
- (ii) 或る $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \leq k$;
- (iii) 或る定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_l(G_n) \geq C$.

このとき, 或る $l' \leq l$ と, 数列 $\{n_m\}_{m=1}^\infty$, 任意の m に対して G_{n_m} の分割 $\{H_m^i\}_{i=1}^{l'}$ が存在して, 各 $i = 1, 2, \dots, l'$ に対して, 列 $\{H_{n_m}^i\}_{m=1}^\infty$ はエクspanderの族である.

注意 4.5. この結果は, 船野-塩谷 [4] による次の結果を, グラフの場合に示したものである: 第 l 固有値が無限大に発散する閉重み付きリーマン多様体の列は, k 個のレビ族の和である. ただし, 上の系の証明は, 彼らの証明方法とは異なる.

5 一様埋め込み

連結グラフの頂点集合には, 2 頂点を結ぶ辺の最小数で距離を与えることができる. これをグラフの距離という. この節では, グラフの離散ラプラシアン固有値の下からの評価と, グラフの一様埋め込み不可能性の関係について述べる.

定義 5.1. 距離空間の列 $\{(X_n, d_{X_n})\}_{n=1}^\infty$ が, 距離空間 (Y, d_Y) に**一様埋め込みできる**とは, 関数 $\rho_1, \rho_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ と各 n で写像 $f_n : X_n \rightarrow Y$ が存在し, 以下が成り立つこと:

- (i) 任意の n と任意の $x, y \in X_n$ に対し

$$\rho_1(d_{X_n}(x, y)) \leq d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \rho_2(d_{X_n}(x, y)),$$

- (ii) $r \rightarrow \infty$ のとき $\rho_1(r) \rightarrow \infty$.

特に, (X_n, d_{X_n}) がすべて同じ距離空間 (X, d_X) のとき, (X, d_X) が (Y, d_Y) に一様埋め込みできると言う.

一様埋め込みとは、距離空間の等長埋め込みや擬等長埋め込みよりも非常に弱い埋め込みである。しかし、次が成り立つ。

定理 5.2 ([5]). エクspanderの族は、ヒルベルト空間に一様埋め込みできない。

この結果は、ヒルベルト空間に一様埋め込みできない有限生成群が存在することを示すために用いられている。この結果の拡張として次が示せる。

系 5.3. 系 4.4 の有限グラフの列は、ヒルベルト空間に一様埋め込みできない。

注意 5.4. エクspanderの族が部分グラフとして入っているとしても、その部分グラフとしての埋め込みが、距離空間としての一様埋め込みであるとは限らないため、上の系は自明ではない。しかし、この系は [5] 中の証明とまったく同じ証明方法で示すことができる。

参考文献

- [1] N. Alon and V. Milman, " λ_1 , isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators", J. Comb. Theory, Ser. B 38 (1985), 73–88.
- [2] J. Dodziuk, "Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks", Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 787–794.
- [3] G. Davidoff, P. Sarnak and A. Valette, "Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs", London Mathematical Society Student Texts, 55, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [4] K. Funano and T. Shioya, "Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of laplacian", preprint.
- [5] M. Gromov, "Random walk in random groups", Geom. Funct. Anal. 13 (2003), 73–146.
- [6] S. Hoory, N. Linial and A. Wigderson, "Expander graphs and their applications", Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 43 (2006), 439–561.
- [7] M. Tanaka, "Higher eigenvalues and partitions of a graph", arXiv:1112.3434.
- [8] 浦川 肇, "ラプラス作用素とネットワーク", 裳華房, 1996.

Discrete Time Quantum Walks and Integrability *

鹿野 豊[†]

東京工業大学大学院理工学研究科基礎物理学専攻 博士研究員
日本学術振興会特別研究員 (PD)

Chapman University, Center for Quantum Studies, 客員助教
shikano@th.phys.titech.ac.jp

概要

離散時間量子ウォーク (Discrete Time Quantum Walk, 以下、DTQW と記す。) は、ランダムウォークをモチーフにして量子力学の中で定義されたものである。その性質はランダムウォークとはまったく異なり、弱収束定理が様々な場合において証明されている。今回、我々はどのような離散時間量子ウォークが解け、どのようなものが解けないかの分類指針を会えたので発表する。

1 はじめに

最もシンプルな確率過程として、1次元格子 ($\mathbb{Z}$ 上) のランダムウォークがある。1次元上に粒子 (ウォーカー) を用意し、粒子はコインの表裏のどちらかが確率的に出ることによって、1次元格子点上を左右に動くというシステムである。 t ステップ後の1次元格子点上の粒子の位置を X_t と書くことにすると、確率変数となる。さて、コインの表 (裏) の出る確率を1ステップごとに $p = 1/2$ ($1 - p = 1/2$) とし、表 (裏) が出る

*本研究会を挙げるにあたり、世話人ならびに事務スタッフの皆さんに大変感謝致します。また、本研究は JSPS 学振特別研究員奨励費 (No. 21008624) より援助を受けました。

[†]本レポートは北海道大学で開催される第8回数学総合若手研究集会～数学を中心とした広範な知識の交流～の講演要綱である。

と1次元格子上の1サイトを左(右)に動くというシンプルなランダムウォークを考える。すると、中心極限定理により以下の極限分布を得ることができる。

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow N(0, 1). \quad (1)$$

ここで、 $\Rightarrow$ は弱極限を表し、 $N(0, 1)$ は平均0, 分散1の正規分布を表す。この分布は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2)$$

という確率分布関数をもつ。

ランダムウォークをまとめると、「コイン投げ」および「コイン投げの結果に応じて粒子をシフトさせる」という2つの操作に分割することができる。これに対して、量子力学上でランダムウォークのようなものを対応させようとする。量子力学の要請から、測定をしない限り確率が導入されない。そこでランダムウォークの2つの操作をそれぞれ量子状態に対する時間発展だと解釈することにより、ユニタリー作用素として定義することにする。それを記述するために、まずはヒルベルト空間を準備する。粒子とコインのそれぞれにヒルベルト空間が定義されていると考えれば良いので、

$$\mathcal{H} := l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^2 \quad (3)$$

とする。また、今後のためにサイト $(n \in \mathbb{Z})$ ごとにおける量子状態を

$$\begin{bmatrix} \psi(n, L) \\ \psi(n, R) \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \quad (4)$$

と書くこととする。次に、「コイン投げ」に対応した「量子コイン投げ」を定義する。量子コイン投げは、コインのほうのヒルベルト空間にのみ作用するように定義しなければならないので、ヒルベルト空間上の線形作用素の空間を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ と書くこととすると、

$$C := I \otimes \hat{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (5)$$

とし、 I は恒等作用素とし、

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2) \quad (6)$$

とする。また、シフトを表現するユニタリー作用素を W と書くこととするとコインの表と裏にはシフトの際には作用はしないので、

$$W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\psi(n-1, L)\psi^\dagger(n, L) + \psi(n+1, R)\psi^\dagger(n, R)] \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (7)$$

となる。これら2つのユニタリー作用素をあわせたユニタリー作用素 $U := WC$ をもって、1ステップのDTQWと定義する。また、初期の量子状態を

$$\varphi_0 := \begin{bmatrix} q_L \\ q_R \end{bmatrix} \quad (8)$$

とすると、 t ステップ後のサイト n での量子状態は

$$\begin{bmatrix} \psi_t(n, L) \\ \psi_t(n, R) \end{bmatrix} = (P_n \otimes I)U^t\varphi_0 \quad (9)$$

とする。ここで、 $P_n := (\psi(n, L)\psi^\dagger(n, L) + \psi(n, R)\psi^\dagger(n, R)) / \|\psi(n, L)\psi^\dagger(n, L) + \psi(n, R)\psi^\dagger(n, R)\|$ はサイト n への射影作用素とする。そして、 t ステップ後のサイト n の確率分布は

$$\Pr[X_t = n] := |\psi_t(n, L)|^2 + |\psi_t(n, R)|^2 \quad (10)$$

と表すことにする。この際、 t ステップ後に測定を加えているためにDTQWのウォーカーの位置に関しては確率変数となる。しかし、次の事実があるということを述べておく。

Remark 1. $E_t := \{X_t : t \in \mathcal{N}_0\}$ は確率過程として定義されていない。

今まで、DTQWの定義およびその確率過程としての理解は量子確率論における確率過程として捉えられてきた歴史がある。そこで、確率過程として捉えられていないDTQWを基にして、古典的確率過程を導くということを著者を含めたグループで行ってきた [1, 2]。しかし、最近、ランダムウォークを軸にして古典から量子への対応関係を導こうとする考え方 [3] もあるが、いまだにどのアプローチも本質的解決までには至っていない。

2 DTQWの弱極限定理

ランダムウォークと同様にして、DTQWにも弱極限定理が存在する。

Theorem 1 (Konno [4, 5]). 上記で定義した量子ウォークに関して、 $abcd \neq 0$ であれば、以下の弱極限が存在する。

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow K(|a|). \quad (11)$$

ここで、 $K(r)$ は分散 r の分布を示している。 $K(r)$ という分布はパラメータ $r \in (0, 1)$ をもった確率分布関数 $f(x; r)$:

$$f(x; r) = \frac{\sqrt{1-r^2} \mathbf{1}_{(-r,r)}(x)}{\pi(1-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} \left\{ 1 - \left(|q_L|^2 - |q_R|^2 + \frac{aq_L \overline{bq_R} + \overline{aq_L} bq_R}{|a|^2} \right) x \right\}, \quad (12)$$

を持っている。ここで、 $\mathbf{1}_{(-r,r)}(x)$ は定義関数である。

Remark 2. この極限分布は逆正弦則とは本質的に異なっている。

本定理から、ランダムウォークと違い、ステップ数の2次で収束スピードが速くなるために、これを利用して量子計算アルゴリズムを発展させようという研究もある [6]。また、ランダムウォークと比較すると極限分布の形が偉く異なり Recurrence 構造も大きくことなるといことが知られている。以下で与える証明は、文献 [4, 5] で用いられた組み合わせ論的証明でなく、離散フーリエ変換を用いた証明方法を紹介する [7]。

Proof. 最初にフーリエ変換をして、基底を変えることとする。そこで、サイト n でコイン状態が $\xi \in \{L, R\}$ に対して、 $\psi(n, \xi)$ は以下のように変換される。

$$\hat{\psi}(k, \xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ikn} \psi(n, \xi). \quad (13)$$

そして、このフーリエ変換した後の空間上での1ステップ時間発展は

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(k)_t &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ikn} U^t \varphi_0 \\ &= e^{ik} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ik(n+1)} P_{n+1} U^{t-1} \varphi_0 \\ &\quad + e^{-ik} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ik(n-1)} P_{n-1} U^{t-1} \varphi_0 \\ &= \begin{bmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{bmatrix} U \hat{\Psi}(k)_{t-1} \end{aligned} \quad (14)$$

と表され、初期状態に関しては

$$\hat{\Psi}(k)_0 = q_L \hat{\psi}(k, L) + q_R \hat{\psi}(k, R) \quad (15)$$

となる。組み合わせると、

$$\hat{\Psi}(k)_t = U(k)^t \hat{\Psi}(k)_0 \quad (16)$$

を得る。ここで、

$$U(k) := \begin{bmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{bmatrix} U. \quad (17)$$

と定義する。確率分布に関しては、

$$\Pr[X_t = n] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{i(k-k')n} \hat{\Psi}^\dagger(k')_0 U^\dagger(k')^t U(k)^t \hat{\Psi}(k)_0 \quad (18)$$

となる。そこで、確率変数 X_t に対する j 次モーメントは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Ex}[(X_t)^j] &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^j \Pr[X_t = n] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'n} \hat{\Psi}^\dagger(k')_t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \left(-i \frac{d}{dk} \right)^j e^{ik'n} \right\} \hat{\Psi}(k)_t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{\Psi}^\dagger(k')_t \left(i \frac{d}{dk} \right)^j \hat{\Psi}(k)_t. \end{aligned} \quad (19)$$

$U(k)$ の固有値を $\lambda_\xi(k)$ とし、固有ベクトルを $v_\xi(k)$ ($\xi \in \{1, 2\}$) とする。すると、

$$\begin{aligned} \left(i \frac{d}{dk} \right)^j |\hat{\Psi}(k)_t\rangle &= \sum_{\xi \in \{1, 2\}} t(t-1) \cdots (t-j+1) \times \\ &\quad \times \lambda_\xi(k)^{t-j} v_\xi^\dagger(k) \hat{\Psi}(k)_0 v_\xi(k) + O(t^{j-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

式 (19) は

$$\begin{aligned} \text{Ex}[(X_t)^j] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\xi \in \{1, 2\}} t(t-1) \cdots (t-j+1) \lambda_\xi(k)^{-j} \left(i \frac{d}{dk} \lambda_\xi(k) \right)^j \times \\ &\quad \times v_\xi^\dagger(k) \hat{\Psi}(k)_0 \hat{\Psi}^\dagger(k)_0 v_\xi(k) + O(t^{-1}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\xi \in \{1, 2\}} t(t-1) \cdots (t-j+1) \left(\frac{i \frac{d}{dk} \lambda_\xi(k)}{\lambda_\xi(k)} \right)^j \times \\ &\quad \times |v_\xi^\dagger(k) \hat{\Psi}(k)_0|^2 \frac{dk}{2\pi} + O(t^{-1}) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。すると、 $t \rightarrow \infty$ という極限で

$$\mathbb{E}_X \left[\left(\frac{X_t}{t} \right)^j \right] \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\xi \in \{1,2\}} \left(\frac{i \frac{d}{dk} \lambda_{\xi}(k)}{\lambda_{\xi}(k)} \right)^j |v_{\xi}^{\dagger}(k) \hat{\Psi}(k)_0|^2 \frac{dk}{2\pi} \quad (22)$$

となる。なので、モーメント母関数は、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_X [e^{(i\tau X_t)/t}] &\rightarrow \sum_{\xi \in \{1,2\}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(i\tau \frac{i \frac{d}{dk} \lambda_{\xi}(k)}{\lambda_{\xi}(k)} \right) \times \\ &\quad \times |v_{\xi}^{\dagger}(k) \hat{\Psi}(k)_0|^2 \frac{dk}{2\pi} \text{ as } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\tau \in \mathbb{R}$ は任意定数である。そこで、 $\frac{i \frac{d}{dk} \lambda_{\xi}(k)}{\lambda_{\xi}(k)}$ の部分を計算すると

$$\frac{i \frac{d}{dk} \lambda_{\xi}(k)}{\lambda_{\xi}(k)} = \pm \frac{|a| \cos(k - \frac{\theta}{2})}{\sqrt{|a|^2 \cos^2(k - \frac{\theta}{2}) - (1 - |a|^2) e^{i2k}}} =: \pm x, \quad (24)$$

ここで $|ad - bc| = 1$ というユニタリー条件から $e^{i\theta} := ad - bc$ と置いた。
式 (23) および $|\langle v_1(k) | \hat{\Psi}(k)_0 \rangle|^2 + |\langle v_2(k) | \hat{\Psi}(k)_0 \rangle|^2 = 1$ から次を得る。

$$\begin{aligned} \Pr[X_t \leq x] &= \int_{-k(x)}^{k(x)} |v_1^{\dagger}(k) \hat{\Psi}(k)_0|^2 \frac{dk}{2\pi} \\ &\quad + \left(\int_{-\pi}^{-\pi+k(x)} + \int_{\pi-k(x)}^{\pi} \right) |v_2^{\dagger}(k) \hat{\Psi}(k)_0|^2 \frac{dk}{2\pi} \end{aligned} \quad (25)$$

それゆえ、確率分布関数は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \Pr[X_t \leq x] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(|v_1^{\dagger}(k) \hat{\Psi}(k)_0|^2 + |v_1^{\dagger}(-k) \hat{\Psi}(-k)_0|^2 \right. \\ &\quad \left. + |v_2^{\dagger}(-\pi + k) \hat{\Psi}(-\pi + k)_0|^2 + |v_2^{\dagger}(\pi - k) \hat{\Psi}(\pi - k)_0|^2 \right) \frac{dk(x)}{dx} \\ &= \frac{\sqrt{1 - |a|^2} \mathbf{1}_{(-|a|, |a|)}(x)}{\pi(1 - x^2) \sqrt{|a|^2 - x^2}} \times \end{aligned} \quad (26)$$

$$\times \left\{ 1 - \left(|q_L|^2 - |q_R|^2 + \frac{aq_L \overline{bq_R} + \overline{aq_L} bq_R}{|a|^2} \right) x \right\}. \quad (27)$$

これにより、所望の結果を得た。 $\square$

本証明以外にも、物理的な理解を利用する証明方法も存在する [8]。

3 DTQW と固有値の関係

これまで、サイトに依存しないコインを使ってきたが、この節ではサイトに依存するコインを用いて1ステップのDTQWを記述する作用素の固有値に関する関係を見ていくことにする。

$$C = \sum_n \left[P_n \otimes \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha n) & -\sin(2\pi\alpha n) \\ \sin(2\pi\alpha n) & \cos(2\pi\alpha n) \end{pmatrix} \right] \quad (28)$$

とコイン作用素を定義し直し、これによるDTQWを inhomogeneous QW と呼び、以下ではこのダイナミクスを考える。すると、図1のような確率分布を得ることができる。すると、以下の定理を得る。

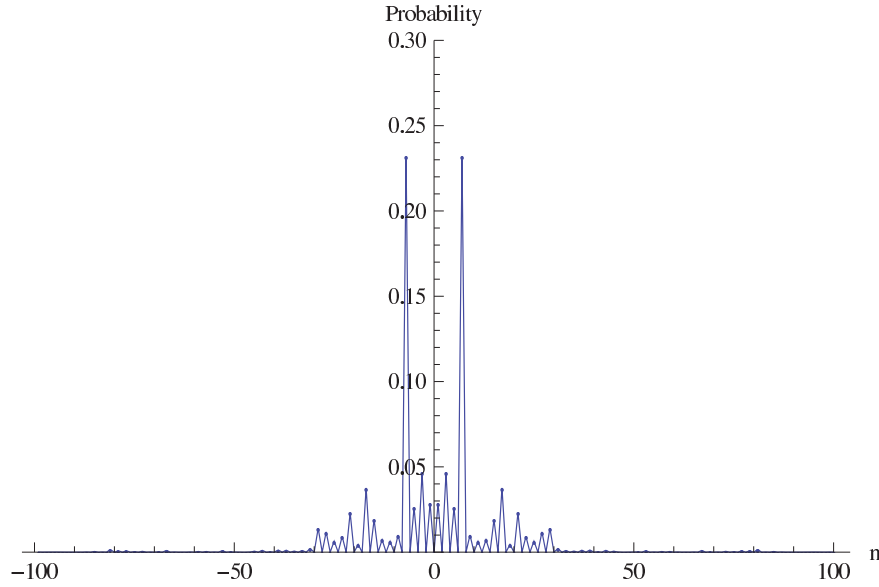


図1: Probability distribution in the inhomogeneous QW at the 1500th steps. Here, we take the inverse period $\alpha = \pi$, which is an irrational number. Note that, the probability outside the plot range is zero within the numerical accuracy.

Theorem 2 (Shikano and Katsura [9]). *For any irrational $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, the limit distribution of the inhomogeneous QW divided by any power of the time variable is localized at the origin:*

$$\frac{X_t}{t^\theta} \Rightarrow I \quad (t \rightarrow \infty), \quad (29)$$

where X_t is the random variable for the position at the step t , $\theta (> 0)$ is an arbitrary parameter. Here, the limit distribution I has the probability

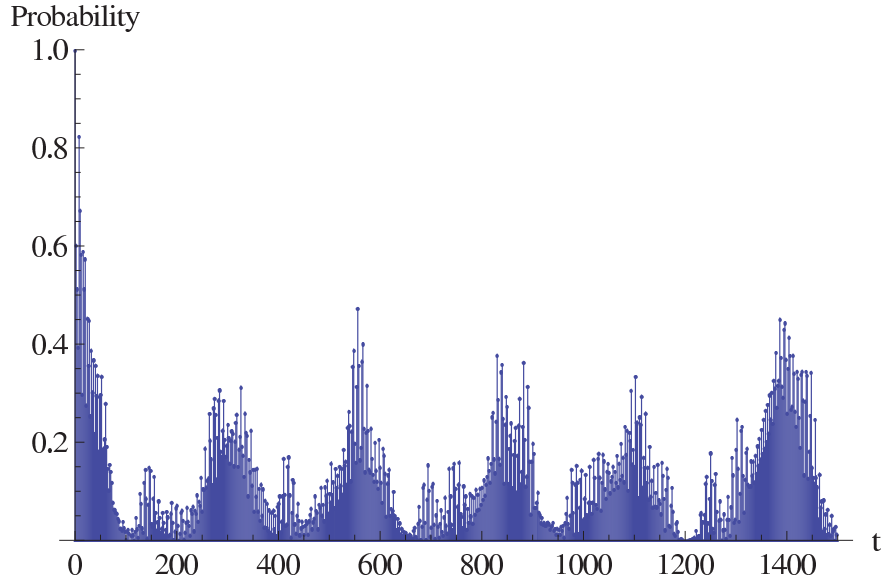


図 2: Recurrence property in the inhomogeneous QW by the 1500th steps. The recurrence is dynamics of the probability distribution at the origin. The parameters are same to Fig. 1.

density function $f(x) = \delta(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), which is the Dirac delta function. It is noted that the limit distribution I is independent of the parameter θ .

この証明の本質はDTQWが有限系になる α を見つけ、その有理数 α を用いてDirichletの近似定理の拡張を用いて無理数の場合を証明する。

つまり、DTQWの局在化に関しては α を変えてもロバストに働くという性質をみるために、この1ステップの作用素 U と固有値との関係を数値的にみると図3を得る。これらの関係は局在化および非局在化に対してスペクトル解析の見地から次のような定理が成り立つと考えられる。

Conjecture 1. *The distribution of the DTQW is not localized if the quantum walk operator WC only has continuous spectra and does not have embedded eigenvalues.*

これらのことを総合すると、無限系になる際は、ある特別な α に対して存在しそうであり、この極限分布はいまだに証明されていない。また、有限系に関しては可積分系との対応関係を示すことができると予想され、これらをもとに分類定理を与えることが出来る。

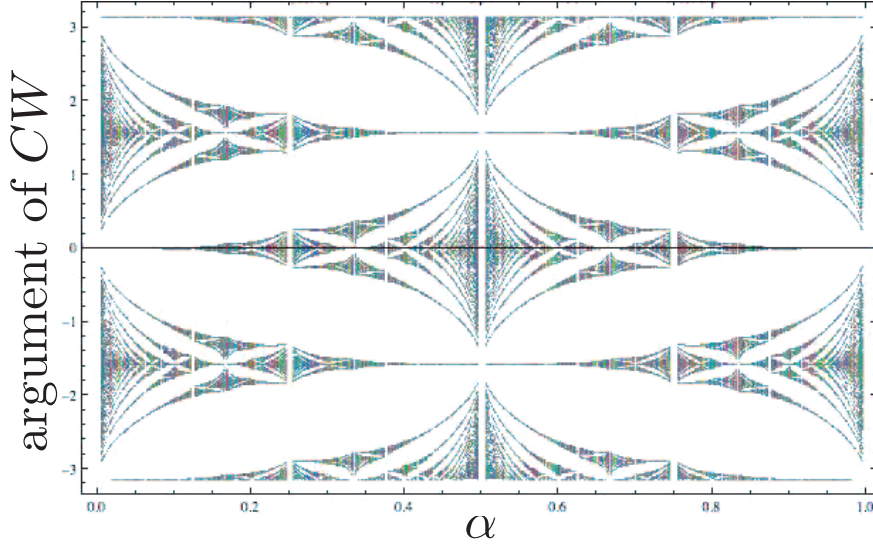


図 3: The self-similar and fractal structure in the inhomogeneous QW. Arguments of the eigenvalues of CW (vertical axis) are plotted as a function of the parameter $\alpha = \frac{P}{4Q}$ (horizontal axis) with $Q \leq 50$. Note that, P and Q must be relatively prime.

4 結びに

本稿では、DTQW とは何か? という定義の部分から始め、何故、可積分系との関係を示すに至ったかという道筋を基本的な性質を証明しながら書いてきた。可積分系との対応関係は今、研究が進行中であり、MCYR8 までになるべく多くの対応関係を見つけることとしたい。

参考文献

- [1] Y. Shikano, K. Chisaki, E. Segawa, and N. Konno, Phys. Rev. A **81**, 062129 (2010).
- [2] K. Chisaki, N. Konno, E. Segawa, and Y. Shikano, Quant. Inf. Comp. **11**, 741 (2011).
- [3] T. Wada, in the pre-proceedings of International Workshop on Mathematical and Physical Foundations of Discrete Time Quantum Walk at Tokyo Institute of Technology organized by Y. Shikano, E. Segawa, and N. Konno (2011).

- [4] N. Konno, Quantum Inf. Process. **1**, 345 (2002).
- [5] N. Konno, J. Math. Soc. Jpn. **57**, 1179 (2005).
- [6] S. E. Venegas-Andraca, to be published from Quantum Information Processing: Special Issue of Quantum Walks edited by Y. Shikano.
- [7] G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo, Phys. Rev. E. **69**, 026119 (2004).
- [8] T. Kitagawa, arXiv:1112.1882, to be published from Quantum Information Processing: Special Issue of Quantum Walks edited by Y. Shikano.
- [9] Y. Shikano and H. Katsura, Phys. Rev. E **82**, 031122 (2010).

パラレルセッション 幾何学

カラテオドリー測度双曲多様体上の 標準束及び余接束の正值性¹

菊田 伸² (東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 D3)

1. 導入

本講演では、コンパクトな複素多様体上の Carathéodory 測度双曲性と標準束及び余接束の代数幾何的な正值性の間の数値的な関係を考察する。この二つの性質を繋げるための方法として、Carathéodory 測度双曲性を反映して自然に定義される内在的な特異計量に注目し、その曲率を多重ポテンシャル論的な意味で捉え、計算したことが本研究の特徴の一つである。

複素関数論の Schwarz の補題は「単位円盤間の正則写像は Poincaré 体積形式に関する測度を減少する」と測度減少原理として幾何学的に解釈出来る。測度双曲性なる概念は、測度減少原理の要請の下、Poincaré 体積形式を n 次元複素多様体 X に一般化する際に現れる概念である。例えば

定義 1.1. X の Carathéodory 擬体積形式 v_X^C は次で定義される内在的擬体積形式である：

$$v_X^C := \sup\{g^*v_1; g \text{ は } X \text{ から } \mathbb{B}^n \text{ への正則写像}\}.$$

この v_X^C は正則写像に関する測度減少原理を満たすことが分かる。また特異な X に対しては、類似の形で Carathéodory 測度 μ_X^C として定義される。そして μ_X^C が非自明なときに、 X は **Carathéodory 測度双曲的**であるという。ここで v_1 は n 次元複素単位球 $\mathbb{B}^n$ 上の Poincaré 体積形式である。

この概念は正則写像や有理型写像の研究に大きな応用を与えているが、一方でこの様な測度双曲性を持つコンパクトな多様体 X もしくは測度の性質自体も興味深い問題の一つである。実は定義からその性質は、微分幾何学的には Ricci 曲率が負である、代数幾何学的には標準束 K_X が豊富という正值性を持つ多様体の性質に近いことが期待されている。そして実際に、その期待を裏づける結果として、「一般型の複素射影代数多様体は小林測度双曲的である」という小林-落合の定理がある ([7])。一般型という条件は、標準束が正值性の一つである巨大という条件を満たすことで定義される。また小林測度双曲性とは、Carathéodory 擬体積形式の双対として定義される小林擬体積形式に関する測度双曲性である。そしてこの逆がいわゆる小林予想である。

小林予想. ([7]) 小林測度双曲的な射影代数多様体は一般型か？

この予想は 2 次元以下の場合を除いてまだ解決されていない。この問題の意義は、測度双曲多様体に代数多様体の中での位置付けを与えるということである。しかしアприオリには、小林測度双曲性という $\mathbb{B}^n$ からの正則写像の性質が、多重標準束の大域切断の存在を導くことが見えない。そこがこの問題が未解決な理由の一つである。その意味でも、次の辻元氏による予想が重要である：

辻予想. 標準束が豊富である多様体上で、小林擬体積形式の曲率カレントは半正であるか？

これらの予想が本研究の一つの動機づけになった。つまり、コンパクトな複素多様体 X で普遍被覆 $\tilde{X}$ が Carathéodory 測度双曲的な場合にこの問題を考察した。ここで、コンパクトな多様体には Carathéodory 測度双曲性はないので、被覆上の Carathéodory 測度双曲性を考えている。実はこの Carathéodory 測度双曲性は多様体に非常に強い制約を与え、例えば上の辻予想は Carathéodory 擬体積形式に対しては標準束に関する仮定無しで成り立つ。よって、その Carathéodory 測度双曲性という最も強い双曲性ゆえの、より強い結論が導けることが期待できるはずであると予想した。具体的に云えば、次の問題が自然に浮かび上がる：

¹第 8 回数学総合若手研究集会, 北海道大学, 2012 年 2 月 27 日-3 月 1 日

²e-mail:sa6m15@math.tohoku.ac.jp

問題. Carathéodory 測度双曲性を測る量と標準束及び余接束の正值性を測る量が比較できるか？そしてその比較は Carathéodory 測度双曲性の標準束及び余接束の正值性への影響を明確にするか？これが本講演の主問題であり、いくつかの結果を得ることができたので報告する。

2. 結果

2.1. 標準束の巨大性との比較

コンパクトな X 上の標準束 K_X が巨大であることの数値的な特徴付けは、次の標準束に対する体積 $\text{vol}(K_X)$ が正であることである：

$$\text{vol}(K_X) := \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}(mK_X))}{m^n/n!}$$

つまりこの量が K_X の巨大という正值性を測っていると考えられる。そこで次の Carathéodory 測度双曲性との比較を得ることができた：

定理 2.1. ([6]) X をコンパクト正規複素解析空間、 $\tilde{X}$ を X の普遍被覆とするとき

$$\text{vol}(K_X) \geq \frac{(n+1)^n n!}{(4\pi)^n} \mu_{\tilde{X}}^C(X)$$

となる。特に $\tilde{X}$ が Carathéodory 測度双曲多様体ならば、 K_X は巨大、すなわち X は一般型である。

Carathéodory 擬体積形式の逆 $(v_X^C)^{-1}$ は、 K_X 上の特異 Hermite 計量と考えられることに注意する。この定理の証明において、その計量の最も重要な性質は、その曲率カレント $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_X^C$ が半正值であることである。その性質を用いてまず次が示せる：

定理 2.2. ([6]) Carathéodory 擬体積形式 v_X^C の曲率は -1 以下である：

$$K_{v_X^C} := -\frac{2^n}{(n+1)^n n!} \frac{(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_X^C)_{ac}^n}{v_X^C} \leq -1, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log v_X^C\right)_{ac}^n \geq \frac{(n+1)^n n!}{(4\pi)^n} v_X^C$$

ただし、 ac は Lebesgue 測度に関する Lebesgue 分解の絶対連続部分である。

そしてこの曲率の不等式を Boucksom-Popovici による体積 $\text{vol}(K_X)$ の曲率カレント積分による表示 ([1], [10]) に代入することで結論が得られる。

また Bergman 核も標準束の正值性を解析的に研究する対象として重要である。故に Bergman 核と Carathéodory 擬体積形式を比較することは、我々の問題意識からしても興味深い問題である。これに関しては、次の結果を得た：

定理 2.3. ([6]) 滑らかな compact 商を持つ Carathéodory 測度双曲多様体 X に対して、 $X \setminus \text{Zero}(v_X^C)$ において Bergman 核形式と計量は正である。

証明は B.-Y. Chen による方法 ([3]) を適用する。つまり、条件を満たす L^2 正則 n 形式の存在を示すために、標準的な $\bar{\partial}$ 作用素の L^2 評価式を、有界な強多重劣調和関数をウェイトとして用いる。

この定理から次に考えるべき問題の 1 つは、Carathéodory 擬体積形式と Bergman 核形式の間の明確な不等式を見つけることである。実際、計量の場合にはこれに対応した結果がある ([7])。

2.2. 部分多様体に沿った標準束の正值性との比較

コンパクトな X 内の d 次元解析的部分集合 $\iota: Z \hookrightarrow X$ に沿った標準束 K_X の正值性を測る代数幾何的な量の一つは、制限型体積 $\text{vol}_{X|Z}(K_X)$ である。それは体積の定義で、アンビエントな多様体上に拡張できる部分多様体上の大域切断だけ考えたものである：

$$\text{vol}_{X|Z}(K_X) := \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\dim \text{Im}[\iota^*: H^0(X, \mathcal{O}(mK_X)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(mK_X|_Z))]}{m^d/d!}$$

一方で、我々はこの概念に対応する Carathéodory 擬体積形式の制限型 $v_{X|Z}^C$ (制限型 Carathéodory 擬体積形式と呼ぶ) を導入した (本質的には D. A. Eisenman によって定義されていた ([4])).

定義 2.1. 滑らかな Z に対しては、 Z への制限型 Carathéodory 擬体積形式 $v_{X|Z}^C$ は次で定義する：

$$v_{X|Z}^C := \sup \left\{ (f|_Z)^* \left(\frac{2^d}{d!(n+1)^d} (\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log v_1)^d \right) ; f \text{ は } X \text{ から } \mathbb{B}^n \text{ への正則写像} \right\}.$$

一般の Z に対してはこの類似の形で測度 $\mu_{X|Z}^C$ として定義し、制限型 Carathéodory 測度と呼ぶ。

定理 2.1 に倣って、私はこれらの概念の間に明確な不等式があるのではないかと予想した：

予想. n と d のみに依る正定数 $C_{n,d}$ が存在して $\text{vol}_{X|Z}(K_X) \geq C_{n,d} \mu_{\tilde{X}|\tilde{Z}}^C(Z)$ が全ての既約かつ閉な Z に対して成り立つか？ただし $\tilde{X}$ は X の普遍被覆、 $\tilde{Z}$ は $\tilde{X}$ への Z の引戻しである。

実はこの予想は、全ての Z に対して成り立つように $C_{n,d}$ を取ることはできない：

命題 2.1. 上の予想で Z には、 $Z \not\subset \text{Zero}(v_X^C)$ という条件が必要である。

しかし $Z \not\subset \text{Zero}(v_X^C)$ の条件を付けた予想が正しいかどうかは今のところ確認できていない。今のところの我々のこの予想に関した結果は、以下で述べる予想の弱い形である。

上で導入した D. A. Eisenman による制限型 Carathéodory 擬体積形式の代わりに、我々は次の第 2 の制限型 Carathéodory 擬体積形式 $\bar{v}_{X|Z}^C$ を考える。それはオリジナルの制限型 Carathéodory 擬体積形式の定義で、全ての正則写像の上限ではなく、Carathéodory 臨界写像だけを考えたものである： $x \in Z_{\text{reg}}$ に対して

$$(\bar{v}_{X|Z}^C)_x := \sup_{g_x} \left\{ (g_x|_Z)^* \left(\frac{2^d}{d!(n+1)^d} (\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log v_1)^d \right) \right\}.$$

ここで $g_x : X \rightarrow \mathbb{B}^n$ は x における Carathéodory 臨界写像、すなわち $(g_x^* v_1)_x = (v_X^C)_x$ と $g_x(x) = o$ を満たす正則写像である。

我々の結果は、この代用品に変えると上の予想は成り立つというものである：

定理 2.4. X をコンパクトとし、また Z は X の既約閉解析的部分集合とする。また $\tilde{X}$ は X の普遍被覆、 $\tilde{Z}$ は $\tilde{X}$ への Z の引戻しとする。更に $\tilde{Z} \not\subset \text{Zero}(v_{\tilde{X}}^C)$ が成り立つと仮定する。このとき次が従う：

$$\text{vol}_{X|Z}(K_X) \geq \frac{d!(n+1)^d}{(4\pi)^d} \int_{Z_{\text{reg}}} \bar{v}_{X|Z}^C.$$

これは実際に予想よりは弱い形であるが、定理 2.1 の拡張にはなっている。またこの定理の定数のままでは D. A. Eisenman の制限型 Carathéodory 体積に取り替えると成り立たない。

定理の証明については、定理 2.1 のときと流れは同じである。まず Boucksom-Popovici の公式の久本 ([5]) と松村 ([9]) による制限型版を適用するために、その定理の Z と曲率カレントに対する仮定が今の状況で成り立つことを確認する。その際に次が必要である。

補題 2.1. K_X の non-ample locus $\mathbb{B}_+(K_X)$ に対して次が成り立つ：

$$\mathbb{B}_+(K_X) \subset \text{Zero}(v_X^C).$$

その後に定理 2.1 の時の曲率の不等式に対応する次の不等式を示す。ただし、久本-松村の定理を使うために、ac を使った wedge 積ではなく non-pluripolar Monge-Ampère 積 $\langle \cdot \rangle$ (cf. Boucksom-Eyssidieux-Guedj-Zeriahi [2]) という積を用いた形で示す必要がある：

補題 2.2.

$$\left\langle \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log v_X^C|_{\tilde{Z}_{\text{reg}}} \right)^d \right\rangle \geq \frac{d!(n+1)^d}{(4\pi)^d} \bar{v}_{\tilde{X}|\tilde{Z}}^C$$

定理 2.4 を用いると, 強 Carathéodory 測度双曲性と標準束 K_X の豊富性を数値的に比較できる. その前に次のことに注意する:

定理 2.5. ([6]) X が Carathéodory 測度双曲的ならば, 特異 Hermite 計量 $(v_X^C)^{-1}$ の曲率カレント $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log v_X^C$ は $\text{Zero}(v_X^C)$ の外で狭義正值である. 特に X がコンパクトでその普遍被覆 $\tilde{X}$ が強 Carathéodory 測度双曲的, 即ち $v_{\tilde{X}}^C > 0$ ならば, X は K_X が豊富な射影代数多様体である.

これは H. Wu [11] によっても証明なしで述べられている. またこの定理の後半は, 特異 Hermite 計量 $(v_X^C)^{-1}$ の正則化を用いて示しており, 強 Carathéodory 測度双曲性と標準束 K_X の豊富性の数値的な関係を与えていない. 次の結果はこの定理の数値的版であり, 定理 2.4 から直ちに従う:

系 2.1. X をコンパクトとし, また Z は X の d 次元既約閉解析的部分集合 ($d > 0$) とする. X の普遍被覆 $\tilde{X}$ が強 Carathéodory 測度双曲的であると仮定する. このとき次が成り立つ:

$$(K_X^d \cdot Z) \geq \frac{d!(n+1)^d}{(4\pi)^d} \int_{Z_{\text{reg}}} \bar{v}_{\tilde{X}|\tilde{Z}_{\text{reg}}}^C.$$

K_X が豊富であることの数値的な判定方法は Nakai-Moishezon-Kleiman によって, $d > 0$ なる任意の Z との交点数 $(K_X^d \cdot Z)$ が正であることと知られている. 従って, この系は Carathéodory 測度双曲性を測る量が K_X が豊富であることを測る量で下から評価できることを示している.

3. 更なる問題 ー余接束の正值性ー

ここまでは標準束についてのみ考察してきたが, 同じような数値的な比較が, 余接束 T^*X , 更に一般に d 次外積束 $\Omega_X^d = \bigwedge^d T^*X$ の正值性に対しても可能かどうかという問題は自然である. この場合は Ω_X^d 上には Carathéodory 測度双曲性を反映した複素 Finsler 計量が自然に入る. この計量を用いることで, H. Kratz([8]) はコンパクトな X 上の普遍被覆 $\tilde{X}$ が強 Carathéodory 測度双曲的ならば, 余接束 T^*X がネフであることを示した. しかし, その証明は数値的な比較をしていない. そこで, 我々は Kratz の主張のある数値的版を D. A. Eisenman による制限型 Carathéodory 擬体積形式の曲率が -1 以下であることに帰着することで示せた.

今後も更に, T^*X の様々な正值性と Carathéodory 測度双曲性の間の数値的な比較ができるかどうかを考察していきたい.

参考文献

- [1] S. Boucksom, *On the volume of a line bundle*, Internat. J. Math. **13** (2002), no. 10, 1043–1063.
- [2] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi, *Monge-Ampère equations in big cohomology classes*, Acta Math. **205** (2010), no. 2, 199–262.
- [3] B.-Y. Chen, *The Bergman metric on complete Kähler manifolds*, Math. Ann. **327** (2003), no. 2, 339–349.
- [4] D. A. Eisenman, *Intrinsic measures on complex manifolds and holomorphic mappings*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 96, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.
- [5] T. Hisamoto, *Restricted Bergman kernel asymptotics*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [6] S. Kikuta, *Carathéodory measure hyperbolicity and positivity of canonical bundles*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 1411–1420.
- [7] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 318, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [8] H. Kratz, *Compact complex manifolds with numerically effective cotangent bundles*, Doc. Math. **2** (1997), 183–193 (electronic).
- [9] S. Matsumura, *Restricted volumes and divisorial Zariski decompositions*, arXiv:math/1005.1503.
- [10] D. Popovici, *Regularization of currents with mass control and singular Morse inequalities*, J. Differential Geom. **80** (2008), no. 2, 281–326.
- [11] H. Wu, *Old and new invariant metrics on complex manifolds*, Several complex variables (Stockholm, 1987/1988), Math. Notes, vol. 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, pp. 640–682.

多様体上の折り目写像

北澤 直樹

東京工業大学理工学研究科数学専攻

多様体をその上の良い関数 (Morse 関数) を用いて調べるのが Morse 理論である. ([4], [6] 等が良い教科書.) 値域を実数ではなく一般の $\mathbb{R}^n$ や (境界なし) C^∞ 多様体 (但し定義域より次元は高くない) にすることを考えるのは自然である. 実際一般型の研究は Whitney や Thom による研究 ([12], [11]) に始まり今に至るまで活発になされている. 一般型においても良い写像が鍵となる; 中でも, 折り目写像と呼ばれる, Morse 関数の特異点の最も自然な一般化であるような特異点のみ特異点としてもつ写像が鍵である. 本稿では折り目写像について著者の研究含め紹介する. 以下 $m, n \in \mathbb{N}$ で, M を m 次元 C^∞ 閉多様体, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $S(f)$ を f の特異点集合とする.

1 多様体上の Morse 関数, 折り目写像と可微分写像の Reeb space

まず Morse 関数と折り目写像を導入する.

1.1 Morse 関数

Definition 1. M 上の C^∞ 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が **Morse 関数**. $\Leftrightarrow f$ の各特異点が非退化.

Proposition 1 (Morse's lemma). $p \in S(f)$ が非退化とする. このときある p を中心とする局所座標 (U, ϕ) ($\phi = (x_1, \dots, x_m)$) と局所座標の取り方によらない i があって

$$f|_{U \circ \phi^{-1}}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{k=m-i} x_k^2 - \sum_{k=m-i+1}^m x_k^2 + f(p)$$

とできる. (i を p の **指数**と呼ぶ.)

さらに Morse 関数の特異点集合は離散集合.

Definition 2. M 上の C^∞ 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が **良い Morse 関数**. $\Leftrightarrow f$ の各特異点が非退化で各特異点で値が異なる.

以下は有名な定理である. (Whitney 位相やこの定理については例えば [4] を参照のこと.)

Proposition 2. 良い Morse 関数は (Whitney 位相を入れた写像空間 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ に関し) 稠密に存在する.

1.2 折り目写像

Definition 3. $m \geq n \geq 1$ とする.

1. $p \in S(f)$ が**折り目特異点**. $\Leftrightarrow$ ある p を中心とする局所座標 (U, ϕ) ($\phi = (x_1, \dots, x_m)$) とある $f(p)$ を中心とする局所座標 (V, ψ) ($\psi = (y_1, \dots, y_n)$) があって

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) := (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=0}^{m-n-i} x_{n+k}^2 - \sum_{k=m-n-i+1}^{m-n} x_{n+k}^2)$$
 とできる.
2. $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ が**折り目写像**. $\Leftrightarrow f$ の各特異点が折り目特異点.

Proposition 3. $m \geq n \geq 1$, $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^∞ 写像とする.

1. $p \in M$ を f の折り目特異点とする. このとき前の Definition 3 で $\min\{i, m-n+1-i\}$ は一意に定まる. (これを p の**指数**と呼ぶ.)
2. $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を折り目写像とする. このとき $S(f)$ そして指数 i の特異点全体の集合 $F_i(f)$ は M の $n-1$ 次元 C^∞ 部分多様体である. さらに $f|_{F_i(f)}$ は C^∞ はめ込み.

Definition 4. 折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で $f|_{S(f)}$ が正規交叉をもつ C^∞ はめ込みであるとき f は**良い折り目写像**であるという.

良い Morse 関数は良い折り目写像である. (良い) Morse 関数は $C^\infty(M, \mathbb{R})$ において稠密に存在するのに対し, (良い) 折り目写像はそうとは限らないし存在しないケースもある. 例えば値域 $\mathbb{R}^2$ の場合, 定義域の多様体の Euler 数が偶数であることが, 存在の必要十分条件であることが知られている ([11] 他). Eliashberg ([2], [3]) に始まる, 一般の次元対での折り目写像の存在問題は, 折り目写像に関する重要問題の一つである.

良い折り目写像は, **安定写像**と呼ばれるものの特別なものである. 安定写像は Mather 等により系統的に研究されており, 大域的特異点論において重要な概念である. 詳しくは [4] 等参照のこと.

1.3 Reeb space

(良い) 折り目写像, 安定写像の研究において重要な, Reeb space を導入する.

Definition 5. $m \geq n \geq 1$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で M 上の同値関係を以下のように定義する.

$$p_1 \sim_f p_2 \Leftrightarrow p_1 \text{ と } p_2 \text{ は同じ点における } f \text{ の逆像の同じ連結成分にある.}$$

$W_f := M/\sim_f$ を f の **Reeb space** という. (商写像 $q_f: M \rightarrow W_f$ とする.)

次が良く知られている.

Proposition 4. f が良い折り目写像の時 Reeb space は多面体.

Remark 1. 一般に安定写像, さらにより広いクラスでも, 同様のことが成立することが知られている. (例えば [5] に平面への安定写像の場合の証明がある. 一応触れておくと良い Morse 関数の場合は明らか.)

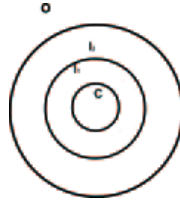
2 良い性質をもった折り目写像の研究

次の (特に 1990 年代以降の) 流れに着目する.

- special generic 写像 $\rightarrow$ (折り目写像で各特異点の指数が 0 であるもの. [1] で導入された. その後 [7] 等を経て 1990 年代に [8], [9] 等多くのことが分かった.)
- Reeb space や値域の各点の逆像が単純な, (平面への) 安定写像 ([5])
- (主に平面への) 正則値の逆像が球面の非交和である安定写像 ([10])

著者はこれらを「良い折り目写像と定義域多様体の性質に関する研究」であると考え, 先行研究をもとに適当にクラスを定め, 各クラスについて研究している. ここでは, 著者が行っている, 「特異値の形状配置に条件を付けた写像と多様体の関係」に関する研究を紹介する. 以下著者が導入した円周型折り目写像を定義する.

Definition 6 (円周型折り目写像). $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$; $S(f)$ が標準的球面の非交和, $f|_{S(f)}$ が C^∞ 埋め込みであるような折り目写像 $\{C\} \sqcup \{O\} \sqcup \{I_a\}_{a \in F}$ (F は有限集合); $\mathbb{R}^n - f(S(f))$ の連結成分全体の集合で $\overline{C} \cong D^n$, $\overline{O} \cong S^{n-1} \times [0, +\infty)$, $\overline{I_a} \cong S^{n-1} \times [0, 1]$ をみたすとするとき f は**円周型折り目写像**であるという.



Example 1. ある「ホモトピー球面上の special generic 写像」. (例えば平面への special generic 円周型折り目写像が [8] に登場している.) その他 special generic でないが円周型折り目写像の定義を満たすものやその Reeb space も [5] や [10] 等に具体例として登場している.

この Example の例もいくつか含むクラスを定め考察し, 分かったことを以下定理として紹介する.

Theorem 1. $n \geq 2$, $m \geq 2n$ で M ; 単連結 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$; 特異点の指数が 0, 1 で $f(M) \cong D^n$ である円周型折り目写像 任意の $p \in \mathbb{R}^n - f(S(f))$ で $f^{-1}(p)$ は almost sphere (標準的円板を境界上の C^∞ 微分同相で貼りあわせてできる球面) の非交和 $l \in \mathbb{N}$; $p \in C$ (円周型折り目写像の定義における C), $f^{-1}(p)$ の連結成分数とする. このとき q_f はホモトピー群の同型 $\pi_k(M) \cong \pi_k(W_f)$ ($0 \leq k \leq m-n-1$) を誘導し

1. $\pi_k(M) \cong \pi_k(W_f) \cong \{0\}$ ($0 \leq k \leq n-1$).
2. $m > 2n$ ならば $\pi_n(M) \cong H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{l-1}$.
 $m = 2n$ ならば $\pi_n(M) \cong H_n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2b_n(W_f)} \cong \mathbb{Z}^{2(l-1)}$.

である. さらに M は, コンパクト $(n-1)$ -連結 PL 多様体 W で $i: M \rightarrow W$ が $(m-n-1)$ -同値であり W_f とホモトピー同値であるものの境界となる.

さらに $f^{-1}(p)$ が全ての $p \in \mathbb{R}^n - f(S(f))$ において標準的球面の非交和とする. $[S^{n-1}, \text{Diff}^{\infty+}(S^{m-n})]$ が 1 個の元からなり $\text{Diff}^{\infty+}(S^{m-n})$ の部分群である C^∞ Lie 群 G があり包含写像 $i: G \rightarrow \text{Diff}^{\infty+}(S^{m-n})$ がホモトピー同値写像のとき, S^{m-n+1} から $(m-n+1)$ -標準的球体の内部 l 個の非交和を除いたものをファイバーとする S^{n-1} 上の C^∞ 束 E と $D^n \times S^{m-n}$ l 個の非交和 P があり, 境界での S^{n-1} 上の C^∞ 自明束 $S^{n-1} \times \sqcup S^{m-n}$ の間の, 底空間のある C^∞ 微分同相 $\bar{\phi}$ を誘導する束写像となっている C^∞ 微分同相 ϕ が (写像類置換を法として) 一意に存在し, $M \cong E \bigcup_\phi P$ と表せる. さらに E が自明 C^∞ 束ならば, 前の W は C^∞ でとれる.

References

- [1] O.Burlet G.de Rham, *Sur certaines applications generiques d'une variete close a 3 dimensions dans le plan*, Enseign.Math., 20 (1974). 275–292.
- [2] Y.Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.
- [3] Y.Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.
- [4] M.Golubitsky V.Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics(14), Springer-Verlag(1974).
- [5] M.Kobayashi and O.Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.
- [6] J.Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematic Studies AM-51, Princeton University Press; 1st Edition (1963.5.1).
- [7] P.Porto Y.K.S.Furuya, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. 35 (1990), 41–52.
- [8] O.Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.
- [9] O.Saeki, K.Sakuma, *On special generic maps into $\mathbb{R}^3$* , pacific J.Math.184 (1998), 175–193.
- [10] O.Saeki K.Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
- [11] R.Thom, *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-56), 43–87.
- [12] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math., 62 (1955), 374–410.

測度距離空間の Coarse Ricci 曲率

北別府 悠 (東北大学大学院理学研究科)*

1. 序

Lott, Villani, Sturm らによって最適輸送問題を通して測度距離空間上で**曲率次元条件**と呼ばれる Ricci 曲率の下限条件の一般化がなされた. 他方 Ollivier により **coarse Ricci 曲率** というものが距離空間とその上の **random walk** の組に対して定義された. これらの概念はどちらも Riemann 多様体の Ricci 曲率の下限と密接な関係があることが示されていたが, 一般の測度距離空間上では二つの関係は知られていなかった. 今回曲率次元条件より弱い条件である **Bishop-Gromov 不等式** を満たすような測地空間に対しては, ある random walk を用いた coarse Ricci 曲率の下限が得られた. また Riemann 多様体上では別の random walk に対しても通常の Ricci 曲率の下限から coarse Ricci 曲率の下限が得られた. 更に random walk から自然に定まる **Laplacian** に対して固有値と coarse Ricci 曲率の下限に関係があることがわかったのでそれについても述べる.

2. 準備

距離空間といえば完備可分距離空間を指すものとする. また $\mathcal{P}(X)$ で距離空間 X 上の Borel 確率測度全体の集合を表すとする. (X, d) 上の Borel 確率測度 μ, ν に対して, その **coupling** $\xi \in \mathcal{P}(X \times X)$ を,

$$\xi(A \times X) = \mu(A), \quad \xi(X \times B) = \nu(B)$$

が任意の Borel 集合 A, B に対して成り立つようなものとし, μ と ν の coupling 全体の集合を $\Pi(\mu, \nu)$ で表す. $\mathcal{P}_p(X)$ で

$$\int_X d(o, x)^p d\mu(x) < \infty \quad \text{for } \exists o \in X$$

を満たす $\mu \in \mathcal{P}(X)$ 全体の集合を表す. $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$ に対して

$$W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{\xi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\xi(x, y) \right)^{1/p}$$

と定め, W_p を p 次 **Wasserstein 距離** という. $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ は実際に距離空間になることが知られている. Borel 写像 $m : (X, d) \rightarrow (\mathcal{P}_1(X), W_1)$ を X 上の **random walk** といい, $\{m_x\}_{x \in X}$ などと表す.

定義 2.1 ([3]). 距離空間とその上の random walk の組 $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ に対して, 2点 $x, y \in X$ に沿った **coarse Ricci 曲率** $\kappa(x, y)$ を

$$\kappa(x, y) := 1 - \frac{W_1(m_x, m_y)}{d(x, y)}$$

で定める.

Partly supported by the Grant-in-Aid for JSPS Fellows, The Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

* e-mail: sa9m11@math.tohoku.ac.jp

距離空間 (X, d) とその上の正の Radon 測度 ν の組を**測度距離空間**と呼ぶ. 実数 K と $N > 1$ に対して関数 $s_{K,N} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s_{K,N}(t) := \begin{cases} \sqrt{(N-1)/K} \sin(t\sqrt{K/(N-1)}) & K > 0 \text{ のとき} \\ t & K = 0 \text{ のとき} \\ \sqrt{(N-1)/-K} \sinh(t\sqrt{-K/(N-1)}) & K < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める. 測度距離空間 (X, d, ν) が **Bishop-Gromov 不等式** $[BG_{K,N}]$ を満たすとは

$$\frac{\nu(B_R(x))}{\nu(B_r(x))} \leq \frac{\int_0^R s_{K,N}(t)^{N-1} dt}{\int_0^r s_{K,N}(t)^{N-1} dt}$$

が任意の $x \in X$ および任意の $0 < r \leq R \leq \sqrt{(N-1)/\max\{K, 0\}}$ で成り立つことを指す. ただし $B_r(x)$ は x を中心とする半径 r の距離球とし, $1/0 = \infty$ と約束する. 例えば Ricci 曲率が下からある数 K で一様に抑えられているような N 次元の多様体は $[BG_{K,N}]$ を満たすことが知られている. しかし $[BG_{K,N}]$ が満たされているからといって Ricci 曲率が下に有界であるとは一般には言えない.

3. 主定理

距離空間 (X, d) は任意の2点間の距離を実現するような道が存在するとき **測地的**という. 距離球 $B_r(x)$ 上の一様測度を m_x と定めると $\{m_x\}_{x \in X}$ は random walk になっている. これを **r -step random walk** と呼ぶことにする. 次が成り立つ.

定理 3.1 ([1]). 測地的な測度距離空間 (X, d, ν) が Bishop-Gromov 不等式 $[BG_{K,N}]$ を満たすとする. r -step random walk に対して coarse Ricci 曲率は

$$\inf_{x,y \in X} \kappa(x, y) \geq -2r \frac{s_{K,N}(r)^{N-1}}{\int_0^r s_{K,N}(t)^{N-1} dt}$$

を満たす.

今までは簡単なグラフなどを除いては coarse Ricci 曲率の具体的な下限は知られていなかった (Riemann 多様体上の漸近的な評価は知られていた [3]). しかし定理 3.1 により **曲率次元条件**を満たすような距離空間に対しては下限が具体的に定まる. 更に sub-Riemann 距離を持つ Heisenberg 群のように曲率次元条件を**満たさない**が Bishop-Gromov 不等式を満たすような空間に対しても下限が定まる. このような例は今まで知られていなかった.

注意 3.2. 去年の幾何学シンポジウムで講演したときには $[BG_{0,N}]$ の場合しかわかっていなかったなので今回の結果はその一般化と言える.

完備な Riemann 多様体 M 上の Ricci 曲率が下に有界であるとする. すると熱方程式の基本解 $p_t(x, y)$ が存在することが知られている. random walk m_x^t を $p_t(x, y)$ と Dirac 測度 δ_x の合成積で定義するとき, 次が成り立つ.

定理 3.3. 完備な Riemann 多様体 (M, g) の Ricci 曲率が下から定数 K で抑えられているとする. するとこのとき random walk $\{m_x^t\}_{x \in M}$ に対する coarse Ricci 曲率は

$$\inf_{x,y \in M} \kappa(x, y) \geq 1 - e^{-Kt}$$

を満たす.

定理 3.3 は Nicola Gigli 氏によって指摘された. 証明は本質的には Riemann 多様体上の熱流とエントロピーの勾配流が一致することと勾配流の超縮小性といわれるものを使う.

Random walk 付きの距離空間 $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ 上の関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対してその Laplacian Δf を

$$\Delta f(x) := f(x) - \int_X f(y) dm_x(y)$$

と定める. 次の評価を得た.

定理 3.4 ([1]). Random walk 付きの距離空間 $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ が $\inf_{x, y \in X} \kappa(x, y) \geq \kappa$ を満たすとする. またある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対してある Lipschitz 関数 f が存在して, $\Delta f = \lambda f$ を満たすとする. このとき f が定数関数でなければ $\kappa \leq \lambda \leq 2 - \kappa$ が成り立つ. 特に $\kappa > 0$ ならば $\Delta f = 0$ を満たす Lipschitz 関数は定数関数のみである.

注意 3.5. 定理 3.4 は Riemann 幾何学における Laplacian の固有値に関する Lichnerowicz の定理および Liouville 型定理に対応している. またこの結果はグラフの場合には独立に示されていた [2].

参考文献

- [1] Yu Kitabeppu, *Lower bound of coarse Ricci curvature on metric measure spaces and eigenvalues of Laplacian*, preprint.
- [2] Yong Lin and Shing-Tung Yau, *Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs*, Math. Res. Lett. **17** (2010), no. 2, 343–356.
- [3] Yann Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864.

category のオイラー標数と重心細分

野口 和範*(信州大学理学部アソシエイト研究員)

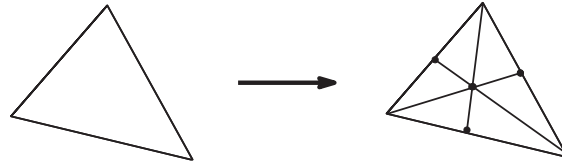
1 オイラー標数

オイラー標数とは多面体、または単体複体等に対して定義されるホモトピー不変量であり、

$$V - E + F$$

で定義される。ここで V は頂点の数、 E は辺の数、 F は面の数である。

オイラー標数の特徴の一つとして、重心細分による不変性がある。例を挙げると三角形の重心細分は以下の図の通りである。



左の三角形のオイラー標数は $3 - 3 + 1 = 1$ であるが、重心細分を取った後のオイラー標数も $7 - 12 + 6 = 1$ でオイラー標数は変わらない。

私はこの定理の category 的類似が成立するかどうかについて調べてきた。つまり問題は

category のオイラー標数は重心細分による不変性を持つか？

である。

2 category のオイラー標数

2.1 Leinster による定義

category に対するオイラー標数は Leinster(2008) による仕事が最初のものである。これによりグラフのオイラー標数や単体複体のオイラー標数など、様々な種類のオイラー標数を統一的に扱うことが可能になった。しかし category のオイラー標数はそれほどメジャーな概念ではないと思われるので、定義と性質について少し詳しく説明したいと思う。

I を finite category(object, morphism の数が有限) とし、object の集合を

$$\text{Ob}(I) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

とする。この時、 $n \times n$ -行列 A_I を (i, j) -成分が x_i から x_j への morphism の数である行列と定義する。

*E-mail : noguchi@math.shinshu-u.ac.jp

Definition 2.1. Let $\mathbf{w}, \mathbf{c}$ be row vectors of $\mathbb{Q}^n$. Then, we say $\mathbf{w}$ is a *weighting* on I if

$$A_I^t \mathbf{w} = A_I \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We say $\mathbf{c}$ is a *coweighting* on I if

$$\mathbf{c} A_I = (c_1, c_2, \dots, c_n) A_I = (1, \dots, 1).$$

Definition 2.2. Define the *Euler characteristic* $\chi_L(I)$ of I by

$$\chi_L(I) = \sum_{i=1}^n w_i$$

if I has both a weighting $\mathbf{w}$ and a coweighting $\mathbf{c}$.

以下に χ_L の特徴をいくつか挙げる。

1. category の equivalence で不変である。
2. A を finite acyclic category とした時、その分類空間 BA の空間としてのオイラー標数と A の category としてのオイラー標数は等しい。つまり $\chi_L(A) = \chi(BA)$ 。
3. χ_L は有理数に値を持つ。特に有限群 G を object が一つ、morphism を G の元で category と見なした時、 $\chi_L(G) = \frac{1}{\#G}$ である。

まず 1 についてであるが、category の equivalence というのは位相空間におけるホモトピー同値に対応するような概念である。一般に small category J (small は object, morphism の全体が集合になるの意味) に対して分類空間 BJ という位相空間 (さらに言うなら CW-complex) が構成でき、二つの small category J_1, J_2 が equivalence の時、 BJ_1, BJ_2 はホモトピー同値であるという定理がある。であるので χ_L は category の世界におけるホモトピー同値による分類をするための道具だと言える。

2 については書いてある通りであるが、ここで acyclic category の定義を与えておく。これ以降も講演でも頻繁に使う重要な概念である。

Definition 2.3. A small category $\mathcal{A}$ is an *acyclic category* if all the endomorphisms are only identity morphisms and if there exists an arrow $f : X \rightarrow Y$ such that $X \neq Y$, then there does not exist an arrow $g : Y \rightarrow X$.

3 についてであるが $\chi_L(G) = \frac{1}{\#G}$ という値については fibration を使った解釈を与えることができる。ある条件を持つ fibration $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ に対して、 $\chi(E) = \chi(F)\chi(B)$ という公式があり、これを G の分類空間 BG の fibration $G \hookrightarrow EG \rightarrow BG$ に対して適用すると、 $\chi(EG) = \chi(G)\chi(BG)$ を得る。ここで EG は可縮であるので $\chi(EG) = 1$ で、 G には離散位相が入っているので $\chi(G) = \#G$ 、よって $\chi(BG) = \frac{1}{\#G}$ という解釈が可能である。

2.2 The series Euler characteristic

その後 Berger-Leinster(2008) による series Euler characteristic χ_Σ という finite category に対する新しいオイラー標数が定義された。定義やその性質については講演の中で発表する。前述の χ_L とは A_I が逆行列をもつときに両者の値は一致するが、基本的には別の不変量である。重心細分によるオイラー標数の不変性ではこの χ_Σ が中心的な役割を果たす。

3 category の重心細分

以下に category の重心細分の定義をあげる。ただ論文の中からコピーペーストしただけで愛想も何もないが、講演の中では分かりやすく説明するつもりである。

Definition 3.1. Let $\mathcal{J}$ be a small category. Then, *the barycentric subdivision* $\text{Sd}(\mathcal{J})$ of $\mathcal{J}$ is a small category whose objects are elements of the non-degenerate nerve of $\mathcal{J}$ and the set of morphisms between X and Y is the quotient set of order-preserving maps $f : [q_X] \rightarrow [q_Y]$ satisfying $Y \circ f = X$ under the relation defined below. The equivalence relation is generated by the following relation: Given order-preserving maps $f, g : [q_X] \rightarrow [q_Y]$ satisfying $Y \circ f = X, Y \circ g = X$ respectively. Define $f \sim g$ if for any $0 \leq i \leq q_X$, $Y(\min\{f(i), g(i)\}) \rightarrow \max\{f(i), g(i)\}$ is an identity morphism.

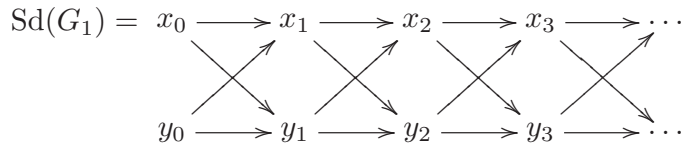
重心細分の特徴は以下のとおりである。

1. $\text{Sd}(J)$ は acyclic category で、 $\text{Sd}^2(J)$ は poset になる。
2. Sd はホモトピー型を変えない。つまり、 BJ と $B\text{Sd}(J)$ はホモトピー同値である。
3. $\text{Sd}(J)$ が finite category $\Leftrightarrow J$ が finite acyclic である。

Sd がホモトピー型を変えないのでなおさら重心細分による不変性を期待したくなる。

以下に重心細分の例を挙げる。

Example 3.2. $G_1 = \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \bullet$



Sd を取ると acyclic category になるので、図のように一方方向のみ morphism が進んでいくような category になる。

4 重心細分による不変性

この問題の難しさは重心細分を取ると元の category が finite でも、多くの場合 infinite になってしまうということである。この問題を考え始めたとき χ_L, χ_Σ という 2 種類のオイラー標数しか定義されていなかった。この 2 つのオイラー標数は finite category に対するものである。そのため重心細分を取った後の category に対して使えるオイラー標数の定義を考える必要があった。

4.1 N-filtered acyclic category のオイラー標数

私はその結果 N-filtered acyclic category に対するオイラー標数 χ_{fil} を定義した (2011)。詳しい定義は講演の中で発表するが、N-filtered acyclic category とは acyclic category で、object に morphism の流れに沿った番号付けがしてある category である。この番号付けに関して極限を取ることでオイラー標数を定義した。 $\text{Sd}(I)$ には自然に番号付けが入り、その番号付けを以下の定理の statement の中では L で表してある。

Theorem 4.1. *Let I be a finite category for which the series Euler characteristic can be defined. Then, $\chi_{\text{fil}}(\text{Sd}(I), L)$ is also defined and they coincide*

$$\chi_{\Sigma}(I) = \chi_{\text{fil}}(\text{Sd}(I), L).$$

よって χ_{Σ} と χ_{fil} という別々の不変量を使ってはいるが、この定理の意味で category のオイラー標数の重心細分による不変性は成立する。

4.2 L^2 -オイラー標数

上記 χ_{fil} を発表したのとはほぼ同時期に Fiore-Lück-Sauer(2011) によって L^2 -オイラー標数 $\chi^{(2)}$ というものが定義された。これは関数解析の手法とホモロジー代数を使って定義される。紙面の都合上正確な定義は紹介することができないが、大雑把に言うと small category J に関する projective resolution を作り、ホモロジーを取る。ここで空間のオイラー標数ならば rank の交代和を取るところであるが、ここでは von Neumann dimension という非負の実数に値を持つ dimension を取り、交代和を取る。

この L^2 -オイラー標数の特徴は、「object、morphism の有限性を仮定しない」ことである。上の重心細分の不変性では χ_{Σ} と χ_{fil} という別々の不変量を用いたが、 L^2 -オイラー標数では純粋に L^2 -オイラー標数自身が重心細分による不変性を持つかどうかという問題を考えることができる。結果、次の定理を得た。

Theorem 4.2. *For a small category I , $\chi^{(2)}(\text{Sd}(I)^{\text{op}})$ exists if and only if I is finite acyclic, in which case, we have*

$$\chi^{(2)}(\text{Sd}(I)^{\text{op}}) = \chi^{(2)}(I).$$

L^2 -オイラー標数は object, morphism の有限性を仮定しないが、 $\text{Sd}(I)$ のような形の category に対しては非常に相性が悪い。 $\text{Sd}(I)$ が finite category の時のみ、 $\chi^{(2)}(\text{Sd}(I)^{\text{op}})$ が存在し、重心細分による不変性が成立する。しかしこれならば χ_L, χ_{Σ} でも十分である。

私は L^2 -オイラー標数の定義の中の無限和を取るという部分を修正した extended L^2 -Euler characteristic $\chi_{\text{ex}}^{(2)}$ を定義し、以下の定理を得た。

Theorem 4.3. *Suppose I is a finite category. Then, there exists the extended L^2 -Euler characteristic $\chi_{\text{ex}}^{(2)}(\text{Sd}(I)^{\text{op}})$ of $\text{Sd}(I)^{\text{op}}$ if and only if its series Euler characteristic $\chi_{\Sigma}(I)$ exists, in which case, we obtain*

$$\chi_{\Sigma}(I) = \chi_{\text{ex}}^{(2)}(\text{Sd}(I)^{\text{op}}).$$

まとめると $\chi_{\text{ex}}^{(2)}$ も χ_{fil} も重心細分を取った category にたいしては、元の category の χ_{Σ} と同じである。講演では $\chi_{\text{ex}}^{(2)}$ 、 χ_{fil} の両者が何故 χ_{Σ} と同じになるのか、そしてこれからの課題について話す予定です。

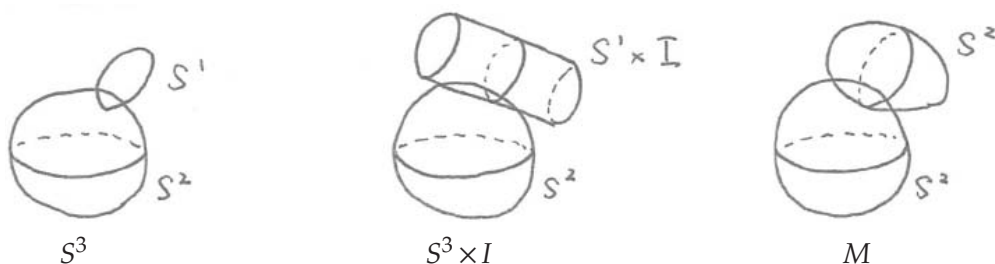
スカラー曲率一定計量の新しい例

慶應義塾大学大学院理工学研究科 大鳥羽暢彦

概要

二次元球面 S^2 上の非自明な S^2 -束の上にスカラー曲率一定の Riemann 計量を構成した. それらの計量は S^2 への射影が Riemann 沈め込みになるという性質を持ち, 等長変換群が三次元球面 S^3 を含むという意味で対称性が高い. また, それらの計量の曲率, 体積, スカラー曲率の積分, 及び Weyl 共形不変量を明示的に計算することができた. 計算結果を見ると, これらの計量の中には単なるスカラー曲率一定計量よりも“良い”計量が含まれていることが期待される.

1 構成の概略



まず, 計量を定義する 4 次元コンパクト多様体 M について述べる. 3 次元球面 $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ を閉部分群 $\{w = 0\} \cong S^1$ の右作用で割り, 商写像 $H: S^3 \rightarrow S^2$ を Hopf 束と呼ぶ. Hopf 束により S^3 は S^2 上の S^1 -束の構造を持つので, S^3 と有界閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ の直積 $S^3 \times I$ は S^2 上の $(S^1 \times I)$ -束になる. 従って, 各ファイバー $S^1 \times I$ の両端の S^1 を一点に割ることで, S^2 上の滑らかな S^2 -束 M が得られる (上図).

S^2 -束 M の定義は次のようにする. $I = [-t_b, t_b]$, $\mathring{I} = (-t_b, t_b) \subset \mathbb{R}$ とし, $S^3 \times I$ を $S^3, S^3 \times \mathring{I}, S^3$ の直和ととらえて, 両端の S^3 を Hopf 束 H で S^2 に割る写像を σ とする.

$$\sigma: S^3 \times I = S^3 \sqcup (S^3 \times \mathring{I}) \sqcup S^3 \rightarrow S^2 \sqcup (S^3 \times \mathring{I}) \sqcup S^2 =: M$$

σ によって商位相を入れたものが位相空間 M である. また, 次の図式

$$\begin{array}{ccccc} & & H \times \text{id} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S^3 \times I & \xrightarrow{\sigma} & M & \xrightarrow{\pi} & S^2 \times I \xrightarrow{\text{射影}} S^2 \end{array}$$

を可換にする写像を π とする. チャートを具体的に構成することによって M に微分構造を入れることができ, その微分構造の下で,

- (i) (π, M, S^2) は S^2 上の滑らかな S^2 -束になり,

(ii) $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ が M に開かつ稠密に埋め込まれ,

(iii) S^3 の $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ への左作用が M への滑らかな左作用に拡張する.

また, このようにして構成した C^∞ 級多様体 M は, 複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ と逆向きの複素射影平面 $\overline{\mathbb{CP}^2}$ の連結和 $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ と微分同相になる.

$S^3 \times \overset{\circ}{I}$ 上のスカラー曲率一定計量のうちで M 全体に拡張するものを探したい. S^3 上の左不変ベクトル場であって Hamilton 四元数 i, j, k に対応するものを X_1, X_2, X_3 とし, $\frac{d}{dt}$ を $\overset{\circ}{I}$ 上の標準的なベクトル場とする. $X_1, X_2, X_3, \frac{d}{dt}$ の $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ へのリフトを (同じ記号で) X_1, X_2, X_3, Y と書くことにすると, $\{X_1, X_2, X_3, Y\}$ は接空間の各点で基底をなす. ここで, 开区間 $\overset{\circ}{I}$ 上の C^∞ 級正値関数 $f_1, f_2, f_3 > 0$ をとり, $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ 上の Riemann 計量 $g = g(f_1, f_2, f_3)$ を次の式で定義する.

$$g(Y, X_i) = g(X_i, X_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad g(Y, Y) = 1 \quad g(X_i, X_i) = f_i^2$$

すなわち $\{X_1, X_2, X_3, Y\}$ が各点で直交基底をなし, 各点における長さがそれぞれ $f_1(t), f_2(t), f_3(t), 1$ である (従って特に S^3 方向に一定である) と定める.

$g(f_1, f_2, f_3)$ のスカラー曲率が $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ 上で一定であるという条件は, f_1, f_2, f_3 に関する 2 階の非線形常微分方程式で表される. また, 計量 g の局所座標表示を見ることで, $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ 上の Riemann 計量 g が M 全体に滑らかに拡張するための必要十分条件が f_1, f_2, f_3 及びそれらの導関数に関する境界条件で与えられることが分かる. このようにして, スカラー曲率一定計量の構成を常微分方程式の境界値問題に帰着する.

なお, $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ の各 S^3 に $g(f_1, f_2, f_3)$ から誘導される計量が S^3 の左作用で不変であることから, g が M 上の計量に拡張したならば, g は S^3 の左作用 (iii) で不変な計量になる. また, これらの計量の構成は Don Page による $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ 上の Einstein 計量の構成を参考にしている (*Géométrie riemannienne en dimension 4*, Arthur Besse, Exposé n° XV にその説明がある).

2 Duffing 方程式

Koszul の公式などを用いて $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ 上のリーマン計量 $g(f_1, f_2, f_3)$ の曲率テンソルが計算でき, そのスカラー曲率 μ は次の式 (1) を満たすことが分かる.

$$-\frac{\mu}{2} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{f_i''}{f_i} + \frac{f_i' f_{i+1}'}{f_i f_{i+1}} + \frac{f_i^4 - 2f_i^2 f_{i+1}^2}{f_1^2 f_2^2 f_3^2} \right\} \quad (1)$$

f_2, f_3 が同じ定数 $\nu > 0$ である場合 (これは射影 $\pi: M \rightarrow S^2$ が半径 $\nu/2$ の球面への Riemann 沈め込みになる場合に相当する) には, f_1 を f と書き直すと, 式 (1) は Duffing 方程式と呼ばれる常微分方程式

$$f'' = -\frac{1}{\nu^4} f^3 + \left(\frac{4}{\nu^2} - \frac{\mu}{2} \right) f \quad (2)$$

になる. また, この場合には $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ 上の計量 $g(f, \nu, \nu)$ が M 上の計量に拡張することと f が境界条件

$$f(-t_b) = f(t_b) = 0, \quad f'(-t_b) = 1, f'(t_b) = -1 \quad (3)$$

を満たすことは同値だということが分かる. 従って, スカラー曲率一定計量の構成が境界値問題 (2), (3) の正値解を探すことに帰着される.

第一積分を用いてこの境界値問題の解の存在と一意性を保証することで、スカラー曲率一定計量の存在を保証する。以上の議論から次を得る。

定理 1 (O.) 任意の実数 μ と任意の正数 $\nu > 0$ に対し、 M 上の Riemann 計量 $g(\mu, \nu)$ であって次の (a), (b), (c) を満たすものが存在する。

- (a) g のスカラー曲率は一定で、 μ に等しい。 g は Einstein 計量ではない。
- (b) S^2 -束の射影 $\pi: M \rightarrow S^2$ は半径 $\nu/2$ の球面への Riemann 沈め込みである。
- (c) S^3 が (M, g) に等長的に作用する。

また、 $g(\mu, \nu)$ と $g(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ が等長同型ならば、 $\mu = \tilde{\mu}$ かつ $\nu = \tilde{\nu}$ である。

更に、第一積分から解の陰関数表示が得られるので、その表示を利用すると、解 f に関する定積分

$$\int_{-t_b}^{t_b} f^{2n+1} dt, \quad \int_{-t_b}^{t_b} (f')^2 f dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

がそれぞれ μ, ν に関する初等関数で表されることが分かる。これらの定積分が、体積や Weyl 共形不変量などの積分不変量を計算するための鍵となる。

3 体積と Weyl 共形不変量

M の体積と稠密部分多様体 $S^3 \times \overset{\circ}{I} \subset M$ の体積は一致する。また、 $S^3 \times \overset{\circ}{I}$ の各 S^3 の体積は標準的な S^3 の体積 $2\pi^2$ の $\nu^2 f(t)$ 倍である。従って M の体積は

$$\text{Vol}(M, g(\mu, \nu)) = 2\pi^2 \nu^2 \int_{-t_b}^{t_b} f dt$$

と表され、(f の積分は計算できるので) μ, ν に関する初等関数で書けることが分かる。更に、 g のスカラー曲率は一定なので、Einstein-Hilbert 汎関数^{*1} による g の値は $\mu \sqrt{\text{Vol}(M, g(\mu, \nu))}$ であり、こちらも初等関数で表される (計算結果は後述する)。

4 次元多様体の Weyl 共形不変量 $W \geq 0$ は Weyl 共形テンソルの 2 乗ノルムの積分値である。多様体が共形平坦であること (すなわち計量が局所的には Euclid 計量の関数倍になっていること) と W が消えることは同値であり、Weyl 共形不変量は多様体がどの程度共形平坦でないかということを定量的に測る不変量だと言える。

Riemann 多様体 $(M, g(\mu, \nu))$ の Weyl 共形テンソルを計算すると、その 2 乗ノルムは

$$\frac{48}{\nu^4} (f')^2 + \frac{12}{\nu^8} f^4 - \frac{4\mu}{\nu^4} f^2 + \frac{\mu^2}{3} \quad (4)$$

と表され、 S^3 方向に一定であることが分かる。ゆえに、その Weyl 共形不変量 $W_{g(\mu, \nu)}$ を求めるには、(4) に各 S^3 の体積 $2\pi^2 \nu^2 f$ をかけて区間 I 上で積分すればよい。従って、 $(f')^2 f, f^5, f^3, f$ の定積分を計算することで Weyl 共形不変量が求まる。

上に述べた計算を実際に行い、次の結果を得た。

^{*1} 4 次元の場合、スカラー曲率の積分を体積の平方根で割ったもの: $\int_M \mu_g / \sqrt{\text{Vol}(M, g)}$. 多様体 M に定義される Riemann 計量全体の空間上の汎関数であり、その臨界点は Einstein 計量である。

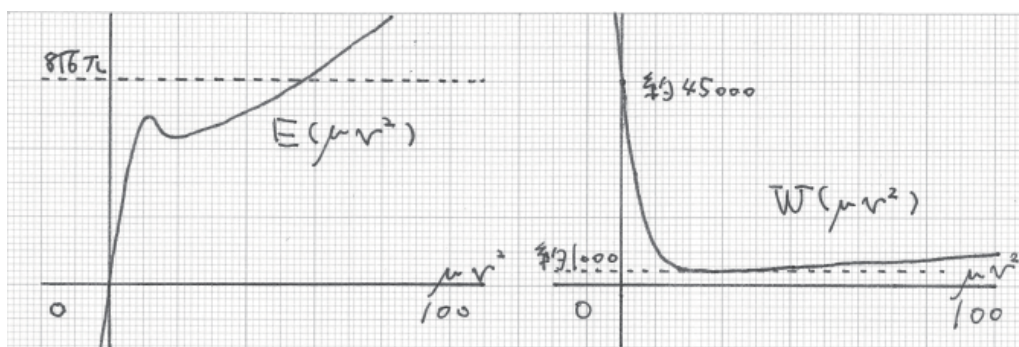
定理 2 (O.) Riemann 計量 $g(\mu, \nu)$ の体積 $\text{Vol}(\mu, \nu)$, Einstein-Hilbert 汎関数の値 $E(\mu, \nu)$, 及び Weyl 共形不変量 $W(\mu, \nu)$ はそれぞれ次のように表される.

$$\text{Vol}(\mu, \nu) = 2\sqrt{2}\pi^2\nu^4 \text{Arccot}\left(\frac{\mu\nu^2 - 8}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$E(\mu, \nu) = \sqrt[4]{8}\pi\mu\nu^2 \sqrt{\text{Arccot}\left(\frac{\mu\nu^2 - 8}{2\sqrt{2}}\right)}$$

$$W(\mu, \nu) = 480\pi^2 - 76\pi^2\mu\nu^2 + \left\{\frac{59\mu^2\nu^4}{3} - 272\mu\nu^2 + 1032\right\} \sqrt{2}\pi^2 \text{Arccot}\left(\frac{\mu\nu^2 - 8}{2\sqrt{2}}\right)$$

$\mu\nu^2 = \tilde{\mu}\tilde{\nu}^2$ ならば $g(\mu, \nu)$ と $g(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ は (本質的には) 定数倍を除いて一致するため, $E(\mu, \nu)$ と $W(\mu, \nu)$ は $\mu\nu^2$ にのみ依存する. 従って E と W のグラフが次のように描ける.



このグラフから, この Riemann 計量の族は互いに共形同値でない計量を 1 パラメータ分含むということが分かる. なぜなら共形不変量 W が異なるかもしくはスカラー曲率 μ の符号が異なれば共形同値ではないからである. また, Einstein-Hilbert 汎関数の値 (すなわち山辺汎関数^{*2} の値) が S^4 の山辺共形不変量 $8\sqrt{6}\pi$ 以上ならば山辺計量ではないので, $\mu\nu^2$ の値が大きい計量は山辺計量ではないということも分かる.

4 今後の課題

$g(\mu, \nu)$ のうちでスカラー曲率 μ が 0 以下の計量は全て山辺計量であることから, $\mu\nu^2$ の値が十分小さい計量もまた山辺計量である可能性がある. その判定のために, ラプラシアン^{*}の第一固有値を求めることによって, これらの計量のうちで山辺汎関数の安定な臨界点になっているものを決定する必要がある. また, $E(\mu\nu^2)$, $W(\mu\nu^2)$ の臨界点にあたる計量はそれ以外の計量よりも特に“良い”性質を持っていることが期待されるので, 例えば Bach テンソルの挙動を見るなどして, それらの計量についても詳しく調べたい.

定理 1 において述べた計量 $g(\mu, \nu)$ の性質 (b), (c) はこれらの計量の特徴づけるのではないかと考えている. つまり, 性質 (b), (c) を持つ M 上のスカラー曲率一定計量は, 等長同型を除いて私の構成した計量 $g(\mu, \nu)$ に限ると予想している. その根拠の一つは, 等長同型を除くと, S^3 上の左不変計量は左不変ベクトル場 X_1, X_2, X_3 が直交している場合で全て尽くされるということである.

^{*2} Einstein-Hilbert 汎関数の, ある共形類への制限. 山辺汎関数の臨界点は共形類の中のスカラー曲率一定計量である. 山辺汎関数の最小点は山辺計量と呼ばれ, 単なるスカラー曲率一定計量と区別される. 山辺汎関数の (一つの共形類における) 最小値は山辺共形不変量と呼ばれる.

ミルナー束の組が誘導するトーラスへの可微分写像の特異点

九州大学 数理学府 隅田大貴

1. INTRODUCTION

n 変数複素多項式 f が $f(0) = 0$ を満たすとする。 $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = \varepsilon\}$, $K_f = \{z \in S_\varepsilon \mid f(z) = 0\}$ 及び $S^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ とする。正数 ε が十分小さければ、可微分写像 $\varphi_f = f/|f| : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1$ の特異点は存在せず、 φ_f は Milnor ファイブレーションと呼ばれる S^1 上の局所自明ファイブレーションとなる [1]。同様に $g(0) = 0$ を満たす n 変数複素多項式 g に対して、 $K_g = \{z \in S_\varepsilon \mid g(z) = 0\}$, $\varphi_g = g/|g| : S_\varepsilon \setminus K_g \rightarrow S^1$ とする。また $K_{fg} = \{z \in S_\varepsilon \mid f(z)g(z) = 0\}$ とする。ここで写像 φ_f の拡張として次の写像を考える。

$$\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow S^1 \times S^1 = T^2, \quad \Phi(z) = \left(\frac{f(z)}{|f(z)|}, \frac{g(z)}{|g(z)|} \right)$$

この写像はどのように小さい $\varepsilon > 0$ についても Φ が特異点を持つことがある。Milnor ファイブレーションや Hamm[2] などの例に反して、原点のいくら近くでもファイブレーションとならないことは、非常に興味深い。そのため本講演では Φ の特異点について得られた結果を紹介する。

2. PRELIMINARIES

結果を述べるための準備を行う。まずは可微分写像の特異点の定義である。

Definition 2.1 (特異点). $f : M \rightarrow N$ を可微分多様体間の可微分写像とし、 $d_z f : T_z M \rightarrow T_{f(z)} N$ を f の微分写像とする。このとき $\text{rank} d_z f < \min \{\dim M, \dim N\}$ ならば $z \in M$ は f の**特異点**という。

特異点にはいくつも型があるが、本講演で扱う比較的調べやすい折り目特異点と折り目写像の定義を述べる。

Definition 2.2 (折り目特異点, 折り目写像). $f : M \rightarrow N$ ($p = \dim M \geq \dim N = q$) を可微分多様体間の可微分写像とし、 $z \in M$ を f の特異点とする。 $z \in M$ の周りの M の局所座標 $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : U_M \rightarrow \mathbb{R}^p$ と $f(z) \in N$ の周りの N の局所座標 $y = (y_1, y_2, \dots, y_q) : U_N \rightarrow \mathbb{R}^q$ が存在して、

$$\begin{aligned} y_j \circ f &= x_j \quad (j = 1, 2, \dots, q-1), \\ y_q \circ f &= -x_q^2 - \dots - x_{q+\lambda-1}^2 + x_{q+\lambda}^2 + \dots + x_p^2 \end{aligned}$$

を満たすとき、 $z \in M$ は f の指数 λ ($0 \leq \lambda \leq p - q + 1$) の**折り目特異点**であるという。 f の特異点が折り目特異点のみであるとき、 f は**折り目写像**という。

話を Milnor ファイブレーション φ_f に戻す。2つのベクトルが直交することは、それらのベクトルの Hermite 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の実部が 0 であるということで記述できる。

そのため $T_z(S_\varepsilon \setminus K_f)$ は、 $\operatorname{Re} \langle v, z \rangle = 0$ を満たすベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ 全体に一致する。 n 変数多項式 f に対し、 $\operatorname{grad} \log f$ を

$$\operatorname{grad} \log f = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$$

で定義する。ただし上付き線は複素共役を意味する。このとき Milnor より、実 $2n-2$ 次元多様体である φ_f のファイバー F の点 $z \in F$ における接空間 $T_z F$ は、

$$\{v \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Re} \langle v, z \rangle = \operatorname{Re} \langle v, i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle = 0\}$$

に一致することが知られている。

本講演で扱う多項式である擬斉次多項式と斉次多項式の定義を行う。

Definition 2.3 (擬斉次多項式, 斉次多項式). n 変数多項式 f について

$$\sum_{j=1}^n \frac{z_j}{a_j} \frac{\partial f}{\partial z_j} = f$$

を満たすような正の有理数ベクトル $w_f = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ が存在するとき、 f は weight w_f の**擬斉次多項式**であるという。特に $a_1 = a_2 = \dots = a_n = m$ のとき、 f は次数 m の**斉次多項式**であるという。

3. RESULTS

これらの定義に則って次の結果を得た。

Lemma 3.1. $z \in S_\varepsilon \setminus K_{fg}$ が Φ の特異点であるための必要十分条件は、3つのベクトル $z, i \operatorname{grad} \log f(z), i \operatorname{grad} \log g(z)$ が $\mathbb{R}$ 上線形従属になることである。

Φ は十分小さい ε について、特異点を持つ場合と持たない場合がある。特異点を持たない場合として、Lemma 3.1 より次の結果を得た。

Corollary 3.2. $f, g : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ を $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m], g \in \mathbb{C}[z_{m+1}, \dots, z_n]$ とする。 $\varepsilon > 0$ が十分小さければ、 Φ の特異点は存在しない。

一般の多項式対 f, g について Φ の特異点集合を記述することは容易ではない。そこで考える多項式を擬斉次多項式に限定する。 f, g の weight に条件をつけると、Lemma 3.1 から次が従う。

Corollary 3.3. $f, g : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ がある有理数 s について $w_g = s w_f$ を満たす weight w_f, w_g の擬斉次多項式対とする。このとき Φ の特異点集合は

$$\left\{ z \in S_\varepsilon \setminus K_{fg} \mid \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial g}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial g}{\partial z_j} = 0 \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

で定義される集合に一致する。

Corollary 3.3 より Φ の特異点が存在する場合として、次の結果を得た。

Proposition 3.4. $f, g : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ が次数 m_f, m_g の斉次多項式対の場合、 Φ の特異点集合は $S_\varepsilon \setminus K_{fg}$ 全体か、高々 $m_f + m_g - 2$ 個の円周になる。

Corollary 3.3 より得られた Φ の特異点について、 Φ の特異点および特異値の周りの局所座標を構成することにより、その特異点が折り目特異点になるための必要十分条件を得た。以下、右上付き T は行列の転置を表すこととする。さて、本講演の主結果を述べる。

Theorem 3.5. $f, g : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ がある有理数 s について $w_g = sw_f$ を満たす weight w_f, w_g の擬斉次多項式対とする。実 $2n - 2$ 次元線形空間

$$\{v \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Re} \langle v, z \rangle = \operatorname{Re} \langle v, i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle = 0\}$$

の実基底を並べた $n \times (2n - 2)$ 行列を V とする。 Φ の特異点 z が折り目特異点であるための必要十分条件は

$$\det \operatorname{Re} (V^T \operatorname{Hess}_z (si \log f(z) - i \log g(z)) V) \neq 0$$

を満たすことである。

Φ の特異点に条件を付与することで、Theorem 3.5 よりその特異点が折り目特異点であるための必要十分条件を得た。またその場合折り目特異点の指数も決定できた。

Corollary 3.6. $f, g : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ がある有理数 s について $w_g = sw_f$ を満たす weight w_f, w_g の擬斉次多項式対とする。 z を Φ の特異点で、 z と $i \operatorname{grad} \log f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上線形従属になるものとする。複素 $n - 1$ 次元線形空間

$$\{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, z \rangle = 0\}$$

の複素基底を並べた $n \times (n - 1)$ 行列を W とする。 z が Φ の折り目特異点であるための必要十分条件は

$$\det (W^T \operatorname{Hess}_z (si \log f(z) - i \log g(z)) W) \neq 0$$

を満たすことである。

Proposition 3.7. $f, g : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ がある有理数 s について $w_g = sw_f$ を満たす weight w_f, w_g の擬斉次多項式対とする。 z と $i \operatorname{grad} \log f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上線形従属になる Φ の折り目特異点 z の指数は $n - 1$ である。

Corollary 3.6 の条件を満たす Φ の特異点の例を 2 つ紹介する。その証明手順は Lemma 3.1 より Φ の特異点集合を決定し、Corollary 3.3 より各々の特異点が折り目特異点かどうかを判別している。

Proposition 3.8. 多項式 $f = \sum_{j=1}^n c_j z_j^m, g = \sum_{k=1}^n d_k z_k^m : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ は、任意の j, k について $c_j, d_k \neq 0$ 、任意の $j \neq k$ について $c_j d_k - c_k d_j \neq 0$ を満たすとする。このとき $m = 2$ ならば Φ は折り目写像であり、 $m > 2$ ならば Φ の特異点は存在しそれは折り目特異点ではない。

Proposition 3.9. 多項式 $f, g : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ を $f = z_1^m + z_2^m, g = z_1 z_2$ とする。このときどのような $m \geq 2$ と $\varepsilon > 0$ についても Φ は折り目写像である。

REFERENCES

- [1] H.Hamm, Lokale topologische Eigenschaften komplexer Raume, Math. Ann. **191**, 1971, 235-252.
- [2] J.Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Maths. Studies **61**, 1968, Princeton Univ. Press.

リーマン多様体上の最適化アルゴリズムおよび その行列計算への応用

佐藤 寛之*

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

1 リーマン多様体上の最適化問題の例

まず, リーマン多様体上の最適化問題を考える動機付けのために, 例となる問題を 2 つ紹介する.

p, n を $p \leq n$ なる整数とし, A を $n \times n$ 対称行列とする. グラスマン多様体

$$\begin{aligned}\text{Grass}(p, n) &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | X^2 = X, X^T = X, \text{rank}(X) = p\} \\ &= \{X = YY^T | Y \in \text{St}(p, n)\}\end{aligned}\tag{1.1}$$

上の, 次のレイリー商最小化問題の解は, A の小さい方から p 個の固有値に属する固有空間である.

問題 1.1.

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & F(X) := \text{tr}(AX), \\ \text{subject to} \quad & X \in \text{Grass}(p, n).\end{aligned}$$

次に, $p \leq n \leq m$ とし, $N = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$, $\mu_1 > \dots > \mu_p$ とする. 次の $\text{St}(p, m) \times \text{St}(p, n)$ 上の最適化問題の解を (U_*, V_*) とすると, U_*, V_* の列ベクトルはそれぞれ, $m \times n$ 行列 A の大きい方から p 個の特異値に属する左特異ベクトル, 右特異ベクトルである.

問題 1.2.

$$\begin{aligned}\text{maximize} \quad & G(U, V) := \text{tr}(U^T A V N), \\ \text{subject to} \quad & (U, V) \in \text{St}(p, m) \times \text{St}(p, n).\end{aligned}$$

2 ユークリッド空間における最適化手法の多様体への拡張

次のユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ における制約条件なしの問題を考える.

* hsato@amp.i.kyoto-u.ac.jp

問題 2.1.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x), \\ & \text{subject to} && x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

最小化すべき関数 f は目的関数と呼ばれる．制約条件なしの最適化問題に対する手法としては，最急降下法，ニュートン法などが知られている [5] が，これらの手法は次のアルゴリズムのように共通する構造を持つ．

Algorithm 1 $\mathbb{R}^N$ における制約なし最適化手法

- 1: 初期点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ を選ぶ．
- 2: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**
- 3: 探索方向 $\eta_k \in \mathbb{R}^N$ とステップサイズ $t_k > 0$ を求める．
- 4: 次の点 x_{k+1} を，

$$x_{k+1} := x_k + t_k \eta_k \tag{2.1}$$

によって定める．

- 5: **end for**

こうした制約条件なしの問題に対する最適化手法は，制約条件付きの問題に対しては，一般には用いることができない．しかし，制約条件を満たす点全体の集合 M が滑らかな多様体である場合には，次の問題 2.2 のように，多様体 M における制約条件なしの最適化問題 であると見なすことができる．

問題 2.2.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x), \\ & \text{subject to} && x \in M. \end{aligned}$$

このような多様体上の制約条件なしの最適化問題の解法アルゴリズムは，アルゴリズム 2 を多様体上に拡張することで導出される．まず，探索方向 η_k は $T_{x_k}M$ 内の接ベクトルとなるように選ぶことにする．そして，多様体上では一般には加法が定義されず，更新の式 (2.1) は意味をなさないから，加法を別の演算に取り替える必要がある．そこで， $\gamma(0) = x_k, \dot{\gamma}(0) = \eta_k$ なる M 上の曲線 γ に沿って次の点 x_{k+1} を探索する．そのために，「探索をする上で妥当な」曲線を定める写像 $R : TM \rightarrow M$ が見つければ， $R_x := R|_{T_x M}$ として， $x_{k+1} := R_{x_k}(t_k \eta_k)$ なる更新式を得られる．そのための写像 R をレトラクションと呼ぶ．正確には，レトラクションの定義は次の通りである [1, 2]．

定義 2.1. 写像 $R : TM \rightarrow M$ が以下の 2 つの性質を満たすとき， R を M 上のレトラクションという． R_x を， R の $T_x M$ への制限とする．

1. $R_x(0_x) = x$. ここで， 0_x は $T_x M$ の零元を表す．
2. $T_{0_x} T_x M \simeq T_x M$ という同一視の下で， R_x は
$$DR_x(0_x) = \text{id}_{T_x M}$$
を満たす．ここで， $DR_x(0_x)$ は R_x の 0_x における微分である．

たとえば、 M がリーマン多様体であれば、指数写像を用いて

$$R_x(\xi) := \text{Exp}_x(\xi), \xi \in T_x M \quad (2.2)$$

と定義すると、 R_x から定まる $R: TM \rightarrow M$ はレトラクションである。

ステップサイズ $t_k > 0$ の決め方としては、たとえばアルミホの方法がある [1, 3].

レトラクション R を用いることにより、リーマン多様体上の最適化アルゴリズムは次のように書かれる。

Algorithm 2 リーマン多様体 M における制約なし最適化手法

1: 初期点 $x_0 \in M$ を選ぶ.

2: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**

3: 探索方向 $\eta_k \in T_{x_k} M$ とステップサイズ $t_k > 0$ を求める.

4: 次の点 $x_{k+1} \in M$ を,

$$x_{k+1} := R_{x_k}(t_k \eta_k) \quad (2.3)$$

によって定める.

5: **end for**

各最適化手法を特徴づけるのは、探索方向 $\eta_k \in \mathbb{R}^N$ とステップサイズ $t_k > 0$ の決め方である。たとえば最急降下法では探索方向 $\eta_k \in T_{x_k} M$ を $\eta_k = -\text{grad } f(x_k)$ によって求める。ここで、 grad はリーマン多様体 (M, g) の計量 g に関する勾配を表す。ニュートン法では η_k をニュートン方程式

$$\text{Hess } f(x_k)[\eta_k] = -\text{grad } f(x_k) \quad (2.4)$$

の解として求める。ここで、 Hess は M 上のレヴィ・チビタ接続 ∇ から定まるヘシアンである。

本講演では、多様体上の最急降下法やニュートン法についての一般論を述べた後、グラスマン多様体上のレイリー商最小化問題（問題 1.1）を詳しく論じる。また、2つのシュティーフェル多様体上の最適化問題（問題 1.2）についても議論する。

3 グラスマン多様体上の最適化問題

n, p を、 $n \geq p$ を満たす整数とする。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における p 次元部分空間全体からなる集合と、 $n \times p$ の直交行列全体からなる集合をそれぞれ $\text{Grass}(p, n)$, $\text{St}(p, n)$ と表す。これらはそれぞれ多様体の構造を持ち、グラスマン多様体、シュティーフェル多様体と呼ばれる。

グラスマン多様体 $\text{Grass}(p, n)$ は、

$$\begin{aligned} \text{Grass}(p, n) &\simeq \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | X^2 = X, X^T = X, \text{rank}(X) = p\} \\ &= \{X = YY^T | Y \in \text{St}(p, n)\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

と見なすこともでき、我々はこの立場を採用して最適化アルゴリズムを導く。

グラスマン多様体上での最適化に必要な事柄は、レトラクション R 、目的関数 F の勾配 $\text{grad } F$ 、ヘシアン $\text{Hess } F$ などである。

レトラクションは前節で述べたように、指数写像を用いて定義することができ、指数写像の形は、グラスマン多様体上の点 X から $\xi \in T_X \text{Grass}(p, n)$ の方向に伸びる測地線に対する測地線方程式を解くことで求められる。また、QR 分解を用いて

$$R_X(\xi) = \text{qf}((I + \xi)Y) (\text{qf}((I + \xi)Y))^T, \xi \in T_X \text{Grass}(p, n) \quad (3.2)$$

によって定義される R もレトラクションとなる。ここで、 $\text{qf}((I + \xi)Y)$ は、 $(I + \xi)Y$ の QR 分解

$$(I + \xi)Y = QR, \quad Q \in \text{St}(p, n), R \text{ は対角成分が正の上三角行列} \quad (3.3)$$

における Q を表す.

また, 目的関数 $F : \text{Grass}(p, n) \rightarrow \mathbb{R}$ をグラスマン多様体上の滑らかな関数とすると, $X \in \text{Grass}(p, n)$ における F の勾配は,

$$\text{grad } F(X) = F_X X + X F_X - 2X F_X X$$

であり, $X \in \text{Grass}(p, n)$ における F のヘシアン $\text{Hess } F(X)$ は $T_X \text{Grass}(p, n)$ 上の線形変換で, $\xi \in T_X \text{Grass}(p, n)$ に対して

$$\text{Hess } F(X)[\xi] = 2 \text{sym} \left(X \text{sym}(F_{XX}[\xi] + 4F_X \xi X - 2F_X \xi) (I_n - X) \right)$$

のように作用する. ここで, F_X は (i, j) 成分が $\frac{\partial F}{\partial X_{ij}}(X)$ であるような $n \times n$ 行列であり, $F_{XX}[\xi]$ は (i, j)

成分が $\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial X_{ij} \partial X_{kl}} \xi_{kl}$ であるような $n \times n$ 行列である.

これらを用いて最適化アルゴリズムを具体的に実装することができる. 特にグラスマン多様体のレイリー商最適化問題に対しては, 最急降下法とニュートン法を組み合わせたハイブリッドな方法を用いると, 大域的最適解に大域的に収束する点列を得られる. 講演では, この点を詳しく論じるとともに, 問題 1.1 に現れる行列 A が縮退する固有値を持つときの問題の性質についても論じる.

4 2つのシュティーフェル多様体上の積多様体上の最適化問題

問題 1.2 についても同様に最適化アルゴリズムを導出するが, この問題に対して最急降下法を適用して得られる点列の収束は非常に遅い. また, ニュートン法についても, ニュートン方程式がかなり複雑になりそのまま解くのは困難である. 講演ではこうした困難について詳しく解説するとともに, その解決策について論じる.

参考文献

- [1] P.-A. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre, *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [2] R. L. Adler, J. P. Dedieu, J. Y. Margulies, M. Martens, and M. Shub, Newton's method on Riemannian manifolds and a geometric model for the human spine, *IMA J. Numer. Anal.*, **22**(3):359-390, July 2002.
- [3] L. Armijo, Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific J. Math.*, **16**:1-3, 1966.
- [4] A. Edelman, T. A. Arias, and S. T. Smith, The geometry of algorithms with orthogonality constraints, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **20**(2):303-353, 1998.
- [5] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 1999.

カンドルと低次元トポロジー

野坂 武史 (Takefumi Nosaka) ^{*1}

京都大学数理解析研究所 博士課程3回生

カンドルとは或る代数系であり、おおよそ等質空間 $H \setminus G$ に入る良い二項演算の事である。カンドルは、余次元2の実多様体の組の研究に相性がよい。特に筆者は、(曲面) 結び目、閉3次元多様体、4次元レフシツ束への、カンドルの適用法を幾らか進展させた [N3, N4, N6, HN]。またカンドル X の分配則が四角形と相性がよく、群ホモロジーに類似物として、カンドルの分類空間 (ラック空間という) が知られる。筆者はそのコホモロジー群 [N2, N7] やホモトピー群 [N1, N4] を幾つか計算し、位相幾何的にもささやかな応用を与えた [N5]。筆者の研究目標として、カンドルを使った議論を数学の色々な (特に幾何・トポロジー) 分野に広げ応用される事を夢見ている。本講演では、カンドルと分類空間と適用法について紹介する。本稿では、その講演の内容を概説する。

本稿の構成は以下とした: 節1でカンドルと例を紹介する。節2ではカンドルの分類空間 $BX[\text{FRS}]$ を紹介し、その空間のホモトピー群 $\pi_*(BX)$ が結び目との関わりを概説する。3節では筆者の仕事を大雑把ながらに、列挙する。

1 カンドルの定義と例

定義 1.1 ([Joy]). **カンドル**とは、集合 X と二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ で次を条件を満たすものをいう。

- (QI) 任意の $x \in X$ に対して、 $x * x = x$ 。
- (QII) 任意の $x, y \in X$ に対して唯一の元 $z \in X$ が存在して $x = z * y$ を満たす。
- (QIII) 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ 。

この定義は少し解りづらいため、今からカンドルの例を提示する。

例 1.2. [I] (アレクサンダーカンドル) M を $\mathbb{Z}[T^\pm]$ 加群とする。このとき $x * y = Tx + (1 - T)y$ とすると M はカンドル構造を持つ。特に、有限体 $\mathbb{F}_q$ と元 $\omega \in \mathbb{F}_q$ に対し、 $X = \mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$ の形がもっとも扱い易い。

[II] (共役カンドル) G を群とする。任意の $x, y \in G$ に対して $x * y = y^{-1}xy$ とカンドル構造を入れることが出来る。

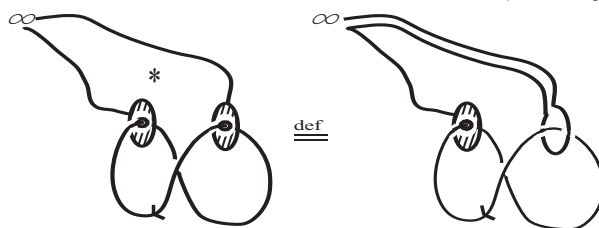
[III] (等質空間上のカンドル構造) $H \subset G$ を群の組とし、中心化群 $Z_H(G)$ の元 z_0 を固定する。このとき、左商集合 $X = H \setminus G$ に、二項演算を $[x] * [y] := [z_0xy^{-1}z_0y]$ ($x, y \in G$) として定義する。すると組 $(X, *)$ はカンドルになる。

逆に、カンドルが“連結”である時、この例のカンドルの1つに同型である事が知られている。

[IV] (基本カンドル) $N \subset M$ を向付き実多様体の余次元2の組とする。このとき、**基本カンドル** $Q(M, N)$ を、次のラケット状のものからの連続写像のホモトピー類で定義する。

$$Q(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{ラケット状の図} \rightarrow (M, N, \{\infty\}) \} / \text{ホモトピー}.$$

$Q(M, N)$ には自然にカンドル構造が下図のように定義される (詳細は [Joy] など参考)。



^{*1} E-mail address: nosaka@kurims.kyoto-u.ac.jp

結び目を考える．即ち円 S^1 から球面 S^3 への埋込み K である．すると基本カンドル $Q(S^3, K)$ は結び目を分類する：

事実 1.3 ([Joy]). 結び目が K が他の結び目 K' と (または $-K^*$ と) イソトピーで繋がる必要十分条件は, 或るカンドル 同型 $Q(S^3, K) \cong Q(S^3, K')$ が存在する事である

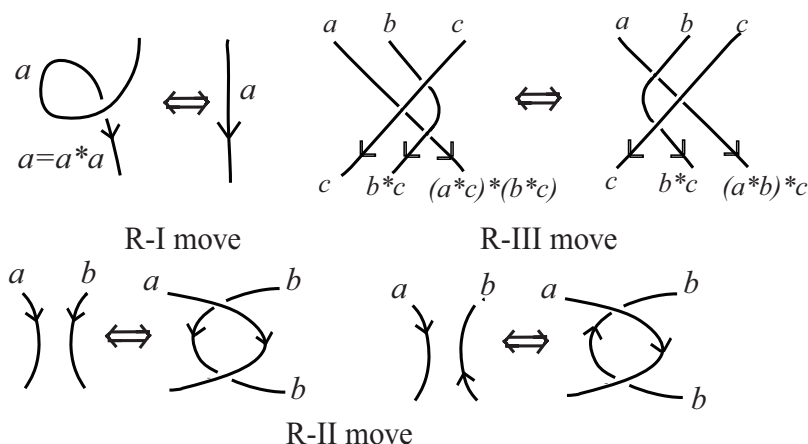
よって, この基本カンドル $Q(S^3, K)$ を研究する事は, 結び目の分類の手段として有効である．しかし基本カンドルは有限表示の可算な代数系なので直接は調べるのは難儀である．しかし調べる手段を一つ紹介する：

定義 1.4. D を絡み目図式とし, X をカンドルとする． X -カラリングとは射像 $C: \{\text{over arc}\} \rightarrow X$ のことで図式 D の各交点に対して次を満たすものをいう． X -カラリング全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書く事にする．

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \gamma \end{array} \quad C(\gamma) = C(\alpha) * C(\beta)$$

事実 X をカンドルとする． D, D' を絡み目 $L \subset S^3$ の二つの図式とする． D と D' がライデマイスター移動で移りあうとき自然な全単射 $\text{Col}_X(D) \simeq \text{Col}_X(D')$ が或る．自然な全単射 $\text{Hom}_{\text{Qnd}}(Q(S^3, L, X) \simeq \text{Col}_X(D)$ がある．

この前半の証明は, 下図のライデマイスター移動による X -カラリングの変化を見る事で, 全単射を構成する事である．カンドルの定義がうまく効いている事が見て取れる．



この事実の云わんとする事は, X -カラリングとは他の X を使って Q_K を相対的に調べる事をいう．しかしながら, 代数トポロジーならばさらに悟る事に, カンドル X のコホモロジー (特性類) をその全単射 $\text{Col}_X(D) \simeq \text{Col}_X(D')$ から引き戻す事で, さらに深い情報を得たいと思ってしまう．その1つの答えが次節のラック空間である．

2 ラック空間とその2次ホモトピー群

カンドル X に対して, ラック空間 BX の定義 [FRS] を復習した後, そのホモトピー群 $\pi_2(BX)$ と結び目の関連を述べる．本稿ではその BX に関し 3-セルまでの定義を紹介する (本来は“四角-sets”の幾何実現で構成された)．

定義 2.1. カンドル X に対して, **ラック空間**とは次で定義される CW 複体である．

- BX の 1-スケルトンを X で添え字づけられた円 S^1 の wedge 和とする．
- 1-スケルトン $\cup \{(a, b)\text{-スケルトン} \mid (a, b) \in X^{\times 2}\}$ を BX の 2-スケルトンとする．ここで (a, b) -セルとは次のような正方形の 2-セルであり, 下図の各辺を 1-スケルトンに添え字が合うように貼る．
- 2-スケルトン $\cup \{(a, b, c)\text{-スケルトン} \mid (a, b, c) \in X^{\times 3}\}$ を BX の 3-スケルトンとする．ここで (a, b, c) -セルとは次のような 3-セルである：即ち, 上面が (a, b) -セルで, 高さ方向の辺が全て $c \in X$ でラベルされたものである．公理 (QIII) から下図の各面が (a, b) 型の 2-セルになっている (それはカンドルの定義の分配則から well-defined である)．添え字に合わせて各面をその 2-スケルトンに貼った．

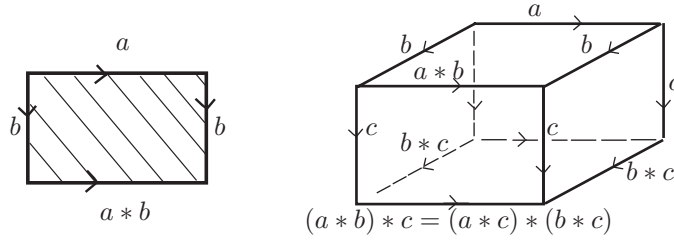
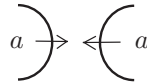


図1 (a, b) でラベルされた 2-セルと, (a, b, c) でラベルされた 3-セル.

さて, この空間 BX のホモトピー群 $\pi_2(BX)$ に関する事実 2.2 を言及する. まず次の商集合を考えよう:

$$\Pi_2(X) := \{D \text{ の } X\text{-カラリング } C \mid D: \text{結び目図式}\} / \text{ライデマイスター移動, コンダルダンス移動}$$

ここで**コンコルダンス移動**とは次の図のような同じカラーを持つ近いアークの対応である. するとこの集合 $\Pi_2(X)$ は, カラリングの disjoint union をとる事でアーベル群構造を持つ (cf. ボルディズム群).



次に, 準同型 $\Pi_2(X) \rightarrow \pi_2(BX)$ を定義する. D を絡み目図式とし, C をその X -カラリングとする. 絡み目図式を S^2 上の図式と思うと, D の双対分割は, S^2 の四角によるセル分割を与える. その 2 セルらの辺に, 自然に X でラベルが付けられる. すると各 2 セルを BX の 2-スケルトンらに対応させる事が出来る. それは S^2 上に全体で貼り合い, セル写像 $\xi_C: S^2 \rightarrow BX$ ができた. そのホモトピー類はライデマイスター・コンコルダンス移動に因らないので (BX の 3-セルの定義より), ほしい準同型準同型 $\Pi_2(X) \rightarrow \pi_2(BX)$ を定義できた. さらに知られている事に

定理 2.2 ([FRS]). その準同型は同型 $\pi_2(BX) \cong \Pi_2(X)$ を誘導する.

この事実より, 群環 $\mathbb{Z}[\pi_2(BX)]$ に値をもつ結び目の不変量はたやすく作れる (厳密な定義は [N1] に記した). ホモトピー群はわかりづらいので, コホモロジー群に落としたものも有用である (**カンドルコサイクル不変量**という)[CJKLS, CEGS] (他に参考文献をもっと提示すべきだが, 紙幅の都合上略します).

3 筆者の結果の紹介

さて, このようにホモトピー群 $\pi_2(BX)$ は結び目と関連をもち, ある種のボルディズム群である. 代数トポロジーではボルディズム群を調べるとご利益が多くある. その見地から著者いくらか結果を得たので紹介する.

- ($\pi_2(BX)$ と $\pi_3(BX)$ の計算) まず修論 [N1] で, $\pi_2(BX)$ の有限生成性や具体的計算など行った. 後に或る革新を得て, 筆者は“レギュラー”で奇数位数のアレクサンダーカンドル X に対して, $\pi_2(BX)$ を計算可能にした. 具体的計算結果は [N4] を見よ (そこには $\pi_3(BX)$ の計算もある).

さらに, ホモトピー群の計算には空間 BX のホモロジー群を計算する事が鍵になる. そこで,

- 筆者は整係数ホモロジー群 BX の有用な直和因子である“カンドルホモロジー”を計算した. 詳細に言えば, 奇素数位数のアレクサンダーカンドル全てに対し, カンドルホモロジーを振れ込みで全て決定した [N2]. 今の時点で, 筆者の結果がもっとも広いカンドルのクラスである上, 当論文で或る予想も解決した.

- また低次元トポロジーでお馴染みであるが, 結び目の不変量が構成されれば, 3次元多様体の不変量が構成されるものである. そこで分岐被覆空間との議論を噛み合わせて, 島中英里氏と筆者は [H, HN, N3], カンドルから 3次元多様体を扱える基礎固めに成功した: 空間 BX のホモトピー群やコサイクルを使って, 3次元多様体の不変量が構

成し, 調べた. 我々の不変量は, Dijkgraaf-Witten 不変量より強い等しい事を示した. おそらく等価だろうが未解決である.

そのホモトピー群の代表元である結び目がどう位相的意味を持つか調べた, 余次元 2 と相性がよいと述べたが, 実際, その元は分岐被覆空間との相性が良い事が解った. アレクサンダーカンドルに関しては [N5] に書いた. カンドル一般でカンドルコサイクル不変量の位相的意味を与える議論は [N8] を参照.

また余次元 2 の他の例として, “レフシツ束” というものがある. 例えていえば, レフシツ束とは, 2 かける 2 の見方でアプローチできる良い 4 次元多様体である. カンドルからのアプローチが松本幸夫先生などにより考察されていたが, 筆者はそれを推し進め, 4 次元多様体の「符号数」という不変量をカンドルから取り出すことに成功した.

また他に, 「カンドルの特性類」という観点からも研究した [N7]. つまり空間 BX のコホモロジーの良い元 (コサイクル) の具体的な表示が必要である. そこで筆者は “アレクサンダーカンドルの G 族” というクラスに対して, コサイクル表示を得る方法を見出した. そこでの構成は, 任意の群 G と右 G 加群に適応できる議論で懐が広い. 不変式論という代数的な議論から多くコサイクルを得る事ができた. 特にモジュラー表現と関わる部分が面白いと筆者は考えているが今後の課題である. (ちなみに, そのアイディアの大本は, 井上-蒲谷氏ら [IK] の影響がある. 彼らは, 双曲体積・Chern-Simons 不変量をカンドルの言葉に換言する仕事を修められた)

Acknowledgement.

第 8 回数学総合若手研究集会に参加させて頂いた上, 講演の機会を下さり, 運営委員の方々に厚く御礼申し上げます.

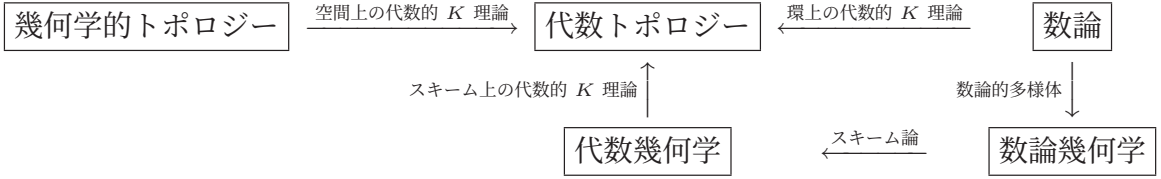
参考文献

- [CEGS] J. S. Carter, J. S. Elhamdadi, M. Graña, M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005) 499–541.
- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [FRS] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 701–740.
- [Joy] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 37–65.
- [H] E. Hatakenaka, *Invariants of 3-manifolds derived from covering presentations*, in Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **149** (2010) 263–296.
- [HN] ———, T. Nosaka, *Some topological aspects to 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, to appear Internat. J. Math.
- [IK] A. Inoue, Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, arXiv:math/1012.2923.
- [N1] T. Nosaka, *On homotopy groups of quandle spaces and the quandle homotopy invariant of links*, Topology and its Applications **158** (2011), 996–1011.
- [N2] ———, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, to appear Trans. Amer. Math. Soc.
- [N3] ———, *4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011) 1601–1648.
- [N4] ———, *Quandle homotopy invariants of knotted surfaces*, available at arXiv:math/1011.6035.
- [N5] ———, *Quandle cocycle invariants of links using Mochizuki’s 3-cocycles and Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds*, available at arXiv:1103.3839.
- [N6] ———, *Quandle cocycle invariants of Lefschetz fibrations over the 2-sphere*, preprint.
- [N7] ———, *Quandle cocycles from invariant theory*, preprint
- [N8] *On a topological interpretation of the quandle cocycle invariants of links*, in preperation

TOWARDS ALGEBRAIC K -THEORY OF LOCAL FIELDS AT THE PRIME 2

加藤 諒（名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D1）

近年, 代数トポロジーと他分野との関連性は目まぐるしい勢いで解析されている. その関係を与える例の 1 つとして, 代数的 K 理論が挙げられる.



まず, 代数的 K 理論について簡単に説明しよう. Waldhausen 圏 $\mathcal{C}$ とは, w-cofibration と w-weak equivalence と呼ばれる構造を持つ圏である. 代数的 K 理論とは, Waldhausen 圏 $\mathcal{C}$ に対し, $K(\mathcal{C})$ なる位相空間 (無限ループ空間, またはスペクトラム) を対応させる, ある特別な関手である. この $K(\mathcal{C})$ を, $\mathcal{C}$ の代数的 K 理論と呼ぶ [11]. 環 R に対し, その有限生成射影的 R 加群の圏 $\mathcal{P}_A$ の代数的 K 理論 $K(\mathcal{P}_A)$ を R の代数的 K 理論と呼び, $K(R)$ と表す.

S を球面スペクトラムとし, Σ をスペクトラムの圏の懸垂自己関手とする. このとき, $\text{mod } n$ Moore スペクトラム M_n はコファイバー列

$$S \xrightarrow{n} S \rightarrow M_n \rightarrow \Sigma S$$

により与えられる. 以下, スペクトラムの圏への関手 F に対し, $F_*(-) = \pi_* F(-)$, $F_*(-, \mathbb{Z}/n) = \pi_*(F(-) \wedge M_n)$ と表記する. 体 K の代数的 K 群とは, K の代数的 K 理論 $K(K)$ のホモトピー群

$$K_*(K) = \pi_* K(K)$$

として定義され, K の $\text{mod } n$ 代数的 K 群は

$$K_*(K, \mathbb{Z}/n) = \pi_*(K(K) \wedge M_n)$$

と定義される. (注意: 代数的 K 群のことも代数的 K 理論と呼ぶこともある.)

Theorem 1. (Hesselholt-Madsen [5, Theorem A]) $H^*(-, -)$ を Galois コホモロジー, p を奇素数とする. このとき, K が 1 の p^v 乗根 μ_{p^v} を含む標数 0 の離散完備付値体で, その剰余体が標数 p の完全体となるとき,

$$K_i(K, \mathbb{Z}/p^v) \cong \begin{cases} H^0(K, \mu_{p^v}^{\otimes s}) \oplus H^2(K, \mu_{p^v}^{\otimes(s+1)}) & i = 2s, \\ H^1(K, \mu_{p^v}^{\otimes s}) & i = 2s - 1 \end{cases}$$

が $i \geq 1$ で成立する.

以下, この仕事の詳細を述べる. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする. このとき, Waldhausen 圏 $\mathcal{C}$ に対し, 位相的 Hochschild ホモロジー $T(\mathcal{C})$ が定義される [5]. $T(\mathcal{C})$ は $\mathbb{T}$ -スペクトラムの構造を持つ. p を素数とし, C_r を位数 r の巡回群とする. C_r は

$\mathbb{T}$ の部分群であることから, 関手 $T(-)$ は C_r -スペクトラムの圏への関手と考えることができ, TR -ホモロジー関手 $\mathrm{TR}^n(-; p)$ は, $T(-)$ を用いて

$$\mathrm{TR}^n(-; p) = T(-)^{C_{p^{n-1}}}$$

と定義される. 圏 $\mathcal{C}$ からこの関手により得られる pro-スペクトラム $\mathrm{TR}^\bullet(\mathcal{C}; p)$ は次の Frobenius 射と呼ばれる射を持つ [5].

$$F : \mathrm{TR}^n(\mathcal{C}; p) \rightarrow \mathrm{TR}^{n-1}(\mathcal{C}; p).$$

$\mathrm{TR}(\mathcal{C}; p)$ を $\{\mathrm{TR}^n(\mathcal{C}; p)\}_n$ のホモトピー極限と定義するとき, $\mathcal{C}$ の位相的巡回ホモロジーは次のコファイバー列により与えられる.

$$\mathrm{TC}(\mathcal{C}; p) \rightarrow \mathrm{TR}(\mathcal{C}; p) \xrightarrow{1-F} \mathrm{TR}(\mathcal{C}; p).$$

A を商体 K と剰余体 k を持つ離散完備付値環とする. これらの代数的 K 理論に対し, Quillen より次のコファイバー列の存在が知られている [7].

$$K(k) \rightarrow K(A) \rightarrow K(K) \rightarrow \Sigma K(k).$$

ここで, A に依存して決まる特別な Waldhausen 圏に $T(-)$ を適用することで, 以下のスペクトラムが定義される [5, Definition 1.5.5].

$$T(A|K), T(A), T(k).$$

このとき, [1] により導入された円分的跡写像 tr により, 次のコファイバー列の間の射が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc} K(k) & \longrightarrow & K(A) & \longrightarrow & K(K) & \longrightarrow & \Sigma K(k) \\ \mathrm{tr} \downarrow & & \mathrm{tr} \downarrow & & \mathrm{tr} \downarrow & & \mathrm{tr} \downarrow \\ \mathrm{TC}(k; p) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(A; p) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(A|K; p) & \longrightarrow & \Sigma \mathrm{TC}(k; p) \end{array}$$

Hesselholt-Madsen による [4] の仕事により, 左の 2 つの tr は, $i \geq 0, v \geq 1$ に対し $\pi_i(-, \mathbb{Z}/p^v)$ により同型を誘導する. よって, $i, v \geq 1$ に対し,

$$K_i(K; \mathbb{Z}/p^v) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathrm{TC}_i(A|K; p, \mathbb{Z}/p^v)$$

は同型である. 以上のことから, K の $\mathrm{mod} \, p^v$ 代数的 K 群の構造への, 次の様な流れが得られる.

$$\mathrm{TR}_*(A|K; p, \mathbb{Z}/p^v) \Rightarrow \mathrm{TR}_*(A|K; p, \mathbb{Z}/p^v) \Rightarrow \mathrm{TC}_*(A|K; p, \mathbb{Z}/p^v) \cong K_*(K; \mathbb{Z}/p^v).$$

では, $\mathrm{TR}_*(A|K; p, \mathbb{Z}/p^v)$ はどうすれば解析できるであろうか? 以下はそれについて説明していこう.

$\mathrm{TR}^\bullet(A|K; p) = \{\mathrm{TR}^n(A|K; p)\}_n$ に対し, 次の 制限射と呼ばれる射

$$R : \mathrm{TR}^n(A|K; p) \rightarrow \mathrm{TR}^{n-1}(A|K; p)$$

がある. この射の構成を簡単に説明しよう. G -スペクトラム X と射 $f : G' \rightarrow G$ が与えられたとき, この f を介することにより G' -スペクトラムとみなした X を, f^*X と表記する. E を可縮な自由 $\mathbb{T}$ -CW 複体, E_+ は E に基点を加えた空間とし, 次のコファイバー列を考える.

$$E_+ \xrightarrow{\mathrm{collaps}} S^0 \rightarrow \tilde{E} \rightarrow \Sigma E_+.$$

ρ_r を群同型射 $\mathbb{T} \xrightarrow{\cong} \mathbb{T}/C_r$ とする. このとき, $(\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_p}$ は $\mathbb{T}/C_p$ -スペクトラムとなるため, 上の表記を用いて, $\mathbb{T}$ -スペクトラム $\rho_p^*(\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_p}$ が得られる. $|-|$

を $\mathbb{T}$ -スペクトラムの圏からスペクトラムの圏への忘却関手としたとき, $T(A|K)$ は円分構造を持つことが知られている, i.e.

$$\exists r : |\rho_p^*(\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_p}| \simeq |T(A|K)|.$$

この構造は, 帰納的に任意の n に対し

$$r_{n+1} : |\rho_p^*(\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_{p^n}}| = |\rho_{p^{n-1}}^*(\rho_p^*(\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_p})^{C_{p^{n-1}}}| \simeq |\rho_{p^{n-1}}^*T(A|K)^{C_{p^{n-1}}}|$$

へ拡張される. この射により, 制限射 R は

$$|\rho_{p^{n-1}}^*T(A|K)^{C_{p^{n-1}}}| \rightarrow |\rho_{p^{n-1}}^*(\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_{p^{n-1}}}| \xrightarrow[r_n]{\simeq} |\rho_{p^{n-2}}^*T(A|K)^{C_{p^{n-1}}}|$$

として与えられる. 以下, $|\rho_r^*X|$ を X と略記する. $\mathbb{T}$ -スペクトラム X に対し, 関数スペクトラム $F(E_+, X)$ を考え, X の C_r -ホモトピー固定点スペクトラムを

$$X^{hC_r} = F(E_+, X)^{C_r}$$

と定義する. このとき, 自然な射 $\gamma : T(A|K) \rightarrow F(E_+, T(A|K))$ により誘導される射

$$\Gamma : \mathrm{TR}^n(A|K; p) \rightarrow T(A|K)^{hC_{p^{n-1}}}$$

が得られる. 同様に,

$$\hat{\Gamma} : (\tilde{E} \wedge T(A|K))^{C_{p^{n-1}}} \rightarrow (\tilde{E} \wedge F(E_+, T(A|K)))^{C_{p^{n-1}}}$$

が得られる. また,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\bullet(C_{p^{n-1}}, X) &:= (E_+ \wedge X)^{C_{p^{n-1}}}, \\ \hat{\mathbb{H}}(C_{p^{n-1}}, X) &:= (\tilde{E} \wedge F(E_+, T(A|K)))^{C_{p^{n-1}}} \end{aligned}$$

と定義することで, 次のコファイバー列の間の射が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}_\bullet(C_{p^{n-1}}, T(A|K)) & \longrightarrow & \mathrm{TR}^{n+1}(A|K; p) & \xrightarrow{R} & \mathrm{TR}^n(A|K; p) \\ \parallel & & \Gamma \downarrow & & \hat{\Gamma} \downarrow \\ \mathbb{H}_\bullet(C_{p^{n-1}}, T(A|K)) & \longrightarrow & T(A|K)^{hC_{p^{n-1}}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{H}}(C_{p^{n-1}}, T(A|K)) \end{array}$$

この下のスペクトラムについては, それぞれ次の様なスペクトル系列が構成可能である.

$$\begin{aligned} E_{s,t}^2 &= H^{-s}(C_{p^{n-1}}, T_t(A|K)) \Rightarrow \pi_{s+t}T(A|K)^{hC_{p^{n-1}}}, \\ \hat{E}_{s,t}^2 &= \hat{H}_s(C_{p^{n-1}}, T_t(A|K)) \Rightarrow \pi_{s+t}\hat{\mathbb{H}}(C_{p^{n-1}}, T(A|K)). \end{aligned}$$

以下, 上の 1 つ目のスペクトル系列を E_* , 2 つ目のスペクトル系列を $\hat{E}_*$ と表記する. [5] における TR-ホモロジーの解析は, 簡単に言うならば次の手順で行われている.

- (1) $\hat{E}_*$ を計算することにより, $n = 1$ で $\pi_*(\hat{\Gamma}, \mathbb{Z}/p)$ が同型となることを示す.
- (2) (1) の結果を用いて, Γ を E_* により解析する.
- (3) (2) により得られた Γ の性質を用いて, $n \geq 1$ での $\hat{E}_*$ を $v = 1$ で計算する.
- (4) (3) で得られた結果を, [10] の結果を用いて $v \geq 1$ に拡張する.

以上の流れにより, TR-ホモロジーを解析することで Theorem 1 は示されている.

では, $p = 2$ における問題点とは何であろうか?

ホモトピー論における有名な結果として、素数 p に対して $\text{mod } p$ Moore スペクトラムは $p > 2$ ならば環スペクトラムとなり、 M_2 は環スペクトラム構造を持たない。よって、例えば $K_*(K; \mathbb{Z}/2)$ は環構造を持たない。上の (1)~(4) の手順を踏むとき、 $v = 1$ の解析がまず始めにあるわけだが、これは M_p の環構造の存在に大きく依存している。 M_4 に関しては、岡の結果により M_4 は非可換な環スペクトラム構造を持ち、安定 Hopf 写像 $\eta \in \pi_1^S$ を用いることで、 $\pi_*(M_4)$ の積の交換子は常に η^2 で割れることを示している [6]。これに対し、 $T(A|K)$ には η^2 は常に自明に作用する (cf. [3])。よって、 $T_*(A|K, \mathbb{Z}/4)$ は可換環構造を持つことが分り、この結果により、上記の問題は解決される。

次の問題は、 M_4 に対し 4 が素数でないことにより発生する。簡単に述べると、 M_4 を用いることは $\mathbb{Z}/4$ 係数で考えることに対応するため、splitting 等の問題が避けられなくなり、具体的な代数構造が見えなくなってしまう。この問題に関しては、Rognes が [8] により行なった仕事が非常に良いアプローチを与えている。この仕事により、Rognes は $T(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4)$ の構造を、完全に代数的な $\mathbb{Z}/2$ 係数により与えられる代数構造を用いることで幾何的な $\mathbb{Z}/4$ 係数の構造を決定している。つまり、この方法では $\mathbb{Z}/2$ 係数に関して幾何的な情報に依存しない為、 M_4 から生じる $\mathbb{Z}/4$ において起こる問題を $\mathbb{Z}/2$ に落とすことが可能となる。そこから、[9] の手法を用いることで、 $v \geq 2$ に関する Theorem 1 へアプローチが可能であろうことが期待できる。

また、この研究に対して、 p -typical de Rham-Witt 複体と呼ばれる代数構造が必要不可欠である。 $p > 2$ では [5] に詳細が述べられているが、 $p = 2$ におけるこの代数構造の定義は [2] によって再構築された。これにより、2-typical de Rham-Witt 複体がこの研究に利用可能となったが、 $p = 2$ のときは ι と呼ばれる構造射が非自明であることや、スペクトル系列の微分の結果が変わること等が予想されることから、 $p > 2$ との違いが生じるであろう。

Hesselholt-Madsen の仕事 [5] の $p = 2$ でのアナロジーを行うことへの問題は、上述したこと以外には起きないであろうことが期待される。現段階で、ある程度までの素数 2 での問題は解決が可能であることが分かっている。

REFERENCES

- [1] M. Bokstedt, W.C. Hsiang and I. Madsen, The cyclotomic trace and algebraic K -theory of spaces. *Invent. Math.* 111 (1993), no. 3, 465-539.
- [2] V. Costeanu, On the 2-typical de Rham-Witt complex. *Doc. Math.* 13 (2008), 413-452.
- [3] L. Hesselholt, The big de Rham-Witt complex, Preprint 2010.
- [4] L. Hesselholt, I. Madsen, On the K -theory of finite algebras over Witt vectors of perfect fields, *Topology* 36 (1997), 29-101.
- [5] L. Hesselholt, I. Madsen, On the K -theory of local fields, *Ann. of Math.* 158 (2003), 1-113.
- [6] S. Oka, Multiplications on the Moore spectrum. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* 38 (1984), no. 2, 257-276.
- [7] D. Quillen, Higher algebraic K -theory I, *Algebraic K-theory I: Higher K-theories* (Battelle Memorial Inst., Seattle, Washington, 1972), *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 341, Springer-Verlag, 1973.
- [8] J. Rognes, The product on topological Hochschild homology of the integers with mod 4 coefficients, *J. Pure Appl. Algebra* 134 (1999) 210-217.
- [9] J. Rognes, Algebraic K -theory of the two-adic integers, *J. Pure Appl. Algebra* 134 (1999) 287-326.
- [10] S. Tsalidis, Topological Hochschild homology and the homotopy descent problem, *Topology* 37 (1998), 913-934.
- [11] F. Waldhausen, Algebraic K -theory of spaces, *Algebraic and geometric topology*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1126, Springer-Verlag, 1985, pp. 318-419.

力学系における Hamiltonian についての recursion operator の構成

竹内 司 (東京理科大学 理学研究科 M2)*

1. はじめに

古典力学において、Liouville の意味で完全積分可能な系のことを可積分系と呼ぶ。[1] によれば、自由度 n の系では、独立な n 個の Poisson bracket が 0 である第 1 積分が分かれば、系は求積法で解けることが分かる。このことについて、[5] において以下のように記述されている。

- n 次元空間の運動 ($2n$ 個の変数をもつハミルトン系) の場合には、 n 個の第 1 積分, $G_1 = H, G_2, \dots, G_n$ があり, $\{G_i, G_j\} = 0$ かつ $\text{grad } G_1, \dots, \text{grad } G_n$ が 1 次独立であるときを、完全積分可能と呼ぶ。

一方で、G.De Filippo, G.Marmo, M.Salerno, G.Vilasi らにより可積分系の新しい特徴付けがなされている。特に、G.Vilasi 氏の著書 [3] により、多様体 $\mathcal{M}$ の余接ベクトル束 $T^*\mathcal{M}$ 上での力学系における Hamiltonian について recursion operator T の構成がなされている。この recursion operator とは以下に挙げる定理における、ある対角化可能な $(1,1)$ テンソル場である。Vilasi 氏によれば、 T の意味での可積分性はベクトル場 Δ の自由度が有限であるか無限であるかによらず表現することができる。

これらのことについて、次の定理が与えられている。

定理 1 ([3]). $\mathcal{M}^{2n}$ 上の vector field Δ , $\exists T$: 対角化可能な $(1,1)$ tensor field s.t.

1. Δ -invariant : $\mathcal{L}_\Delta T = 0$.
 2. Nijenhuis torsion が消滅 : $\mathcal{N}_T = 0$.
 3. 固有値 λ^j について, $\deg \lambda^j = 2$ かつ至るところ微分可能 : $(d\lambda^j)_p \neq 0, \forall p \in \mathcal{M}$.
- とする。このとき、 Δ は separable かつ symplectic structure $\exists \omega$ について completely integrable であり、かつ Hamiltonian.

この定理における T が recursion operator であり、 (J_k, φ^k) を基底として選べば、以下の形をとる：

$$T = \sum_k \lambda^k(J_k) \left(\frac{\partial}{\partial J_k} \otimes dJ_k + \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \otimes d\varphi^k \right).$$

この T は剛体の運動や Kepler dynamics などにおいてはすでに知られている。ここでトレース $\text{Tr}(T^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) をそれぞれ取ることで、自由度 n の Hamiltonian について n 個の関数的に独立な保存量が得られる。

本研究の目的は、Kepler dynamics における recursion operator の構成を例として、幾何学的な観点から具体的な力学系における他の recursion operator を構成することである。

* 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3 東京理科大学大学院 理学研究科
e-mail: j1110605@ed.tus.ac.jp

2. Kepler dynamics

$\mathbb{R}^3 - \{0\}$ において、極座標表示された Kepler dynamics について考察する。このとき、ある vector field Δ が与えられ globally Hamiltonian vector field であるとする。これは、Hamiltonian H と symplectic form ω について、 $i_\Delta \omega = -dH$ を満たす vector field である。ここで、 $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ 、 $\mathcal{M} = T^*\mathcal{N}$ とし、 $\mathcal{M}$ における recursion operator T を構成する。

このとき [2] によって、作用角変数 (J, φ) を用いれば、 H, Δ, ω はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} H &= -\frac{mk^2}{(J_1 + J_2 + J_3)^2}, \\ \Delta &= \frac{2mk^2}{(J_1 + J_2 + J_3)^3} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi^3} \right), \\ \omega &= \sum_{i=1}^3 dJ_i \wedge d\varphi^i. \end{aligned}$$

ここで、 Δ は separable でなく H の Hessian が 0 になるため、recursion operator を容易に求めることができない。しかし、 H が作用変数のみによって決まるため、座標変換を行うことで新たな組 (J', φ') を考えることができる。これにより H を新たな組で表現すれば、変数分離とみることができる。結果として、recursion operator は次の形で与えられる。

$$T = \sum_{i,j=1}^3 \left(({}^t S)^i_j \frac{\partial}{\partial J_i} \otimes dJ_j + S^i_j \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \otimes d\varphi^j \right).$$

ただし、

$$S = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_2 - J_3 & J_1 + J_3 & J_3 \\ J_3 - J_2 & J_2 & J_1 + J_2 \end{pmatrix}.$$

この T は確かに定理における 3 条件を満たすことが分かる。

また、関数的に独立な保存量は以下の 3 つである。

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T) &= 2 \{ (J_1 + J_2 + J_3) + (J_1 - J_2 + J_3) + (J_1 + J_2 - J_3) \}, \\ \text{Tr}(T^2) &= 2 \{ (J_1 + J_2 + J_3)^2 + (J_1 - J_2 + J_3)^2 + (J_1 + J_2 - J_3)^2 \}, \\ \text{Tr}(T^3) &= 2 \{ (J_1 + J_2 + J_3)^3 + (J_1 - J_2 + J_3)^3 + (J_1 + J_2 - J_3)^3 \}. \end{aligned}$$

3. Upper half-space

上半空間 $\mathbb{R}_+^n = \{(q^1, q^2, \dots, q^n) | q^n > 0\}$ から $\mathbb{R}^n$ の単位球面への微分同相写像を考える。ここで与えられる写像において、逆写像の引き戻しを g_P とすれば、

$$g_P = \frac{1}{(q^n)^2} (dq^1 \otimes dq^1 + dq^2 \otimes dq^2 + \dots + dq^n \otimes dq^n)$$

となる。このとき、 $(\mathbb{R}_+^n, g_P)$ を双曲空間の Poincaré の上半空間モデルという。([4] 参照)

また、可逆な行列 (g_{ij}) の逆行列 (g^{ij}) で表せば、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij}(\mathbf{q}) p_i p_j$$

である． ([5] 参照)

以上により、 $T^*\mathbb{R}_+^n$ の geodesic flow における Hamiltonian H は次の形で与えられる：

$$H = \frac{1}{2} (q^n)^2 (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2) .$$

このとき、Hamilton-Jacobi 方程式を考え、 $p_i = \frac{dS_i}{dq^i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とし、これを S_i について解く．ここで、 $S = \sum_{i=1}^n S_i$ であるから、

$$\begin{aligned} S = & \sqrt{K_{n-1}} q^1 + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{K_{n-i} + K_{n-i+1}} q^i \\ & + \sqrt{2H - K_1(q^n)^2} - \frac{1}{\sqrt{2H}} \log \left(\frac{1}{q^n} \left(\sqrt{\frac{2H}{K_1}} + \sqrt{\frac{2H}{K_1} - (q^n)^2} \right) \right) . \end{aligned}$$

これより、 $P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}$ ($Q_1 = H, Q_2 = K_1, \dots, Q_n = K_{n-1}$) とおけば、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2H}} \log \left(\frac{1}{q^n} \left(\sqrt{\frac{2H}{K_1}} + \sqrt{\frac{2H}{K_1} - (q^n)^2} \right) \right) , \\ P_2 &= -\frac{q^{n-1}}{2\sqrt{K_1 - K_2}} - \frac{1}{2K_1} \sqrt{2H - K_1(q^n)^2} , \\ P_i &= -\frac{q^{n-i+1}}{2\sqrt{K_{i-1} - K_i}} - \frac{q^{n-i+2}}{2\sqrt{K_{i-2} - K_{i-1}}} \quad (i = 3, 4, \dots, n-1), \\ P_n &= -\frac{q^1}{2\sqrt{K_{n-1}}} - \frac{q^2}{2\sqrt{K_{n-2} - K_{n-1}}} . \end{aligned}$$

また、 $H(q, p) = H(Q, P) = Q_1$ であり、 $x_i = Q_i, x_{n+i} = P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $X_{n+1} = 1, X_j = 0$ ($j = 1, \dots, n, n+2, \dots, 2n$) とすれば、

$$\Delta = \sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(= X_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right) .$$

よって、 Δ は separable であり、recursion operator を容易に求めることができる．

$$T = \sum_{i=1}^{2n} S_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \quad S = \begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & Q_n \end{pmatrix} .$$

以上から, この T は定理における 3 条件を満たしており, 関数的に独立な保存量を考えれば,

$$Tr(T^k) = 2 \left[\left(\frac{1}{2} (q^n)^2 \sum_{i=1}^n p_i^2 \right)^k + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n-j} p_i^2 \right)^k \right\} \right], \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

により得られる.

参考文献

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag; 2 Sub, New York, 1989.
- [2] G.Marmo, G.Vilasi, *When do recursion operators generate new conservation laws ?*, Phys. Lett. B 277 (1992), no. 1-2, 137-140.
- [3] G. Vilasi, *Hamiltonian dynamics*, World Scientific Publishing Co.,Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [4] 加須栄 篤, リーマン幾何学 (数学レクチャーノート), 培風館 2001.
- [5] 深谷 賢治, 解析力学と微分形式, 岩波書店 2004.

重み付きグラスマンの（有理係数） T -同変コホモロジーについて

阿部 拓

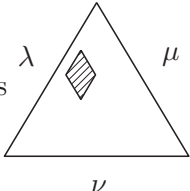
首都大学東京大学院 理工学研究科 数理情報科学専攻

グラスマン多様体は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の d 次元線形部分空間全体のなす集合であり、数学の様々な分野に現れる非常に重要な空間である。例えば、グラスマン多様体のコホモロジーの環構造を幾何学的な基底を用いて調べることは、シューベルトカルキュラスの代表例であり、シューベルトカルキュラスは現在非常に活発に研究されている数学である。ここではグラスマン多様体のコホモロジーの環構造を例にして簡単に説明しよう。グラスマン多様体は Schubert cell 分解と呼ばれる cell 分解をもつことが知られている。各 cell の閉包は Schubert variety と呼ばれ、ある種のサイクルとして理解できる。このサイクルに対応したコホモロジー類 S_λ は Schubert class と呼ばれ、上の cell 分解により、グラスマン多様体のコホモロジーの（加群としての）基底をなすことが分かる。ここで、コホモロジーは足し算と掛け算をもつ環であることを思い出そう。今 S_λ 達は基底なので、 S_λ と S_μ を（カップ積で）掛けたものは再び S_ν 達で展開することができる：

$$S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} S_{\nu}$$

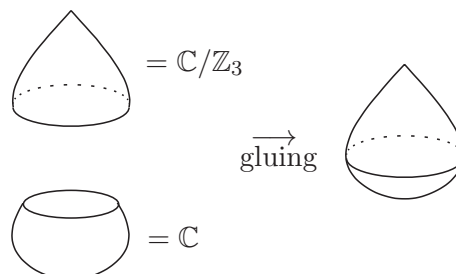
このときの展開係数は構造定数と呼ばれ、コホモロジーの環としての構造を表している。もともと、Schubert は数え上げの問題（ $\mathbb{C}^4$ の中で与えられた 4 本の直線と同時に交わる直線は何本あるか、等）を調べていて、そのときに発見されたある種の不変性が鍵となって、現在ではグラスマン多様体のコホモロジーの構造定数がそれらの数え上げの答えを与えてくれることが知られている。シューベルトカルキュラスとは、このような幾何学的に定義される基底に関する構造定数を調べる数学である。グラスマン多様体のシューベルトカルキュラスは既によく分かっていて、幾何学、表現論、そして組み合わせ論などといった様々な分野アプローチによって理解され、それぞれの分野が交叉するところに美しい理論や公式が現われている。ここでは深入りしないが、興味のある方は [F] を参照されたい。

一方で、グラスマン多様体はトーラス作用をもつ空間としてみることもできる。一般に空間 X が群 G による対称性をもつとき、作用のトポロジーに関するコホモロジー理論として G -同変コホモロジー $H_G^*(X)$ が定まる。[GKM] によってトーラス作用に関する同変コホモロジーのとても扱いやすい表示があたえられ、トーラス同変コホモロジーでシューベルトカルキュラスを行う流れが生まれてきた。2003 年 Knutson と Tao は [Knutson-Tao] において、この GKM 表示を用いて同変コホモロジー $H_T^*(\mathrm{Gr}(d, n); \mathbb{Z})$ における Schubert class に関する構造定数の組み合わせ論的な公式を書き下した：

$$c_{\lambda\mu}^{\nu} = \text{the number of equivariant puzzles}$$


この結果自体とても面白いものであるが、本講演ではこの公式について深く立ち入ることはしない。以上が（同変）シューベルトカルキュラスの ”とても大雑把な” あらすじである。

さて、グラスマン多様体は射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の一般化であるが、射影空間の異なる一般化として重み付き射影空間 (weighted projective space) というものがある。重み付き射影空間は一般に特異点をもつ空間であり、多様体ほど”良い”空間ではないが、その特異性はそれほど悪いものではない。実際、重み付き射影空間は orbifold (軌道体) の代表例として知られ、同時に代数多様体でもある (orbifold とはユークリッド空間を有限群で割ったものを貼り合わせて出来る空間である) :



本講演のタイトルにもある重み付きグラスマンは重み付き射影空間の一般化であり、orbifold かつ代数多様体である。Corti-Reid([CR]) による 重み付きグラスマン (weighted Grassmannian) の定義を (厳密さを忘れて) 一言で説明すると、

” 重み付き射影空間の中で Plücker 関係式により定義される空間 ”

である。グラスマン多様体は十分大きな射影空間に埋め込むことができ、その像は Plücker 関係式とよばれる代数方程式で記述される。これを重み付き射影空間で考えたものが重み付きグラスマンである :

$$\mathrm{Gr}(d, n) \hookrightarrow \mathbb{CP}^n \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{wGr}(d, n) \hookrightarrow \mathrm{wCP}^n$$

よく知られているように、グラスマン多様体を記述する方法は一つではない。等質空間としての表示や、 $\mathbb{C}^n$ の部分空間の集合としての表示、射影代数多様体としての表示、シンプレクティック商としての表示などがある。重み付きグラスマンは、このうちの「射影代数多様体」や「シンプレクティック商」としての表示を保つ形での一般化と言ってもよい。

さて、グラスマン多様体のときと同様に、重み付きグラスマンも Schubert cell 分解に似た分解を持っている :

$$\mathrm{wGr}(d, n) = \coprod_{\lambda} \mathrm{w}\Omega_{\lambda}^{\circ}$$

ここで、各 $\mathrm{w}\Omega_{\lambda}^{\circ}$ は本当の cell (あるユークリッド空間の開円盤) ではなく、cell を有限群で割ったものであり、ここでも orbifold の性質が垣間見える。

Proposition 0.1. $H^*(\mathrm{wGr}(d, n); \mathbb{Q})$ は上の分解に対応した (ベクトル空間としての) 基底を持つ。特に、 $H^*(\mathrm{wGr}(d, n); \mathbb{Q})$ はベクトル空間としては $H^*(\mathrm{Gr}(d, n); \mathbb{Q})$ と同型である。

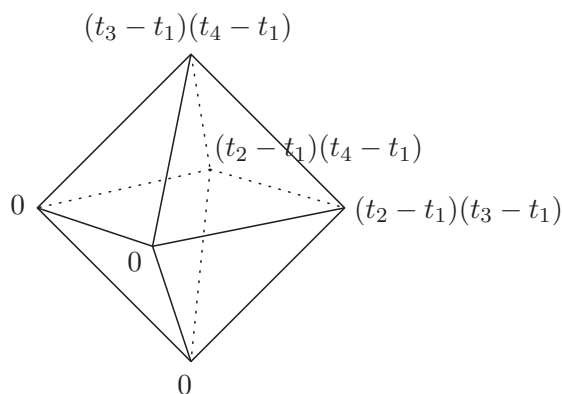
本研究の最終目標はこの quasi-cell 分解に関するシューベルトカルキュラス (つまりコホモロジー環の構造定数) を完成させることである。しかし、重み付きグラスマンは特異点を持つので、そのコホモロジーを調べるのは容易ではない。そこで、本講演では、重み付きグラスマンが (十分大きな) トーラス T の作用を持つことを用いて、コホモロジーではなく、その対称性を考慮した T -同変コホモロジーを調べることにする。これは一見より難しいコホモロジーを調べているように見えるかもしれないが、実はその逆である。トーラスの作用はトポロジーと相性がよく、 T -同変コホモロジーをみるということは、 T による対称性をフルに活用してトポ

ロジーを調べると思ってよい．また，先の [KT] によって，グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(d, n)$ の T -同変コホモロジーはとてもよく分かっている．本講演は，これらのツールを最大限に使って重み付きグラスマンの (T -同変) シューベルトカルキュラスを調べようというものである．

同変コホモロジーを使うことの大きな利点の一つとして，局所化というテクニックがある．トーラス T が空間 X に作用している時，その固定点集合 X^T から X への包含写像 $X^T \hookrightarrow X$ は次の写像を誘導する：

$$H_T^*(X) \longrightarrow H_T^*(X^T) \quad (0.1)$$

今仮に固定点集合 X^T が有限集合だったとしよう．通常のコホモロジー理論なら $H^*(X^T)$ は自明なものになってしまうが，同変コホモロジーでは 1 点のコホモロジー $H_T^*(\mathrm{point}) = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]$ (n はトーラスの次元) が十分大きな入れ物であるがゆえに， X がトーラス作用に関して ”十分よい” トポロジーを持っている時，この写像は X の (同变的な) トポロジーの情報を持っていることが期待され，実際単射になることが知られている．つまり，同変コホモロジー $H_T^*(X)$ が $H_T^*(\mathrm{point}) = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]$ のいくつかの直和に埋め込まれ，各元は多項式の組として表示されるのである．詳細は省くが，次の多項式の組は $H_T^*(\mathrm{Gr}(2, 4))$ の元である：



ここで，グラフの頂点はトーラス作用の固定点に対応し，エッジは固定点どうしを結ぶトーラス不変 $\mathbb{CP}^1$ に対応する．さて，ではどんな多項式の組が同変コホモロジー $H_T^*(X)$ の元に対応しているのだろうか．Goresky-Kotwitz-MacPherson([GKM]) がその答えを組み合わせ論的に表現した．

Theorem 0.2. ([GKM]) 埋め込み (0.1) の像は 0 次元軌道 (頂点) と 1 次元軌道 (エッジ) で構成されるラベル付きグラフ (GKM グラフ) に関する 組み合わせ論的な 条件で記述される．

この定理を用いて $H_T^*(\mathrm{wGr}(d, n) : \mathbb{Q})$ をグラフ上の多項式として表示し，シューベルトカルキュラスを行いたい．そのために，まずはグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(d, n)$ の同変コホモロジー $H_T^*(\mathrm{Gr}(d, n) : \mathbb{Q})$ の GKM 表示を見てみよう． $\mathrm{Gr}(d, n)$ の T -固定点集合 $\mathrm{Gr}(d, n)^T$ は Schubert cell のインデックス λ と一対一に対応しているので，グラスマン多様体の場合は GKM グラフの頂点は Schubert cell のインデックスそのものと思ってよい．実は，先で図示した多項式の組はある同変シューベルト類 $\tilde{S}_\lambda$ (Schubert variety に対応するコホモロジー類) の GKM 表示そのものであり，これら同変シューベルト類 $\tilde{S}_\lambda$ 達は GKM グラフにおける次の 組み合わせ論的な条件 で特徴付けることができる：

- | | |
|--|--------------------|
| (1) 各頂点の多項式の次数は等しい | (次数の同次性) |
| (2) サポートは頂点 λ より大きい頂点上にある | (上三角性) |
| (3) 頂点 λ での多項式は λ から下がるエッジのラベルの積 | (頂点 λ での値) |

そこで我々は、重み付きグラスマンの同変コホモロジーの GKM 表示においてこのような組み合わせ論的な基底を考えて、それらに関する構造定数を計算することにする。まず、そもそもそういうものが存在するかどうかということになるが、答えは Yes である。

Proposition 0.3. 各 λ に対し上記 (1)~(3) と類似の条件を満たす $H_T^*(\mathrm{wGr}(d, n): \mathbb{Q})$ のコホモロジー類の集合 $\{\tilde{S}_\lambda\}$ が一意的に存在し、 $H_T^*(\mathrm{point}: \mathbb{Q})$ -加群としての基底をなす。

つまり、これらは同変シューベルト類を組み合わせ論的に一般化したものである。これら $\tilde{S}_\lambda$ 達に関する構造定数を求めることを考える：

$$\tilde{S}_\lambda \tilde{S}_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu \tilde{S}_\nu$$

本研究の主結果として、[KT] と同様な議論をすることで、 $H_T^*(\mathrm{wGr}(d, n): \mathbb{Q})$ の構造定数を漸化的に計算することができることが分かった。紙面の都合上、細かい記号の説明はできないが、 w が表す量は $\mathrm{wGr}(d, n)$ に現れる重みである。

Theorem 0.4. $H_T^*(\mathrm{wGr}(d, n): \mathbb{Q})$ の構造定数は次の漸化式で完全に決定される：

$$\begin{aligned} (1) \quad c_{\lambda\lambda}^\lambda &= \prod_{(k,l) \in \mathrm{inv}(\lambda)} w_{(k,l)\lambda} \left(\frac{t_{(k,l)\lambda}}{w_{(k,l)\lambda}} - \frac{t_\lambda}{w_\lambda} \right), \\ (2) \quad w_\mu \left(\frac{t_\mu}{w_\mu} - \frac{t_\lambda}{w_\lambda} \right) c_{\lambda\mu}^\lambda &= \sum_{\mu': \mu' \rightarrow \mu} c_{\lambda\mu'}^\lambda, \\ (3) \quad w_\lambda \left(\frac{t_\lambda}{w_\lambda} - \frac{t_\nu}{w_\nu} \right) c_{\lambda\mu}^\nu &= \sum_{\lambda': \lambda' \rightarrow \lambda} c_{\lambda'\mu}^\nu - \sum_{\nu': \nu \rightarrow \nu'} \frac{w_\lambda}{w_{\nu'}} c_{\lambda\mu}^{\nu'}. \end{aligned}$$

実際、著者はこの漸化式を用いて $H_T^*(\mathrm{wGr}(2, 4): \mathbb{Q})$ の構造定数を全て計算した。

最後に、少し批判的な立場に立ってみると、この定理が主張することはあくまで漸化的であるし、組み合わせ論的に定義された類の幾何学的な意味も $(\overline{\mathrm{wGr}}_\lambda^\circ)$ があらわすコホモロジー類になるはずであるが) まだはっきりしていない。しかし、本研究によって、与えられた λ, μ, ν に対しては構造定数を計算して、その形を具体的に見て調べるようになってきた。この結果が重み付きグラスマンのコホモロジー環のより深い理解につながることを期待する。

参考文献

- [CR] A. Corti, and M. Reid, *Weighted Grassmannians*, Algebraic geometry, 141-163, de Gruyter, Berlin, 2002, arXiv:math.RT/0206011.
- [F] W. Fulton, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*, London Math. Soc. Student Texts 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), 25 — 83.
- [KT] A. Knutson, and T. Tao, *Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians*, Duke Math. J. **119** (2003), 221—260.

指数調和写像を用いた調和写像の存在定理

大森俊明*

東北大学大学院理学研究科数学専攻

§1 導入

本稿を通して (M, g) および (N, h) はそれぞれ m および n 次元のコンパクトで境界をもたない Riemann 多様体とする. C^∞ 級写像 $u : M \rightarrow N$ に対して

$$E(u) := \int_M |du|^2 d\mu_g$$

により定義される汎関数を考える. 但し $|du|$ は微分 du の g, h に関する Hilbert-Schmidt ノルムであり $d\mu_g$ は (M, g) の体積要素である. 汎関数 E の臨界点は**調和写像**と呼ばれ, 対応する第一変分公式は

$$\tau(u) := \operatorname{div}_g(du) = 0$$

によって与えられる. div_g は g に関する発散である.

調和写像は, 調和関数の最も単純な一般化でありながら, 非常に豊富な側面をもち, トポロジーや代数幾何など幅広い分野への応用を見せてきた. 特に現在もなお研究され続けている重要な問題としてその存在がある. 本稿では, 調和写像の古典的な存在理論を指数調和写像を用いた新しい方法で展開したい. 以下が主定理である.

定理 A ([4]). $(M, g), (N, h)$ をコンパクトで境界をもたない Riemann 多様体とし, (N, h) の断面曲率が N 上いたるところで非正であると仮定する. このとき汎関数

$$\mathbb{E}_\varepsilon(u) := \int_M \frac{e^{\varepsilon|du|^2} - 1}{\varepsilon} d\mu_g$$

の臨界点 $u_\varepsilon : (M, g) \rightarrow (N, h)$ のエネルギーが一様に有界な列 $\{u_\varepsilon; \mathbb{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_0\}_{\varepsilon>0}$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, ある調和写像 $u_0 : (M, g) \rightarrow (N, h)$ に一様収束する.

系として非正曲率多様体への調和写像の存在に関する次の重要な定理が証明できる.

系 (Eells-Sampson [2]). もし値域 (N, h) の断面曲率が N 上いたるところで非正ならば, 与えられたホモトピー類を代表する調和写像が存在する.

*E-mail address: sa6m07@math.tohoku.ac.jp

定理 B. $(M, g), (N, h)$ をコンパクトで境界をもたない Riemann 多様体とし, M の次元は 2 であると仮定する. このとき汎関数 $\mathbb{E}_\varepsilon$ の臨界点 $u_\varepsilon : (M, g) \rightarrow (N, h)$ のエネルギーが一様に有界な列 $\{u_\varepsilon; \mathbb{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_0\}$ は, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, ある有限個の点 $\{p_1, \dots, p_k\} \subseteq M$ の外で, ある $(M$ 全体で滑らかな) 調和写像 $u_0 : (M, g) \rightarrow (N, h)$ に一様収束する.

更に値域 N の 2 次元ホモトピー群が消えている場合は次が証明できる.

系 (Sacks-Uhlenbeck [5]). もし $\dim M = 2$ かつ N の 2 次元ホモトピー群が $\pi_2(N) = 0$ ならば, 与えられたホモトピー類を代表する調和写像が存在する.

§2 指数調和写像

定義. 写像 $u : (M, g) \rightarrow (N, h)$ が**指数調和写像**であるとは, $u : M \rightarrow N$ が C^∞ 級写像であってかつ Riemann 計量 g と h に関する汎関数

$$\mathbb{E}(u) := \int_M e^{|du|^2} d\mu_g$$

の臨界点であるときをいう. 対応する第一変分公式は次で与えられる:

$$\tau(u) + \langle \nabla |du|^2, du \rangle = 0.$$

最も特筆すべき点は, 常に最大の正則性をもつ指数調和写像が存在することである:

定理 (Duc [1]). $(M, g), (N, h)$ をコンパクトで境界をもたない Riemann 多様体とする. 任意のホモトピー類 $\mathcal{H} \in [M, N]$ は $\mathbb{E}$ -最小点を許容しそれは必然的に C^∞ 級である.

Duc の証明に少し手を加えることにより実際次が証明できる.

補題 1. $B_r(x) \subseteq M$ によって点 $x \in M$ を中心とする半径 $r > 0$ の測地球を表す.

$$\sup_{B_{1/2}(x)} |du|^2 \leq C_0 \int_{B_1(x)} (e^{|du|^2} - 1) d\mu_g.$$

ここで定数 $C_0 > 0$ は次元 $m = \dim M$, Ricci 曲率 $\text{Ric}^{(M, g)}$, 曲率テンソル $R^{(N, h)}$ および体積 $\text{vol}_g(B_1(x))$ のみに依存し, 更にもし (N, h) の断面曲率が N 上いたるところで非正ならば $R^{(N, h)}$ には依存しない.

§3 定理 A および定理 B の証明

[定理 A の証明] Riemann 計量 g と h に関する $\mathbb{E}_\varepsilon$ の臨界点 u_ε は, Riemann 計量 g と εh に関しては $\mathbb{E}_1$ の臨界点になっている. よって補題より

$$\sup_M |du_\varepsilon|_{g, \varepsilon h}^2 \leq C_0 \int_M (e^{|du_\varepsilon|_{g, \varepsilon h}^2} - 1) d\mu_g$$

が得られる. 但し, 仮定から h , よって εh に関する N の断面曲率は非正であることから, 定数 C_0 は曲率テンソル $R^{(N, \varepsilon h)}$ には依存しない. $|du_\varepsilon|_{g, \varepsilon h}^2 = \varepsilon |du_\varepsilon|_{g, h}^2$ であるから, 両辺を $\varepsilon > 0$ で割れば u_ε の勾配が上から一様に $C_0 E_0$ で抑えられることが判り, よって定理の結論が従う. $\square$

上の証明において, (N, h) の断面曲率に関する仮定がないと定数 C_0 は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき非有界である. しかし u_ε は Riemann 計量 $\varepsilon^{-1}g$ と h に関して見てもまた $\mathbb{E}_1$ の臨界点になっていることに注目する. そして補題から得られる評価

$$\sup_{B_{1/2}^{\varepsilon^{-1}g}(x)} |du_\varepsilon|_{\varepsilon^{-1}g, h}^2 \leq C_\varepsilon \int_{B_1^{\varepsilon^{-1}g}(x)} (e^{|du_\varepsilon|_{\varepsilon^{-1}g, h}^2} - 1) d\mu_{\varepsilon^{-1}g}$$

における定数 C_ε は, 今度は $\text{Ric}^{(M, \varepsilon^{-1}g)}$ に依存するがこれは $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する. $|du_\varepsilon|_{\varepsilon^{-1}g, h}^2 = \varepsilon |du_\varepsilon|_{g, h}^2$ であることから g と h に関して上の評価式を書き直すと

$$(3.1) \quad \sup_{B_{\sqrt{\varepsilon}/2}(x)} (\sqrt{\varepsilon})^2 |du_\varepsilon|^2 \leq C_0 (\sqrt{\varepsilon})^{2-m} \int_{B_{\sqrt{\varepsilon}}(x)} \frac{e^{\varepsilon |du_\varepsilon|^2} - 1}{\varepsilon} d\mu_g$$

となる. 今度は体積 $d\mu_{\varepsilon^{-1}g} = (\sqrt{\varepsilon})^{-m} d\mu_g$ が発散していることに注意. この評価式から, 特に, $(m-2)$ 次元 Hausdorff 測度が有限のある特異点集合 $\Sigma \subseteq M$ の外では, $\varepsilon |du_\varepsilon|^2$ は一様に有界であることが判る.

[定理 B の証明] 特に $\dim M = 2$ のときは (3.1) より $\varepsilon |du_\varepsilon|^2$ は M 全体で一様に有界となり, 更に, 与えられた $\delta > 0$ に対して有限個の点 $\{p_1, \dots, p_l\}$ の外では

$$\varepsilon |du_\varepsilon|^2 \leq \delta, \quad \forall \varepsilon \ll 1$$

が成り立つ. よって方程式 $\tau(u_\varepsilon) + \varepsilon \langle \nabla |du_\varepsilon|^2, du_\varepsilon \rangle = 0$ の非線型項は調和写像の方程式 $\tau(u) = 0$ のそれと同様の扱いができ, 結局, ある有限個の点 $\{p_1, \dots, p_k\}$ の外では

$$|du_\varepsilon|^2 \leq C_0, \quad \forall \varepsilon \ll 1$$

が成り立ち定理の結論が従う. □

参考文献

- [1] D. M. Duc, *Variational problems of certain functionals*, Internat. J. Math. **6** (1995), no. 4, 503–535.
- [2] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [3] H. Naito, *On a local Hölder continuity for a minimizer of the exponential energy functional*, Nagoya Math. J. **129** (1993), 97–113.
- [4] T. Omori, *On Eells-Sampson's existence theorem for harmonic maps via exponentially harmonic maps*, to appear in Nagoya Math. J.
- [5] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 1–24.

Normality of complex contact manifolds

今田 充洋*

慶應義塾大学大学院 基礎理工学専攻

1 序

実 $(2n+1)$ 次元多様体上の接触構造とは、大域的な 1 形式 η が存在して、

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

を満たすものであった (詳細は [2] など). この構造を奇数次元の複素多様体上に拡張したものを考えたい. この拡張は 1959 年の Kobayashi の論文 [7] に始まり, それ以来 Ishihara-Konishi [4], [5], Blair [3] らの研究により進展が見られている. 実接触幾何において, Sasaki [9] は概接触計量構造に対する normality を定義した. 現在では佐々木構造と呼ばれ, 近年, 物理学からの注目も集めている重要な存在となっている. 本講演ではこの normality という概念がどのように複素多様体上に拡張され, そこからどのような議論が出来るかを紹介したい.

2 定義

初めに, 用語の定義をしておく.

Definition 1. M を $(2n+1)$ 次元の複素多様体, $\{\mathcal{O}_\lambda\}$ をその開被覆とする. M が複素接触多様体であるとは, 以下の 1) と 2) を満たすものとする.

- 1) 各 $\mathcal{O}_\lambda$ において, 正則 1 形式 ω_λ がとれて, $\mathcal{O}_\lambda$ の各点で

$$\omega_\lambda \wedge (d\omega_\lambda)^n \neq 0 \text{ が成り立つ.}$$

- 2) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \emptyset$ ならば, その上に 0 でない正則関数 $h_{\lambda\mu}$ が存在し,

$$\omega_\lambda = h_{\lambda\mu} \omega_\mu \text{ が成り立つ.}$$

*e-mail address: imaddd@a6.keio.jp

各 $\mathcal{O}_\lambda$ において, $\mathcal{H}_\lambda = \{X \in T\mathcal{O}_\lambda \mid \omega_\lambda(X) = 0\}$ と定義しておく. $h_{\lambda\mu}$ たちは 0 でないので, $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$ 上で $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu$ が成り立つ. よって $\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}_\lambda$ は well-defined で, M 上の正則かつ, 可積分でない subbundle である. 我々はこれを horizontal subbundle と呼ぶことにする.

Definition 2. (M, J, g) を $(2n+1)$ 次元の Hermite 多様体 (J は複素構造, g は Hermite 計量) とし, $\mathcal{U} = \{\mathcal{O}_\lambda\}$ をその開被覆とする. M が複素概接触計量多様体とは, 以下の 1) と 2) を満たすものとする.

1) 各 $\mathcal{O}_\lambda$ において, 1 形式 u_λ と $v_\lambda = u_\lambda J$, $(1,1)$ -テンソル G_λ と $H_\lambda = G_\lambda J$, 単位ベクトル場 U_λ と $V_\lambda = -JU_\lambda$ が存在して, 以下を満たす.

$$\begin{aligned} H_\lambda^2 &= G_\lambda^2 = -id + u_\lambda \otimes U_\lambda + v_\lambda \otimes V_\lambda \\ g(G_\lambda X, Y) &= -g(X, G_\lambda Y) \\ g(U_\lambda, X) &= u(X) \\ G_\lambda J_\lambda &= -J_\lambda G_\lambda \\ G_\lambda U_\lambda &= 0 \\ u_\lambda(U_\lambda) &= 1, \end{aligned}$$

2) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$ 上に関数 a, b が存在して以下を満たす.

$$\begin{aligned} u_\mu &= au_\lambda - bv_\lambda \\ v_\mu &= bu_\lambda + av_\lambda \\ G_\mu &= aG_\lambda - bH_\lambda \\ H_\mu &= bG_\lambda + aH_\lambda \\ a^2 + b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Remark. $(M, \{\omega_\lambda\})$ を複素接触多様体とする. このとき

$$\omega_\lambda = u_\lambda - iv_\lambda$$

と 2 つの実形式に分解することで複素概接触計量構造を構成することが出来る [6]. これを少し区別するために, 複素接触計量構造と呼ぶ.

Example. $\mathbf{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)\}$ において正則 1 形式 ω を

$$\omega = (dz_3 - z_2 dz_1)/2$$

と定義することで, 複素接触多様体 $(\mathbf{C}^3, \omega)$ を得る. さらに上の分解を行うことで, 複素接触計量構造が Blair [1] により構成されている.

3 Normality

記号はこれまでの通りとする. [6] において, Ishihara-Konishi は複素概接触計量構造の normality を, 以下に定義する 2 つのテンソル S, T が恒等的に 0 になることとした.

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= [G, G](X, Y) + 2g(X, GY)U - 2g(X, HY)V + 2v(Y)HX \\ &\quad - 2v(X)HY + \sigma(GY)HX - \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX, \\ T(X, Y) &= [H, H](X, Y) - 2g(X, GY)U + 2g(X, HY)V + 2u(Y)GX \\ &\quad - 2u(X)GY + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX - \sigma(Y)GHX + \sigma(X)GHY. \end{aligned}$$

ここで, $[\cdot, \cdot]$ は Nijenhuis テンソルを表し, σ は g に対する Levi-Civita 接続 ∇ を用いて, $\sigma(X) = g(\nabla_X U, V)$ と定義する (詳細は [8] を参照されたい). 我々はこの条件を「I-K normality」と呼ぶことにする. 同じく [6] にて, 複素概接触計量多様体が I-K normality をもてば, (M, J, g) が Kähler 多様体になることが示されている. このような多様体の例として, Fubini-Study 計量をもった $\mathbf{CP}^{2n+1}$ が挙げられる [3]. ここで, 私の結果を一つ紹介したい.

Proposition. M 上の複素概接触計量構造が I-K normality を持つならば, 任意の $X \in \mathcal{H}$ に対して,

$$K(X, JX) + K(X, GX) + K(X, HX) = 6$$

が成り立つ. ここに, $K(X, Y)$ は X, Y により生成される平面による断面曲率を表すものとする.

つまり I-K normality を満たしているかどうかを, 断面曲率の計算によってチェックしようというものである. 実際に計算すると, 先の $\mathbf{CP}^{2n+1}$ において $K(X, JX) = 4$, $K(X, GX) = K(X, HX) = 1$ と求まり, 等式を満たすことが分かる. しかしこれ以外に I-K normality をもった複素 (概) 接触計量多様体はまだ見つかっていない. そこで Korkmaz は, 「具体例が見つからないのは, そもそもの I-K normality が強すぎる条件なのではないか?」という考えに基づき, 新たな normality を定義した.

Definition. [8] 複素接触計量多様体が normality を持つとは,

$$\begin{aligned} S(X, Y) = T(X, Y) = 0 \quad (\text{任意の } X, Y \in \mathcal{H} \text{ に対し}) \quad \text{かつ}, \\ S(U, Y) = T(V, Y) = 0 \quad (\text{任意の } Y \text{ に対し}) \end{aligned}$$

が成り立つことと定義する.

明らかに I-K normality よりも少し弱い. 本講演ではこの話題も踏まえたうえで, 私が現在取り組んでいる事についてお話するつもりである.

参考文献

- [1] C. baikoussis, D.Blair and F. Gouli-Andreou, *Holomorphic Legendre curves in the complex Heisenberg group*, Bull. inst math. Acad. Sinica, **26** (1998), 179-194.
- [2] D. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture notes in math. 509, Springer, Berlin, New York, 1976.
- [3] D. Blair, *Riemannian Geometry of contact and symplectic manifolds, second edition*, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, 2010.
- [4] S. Ishihara and M. Konishi, *Real contact 3-structure and complex contact structure*, Southeast Asian Bull. Math., **3** (1979), 151-161.
- [5] S. Ishihara and M. Konishi, *Complex almost contact manifolds*, Kōdai Math. J., **3** (1980), 385-396.
- [6] S. Ishihara and M. Konishi, *Complex almost contact structures in a complex contact manifold*, Kōdai Math. J., **5** (1982), 30-37.
- [7] S. Kobayashi, *Remarks on complex contact manifolds*, Proc. Amer. math. Soc., **10** (1959), 164-167.
- [8] B. Korkmaz, *Normality of complex contact manifolds*, Rocky Mountain J. of Math., **30** (2000), 1343-1380.
- [9] S. Sasaki, *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I*, Tôhoku Math. J., (2) **12** (1960) 459-476.

1 変数 star 積の適用

飯田麻理（東京理科大学理学研究科）

概 要

1970 年代に変形量子化代数あるいは star 積が考えられた．一般に star 積は $2n$ 変数で扱われるが，本研究では特に 1 変数 star 積を扱う．Jacobi の theta 関数は star 積を使った star exponential の無限和で表現され，theta 関数に関する諸公式も得られる．これを楕円関数に広げるためのステップとして，Eisenstein の ε_n 関数を star 積で扱うことを試みた．

1 star 積

1970 年代に古典力学と量子力学との飛躍をうめるための理論として変形量子化代数あるいは star 積という積が考えられた ([1])．これは古典力学を変形することによって量子力学への移行を連続的にとらえようとする試みのひとつであった．star 積は以下のように定義される．

Definition 1. $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n})$ を複素多項式の集合とする．任意の $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n})$ と任意の $\Lambda \in M(2n, \mathbb{C})$ について

$$f *_{\Lambda} g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \left(\sum_{k,\ell=1}^{2n} \overleftarrow{\partial u_k} \Lambda_{k,\ell} \overrightarrow{\partial u_{\ell}} \right) \right) g = fg + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + \cdots$$

ただし $u_k, u_{\ell} \in \mathbb{C}$ ， $\overleftarrow{\partial u_k}$ は左の関数 f に対する偏微分作用素， $\overrightarrow{\partial u_{\ell}}$ は右の関数 g に対する偏微分作用素， $\Lambda_{k,\ell}$ は行列 Λ の k, ℓ 成分を表す．

fg は通常の積、 $\hbar$ に関する 1 次の項は通常の f と g のポアソン積、 $\hbar$ に関する高次は f と g に関する双微分作用素である．この積によって得られる代数は量子力学の代数，すなわちワイル代数と同型なものである． $\hbar \rightarrow 0$ の極限で $*$ は通常の積に収束する．

大森・前田・吉岡はシンプレクティック多様体を対象として，M.Kontsevich はポアソン多様体を対象として star 積を研究し，それぞれの多様体上において star 積を用いた議論が可能であるということを明らかにした．

star 積の研究は一般に $2n$ 変数であるため，1 変数についてはこれまで考えられることがなかった．しかし大森・前田・宮崎・吉岡は star 積の定義に矛盾することなく 1 変数 star 積も考えうると指摘した ([2])．

2 1変数 star 積

ある行列 Λ を与え、1 変数 star 積を次のように定義する.

Definition 2.

$$f(v) *_{\rho} g(v) = f(v) \exp\left(\frac{\rho}{2} \overleftarrow{\partial v} \overrightarrow{\partial v}\right) g(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n (\partial v^n f(v)) (\partial v^n g(v))$$

ここで $\overleftarrow{\partial v}$, $\overrightarrow{\partial v}$ は f または g に対する偏微分作用素を表している. さらに,

Definition 3.

$$e^{\frac{\rho}{4} \partial^2} (v^n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\rho}{4}\right)^m (\partial^{2m} v^n), \quad e_{*_{\rho}}^{\alpha v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (v *_{\rho} \cdots *_{\rho} v)$$

等を定義することによって、いくつかの性質が得られる.

3 Jacobi の theta 関数への適用

例えば Jacobi の theta 関数は 1 変数 star 積を用いて表現し直すことができる. star 積で表現し直した star theta 関数 ϑ_* は従来の theta 関数 ϑ よりも簡略化したかたちで表されることがすでに分かっている ([2], [3], [5]). theta 関数は次のように表すことができる.

Proposition 1.

$$\begin{aligned} \vartheta_{1*_{\rho}}(v) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e_{*_{\rho}}^{(2n+1)\pi i v}, & \vartheta_{2*_{\rho}}(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{*_{\rho}}^{(2n+1)\pi i v} \\ \vartheta_{3*_{\rho}}(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{*_{\rho}}^{2n\pi i v}, & \vartheta_{4*_{\rho}}(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e_{*_{\rho}}^{2n\pi i v} \end{aligned}$$

ただし $\rho = \frac{-\tau i}{\pi}$, $q = e^{\rho \pi^2 i^2} = e^{-\rho \pi^2}$ さらに、次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} \vartheta_{1*_{\rho}}^2(v) &= \left(\sum_{\lambda}^e \sum_{\mu}^o - \sum_{\lambda}^o \sum_{\mu}^e \right) M(\lambda, \mu), & \vartheta_{2*_{\rho}}^2(v) &= \left(\sum_{\lambda}^e \sum_{\mu}^o + \sum_{\lambda}^o \sum_{\mu}^e \right) M(\lambda, \mu) \\ \vartheta_{3*_{\rho}}^2(v) &= \left(\sum_{\lambda}^e \sum_{\mu}^e + \sum_{\lambda}^o \sum_{\mu}^o \right) M(\lambda, \mu), & \vartheta_{4*_{\rho}}^2(v) &= \left(\sum_{\lambda}^e \sum_{\mu}^e - \sum_{\lambda}^o \sum_{\mu}^o \right) M(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

ただし $M(\lambda, \mu) = e^{\frac{\rho}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\pi^2} e^{2\lambda\pi i v}$ であり、 $\sum_{\lambda}^e$ は λ が偶数で動くものとする. このことを用いて、theta 関数の加法公式や相互関係式を直接計算で示すことができる.

Proposition 2.

$$\begin{aligned} \vartheta_{3*_{\rho}}^2(v) \vartheta_{3*_{\rho}}^2(a) + \vartheta_{1*_{\rho}}^2(v) \vartheta_{1*_{\rho}}^2(a) &= \vartheta_{3*_{\rho}}^2(0) \vartheta_{3*_{\rho}}(v+a) \vartheta_{3*_{\rho}}(v-a) \\ \vartheta_{1*_{\rho}}^4(v) + \vartheta_{3*_{\rho}}^4(v) &= \vartheta_{2*_{\rho}}^4(v) + \vartheta_{4*_{\rho}}^4(v) \quad (\text{ただし } a \text{ はパラメーター}) \end{aligned}$$

また、周期に関して star theta 関数では周期よりも擬周期のほうが見つけやすいという特徴がある.

4 Eisenstein による ε 関数への適用

1 変数 star 積を Eisenstein による ε 関数に適用することを考える.

Definition 4.

$$\varepsilon_n(x) = \sum_{e;\mu} \frac{1}{(x+\mu)^n} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{\mu=-M}^M \frac{1}{(x+\mu)^n}$$

ここで $\sum_{e;\mu}$ は Eisenstein 和を表す. $\varepsilon_n(x)$ は $n \geq 3$ の時は絶対収束する. したがって $n \geq 3$ のとき $\sum_{e;\mu} = \sum_{\mu}$ である. $\varepsilon_n(x)$ に対して次のような変形を考える.

$$\varepsilon_{n*}(x) = \frac{1}{x_*^n} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+\lambda)_*^n} + \frac{1}{(x-\lambda)_*^n} \right)$$

ここで $x_*^n = \underbrace{x * \cdots * x}_n$ である. また $x_*^1 = x$ であるが, $x_*^{-1} \neq x^{-1}$ であることに注意する必要がある. x_*^{-n} は x_*^n の $*$ による逆元であり,

$$x_*^{-n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} \exp_*(tx) dt$$

と表せる. 実際に $x * \exp_*(tx) = \frac{d}{dt} \exp_*(tx)$ を利用すれば $x_*^n * x_*^{-n} = 1$ となることがわかる.

ここで $\exp_*(\alpha x) = \exp(\frac{\rho}{4}\alpha^2) \exp(\alpha x)$ ($\text{Re } \rho < 0$) であり, $\rho \rightarrow 0$ とすれば $\varepsilon_{n*}(x)$ は $\varepsilon_n(x)$ に収束する. このことから, $\varepsilon_{n*}(x)$ は $\varepsilon_n(x)$ の拡張であることがわかる.

参考文献

- [1] F.Bayen, M.Flato, C.Fronsdal, A.Lichnerowicz, D.Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization.1. Deformations of Symplectic Structures*, ANNALS OF PHYSICS 111, 61-110, 1978
- [2] H.Omori, *Toward Geometric Quantum theory*, From Geometry to Quantum Mechanics In honor of Hideki Omori, PM252 213-252, 2007
- [3] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki, A.Yoshioka, *Orderings and Non-formal Deformation Quantization*, Letters in Mathematical Physics 82, 153-175, 2007
- [4] Andre Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 1976
- [5] Mari Iida and Akira Yoshioka, *Star Products and Applications*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, Volume20, 49-56, 2010

パラレルセッション 代数学

拡大次数を制限した類体塔の無限性

高橋 祐人 (名大多元数理)*

概 要

本研究では、類体塔の無限性と p 類体塔の無限性との間にある差を明らかにするため、類体塔の拡大次数に制限を加えたものについて考察する。講演者は、奇素数 l に関するある条件の下で、2 類体塔が有限であるが、拡大次数の素因数を 2 と l まで許した場合には無限回の拡大が可能になるような虚 2 次体が、無限個存在することを証明した。また、 $l = 3$ の場合には 2 類体塔の代わりに 3 類体塔の有限性を要求することも可能である。

1. 研究の背景

本研究の目的は、類体塔の無限性と p 類体塔の無限性との間にある差を考察することである。問題設定に先立って本節では、古典的な類体塔とその背景について述べる。

定義 1 (Hilbert 類体, Hilbert p 類体). 代数体 K に対して、その最大不分岐 Abel 拡大 (resp. 最大不分岐 Abel p 拡大) を K の Hilbert 類体 (resp. Hilbert p 類体) と呼ぶ。

類体論の教えるところにより、 K の Hilbert 類体 K_1 の Galois 群 $\text{Gal}(K_1/K)$ は K のイデアル類群 Cl_K と同型である。また、 K の Hilbert p 類体の Galois 群は Cl_K の p -Sylow 部分群と同型である。 K の Hilbert 類体および Hilbert p 類体は K 上有限次拡大であり、一意的に定まることに注意しておく。

定義 2 (類体塔, p 類体塔). K を代数体とする。 $K_0 = K$ とし、 K_i の Hilbert 類体 (resp. Hilbert p 類体) を K_{i+1} とすることで得られる体の拡大列

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset K_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$$

を K の類体塔 (resp. p 類体塔) と呼ぶ。

K_∞/K が有限次拡大であるとき、すなわち真の拡大が有限回で停止しているとき K の類体塔は有限であるといい、そうでないとき無限であるという。 p 類体塔の有限性も同様に定義される。

代数体の類体塔は、Furtwängler によって次の問題の形で初めて考察された。いわゆる類体塔問題である。

問題 (類体塔問題, [4] を参照). 代数体の類体塔は常に有限であるといえるか？

類体塔問題は当初、肯定的な解決が予想されていた。このような予想がなされた理由として、山村 [10] では Fermat の大定理との関連が指摘されている。背景にあるのは、次の事実である。

* e-mail: m09026e@math.nagoya-u.ac.jp

命題 3 ([7], Proposition 1, Proposition 2を参照). K を代数体とする. K の類体塔 (resp. p 類体塔) が有限である必要充分条件は, K のある有限次拡大 L が存在し, L の類数が 1 (resp. p と互いに素) となることである.

Kummer による, 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ における分解を利用した Fermat の大定理の証明は, p が非正則であるとき, すなわち p が $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の類数を割り切るときには適用できない. そこで, $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ を類数 1 の拡大体の中に埋め込むことで, この問題を回避することが期待されていたわけである.

しかし, 類体塔問題は現在では否定的に解決されている. Golod-Šafarevič [3] は 1964 年, 有限 p 群のホモロジー群の次元の間にある種の不等式が成立することを証明した. これを類体塔の Galois 群に適用することで, 次の定理が得られる.

定理 4 ([7], Theorem 3を参照). K を代数体とする. K の p 類体塔が有限であるならば,

$$d^{(p)}(\mathrm{Cl}_K) < 2 + 2\sqrt{r(K) + \delta^{(p)}(K)}$$

が成立する. ただし, 左辺は K のイデアル類群 Cl_K の p 階数, 右辺の $r(K)$ は K の無限素点の個数を表し, $\delta^{(p)}(K)$ は K が 1 の原始 p 乗根を含むとき 1, 含まないとき 0 と定める.

すなわち, イデアル類群の p 階数が充分大きな代数体を構成すれば, 定理 4 からその p 類体塔は無限となり, したがって, 命題 3 よりその類体塔も無限となることがわかる. こうして古典的な類体塔問題は否定的に解決された.

例 5. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13})$ とすると, 種の理論より $d^{(2)}(\mathrm{Cl}_K) = 5$ である. したがって定理 4 より K の 2 類体塔は無限であり, 特に類体塔も無限である.

2. 問題と方針

前節で述べたとおり, ある素数 p に対して p 類体塔の無限性を証明することで類体塔の無限性を得る手法は常套的なものである.

しかし, 興味深いことにこの逆は成立しない. 実際に 1980 年, Schmithals [8] により反例となる虚 2 次体, すなわちすべての素数 p に対して p 類体塔が有限であるにもかかわらず, 類体塔は無限であるような虚 2 次体の例が指摘されている.

彼が指摘した例は虚 2 次体のみであったが, 講演者は実 2 次体についても同様の具体例をいくつか発見した. さらに, 計算ソフトウェア KASH 3 [5] を用いて探索したところ, 同様の条件を満たす 2 次体は少なくとも 233 個存在することが確認された.

以上の事実から, 類体塔が無限であることと p 類体塔が無限であることとの間にはかなりの差があるのではないか, という疑問が自然に生じる. 特に 2 次体の場合に関して定式化すれば, 次のような問題が生じることになる.

問題. すべての素数 p に対して p 類体塔が有限であるにもかかわらず, 類体塔は無限であるような 2 次体は, 無限個存在するか?

しかしながら, この問題を直接取り扱うことは非常に困難であると考えられる. 原因は, p 類体塔の有限性を判定する手段が極めて限られていることにある.

定理 6 (Taussky [9], Theorem I, Theorem II). K を代数体とする. K のイデアル類群の p -Sylow 部分群が巡回群, もしくは $p = 2$ で四元群であるならば, K の p 類体塔は

有限である.

奇素数 p に対して, 2 次体の p 類体塔の有限性を判定するための条件は, これ以外にはほとんど知られていない. したがって, すべての素数 p に対して p 類体塔の有限性を要求するためには, イdeal類群の奇数部分が巡回群であることを証明せねばならず, これはまったく現実的ではない.

そこで, 問題を扱いやすくするために, 「すべての素数に対して」という条件は一旦保留し, あらかじめ与えたいいくつかの素数に対してのみ p 類体塔の有限性を要求することを考える. この方針の下, 講演者は次のような対象を新しく定義した.

定義 7 (P 制限類体塔). K を代数体とし, P を素数からなる集合とする. $K_0^P = K$ とし, すべての $p \in P$ に渡って K_i^P の Hilbert p 類体を合成したものを K_{i+1}^P とすることで得られる体の拡大列

$$K = K_0^P \subset K_1^P \subset \cdots \subset K_i^P \subset K_{i+1}^P \subset \cdots \subset K_\infty^P = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i^P$$

を K の P 制限類体塔と呼ぶこととする.

類体塔や p 類体塔の場合と同様に, K_∞^P/K が有限次拡大であるとき, K の P 制限類体塔は有限であるということとする.

P 制限類体塔は, 従来の類体塔および p 類体塔を内包する概念である. 実際, P が素数全体からなる集合である場合が従来の類体塔に相当し, 素数ただひとつからなる集合である場合が従来の p 類体塔に相当する.

命題 3 の類似として, P 制限類体塔の有限性に関しても次が事実が成立する.

命題 8. K を代数体とし, P を素数からなる集合とする. K の P 制限類体塔が有限である必要充分条件は, K のある有限次拡大 L が存在し, L の類数がすべての $p \in P$ に対して互いに素となることである.

ここから, 類体塔と p 類体塔との関係の類似として, ある $p \in P$ に対して p 類体塔が無限であるならば, P 制限類体塔もまた無限であることがわかる. しかしすでに見たとおり, すべての素数 $p \in P$ に対して p 類体塔が有限であっても, P 制限類体塔が有限であるとは限らない.

3. 主結果

今回は, P が素数 2 個からなる集合である場合に関して扱う. 2 次体のイdeal類群の 2 階数は種の理論を用いて比較的容易に統制できるため, l を奇素数とし, $P = \{2, l\}$ の場合を考える.

この場合に関して, Byeon-Lee [2] および Lemmermeyer [6] の結果を援用することで, 講演者は以下の結果を得た.

定理 A. l を奇素数とする. さらに, ある奇数 $a \geq 3$ と, $p \equiv 5, q \equiv 7 \pmod{8}$ かつ $(p/q) = -1$ を満たすある素数 p, q が存在して

$$4a^l = p + q$$

と表されるとき, 2 類体塔が有限であり, かつ $\{2, l\}$ 制限類体塔が無限であるような虚 2 次体が無限個存在する.

この定理が主張しているのはあくまでも 2 類体塔の有限性のみであり、 l 類体塔の有限性に関しては何も述べていないことに注意しておく。

2 次体の類数の 3 非可除性は、それ以外の奇素数に関する非可除性よりも先行研究が豊富である。したがって、2 次体の 3 類体塔の有限性に関してもより多くの情報が得られることが期待される。この方針の下、Byeon [1] による手法を援用することで、講演者は以下の結果を得た。

定理 B. 3 類体塔が有限であり、かつ $\{2, 3\}$ 制限類体塔が無限であるような 2 次体は、実 2 次体、虚 2 次体ともにそれぞれ無限個存在する。

しかしながらこの場合、逆に 2 類体塔の有限性は保証できない。これは、手法としてある条件を満たすような基本判別式の密度評価を用いており、具体的な構成がわからないことが原因である。

最後に、定理 A について具体例をひとつ挙げておく。

例 9. $l = 17$ の場合について考える。素数 p, q を $p = 516560573, q = 79$ と取ると、 $p \equiv 5, q \equiv 7 \pmod{8}$ かつ $(p/q) = -1$ であり、

$$4 \cdot 3^{17} = 516560652 = p + q$$

となる。したがって定理 A より、2 類体塔は有限であるにもかかわらず、 $\{2, 17\}$ 制限類体塔は無限であるような虚 2 次体が無限個存在することがわかる。

なお、直接計算により、700 以下のすべての奇素数 l に対して定理 A の仮定が成立することが確認された。

参考文献

- [1] D. Byeon, Class numbers of quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{tD})$, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 11, 3137–3140.
- [2] D. Byeon and S. Lee, Divisibility of class numbers of imaginary quadratic fields whose discriminant has only two prime factors, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **84** (2008), no. 1, 8–10.
- [3] Е.С. Голод и И.Р. Шафаревич, О башне полей классов, Изв. Акад. Наук. СССР, серия матем. **28** (1964), 261–272.
- [4] H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I: Klassenkörpertheorie, Physica-Verlag, (1965).
- [5] The KANT Group, KASH 3, <http://www.math.tu-berlin.de/~kant/kash.html>, Accessed Dec. 23, 2011.
- [6] F. Lemmermeyer, On 2-class field towers of some imaginary quadratic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **67** (1997), 205–214.
- [7] P. Roquette, On class field towers, in Algebraic number theory (J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic Press, (1967), 231–249.
- [8] B. Schmithals, Konstruktion imaginärquadratischer Körper mit unendlichem Klassenkörperturm, Arch. Math. (Basel) **34** (1980), no. 4, 307–312.
- [9] O. Taussky, A remark on the class field tower, J. London Math. Soc. **12** (1937), 82–85.
- [10] 山村健, 代数体の類体塔について—サーベイ, 第 4 回北陸数論研究会報告集, 金沢大学, (2005), 1–20.

TORSION ON THETA DIVISORS OF HYPERELLIPTIC JACOBIANS AND p -ADIC SATO THEORY

宮坂 宥憲

東北大学大学院理学研究科

ABSTRACT. 本講演では, 方程式 $y^2 = x^{2g+1} + x$ ($g \geq 2$) によって定義される超楕円曲線の Jacobian 多様体のテータ因子上に, ある位数の torsion が存在しない, という結果 ([5]) を紹介する. 主結果の証明方法には, 素数次フェルマー曲線の巡回商に対して類似の結果を示した, Anderson による p -進タウ関数を用いた手法を用いる. また本稿の主結果は, 東北大学の山崎隆雄准教授との共同研究に基づいている.

1. INTRODUCTION

X を標数 0 の体 K 上の 滑らかな射影かつ連結な種数 2 以上の曲線とし, J を X の Jacobian 多様体, Z を J の閉部分多様体とする. J_{tor} を J の torsion 部分群としたとき, Raynaud の定理 (の一部) によって, $J_{\text{tor}} \cap Z$ は次のどちらかの条件の下で有限集合となる:

- (a) $Z = X$ が Abel-Jacobi 写像による J への X の埋め込みの像,
- (b) J が absolutely simple.

ここで (a)(b) の場合に次の自然な問題が考えられる:

Problem 1. 有限集合 $J_{\text{tor}} \cap Z$ を具体的に決定せよ.

Coleman による, X を Fermat 曲線としたときに有限集合 $J_{\text{tor}} \cap X$ を具体的に決定した結果を始めとして, (a) の場合における Problem 1 に関する研究はこれまでのところ数多くある. (この問題の survey として, 例えば [7].)

一方で Anderson は, J が (b) を満たし, $Z = \Theta$ が J のテータ因子である場合を考察した. 彼は X が 素数次 Fermat 曲線の巡回商であるとき, ある位数の torsion が Θ 上に存在しないことを示した (詳細は下の Remark 5). その証明には, 佐藤タウ関数が用いられる. 佐藤タウ関数は, KP 方程式などの完全可積分方程式のソリトン解を記述する関数であって, いわゆる「佐藤理論」において中心的な役割を成す関数である (詳細は下の Remark 6). 彼はその理論の p -進類似を発展させることで Problem 1 のような数論幾何学的な問題への応用を与えた. 我々は今回, X が超楕円曲線である場合に, Anderson の理論を用いて類似の結果を証明した.

Date: December 20, 2011.

This research is supported by JSPS Research Fellowship for Young Scientists.

2. MAIN RESULTS AND SOME REMARKS

次に主結果を具体的に述べる. g を 2 以上の整数とし, K を標数 0 の体で 1 の原始 $4g$ 乗根 ζ を含むとする. X を種数 g の K 上の超楕円曲線で次の方程式で与えられるものとする:

$$y^2 = x^{2g+1} + x. \quad (2.1)$$

$\infty \in X(K)$ を, 関数 x と y が極にもつ閉点とする. X の自己同型写像 r を $r(x, y) = (\zeta^2 x, \zeta y)$ によって定義する. $G := \langle r \rangle$ を $\text{Aut}(X)$ の部分群 (位数 $4g$ の巡回群) とする. このとき X の Jacobian 多様体 J は, G の作用によって $\mathbb{Z}[G]$ -加群とみなされる. (ここで, Aoki の結果により J は absolutely simple.) J のテータ因子 $\Theta \subset J$ を, $\mathcal{L} \in J$ が $H^0(X, \mathcal{L}((g-1)\infty)) \neq \{0\}$ を満たす集合として定義する.

次に素数 p を $p \equiv 1 \pmod{4g}$ を満たすものとし, p の上の素イデアル $\wp \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ をとる. χ を合成写像

$$G \xrightarrow{r \mapsto \zeta} \mathbb{Z}[\zeta]^* \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}[\zeta]/\wp)^* = \mathbb{F}_p^*$$

によって定義する. このとき $i = 0, 1, \dots, 4g-1$ に対して次が示される:

$$\dim_{\mathbb{F}_p} J[p]^{\chi^i} = \begin{cases} 0 & (i : \text{even}) \\ 1 & (i : \text{odd}), \end{cases}$$

ここで $J[p]^{\chi^i} := \{\mathcal{L} \in J[p] \mid r^* \mathcal{L} = \chi^i(r) \mathcal{L}\}$. このとき我々は次の結果を得た.

Theorem 2. $4g$ と互いに素な $i \in \{1, 3, \dots, 4g-1\}$ に対し,

$$(J[p]^{\chi^i} + J[2]) \cap \Theta \subseteq J[2].$$

Theorem 3. K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする. Q を X の閉点とし, $\mathcal{L}_Q := \mathcal{O}_X(Q - \infty)$ とおく. 仮定として, Q の座標 $x(Q), y(Q)$ は K の整数環に属しているとする. このとき $4g$ と互いに素な $i \in \{1, 3, \dots, 4g-1\}$ に対し,

$$(J[p]^{\chi^i} + \mathcal{L}_Q) \cap \Theta = \{\mathcal{L}_Q\}.$$

Remark 4. 曲線 (2.1) が $g = 2$ の場合, Boxall-Grant [3] によって $\Theta \cap J_{\text{tor}}$ は具体的に決定されている. (代数閉体上で 22 個の点からなる.)

Remark 5. 比較のため, Anderson [2] の結果を述べる. l を奇素数, 整数 $a \geq b > 1$ を $l+1 = a+b$ を満たすものとし, 1 の原始 l 乗根 ζ_l をとる. X を方程式

$$y^l = x^a(1-x)^b$$

によって定義される滑らかな射影曲線とする. J, Θ を上と同様に定義し (ここで Koblitz-Rohrlich の結果により, J は absolutely simple), X の自己同型写像 γ を $\gamma(x, y) = (x, \zeta_l y)$ によって定義する. この作用は J に $\mathbb{Z}[\zeta_l]$ -加群の構造を与える. $\mathbb{Z}[\zeta_l]$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し, J の $\mathfrak{a}$ -torsion 部分群を $J[\mathfrak{a}]$ と書く. 素数 p を $p \equiv 1 \pmod{l}$ を満たすものとし, p の上の素イデアル $\wp \subset \mathbb{Z}[\zeta_l]$ をとる. このとき Anderson は次の事を証明した:

$$(J[\wp] + J[(1 - \zeta_l)]) \cap \Theta \subseteq J[(1 - \zeta_l)].$$

Grant [4] は X が hyperelliptic であるという仮定において (つまり $a \in \{2, (l+1)/2, l-1\}$ のとき), 次のことを示す事で Anderson の結果を改良した: すべての $n \geq 1$ に対し,

$$(J[\wp^n] + J[(1 - \zeta_l)]) \cap \Theta \subseteq J[(1 - \zeta_l)].$$

(ただし彼は証明において Anderson の理論は用いていない.)

Remark 6. 次の非線形偏微分方程式は KdP 方程式と呼ばれる:

$$4u_t - 12uu_x - u_{xxx} = 0$$

(ここで $u = u(t, x)$). また次の方程式は KP 方程式と呼ばれる.

$$(4u_t - 12uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0$$

(ここで $u = u(t, x, y)$). これらのソリトン方程式とよばれる微分方程式たちは, 代数曲線と非常に深いつながりをもっていることが知られている. (たとえば, $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線に付随する Weierstrass の $\wp$ -関数は, KdV 方程式の解を与える.) 「タウ関数」は, KdV 方程式または KP 方程式を含む一連の微分方程式系 (KdV 階層または KP 階層と呼ばれる) の解を表す master function と見なされるものである. 「佐藤理論」は, そのタウ関数が無限次元グラスマン多様体 (Sato Grassmannian) 上の各点に対応して得られるというものである. Anderson はこの理論の p -進類似を発展させることによって上述の結果を証明し, 我々も今回それを引用した. (KdV 方程式等に関する survey として [1] または [6] を挙げておく.)

REFERENCES

- [1] E. Arbarello, *Sketches of KdV*, Symposium in Honor of C. H. Clemens (Salt Lake City, UT, 2000), Contemp. Math., vol. 312, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 9–69.
- [2] G. W. Anderson, *Torsion points on Jacobians of quotients of Fermat curves and p -adic soliton theory*, Invent. Math. **118** (1994), no. 3, 475–492.
- [3] J. Boxall and D. Grant, *Examples of torsion points on genus two curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 10, 4533–4555.
- [4] D. Grant, *Torsion on theta divisors of hyperelliptic Fermat Jacobians*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1432–1438.
- [5] Y. Miyasaka and T. Yamazaki, *Torsion points on hyperelliptic Jacobians via Anderson’s p -adic soliton theory*, arXiv:1111.2973v1.
- [6] G. Segal and G. Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1985), no. 61, 5–65.
- [7] P. Tzermias, *The Manin-Mumford conjecture: a brief survey*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), no. 6, 641–652.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, SENDAI 980-8578, JAPAN
E-mail address: sa7m27@math.tohoku.ac.jp

On alternating analogues of the Mordell-Tornheim double and triple zeta values

岡本卓也 (Takuya Okamoto)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
博士後期課程 3 年

1 多重ゼータ関数の *parity result*

リーマンゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s},$$

は数論や数理解物理の分野などで重要な役割を果たしている. 1735 年に, Euler は

$$\zeta(2) = \pi^2/6.$$

という公式を与えた. また, その一般化である

$$\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!}, \quad (1.1)$$

は広く知られている. ただし, n は正の整数, B_n は位数 n のベルヌーイ数である. また, Euler [3] は

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{m_1, \dots, m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} (m_1 + m_2)^{-s_2},$$

という 2 重級数を導入して, それらが絶対収束する領域にある正の整数点での値を考察した. 特に, [3] では「どのような正の整数 p_1, p_2 に対して, $\zeta(p_1, p_2)$ が有理係数の $\{\zeta(j) \mid 2 \leq j \leq p_1 + p_2\}$ の多項式として表せるか?」という問題を考えていたように思える. これは (1.1) の結果の拡張として捉えられる. 20 世紀に入り, 上の 2 重級数を一般化した

$$\zeta_{EZ,r}(s_1, \dots, s_r) = \sum_{m_1, \dots, m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} (m_1 + m_2)^{-s_2} \cdots (m_1 + m_2 + \cdots + m_r)^{-s_r},$$

という Euler-Zagier 型多重ゼータ関数が導入された. Ihara, Kaneko, Zagier [5] や Tsumura [13] は独立に異なる方法を用いて, 上で述べた [3] で考えられていた問題の一般化の答えを与えた.

Theorem 1.1. ([5, Corollary 8], [13, Theorem]) r を正の整数とする. 正の整数 $p_1, \dots, p_r$ に対して, r と $p_1 + \cdots + p_r$ の偶奇が異なるのならば, $\zeta_{EZ,r}(p_1, \dots, p_r)$ は $\zeta_{EZ,k}(q_1, \dots, q_k)$ の積の有理線形結合で表すことができる. ただし, $q_1, \dots, q_k$ は正の整数で $k < r$ とする.

Theorem 1.1 の $n = 2$ のときは Tornheim [10] により示され, $n = 3$ のときは Borwein, Girgensohn [2] により示されている. 前にも述べたがこの結果は [3] で考えられていた問題の解答を与えている. このような (1.1) の結果の一般化として考えられる Theorem 1.1 の結果は *parity*

result と呼ばれ, 多重ゼータ関数の重要な性質の 1 つである. Borwein, Borwein, Girgensohn [1] や Huard, Williams, Zhang [4] は Theorem 1.1 の $r = 2$ のときの明示公式を与え, また, Borwein, Girgensohn [2] はある仮定の下での Theorem 1.1 の $r = 3$ のときの明示公式を与えている.

このような *parity result* は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数だけではなく, 様々な多重ゼータ関数に対して知られている. 例えば, Matsumoto [6] によって導入された Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \dots, s_r; s_{r+1}) = \sum_{m_1, \dots, m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \cdots m_r^{-s_r} (m_1 + m_2 + \cdots + m_r)^{-s_{r+1}}, \quad (1.2)$$

に対しても *parity result* が成り立つことが知られている. 実際には, Tornheim [10] は $r = 2$ のときの Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の *parity result* を示し, Tsumura [14] は一般的な Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の *parity result* を示した. また, Huard, Williams, Zhang [4] や Onodera [9] は独立に Tornheim や Tsumura の結果の明示公式を与えた.

2 類似 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の *parity result*

今回は Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の類似の関数

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{b_1, \dots, b_r}(s_1, \dots, s_{r+1}) &= \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} (2m_1 + b_1)^{-s_1} \cdots (2m_r + b_r)^{-s_r} \\ &\quad \times (2m_1 + \cdots + 2m_r + b_1 + \cdots + b_r)^{-s_{r+1}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

の *parity result* について考える. ただし, $b_1, \dots, b_r \in \{1, 2\}$ とする. (2.1) は $s_1, \dots, s_{r+1}$ の関数として, 全 $\mathbb{C}^{r+1}$ -空間に有理型で解析接続され, その possible singularities は明示的に決定されていることに注意する ([7, Theorem 3.6] を参考). また, [11], [12], [15] では, Tsumura は $\mathfrak{T}_{1,2}$ に対しての *parity result* を示している. 実際には彼は「正の整数 p_1, p_2, p_3 に対して, $p_1 + p_2 + p_3$ が奇数で $p_3 \geq 2$ ならば $\mathfrak{T}_{1,2}(p_1, p_2, p_3)$ が $\{\zeta(j) \mid 2 \leq j \leq p_1 + p_2 + p_3\}$ の積の有理係数の線形結合として表せる」ことを示した. さらに, 次の明示公式も与えた.

Theorem 2.1. ([15, Theorem 3.4]) p_1, p_2, p_3 を $p_3 \geq 2$ と $p_1 + p_2 + p_3 \equiv 1 \pmod{2}$ を満たす正の整数とする. このとき,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{1,2}(p_1, p_2, p_3) &= -3^0(p_1, p_2, p_3) + 2 \sum_{\nu=0}^{[(p_3-2)/2]} \sum_{\mu=0}^{[(p_3-2-2\nu)/2]} \rho_1(2\mu+1) \\ &\quad \times 3^1(p_1, p_2, p_3 - 1 - 2\nu - 2\mu) \frac{(-1)^\nu (\pi/2)^{2\nu}}{(2\nu+1)!} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $q \in \{1, 2\}, l \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}, \lambda_j = (1 + (-1)^j)/2$ に対して,

$$\begin{aligned} 3^q(p_1, p_2, p_3) &= \sum_{j=0}^{p_1} \rho_1(p_1 - j) (-1)^j \lambda_{p_1+1+j} \\ &\quad \times \sum_{\nu=0}^j \binom{p_3 - 1 + j - \nu}{p_3 - 1} \frac{(-\pi/2)^\nu}{\nu!} \chi_2^{\nu+q} \left(\frac{\pi}{2}, p_3 + j + p_2 - \nu \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{p_2} \rho_2(p_2 - j)(-1)^j \lambda_{p_2+j} \\
& \times \sum_{\nu=0}^j \binom{p_3 - 1 + j - \nu}{p_3 - 1} \frac{(-\pi/2)^\nu}{\nu!} \chi_1^{\nu+q}\left(\frac{\pi}{2}, p_3 + j + p_1 - \nu\right), \\
\chi_q^l(\theta, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^{(p)}((2n+q)\theta)}{(2n+b)^r}, \\
\rho_q(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+b)^r}
\end{aligned}$$

とする.

[9] の方法を応用することで, この結果よりも簡潔な *parity result* に関する $\mathfrak{T}_{b_1, b_2}$ の明示公式を与えることができた. それは次のようなものである.

Theorem 2.2. ([8, Theorem 4.1]) p_1, p_2, p_3 を $p_1 + p_2 + p_3 \in 2\mathbb{N} + 1$ を満たす正の整数とする. $b_1, b_2 \in \{1, 2\}$ にたいして,

$$\mathfrak{T}_{b_1, b_2}(p_1, p_2, p_3) = (-1)^{p_1} \mathfrak{J}_{(b_1, b_3; b_2)}(p_1, p_3; p_2) + (-1)^{p_2} \mathfrak{J}_{(b_2, b_3; b_1)}(p_2, p_3; p_1),$$

が成り立つ. ただし, b_3 は $b_3 \equiv b_1 + b_2 \pmod{2}$ を満たす $b_3 \in \{1, 2\}$ で, 正の整数 q_1, q_2, q_3 と $a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{J}_{(a_1, a_2; a_3)}(q_1, q_2; q_3) \\
&= \sum_k \left\{ \binom{q_1 + q_2 - 1 - 2k}{q_1 - 1} (\delta_{a_2, 1} + (-1)^{a_2} 2^{-2k}) + \binom{q_1 + q_2 - 1 - 2k}{q_2 - 1} (\delta_{a_1, 1} + (-1)^{a_1} 2^{-2k}) \right\} \\
& \quad \times \zeta(2k) \mathfrak{T}_{a_3}(q_3, q_1 + q_2 - 2k)
\end{aligned}$$

とする. また, この和は $k \in [0, \max\{q_1, q_2\}/2]$ を満たす整数を全てわたり, $\delta_{a, 1}$ は *Kronecker's delta* とする.

Remark. $\mathfrak{T}_{2, 2}(p_1, p_2, p_3) = 2^{-p_1 - p_2 - p_3} \zeta_{MT, 2}(p_1, p_2, p_3)$ に注意すると, Theorem 2.2 は Onodera の $r = 2$ のときの結果の一般化である ([9, Theorem 3, Example 3.1] を参照のこと).

Example. $\mathfrak{T}_{1, 2}(p_1, p_2, 1)$ のいくつかの具体例を与えておく:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{1, 2}(1, 1, 1) &= \frac{7}{16} \zeta(3), \\
\mathfrak{T}_{1, 2}(3, 1, 1) &= \frac{31}{64} \zeta(5) - \frac{2}{32} \zeta(2) \zeta(3), \\
\mathfrak{T}_{1, 2}(1, 3, 1) &= \frac{31}{64} \zeta(5) - \frac{7}{32} \zeta(2) \zeta(3), \\
\mathfrak{T}_{1, 2}(2, 2, 1) &= -\frac{31}{64} \zeta(5) + \frac{5}{16} \zeta(2) \zeta(3), \\
\mathfrak{T}_{1, 2}(5, 1, 1) &= \frac{127}{256} \zeta(7) - \frac{3}{128} \zeta(2) \zeta(5) - \frac{15}{128} \zeta(4) \zeta(3), \\
\mathfrak{T}_{1, 2}(1, 5, 1) &= \frac{127}{256} \zeta(7) - \frac{31}{128} \zeta(2) \zeta(5) - \frac{7}{128} \zeta(4) \zeta(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{1,2}(4, 2, 1) &= -\frac{127}{256}\zeta(7) + \frac{17}{64}\zeta(2)\zeta(5) + \frac{15}{128}\zeta(4)\zeta(3), \\ \mathfrak{T}_{1,2}(2, 4, 1) &= -\frac{127}{256}\zeta(7) + \frac{17}{64}\zeta(2)\zeta(5) + \frac{7}{128}\zeta(4)\zeta(3), \\ \mathfrak{T}_{1,2}(3, 3, 1) &= \frac{127}{256}\zeta(7) - \frac{17}{64}\zeta(2)\zeta(5).\end{aligned}$$

最後に, [8] では, Theorem 2.2 の結果の他に同様の方法を用いることで, $\mathfrak{T}_{b_1, b_2, b_3}$ の明示公式も与えている. また, これらの結果を用いることで, 他の多重ゼータ関数の *parity result* の明示公式も与えている.

参考文献

- [1] D. Borwein, J. M. Borwein and R. Girgensohn, Explicit evaluation of Euler sums, Proc. Edinburgh Math. Soc. **38** (1995), 277-294.
- [2] J. M. Borwein and R. Girgensohn, Evaluation of triple Euler sums, Electron. J. Combin. **3** (1996), R23.
- [3] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1775), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.
- [4] J. G. Huard, K. S. Williams and N.-Y. Zhang, On Tornheim's double series, Acta Arith. **75** (1996), 105-117.
- [5] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Preprints of the Max-Planck-Institut f'ur Mathematik, 2004-100 (2004).
- [6] K. Matsumoto, On analytic continuation of various multiple zeta-functions, in: M. A. Bennett et al.(Eds), Number Theory for the Millennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417-440.
- [7] T. Okamoto, Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type B_r , JP Journal of Algebra, Number Theory & Applications. **22** (2011), 1-44.
- [8] T. Okamoto, On alternating analogues of the Mordell-Tornheim triple zeta values, Preprint, submitted.
- [9] K. Onodera, Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 1463-1485.
- [10] L. Tornheim, Harmonic double series, Amer. J. Math., **72** (1950), 303-314.
- [11] H. Tsumura, On alternating analogues of Tornheim's double series, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3633-3641.
- [12] H. Tsumura, Evaluation formulas for Tornheim's type of alternating analogues double series, Math. Comp. **73** (2004), 251-258.
- [13] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, Acta Arith. **111** (2004), 27-42.
- [14] H. Tsumura, On Mordell Tornheim zeta values, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2387-2393.
- [15] H. Tsumura, On alternating analogues of Tornheim's double series II, Ramanujan J. **18** (2009), no. 1, 81-90.

自然数を $8s$ 個の平方数で表す方法の個数の明示公式

田坂浩二 (九州大学数理学府)

概要

整数論の古典的な問題として, 「自然数 N がいつ n 個の平方数の和で書けるか. また, 書けたとしたら何通りあるか.」といった問題がある. 今回, $n = 8s$ ($s \geq 2$) におけるある種の明示公式を得たのでそれを紹介する.

1 序

自然数 n を s 個の平方数の和で表す方法の個数を $r_s(n)$ と表記する:

$$r_s(n) := \#\{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^s \mid n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2\}.$$

[2, 3] 等にあるように, $r_s(n)$ の研究の歴史は古く, 多くの問題が考えられており, また, 様々な先行結果が知られている. 今回は特に, $r_s(n)$ の明示公式について知られている結果の主要なものをいくつか紹介し, 次の節で主結果を述べる.

明示公式における最初の結果は Gauss(1801) と Jacobi(1829) によって与えられた, 以下の $r_2(n)$ に関するものである:

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)).$$

ここで, $d_j(n)$ は n の $\text{mod } 4$ で j と合同な正の約数の個数を表す. テータ関数

$$\theta(q) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2}$$

を考えると, $\theta(q)^s$ は $r_s(n)$ の母関数である. 母関数 $\theta(q)^s$ を他の級数で表記するというにより $r_s(n)$ の明示公式を得られるが, Jacobi は楕円関数の理論を用いて, $\theta(q)^s$ を Lambert 級数で表記することにより $r_4(n), r_6(n), r_8(n)$ に関する明示公式を示した:

$$\begin{aligned} r_4(n) &= 8 \sum_{\substack{d|n \\ d \not\equiv 0 \pmod{4}}} d, & r_6(n) &= 4 \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 3 \pmod{4}}} d^2 - \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \pmod{4}}} d^2 \right) + 16 \left(\sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \equiv 1 \pmod{4}}} d^2 - \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \equiv 3 \pmod{4}}} d^2 \right), \\ r_8(n) &= (-1)^n 16 \sum_{d|n} (-1)^d d^3. \end{aligned}$$

よく知られるように, $r_4(n)$ は Lagrange による. さらに, $r_{10}(n), r_{12}(n)$ 等の公式も知られるが, 上記のような単純な約数和関数のみを用いた明示公式は得られていない (カスプ形式の存在と関連している).

三角数における表現の個数を

$$t_s(n) := \sharp\{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s \mid n = \frac{x_1(x_1+1)}{2} + \dots + \frac{x_s(x_s+1)}{2}\}$$

とおく. $t_s(n)$ に対し, Kac 氏と Wakimoto 氏 ('94 [5]) は $t_{4j^2}(n), t_{4j^2+4j}(n)$ ($j \geq 1$) の明示公式を予想した. Milen 氏 ('02 [7]) はこの予想を証明し, さらに $r_{4j^2}(n), r_{4j^2+4j}(n)$ を j 個のある約数和関数の積の線形和で表す公式を得た (Ono '02 [8] も参照). これにより, $s = 4, 8, 16, 24, 36, 48, \dots$ に対する $r_s(n)$ の公式が得られるわけだが, Chan 氏と Chua 氏 ('03 [1]) は $s = 32$ の場合も 2 つのある約数和関数の積の線形和でかけることを示した. 彼らは同じ論文の中で, s が 16 以上の 8 の倍数であるときはいつでも 2 つのある約数和関数の積の線形和でかけることを予想した (今回の主結果はこの予想の解決). Chan-Chua 予想を受け, Imamoglu 氏と Kohnen 氏 ('05 [4]) は, $r_{8s}(n)$ ($s \geq 2$) が 2 つのある約数和関数の積とある約数和関数の線形和でかけることを示した. 彼らの証明でキーとなる結果は以下である: 合同部分群 $\Gamma_0(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{2} \right\}$ のカスプ 0 と $i\infty$ に対応する Eisenstein 級数を $G_k^0, G_k^{i\infty}$ とおき, $\Gamma_0(2)$ の有理数係数のカスプ形式が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ とかくと,

$$\langle G_{2l}^0 G_{k-2l}^{i\infty} \mid 2 \leq l \leq (k-4)/2 \rangle_{\mathbb{Q}} = S_k^{\mathbb{Q}}(2). \quad (1.1)$$

2 主結果

正の整数 k に対し, $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ とおく. また,

$$\sigma_{k-1}^{i\infty}(n) = \sum_{d|n} (-1)^d d^{k-1}, \quad \sigma_{k-1}^0(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d: \text{odd}}} d^{k-1}$$

とおくと, これらは各々 $\Gamma_0(2)$ の Eisenstein 級数 $G_k^{i\infty}, G_k^0$ の係数として現れる. ここで, n が正の整数でなければ $\sigma_{k-1}(n) = 0$ と定め, 便宜上 $\sigma_{k-1}^{i\infty}(0) = (1-2^k)B_k/2k$ とおく (B_k : Bernoulli 数). これらある種の約数和関数の積を

$$\rho_{r,s}^{i\infty}(n) = \sum_{m=0}^n \sigma_r^{i\infty}(m) \sigma_s^{i\infty}(n-m), \quad \rho_{r,s}^0(n) = \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_r^0(m) \sigma_s^0(n-m)$$

とおく.

Theorem 1. (T. [9]) 正の整数 $s \geq 2$ に対し, 次を満たすような有理数 $\mu_s(l)$ ($l = 2, 3, \dots, s$) が一意に定まる:

$$r_{8s}(n) = (-1)^n \frac{2^{4s}}{(4s-2)!} \sum_{l=2}^s \mu_s(l) \binom{4s-2}{2l-1} \rho_{4s-2l-1, 2l-1}^{i\infty}(n) \quad (n \geq 0),$$

$$t_{8s}(n-s) = \frac{1}{(4s-2)!} \sum_{l=2}^s \mu_s(l) \binom{4s-2}{2l-1} \rho_{4s-2l-1, 2l-1}^0(n) \quad (n \geq s).$$

有理数 $\mu_s(l)$ は一意的に存在するということしか言えておらず, $\mu_s(l)$ の性質はよくわかっていない. $\mu_s(l)$ のいくつかの値を紹介する.

$s = 2$	$\mu_2(2) = 36$
$s = 3$	$\mu_3(2) = 420, \mu_3(3) = -200$
$s = 4$	$\mu_4(2) = 3168, \mu_4(3) = -3600, \mu_4(4) = 1764$
$s = 5$	$\mu_5(2) = 21060, \mu_5(3) = -30810, \mu_5(4) = 36860, \mu_5(5) = -19116$

3 証明方針

証明は, Imamoglu-Kohnen の結果 (1.1) の精密化にあたる, 次の補題から導かれる.

Lemma 2. 正の偶数 $k \geq 4$ に対し, 次の集合 $\{G_k^0(\tau), G_{2r}^0(\tau)G_{k-2r}^0(\tau) \mid 2 \leq r \leq [k/4]\}$ は $\mathbb{Q}G_k^0(\tau) \oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ の基底をなす.

補題の証明には, レベル 2 の 2 重ゼータ値 ($r \geq 2, s \geq 1$)

$$\zeta^{\text{eo}}(r, s) = \sum_{\substack{m>n>0 \\ m \text{ even}, n \text{ odd}}} \frac{1}{m^r n^s}, \quad \zeta^{\text{oe}}(r, s) = \sum_{\substack{m>n>0 \\ m \text{ odd}, n \text{ even}}} \frac{1}{m^r n^s}, \quad \zeta^{\text{oo}}(r, s) = \sum_{\substack{m>n>0 \\ m \text{ odd}, n \text{ odd}}} \frac{1}{m^r n^s}.$$

の関係式族である double shuffle relation が重要な役割を果たす:

Proposition 3. 整数 $r, s \geq 2$ に対し

$$\begin{aligned} \zeta^{\text{o}}(r)\zeta^{\text{e}}(s) &= \zeta^{\text{oe}}(r, s) + \zeta^{\text{eo}}(s, r) \\ &= \sum_{i+j=k} \binom{i-1}{r-1} \zeta^{\text{oe}}(i, j) + \sum_{i+j=k} \binom{i-1}{s-1} \zeta^{\text{oo}}(i, j), \\ \zeta^{\text{o}}(r)\zeta^{\text{o}}(s) &= \zeta^{\text{oo}}(r, s) + \zeta^{\text{oo}}(s, r) + \zeta^{\text{o}}(r+s) \\ &= \sum_{i+j=k} \left(\binom{i-1}{r-1} + \binom{i-1}{s-1} \right) \zeta^{\text{eo}}(i, j). \end{aligned}$$

ここで, $\zeta^{\text{o}}(k) = \sum_{n>0:\text{odd}} n^{-k}$, $\zeta^{\text{e}}(k) = \sum_{n>0:\text{even}} n^{-k}$ である. 今後, 和の取り方 $i+j=k$ は $i, j \geq 1$ を動くとする.

以下, 補題の証明について簡単に述べる. 詳細は論文を参考にされたい ([6, 9]). Proposition 3 のモジュラー形式における一種のプロトタイプが “2 重 Eisenstein 級数” である. 2 重 Eisenstein 級数の double shuffle relation から, (1.1) に出てきた生成元 $G_{2l}^0 G_{k-2l}^{i\infty}$ を $\{G_k^0(\tau), G_{2r}^0(\tau) G_{k-2r}^0(\tau) \mid 2 \leq r \leq [k/4]\}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書く式を導くことにより, 補題が証明される.

参考文献

- [1] H. H. Chan, K. S. Chua, *Representations of integers as sums of 32 squares*, The Ramanujan J. 7 (2003) 79–89.
- [2] Dickson, L., E., *History of the theory of numbers*. Vol. II: Diophantine analysis. Chelsea Publishing Co., New York (1966).
- [3] Grosswald, E., *Representations of integers as sums of squares*, Springer:Berlin-Heidelberg New York, 1985.
- [4] Ö. Imamoglu, W. Kohnen, *Representations of integers as sums of an even number of squares*, Math. Ann., 333(4), 2005, 815–829.
- [5] V. G. Kac, M. Wakimoto, *Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory*, Lie theory and geometry, in honor of Bertram Kostant, Progr. Math. 123 (ed. J. L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin and V. Kac, Birkhäuser, Boston, MA, 1994) 415–456.
- [6] M. Kaneko, K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series and modular forms of level 2*, preprint(2011).
- [7] S. Milne, *Infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions*, Ramanujan J. 6 (2002), 7–149.
- [8] K. Ono, *Representations of integers as sums of squares*, J. Number Theory 95 (2002) 253–258.
- [9] K. Tasaka, *On a conjecture for representations of integers as sums of squares and double shuffle relations*, preprint(2011).

Some remarks on superspecial curves of low genus

長谷川武博* (工学院大学学習支援センター)

23/Dec/2011

Contents

1 序文	1
2 定理 1.1 の証明	2
3 定理 1.1 の背景	3
4 定理 1.2 の証明	4

1 序文

$n > 1$ を自然数とし $p > n$ を合同式 $p \equiv \pm 1 \pmod{n}$ をみたす素数とする. $\mathbb{F}_p$ を位数 p の有限体とし K をその代数閉包とし固定する. K 上の曲線が楕円的であるとは, その種数が 1 のときをいう. K 上の楕円曲線 E が超特異的 (supersingular) であるとは, その p -捻れ部分群が自明になるときをいう ($E[p] = \{P \in E \mid pP = \mathcal{O}\} = \{\mathcal{O}\}$). K 上の g 次元アーベル多様体が超特異的であるとは, それが g 個の超特異楕円曲線と K 上 **同種** になるときをいう. また, K 上の g 次元アーベル多様体が superspecial であるとは, それが g 個の超特異楕円曲線と K 上 **同型** になるときをいう. K 上の種数 g の曲線が **超特異的** (または **superspecial**) であるとは, そのヤコビ多様体が超特異的 (または superspecial) であるときをいう. もちろん superspecial はいつでも超特異的である. K 上の種数 g の曲線が **通常の** (ordinary) であるとは, その L -多項式 $L(t)$ の t^g の係数が標数 p の倍数でないときをいう.

次は 1941 年の Max Deuring の定理である (Joseph Silverman の AEC (定理 V.4.1) をみよ).

事実. もし $\lambda \in K$ が方程式 $\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{s}\right)^2 \lambda^s = 0$ の根なら, K 上の楕円曲線 $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ は超特異的である (多項式 $\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{s}\right)^2 \lambda^s$ は Deuring 多項式とよばれる). そうでなければ通常のである.

このレポートの目的は, 上の楕円曲線が超特異的かどうかの判定法を, 種数 2 および 3 の場合に拡張することである. 主定理を紹介するために, いくつか記号を導入したい. $\lambda \neq 0, 1$ を K の元とする. K 上の曲線 $y^n = x(x-1)(x-\lambda)^{n-1}$ を $C_\lambda = C_\lambda^{(n)}$ と書くことにし K 上の多項式 $H_p^{(n)}(\lambda)$ を

$$H_p(\lambda) = H_p^{(n)}(\lambda) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{p-1}{n}\right]} \binom{p-1 - \left[\frac{p-1}{n}\right]}{s} \binom{\left[\frac{p-1}{n}\right]}{s} \lambda^s$$

と定義する. この多項式も Deuring 多項式とよぶことにする. この多項式は分離的である (井草).

次はこのレポートの主定理である.

定理 1.1. (1) もし $\lambda \in K$ が方程式 $H_p^{(3)}(\lambda) = 0$ の根なら, K 上の曲線 $C_\lambda^{(3)}$ は超特異的である.
(2) もし $\lambda \in K$ が $H_p^{(2)}(\lambda) = 0$ と $H_p^{(4)}(\lambda) = 0$ の共通根なら, K 上の曲線 $C_\lambda^{(4)}$ は超特異的である.

定理 1.2. $n = 3$ または 4 とする. もし $H_p^{(n)}(\lambda) = 0$ なら λ は $\mathbb{F}_p$ の 2 次拡大体に入る.

*E-mail: thasegawa@suou.waseda.jp

2 定理 1.1 の証明

ここでは定理 1.1 の線型代数的な証明を与えたい。そのために、いくつか補題を用意する。

命題 2.1. (1) 曲線 C_λ は $y^2 = x^{2n} + (2 - 4\lambda)x^n + 1$ と書き直せる (超楕円の)。

(2) 曲線 C_λ の種数 $g(C_\lambda)$ は $n - 1$ である。

証明. (1) $y^2 = x^{2n} + (2 - 4\lambda)x^n + 1 = (x^n + 1 - 2\lambda)^2 + 4\lambda(1 - \lambda) \iff (y - (x^n + 1 - 2\lambda))(y + (x^n + 1 - 2\lambda)) = 4\lambda(1 - \lambda)$ に注意せよ。新しい変数 $s = (y + x^n + 1)/2$ を定義する。このとき、上の式は $\frac{y - (x^n + 1 - 2\lambda)}{2} = \frac{\lambda(1 - \lambda)}{s - \lambda}$ となるから $x^n + 1 - 2\lambda = (s - \lambda) + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{s - \lambda} \iff x^n = (s - \lambda) + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{s - \lambda} + 2\lambda - 1$ となる。 $(s - \lambda)^n$ を乗法すれば $(s - \lambda)^n x^n = (s - \lambda) \left((s - \lambda)^2 + \lambda(\lambda - 1) + (s - \lambda)(2\lambda - 1) \right) = s(s - 1)(s - \lambda)^{n-1}$ となる。新しい変数 $t = (s - \lambda)x$ を定義すれば $t^n = s(s - 1)(s - \lambda)^{n-1}$ を得る。

(2) 2 重被覆写像 $C_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1, (x, y) \mapsto x$ の分岐点は方程式 $x^{2n} + (2 - 4\lambda)x^n + 1 = 0$ の根である。Riemann-Hurwitz の種数公式から $2g(C_\lambda) - 2 = 2(-2) + 2n$ となるから $g(C_\lambda) = n - 1$ を得る。□

注意. この主張は $n = 1$ でも成り立つ。方程式 $y^2 = x^{2n} + (2 - 4\lambda)x^n + 1$ によって定義される曲線も C_λ と書くことにし $g = g(C_\lambda) = n - 1$ と定義する。 p についての仮定と (2) から $p > n > g$ である。

K の元 c_i を $(x^{2n} + (2 - 4\lambda)x^n + 1)^{\frac{p-1}{2}} = \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{t=0}^{\frac{p-1}{2}-s} \binom{\frac{p-1}{2}}{s} \binom{\frac{p-1}{2}-s}{t} (2 - 4\lambda)^s x^{n(s+2t)} = \sum_{i=0}^{n(p-1)} c_i x^i$ によって定める。 K の元を成分にもつ $g \times g$ 行列 M_λ を

$$M_\lambda = M_\lambda^{(n)} = \begin{pmatrix} c_{p-1} & c_{p-2} & \cdots & c_{p-g} \\ c_{2p-1} & c_{2p-2} & \cdots & c_{2p-g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{gp-1} & c_{gp-2} & \cdots & c_{gp-g} \end{pmatrix}$$

と定義する。1978 年の Noriko Yui の定理から、もし M_λ の階数が g なら C_λ は通常的になる。

この行列 M_λ は次のように単純化される。

補題 2.2. (1) $p \equiv +1 \pmod{n}$ のとき、

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} c_{p-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{2p-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{gp-g} \end{pmatrix}, \quad c_{ip-i} = c_{(n-i)p-(n-i)}$$

となる。さらに $c_{p-1} = (-1)^{\frac{p-1}{n}} H_p(\lambda)$ が成り立つ。

(2) $p \equiv -1 \pmod{n}$ のとき、

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{p-g} \\ 0 & \cdots & c_{2p-g-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{gp-1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^t M_\lambda = M_\lambda$$

である。ただし ${}^t A$ は A の転置である。さらに $c_{p-g} = (-1)^{\frac{p-g}{n}} H_p(\lambda)$ が成り立つ。

証明. (1) 前半の主張は、もし $i \neq j$ なら $c_{ip-j} = 0$ を示せばよい。後半の主張は、Legendre 多項式および超幾何関数などの性質から示せる。その証明は [H] に書いてある。(2) も同様に示せる。□

Ω^1 を C_λ 上の正則 1-形式 (differential 1-form) の層とし $H^0(C_\lambda, \Omega^1)$ を Ω^1 の 0 次コホモロジー群とする。これは $\{x^i dx/y \mid i = 0, 1, \dots, n-2\}$ を基底とする K 上の $n-1$ 次元ベクトル空間になる。 $\mathcal{C}: H^0(C_\lambda, \Omega^1) \rightarrow H^0(C_\lambda, \Omega^1)$ を Cartier 作用素とする。これは $1/p$ -線型写像である。このとき、

$$\mathcal{C} \left(\frac{dx}{y}, x \frac{dx}{y}, \dots, x^{n-2} \frac{dx}{y} \right) = \left(\frac{dx}{y}, x \frac{dx}{y}, \dots, x^{n-2} \frac{dx}{y} \right) M_\lambda^{(\frac{1}{p})}$$

となることが知られている．ただし $A = (a_{ij})$ に対し $A^{(\frac{1}{p})} = (a_{ij}^{\frac{1}{p}})$ と書くことにする．もし $\mathcal{C}$ が零写像なら C_λ は superspecial である．この事実は 1982 年の Niels Nygaard の定理である．

証明. (定理 1.1 (1)) はじめに $p \equiv +1 \pmod{3}$ とする．補題 2.2 (1) から $M_\lambda = \begin{pmatrix} c_{p-1} & 0 \\ 0 & c_{2p-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{p-1} & 0 \\ 0 & c_{p-1} \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{3}} H_p(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る．もし λ が方程式 $H_p(\lambda) = 0$ をみたせば $M_\lambda = 0$ となるから $\mathcal{C}$ は零写像である．このとき，Nygaard の定理から C_λ は superspecial となる． $p \equiv -1 \pmod{3}$ のときも証明は同様である． $\square$

注意. Yui の定理から，もし λ が $H_p(\lambda)$ の根ではなかったら C_λ は通常のとなる．

定理 1.1 (2) の証明には，さらに次の補題を用いる．

補題 2.3. $n = 4$ とする．このとき， $c_{2p-2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} H_p^{(2)}(\lambda)$ が成り立つ．

証明. 補題 2.2 (1) の後半の主張と同様である． $\square$

証明. (定理 1.1 (2)) はじめに $p \equiv +1 \pmod{4}$ とする．補題 2.2 (1) と補題 2.3 から

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} c_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2p-2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3p-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{p-1}{4}} H_p^{(4)}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{p-1}{2}} H_p^{(2)}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{p-1}{4}} H_p^{(4)}(\lambda) \end{pmatrix}$$

となる．もし λ が 2 つの方程式 $H_p^{(2)}(\lambda) = 0$ と $H_p^{(4)}(\lambda) = 0$ の共通根ならば $M_\lambda = 0$ だから $\mathcal{C}$ は零写像である．このとき， C_λ は superspecial となる． $p \equiv -1 \pmod{4}$ のときも証明は同様である． $\square$

3 定理 1.1 の背景

ここでは定理 1.1 の代数幾何学的な証明を与えたい．そこから定理 1.1 の背景がみえる． K 上の曲線 C に対しそのヤコビ多様体を $\text{Jac}(C)$ と書くことにする． K 上の楕円曲線とそのヤコビ多様体は K 上同種である． K 上の曲線 C の自己同型写像 σ に対しその商曲線 (quotient) を $C/\langle\sigma\rangle$ と書くことにする．

次の事実は 1989 年の Ernst Kani と Michael Rosen の定理を特殊化したものである．

事実. C を K 上の超楕円曲線とし ι をその超楕円対合 (involution) とする． σ を $\sigma \circ \iota = \iota \circ \sigma$ をみたす位数 2 の C の自己同型写像とする．このとき， $\text{Jac}(C)$ と $\text{Jac}(C/\langle\sigma\rangle) \times \text{Jac}(C/\langle\sigma \circ \iota\rangle)$ は K 上同種である．

証明. (定理 1.1 (1)) $n = 3$ のとき，曲線 C_λ の方程式は $y^2 = x^6 + (2 - 4\lambda)x^3 + 1$ となる．この曲線の種数は 2 である．このとき， $\iota: (x, y) \mapsto (x, -y)$ はその超楕円対合となる． $\sigma: (x, y) \mapsto (1/x, y/x^3)$ はその自己同型写像である．これらは単純な計算である．また， σ および $\sigma \circ \iota$ による C_λ の商曲線は $E_1 = C_\lambda/\langle\sigma\rangle: y^2 = 4x^3 + 9x^2 + 6\lambda x + \lambda^2, a_1 \neq 0$ および $E_2 = C_\lambda/\langle\sigma \circ \iota\rangle: y^2 = 4x^3 + 9x^2 + 6(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2, a_2 \neq 0$ となる．これらはどちらも楕円曲線である．

$$\begin{array}{ccc} & C_\lambda & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \sigma \circ \iota \\ E_1 & & E_2. \end{array}$$

2 つの楕円曲線 E_1 および E_2 の Deuring 多項式は $(4x^3 + 9x^2 + 6\lambda x + \lambda^2)^{\frac{p-1}{2}} = \cdots + a_1 H_p^{(3)}(\lambda) x^{p-1} + \cdots$ および $(4x^3 + 9x^2 + 6(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2)^{\frac{p-1}{2}} = \cdots + a_2 H_p^{(3)}(\lambda) x^{p-1} + \cdots$ である．もし λ が $H_p^{(3)}(\lambda) = 0$ の根なら 2 つの楕円曲線 E_1 と E_2 はどちらも超特異的になる．他方，Kani-Rosen の定理から $\text{Jac}(C_\lambda)$ は $E_1 \times E_2$ に K 上同種である．定義から C_λ は超特異的となる． $\square$

注意. K 上の楕円曲線 E_1 の Legendre の標準形は $y^2 = x(x-1)\left(x - \frac{\rho^3(2+\rho)}{1+2\rho}\right)$ である．ただし ρ は $4(1+\rho+\rho^2)^3\lambda = 27\rho^2(1+\rho)^2$ をみたす K の元である．

証明. (定理 1.1 (2)) 方程式 $y^2 = x(x^4 + (2 - 4\lambda)x^2 + 1)$ によって定義される K 上の曲線を H_λ と書くことにする. これは種数 2 である. ι と σ を上と同じものとする. このとき, その商曲線はどちらも $E = H_\lambda / \langle \sigma \rangle = H_\lambda / \langle \sigma \circ \iota \rangle$: $y^2 = (x - 1)(x^2 - \lambda)$ となる. これは楕円曲線である.

$$\begin{array}{ccc} & H_\lambda & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \sigma \circ \iota \\ E & & E. \end{array}$$

この曲線 E の Deuring 多項式は $H_p^{(4)}(\lambda)$ となる. もし λ が $H_p^{(4)}(\lambda) = 0$ の根なら E は超特異的だから, 上と同様に H_λ もそうなる. $n = 4$ のとき, C_λ の方程式は $y^2 = x^8 + (2 - 4\lambda)x^4 + 1$ である. $\tau: (x, y) \mapsto (-x, y)$ はその自己同型写像である. その商曲線は $E' = C_\lambda / \langle \tau \rangle$: $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ となる. この楕円曲線の Deuring 多項式は $H_p^{(2)}(\lambda)$ である. $\tau \circ \iota$ による C_λ の商曲線は H_λ である.

$$\begin{array}{ccc} & H_\lambda & \\ \tau \swarrow & & \searrow \tau \circ \iota \\ E & & H_\lambda. \end{array}$$

もし λ が $H_p^{(2)}(\lambda) = 0$ と $H_p^{(4)}(\lambda) = 0$ の共通根なら, 上と同様に C_λ は超特異的となる. $\square$

4 定理 1.2 の証明

ここでは定理 1.2 の証明を与えたい. そのために 1941 年の Deuring の定理を紹介する.

事実. もし $\lambda \in K$ が方程式 $H_p^{(2)}(\lambda) = 0$ の根なら λ は $\mathbb{F}_p$ の 2 次拡大体に入る.

この定理は, 現在では次のように拡張されている.

注意 (Hans-Georg Ruck). もし $\alpha \in K$ が $H_p^{(2)}(\alpha^4) = 0$ をみたすなら α は $\mathbb{F}_p$ の 2 次拡大体に入る.

証明. ($n = 3$) 定理 1.1 (1) から, もし $H_p^{(3)}(\lambda) = 0$ なら $C_\lambda^{(3)}$ は超特異的である. すべての超特異曲線は $\mathbb{F}_{p^2}$ 上定義されているから $C_\lambda^{(3)}$ も $\mathbb{F}_{p^2}$ 上定義されている. ここから $\lambda \in \mathbb{F}_{p^2}$ を得る.

($n = 4$) 恒等式 $H_p^{(4)}(t^2) = (-1)^{\lfloor \frac{p-1}{4} \rfloor} \left(\frac{t+1}{2} \right)^{\frac{p-1}{2}} H_p^{(2)}\left(\frac{2t}{1+t} \right)$ から, もし $H_p^{(4)}(\lambda) = 0$ なら $H_p^{(2)}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} \right) = 0$, $\rho := \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}$ となる. Deuring の定理から $\rho \in \mathbb{F}_{p^2}$ である. ここから $\sqrt{\lambda} \in \rho/(2-\rho) \in \mathbb{F}_{p^2}$ を得る. $\square$

$n = 3$ のときも Ruck の主張と同様の定理が成り立つ.

注意. もし $\alpha \in K$ が $H_p^{(3)}(\alpha^3) = 0$ をみたすなら α は $\mathbb{F}_p$ の 2 次拡大体に入る.

References

- [Deu] Max Deuring, Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkorper, (German) Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, (1941), 197-272.
- [H] Takehiro Hasegawa, Some remarks on superspecial and ordinary curves of low genus, preprint.
- [KR] Ernst Kani and Michael Rosen, Idempotent relations and factors of Jacobians, Math. Ann. 284 (1989), no. 2, 307-327.
- [Nyg] Niels O. Nygaard, Slopes of powers of Frobenius on crystalline cohomology, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 14 (1981), no. 4, 369-401 (1982).
- [Yui] Noriko Yui, On the Jacobian varieties of hyperelliptic curves over fields of characteristic $p > 2$, J. Algebra 52 (1978), no. 2, 378-410.

相対反標準束がネフになる射影空間束の 構造について

安武和範 (九大数理博士3年)

概要

本稿では、正標数の閉体上定義された非特異射影多様体上のベクトル束の半安定性と、その射影化における相対反標準束のネフ性との関係について解説する。さらに接束の射影化における相対反標準束がネフとなる多様体の性質についても述べる。

1 Introduction

代数多様体の研究における基本的な道具の一つとして、ベクトル束は多くの人々によって研究がなされている。まず、ベクトル束における最も重要な概念である安定性について述べる。以下では、ベクトル束とその切断から構成される局所自明層を同一視する。

定義 1.1. X を n 次元非特異射影多様体、 $\mathcal{E}$ を X 上のベクトル束、 H を X 上の豊富な因子とする。 $\mathcal{E}$ が H に関して (半) 安定ということを、任意のねじれない真の部分層 $0 \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ に対して次の不等式が成り立つことで定義する。

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}) := \frac{c_1(\mathcal{E}) \cdot H^{n-1}}{\text{rank}(\mathcal{E})}, \quad (\text{resp. } \mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})).$$

事実 1.2. 一般に代数曲線上のベクトル束は安定ベクトル束の拡大によって得られることが次の2つの事実によってわかる。(see. [3])

1. (Harder-Narasimhan filtration)

$\mathcal{E}$ を非特異曲線上のベクトル束とする。このとき部分ベクトル束の列

$$0 = \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

で $gr_i = \mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}$ が半安定かつ $\mu(gr_i) > \mu(gr_{i+1})$ を満たすものが唯一つ存在する。

2. (Jordan-Hölder filtration)

$\mathcal{E}$ を非特異曲線上の半安定ベクトル束とする。このとき部分ベクトル束の列

$$0 = \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

で $gr_i = \mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}$ が安定かつ $\mu(gr_i) = \mu(gr_{i+1})$ を満たすものが存在する。

2 標数0の場合

非特異複素射影曲線上のベクトル束に対しては、次に述べるように多くの特徴付けがある。

事実 2.1. 非特異複素射影曲線 C 上の階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その射影化を $\pi : \mathbb{P}_C(\mathcal{E}) \rightarrow C$ で表し、 $\xi_{\mathcal{E}}$ をその上の自明因子とする。この時以下は同値。(see. [2], [4])

1. $\mathcal{E}$ は半安定；
2. 相対反標準束 $-K_{\pi} := r\xi_{\mathcal{E}} - \pi^*(c_1(\mathcal{E}))$ がネフ；
3. $\overline{NA}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \mathbb{R}_{\geq 0}[-K_{\pi}] + \mathbb{R}_{\geq 0}[\pi^*d]$ 、ここで d は $N^1(C) \cong \mathbb{Z}$ の正の生成元；
4. $\overline{NE}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \mathbb{R}_{\geq 0}[(-K_{\pi})^{r-1}] + \mathbb{R}_{\geq 0}[(-K_{\pi})^{r-2} \cdot \pi^*d]$ ；
5. $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の任意の有効因子はネフ；
6. $\mathcal{E}$ は射影的平坦な接続を持つ；
7. $\mathcal{E}$ は基本群の射影的表現によって構成される。

一般次元では上記のような半安定束の特徴付けはないが、特に今回の話題である相対反標準束がネフであるベクトル束に関して次のことが知られている。それを述べる前に、半安定束の研究において重要な Bogomolov の不等式を紹介する。

事実 2.2. (Bogomolov の不等式) 非特異複素射影多様体 X 上の階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}$ が豊富因子 H に関して半安定とする。この時次のチャーン類の不等式が成り立つ。

$$2rc_2(\mathcal{E}) - (r-1)c_1(\mathcal{E})^2 \geq 0.$$

事実 2.3. 非特異複素射影多様体 X 上の階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その射影化を $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \rightarrow X$ で表し、 $\xi_{\mathcal{E}}$ をその上の自明因子とする。この時以下は同値。(see. [5])

1. 相対反標準束がネフ；
2. $\mathcal{E}$ は任意の豊富因子に関して半安定かつ Bogomolov の不等式 において等号が成立する；
3. 部分ベクトル束の列

$$0 = \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

で $gr_i = \mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}$ が基本群の射影的表現によって構成され、かつ $\mu(gr_i) = \mu(gr_{i+1})$ を満たすものが存在する。

相対反標準束 $-K_\pi := r\xi_{\mathcal{E}} - \pi^*(c_1(\mathcal{E}))$ がネフになるベクトル束に関して、より詳しく以下のようなことが成り立つ。

定理 2.4. [6] 非特異複素射影多様体 X 上の階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、相対反標準束がネフとする。

1. 相対反標準束は巨大にならない。
2. 相対反標準束が半豊富であるとする。このときエタール被覆 $\nu: X' \rightarrow X$ が存在して $\mathbb{P}_{X'}(\nu^*\mathcal{E}) \cong X' \times \mathbb{P}^{r-1}$ が成り立つ。特に $\mathcal{E}$ はエタール基本群の表現によって構成される。

3 正標数の場合

正標数の場合、上で定義された安定性だけでは条件として弱く、より強い強半安定の概念が用いられる。強半安定の定義を述べる。

定義 3.1. X を正標数の代数閉体上定義された非特異射影多様体、 H を X 上の豊富な因子、 $\mathcal{E}$ を X 上の H に関する半安定ベクトル束とする。さらに $F_X: X \rightarrow X$ を絶対フロベニウス射とする。 $\mathcal{E}$ が H に関して強 (半) 安定ということを、任意の自然数 n に対して絶対フロベニウス射による n 回引き戻し $F_X^{(n)}(\mathcal{E})$ もまた H に関して半安定で定義する。

標数が 0 の場合と同様に、強半安定ベクトル束に対しても Bogomolov の不等式は成り立つことが知られている。強半安定ベクトル束を考えることによって、事実 2.3 の類似が正標数でも得られる。

定理 3.2. [6] 非特異射影多様体 X 上の階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その射影化を $\pi: \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \rightarrow X$ で表し、 $\xi_{\mathcal{E}}$ をその上の自明因子とする。この時以下は同値。

1. 相対反標準束がネフ；
2. $\mathcal{E}$ は任意の豊富因子に関して強半安定かつ Bogomolov の不等式 において等号が成立する。

系 3.3 ([1], [6]). 代数閉体 k 上定義された非特異射影多様体 X の接束 T_X に対し、その射影化を $\pi: \mathbb{P}_X(T_X) \rightarrow X$ で表す。この時次が成り立つ。

1. 相対反標準束がネフ $\Rightarrow X$ は有理曲線を含まない；
2. $ch(k) = 0$ のとき、相対反標準束がネフ $\Leftrightarrow \exists \nu: A \rightarrow X$, アーベル多様体からのエタール被覆射；
3. $ch(k) > 0, \dim(X) = 2$ かつ $\kappa(X) \leq 0$ のとき、相対反標準束がネフ $\Leftrightarrow \exists \nu: A \rightarrow X$, アーベル曲面からのエタール被覆射。

参考文献

- [1] P. JAHNKE AND I. RADLOFF, Semistability of restricted tangent bundles and a question of I. Biswas, preprint
- [2] S. KOBAYASHI, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Publ. Math. Soc. Japan 15, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, Kano Memorial Lectures, 5.
- [3] J. LE POTIER, Lectures on vector bundles, Translated by A. Maciocia, Cambridge Stud. Adv. Math. 54, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [4] Y. MIYAOKA, The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, in: Algebraic Geometry, Sendai 1985, Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987) 449–476.
- [5] N. NAKAYAMA, Zariski-decomposition and abundance, MSJ Memoirs 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo 2004.
- [6] K. YASUTAKE, On projective space bundle with nef normalized tautological line bundle, preprint

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, KYUSHU UNIVERSITY
FUKUOKA 819-0395 JAPAN

E-mail address: k-yasutake@math.kyushu-u.ac.jp

$\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1$ となる射影多様体について

九州大学数理学研究院 矢城 信吾

概要

本稿は、第8回数学総合若手研究集会での講演に基づいて、 $\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1$ となる非退化射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ の分類について紹介する。ここで、断りが無い限りは、基礎体は標数任意の代数的閉体 k とする。さらに、 $\deg X = \operatorname{codim} X + 1$ となる場合を minimal degree, $\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ となる場合を almost minimal degree ということにする。

またこの場を借りて、本講演の機会を与えていただいた世話人の方々に深く感謝いたします。

1 紹介：研究の背景

まず簡単に研究の背景について紹介する。この研究は次の補題から始まる。

補題 1.1. $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ を非退化射影多様体とすると

$$\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1$$

が成り立つ。

この補題は、19世紀後期には直感的に理解されていたものも、精密な証明が与えられるのは20世紀に入ってからである。([E-H.1]) この中で、特に $\deg X = \operatorname{codim} X + 1$ となる場合を minimal degree といい、 $\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ となる場合を almost minimal degree という。この minimal degree となるような非退化射影多様体の分類を行うことが最初の目標となった。これは [E-H.1] により、次のような分類の結果を得た。

定理 1.2 ([E-H.1]). $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ を minimal degree となる非退化射影多様体とする。このとき、 X は次のようなものと同型になる。

1. 射影空間 $\mathbb{P}_k^n$
2. 2次超曲面 Q
3. $\mathbb{P}_k^5$ 内の Veronese 曲面 V もしくは V 上の錐 C_1
4. Rational normal scroll $S(a_1, \dots, a_d)$ ($\sum a_i = \operatorname{codim} X + 1$) もしくは S 上の錐 C_2

また、同様な分類結果を別の手法として、[Fu1] は Δ -genus という不変量を用いての結果を得ている。(minimal degree の場合は Δ -genus = 0) ここで、共通しているのは、 X の斉次座標環は Cohen-Macaulay 環となっていることである。

この立場から、環論的な考察の方がより一般的な結果が得られるのではないかと考えられる。

例えば、上記の定理 1.2. では、 X を射影多様体 (既約かつ被約な射影スキーム) と仮定しているが、既約性の

条件を弱めて、考えることができる。そこで、 X を pure-dimensional reduced sub scheme と仮定する。^{*1}このように仮定することで、 $\mathbb{P}_k^n$ 内の点集合 X に対して、minimal degree であるとは、 $n+1$ 個の点が general position にあることと同値である。

このように環論的な手法を流用していく中、almost minimal degree に関する構造定理が [H-S-V.1] によって示された。この中で、minimal degree の場合は次のような特徴づけられた。

定理 1.3 ([H-S-V.1]). $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ の pure-dimensional, reduced な非退化射影スキームとする。ただし、 $\dim X \geq 1$ の場合は、connected in codimension 1 とする。 $I(X) \subseteq R = k[x_0, \dots, x_n]$ を定義イデアルとすると、次の条件が同値である。

1. X は minimal degree である。
2. X は Arithmetically Cohen-Macaulay 多様体であり、次のいずれかが成り立つ。
 - (a) Castelnuovo's regularity が $\text{reg } R/I(X) = 1$.
 - (b) $R/I(X) \cong k[y_1, \dots, y_d](y_i \text{ は } k \text{ 上超越的で } d = \dim R/I(X))$

定理 1.4 ([H-S-V.1][B-P.1]). $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ が almost minimal degree な射影多様体であることと次のいずれかが成り立つのと同値である。

1. X は normal Del Pezzo variety.
2. X は、minimal degree で $\text{codim } Y \geq 2$ な射影多様体 $Y \subseteq \mathbb{P}_k^{n+1}$ の閉点 $p \in \mathbb{P}_k^{n+1} \setminus Y$ からの linear projection である。

これは、環論の立場からいえば、座標環が Buchsbaum 環の構造を持っている。

また、得られた斉次座標環の極小自由分解 (minimal free resolution) を考えることも重要となってくる。極小自由分解を考えることで、そのイデアルの生成元の個数や次数などの情報を知ることができる。(詳しくは後述の例)

このような経緯で、 $\deg X = \text{codim } X + i$ の場合がどのようなか考察していくのが目標となる。

2 例

環の関係については、次のような関係がある。

$$\{\text{regular}\} \subset \{\text{locally complete intersection}\} \subset \{\text{Gorenstein}\} \subset \{\text{Cohen-Macaulay}\} \subset \{\text{Buchsbaum}\}$$

$$\{\text{regular}\} \subset \{\text{normal}\}$$

例 2.1. 一般の位置にある 4 点 $X = \{P_0, P_1, P_2, P_3 = (1:1:1)\} \subset \mathbb{P}_k^2$ の斉次座標環は Gorenstein 環である。 $S = k[x_0, x_1, x_2]$ とすると

$$0 \rightarrow S(-2) \xrightarrow{\varphi_2} S^2(-1) \xrightarrow{\varphi_1} S.$$

$$\varphi_1 = (x_0x_1 - x_0x_2, x_0x_2 - x_1x_2), \varphi_2 = \begin{pmatrix} x_0x_2 - x_1x_2 \\ -x_0x_1 + x_0x_2 \end{pmatrix}.$$

^{*1} pure-dimensional $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ X の各既約成分の次元が同じ

例 2.2. Veronese 曲面 $V = v_2(\mathbb{P}_k^2)$ は Cohen-Macaulay 環であり、

$$0 \rightarrow S^3(-4) \xrightarrow{\varphi_3} S^8(-3) \xrightarrow{\varphi_2} S^6(-2) \xrightarrow{\varphi_1} S.$$

$$\varphi_1 = (x_0x_1 - x_3^2, x_0x_2 - x_4^2, x_1x_2 - x_5^2, x_2x_3 - x_4x_5, x_1x_4 - x_3x_5, x_3x_4 - x_0x_5)$$

,

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} -x_2 & 0 & 0 & 0 & -x_4 & 0 & x_5 & 0 \\ x_1 & -x_1 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & x_0 & 0 & -x_3 & 0 & -x_4 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_0 & x_1 & 0 & x_5 & 0 & -x_4 \\ x_4 & -x_4 & 0 & x_5 & x_0 & x_2 & -x_3 & 0 \\ 0 & -x_5 & -x_4 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & x_4 & -x_5 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ -x_1 & -x_5 & 0 \\ x_0 & 0 & x_4 \\ -x_5 & -x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & -x_3 \\ -x_4 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

例 2.3. 次のようにパラメトライズされた曲面 $F = \{(uv^3 : uv^2w : b^4 : v^3w : vw^3 : w^4)\} \subset \mathbb{P}_k^5$ を考える。この定義イデアルは

$$I(F) = (x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_4 - x_0x_5, x_3x_4 - x_2x_5, x_3^3 - x_2^2x_4, x_1x_3^2 - x_0x_2x_4, x_1^2x_3 - x_0^2x_4, x_2x_4^2 - x_3^2x_5, x_0x_4^2 - x_1x_3x_5, x_4^3 - x_3x_5^2)$$

であり、極小自由分解は

$$0 \rightarrow S^1(-5) \rightarrow S^6(-4) \rightarrow S^{15}(-3) \rightarrow S^{18}(-2) \rightarrow S^9(-1) \rightarrow S.$$

となる。これは Buchsbaum 環の例であり、Cohen-Macaulay 環で無い例である。

3 結び

今現在得られている結果の一部を挙げておく。deg $X = \text{codim } X + 3$ の場合の完全な分類結果はできていないが、現在作成中の原稿がある。発表時までには準備できればと考えている。

定理 3.1. $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ で deg $X = \text{codim } X + 3$ のとき、その斉次イデアルの生成元は quadrics, cubics, quartics である。^{*2}

なお、いくつかの証明に必要と思われる補題を挙げておく。これらの中には、deg $X \geq \text{codim } X + 1$ の場合で使えるように拡張した補題もある。

補題 3.2. A を次数付き k 代数とし、 $d = \dim A \geq 2, P = A_+$ とする。このとき次が成り立つ。

1. A が $\dim A/\mathfrak{p} = 1$ となる随伴素イデアルを持たないことと局所コホモロジー群 $H_P^1(A)$ が Noether 加群であることが同値である。
2. A を pure-dimensional で reduced とする。このとき
 - (a) $[H_P^1(A)]_p = 0$ ($p < 0$).
 - (b) $\text{Proj } A$ の連結成分は $1 + \text{rank}_k[H_P^1(A)]_0$ 個である。

^{*2} この結果をもっと精密化したい。

補題 3.3. $R = k[x_0, \dots, x_n]$ とし、 $A = R/I$ を次数付き k 代数とする。 $l \in R$ を次数 1 の斉次元とし、 $S = R/lR$ とすれば次がなりたつ。

1. l が A の非零因子であるとき、 A の次数付き R 加群としての極小自由分解 $F_* \rightarrow A \rightarrow 0$ に対して、 $F_*/lF_* \rightarrow A/lA \rightarrow 0$ は次数付き S 加群としての A/lA の極小自由分解である。特に

$$\mathrm{Tor}_i^R(k, A) \cong \mathrm{Tor}_i^S(k, A/lA) \quad (i \geq 0).$$

2. $lA = 0$ のとき

$$\mathrm{Tor}_i^R(k, A) \cong \mathrm{Tor}_i^S(k, A) \oplus (\mathrm{Tor}_{i-1}^S(k, A)(-1)) \quad (i \geq 0).$$

補題 3.4. A を pure-dimensional, reduced な次数付き k 代数とし、 $\dim A \geq 2$ のときは $\mathrm{Proj} A$ が connected in codimension 1 とする。 l を A の generic linear form とし、 $B := A/lA :< P >$ とする。このとき、 B は次のような性質をもつ。

$$\begin{aligned} \dim B &= \dim A - 1, \mathrm{codim} B = \mathrm{codim} A, \deg B = \deg A \\ \mathrm{depth} B &= \max\{1, \mathrm{depth} A - 1\}, \mathrm{rank}_k[B]_1 = \mathrm{rank}_k[A]_1 - 1. \end{aligned}$$

これらの補題により、帰納的な証明が可能になる。

参考文献

- [B-P.1] Brodmann, Markus; Schenzel, Peter; Arithmetic properties of projective varieties of almost minimal degree. J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 2, 347-400.
- [Eil] Eisenbud, David; The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 229. Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+243 pp. ISBN: 0-387-22215-4
- [E-H.1] Eisenbud, David; Harris, Joe; On varieties of minimal degree (a centennial account). Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 3-13, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Fu1] Fujita, Takao; Classification theories of polarized varieties. London Mathematical Society Lecture Note Series, 155. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xiv+205 pp. ISBN: 0-521-39202-0 .
- [H-S-V.1] Hoa, Le Tuan; Stuckrad, Jurgen; Vogel, Wolfgang; Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. J. Pure Appl. Algebra 71 (1991), no. 2-3, 203-231.
- [Ho] Hoa, Le Tuan; On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. J. Pure Appl. Algebra 87 (1993), no. 3, 241-250.
- [Ya] S.Yashiro; Poster-session : Study on varieties of degree $\geq$ codimension+ 1. Forum "Math-for-Industry" 2011 "TSUNAMI - Mathematical Modelling" Using Mathematics for Natural Disaster Prediction, Recovery and Provision for the Future. Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University(2011).

パラレルセッション 数理学

Product Integration related to Quantum Zeno Dynamics

(量子ゼノン効果に関する乗積分)

二口 伸一郎¹ (北海道大学大学院理学院)

1 乗積分とは

本稿では、量子ゼノダイナミクスの解析に関する研究を紹介する。

まず、最も素朴な乗積分を紹介する。通常の積分（例えばリーマン積分）は

$$\int_a^b f(s)ds := \lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(s_k)(s_k - s_{k-1})$$

のような形でしばしば定義される。ここで、 f は適当な関数、 $\Delta : a = s_0 < \cdots < s_N = b$ は区間 $[a, b]$ の分割であり、 $\mu(\Delta)$ は分割の最大幅を表す。これに対し、乗積分(product integration, あるいは product integral) は次のような形で定義される [1]。

$$\prod_a^b e^{A(s)ds} := \lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N e^{A(s_k)(s_k - s_{k-1})}$$

ただし、 k に関する積の順序は、 $k = 1$ の項が最右、 $k = N$ の項が最左であるとする。関数 A としてはバナッハ空間上の線形作用素に値をもつ関数がよく用いられる。行列に値をもつ連続関数が最も簡単な場合である。もし、すべての $A(s)$ が互いに可換であるならば、指数関数の性質から $\prod_a^b e^{A(s)ds} = e^{\int_a^b A(s)ds}$ が成立し、通常の積分に帰着される。故に、よく調べる必要があるとすれば、 $A(s)$ が非可換な場合である。乗積分の応用は様々であるが、大部分は次の命題に集約される。

Proposition 1. $\mathfrak{X}$ をバナッハ空間、 $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ を $\mathfrak{X}$ 上の有界線形作用素の空間とし、 A を区間 $[a, b]$ 上の $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ -値連続関数とする。ただし、位相は作用素ノルムによって定める。このとき、乗積分 $\prod_a^x e^{A(s)ds}$ は、次の初期値問題の解である。

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = A(x)F(x, a), \quad x \in [a, b], \quad F(a, a) = I.$$

ただし、 I は恒等作用素である。この命題から、乗積分は上のような特徴的な微分方程式の解を与えることがわかる。物理の文脈では、上式はシュレーディンガー方程式の一種と見做すことができる²。このことは、乗積分が、時間に依存するハミルトニアンをもつ力学系の時間発展を与えることを示唆する。³

¹E-mail : k4h46v@bma.biglobe.ne.jp

²通常用いられるシュレーディンガー方程式では、 $A(x)$ は一定である。

³特に量子力学に応用することを考えるならば、作用素 $A(x)$ として非有界な作用素を導入できることが望ましい。実際、これは可能である。また、 $A(x)$ は連続関数に限らず、ルベグ可積分関数や、(強) レゾルVENT連続な関数に対しても乗積分は定義されうる [1, 2]。

2 量子ゼノンダイナミクスとは

高頻度の観測が、量子系の状態の遷移を阻害することを、量子ゼノン効果(quantum Zeno effect; QZE)という [7]. 純理論的には、理想的な観測を無限に高い頻度で行うことができるならば、状態は凍結され、一切の現象は停滞することが主張される⁴.

量子ゼノンダイナミクス(quantum Zeno dynamics; QZD)とは、高頻度の観測下における状態の時間発展のことである [6]. いま、ある量子系において観測を繰り返すことを考える. $\mathfrak{H}$ を (抽象) ヒルベルト空間とし、これを量子系の状態空間と見做す. 量子力学においては、観測は状態空間上の正射影作用素で表される. すなわち、 P を $\mathfrak{H}$ 上の正射影で観測を意味するものだとすると、観測直前の状態が $\psi \in \mathfrak{H}$ であるならば、観測直後の状態は $P\psi$ で表される. 一方、量子系のハミルトニアンが $\mathfrak{H}$ 上の自己共役作用素 H で与えられたならば、 t 秒間の時間発展は、 H から生成されるユニタリ作用素 e^{-itH} によって与えられる. そこで、時間区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = s_0 < \dots < s_N = b$ をとったとき、 Δ の分点に対応するすべての時刻 s_k ($k = 0, \dots, N$) において観測 P を行うことを考える. 時刻 a における初期状態が ψ で与えられたならば、時刻 b での状態は、 $\prod_{k=1}^N (P \exp\{-i(s_k - s_{k-1})H\} P) \psi$ で与えられることがわかる. いま、観測の頻度が無限に上がることを、分割の最大幅 $\mu(\Delta)$ が 0 に収束することで定めるならば、このときの QZD は

$$\lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N (P e^{-i(s_k - s_{k-1})H} P) \psi \quad (2.1)$$

で定められる. この極限がいつ存在するのか、そして、よりアприオリに書き表されるとすればどのような形であるのかが問題となる. この問題に対しては先行の研究があり、豊富な結果が出ている [3, 4, 11].

3 主結果

今回の研究では、上の式 (2.1) において、ハミルトニアン H と観測 P が時間に依存する場合の極限の存在条件と、極限のより明な形が乗積分で表されることを示した. H, P に時間変数を導入する意義は次のような理由による. 近年、先輩にあたる布田徹により、観測 P が時間に依存して連続的に変化する場合にも、十分に緩い条件下で QZE が生起することが主張された [5]. これは、あらかじめ決めておいた状態の曲線 $\{\psi(s) \mid s \in [a, b]\}$ に応じて観測 $P(s)$ を定めると、高頻度観測の極限では、状態は指定された曲線上を動かざるを得なくなることを意味する. さらに、外場を通して量子系が制御されているモデルにおいては、しばしばハミルトニアン H が時間に依存するものとなる. 斯様にして、高頻度観測と量子制御とのより深い関連が示唆されるのである.

主結果を述べる. 時間に依存するハミルトニアンが、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の自己共役作用素 $H(s)$ で与えられる場合、(時刻 a から b までの) 量子系の時間発展は、乗積分 $\prod_a^b e^{-iH(s)ds}$ で与えられる. さらに観測 P も時間に依存するとすれば、考察すべき QZD は、

$$\lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N \left(P(s_k) \prod_{s_{k-1}}^{s_k} e^{-iH(s)ds} P(s_{k-1}) \right)$$

⁴この主張は極めて直感に反するが、実際の実験において同効果が得られているようである [8, 9].

で与えられることがわかる。この極限に存在に関して、ハミルトニアンが有界作用素である場合は、次の定理に負う。

Theorem 2. *Let $A \in L_s^1(a, b)^5$ and let $P : [a, b] \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ be a L_s^1 -differentiable function such that each $P(s)$ is orthogonal projection. Then*

$$\text{s-lim}_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N \left(P(s_k) \prod_{s_{k-1}}^{s_k} e^{A(s)ds} P(s_{k-1}) \right) = \prod_a^b e^{\{P'P+PAP\}(s)ds} P(a). \quad (3.1)$$

Where P' is the L_s^1 -derivative of P , and the product integration in the right hand side is defined as the strong product integration. Moreover, the invertible operator $U_Z(a, b) := \prod_a^b e^{\{P'P+PAP\}(s)ds}$ gives a bijection between $\text{Ran}P(a)$ and $\text{Ran}P(b)$.

ハミルトニアンが非有界作用素である場合、次の命題を援用する。

Proposition 3. (Dollard and Friedman; [2] Theorem 12): *Let A be a function defined on $[a, b]$ such that*

- (i) *For each $s \in [a, b]$, $A(s)$ is the infinitesimal generator of a contraction semigroup.*
- (ii) *For each $s \in [a, b]$, the point 0 is in the resolvent set of $A(s)$, and A^{-1} is L_s^1 -differentiable on $[a, b]$ with derivative B .*
- (iii) *The function $C = AB$ belongs to $L_s^1(a, b; \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$.*

Then the operator $A(s)$ have a common domain $\mathfrak{D}$ and there is a unique $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ -valued function $U(x, a)$ defined on $[a, b]$ such that $U(a, a) = I$ and

$$\frac{d}{dx} U(x, a) \psi = A(x) U(x, a) \psi \quad (3.2)$$

for every $\psi \in \mathfrak{D}$. (The derivative in (3.2) is the ordinaly derivative for an $\mathfrak{X}$ -valued function. $U(x, a)$ is written as usual $\prod_a^x e^{A(s)ds}$.

この命題を用いて、QZD の存在条件は次のように与えられる。

Theorem 4. *In addition to the hypotheses of Proposition 3, assume that $P \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ be a L_s^1 -differentiable function such that each $P(s)$ is orthogonal projection, and $\text{Ran}P(s) \subset \text{Dom}(A(s)^2)$. Then*

$$\text{s-lim}_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N \left(P(s_k) \prod_{s_{k-1}}^{s_k} e^{A(s)ds} P(s_{k-1}) \right) = \prod_a^b e^{\{P'P+PAP\}ds} P(a). \quad (3.3)$$

Where $\prod_{s_{k-1}}^{s_k} e^{A(s)ds}$ is the product integration given by Proposition 3, and the product integration in the right-hand side is defined as strong product integration.

⁵ここでは直感的な解説に留めるが、 $L_s^1(a, b)$ とは、区間 $[a, b]$ 上の $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ -値関数であり、 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ の強位相に関して L^1 -的な性質をもつものである。関数 A が強連続であるならば、 $L_s^1(a, b)$ に属することは基本的な命題である。また、関数 A が L_s^1 -differentiable であるとは、ある $B \in L_s^1(a, b)$ が存在して

$$A(x)\psi = A(a)\psi + \int_a^x B(s)\psi ds, \quad x \in [a, b]$$

と表されることである。ただし、右辺の積分は Bochner 積分である。 A が強微分可能であるならば、これは通常の強微分可能性と同値である。

最後に、 H, P が時間に依存する場合の QZE の生起条件を挙げておく⁶。

Theorem 5. *In addition to the hypotheses of Proposition 3, assume that the orthogonal projection $P(s)$ satisfies (i) $\text{Ran}P(s) \subset \text{Dom}H(s)$ for all $s \in [a, b]$, (ii) $\sup_s \|H(s)P(s)\| < \infty$, (iii) $\sup_{s, t \in [a, b], s \neq t} \frac{\|P(s) - P(t)\|}{|s - t|} < \infty$. For the partition $\Delta : a = s_0 < \cdots < s_N = b$ and $\psi_k \in \text{Ran}P(s_k)$ ($k = 0, \dots, N-1$), we set*

$$C(\Delta, \{\psi_k\}_k) := \prod_{k=1}^N \|P(s_k)U(s_k, s_{k-1})\psi_{k-1}\|^2.$$

Where $U(y, x) := \prod_x^y e^{-iH(s)ds}$. Then

$$\lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} C(\Delta, \{\psi_k\}_k) = 1 \quad (3.4)$$

without depending on how to choose $\psi_k \in \text{Ran}P(s_k)$.

References

- [1] J. D. Dollard, C.N. Friedman: *Product Integration with Applications to Differential Equations*. Addison-Wesley Publ. Company, Reading, Massachusetts, (1979).
- [2] J. D. Dollard, C.N. Friedman: On strong product integration. J. Func. Anal. 28 (1978), 309-354.
- [3] P. Exner and T. Ichinose, A Product formula related to quantum Zeno dynamics, Ann. H. Poincaré, 6 (2005), 195-215;
- [4] P. Exner, T. Ichinose, H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov, Zeno Product formula revisited, Integral Equations Operator Theory 57, 67 (2007).
- [5] A. Arai and T. Fuda, Some Mathematical Aspects of Quantum Zeno Effect, Lett. Math. Phys., Springer, to appear.
- [6] P. Facchi, S. Pascazio, A. Scardicchio, and L. S. Schulman, Zeno dynamics yields ordinary constraints, Phys. Rev. A 65 (2002).
- [7] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, The Zeno's paradox in quantum theory, J. Math. Phys. 18 (1977), 756-763.
- [8] D. Home, M. A. B. Whitaker, A Conceptual Analysis of Quantum Zeno; Paradox, Measurement, and Experiment, Annals of Physics 258 (1997), 237-285.
- [9] O. Alter, Y. Yamamoto, Quantum Measurement of a Single System, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [10] T. Kato, On the Trotter-Lie product formula, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 694-698.
- [11] M. Matolcsi, R. Shvidkoy, Trotter's product formula for projections, Arch. Math. 81 (2003), 309-317.

⁶ここに掲載した QZE の生起条件は、QZD の存在条件よりも真に弱いものになっていることがわかる。

回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題の安定性と分岐構造 及び熱対流が両側球に及ぼす影響

第 8 回数学総合若手研究集会

2012 年 2 月 27 日 ~ 3 月 1 日

木村恵二, 竹広真一, 山田道夫 (京都大学数理解析研究所)

kimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kimura/>

回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題について, 粘着・温度固定条件の下, 半径比 0.4, Prandtl 数 1, Taylor 数 $52^2 \sim 500^2$, Rayleigh 数 1500 ~ 10000 の範囲で, 臨界点から超臨界分岐する, 方位角方向に伝播する有限振幅定常進行波を Newton 法によって求め, その安定領域を固有値計算によって定めた. またこの定常進行波が両側球面に及ぼすトルクを計算し, その大きさは内側球の回転角速度を変化させるのに十分な大きさであることを見出した.

1 イントロダクション

宇宙空間には非常にたくさんの天体が存在するが, それらほとんどに共通する事実として, 天体の内部ほど高温であるということが挙げられる. 特に太陽などの恒星, 木星や土星などといった巨大惑星の内部, そして地球型惑星の流体核では, 天体規模の熱対流現象が発生していると考えられている. この天体規模熱対流現象は, みそ汁に見られる熱対流パターンなど, 我々の身の回りに存在する多くの熱対流現象と比較して, 1. 熱対流が起こる領域が球または球殻領域である, 2. 中心に向く自己重力場が存在する, 3. 系が回転している, という特徴を持つ. 回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題は, これら三つの特徴のみを考慮した, 天体規模熱対流現象の最も簡単なモデルの一つである. このモデルは Chandrasekhar [1] によって 1961 年に提唱され, 以後半世紀以上にもわたって盛んに研究がなされてきた.

この熱対流問題は, 境界が動径方向の対称性を持っているのに対して回転による回転軸に対する対称性も存在するため, 支配方程式において方位角 (経度) 方向は波数ごとに分離できるものの動径方向と天頂角 (余緯度) 方向の分離ができず, 静止状態 (熱伝導状態) の線形安定性すら直接解析的に行うことが困難である. 従って研究の当初は, 回転が非常に遅い場合と非常に速い場合に, 回転パラメタについての摂動展開を用いて臨界点 (熱対流が発生するパラメ

タ) 及び臨界モードが調べられた [2], [3]. 最近では著しい計算機の発達のおかげで, 数値計算により広いパラメタ領域で臨界点の情報が得られてきている [7]. 有限振幅解についても, 計算機の発達により, 支配方程式を直接数値積分することを通じて発生する熱対流パターンの研究がなされてきた [6].

しかしながら, 時間積分という手法では広いパラメタ領域での熱対流パターンを系統的に調べることに難しいため, パラメタ空間での大域的な解の振る舞いが理解できていない. 特に臨界点からの分岐解やその安定性といった基本的な問題すら, 計算機資源が非常に多く必要となるために調べられていない. そこで我々は, 空間解像度が比較的少なくても解像できる回転の速さが中間的な領域において, 時間積分ではなく Newton 法を用いて有限振幅解を求め, その線形安定性を固有値計算によって数値的に調べることで, 解の安定性と分岐構造を調べることを試みた.

また近年の地震波観測によって, 地球内核がマントルに対して異なる回転角速度で回転 (差動回転) していることが示唆されている (回転角速度の方向及び大きさについては今なお議論が続いている) [9]. そこで我々は, 先述の有限振幅解が安定な領域において, 熱対流が両側球に及ぼすトルクも併せて計算することを試みた.

2 系の設定と支配方程式

二つの同心球 (内側球, 外側球の半径をそれぞれ r_{in} , r_{out} とする) で囲まれた球殻領域内の Boussinesq 流体 (密度が温度に弱く依存する流体) を考える. 両側球はともに単位ベクトル $\mathbf{k}$ の方向を軸として回転角速度 Ω で回転しているとし, 球殻領域内には一様に内部熱源 H (単位質量あたり) が分布しているとする. さらに一様な密度 ρ_0 からなる物体の自己重力場 $\mathbf{g} = -\gamma\mathbf{r}$ が流体に作用しているとする. ここで γ は定数であり, $\mathbf{r}$ は球の中心からの位置ベクトルである. この場合, 球殻とともに回転する系での静止状態における温度場は $T_s(r) = -\beta r^2/2 + T_0$ となる. ここで $\beta \equiv H/(3\kappa C_p)$, κ は熱拡散係数, C_p は定圧比熱を表し, T_0 は定数である. ν を動粘性係数, α を熱膨張率とし, 球殻の厚さ $d \equiv r_{\text{out}} - r_{\text{in}}$ を長さスケール, 粘性拡散時間 d^2/ν を時間スケール, 温度スケールを $\nu^2/(\gamma\alpha d^4)$ とする. 両側球とともに回転する系での無次元化された Boussinesq 方程式系は, $\mathbf{u}$ を速度場, Θ を温度攪乱場として,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla \pi + \Theta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{u},$$

$$P \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta \right) = R \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} + \Delta \Theta,$$

となる.

この系の無次元パラメタは

$$\eta = \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}}, \quad \tau = \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{\alpha\beta\gamma d^6}{\nu\kappa},$$

である. η は半径比, T は Taylor 数, P は Prandtl 数, R は Rayleigh 数である.

本研究では, 無次元パラメタを標準的に用いられている値 $\eta = 0.4$, $P = 1$ に固定し, τ と R は, 回転が比較的遅く臨界点に近い領域である $52 \leq \tau \leq 500$, $1500 \leq R \leq 10000$ の範囲で変化させることにする. 速度場の境界条件として両側球表面で粘着境界条件を用いる. 温度場に対しては温度固定境界条件を用いる.

3 定常進行波 TW4 の分岐構造

前述のパラメタ領域で, 臨界点から分岐する有限振幅解を Newton 法によって求め, その安定性を固

有値計算によって調べた (図 1 左). この τ の範囲では, 方位角 (経度) 方向の基本波数が 4 であるような有限振幅定常進行波 (Traveling Wave 4, 以下 TW4 と呼ぶ) が臨界点から超臨界分岐し, 臨界 Rayleigh 数 R_c からおよそその 1.2 倍から 2 倍の範囲で安定であった. 静止解の安定領域および TW4 の安定領域が (一部を除き) ともに τ の増大とともに拡大することから, 回転はおおむね解を安定化させる傾向にあると考えられる.

臨界点から超臨界分岐する TW4 の安定領域内において, 伝播方向の変化およびそれに伴う熱対流構造はすべて連続的に変化していた. 伝播方向が遷移する際, 分岐などに伴う構造の不連続な変化は生じていない.

臨界点付近での TW4 の伝播方向は, 回転が速くなるにつれて retrograde から prograde に変化する. この伝播方向の遷移に伴って, 赤道面の構造は回転が速くなるとともに徐々に prograde な方向へらせん状に傾き, 子午面の構造は球殻に沿って緯度方向に伸びた構造から, 回転軸方向に伸びた構造へと連続的に変化していく.

一方で回転が速い場合には, 臨界点付近で prograde に伝播する TW4 は Rayleigh 数を大きくしていくと次第に伝播速度が減少し, retrograde へと向きを変える. しかしながらこの伝播方向の遷移においては, 対流の子午面構造は回転軸方向に伸びたまま変化せず, 振幅のみが次第に大きくなるだけであった.

この伝播速度の変化について, 臨界点近傍では Takehiro [8] による渦の伸縮メカニズムで解釈が可能であり, 有限振幅領域では, 熱対流の非線形効果によって生成される平均帯状流 (方位角方向の速度を方位角方向平均したもの) によって対流セルが移流されるためであると解釈できる.

TW4 の構造の詳細ならびに伝播方向の変化のメカニズムについては, Kimura *et al.* [4] を参照されたい.

4 TW4 が両側球に及ぼすトルク

この TW4 が安定な領域内で, 内側球に働く回転軸方向のトルクを計算した結果を図 2 に示す. ただし, 解の定常性と角運動量保存則から内側外側球に

働くトルクの和はゼロに等しく、外側球に働くトルクは図2の符号を逆にしたものである。この図から、回転が遅い $\tau \lesssim 100$ の場合には内側球に回転と同じ方向のトルクがかかるが、 $\tau = 200 \sim 300$ では両側球にほとんどトルクがかからず、逆に回転が速い $\tau \gtrsim 400$ の場合には内側球に回転と逆方向のトルクがかかることが見出された。

このトルクの変化は平均帯状流の構造の変化によって引き起こされていることが見出された。このトルクと平均帯状流の構造の詳細および平均帯状流生成の物理的解釈のために行った弱非線形解析の結果については Kimura *et al.* [5] を参照されたい。

5 トルクの大きさの見積り

内側球の密度が一樣でかつ球殻内の流体の密度と同じであると仮定すると、無次元化された慣性モーメントは

$$I_{\text{in}} = \frac{8}{15}\pi \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^5 \simeq 0.22$$

となる。内側球に働く回転軸方向のトルクの大きさを N_{in} としたとき、このトルクによって両側球が1回転する間に変化する内側球の回転角速度の割合は

$$\frac{\Delta\Omega_{\text{in}}}{\Omega_{\text{in}}} \sim \frac{N_{\text{in}}}{I_{\text{in}}} \times \frac{8\pi}{\tau^2} \sim 0.11 \left(\frac{N}{10} \right) \left(\frac{\tau}{100} \right)^{-2},$$

と見積もることができる。ここから $\tau = 52$ の場合には両側球が1回転する間に回転角速度が最大82%程度変化し、 $\tau = 500$ の場合は最大0.8%程度変化すると見積もることができる。従って両側球の運動も考慮する場合、計算した τ の範囲では両側球に働くトルクは無視できない要素であると考えられる。

6 結論と今後の課題

粘着・温度固定境界条件の下、半径比 $\eta = 0.4$ 、Prandtl 数 $P = 1$ の場合に、 $52 \leq \tau \leq 500$ 、 $1500 \lesssim R \lesssim 10000$ の範囲で、臨界点から超臨界分岐する有限振幅定常進行波 TW4 を Newton 法によって求め、その線形安定領域を固有値計算することによって定めた。TW4 は臨界 Rayleigh 数 R_c からおよそその1.2倍から2倍の範囲で安定であっ

た。静止解および TW4 の安定領域は回転を速くするにつれて一部を除き拡大することから、回転はおおむね解を安定化させる傾向にあることが見出された。TW4 の安定領域内では、伝播方向の変化およびそれに伴う熱対流構造はすべて連続的に変化しており、伝播方向が遷移する際、分岐などに伴う構造の不連続な変化は生じていないことが分かった。

また TW4 が両側球に及ぼすトルクを計算した。 $\tau \lesssim 100$ では内側球に回転と同じ方向のトルクが働くが、 $200 \lesssim \tau \lesssim 300$ ではトルクはほぼゼロであり、 $\tau \gtrsim 400$ では内側球に回転と逆方向のトルクが働くことが見出された。この、回転角速度の変化に伴うトルクの方向の変化は平均帯状流の構造の変化によって引き起こされることを見出した。またそのトルクの大きさを見積もった結果、内側球の運動も考慮する際には、トルクの影響は無視できないことが分かった。

今後の課題として、両側球の運動を考慮した Boussinesq 熱対流問題で、両側球の運動とともに熱対流パターンがどのように変化するかを調べたいと考えている。これに関しても、時間があればいくつかの数値計算結果を報告したい。

参考文献

- [1] S. Chandrasekhar, Oxford Univ. Press, pp654, 1961.
- [2] F.H. Busse, *Astrophys. J.*, **159**, 629-639, 1970.
- [3] F.H. Busse, *J. Fluid Mech.*, **44**, 441-460, 1970.
- [4] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, *Phys. Fluids*, **23**, 074101, 2011.
- [5] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, *Fluid Dyn. Res.* (2011, submitted)
- [6] R. Simitev and F.H. Busse, *New Journal of Physics*, **5**, 97.1-97.20, 2003.
- [7] S. Takehiro and Y.-Y. Hayashi, *The Earth's Center Part: Its Structure and Dynamics* edited by T. Yukutake, 123-156, 1995.
- [8] S. Takehiro, *J. Fluid Mech.*, **659**, 505-515, 2010.
- [9] J. Tromp, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **29**, 47-69, 2001.

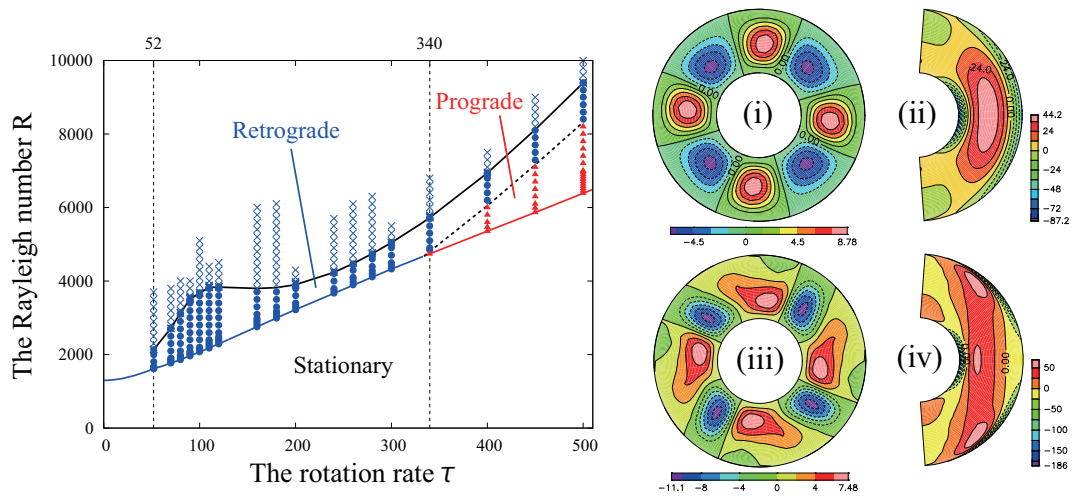


図1 (左図): 臨界点から超臨界分岐する有限振幅定常進行波 TW4 の分岐ダイアグラム. 下側の実線は静止解 (熱伝導解) の中立曲線を表しており, 青線は臨界モードが retrograde に伝播し, 赤線は臨界モードが prograde に伝播することを示している. 青丸 (赤三角) は安定な TW4 が retrograde (prograde) に伝播する領域を, 青クロスは TW4 (retrograde に伝播) が不安定な領域を表す. 上側の実線は TW4 の中立曲線を示し, この実線よりも上の領域で TW4 は不安定化する. また伝播速度がゼロとなる部分を点線で示している. (右図): 典型的な TW4 のパターン. $\tau = 52$, $R = 2100$ (臨界 Rayleigh 数 $R_c = 1612.5026$, TW4 が不安定化する Rayleigh 数 $R_c^{\text{TW4}} = 2133$) での (i): 赤道断面における速度場動系方向成分 u_r (ii): 子午断面における渦度場回転軸方向成分 $\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$. (iii), (iv) は $\tau = 500$, $R = 9200$ ($R_c = 6386.6056$, $R_c^{\text{TW4}} = 9605$) での (i), (ii) に対応. (ii), (iv) から回転が遅い場合には対流セルが球殻に沿い, 回転が速くなると回転軸方向に伸びることが分かる.

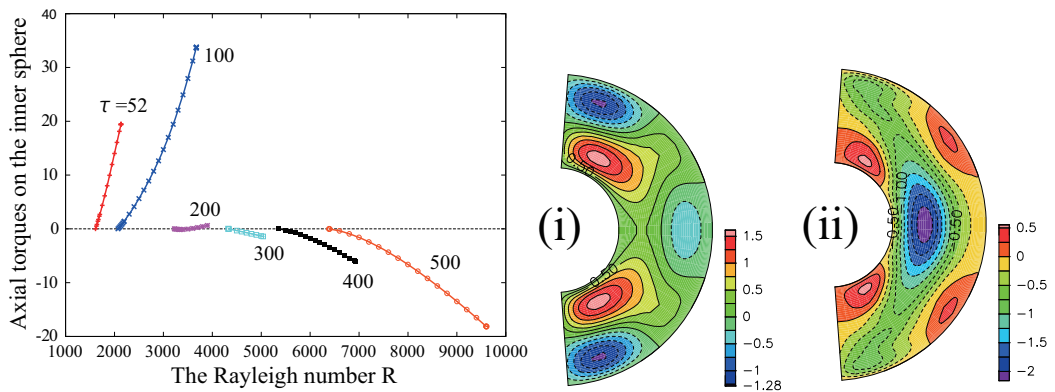


図2 (左図): 各 τ での, TW4 の安定領域における, 内側球に働くトルクの回転軸方向成分. (右図): TW4 の平均帯状流 (速度場方位角方向成分の方位角方向平均) の構造. (i): $\tau = 52$, $R = 2100$, (ii): $\tau = 500$, $R = 9200$. (i), (ii) より, 回転が遅い場合には内側球付近全体に回転と同じ方向の平均帯状流が生成され, 回転が速い場合には内側球赤道付近に強い回転と逆方向の平均帯状流が生成されることが分かる.

微生物の流体力学と帆立貝定理

石本健太* (京都大学数理解析研究所)

1 はじめに

細菌やプランクトンのような微生物の運動は、我々が目にする鳥や魚、昆虫といった生物とは大きく異なる運動形態を持っている。例えば、大腸菌のようなバクテリアは鞭毛と呼ばれる螺旋状の突起物をコルク抜きのように回転させることで推進力を得る。また、ゾウリムシのような大きな微生物の仲間は繊毛と呼ばれる無数の体毛状の器官を外界の水に打ち付けることで移動している。

このような微生物の運動に関しては生物学者だけでなく、半世紀にわたり工学者や物理学者、応用数学者により研究が進められ、近年でも盛んに研究が行われている [7]。微生物の運動を理解する際のマイルストーンとして、Purcell の帆立貝定理 (the scallop theorem) [10] がよく知られている。この定理は微生物のまわりの流体運動が Stokes 方程式に従うとき、生物の形状変形が帆立貝のような時間反転可能な往復運動 (reciprocal motion) の場合、変形の数値に依らず変形の 1 周期での移動距離がゼロになるというものである。

一方で、現実の微生物は変形により移動することができるので、この定理が何らかの理由で破れている必要がある。実際には往復運動を行わないために運動が可能になっているのだが、近年、この定理が破れる条件についての研究が盛んに行われ [8]。流体の弾粘性や、慣性による定理の破れが指摘されている。本講演では、この慣性による定理の破れに注目したい。

生物のサイズが大きくなるに従い慣性の影響が大きくなり、実際の帆立貝のように往復運動でも運動ができるようになるはずである。微生物とそうでないものの中間のサイズのものとして、例えばクリオネの幼体を考えると、これらは体長が数 mm 程度で体表面に繊毛をもつが、同時に羽ばたき運動のような往復運動に近い泳ぎも行う。これに関して Childress と Dudley は、ある臨界の Reynolds 数^{*1}で帆立貝定理が破れると指摘している [4]。その後、流体実験や数値解析等の研究がいくつかなされているが ([8])、いずれも決定的な結果には至っていない。

帆立貝定理に関しては、多くの証明が与えられており、幾何学的な観点からは、例えば、[11], [6], [2]、物理学的な証明のスケッチとしては [3] や [7] などたくさんあるが、これらはいずれも慣性がある場合には定理の意味が明確にならない。そこで、本講演では、まず帆立貝定理がどのような定理であるかを流体力学的な観点から、[5] に従って紹介する。さらに、慣性の影響が小さい極限での帆立貝定理の破れについて、[5] の結果を中心に紹介したい。本講演の内容は山田道夫氏 (京都大学数理解析研究所) との共同研究に基づいている。

* ishimoto@kurims.kyoto-u.ac.jp

^{*1} 流体の性質を特徴づける定数で生物の大きさや速度、流体の粘性で決まる。

2 系の設定

まず、変形によって流体中を移動する生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ (=real swimmer) の運動を議論するため、 $\tilde{\mathcal{O}}$ と同じ形状変形を行うが仮想的にまわりに流体の影響を受けない生物 $\mathcal{O}$ (=virtual swimmer) の運動を考える (図 1). 生物を除いた領域で流体が存在するとし、時刻 $t \in \mathbb{R}^+ = \{x \geq 0 | x \in \mathbb{R}\}$ での生物 $\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ の領域の補集合を $\Omega_t, \tilde{\Omega}_t$ とし、 $\Omega = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} (\Omega_t \times \{t\})$, $\tilde{\Omega} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} (\tilde{\Omega}_t \times \{t\}) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ を定める. 境界は十分滑らかであるとする.

生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ に固定された正規直交座標系 $\{\tilde{e}_i(t)\}$ と慣性座標系 $\{e_i\} (= \{\tilde{e}_i(0)\})$ ($i = 1, 2, 3$) を考える. $\tilde{\mathcal{O}}$ の並進 $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^3$ と回転 $\mathbf{R}(t) \in \text{SO}(3)$ は、2つの座標系 $\{e_i\}$ と $\{\tilde{e}_i\}$ の間の座標変換を用いて定義する. 生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ の表面の変形速度は、 $\mathcal{O}$ の形状 $\mathbf{f}(\mathbf{a}, t) = \partial\Omega_t$ ($\mathbf{a}$ は Lagrange 座標^{*2}) を用いて $\mathbf{R}\partial\mathbf{f}/\partial t$ と定義する.

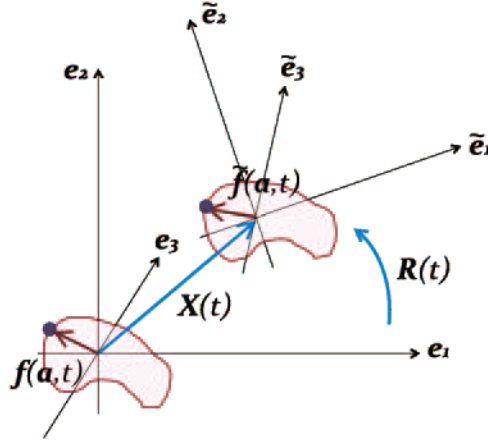


図 1 生物 $\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ の座標系 $\{e_i\}$ と $\{\tilde{e}_i\}$.

生物のまわりの流体の支配方程式は一般には非圧縮 Navier-Stokes 方程式である. 流体の速度場 $\mathbf{u} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ に対して,

$$R_\omega \frac{\partial u_i}{\partial t} + Re \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ はストレステンソルで

$$\sigma_{ij} = -p + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (3)$$

p は圧力と呼ばれる関数 $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である. また生物の運動は Newton の運動方程式に従う. 生物の並進速度 $\mathbf{U}(t)$ と回転角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ は

$$R_S \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (4)$$

^{*2} 生物の表面を表すラベル付けで、例えば $\mathbf{a}$ を時刻 $t = 0$ での位置 $\mathbf{x}(0)$ とすればよい.

を満たす．ここで $\mathbf{F}(t)$ と $\mathbf{T}(t)$ は生物にかかる力とトルクでそれぞれ $F_i = \int_{\partial\tilde{\Omega}_t} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j dS$, $T_i = \int_{\partial\tilde{\Omega}_t} \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS$ で与えられる．式 (1),(4) には3つの非負定数 Re , R_ω , R_S が現れる．^{*3}

実際の流体中の生物の運動，すなわち $\tilde{\Omega}$ は生物の変形速度 $\mathbf{f}$ と並進と回転の速度 $\mathbf{U}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ によって定まっていることに注意しなければならない．

3 帆立貝定理

前章の準備のもとで，「はじめに」で触れた帆立貝定理の意味を明確にすると次のようになる．

定義： 生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ が周期 T の往復運動をするとは，連続関数 $g(t)$ と回転行列 $\mathbf{S}(t)$ が存在し， $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{f}(g(t))$, $g(0) = g(T) = 0$ を満たす^{*4} ことである．

定理 (帆立貝定理, [5])： 3つの定数 Re , R_ω , R_S がすべてゼロのとき，生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ が周期 T の往復運動をすれば， $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{R}(T) = \mathbf{1}$ が成り立つ．

これらの意味と実際の微生物の運動への適用を考える．まず，往復運動の定義であるが，関数 g は回転の自由度を許して，行きと帰りの形状 $\mathbf{f}$ を対応づける写像である．周りに流体の無い生物 $\mathcal{O}$ に対して運動量と角運動量の保存則が成り立つことが重要である．生物のサイズが小さい場合には定理の仮定になっているように，3つの定数はいずれも無視できる程度に小さい値となる．例えば，大腸菌の場合生物のサイズは $10\mu\text{m}$ 程度であり， Re , R_ω , R_S は 10^{-4} ほどの値になる．このような微生物が帆立貝のような行きと帰りの形状が重なるような上で述べた意味での往復運動を行っても，運動の1周期で元の位置に戻ってしまうため移動ができない．そのため，実際の微生物はこのような往復運動を避けることで移動している．大腸菌のようなバクテリア類の鞭毛の回転運動は往復運動ではないし，ゾウリムシなどに代表される繊毛による運動のように，変形の自由度がたくさんある場合には簡単に往復運動から逃れることができる．

4 慣性による定理の破れ

では，定理のもうひとつの仮定である，3つの定数がすべてゼロであるという条件は実際の生物に対してどれほどまで正しいのだろうか．また，これらの定数が非零である場合には往復運動で生物は移動することができるのだろうか．

まず，3つの定数のうち R_S のみがゼロでない場合を考える．この場合には，生物の変形が往復運動でも一般には移動することができる [5]．1周期の変位 X を R_S に関して漸近展開すると， $X = O(R_S)$ となる．ただし，羽ばたき運動のような形状の対称性がある場合には $X = O(R_S^2)$ となり，形状変化の速度も含めて変形の対称性が「高い」場合には1周期の変位はより R_S のより高次のオーダーになることがわかる．

さらに， R_S に加えて R_ω もゼロでないとした場合への拡張を考える．簡単な例として Lighthill の squirmer モデル ([9], [1]) と呼ばれるボルボックスのような球状の生物が表面を変形させることで移動する生物モデルにこの拡張を適用した．軸対称な球の微小変形を考え，生物の変位 $X(t)$ に対して変形の振幅 ϵ に関する漸近展開 $X \sim \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n X^{(n)}(t)$ を行いその低次の振る舞いを考える．すると，

^{*3} Re は Reynolds 数， R_ω は Reynolds 数と Strouhal 数の積に等しく，振動 Reynolds 数と呼ばれる．それぞれ $Re = \rho UL/\mu$, $R_\omega = \rho L^2\omega/\mu$ である．ここで L は生物の大きさ， U は生物の速度， ω は生物の周期運動の振動数， ρ は流体の密度， μ は流体の粘性係数を表す． R_S は Stokes 数とも呼ばれる数で生物の密度 ρ_M を用いて $R_S = \rho_M L^2\omega/\mu$ で表される．

^{*4} $g(t)$ は周期関数である必要は無い．

- $O(\epsilon)$ では変形の 1 周期での変位はゼロではない ($X(T) \neq 0$) が時刻無限大の極限では元の位置に戻る. すなわち, $|X((n+1)T) - X(nT)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
- $O(\epsilon^2)$ では時刻無限大の極限でも生物は元の位置に戻らず, その変位は $O(R_\omega)$ となり, R_S に依存しない量になる.
- この漸近的な変位の大きさは R_S のみがゼロでないとした場合と同様に「対称的な」変位の場合はより高次のオーダーになる.

などの結果を得た.

5 おわりに

今後の方針としては, さらに $Re \neq 0$ の場合に拡張することが考えられる. しかし, その場合には方程式が非線形であるために解析は非常に困難になる. Oseen 近似^{*5}のような近似方法もあるが, 線形の場合でさえ, 生物の変形を捉えて流体方程式を扱うことは難しいことを考えると, 数値的なアプローチが必要になってくるように思われる. また, $Re = 0$ の場合にも一般の変形のもとでの定理がどのように破れるのかという問題も興味深い.

本稿の冒頭で触れたサイズによる生物の運動形態の違いについては, 生物の移動速度だけでなく運動の効率性や生物の生態等といった具体的な生物運動を踏まえた問題設定のアプローチもあるが, 流体方程式の解の性質 (安定性や力学系としての振る舞い) に注目して研究を進めていきたい.

参考文献

- [1] J. R. Blake, “A spherical envelope approach to ciliary propulsion”, J. Fluid Mech., **46** (1971) 199-208.
- [2] T. Chambrion and A. Munnier, “Generalized scallop theorem for linear swimmers”, arXiv Preprint (2010) 1008.1098v1[math-ph].
- [3] S. Childress, *Mechanics of Swimming and Flying*, (1981) Cambridge University Press, New York, USA
- [4] S. Childress and R. Dudley, “Transition from ciliary to flapping mode in a swimming mollusc: flapping flight as a bifurcation in Re_ω ”, J. Fluid Mech., **498** (2004) 257-288.
- [5] K. Ishimoto and M. Yamada, (2011) submitted, arXiv: 1107.5938.
- [6] L. Koiler, K. Ehlers and R. Montgomery, “Problems and progress in microswimming”, J. Nonlinear Sci., **6** (1996) 507-541.
- [7] E. Lauga and T. Powers, “The hydrodynamics of swimming microorganisms”, Rep. Prog. Phys., **72** (2009) 096601.
- [8] E. Lauga, “Life around the scallop theorem”, Soft Matter, **7** (2011) 3060-3065.
- [9] M. J. Lighthill, “On the squirting motion of nearly deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers”, Commun. Pure Appl. Math, **5** (1952) 109-118.
- [10] E. M. Purcell, “Life at low Reynolds number”, Am. J. Phys., **1** (1977) 3-11.
- [11] A. Shapere and F. Wilczek, “Geometry of self propulsion at low Reynolds number”, J. Fluid Mech., **198** (1989) 557-586.

^{*5} 式 (1) の左辺 2 項目の u_j を $u_j \rightarrow U_j$ に置き換えること.

連続時間の酔歩過程に対する緩和関数

Daniel M. Packwood* ダニエル・パックスウッド

京都大学理学研究科化学専攻

606-8502 京都市左京区北白川

1. 序

本研究では位相のデコヒーレンスを説明するモデルについて説明する。位相のデコヒーレンスを理解するために、多数のスピン（たとえば、電子や水素の原子）とスピンの角運動量のベクトルを考えよう。スピン間の距離が遠いので、互いには相互作用しない。しかし、スピンはそれ以外の自由度（環境）とは相互作用する。スピンの角運動量ベクトルが xy 平面内を回転する場合を考えよう。時間 0 で回転周波数は ω_0 とする。現実的には、磁気共鳴の実験がこの状況に相当している [1]。始めはベクトルは整列し、一緒に回転してるとする。しかし、環境との相互作用で回転周波数に乱雑な変動が起きる[2]。そのため、ある時間経過するとそれぞれの回転周波数はドリフトし、お互いバラバラになり、スピンベクトルの位相はそれぞれで異なってしまう。これが位相のデコヒーレンスである。実験上では、位相のデコヒーレンスがおこると、信号強度が弱くなる。このため、周波数領域で、磁気共鳴や分光の実験を行うとデータ解析が難しくなる。位相のデコヒーレンスがおこると、量子コンピュータを作成することも難しくなる[3]。

乱雑な周波数を説明するために、 $\omega_0 + Q_t$ で周波数を定義しよう。 Q_t は Q という確率過程の時間 t での値である。この方程式は回転しているベクトルを説明しており

$$df/dt = i(\omega_0 + Q_t)f \quad (1)$$

この方程式を解いて期待値を計算する（即ち、平均スピンを計算する）と、緩和関数（relaxation function）が求められる

$$F(t) = e^{i\omega_0 t} E \left[\exp \left(i \int_0^t Q_r dr \right) \right]. \quad (2)$$

(2) 式は位相のデコヒーレンスをモデル化している。磁気共鳴実験の測定データは緩和関数の実部を比例している[1]。よって位相のデコヒーレンスを説明するには、緩和関数を評価すればよい。 Q が定常ガウス過程（Ornstein-Uhlenbeck 過程）と電信過程の場合について、緩和関数を評価した[2、4、5]。まず連続時間の酔歩過程の場合を評価した。連続時間の酔歩過程は、結晶の環境でスピンの位相のデコヒーレンスを調べる簡単なモデルになっている。

2. 連続時間の酔歩過程

$X, X_1, X_2, \dots$ を独立同分布確率変数列、 N を X に独立なポアソン過程、 $Q = \{Q_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ を確率過程

としよう。 $Q_t = Q_0 + \sum_{k=1}^{N_t} X_k \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ である場合、 Q は連続時間の酔歩過程（CTRW）となる。

Q_0 は X と N に独立な確率変数である。ポアソン過程のパラメータは λ である。

ここで、 W はウィーナー過程（ブラウン運動）で、 $W_0 = 0$ （almost surely）である。 $F_w(t)$ はウィーナー過程の緩和関数。 $\Rightarrow$ は分布が弱く収束することを示す。

定理 1

X を $[-M, M]$ 上の一様分布に従うとしよう。 $Q_0 = 0$ と $M = \sqrt{3/\lambda}$ で $\lambda \rightarrow \infty$ のとき、 $Q \Rightarrow W$ で、 $F(t) \rightarrow F_w(t)$ 。

補足： Q_0 が 0 以外と $Q_{t_0} = W_{t_0}$ （almost surely）の場合も証明出来る。

証明の概要： $\lambda \rightarrow \infty$ ということは $Q^1, Q^2, \dots, Q^m, \dots$ 列（ $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \rightarrow \infty$ ）の極限を解くことである。このような定理を証明するため、よく中心極限定理が用いられるが、ここでは違う方法を用いる。 Q_t^m の偶数のモーメントの形は $E(Q_t^m)^{2p} = (2p-1)!! \lambda_m^p t^p M_m^{2p} / 3^p + O(\lambda_m^{p-1} t^{p-1} M_m^{2p})$ [6]。ここで、 $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 1$ 。奇数のモーメントは 0。 $M_m = \sqrt{3/\lambda_m}$ 式を使って、極限を解いて、 $E(Q_t^m)^{2p} \rightarrow (2p-1)!! t^p$ 。これは W_t のモーメントになっている。 W_t は正規分布に従う。正規分布がモーメントで決定されるので、モーメント法(method of moments)を使うと、 $Q_t^m \Rightarrow W_t$ であることがわかる。詳細は[6]に説明されている。□

3. 緩和関数の評価

主な結果を説明しよう。 ϕ_Z は Z という確率変数の特性関数を示す。

定理 2.

$$F(t) = e^{i\omega_0 t} \phi_{Q_0}(t) e^{-\lambda t} \exp \left(\lambda t \int_0^1 \phi_X(tz) dz \right). \quad (3)$$

X は一様確率変数なら、(3) 式が

$$F(t) = e^{i\omega_0 t} \phi_{Q_0}(t) e^{-\lambda t} \exp \left(\frac{\lambda}{M} \int_0^t \frac{\sin(Mr)}{r} dr \right). \quad (4)$$

(3) 式の証明の概要： $\int_0^t Q_s ds$ のリーマン和を書き下し、 $\{a_k\}_{k=1}^n = \{1 - (k-1)/n\}_{k=1}^n$ の列を使うと、

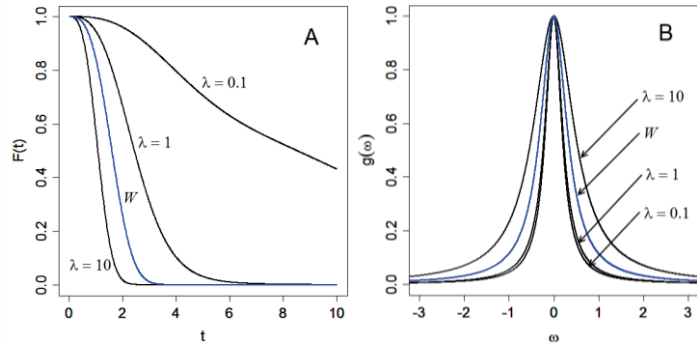
$$\int_0^t Q_s ds = tQ_0 + t \sum_{k=1}^n a_k \Delta Q_{t_k} \quad (5)$$

が証明できる。ここで、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ 、 $t_k - t_{k-1} = t/n \forall 1 \leq k \leq n$ 、 $\Delta Q_{t_k} = Q_{t_k} - Q_{t_{k-1}}$ である。

(2) 式と (5) を使って、

$$F(t) = e^{i\omega_0 t} \phi_{Q_0}(t) e^{-\lambda t} \exp \left(\lambda t \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi_X(a_k t) \right) \right) \quad (6)$$

1 図。(A) C T R Wの緩和関数のプロット。W はウィーナー過程の緩和関数。(B) は (A) のパワースペクトル。パワースペクトルの計算はR.2.13.1のspec.arサブルーチンを用いた。



が証明できる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n a_k = (0,1]$ ので、リーマン積分の定義を使ったら、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi_X(a_k t) = \int_0^1 \phi_X(tz) dz$$

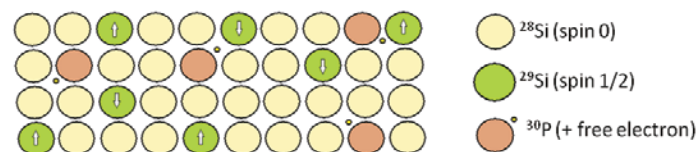
ことがわかる。この結果を使い (6) 式の極限を解くと、(3) 式が導出される。 □

X が一様確率変数の場合を考える。1 a 図は C T R W の緩和関数のプロットである。このプロットは $M=1, Q_0=0, \omega_0=0$ で、色々な λ に対しておこなった。減衰は少し不規則である。 λ が増えてきたら、不規則性がなくなって、減衰速度が増える。

1 a 図では $F_w(t) (= e^{i\omega t} \exp(-t^3/6))$ のプロットも行った。 λ が増える間に C T R W の緩和関数の減衰速度が増えるが、ウィーナー過程の場合では ($\lambda \rightarrow \infty$ 極限) 減衰速度がよりゆっくりである。理由は極限で $M = \sqrt{3/\lambda}$ に設定したからである。この式の物理的解釈は簡単である。スピンの環境を説明するように、C T R W を使う。 $X_1, X_2, \dots$ は環境の変化を記述する。 M はスピンと環境の間の結合の強さを測定する。 $M = \sqrt{3/\lambda}$ という式は λ が増えたら、結合の強は弱くなることを意味する。であるからデコヒーレンスの減衰速度は減っている。1 b 図に 1 a 図のプロットのフーリエ変換を示した。この曲線は磁気共鳴実験におけるスペクトル線に対応している[1]。 λ が減るとスペクトル線は広がる。極限では (ウィーナー過程の場合) スペクトル線が狭くなる。磁気共鳴では、このことは motional narrowing と呼ばれる。実験では、環境の温度が増えるとき、スペクトル線が狭くなる[2]。

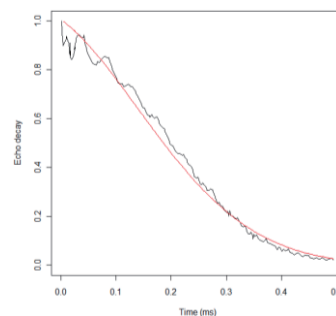
4. 結晶の環境でスピンの位相のデコヒーレンスの応用

リンをドーブしたシリコンは半導体産業において重要な物質である。この物質は ^{28}Si 原子から作られる格子に、いくつかの ^{30}P 原子が含まれている (2 図)。 ^{30}P 原子の濃度が非常に小さいので、 ^{30}P は互いに相互作用しない。 ^{30}P は不対電子があり、磁気共鳴実験ではこの電子が調べられる。格子の ^{28}Si の核スピンは 0 なので、 ^{30}P と相互作用出来ない。自然のシリコン結晶は 4.9% ^{29}Si である。 ^{29}Si の核のスピンは 0 ではないので、磁場を生成して、 ^{30}P の電子のスピンが角周波数に



2 図。リンをドーピングしているシリコンの格子の模式図。 ^{29}Si 内の矢印は ^{29}Si のスピンのベクトルの z の成分の方向を示している。偏光交換 (polarisation exchange) とは、近い ^{29}Si の核スピンの z 方向の成分を互いに交換することである ([7])。実際には ^{30}P の数大変少ない。

3 図。CTRWの緩和関数 (赤線) と、実験から得られた ^{30}P の不対電子のスピンの位相の散逸のデータの比較。エコーの減衰 (echo decay) は位相のデコヒーレンス測定的一种である。時間が短いときに、観測データは振動している。これは実験のアーチファクトで、無視しても良い。データは[7]より得られた。



影響を与える[7]。この周波数の変動を説明するためにCTRWの緩和関数 ((4) 式) を使う。近くの ^{29}Si 原子はスピンの方向を交換するにあたり、周波数変動が起きる (偏光交換 (polarisation exchange) と言われる; 2 図) [7]。 X が一様確率変数ということは全て ^{30}P の近く ^{29}Si が偏光交換をするのが等しい確率を持つことである。 M は ^{29}Si と ^{30}P の間の結合強度を測定する。

3 図は Tryshkin *et al.* の実験から ^{30}P の電子のスピンの位相の散逸 (位相のデコヒーレンス) のデータを示している[7]。(7) 式もプロットした。モデルの様々なパラメータの決め方は以下である。
i. Q_0 は標準偏差は 3λ の正規分布である。 Q_0 は実験的な手順による誤差を反映している。
ii. $M = 0.5 \text{ MHz}$ とした。この数は実験においてオーダーで弱い典型的な弱結合定数の場合である。このパラメータセットを使って、 λ と 1.6 ms^{-1} にした。格子中の電子が実験をする間に、平均で偏光交換が $1.6 \text{ ms}^{-1} \times 0.5 \text{ ms} \sim 1$ 回だけが起きる。実験で位相のデコヒーレンスが観測するには十分である[8]。

5. 参照

- [1] Atkins, P. W. *Physical Chemistry* (7th Edition). Oxford University Press, Oxford, U.K. 2001.
- [2] Kubo, R. *Advances in Chemical Physics* **15**, 1969, 101.
- [3] Stoneham, M. *Physics* **2**, 2009, 34.
- [4] Kitajima, S., Ban, M., Shibata, F. *Journal of Physics B. Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 2010, 135504.
- [5] Sergeev, N. A., Olszewski, M. *Solid State Nuclear Magnetic Resonance* **34**, 2008, 167.
- [6] Packwood, D. M. *In preparation*. Preprint at: arXiv:1105.6283v1 [math.ST]
- [7] Tryshkin *et al.* *Journal of Physics. Condensed Matter* **18**, 2006, S783.
- [8] Packwood, D. M., Tanimura, Y. *In preparation.*; Packwood, D. M., Tanimura, Y. *Physical Review E*. **84**, 2011, 61111.

破壊現象におけるベキ分布を説明する 可解な確率モデルについて

早稲田大学大学院先進理工学研究科 山本 健

1 ベキ分布

ある量 X の確率密度関数がベキ関数

$$f(x) = Cx^{-\gamma} \quad (C, \gamma > 0)$$

で表されるとき、 X はベキ分布にしたがうという。ただし、実測値から分布を構成した場合には x の値が小さい部分では他の分布へのクロスオーバーがあったり、 x が大きい部分ではカットオフがみられたりすることもある。

ベキ分布は多様な物理現象・社会現象にみられ、代表的なものとしては1回の地震で解放されるエネルギーの分布（Gutenberg-Lichter の法則）、文章中の単語の出現回数の分布（Zipf の法則）、および複雑ネットワークの次数分布（スケールフリー性）などが知られている。

ベキ分布を生む典型的・古典的かつ日常的な現象として破壊が挙げられる。ある物体の破壊過程を推測するための手軽な方法が、破壊によって生じた破片の個数をサイズ（質量や長さなど）ごとに数えて度数分布をつくることである。様々な材料、破壊条件、スケールでの実験および観測（ジャガイモから流水や小惑星まで）によると、破片サイズ分布がベキ分布になることが数多く報告されている（他の分布をとるという実験結果もある）。破片サイズのベキ分布を説明するモデルも提案されているものの、その理論的な起源は明らかでない。

破壊の状況によらずにベキ分布が普遍的にみられることから、何か単純なメカニズムがあるのではないかと考えられる。本研究では、できるだけシンプルなモデルを用いてベキ分布を導出することを目指す。材料の特性や微視的な破壊の素過程に関する仮定を置かずにかなり一般的な設定で破壊の確率モデルを構成する。このモデルに対応する破片サイズ分布は厳密に計算可能で、それがベキ（的）分布になることを導く。

2 モデル

単純化のため、長さ L の 1 次元的な棒の破壊を想定する（破片の長さがサイズとなる）。本モデルは多段階の破壊からなり、個々の破壊では 1 つの破片が確率的に決まる位置 $\xi \in (0, 1)$ で 2 つに分かれる（長さ l の破片が位置 ξ で割れたとき、生じる破片の長さはそれぞれ $\xi l, (1 - \xi)l$ である）。ただし、それぞれの破片について、確率 $1 - \rho$ で破壊が起こり、確率 ρ で破壊が停止するものとする（いったん破壊が停止した破片は破壊が再開することはない）。この意味で、 ρ を“停止確率”と呼ぶことにする。なお、はじめの状態で一度も破壊が起こらずに破壊が停止してし

もう状況も許容することに注意。また、破壊が起こる点 ξ は全て同一の確率密度関数 $g(\xi)$ をもち、個々の破壊で独立に決定する。。

n 回の破壊を受けた破片の長さは掛け算の形 $\xi_1 \cdots \xi_n L$ で表せるため、本モデルは“乗算的確率過程”の一種である。

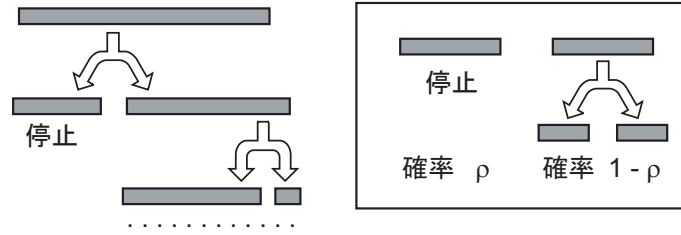


図 1 モデルの説明。破片が 2 つに分かれていくが、確率 ρ で破壊の停止が起こる。

3 解析

このルールに従って長さ L の棒の破壊を行なったとき、破壊が停止した破片のうちで長さが x より大きいものの個数の期待値を $N_L(x)$ で表す（この量を“累積個数”という）。最初の棒の長さ L が添え字で明示されている。最初の棒が位置 ξ で破壊した場合、以降の破壊は長さ ξL と $(1 - \xi)L$ の棒の破壊となることから、

$$N_L(x) = (1 - \rho) \int_0^1 \{N_{\xi L}(x) + N_{(1-\xi)L}(x)\} g(\xi) d\xi + \rho \quad (1)$$

という方程式が得られる。ここで、モデルの相似性より、同じ破壊過程を $\alpha (> 0)$ 倍した長さスケールで観測すると、棒の長さ L は αL 、累積個数は $N_{\alpha L}(\alpha x)$ と表される。そのため $N_{\alpha L}(\alpha x) = N_L(x)$ または $N_{\alpha L}(x) = N_L(x/\alpha)$ というスケーリング関係式が得られる。これにより、式 (1) の右辺にある $N_{\xi L}(\cdot)$ および $N_{(1-\xi)L}(\cdot)$ を $N_L(\cdot)$ にそろえることができる。さらに、 $\tilde{N}_L(x) := N_L(x) + \frac{\rho}{1-2\rho}$ とおけば式 (1) の最後の項“ ρ ”を消去できる：

$$\tilde{N}_L(x) = (1 - \rho) \int_0^1 \left\{ \tilde{N}_L\left(\frac{x}{\xi}\right) + \tilde{N}_L\left(\frac{x}{1-\xi}\right) \right\} g(\xi) d\xi. \quad (2)$$

解として $\tilde{N}_L(x) = Cx^{-\beta}$ を仮定する (C, β は x によらない定数、 $\beta > 0$)。これを式 (1) または (2) に代入し境界条件 $N_L(L) = \rho$ に注意すれば、

$$N_L(x) = \frac{\rho}{1-2\rho} \left\{ 2(1 - \rho) \left(\frac{x}{L}\right)^{-\beta} - 1 \right\} \quad (3)$$

が得られる。ただし、指数 β は方程式

$$(1 - \rho) \int_0^1 \{\xi^\beta + (1 - \xi)^\beta\} g(\xi) d\xi = 1 \quad (4)$$

から決定される。式 (3) の右辺の項“ -1 ”があるため、解 $N_L(x)$ は完全なべき関数ではなくべき“的”である。ただし、 $x \ll L$ かつ ρ が小さければ、ふるまいはべき関数に近くなる。

指数 β を決定する式 (4) は破壊点の分布 g を含んでいるので、 β は一般に停止確率 ρ および確率密度 g に依存する。一般の g に対して β を陽に解くことはできないが、いくつかの場合には比較的簡単に β を求めることができる。例えば、 $g(\xi) = 1$ (つまり破壊点は破片上一様分布する) のとき $\beta = 1 - 2\rho$ であり、 $g(\xi) = \delta(\xi - 1/2)$ (δ は Dirac のデルタ関数、破片はつねに中点で割れる) のとき、 $\beta = 1 + \log_2(1 - \rho)$ である。 $g(\xi) = \delta(\xi - 1/2)$ の場合の数値計算結果を図 2 に示す。

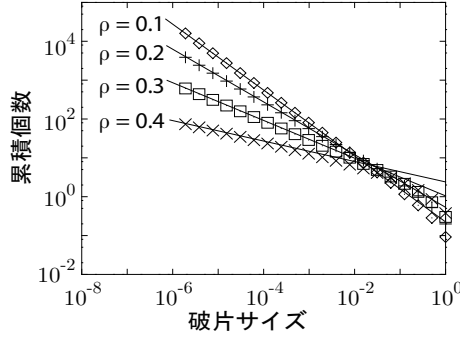


図 2 $g(\xi) = \delta(\xi - 1/2)$, $\rho = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の場合の数値計算結果 ($L = 1$ とし、1000 個のサンプルを平均)。直線は各々に対応する厳密なベキ分布 $\tilde{N}_L(x)$ 。

4 モデルの変形

式 (4) の分析を進めると、指数 β がとりうる値の範囲は確率密度 g によらずに $0 < \beta < 1$ であることが示される (なお、停止確率 ρ の妥当な範囲は $0 < \rho < 1/2$ である)。しかし、実際には $\beta > 1$ の破壊現象も数多く存在する。それらに対応する分布を得るために本節ではモデルに若干の変形を加える。上では停止確率 ρ を一定としていたが、ここでは停止確率を破片の長さの関数として与える。具体的には、長さ ℓ の破片の停止確率として

$$p_\lambda(\ell) = \begin{cases} (\lambda/\ell)^\gamma & (\ell \geq \lambda) \\ 1 & (\ell \leq \lambda) \end{cases}$$

の形を考える (λ, γ はともに正定数)。破片サイズ ℓ が小さいほど $p_\lambda(\ell)$ は大きくなり、短い破片ほど破壊が停止しやすいことを表している。また、長さ $\ell < \lambda$ なる破片は必ず破壊停止になるため、 λ は破片の長さの下限に相当する。以下では $\lambda \ll L$ とする。

前節と同様に、破片の累積個数 $N_{L,\lambda}(x)$ に注目すると、 $x \gg \lambda$ のとき

$$N_{L,\lambda}(x) \simeq \int_0^1 \{N_{\xi L,\lambda}(x) + N_{(1-\xi)L,\lambda}(x)\} g(\xi) d\xi$$

が成り立つ。スケーリング関係式 $N_{\alpha L, \alpha \lambda}(\alpha x) = N_{L,\lambda}(x)$ も前節同様に得られる。また、 $x \gg \lambda$ のもとでは λ のみに対するスケーリング関係式 $N_{L,\alpha \lambda}(x) \simeq \alpha^\gamma N_{L,\lambda}(x)$ が導かれる。

ベキ関数 $N_{L,\lambda}(x) = Cx^{-\beta}$ を仮定すると、 β に対する方程式

$$\int_0^1 \{\xi^{\beta-\gamma} + (1-\xi)^{\beta-\gamma}\} g(\xi) d\xi = 1$$

が得られるが、規格化 $\int_0^1 g(\xi) d\xi = 1$ に注意すると、解 β は g によらず $\beta = 1 + \gamma$ であることがただちに分かる。境界条件 $N_{L,\lambda}(L) = p_\lambda(L) = (\lambda/L)^\gamma$ を考慮すれば、

$$N_{L,\lambda}(x) = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^\gamma \left(\frac{x}{L}\right)^{-(1+\gamma)} \quad (5)$$

という厳密なベキ関数解が得られる。

$g(\xi) = \delta(\xi - 1/2)$ の場合の数値計算結果を図 3 に示す。 $x > \lambda$ で理論解とよく一致していることが分かる ($x \lesssim \lambda$ ではベキ関数から大きくずれる)。

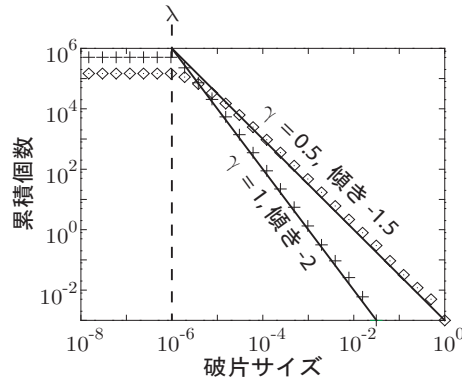


図 3 $g(\xi) = \delta(\xi - 1/2)$, $\gamma = 0.5, 1$ に対する数値計算結果 (パラメータ $L = 1$, $\lambda = 10^{-6}$, それぞれのデータは 1000 サンプルを平均したもの)。直線は各々に対応する理論解 (5) である。

5 まとめ

乗算的な破壊モデルと破壊の停止イベントを組み合わせた確率モデルを導入し、対応する破片サイズ分布の厳密な導出を行なった。破片サイズ分布はベキ (的) になり、累積分布の指数 β は停止確率が一定値の場合 $0 < \beta < 1$ となり、停止確率が破片の長さに応じて変わる場合は $\beta > 1$ を実現することができた。なお、停止イベントを導入したことが破片サイズのベキ分布を実現するうえで重要であることに注意しておく。実際、停止イベントを考慮しない単純な乗算的確率過程の場合に自然な分布は対数正規分布であり、これはベキ分布とは (似たところもあるが) 異なったものである。

謝辞

本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費の援助を受けている。

ANALYSIS OF THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD WITH H^1 -PENALTY FOR PARABOLIC PROBLEM

GUANYU ZHOU

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

ABSTRACT. We consider the fictitious domain method with H^1 -penalty for parabolic problem. First, the error estimate for the H^1 -penalty problem approximating to the original parabolic problem is derived, which is sharper than those in the literature. Then, we give some regularity analysis and prior estimate to the H^1 -penalty problem. With the regularity result of the H^1 -penalty problem, the finite element approximation is investigated for the discrete problem of two types, “continuous-time” and “single-step backward”.

1. INTRODUCTION

The fictitious domain method is to solve the H^1 -penalty problem instead of the original problem. Applying the finite element method to solve the H^1 -penalty problem, the fictitious domain can be discretized by a uniform mesh, independent of the original boundary. The advantage of this approach is that we can avoid the time-consuming construction of a boundary-fitted mesh. Obviously, this approach is of use to treat time-dependent moving-boundary problems.

Although there exist some ways to derive the sharp error estimate (error is bounded by $C\epsilon$) for elliptic problems (cf. [4]), it seems none of them has been applied to parabolic problem maintaining the sharpness of the error estimate. Our motivation lies in the study of the penalty fictitious domain method applied to these time-dependent moving-boundary problems. This is of obvious importance, and it seems that little is known in this direction. In [3], the convergence result is proved. And for the finite element and finite difference approximation of H^1 -penalty problem, no error estimate is given in [3]. The finite element analysis for H^1 -penalty elliptic problem has been well obtained in [4, 5]. In this article, we will apply those finite element result of elliptic problem in [4, 5] to our H^1 -penalty parabolic problem.

E-mail address: zhoug@ms.u-tokyo.ac.jp.

2. ERROR ESTIMATE FOR H^1 -PENALTY APPROXIMATION

Assuming $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is sufficiently smooth, $0 < T < \infty$, we denote $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Gamma = \partial\Omega$ and $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T]$. Then, we consider the following parabolic problem (Q) , called the original problem,

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ in } Q_T, \\ u(x, t) = 0 \text{ on } \Sigma_T, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \text{ on } \Omega, \end{cases}$$

where $f \in H^{-1,0}(Q_T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$. $H^{-1,0}(Q_T) = L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. $H^{-1}(\Omega)$ is the dual space of $H_0^1(\Omega)$. We write $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(\text{resp. } Q_T)}$ as the dual-product of $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $H^{-1,0}(Q_T)$) and $H_0^1(\Omega)$ (resp. $H_0^{1,0}(Q_T)$), where $H_0^{1,0}(Q_T) = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. And $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ is the inner-product of $L^2(\Omega)$. Then, the weak form of (2.1) can be written as

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{Find } u \in H_0^{1,0}(Q_T) \text{ with } u_t \in H^{-1,0}(Q_T) \text{ s.t.} \\ \langle u_t, v \rangle_{Q_T} + (\nabla u, \nabla v)_{Q_T} = \langle f, v \rangle_{Q_T}, \quad \forall v \in H_0^{1,0}(Q_T), \quad u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

In above, we write the original parabolic problem in time-independent domain (also called cylinder domain) Q_T .

The fictitious domain method is to find a larger domain of a very simple shape (the *fictitious domain*) $D \supset \Omega$. $D_T = D \times [0, T]$, $Q'_T = D_T \setminus \overline{Q_T}$. Then, we introduce the H^1 -penalty problem (Q_{ϵ}) to approximate the original problem (2.2), where ϵ is the penalty parameter. Assuming $0 < \epsilon \ll 1$, (Q_{ϵ}) reads as

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{Find } u_{\epsilon} \in H_0^{1,0}(D_T) \text{ with } u_t \in H^{-1,0}(D_T) \text{ s.t.} \\ \langle M_{\epsilon} u_{\epsilon t}, v \rangle_{D_T} + (\nabla u, \nabla v)_{Q_T} + \frac{1}{\epsilon} (\nabla u, \nabla v)_{Q'_T} \\ = (\tilde{f}, v)_{D_T}, \quad \forall v \in H_0^{1,0}(Q_T), \\ u(\cdot, 0) = \tilde{u}_0, \end{cases}$$

where $\tilde{f}$ and $\tilde{u}_0$ are the zero extension f onto D_T and u_0 onto D , respectively. Here, we assume $f \in L^2(Q_T)$, for that $f \in H^{-1,0}(Q_T)$ cannot guarantee $\tilde{f} \in H^{-1,0}(D_T)$. And $M_{\epsilon} = \chi_{Q_T} + \frac{1}{\epsilon} \chi_{Q'_T}$, where χ_{Q_T} is the indicator function of Q_T .

The fictitious domain method with H^1 -penalty for parabolic problem has been studied in [3], which shows $u_{\epsilon} \rightarrow u$ in $H^{1,0}(Q_T)$ as $\epsilon \rightarrow 0$ in the form without M_{ϵ} , which is

$$\langle u_{\epsilon t}, v \rangle_{D_T} + (\nabla u, \nabla v)_{Q_T} + \frac{1}{\epsilon} (\nabla u, \nabla v)_{Q'_T} = (\tilde{f}, v)_{D_T} \quad \forall v \in H_0^{1,0}(Q_T).$$

However, by our H^1 -penalty problem with M_{ϵ} , we can obtain $\|u_{\epsilon}|_{Q_T} - u\|_{H^{1,0}(Q_T)} + \|u_{\epsilon t}|_{Q_T} - u_t\|_{H^{-1,0}(Q_T)} \leq C(\|f\|_{0,Q_T} + \|u_0\|_{0,\Omega})\rho(\epsilon)\sqrt{\epsilon}$, where C is some constant, and $\rho(\epsilon) \rightarrow 0$ as $\epsilon \rightarrow 0$.

For problem (2.2) and (2.3), we have the following theorem,

Theorem 2.1. *There exist unique solution u and u_ϵ for (2.2) and (2.3), respectively, and we have*

$$(2.4) \quad \|u_\epsilon|_{Q_T} - u\|_{H^{1,0}(Q_T)} + \|u_{\epsilon t}|_{Q_T} - u_t\|_{H^{-1,0}(Q_T)} \leq C(\|f\|_{0,Q_T} + \|u_0\|_{0,\Omega})\rho(\epsilon)\sqrt{\epsilon},$$

$$(2.5) \quad \|u_\epsilon\|_{H^{1,0}(Q_T)} + \|u_{\epsilon t}\|_{H^{-1,0}(Q_T)} \leq C(\|f\|_{0,Q_T} + \|u_0\|_{0,\Omega})\rho(\epsilon)\sqrt{\epsilon},$$

where $\rho(\epsilon) \rightarrow 0$ as $\epsilon \rightarrow 0$.

3. FINITE ELEMENT APPROXIMATION AND ITS ERROR ESTIMATION

To implement the finite element method to solve the H^1 -penalty problem, we first take some uniform triangulation $\mathcal{T}_h$ to domain D , where h is the maximum diameter of the triangles of $\mathcal{T}_h$. $V_h(D)$ is the subspace of all piecewise linear continuous functions subordinate to $\mathcal{T}_h$. We set $\Omega_1 = D \setminus \overline{\Omega}$ for cylinder domain, and $\Omega_{t1} = D \setminus \overline{\Omega_t}$ for non-cylinder domain. Then, we introduce the “continuous-time” discrete problems $(CQ_{\epsilon,h})$, which reads as

$$(3.1) \quad \begin{cases} \text{Find } u_{\epsilon,h} : (0, T] \rightarrow V_h, \text{ s.t.} \\ (u_{\epsilon,h}, v_h)_\Omega + \frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon,h}, v_h)_{\Omega_1} + (\nabla u_{\epsilon,h}, \nabla v_h)_\Omega \\ + \frac{1}{\epsilon}(\nabla u_{\epsilon,h}, \nabla v_h)_{\Omega_1} = (\tilde{f}, v_h)_D, \quad \forall v_h \in V_h, \quad t \in (0, T], \\ u_{\epsilon,h}(0) = \tilde{u}_{0h}, \end{cases}$$

where $\tilde{u}_{0h} \in V_h$ is an approximation to $\tilde{u}_0$. There are several analysis methods for finite element approximation for parabolic problem, for example, [1, 2]; however, we mainly apply the analysis method from [2]. We have obtained the following results.

Theorem 3.1. *If $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, then, we have*

$$\begin{aligned} & \|e(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|e(t)\|_{0,\Omega_1}^2 + \int_0^t (\|e(s)\|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|e(s)\|_{1,\Omega_1}^2) ds \\ & \leq C \frac{(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{h})^2}{\sqrt{\epsilon}} (\|u_0\|_{1,\Omega}^2 + \|f\|_{0,Q_T}^2) + \|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega_1}^2. \end{aligned}$$

Remark 1. If we additionally assume $u \in H^2(\Omega)$, setting $\tilde{u}_{0h} = R_h \tilde{u}_0$, then, we have

$$\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega_1}^2 \leq C \frac{(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{h})^4}{\epsilon} \|u_0\|_{2,\Omega}.$$

Theorem 3.2. *If $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $f \equiv 0$, then we have*

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & t(\|e(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|e(t)\|_{0,\Omega_1}^2) \\ & \leq Ct \frac{(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{h})^4}{\epsilon} \|u_0\|_{2,\Omega}^2 + C(\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega_1}^2). \end{aligned}$$

Then, setting time-step $k = \frac{T}{N}$, N is a positive integer, we consider the “single-step backward” discrete problem $(CQ_{\epsilon,h})$, which reads as

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{Find } U^{n+1} \in V_h, \ n = 0, 1, \dots, N-1, \ s.t. \\ (\partial_t U^{n+1}, v_h)_\Omega + \frac{1}{\epsilon} (\partial_t U^{n+1}, v_h)_{\Omega_1} + (\nabla U^{n+1}, v_h)_\Omega \\ + \frac{1}{\epsilon} (\nabla U^{n+1}, v_h)_{\Omega_1} = (\bar{f}^{n+1}, v_h)_D, \ \forall v_h \in V_h \\ U^0 = \tilde{u}_{0h}, \end{cases}$$

where

$$\partial_t U^{n+1} = \frac{U^{n+1} - U^n}{k} \text{ and } \bar{f}^{n+1} = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{f}(s) ds.$$

And we have the following estimates.

Theorem 3.3. *If $f \equiv 0$, then, we have*

$$\|\zeta^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\zeta^{n+1}\|_{0,\Omega_1}^2 \leq C \frac{k}{t_{n+1}} (\|\tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\tilde{u}_{0h}\|_{0,\Omega_1}^2).$$

Theorem 3.4. *If $\tilde{u}_{0h} = U^0 \equiv 0$, $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, then we have*

$$(3.4) \quad \|\zeta^n\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \|\zeta^n\|_{0,\Omega_1} \leq Ck \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \max_{s \in [0, t_n]} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}.$$

4. SUMMARY AND OPEN PROBLEMS

The analysis of fictitious domain method for parabolic problem in this article is not complete. Since (3.3) contains integral on curved domain Ω and Ω_1 which comes out a problem when doing computation, an approximation scheme for (3.3) is necessary. For the H^1 -penalty problem in [3] without M_ϵ in (2.3), the numerical results shows no much difference to our H^1 -penalty problem, which means the H^1 -penalty error estimate in [3] is not sharp. And there still exist many works to do for non-cylinder domain case.

REFERENCES

- [1] M. Huang and V. Thomée, *On the backward Euler method for parabolic equations with rough initial data*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), no. 3, 599603
- [2] M. Luskin and R. Rannacher, *On the smoothing property of the Galerkin method for parabolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), no. 1, 93113.
- [3] A. L. Mignot, *Méthodes d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites linéaires. I.* (French) Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **40** 1968 1138.
- [4] S. Zhang, *Analysis of finite element domain embedding methods for curved domains using uniform grids*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 6, 28432866.
- [5] G. Zhou and N. Saito, *Analysis of the fictitious domain method for elliptic problem*, <http://www.inf-sup.jp/saito/modules/tinyd0/>, preprint.

Kolmogorov 流の共変 Lyapunov 解析

○犬伏正信¹, 小林幹^{2,3}, 竹広真一¹, 山田道夫¹

1) 京都大学 数理解析研究所

2) 東京大学 生産技術研究所

3) FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト

e-mail : minubush@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

空気や水などの流体は流れが速くなると乱流と呼ばれる状態になる。乱流状態はいくつかの普遍的な統計的性質を示すことが知られているが、それらを説明する体系立った理論がないのが現状である [1]。乱流を理解する一つの試みとして乱流への力学的アプローチがある。これは乱流を力学系として考え、力学系理論の概念や手法を用いることで乱流の理解を深めようというものである [2]。ここでは力学系の最も基本的な性質である双曲/非双曲性に着目し、その性質の違いがどのような流体運動の物理的性質に反映されるかを調べる。双曲性とは、力学系の作用によって軌道上の接空間が不安定な方向と安定な方向に分解されること、すなわち安定多様体と不安定多様体が横断的に（角度をもって）交わることをいう。力学系が双曲性を持てば理論的な取り扱いが比較的容易になる。また双曲性は構造安定性など力学系理論の中心的な概念とも密接に関連している重要な性質である。これまで、自由度が大きい物理系の双曲/非双曲性を調べることは解析的にも数值的にも困難であったが、Ginelli et al.(2007) が提案した共変 Lyapunov 解析の手法を用いることで数值的に評価することが可能になり、いくつかの力学系に対して双曲/非双曲性が調べられている [3, 4]。

双曲/非双曲性という力学系の性質の違いは、系の長時間の統計的性質、例えば時間相関関数の漸近形などに現れると期待される。実際、Artuso et al.(2009) はある 2 次元面積保存写像の時間相関関数を調べ、系が双曲的なパラメタでは時間相関は指数関数的に減衰し、系が非双曲的なパラメタでは時間相関は代数的に減衰することを数值的に示している [5]。

共変 Lyapunov 解析は従来の Lyapunov 解析に比べて大きな計算量を必要とするため、多次元偏微分方程式における実行例は少ない。本研究では 2 次元トーラス上での非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (Kolmogorov 流) における乱流化過程に注目し、系の双曲/非双曲性の程度が Reynolds 数と共にどのように変化するかを調べ、その性質が渦度の時間相関にどのように反映されるかを調べる。

2 問題設定及び数値計算法

Kolmogorov 流は 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ の上の非圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t \zeta + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = \frac{1}{R} \left(\Delta \zeta - n^3 \cos ny \right), \quad (1)$$

に従う流れである。ここで $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$ は速度、 $\zeta = \zeta(x, y, t)$ は渦度、 R は Reynolds 数、 n は外力の波数であり、本研究では $n = 2$ とした。 $-n \cos ny (= \zeta_0)$ は式 (1) の定常解である。本研究では乱流化過程の初期

である $20.0 \leq R/R_{cr} \leq 24.0$ において Kolmogorov 流を調べた．ここで R_{cr} は x 方向に $(-\infty, \infty)$, y 方向に $[0, 2\pi)$ の周期境界における, 解 ζ_0 の臨界 Reynolds 数 $R_{cr} = 2\sqrt{2}$ である．

系の双曲/非双曲性を調べるために Lyapunov ベクトルを用いる． N 次元離散力学系 $\mathbf{x}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{m-1})$ を考えると, Lyapunov ベクトル $\mathbf{v}_m^j (j = 1, 2, \dots, N)$ は Lyapunov 指数 λ_j ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$) に対応して

$$\mathbf{v}_{m+1}^j = d\mathbf{F}(\mathbf{x}_m)\mathbf{v}_m^j, \quad \lambda_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \frac{\|\mathbf{v}_m^j\|}{\|\mathbf{v}_0^j\|}, \quad (2)$$

を満たす解軌道の接ベクトルとして定義される．ここで $d\mathbf{F}(\mathbf{x}_m)$ は写像 $\mathbf{F}$ の点 $\mathbf{x}_m$ における Jacobi 行列である．Lyapunov ベクトルは共変 Lyapunov 解析の方法を用いて計算することが出来る [3]．Lyapunov ベクトルは局所安定/不安定多様体に接するので, これを用いて局所安定/不安定多様体のなす角度 θ

$$\theta = \cos^{-1} \max_{\substack{\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1 \\ \mathbf{u} \in E^s, \mathbf{v} \in E^u}} (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (3)$$

を測ることが出来る．ここで E^u, E^s は正/負の Lyapunov 指数に対応する Lyapunov ベクトルで張られる不安定/安定部分空間である．この角度は主角度 (principal angle) の方法 [6] を用いて求められるので, 解軌道に沿って θ を測ることで確率密度関数 $P(\theta)$ が得られる． $P(\theta)$ が角度ゼロで消えていれば ($P(0) = 0$) アトラクターは双曲的であることが分かり, 角度ゼロで値を持てば ($P(0) > 0$) アトラクターは非双曲的になっていることが分かる．

Kolmogorov 流の時間発展は空間方向にスペクトル法を, 時間方向に 4 次の Runge-Kutta 法を用いて, 渦度方程式 (1) を直接計算することで求めた．ここでは計算領域 $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ に対して空間格子数を 24×24 , 切断波数を 7×7 とし, 時間ステップ幅を $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ とした． $P(\theta)$ の計算には $1.0 \times 10^4 \leq t \leq 17.0 \times 10^4$ のデータを用いた．渦度の時間相関関数には $(x', y') = (\pi/4, \pi/4)$ における渦度 $\zeta(t) = \zeta(t, x', y')$ を用い, 定義式 $\rho(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \zeta(t)\zeta(t-\tau)dt - \bar{\zeta}^2$ (上線は時間平均を表す) を直接計算し, さらにランダムな N 個の初期条件を用いてアンサンブル平均をとった．ここでは $T = 20.0 \times 10^4$, $N = 30$ としたが, 以下に示す結果はこれらの値を変化させて収束性を確認した．

3 Reynolds 数の増大に伴う双曲性の変化

Kolmogorov 流の双曲/非双曲性の程度が乱流化過程 ($20.0 \leq R/R_{cr} \leq 24.0$) において Reynolds 数と共にどのように変化するかを見るために, 軌道上で安定/不安定多様体のなす角度の確率密度関数 $P(\theta)$ を示した (Fig.2)．上から順に Reynolds 数が $R/R_{cr} = 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0$ の場合を示す．乱流化過程の初期 ($20.0 \lesssim R/R_{cr} \lesssim 22.0$) では局所安定/不安定多様体のなす角度はある程度以上の大きさを保っているが ($P(0) = 0$), Reynolds 数の増大とともに小さな角度が現れ, ある Reynolds 数 ($R/R_{cr} \gtrsim 23.0$) を境に角度ゼロに正の確率を持つようになる ($P(0) > 0$)．この結果は, 乱流化過程初期において系は双曲的であるが, ある Reynolds 数以上で非双曲的となることを示している．

4 関連の減衰

Kolmogorov 流の非双曲化に伴う物理的性質の変化を調べるために, Fig.3 に分散 $\rho(0) = \bar{\zeta}^2 - \bar{\zeta}^2$ で規格化した渦度の時間相関関数 $\rho(\tau)$ を示す (片対数)．内挿図は短時間 $0 \leq \tau \leq 10$ の拡大図であり, 矢印は Reynolds 数が増大する方向を示している．これより, 短時間 ($0 \leq \tau \leq 10$) の相関は Reynolds 数に依らず代数

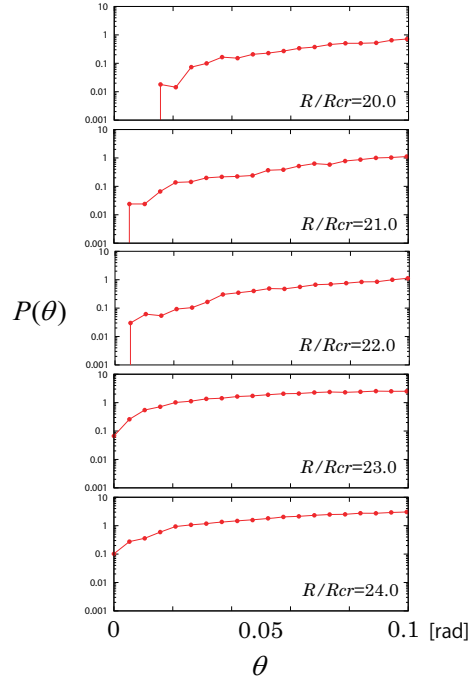


Fig.1 Close-up ($0[\text{rad}] \leq \theta \leq 0.1[\text{rad}]$) of probability density function $P(\theta)$ of the angle θ between the local stable and unstable manifolds at $R/R_{cr} = 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0$ from top to bottom.

的に減衰するが、長時間 ($\tau \gtrsim 100$) の相関は $R/R_{cr} \simeq 22.0$ を境に変化することがわかる。特に、Reynolds 数 $20.0 \lesssim R/R_{cr} \lesssim 21.0$ では長時間の相関は符号が変化しているが、 $23.0 \lesssim R/R_{cr} \lesssim 24.0$ では正符号を保って指数関数的 $\rho(\tau) \simeq e^{-\tau/T_l}$ に減衰するように見える。

確認のため、最小二乗法を用いて時間相関関数の漸近形 $\rho(\tau)$ ($100 \leq \tau \leq 900$) を関数形 $\rho(\tau) = ae^{-\tau/T_l} \cos \omega \tau$ でフィッティングした。フィッティングパラメタ (a, T_l, ω) のうち、 a, T_l の Reynolds 数依存性は大きくなかったが (変動は高々 20% 程度)、 ω は Reynolds 数の増大に伴って大きく変化し、有限の値 ($\omega \simeq 0.0015$) から $R/R_{cr} \simeq 22.0$ を境に $\omega = 0$ に転移することが分かった (Fig.4)。

渦度の時間相関関数の漸近形が変化する Reynolds 数は、系が非双曲的になる Reynolds 数に近く、さらに 2 番目の正の Lyapunov 指数が現れる Reynolds 数に近い。これは系の双曲/非双曲性、及び不安定性の増大が時間相関の減衰に反映していることを示唆する。

参考文献

- [1] Uriel Frisch, “Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov”, Cambridge University Press, (1995).
- [2] M. Yamada, and K. Ohkitani, “Asymptotic formulas for the Lyapunov spectrum of fully developed shell model turbulence”, Phys. Rev. E 57, (1998), pp.6257-6260.
- [3] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi, and A. Politi: “Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors”, Phys. Rev. Lett. 99, 130601(4), (2007).
- [4] P. V. Kuptsov, and S. P. Kuznetsov, “Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor”, Phys. Rev. E 80, 016205(11), (2009).

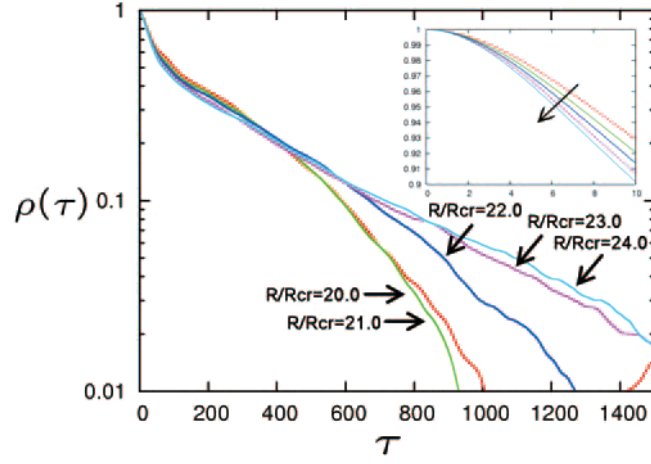


Fig.2 Time-correlation function $\rho(\tau)$ at $R/R_{cr} = 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0$ (Inset is an close-up of the time-correlation function in $0 \leq \tau \leq 10$ (The arrow indicates the increase of the Reynolds number).

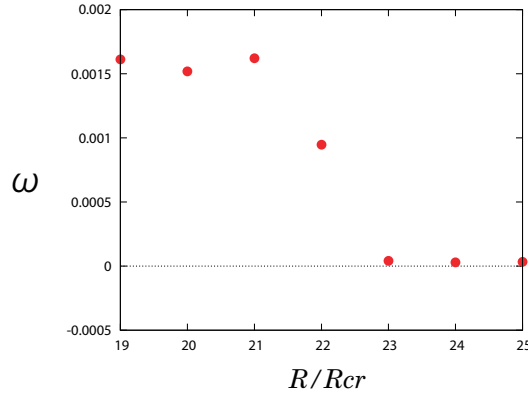


Fig.3 Dependency of the fitting parameter ω on the Reynolds number ($19.0 \leq R/R_{cr} \leq 25.0$).

- [5] R. Artuso, and C. Manchein, “Instability statistics and mixing rates”, Phys. Rev. E 80, 036210(4), (2009).
- [6] A. Bjorck, and G. H. Golub, “Numerical methods for computing angles between linear subspaces”, Mathematics of computation, vol. 27, Number 123, 174101(4) (1973), pp.579-594.
- [7] M. Inubushi, M. U. Kobayashi, S. Takehiro, and M. Yamada, “Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows”, (Submitted).

Absence of Ground States of Generalized Spin Boson Model

寺面 功哲

1 序

量子場と相互作用する量子系に於けるスペクトルを解析では基底状態がいつ存在するかが問題となる事がある．ここで基底状態については以下の定義を用いる．

定義 1.1. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A のスペクトルの下限が固有値となるときの A は基底状態を持つと云う (即ち, $\inf \sigma(A) \in \sigma_p(A)$). また, $E_0(A)$ により $\inf \sigma(A)$ を表すことにする.

非相対論的な粒子と場が相互作用するようなモデルには Nelson, Pauli-Fiertz, GSB, Dirac-Maxwell 型といった重要なモデルがいくつかある．ここでは, [AH97] により導入された一般化されたスピنبソンモデル (GSB モデル) の基底状態について考える (他のモデルについてや詳細について知りたい方は [Hir05] 及びそこにあがっている文献等を参照すると良い) ．

まず, モデルの定義を述べる前に用語の準備をする． $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をそれぞれ複素 Hilbert 空間とする．ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ を次により定める．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_b(\mathcal{K}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{K} \\ &= \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \mid \psi^{(n)} \in \otimes_s^n \mathcal{K}, \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}\end{aligned}$$

($\otimes_s$ は対称テンソル積である)． $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ 上の閉作用素として次の性質を持つ生成作用素 $a(f)^*$ 存在する．

$$\begin{aligned}(a(f)^*\psi)^{(0)} &= 0, \\ (a(f)^*\psi)^{(n)} &= \sqrt{n} S_n \left(f \otimes \psi^{(n-1)} \right), \quad (n \geq 1).\end{aligned}$$

また, 消滅作用素 $a(f)$ を $a(f) := (a(f)^*)^*$ により定める．この時, Segal の場の作用素と呼ばれる自己共役作用素 $\phi(f)$ が

$$\phi(f) := \frac{a(f) + a(f)^*}{\sqrt{2}}$$

により定まる．ここで, $\overline{A}$ は作用素 A の閉包を表す．

注 1.2. 生成・消滅作用素は次の正準交換関係を満たす．

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f, g \rangle, \quad [a(f), a(g)] = 0, \quad [a(f)^*, a(g)^*] = 0$$

又, Segal の場の作用素は次の Weyl 関係を満たす.

$$e^{i\phi(f)}e^{i\phi(g)} = e^{i\operatorname{Im}\langle f, g \rangle}e^{i\phi(g)}e^{i\phi(f)}, \quad f, g \in \mathcal{X},$$

$\mathcal{K}$ 上の作用素 S に対して, フォック空間 $\mathcal{F}_b$ 上の第 2 量子化作用素 $d\Gamma(S)$ を以下により定める.

$$d\Gamma(S) := \bigotimes_{n=0}^{\infty} S^{(n)},$$

但し, $S^{(n)}$ は

$$S^{(0)} := 0, \\ S^{(n)} := \overline{\sum_{j=0}^n I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underset{(j\text{th})}{S} \otimes I \otimes \cdots \otimes I} \Big|_{\otimes_{\text{alg}}^n D(T)}, \quad (n \geq 1)$$

である.

注 1.3. S が自己共役または非負の作用素である時, 第 2 量子化作用素 $d\Gamma(S)$ も自己共役または非負の作用素となる.

2 モデルの定義

量子場と相互作用する量子系を表現する Hilbert 空間として次のものを考える.

$$\mathcal{F} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_b \left(\bigoplus_{j=1}^N \mathcal{K} \right). \quad (2.1)$$

A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, B_j ($j = 1, \dots, J \in \mathbb{R}$) を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で $\bigcap_{j=1}^J D(B_j)$ が $\mathcal{H}$ で稠密, W を K 上の単射, 非負な自己共役作用素とする. 又, $g_j \in \mathcal{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. この時, GSB モデルのハミルトニアン $H(\lambda)$ として次で定める $\mathcal{F}$ 上の作用素を考える.

$$H(\lambda) := A \otimes I + I \otimes d\Gamma \left(\bigoplus_{j=1}^N W \right) + \lambda \sum_{j=1}^J B_j \otimes \phi(g_j). \quad (2.2)$$

GSB モデルのハミルトニアンが上により一応定義できたわけだが、之では一般的過ぎて取り扱うことが難しい. 特に, 量子論の要請によりハミルトニアンは自己共役作用素となる必要がある. そこで, GSB モデルでは以下の仮定を設ける.

H-I. $g_j \in D(W^{-3/2})$ ($j = 1, \dots, J$) 且つ $\langle W^{-1}g_j, W^{-1}g_l \rangle \in \mathbb{R}$ ($j, l = 1, \dots, J$).

H-II. 作用素 A は次の形をしているとする.

$$A = A_0 + A_1$$

ここで A_0 は非負の自己共役作用素で A_1 は A_0 -有界な対称作用素とする, 即ち, $D(A_0) \subset D(A_1)$ 且つある定数 $a, b \geq 0$ が存在して次を満たす.

$$\|A_1 u\| \leq a \|A_0 u\| + b \|u\|, \quad u \in D(A_0).$$

H-III. 作用素 A_0 は B_j ($j = 1, \dots, J$) と強可換であり

$$D(A_0) \subset \bigcap_{j,l=1}^J D(B_j B_l).$$

とする. 更に, ある定数 $c_j, d_j \geq 0$ が存在して

$$\|B_j u\| \leq c_j \|A_0^{1/2} u\| + d_j \|u\|, \quad (j = 1, \dots, J) \quad \text{for } u \in D(A_0^{1/2})$$

を満たすとする.

H-IV. B_j ($j = 1, \dots, J$) は互いに強可換な自己共役作用素の族とする.

H-V. 作用素 A_0 の定義域は $D(A_0) \subset \bigcap_{j=1}^J D(B_j A_1) \cap D(A_1 B_j)$ 満たし $[B_j, A_1]|_{D(A_0)}$ ($j = 1, \dots, J$) は有界な作用素とする.

H-VI. 次の集合 Λ は空集合でないとする.

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid A(\lambda) \text{ は自己共役且つ下に有界.}\}$$

但し,

$$A(\lambda) := A - \lambda^2 R_B, \quad R_B := \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^J \langle W^{-1/2} g_j, W^{-1/2} g_l \rangle B_j B_l$$

である.

このような仮定の下では次の結果が知られている.

定理 2.1. [AK03]

仮定 (H-I)–(H-VI) を満たすとき任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $H(\lambda)$ は自己共役且つ下に有界な作用素となる.

3 基底状態の非存在

$H(\lambda)$ の基底状態については以下の事実が知られている.

定理 3.1. [AH97] 仮定 (H-I)–(H-VI) を満たし, A がコンパクトレゾルベントを持つとき, 十分小さい $\lambda \in \Lambda$ に対して $H(\lambda)$ は基底状態を持つ.

また, $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^d)$ で W が非負関数の掛け算作用素の場合には W がある条件を満たすとき, ある範囲の $\lambda \in \Lambda$ に対して $H(\lambda)$ は基底状態を持つ事が, [AK03, Theorem 2.3, 2.4] により分かっている. そこで, [AK03] で調べられていない範囲の λ に対して $H(\lambda)$ の基底状態が存在するか否かを調べる. そこで, 少し良いクラスで考える為に, 上の仮定に以下の仮定を付加える.

A-I. 作用素 A_0 は基底状態を持たない, i.e. $E_0(A_0) = \inf \sigma(A_0) \notin \sigma_p(A_0)$.

A-II. A_1 は非負な自己共役作用素且つ A_0 -compact (即ち, $D(A_0) \subset D(A_1)$ であり, ある $z \in \rho(A_0)$ に対して $A_1(A_0 - z)^{-1}$ は compact 作用素となる).

A-III. $A_0(\lambda) := A_0 - \lambda^2 R_B$ とする. このときある定数 $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して, 作用素 $A_0(\lambda_0) - E_0(A_0)$ は非負且つ単射で次元 $\dim \text{Ker}(A_0(\lambda_0) + A_1)$ が $\aleph_0$ 以下となる.

A-IV. 任意の $E < E_0(A_0)$ に対して Birman-Schwinger 作用素 $K_E := |A_1|^{1/2}(A_0(\lambda_0) - E)^{-1}|A_1|^{1/2}$ は有界であり, あるノルム 1 未満の自己共役なコンパクト作用素 K により上から抑えられる (i.e. $|A_1|^{1/2}(A_0(\lambda_0) - E)^{-1}|A_1|^{1/2} \leq K$).

この時, ユニタリー変換と Birman-Schwinger 原理を用いることにより, 次が示せる.

定理 3.2. 仮定 (H-I)–(H-VI) と (A-I)–(A-IV) を満たすとする. この時, λ_0 未満の $\lambda \in \Lambda$ に対して $H(\lambda)$ は基底状態を持たない.

例 3.1. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^d)$ の場合を考える. $A_0 = -\Delta$, A_1 は $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ の非負関数による掛け算作用素で

$$\|V\|_{\mathcal{K}} := \int \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} d^3x d^3y < 1$$

を満たすもの, $B_j = p_j$, W として非負関数 ω の掛け算作用素, g_j を

$$\left\langle \frac{g_j}{\sqrt{\omega}}, \frac{g_l}{\sqrt{\omega}} \right\rangle = \delta_{j,l}$$

満たすものとしてとる. この時,

$$H(\lambda) = -\Delta + V + d\Gamma(\omega) + \lambda \sum_j p_j \otimes \phi(g_j)$$

は上の定理から十分小さい λ で基底状態を持たないことがわかる.

参考文献

- [AH97] Asao Arai and Masao Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 455–503.
- [AK03] Asao Arai and Hiroyuki Kawano, Enhanced binding in a general class of quantum field models, Rev. Math. Phys. **15** (2003), no. 4, 387–423.
- [Hir05] Fumio Hiroshima, Perturbation problems of embedded eigenvalues in field theories, Sūgaku **57** (2005), no. 1, 70–92.

パラレルセッション 解析学

Determining nodes for semilinear parabolic evolution equations in Banach spaces

Ryôhei Kakizawa*

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan

1 Introduction

Let $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with its $C^{1,1}$ -boundary $\partial\Omega$, X_p ($1 < p < \infty$) be a closed subspace of $L_p(\Omega)$. This report is concerned with the following abstract initial value problem for the semilinear parabolic evolution equation in X_p :

$$\begin{cases} d_t u + A_p u = F(u) + f & \text{in } (0, \infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (\text{I})$$

where u is a strong solution to (I), A_p is a densely defined closed linear operator in X_p , $F(u)$ is a nonlinear term, u_0 is an initial data, f is an external force. As is well known, (I) is the abstract initial value problem associated with the semilinear heat equation and the Navier-Stokes equations. See, for example, [4] and the references given there on the existence, uniqueness and regularity of mild solutions to (I).

According to the previous result by Foias and Temam [2], the conclusion of the asymptotic equivalence of strong solutions to (I) can be given by the theory of determining nodes. An approach of determining nodes is quite natural from the numerical point of view. In general, the asymptotic behavior of strong solutions to the initial-boundary value problem for semilinear parabolic equations is uniquely determined by determining nodes which can be obtained from finite many measurements. Some problems related to determining nodes for semilinear parabolic equations have been studied in recent years. Foias and Temam [2] first treated the existence of determining nodes for the Navier-Stokes equations in $L_{2,\sigma}(\Omega)$ with the Dirichlet and periodic boundary conditions, where $L_{p,\sigma}(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) is the solenoidal function space of $(L_p(\Omega))^n$. As for partly dissipative reaction diffusion systems in $L_2(\Omega)$ with the Dirichlet, Neumann and periodic boundary conditions, Lu and Shao [7] obtained the same results as in [2]. Furthermore, Kakizawa [6] discussed the existence of determining nodes for the semilinear parabolic equation such as (I)₁ in the general closed subspace H of $L_2(\Omega)$ with the Dirichlet boundary condition. The energy method shows their results, but it remains to consider two main difficulties, i.e., variety of boundary conditions and rate of convergence. In fact, the Robin and Navier boundary conditions play an important role in the semilinear heat equation and the Navier-Stokes equations respectively. Even if determining nodes for (I) exist, it is one of serious problems whether the convergence of $u(\cdot, t) - v(\cdot, t)$ to zero as $t \rightarrow \infty$ is fast or slow. The new method is required for the theory of determining nodes overcoming the above difficulties.

The main purpose of this report is to establish the L_p -theory of determining nodes for (I) with the aid of the theory of analytic semigroups on Banach spaces, e.g., [5, Chapter 3], [8, Chapter 6]. One of our main results is stated as follows: there exists a finite set E in Ω such that if $n/2 < p < \infty$ and if two mild solutions u and v to (I) satisfy $u(x, t) - v(x, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ for any $x \in E$, then $\|u(t) - v(t)\|_{X_p^\alpha} = O(t^{-\alpha})$ as $t \rightarrow \infty$ for any $0 < \alpha < 1$. Here A_p^α and X_p^α ($0 \leq \alpha \leq 1$) are fractional powers of A_p and their domain, i.e., $X_p^\alpha = D(A_p^\alpha)$ respectively. By virtue of our argument, variety of boundary conditions corresponds to the analyticity of the semigroup $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$ generated by $-A_p$. Moreover, X_p^α -estimates for mild solutions to (I), which are established by the similar method to [3, Theorem 2.6], clarify not only the asymptotic equivalence but also rate of monomial or exponential convergence.

2 Preliminaries and main results

2.1 Function spaces

All functions appearing in this report are either X_p or $(X_p)^n$ -valued. For the sake of notational simplicity, we will not distinguish them from their values, i.e., $(X_p)^n$ will also be simply denoted by X_p .

*Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science

Function spaces and basic notation which we use throughout this report are introduced as follows: The norm in $L_r(\Omega)$ ($1 \leq r \leq \infty$) and the norm in the Sobolev space $W_r^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$) are denoted by $\|\cdot\|_{L_r(\Omega)}$ and $\|\cdot\|_{W_r^k(\Omega)}$ respectively, $W_r^0(\Omega) = L_r(\Omega)$. $C_0^\infty(\Omega)$ is the set of all functions which are infinitely differentiable and have compact support in Ω . $W_{r,0}^k(\Omega)$ is the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_r^k(\Omega)$. $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ ($0 < \gamma \leq 1$) is the Hölder space defined as in [1, 1.26–1.29], $C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$, $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$.

Let I be an interval in $\mathbb{R}$, $(X, \|\cdot\|_X)$ be a Banach space. $C(I; X)$ is the set of all X -valued functions which are continuous in I . $C_b(I; X)$ is the set of all X -valued functions which are bounded continuous in I .

2.2 Sectorial operators in X_p and analytic semigroups on X_p

In this subsection, we will make the properties of A_p and $F(u)$ which appeared in (I). Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be a Banach space, A be a densely defined closed linear operator in X . Then the resolvent set and the spectrum of A are denoted by $\rho(A)$ and $\sigma(A)$ respectively, $\text{Re}\sigma(A) := \{\text{Re}\lambda ; \lambda \in \sigma(A)\}$. First, for any $1 < p < \infty$, A_p is the densely defined closed linear operator in X_p satisfying the following properties (A.1), (A.2):

(A.1) A_p is a sectorial operator in X_p defined as in [5, Definition 1.3.1], $D(A_p) \subset W_p^2(\Omega)$, where $D(A_p)$ is the domain of A_p .

(A.2) $\text{Re}\sigma(A_p) > 0$, where $\text{Re}\sigma(A_p) > 0$ means that $\text{Re}\lambda > 0$ for any $\lambda \in \sigma(A_p)$.

It is well known in [5, Theorem 1.3.4 and Definition 1.4.1], [8, Theorem 2.5.2 and Definition 2.6.7] that $-A_p$ generates a uniformly bounded analytic semigroup $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$ on X_p , fractional powers A_p^α of A_p can be defined for any $\alpha \geq 0$, $A_p^0 = I_p$, where I_p is the identity operator in $L_p(\Omega)$. Let us introduce the Banach space derived from A_p^α . X_p^α is defined as $X_p^\alpha = D(A_p^\alpha)$ with the norm $\|\cdot\|_{X_p^\alpha} = \|A_p^\alpha \cdot\|_{L_p(\Omega)}$, $X_p^0 = X_p$.

We state some lemmas concerning sectorial operators in Banach spaces. See, for example, [5, Chapter 1], [8, Chapter 2] on the theory of analytic semigroups on Banach spaces and fractional powers of sectorial operators.

Lemma 2.1. *Let $1 < p < \infty$, $\alpha \geq 0$, $0 < \lambda_1 < \Lambda_1$, where $\Lambda_1 := \min\{\lambda_1 > 0 ; \lambda_1 \in \text{Re}\sigma(A_p)\}$. Then there exists a positive constant C_{p,α,λ_1} depending only on n , Ω , p , A_p , α and λ_1 such that*

$$\|A_p^\alpha e^{-tA_p} u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_{p,\alpha,\lambda_1} t^{-\alpha} e^{-\lambda_1 t} \|u\|_{L_p(\Omega)} \quad (2.1)$$

for any $u \in X_p$.

Proof. The lemma is [5, Theorem 1.4.3]. □

Lemma 2.2. *Let $1 < p < \infty$, $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta \leq \alpha$. Then there exists a positive constant $C_{p,\alpha,\beta}$ depending only on n , Ω , p , A_p , α and β such that*

$$\|u\|_{X_p^\beta} \leq C_{p,\alpha,\beta} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{1-\beta/\alpha} \|u\|_{X_p^\alpha}^{\beta/\alpha} \quad (2.2)$$

for any $u \in X_p^\alpha$.

Proof. The lemma is [5, Exercise 1.4.5]. □

Lemma 2.3. *Let $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Then*

$$X_p^\alpha \hookrightarrow W_r^k(\Omega) \text{ if } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, 1 < r < \infty, \frac{1}{p} - \frac{2\alpha - k}{n} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p}, \quad (2.3)$$

$$X_p^\alpha \hookrightarrow C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \text{ if } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, 0 < \gamma < 1, \frac{1}{p} - \frac{2\alpha - (k + \gamma)}{n} \leq 0, \quad (2.4)$$

where $\hookrightarrow$ is the continuous inclusion.

Proof. The lemma is [5, Theorem 1.6.1]. □

Second, $F(u)$ is the nonlinear term satisfying the following properties (F.1), (F.2):

(F.1) $F(0) = 0$.

(F.2) There exist three constants $C_p > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$ and $q > 1$ such that

$$\|F(u) - F(v)\|_{L_p(\Omega)} \leq C_p (\|u\|_{X_p^{\alpha_1}}^{q-1} + \|v\|_{X_p^{\alpha_1}}^{q-1}) \|u - v\|_{X_p^{\alpha_1}}$$

for any $u, v \in X_p^{\alpha_1}$.

Finally, we are concerned with mild solutions to (I). As is well known, (I) is reduced to the following abstract integral equation:

$$u(t) = e^{-tA_p} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A_p} F(u)(s) ds + \int_0^t e^{-(t-s)A_p} f(s) ds \quad (\text{II})$$

for any $t \geq 0$. A mild solution to (I) is defined as follows:

Definition 2.1. Let $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha_0 < 1$, $u_0 \in X_p^{\alpha_0}$, $f \in C((0, \infty); X_p)$. Then u is called a mild solution to (I) if it satisfies

$$u \in C_b([0, \infty); X_p^{\alpha_0})$$

and (II). Let $\mathcal{S}(u_0, f)$ be the set of all functions which are mild solutions to (I).

2.3 Main results

Our main results of this report will be stated in this subsection. We begin with formulation of determining nodes. For any $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 1$, $x \in \overline{\Omega}$, $u \in C(\overline{\Omega})$, set

$$E_N = \{x_1, \dots, x_N; x_i \in \overline{\Omega}, i = 1, \dots, N\},$$

$$d_N(x) = \min_{i=1, \dots, N} |x - x_i|,$$

$$d_N = \max_{x \in \overline{\Omega}} d_N(x),$$

$$\eta_N(u) = \max_{i=1, \dots, N} |u(x_i)|.$$

Note that E_N and d_N can be regarded as determining nodes and the density of E_N in Ω respectively. As for mild solutions to (I), the following assumptions (H.1), (H.2) are essentially required for our main results.

(H.1) $\mathcal{S}(u_0, f) \neq \emptyset$ for any $u_0 \in X_p^{\alpha_0}$, $f \in C((0, \infty); X_p)$.

(H.2) There exists a positive constant $M(f, t_0)$ for any $R > 0$, $f \in C((0, \infty); X_p)$, $t_0 > 0$ such that

$$\|u\|_{C_b([t_0, \infty); X_p^{\alpha_1})} \leq M(f, t_0)$$

for any $u \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), f)$, where

$$\mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), f) := \bigcup_{u_0 \in X_p^{\alpha_0}(R)} \mathcal{S}(u_0, f), \quad X_p^{\alpha_0}(R) := \{u_0 \in X_p^{\alpha_0}; \|u_0\|_{X_p^{\alpha_0}} \leq R\}.$$

First, the following theorem yields the existence of determining nodes for (I) and rate of monomial convergence.

Theorem 2.1. Let $n/2 < p < \infty$, $0 \leq \alpha_0 < 1$, $R > 0$, $f, g \in C((0, \infty); X_p)$, $t_0 > 0$, and assume (H.1), (H.2),

$$f(t) - g(t) \rightarrow 0 \text{ in } X_p \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

Then there exists a positive constant δ_1 depending only on $n, \Omega, p, A_p, F, \alpha_0, M(f, t_0)$ and $M(g, t_0)$ such that if $0 < d_N \leq \delta_1$ and if $u \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), f)$, $v \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), g)$ satisfy

$$u(x_i, t) - v(x_i, t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

for any $i = 1, \dots, N$, then

(i) For any $\alpha_0 < \alpha < 1$,

$$\|u(t) - v(t)\|_{X_p^\alpha} = O(t^{\alpha_0 - \alpha}) \text{ as } t \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

(ii) For any $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $k + \gamma \leq 2\alpha - n/p$,

$$\|u(t) - v(t)\|_{C^{k, \gamma}(\overline{\Omega})} = O(t^{\alpha_0 - \alpha}) \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

provided that $n/(2p) < \alpha < 1$.

Second, we proceed to the existence of determining nodes for (I) and rate of exponential convergence.

Theorem 2.2. *Let $n/2 < p < \infty$, $0 \leq \alpha_0 < 1$, $R > 0$, $f, g \in C((0, \infty); X_p)$, $t_0 > 0$, and assume (H.1), (H.2),*

$$\|f(t) - g(t)\|_{L_p(\Omega)} = O(e^{-\lambda_1 t}) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

for some $0 < \lambda_1 < \Lambda_1$. Then there exists a positive constant δ_2 depending only on $n, \Omega, p, A_p, F, \alpha_0, M(f, t_0)$ and $M(g, t_0)$ such that if $0 < d_N \leq \delta_2$ and if $u \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), f)$, $v \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), g)$ satisfy

$$u(x_i, t) - v(x_i, t) = O(e^{-\lambda_1 t}) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

for any $i = 1, \dots, N$, then

(i) *For any $\alpha_0 \leq \alpha < 1$,*

$$\|u(t) - v(t)\|_{X_p^\alpha} = O(t^{\alpha_0 - \alpha} e^{-\lambda_1 t}) \text{ as } t \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

(ii) *For any $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $k + \gamma \leq 2\alpha - n/p$,*

$$\|u(t) - v(t)\|_{C^{k, \gamma}(\bar{\Omega})} = O(t^{\alpha_0 - \alpha} e^{-\lambda_1 t}) \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

provided that $n/(2p) < \alpha < 1$.

2.4 Auxiliary lemmas

In this subsection, we will state three interpolation inequalities concerning the density of determining nodes. The following lemma yields that the standard norms in $C(\bar{\Omega})$, in $L^p(\Omega)$ and in X_p^β are connected with d_N .

Lemma 2.4. *Let $n/2 < p < \infty$, $n/(2p) < \alpha \leq 1$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \gamma \leq 2\alpha - n/p$. Then there exists a positive constant C_1 depending only on n, Ω, p, α and γ such that*

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \eta_N(u) + C_1 d_N^\gamma \|u\|_{X_p^\alpha} \quad (2.9)$$

for any $u \in X_p^\alpha$.

Lemma 2.5. *Let $n/2 < p < \infty$, $n/(2p) < \alpha \leq 1$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \gamma \leq 2\alpha - n/p$. Then there exist two positive constants C_2 and C_3 depending only on n, Ω, p, α and γ such that*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \eta_N(u) + C_3 d_N^\gamma \|u\|_{X_p^\alpha} \quad (2.10)$$

for any $u \in X_p^\alpha$.

Lemma 2.6. *Let $n/2 < p < \infty$, $n/(2p) < \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq \alpha$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \gamma \leq 2\alpha - n/p$. Then there exist two positive constants C_4 and C_5 depending only on $n, \Omega, p, \alpha, \beta$ and γ such that*

$$\|u\|_{X_p^\beta} \leq C_4 d_N^{-\gamma(\beta/\alpha)} \eta_N(u) + C_5 d_N^{\gamma(1-\beta/\alpha)} \|u\|_{X_p^\alpha} \quad (2.11)$$

for any $u \in X_p^\alpha$.

References

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Second Edition, Academic Press, 2003.
- [2] C. Foias and R. Temam, Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values, Math. Comp. 43 (1984), 117–133.
- [3] Y. Giga and T. Miyakawa, Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem, Arch. Ration. Mech. Anal. 89 (1985), 267–281.
- [4] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system, J. Differential Equations 61 (1986), 186–212.
- [5] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, 1981.
- [6] R. Kakizawa, Determining nodes for semilinear parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), 375–386.
- [7] Y. Lu and Z. Shao, Determining nodes for partly dissipative reaction diffusion systems, Nonlinear Anal. 54 (2003), 873–884.
- [8] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, 1983.

確率解析的手法による二階の線形偏微分方程式の 固有関数の減衰評価について

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
/ Loughborough 大学数理科学科
高江洲俊光

[概要] 伊藤拡散過程の生成作用素である二階の偏微分作用素にポテンシャルが加わった場合の固有値問題について考察する。固有値が存在する場合、その固有関数の減衰評価を、量子力学のモデルの解析の際に用いられる確率解析的な手法と類似の手法によって与える。

1 伊藤拡散過程について

確率微分方程式に関連する事項である伊藤拡散過程およびその生成作用素について解説する。この節で扱う項目および確率解析に関する基本的な事柄は文献 [4, 5, 8]) などを参考にされたい。 $\{\mathbf{B}_t\}_{t \geq 0}$ を確率空間 $(\Omega_{\text{BM}}, \mathcal{F}_{\text{BM}}, P_{\text{BM}})$ 上の d 次元ブラウン運動とする。時間的に一様な d 次元伊藤拡散過程 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ とは以下の確率微分方程式の解のことである：

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{b}(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t)d\mathbf{B}_t \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^d$, $\sigma(\mathbf{x}) \in M_n(\mathbf{R}^d) : n$ 次の正方行列次であり、これらは条件

$$\|\mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{y})\|_{\mathbf{R}^d} + \|\sigma(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{y})\|_{M_n(\mathbf{R}^d)} \leq D\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{R}^d} \quad (2)$$

を満たすものとする。この時、確率微分方程式 (1) は拡散過程となる一意的な解を持つ。ここで増大 σ 加法族を $\mathcal{F}_{\text{BM}}^t = \sigma(B_{t \wedge s}; s \geq 0)$ とする。このとき、 $\{\mathcal{F}_{\text{BM}}^t\}_{t \geq 0}$ に対する任意の有界な停止時刻 τ に対し、 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ は強マルコフ性と呼ばれる性質を持つことが示される：

$$\mathbb{E}^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{X}_{\tau+s}) | \mathcal{F}_{\text{BM}}^\tau] = \mathbb{E}^{\mathbf{X}_\tau}[f(\mathbf{X}_s)], \quad f: \text{有界なボレル可測関数}.$$

伊藤拡散過程 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素は

$$Lu(\mathbf{x}) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^{\mathbf{x}}[u(\mathbf{X}_t) - u(\mathbf{X}_0)]}{t}.$$

として定義される。この時、有界な $C^2(\mathbf{R}^d)$ 級の関数に対して well-defined となり、

$$Lu(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i,j} a_{i,j}(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_i b_i(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \right) u(\mathbf{x})$$

が成り立つことが示される。ただし $a_{i,j}(\mathbf{x}) = (\sigma\sigma^T)_{i,j}(\mathbf{x})$ としている。このことは停止時間 τ に対して成り立つ関係式

$$\mathbb{E}^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{X}_\tau)] = f(\mathbf{X}_0) + \mathbb{E}^{\mathbf{x}} \left[\int_0^\tau \left(\sum_{i,j} a_{i,j}(\mathbf{X}_s) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{X}_s) + \sum_i b_i(\mathbf{X}_s) \partial_{x_i} f(\mathbf{X}_s) \right) ds \right]$$

から従うことである。ここで確率解析の偏微分方程式に関連する事項の一つとして、次のファインマン・カッツの公式と呼ばれる公式が知られている。

[定理](ファインマン・カッツの公式)

(i) f を $C^2(\mathbf{R}^d)$ 級で有界な関数、 g を連続で有界な関数、 V 連続で上に有界な関数であるとする。このとき、

$$u(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E}^{\mathbf{x}} \left[f(\mathbf{X}_t) e^{\int_0^t V(\mathbf{X}_s) ds} + \int_0^t g(\mathbf{X}_\theta) e^{\int_0^\theta V(\mathbf{X}_s) ds} d\theta \right]$$

とすると、 $u(t, \mathbf{x})$ は次の cauchy 問題の解となる：

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, \mathbf{x}) &= (L + V(\mathbf{x}))u(t, \mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \\ u(0, \mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3}$$

(ii) 逆に方程式 (3) の解が $C^{1,2}([0, T], \mathbf{R}^d)$ 級の有界な関数ならば、その解は (i) の確率解析的な表示で表わされる。

ファインマン・カッツの公式はマルコフ性を用いて証明される。また、 $\mathbf{b}$ および σ にしかるべき条件を課すると f は有界でない場合でも成り立つことが示される。補足としてであるが、 $g=0$ で $L+V$ がヒルベルト空間上の線形作用素として定式化される場合には、関数解析的な手法を用いても証明できる。

2 量子力学および場の量子論の系の汎関数積分表示について

この説では量子物理学のモデルの確率解析に関することについて解説する。量子物理学には量子力学および場の量子論とよばれるモデルがある。それらの数学的な研究課題の一つとして、ヒルベルト空間上の線形作用素のスペクトル解析の立場からの研究がある。その際、系を記述する状態空間 $\mathcal{H}$ をあるヒルベルト空間として定める。多くの場合、その系のハミルトニアン H は通常、その $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素として定式化される。 H のスペクトル解析の手法の一つに H が生成する半群 $\{e^{-tH}\}_{t \geq 0}$ を汎関数積分表示と呼ばれる確率解析的な表示を用いて解析する方法がある。物理的には、虚時間の経路積分に対応しているものである。ハミルトニアンが固有値を持つ場合に、その固有関数の減衰を汎関数積分表示を用いて確率解析的に評価されることが知られている。量子力学のモデルに関する

研究結果としては、[2]において通常のシュレディンガー方程式の場合について考察され、[3]においては相対論的なシュレディンガー方程式の場合について考察されている。最近の研究成果としては、[7]において、スピンを考慮に入れた場合の磁場中の相対論的シュレディンガー方程式の場合について考察されている。また、場の量子論に関連するモデルに関しては[6]において粒子と量子輻射場が相互作用する系について考察されている。

3 主結果

ここで、伊藤拡散過程の生成作用素 $L = \left(\sum_{i,j} a_{i,j}(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_i b_i(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \right)$ にポテンシャル V が加わった場合の固有値問題について考察する。以下の条件を考える。

(条件 1) $V \in C^1(\mathbf{R}^d)$ かつ上に有界であり $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = -\infty$

(条件 2) $L + V$ は複素固有値 $z \in \mathbf{C}$ を持ち、その固有関数 u_z は有界とする：

$$(L + V)u_z(\mathbf{x}) = zu_z(\mathbf{x}).$$

[定理] 条件 (1) および (2) が成り立つとする。このとき、 $V_{\sup}(\mathbf{x}, \Lambda) = \sup\{V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \mid |\mathbf{y}| \leq \Lambda\}$ とする。このとき $T \geq 0, m \in \mathbf{N}$ に対し、次の評価が成り立つ。

$$|u_z(\mathbf{x})| \leq \text{const.} \left(\frac{1}{\Lambda^{2m}} e^{CT} + e^{-T|\text{Re}z| + V_{\sup}(\mathbf{x}, \Lambda)} \right). \quad (4)$$

この定理の応用として、次の系が成り立つことが示される。

[系] 条件 (1) および (2) が成り立つとする。このとき、 $V(\mathbf{x}) \leq -\kappa|\mathbf{x}|^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}$ であるならば、任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し以下の評価が成り立つ。

$$|u_z(\mathbf{x})| \leq \text{const.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{2m}}$$

[定理の証明の方針] $u_z(t, \mathbf{x}) = e^{tz}u_z(\mathbf{x})$ とする。このとき、 $u_z(t, \mathbf{x})$ は方程式 $\partial_t u = (L + v)u$, および初期条件 $u_z(0, \mathbf{x}) = u_z(\mathbf{x})$ を満たす。このとき $t = T$ に対し、 $u_z(\mathbf{x}) = e^{-Tz}u_z(T, \mathbf{x})$ となり、ファインマン・カッツの公式を用いると固有関数 $u_z(\mathbf{x})$ は

$$u_z(\mathbf{x}) = e^{-Tz} \mathbb{E}^{\mathbf{x}}[u_z(\mathbf{X}_T) e^{\int_0^T V(\mathbf{X}_s) ds}].$$

と表わせることが証明のアイデアである。

(定理の証明) まずはじめに、停止時間 τ に対して

$$u_z(\mathbf{x}) = \mathbb{E}^{\mathbf{x}}[u_z(\mathbf{X}_{T \wedge \tau})e^{-(T \wedge \tau)z}e^{\int_0^{T \wedge \tau} V(\mathbf{X}_s)ds}].$$

が成り立つことが示される。ここで $\tau_\Lambda = \inf\{t > 0 \mid |\mathbf{X}_t| \geq \Lambda\}$ と定めると τ_Λ は停止時間となるので、このとき

$$\begin{aligned} |u_z(\mathbf{x})| &\leq \|u_z\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \mathbb{E}^{\mathbf{x}}[e^{-(T \wedge \tau_\Lambda)\operatorname{Re} z} e^{\int_0^{T \wedge \tau_\Lambda} V(\mathbf{X}_s)ds}] \\ &\leq \|u_z\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \mathbb{E}^{\mathbf{0}}[e^{(T \wedge \tau_\Lambda)(V_{\sup}(\mathbf{x}, \Lambda) - \operatorname{Re} z)}] \\ &\leq \|u_z\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \left(\mathbb{E}^{\mathbf{0}}[\mathbf{1}_{\{\tau_\Lambda \leq T\}} e^{\tau_\Lambda(V_{\sup}(\mathbf{x}, \Lambda) - \operatorname{Re} z)}] + \mathbb{E}^{\mathbf{0}}[\mathbf{1}_{\{T \leq \tau_\Lambda\}} e^{T(V_{\sup}(\mathbf{x}, \Lambda) - \operatorname{Re} z)}] \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau_\Lambda \leq T\}}] = P(\sup_{0 \leq s \leq T} \|\mathbf{X}_s\|) \leq \frac{1}{\Lambda^p} \mathbb{E}[\|\mathbf{X}_T\|^p]$ および不等式 $\mathbb{E}[\|\mathbf{X}_T\|^{2m}] \leq a(1 + |\mathbb{E}[X_0]|^{2m})e^{bT}$, ただし $a, b \geq 0$ はある定数、を用いれば証明される。

[謝辞] この研究は 科学研究費助成事業、研究活動スタート支援、研究課題番号：23840029 「量子場相互作用系のスペクトル解析および散乱理論」の援助を受けております。

参考文献

- [1] 新井朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版 (2010).
- [2] R. Carmona, Pointwise bounds of Schrödinger eigenstates. *Commun. Math. Phys.* **62** (1978) 215-233.
- [3] R. Carmona, M. C. Masters and B. Simon, Relativistic Schrödinger operators: Asymptotic behavior of the eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **91** (1990) 117-142.
- [4] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer (1991).
- [5] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-type theorem and Gibbs Measure on path space*, De Gruyter (2011).
- [6] T. Hidaka and F. Hiroshima, Pauli-Fierz model with kato-class potential and exponential decay, *Rev. Math. Phys.* **22** (2010) 1181-1208.
- [7] F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lőrinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schrödinger operators with spin 1/2, preprint, arxiv (2011).
- [8] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*, Springer (2010.)

ON THE PARAMETER DEPENDENCE OF THE BERGMAN KERNELS OF RECTANGLES

YANYAN WANG

Abstract: We study the parameter dependence of the Bergman kernels on planar domains depending on complex parameters ζ in nontrivial “pseudoconvex” ways. It turns out that, in an example where the domains are rectangles R_ζ , the Levi form of $\log K_{R_\zeta}(z, z)$ with respect to ζ approaches to 0 as (ζ, z) tends to the boundary point $(1+i, 0)$. In contrast to this, if (ζ, z) tends to the other boundary point, completely different phenomena are observed.

1. PRELIMINARIES

We briefly present here certain results underlying the proofs of Theorems. This exposition is adapted to our special cases.

1.1. Bergman kernel. The Bergman kernel of a domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ is a reproducing kernel for the Hilbert space of all square integrable holomorphic functions on Ω . In what follows, let Ω be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$, let $A^2(\Omega)$ be the space of square integrable holomorphic functions on Ω . It is a closed subspace of $L^2(\Omega)$ with respect to Lebesgue measure. And let $\{\phi_j(z)\}_{j=1}^\infty$ be a complete orthonormal basis for $A^2(\Omega)$. Then the Bergman kernel $K_\Omega(z, w)$ is identified with the following series:

$$K_\Omega(z, w) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) \overline{\phi_j(w)},$$

which is independent of the choice of orthonormal basis. For $z = w$, one has $K_\Omega(z, z) > 0$.

The Bergman kernel satisfies the following transformation formula.

Proposition 1.1. *Let $f : \Omega \longrightarrow D$ be a biholomorphic mapping between Ω and D . Then,*

$$K_\Omega(z, w) = K_D(f(z), f(w)) \det f'(z) \overline{\det f'(w)}.$$

By Cauchy’s estimate it is easy to see that $K_\Omega(z, w)$ is a C^∞ function on $\Omega \times \Omega$ and that, on the diagonal, it can be represented as

$$K_\Omega(z, z) = \sup\{|f(z)|^2 \mid f \in A^2(\Omega), \|f(z)\|_{A^2(\Omega)} = 1\} \text{ for } \forall z \in \Omega.$$

Riemann’s mapping Theorem states that any simply connected domain of the complex z plane can be mapped with a univalent transformation onto the unit disk or onto the upper half of the complex w plane. Unfortunately, the proof of this celebrated theorem is not constructive, that is, given a special domain in the z plane, there is no general constructive approach for find the univalent transformation. Nevertheless, as we will see, there are many particular domains, such as the interior of a polygon, for which the univalent function can be constructed explicitly.

1.2. Schwarz-Christoffel transformation. Let Γ be a piecewise linear boundary of a polygon in the w -plane and let the interior angles at successive vertices be $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. The transformation defined by the equation

$$w = F(z) = C \int_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1-1} (\xi - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (\xi - a_n)^{\alpha_n-1} d\xi + C', \quad (1.2.1)$$

where C, C' are complex numbers and $a_1, a_2, \dots, a_n$ are real numbers, maps Γ into the real axis of the complex z plane and the interior of the polygon to the upper half of the z plane.

The vertices of the polygon $A_1, A_2, \dots, A_n$ are mapped to the points $a_1, a_2, \dots, a_n$. This map is an analytic one-to-one conformal transformation between the upper half of the z plane and the interior of the polygon.

Remark 1.2. Actually, for any univalent transformation, the correspondence of three points on the boundaries of two simply connected domains can be prescribed arbitrarily. In particular, any of the three vertices of the polygon can be associated with any three points on the real axis.

2. RESULTS AND PROOFS

The considered parameter rectangles are

$$R_\zeta := \{z = s + it \in \mathbb{C}_z \mid 0 < s < \operatorname{Re}\zeta, 0 < t < \operatorname{Im}\zeta\}$$

where $\zeta \in B$ with $B := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - (1 + i)| < \eta\}$ and define $\mathcal{R} := \bigcup_{\zeta \in B} \{\zeta\} \times R_\zeta$. Then the following results hold.

Theorem 2.1. *The Bergman kernels of R_ζ on the diagonal are*

$$K_{R_\zeta}(z, z) = \frac{1}{\pi(\operatorname{Im} \operatorname{sn}^2(u, k(\zeta)))^2} |\operatorname{sn}(u, k(\zeta)) \operatorname{cn}(u, k(\zeta)) \operatorname{dn}(u, k(\zeta)) \frac{\operatorname{sn}^{-1}(1, k(\zeta))}{\operatorname{Re}\zeta}|^2$$

where $u = \operatorname{sn}^{-1}(1, k(\zeta))z/\operatorname{Re}\zeta$ and $\operatorname{sn}(u, k), \operatorname{cn}(u, k), \operatorname{dn}(u, k)$ are the Jacobi's elliptic functions of the first kind, $\operatorname{sn}^{-1}(1, k)$ is the complete elliptic integral of the first kind. $k(\zeta)$ is a real valued analytic function with respect to ζ , its Taylor expansion to the second order near the point $\zeta = 1 + i$ is:

$$k(\zeta) = k_0 + 2\operatorname{Re}((a + ib)\varepsilon) + 2\operatorname{Re}((c + id)\varepsilon^2) + 2e|\varepsilon|^2 + \dots,$$

where $k_0 = 1/\sqrt{2}$, $a = b = -2c = K/(4\sqrt{2}(2E - K))$, $d = e = -\sqrt{2}a^2$, here K is the value of the complete elliptic integral of the first kind at the point $k = 1/\sqrt{2}$, and E is the value of the complete elliptic integral of the second kind at the point $k = 1/\sqrt{2}$.

Proof. Firstly, for symmetry, we consider the transformation $F(w, \zeta)$ which maps the upper half of the w plane $\mathbb{H}$ onto R'_ζ which is a rectangle with vertices $A_1(\operatorname{Re}\zeta)$, $A_2(\zeta)$, $A_3(-\bar{\zeta})$, $A_4(-\operatorname{Re}\zeta)$ for each ζ in the z plane. We associate $A_1(\operatorname{Re}\zeta)$ with $a_1(1)$, $A_2(\zeta)$ with $a_2(1/k(\zeta))$, and $w = 0$ with $z = 0$. Then by symmetry, $A_3(-\bar{\zeta})$, $A_4(-\operatorname{Re}\zeta)$ are associated with $a_3(-1/k(\zeta))$, $a_4(-1)$ respectively. Our goal is to determine both the transformation $z = F(w, \zeta)$ and the constant k as an analytic function with respect to the variable ζ . In this case $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1/k$, $a_3 = -1/k$, $a_4 = -1$. Furthermore, because $F(0, \zeta) = 0$ (symmetry), the constant C' of integration (2.2.1) is zero; thus Equation (2.2.1) yields

$$z = F(w, \zeta) = C(\zeta) \int_0^w ((1 - t^2)(1 - k^2(\zeta)t^2))^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.1.1)$$

The integral appearing in (2.1.1), with the choice of a single branch defined by the requirement that $0 < \arg(w - a_i) < \pi$, $i = 1, 2, 3, 4$, is the so-called elliptic integral of the first kind. The association of $A_1(\operatorname{Re}\zeta)$ with $a_1(1)$ and $A_2(\zeta)$ with $a_2(1/k(\zeta))$ imply that

$$\operatorname{Re}\zeta = C(\zeta) \int_0^1 ((1 - t^2)(1 - k^2(\zeta)t^2))^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (2.1.2)$$

$$\operatorname{Im}\zeta = C(\zeta) \int_0^1 ((1 - t^2)(1 - (1 - k^2(\zeta))t^2))^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.1.3)$$

Since $k(\zeta)$ is a real valued analytic function with respect to ζ , the power series of $k(\zeta)$ is

$$k(\zeta) = k_0 + 2\operatorname{Re}((a + ib)\varepsilon) + 2\operatorname{Re}((c + id)\varepsilon^2) + 2e|\varepsilon|^2 + \dots$$

in a neighborhood of the point $\zeta = 1 + i$. Then, (2.1.2) and (2.1.3) yield that $k_0 = 1/\sqrt{2}$,

$$a = b = -2c = \frac{1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{4\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}} = \frac{K}{4\sqrt{2}(2E - K)},$$

$d = e = -\sqrt{2}a^2$, and $C(\zeta) = \operatorname{Re}\zeta/K(k(\zeta))$. In summary, the transformation $F(w, \zeta)$ is given by

$$z = F(w, \zeta) = \frac{\operatorname{Re}\zeta}{K(k)} \int_0^w \left((1-t^2)(1-k^2(\zeta)t^2) \right)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Secondly, the inverse of the integral in $F(w, \zeta)$ gives w as a function of z via one of the so-called Jacobi's elliptic function $\operatorname{sn}(u, k)$. Then the inverse of $F(w, \zeta)$ with respect to the first variable is given by

$$w = f(z, \zeta) = \operatorname{sn} \left(\frac{K(k)}{\operatorname{Re}\zeta} z, k(\zeta) \right).$$

Moreover,

$$\overline{F(-\bar{w}, \zeta)} = -F(w, \zeta)$$

implies that $f(z, \zeta)$ maps R_ζ to $\{w \in \mathbb{C}_w | w = a + ib, a > 0, b > 0\}$, thus f^2 maps R_ζ to the upper half w plane $\mathbb{H}$. In addition, it is known that the Bergman kernel of the upper half w plane on the diagonal is

$$K_{\mathbb{H}}(w, w) = \frac{1}{4\pi(\operatorname{Im}w)^2},$$

then by Proposition 1.1, the Bergman kernels of R_ζ on the diagonal are

$$\begin{aligned} K_{R_\zeta}(z, z) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\operatorname{Im}f^2)^2} |f_z|^2 |f|^2 \\ &= \frac{1}{\pi(\operatorname{Im}\operatorname{sn}^2(u, k))^2} |\operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{cn}^2(u, k) \operatorname{dn}^2(u, k)| \left| \frac{K(k)}{\operatorname{Re}\zeta} \right|^2 \end{aligned}$$

here $u = K(k)z/\operatorname{Re}\zeta$. □

Theorem 2.2. For Bergman kernels $K_{R_\zeta}(z, z)$ where $(\zeta, z) \in \mathcal{R}$, it holds that

$$\lim_{z \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z, z)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = 0,$$

Proof. From the expression of $K_{R_\zeta}(z, z)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z, z)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} &= -2 \frac{\partial^2 \log(\operatorname{Im}\operatorname{sn}^2(u, k))}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + 2 \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \log(\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k))}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 (-\log(\operatorname{Re}\zeta) + \log|K(k)|)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \\ &= -2A + 2B + 2C. \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{\partial^2 \log(\operatorname{Im} \operatorname{sn}^2(u, k))}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = 2 \frac{\operatorname{Im} \left(\operatorname{sn}(u, k) \frac{\partial^2 \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \zeta} \frac{\partial \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \bar{\zeta}} \right)}{\operatorname{Im} \operatorname{sn}^2(u, k)} \\
&\quad + \frac{2 \operatorname{Re} \left(\operatorname{sn}^2(u, k) \frac{\partial \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \zeta} \frac{\partial \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \bar{\zeta}} \right) - |\operatorname{sn}(u, k)|^2 \left(\left| \frac{\partial \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \zeta} \right|^2 + \left| \frac{\partial \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right)}{(\operatorname{Im} \operatorname{sn}^2(u, k))^2}, \\
B &:= \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \log(\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k))}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \\
&= \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \log \operatorname{sn}(u, k)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn}(u, k)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \log \operatorname{dn}(u, k)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}, \\
C &:= \frac{\partial^2 (-\log(\operatorname{Re} \zeta) + \log |K(k)|)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}.
\end{aligned}$$

Using the expression of $k(\zeta)$ we get that

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial k}{\partial \zeta} = (1+i)a, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial k}{\partial \bar{\zeta}} = (1-i)a, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{\partial k}{\partial \bar{\zeta}} = 2a^2, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial^2 k}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = -2\sqrt{2}a^2.$$

and since $u = \operatorname{sn}^{-1}(1, k(\zeta))z/\operatorname{Re} \zeta$, then,

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= (-1+i)\frac{u}{4}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = (-1-i)\frac{u}{4}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{8}u^2, \\
\lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} &= \left(4a^2 + \frac{1}{4}\right)u, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1+i} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial k}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

And, using the power series expansion of $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ and $\operatorname{dn}(u, k)$ in a neighborhood of $u = 0$, that,

$$\operatorname{sn}(u, k) = u - \frac{1}{3!}(1+k^2)u^3 + \frac{1}{5!}(1+14k^2+k^4)u^5 + O(u^7),$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}(1+4k^2)u^4 + O(u^6),$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = 1 - \frac{1}{2!}k^2u^2 + \frac{1}{4!}(4k^2+k^4)u^4 + O(u^6),$$

the following further results can now be verified,

$$\lim_{z \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 1+i} A = 8a^2 + \frac{1}{4}, \quad \lim_{z \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 1+i} B = 4a^2 + \frac{1}{8}, \quad \lim_{z \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 1+i} C = \frac{1}{8} + 4a^2.$$

These follow that

$$\lim_{z \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 1+i} \frac{\partial^2 \log K_{R_\zeta}(z, z)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = \lim_{z \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 1+i} (-2A + 2B + 2C) = 0.$$

□

REFERENCES

- [1] Mark J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex variables: introduction and applications*, Cambridge University Press, 2003.
- [2] Klas Diederich and Takeo Ohsawa, On the parameter dependence of solutions to the $\bar{\partial}$ -equation, *Math. Ann.* 289(1991), 581-588.
- [3] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invert. Math.* 26(1974), 1-65.
- [4] Derek F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] N. Levenberg, Jr. and H. Yamaguchi, The metric induced by the Robin function, *Mem. Amer. Math. Soc.* 92 (1991), no. 448, viii+156 pp.
- [6] F. Maitani and H. Yamaguchi, Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces, *Math. Ann.* 330(2004), 477-489.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY, FURO-CHO, CHIKUSA-KU, NAGOYA CITY, 464-8602, JAPAN
E-mail address: x08002k@math.nagoya-u.ac.jp

Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence with Stepanov-almost-periodic initial data

近藤 信太郎 (慶大理工)*¹
谷 温之 (慶大理工)

In order to describe the resistive drift wave turbulence in tokamak, Hasegawa and Wakatani proposed in 1983 the following equations for the perturbations of plasma density n and the electrostatic potential ϕ :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}) \cdot \nabla \right) \Delta \phi = -\frac{c_1}{n^*} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + c_2 \Delta^2 \phi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}) \cdot \nabla \right) (n + \log n^*) = -\frac{c_1}{n^*} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) \end{cases} \quad (1)$$

(Hasegawa–Wakatani equations) from the two fluids model in a homogeneous strong magnetic field $\mathbf{B} = B_0 \vec{e}$ and an inhomogeneous plasma equilibrium density $n^* = n^*(|x'|)$ ($x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3)$). Here B_0 is the strength of a magnetic field assumed to be a constant, $\vec{e} = (0, 0, 1)$. For simplicity we assume that c_1 and c_2 are positive constants.

In 2005 Das, Sen, Kaw, Benkadda and Beyer studied the magnetic-curvature-driven Rayleigh–Taylor instability for the plasma density, the electrostatic potential and the vector potential for electromagnetic perturbations and derived the model equations for it. When we neglect the effect of electromagnetic perturbations and gravitational drift, the model equations become

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}) \cdot \nabla \right) \Delta \phi = -\frac{c_1}{n^*} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + c_2 \Delta^2 \phi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}) \cdot \nabla \right) (n + \log n^*) \\ \quad = -\frac{c_1}{n^*} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + D \Delta (n + \log n^*). \end{cases} \quad (2)$$

Here D is the diffusion coefficient. We also assume that D is a positive constant for simplicity.

We consider the initial boundary value problems for (2) first and for (1) second in $\omega \times \mathbf{R} \times (0, \infty) \equiv \Omega \times (0, \infty)$ under the initial and the boundary conditions

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad n(x, 0) = n_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega, \\ \phi(x, t) = \Delta \phi(x, t) = n(x, t) = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

when the initial data is Stepanov-almost-periodic to the magnetic field direction. Here $\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x'| < R\}$, $\partial\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x'| = R\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x' \in \partial\omega\}$, R is a positive real number.

^{*1}e-mail: kondo_s@2005.jukuin.keio.ac.jp

Notice that we have the existence theorem for the initial boundary value problems for (2) and for (1) with periodic initial data to the magnetic field direction ([10], [11], [12]).

Concerning Stepanov-almost-periodic solutions of Navier–Stokes equations, we have had some mathematical results. When the external force field is sufficiently small and Stepanov-almost-periodic in time variable, the existence and uniqueness of such solutions for boundary value problem for incompressible Navier–Stokes equations were proved by Foias ([9]) in 1962 in three-dimensional case and by Prouse ([14]) in 1963 in two-dimensional case. For compressible Navier–Stokes equations, the existence and uniqueness of such solutions were proved by Marcati and Valli ([13]) in 1985 in three-dimensional case. The basic scheme of proof of these results is similar and consists essentially of the following steps ([15]): i) To prove a global existence theorem on $[t_0, +\infty)$ with zero initial data; ii) To prove a global existence theorem on $(-\infty, +\infty)$; iii) To prove Stepanov-almost-periodicity of solution by contradiction.

When the flux data on the cross section are Besicovitch-almost-periodic in time variable, for Leray’s problem concerning three-dimensional fluid motion in two semi-infinite cylinders connected by a bounded reservoir, the existence of Besicovitch-almost-periodic solutions was proved by Berselli and Romito ([2]) in 2010. They constructed the solution in the form of the Bohr–Fourier series of Besicovitch-almost-periodic functions with the help of the Riesz–Fischer theorem ([3], [4]). However, since Besicovitch metric is semi-norm, uniqueness of solution was not proved.

Our aim is to construct the solution in the form of the Bohr–Fourier series of Stepanov-almost-periodic functions. For Stepanov-almost-periodic functions the Riesz–Fischer theorem does not hold true ([3]), so that we have to pay attention to this point. It seems to us that there is no results constructing the solution in the form of the Bohr–Fourier series of Stepanov-almost-periodic functions. The aim of this paper is to solve the problems (2), (3) and (1), (3) with Stepanov-almost-periodic initial data to the magnetic field direction, in Sobolev–Slobodetskii spaces.

Let X be a Banach space whose norm is denoted by $\|\cdot\|_X$. By $S^p(\mathbf{R}; X)$ (briefly $S^p(X)$) ($1 \leq p < \infty$) we denote the subspace of $L_{loc}^p(\mathbf{R}; X)$ equipped with the finite norm

$$\|u\|_{S^p(X)}^p \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}} \int_x^{x+1} \|u(s)\|_X^p ds.$$

The function $g(x) \in L_{loc}^p(\mathbf{R}; X)$ is said to be Stepanov-almost-periodic function ([16], [17], [18]) (S^p a.p., or X - S^p a.p.) if for any $\varepsilon > 0$ the set

$$G_\varepsilon(g) \equiv \left\{ \sigma \in \mathbf{R} : \sup_{x \in \mathbf{R}} \left(\int_0^1 \|g(x + \sigma + \nu) - g(x + \nu)\|_X^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \right\}$$

is relatively dense in $\mathbf{R}$.

For problems (2), (3) and (1), (3) with Stepanov-almost-periodic initial data to the magnetic field direction, we have the following main results.

Theorem 1 Let $D > 0$, $n^*(|x'|) \in W_2^2(\omega)$ and $n^*(|x'|) \geq n_*$, n_* is a positive constant. Assume that $(D_x^\alpha \phi_0, D_x^\beta n_0) \in (S_{ap}^2(L^2(\omega)))^2$ ($|\alpha| = 0, 1, \dots, 4$, $|\beta| = 0, 1, 2$) and (ϕ_0, n_0) satisfies the compatibility conditions

$$\phi_0(x) = \Delta \phi_0(x) = n_0(x) = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma. \quad (4)$$

Then there exists a unique solution (ϕ, n) to problem (2), (3) on some interval $[0, T]$ such that $(D_x^\alpha \phi, D_x^\beta n) \in (S_{ap}^2(L^2(\omega_T)))^2$ ($\omega_T \equiv \omega \times (0, T)$) ($|\alpha| = 0, 1, \dots, 5$, $|\beta| = 0, 1, 2, 3$), $(D_x^\gamma \phi, n) \in (S_{ap}^2(W_2^{0,3/2}(\omega_T)))^2$ ($|\gamma| = 0, 1, 2$).

Theorem 2 Let $n^*(|x'|) \in W_2^2(\omega)$ and $n^*(|x'|) \geq n_*$, n_* is a positive constant. Assume that $(D_x^\alpha \phi_0, D_x^\beta n_0) \in (S_{ap}^2(L^2(\omega)))^2$ ($|\alpha| = 0, 1, \dots, 4$, $|\beta| = 0, 1, 2$) and (ϕ_0, n_0) satisfies the compatibility conditions (4). Then there exists a unique solution (ϕ, n) to problem (1), (3) on some interval $[0, T]$ such that $(D_x^\alpha \phi, \partial D_x^\beta \phi / \partial t, D_x^\beta n, \partial n / \partial t) \in (S_{ap}^2(L^2(\omega_T)))^4$ ($|\alpha| = 0, 1, \dots, 4$, $|\beta| = 0, 1, 2$).

1. 証明の簡単な解説

定理 1 は、ガレルキン法で証明します。とても基本的なことですが、Stepanov 概周期関数は、Bohr–Fourier 級数展開したとき、一意性や、パーセバルの関係式が成り立ちます。このことから、Stepanov 概周期関数は周期関数と同じように扱えて、定理 1 の証明は、周期的境界条件を課した問題を解くときと同じプロセスで証明できるのではないかと類推されます。しかし、次の事実が成り立つため、その推論は正しくありません。Stepanov 概周期関数に関しては、リース・フィッシャーの定理が成り立たない、ということがすでにわかっています。そのため、定理 1 の証明中、フーリエ級数展開の形で解を求めたとき、その解が Stepanov 概周期関数になっていることを改めて証明する必要が出てきます。詳細は省いて結論だけを言うと、求めた解が Stepanov 概周期関数になっていることが証明できないと、元の初期境界値問題に対する解の存在に関して何も言うことができないため、この部分の重要度は非常に大きいです。この部分の証明には、与えられた級数が Stepanov 概周期関数となるための必要十分条件を与えた定理を用いました。

定理 2 の証明の第一ステップでは、定理 1 の結果を受け、係数 D によらない a priori 評価を通して、係数 D のゼロ極限をとることによって、Hasegawa–Wakatani 方程式に対する初期境界値問題の強解が一意的に存在することが証明されます。そのあと、その解が Stepanov 概周期関数であることを、Stepanov 概周期関数の定義及び、係数 D によらない a priori 評価を用いることで、証明します。

以上かなり大雑把に解説をしましたが、プレプリントは 50 ページもあるので、一つ一つ式を追って理解するのはかなり大変だと思います。Stepanov 概周期関数を扱った先行論文としては、例えば [2], [9], [13], [14] がありますが、これらの論文では、フーリエ級数展開の形で解を求めているわけではないので、定理 1 の証明を考える上でそれ程参考にはなりません。自分は [1], [4], [5], [7], [19] などの教科書と [3], [6], [8] などの論文を参考にしたので、もし興味があればこれらを参考にとわかりやすいかと思います。

参考文献

- [1] L. Amerio and G. Prouse, “Almost-periodic functions and functional equations”, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1971.
- [2] L. C. Berselli and M. Romito, *On Leray’s problem for almost periodic flows*, arXiv: 1012.1726v1 [math.AP] 8 Dec 2010.
- [3] A. S. Besicovitch, *On generalized almost periodic functions*, Proc. L. M. S., **2** (1926), 495-512.
- [4] A. S. Besicovitch, “Almost periodic functions”, Dover Publ. Inc., New York, 1955.
- [5] H. Bohr, “Almost periodic functions”, Chelsea, New York, 1947.
- [6] G. Bruno, R. Grande and R. Iannacci, *Almost-periodic multipliers*, Acta Appl. Math., **65** (2001), 137-151.
- [7] C. Corduneanu, “Almost periodic functions”, 2nd Engl. ed., Chelsea, New York (1989).
- [8] R. Doss, *Contribution to the theory of almost-periodic functions*, Ann. Math., **46** (1945), 196-219.
- [9] C. Foias, *Essais dans l’étude des solutions des équations de Navier–Stokes dans l’espace, L’unicité et la presque-periodicité des solutions petites*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32** (1962), 261-294.
- [10] S. Kondo and A. Tani, *Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence*, SIAM J. Math. Anal., **43** (2011), 925-943.
- [11] S. Kondo and A. Tani, *Initial boundary value problem of Hasegawa–Wakatani equations with vanishing resistivity*, Adv. Math. Sci. Appl., **21** (2011), 223-253.
- [12] S. Kondo and A. Tani, *On the Hasegawa–Wakatani equations with vanishing resistivity*, Proc. Japan Acad., **87** (2011), 156-161.
- [13] P. Marcati and A. Valli, *Almost-periodic solutions to the Navier–Stokes equations for compressible fluids*, Boll. Un. Mat. Ital., VI. Ser., **B4** (1985), 969-986.
- [14] G. Prouse, *Soluzioni quasi-periodiche dell’equazione differenziale di Navier–Stokes in due dimensioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **33** (1963), 186-212.
- [15] G. Prouse, *Almost-periodic solutions of Navier–Stokes equations and inequalities*, Math.-Fys. Medd., K. Dan. Vidensk. Selsk., **42** (1989), 119-123.
- [16] V. V. Stepanov, *Sur quelques généralisations des fonctions presque périodiques*, C. R., **181** (1925), 90-92.
- [17] V. V. Stepanov, *Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen*, Math. Ann., **95** (1926), 473-498.
- [18] N. Wiener, *On the representation of functions by trigonometrical integrals*, Math. Zeitschr., **24** (1925), 575-616.
- [19] S. Zaidman, “Almost-periodic functions in abstract sapces”, Res. Notes in Math., **126**, Pitman, Boston, 1985.

ポテンシャルの最大点に関する幾何学的考察

坂田 繁洋 (首都大学東京理工学研究科)

1 問題意識

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) を有界な開集合とする。 $k : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を狭義単調減少関数で次の条件 (C_α^0) 、 (C_α^1) 、 (C^2) のいずれかをみたすものとする。

(C_α^0) $0 < \alpha < m$ 、 k は $(0, +\infty)$ 上で連続、 $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = +\infty$ 、 $k(r) = O(r^{\alpha-m})$ ($r \rightarrow 0$)。

(C_α^1) $1 < \alpha < m$ 、 k は $(0, +\infty)$ 上で C^1 級かつ (C_α^0) をみたす、 $k'(r) = O(r^{\alpha-m-1})$ ($r \rightarrow 0$)。

(C^2) k は $[0, +\infty)$ 上で定義できて C^2 級である。

このような k を核にもつポテンシャル

$$K_\Omega(x) := \int_\Omega k(r) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad r := |x - y|$$

を考える。 k は狭義単調減少関数であるから x が Ω の「真ん中」にあるとき、 $K_\Omega(x)$ の値は大きくなる。したがって、 K_Ω の最大点は、 Ω のある種の「中心」を定義する。例えば、 $k(r) = -r^2$ のとき、Jun O'Hara の指摘により K_Ω の最大点は、 Ω の重心になることが知られている。

k の連続性から K_Ω の連続性が導かれ、したがって、 K_Ω の最大点は存在することがわかる。しかし、一意性は一般に成り立たない。例えば、 Ω が同じ大きさの球 2 つからなる非交和で、十分小さい正の定数 h に対して、 $k(r) = h(r^2 + h^2)^{-(m+1)/2}$ とおくと、 K_Ω は各球の中心付近で最大になることがわかる。この場合の K_Ω は、 Ω を高さ h の点 $(x, h) \in \mathbb{R}^m \times \{h\}$ から眺めたときの立体角になる。本研究では、 K_Ω の最大点が一意に定まるための十分条件を与える。

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を恒等的に 0 でない非負有界可測関数で、 $\text{supp} f$ はコンパクトなものとする。 $k : (0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を各 $t \geq 0$ に対して、 $k(\cdot, t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義単調減少関数であるものとする。また、条件 (C_α^0) 、 (C_α^1) 、 (C^2) のいずれか 1 つが任意の $t \geq 0$ と $k(\cdot, t)$ に対してみたされているものとする。ポテンシャル

$$Kf(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) k(r, t) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad r := |x - y|$$

を考える。例えば、 $k(r, t) = (4\pi t)^{-m/2} \exp(-r^2/4t)$ とおくと、 $Kf(x, t)$ は、熱方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^m, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

の解 $u(x, t)$ に等しい。Issac Chavel と Leon Karp は [CK] で、 $u(\cdot, t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ の最大点の集合

$$H(t) := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid u(x, t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^m} u(\xi, t) \right\}$$

を **hot spot** と定義して、 $t \rightarrow +\infty$ で、 $H(t)$ は $\text{supp} f$ の重心の 1 点集合に収束することを示した。本研究では、これのある種の一般化をする。すなわち、 $Kf(\cdot, t) \rightarrow \mathbb{R}$ の最大点の漸近挙動を調べる。特に、 $Kf(\cdot, t)$ の最大点の集合

$$\mathcal{M}_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid Kf(x, t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^m} Kf(\xi, t) \right\}$$

が $\text{supp} f$ の重心の 1 点集合に収束するための十分条件を与える。

2 基本性質

定理 2.1 (1) 条件 (C_α^0) の下で、 K_Ω は $\mathbb{R}^m$ 上で定義されて、連続である。

(2) 条件 (C_α^1) の下で、 K_Ω は $\mathbb{R}^m$ 上の C^1 級関数で、次が成り立つ。

$$\frac{\partial K_\Omega}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} k(r) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

(3) 条件 (C^2) の下で、 K_Ω は $\mathbb{R}^m$ 上の C^2 級関数で、次が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 K_\Omega}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} k(r) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

$\partial k(r) / \partial x_j = -\partial k(r) / \partial y_j$ に注意して、Stokes の定理を使うと次が得られる。

定理 2.2 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級とする。このとき、条件 (C_α^1) の下で、次が成り立つ。

$$\frac{\partial K_\Omega}{\partial x_j}(x) = - \int_{\partial\Omega} k(r) e_j \cdot n(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

系 2.3 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級とする。このとき、条件 (C_α^1) の下で、次が成り立つ。

(1) K_Ω は $\mathbb{R}^m \setminus \partial\Omega$ 上の C^2 級関数で、その 2 階の偏導関数は、次のように表せる。

$$\frac{\partial^2 K_\Omega}{\partial x_i \partial x_j}(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} k(r) e_j \cdot n(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

(2) さらに、 Ω が凸ならば、 K_Ω は Ω 上で優調和である。

3 K_Ω -center に関する結果

命題 3.1 K_Ω の最大点が存在して、 Ω の凸包に含まれる。

定義 3.2 K_Ω の最大点を K_Ω -center とよぶ。

K_Ω -center は Ω の「真ん中」にあるからその存在領域を Ω の凸包の内側に絞ることができる。

定義 3.3 ([O]) $v \in S^{m-1}$ と $c \in \mathbb{R}$ を固定する。 $R_{v,c}$ で $\mathbb{R}^m$ の超平面 $\{z \in \mathbb{R}^m | z \cdot v = c\}$ に関する折り返しを表す。 Ω の v 方向に関しての上側 $\Omega_{v,c}^+ := \Omega \cap \{z \in \mathbb{R}^m | z \cdot v \geq c\}$ を c を小さくするごとに順次 $R_{v,c}$ で折り返ししていく。折り返した部分が Ω に含まれる最低限の高さ $\ell(v) := \inf \{b \in \mathbb{R} | R_{v,c}(\Omega_{v,c}^+) \subset \Omega, \forall c \geq b\}$ を考える。

$$Uf(\Omega) := \bigcap_{v \in S^{m-1}} \{z \in \mathbb{R}^m | z \cdot v \leq \ell(v)\}$$

とおき、 Ω の **minimal unfolded region** とよぶ。

注意 3.4 ([O]) $Uf(\Omega)$ はコンパクト凸領域で Ω の凸包に含まれる。

K_Ω の対称性と **moving plane method** を使うと次の定理が得られる。

定理 3.5 K_Ω -center は $Uf(\Omega)$ に含まれる。

したがって、 K_Ω -center が一意であるためには、 K_Ω のグラフが $Uf(\Omega)$ 上で上に凸であればよい。

定理 3.6 Ω が凸で、 $k(r)r^{m-1}$ が $[d(\Omega), D(\Omega)]$ 上で (広義) 単調減少関数ならば、 K_Ω -center は一意に定まる。ここで

$$d(\Omega) := \min \{|z - w| | z \in Uf(\Omega), w \in \partial\Omega\}, \quad D(\Omega) := \max \{|z - w| | z \in Uf(\Omega), w \in \partial\Omega\}.$$

である。

定理 3.7 条件 (C^2) の下で、 k が $[0, D(\Omega)]$ 上で上に凸ならば、 K_Ω -center は一意に定まる。

4 Kf -center に関する結果

K_Ω の場合と同様に、 $k(\cdot, t)$ の連続性・微分可能性に応じて、 $Kf(\cdot, t)$ の連続性・微分可能性が従う。

命題 4.1 $Kf(\cdot, t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ の最大点が存在して、 $\text{supp} f$ の凸包に含まれる。

定義 4.2 $Kf(\cdot, t)$ の最大点を時刻 t における **Kf -center** とよぶ。

定理 4.3 D_f を $\text{supp} f$ の直径とする。ある $p > 0$ 、 $\beta > m$ 、 $T \geq 0$ が存在して、 $[0, D_f] \times [T, +\infty)$ 上で $k(r, t)$ が

$$k(r, t) = \bar{k} \left(\frac{r^{\beta-m}}{t^p} \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \left(\frac{r^{\beta-m}}{t^p} \right)^\ell$$

とべき級数展開されたとする。また、 $a_1 \neq 0$ かつ $\bar{k}''(r^{\beta-m}/t^p)$ は $[0, D_f] \times [T, +\infty)$ 上で有界とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\tau \geq 0$ が存在して、 $t \geq \tau$ ならば、 $\mathcal{C}(\beta; f)$ の ε 管状近傍の外部で $\text{grad} Kf(x, t)$ は消えない。ここで、 $\mathcal{C}(\beta; f)$ は関数

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(y) r^{\beta-m} dy \in \mathbb{R}$$

の臨界点の集合である。

注意 4.4 $\beta = m + 2$ のとき、

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^m} f(y) r^2 dy = 0 \iff x_j = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) y_j dy / \int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy$$

であるから $\mathcal{C}(m+2; f)$ は $\text{supp} f$ の重心の 1 点集合 $\{G_f\}$ である。したがって、 $\mathcal{C}(\beta; f)$ は重心を含む $\text{supp} f$ の「中心」の 1 変数族といえる。

系 4.5 定理と同じ仮定の下で、 $\beta = m + 2$ ならば、時刻 t における Kf -center の集合 $\mathcal{M}_t$ は $\{G_f\}$ に収束する。

系 4.5 は次の定理を含んでいる。

定理 4.6 ([CK]) 時刻 t における hot spot $H(t)$ は、 $t \rightarrow +\infty$ で $\{G_f\}$ に収束する。

上半空間 $\{(x_1, \dots, x_{m+1}) | (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, x_{m+1} > 0\}$ の x_{m+1} 軸方向を高さパラメータとみなして $x_{m+1} = h$ とおけば、上半空間における Poisson 積分に対して、系 4.5 から次のことが従う。

系 4.7 $c \in \mathbb{R}$ を定数とする上半空間における Poisson 積分

$$Pf(x, h) := ch + \frac{2h}{\sigma_{m+1}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(y)}{(r^2 + h^2)^{(m+1)/2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad h > 0, \quad r := |x - y|$$

に対して、高さ h の最大点の集合

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid Pf(x, h) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^m} Pf(\xi, h) \right\}$$

は $h \rightarrow +\infty$ で $\{G_f\}$ に収束する。

例 4.8 系 4.7 で $c = 0$ 、 $f = \sigma_{m+1} \chi_\Omega / 2$ とおいた積分

$$A_\Omega^{(h)}(x) := \int_\Omega \frac{h}{(r^2 + h^2)^{(m+1)}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad r := |x - y|$$

は $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ の領域 Ω を高さ h の点 $(x, h) \in \mathbb{R}^m \times \{h\}$ から眺めた立体角になる。よって、 Ω の「最も見晴らしの良い点」(**solid angle center**) は高さ $h \rightarrow +\infty$ で Ω の重心に収束する。

また、定理 3.7 より核の 2 階微分を計算すると、任意の Ω に対して、 $h \geq \sqrt{m+2} \text{diam} \Omega$ ならば、solid angle center は一意に定まることわかる。

参考文献

- [CK] I. Chavel and L. Karp, *Movement of hot spots in Riemannian manifolds*, J. Analyse Math. **55** (1990), 271-286.
- [H] L. L. Helms, *Potential theory*, Springer-Verlag London Limited 2009.
- [O] J. O'Hara, *Renormalization of $r^\bullet$ -potentials and generalization of dual volumes and centers*, Adv. Appl. Math., to appear.
- [S] S. Sakata, *Geometric properties of maximum points with respect to various potentials*, preprint.

The scientific disputes relating to the formulation of Navier-Stokes equations between Navier and Poisson

Navier-Stokes 方程式定立時の Navier と Poisson の数理論争

流体数理古典理論研究所 増田 茂

E-mail: hj9s-msd@asahi-net.or.jp

Abstract

¹ One of the Poisson's themes is the reducibility of sum into integral, namely, how to calculate the microscopically descriptive function of attraction and repulsion for formulation of fluid equations. Since these earlier papers of these sort of issues [12], he discusses ([13, 14, 15]) with Navier ([9, 10, 11]), and introduces [19], in which he develops his new ideas of these problems between the integral and sum in the additional note, (§7, "Notes et Additions" [19, pp.264-300]) immediately after issuing his main theories of fluid [17, 18]. The *Notes* ² may be one of the last descriptions on these issues. We think this is the last counterargument by Poisson to Navier. We introduce these scientific disputes between Poisson and Navier, and other book reviewers. We show below our translation of the French narrations in Japanese, and of our own in English. In the all citations below of original, $fr, \varphi r, Fr, etc.$ mean the function of distance : r , viz. $f(r), \varphi(r), F(r), etc.$, sic respectively, except for rR in $\sum rR$. ³

§1. Introduction ⁴ We begin with the discussion about Poisson's integral methods of partial differential fluid equations before and after he issues the microscopically-descriptive [*MD*] equations of fluid dynamics [13, 16, 17, 18, 19]. In 1819, Poisson introduced the so-called '*Poisson equations*' in [12], which was the only paper relating to fluid before *MD* fluid equations. About ten years later, he changes his principle to describe the general *MD* equations of elastic solid and elastic fluid, owing to continuum theory.

Poisson [13, 16] uses two functions fr and $\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ to calculate three elements of force. Here, fr means $f(r)$, and r is the radius of sphere of a molecular activity. He gets the three elements of force P, Q, R by $\sum$ instead of $\int$ respectively : if we put $F \equiv \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$, then

$$(1)_{Pe} \quad P = \sum \frac{(\phi + \phi')\zeta}{\alpha^3 r} fr + \sum (\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta') \frac{\phi\zeta}{\alpha^3 r} F, \quad Q = \dots, \quad R = \dots \quad (1)$$

Poisson [18] uses two same functions with (1) : fr and $\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ to calculate three elements of force : P, Q, R by $\sum$.

§2. Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle
Poisson [13, 16, 17, 18] expresses two elastic constants of molecular forces defined in the sphere of an arbitrary molecular activity of M with sum as follows :

$$\frac{2\pi}{3} \sum \frac{r^3}{\alpha^5} fr \equiv K, \quad \frac{2\pi}{15} \sum \frac{r^5}{\alpha^5} \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr} \equiv k. \quad (2)$$

These endless disputes started with Navier's reply [9] to Poisson's critical descriptions [13, 17] about Navier's calculus by integral, which we can summarize as '*Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle*' in (Fig.1). J.M.C.D., a book reviewer, ⁵ speaks for Poisson, summarising the issues of our problem :

Poisson が Navier の理論を拒否するには二つの理由がある。総和法 (sum) は積分による十分な近似式でも置き換える事に同意出来ないこと、 こうした納得の行く数式変換を想定しても物体の自然状態の中で、任意の二つの分子間活動がゼロになるという仮説を受け入れられないこと、である。(J27)⁶

J.M.C.D. points out the theory of continuum from the viewpoint of scientific history :

● ある物体が堅いものであれ固体であれ、それを構成する部分の分離に抗する力はゼロか我々が論じているその状態では存在しない。我々がこの分離を実行する事を求める時にしか、また、分子間距離を少しでも変更しようとする事しか生じ始めない。即ち、もし、この力を積分で表すならば、物体が自然状態の中で値がゼロとなって、分子間距離で何らかの変位が生じた後

¹12/21/2011

²In bellow, we call this note *The Notes*.

³If over one parameter, they express it as $f(r, \dots)$.

⁴To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Euler(1707-1783), d'Alembert(1717-1783), Lagrange(1736-1813), Laplace(1749-1827), Fourier(1768-1830), Gauss(1777-1855), Navier(1785-1836), Poisson(1781-1840), Cauchy(1789-1857), Stokes(1819-1903).

⁵We haven't identified this person in *BSM*(11) until now. The authors use usually the anonym in *BSM*. As the same example, Cournot [3] issues the book review on Navier [7] over the signature of A.C. in the same *BSM*(10).

⁶We put the paragraph number of each disputers. This "J27" is the 27-th paragraph by J.M.C.D.[4]. By the same way, we mean A:Arago [1], N:Navier [11], Notes : Poisson[19].

でもなお、言わば、物体がその部分が分離していても何らの抵抗にも抗しない事が生じるようになる。これはちょっとへんな事になる。(J4-2)

● Navier が 1821 年に分子の活動に論じし連続体として物体を見なす事を報告していたのと同じ方程式を Poisson もつかんでいた事は後程説明しよう。この分子のアクションを考察する手法は Laplace が元々毛細管現象の理論を導出するのに使っていたものだ。Navier はその後で弾性体の理論にこの手法を導入するのに好都合な考え方を得たのだ。しかし、全ての学者は連続体の分子を想定していた。そして、Poisson が計算において物体の実際の構造と一致した最初だ。(J5-1)

● 付言すれば、連続体の仮説は現実的には全く不正確であるが、科学の中では大きな足跡を果たし、Laplace の理論は学者達からその果たした役割から賞賛の目で迎えられた。分子活動についてのこの考察は、大量の特殊問題において、就中、弾性体理論において果たさねばならなかった全ての特別な仮説を取り除くのに計り知れない利点があった。(J5-2)

Another book reviewer, A.Cournot [3] introduces Navier [7]'s physical theory and mathematical principle as the 'consumption'⁷ in his conclusion :

(Navier の) この応用は間違いなく、分析するだけの彼の相当な素質を示しているが、ある物理的理論の価値や、ある原理の真理に関しては沢山の蓄積された近似の後で分かるのではないのか？ 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、(これまでの) 経験主義から流体の振舞いと (時間と頭の) 浪費についての科学にしてくれたのか？ 我々はある似たような問題を解決するために過大評価してはならない。せめて興味のある応用分野の全ての方々にこの論文の一読をお薦めするしかない。」 A.C. [3, pp.13-14]

Fig.1. Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle

Poisson (including by J.M.C.D.)		Navier
この力を積分で表すならば係数 a^2 がゼロになる。cf. (5) この力を積分で表せない事は証明している。	$\iff$	物体の自然状態で常に相殺されている。即ち、力： P が通常ゼロであるか、または、力はゼロでないが、それらの差し引きではゼロである。(N9)
$\Updownarrow$ アクションを分離した分子についてのある級数の総和で表す $\sum$ は定積分で表すことは出来ない。それは全ての分子のアクションを表す距離の関数の性質を保持するものであり、ゼロでは矛盾する。	$\Updownarrow$	これらの力 (attraction と repulsion) の合力を積分で表す事が出来る。
$\Updownarrow$ Poisson は反対に 2 つの分子が積み重ねて自然状態の中でも何らかのアクションを呈すると想定する。 そして、この状態を可能とするために、彼は条件： $\sum r^3 f(r) = 0$ を導いた。 しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r} f(r)] = 0$ とはならず済み、 各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26) 条件： $\int r^3 f(r) dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)	$\Updownarrow$	Poisson が分子のアクションの成分を表す総和 (sum) が積分で取り替えられないという事を言い張ることの根拠は「もし、部分積分によると、 $f(r)$ は両極値でゼロである事に注意すれば、 $k = -K$ となる」事だ。 まず、「もし $r^4 f(r)$ が両極値でゼロとすれば」とある点。次に $r^4 f(r) = 0$ に対応する極値としてゼロになる事を受け入れなければならない義務はない点である。 関数 $f(r)$ として採用出来る無数の形式が存在する事、このため、この状況が成立しなくなる事である。(N23)
$\Updownarrow$ Navier も私と同じ方程式を出した。これを積分でやったのが Navier の係数 ε だ。Navier は否定しているが、私の係数 a^2 と Navier の ε は同じだ。	$\iff$	私の係数 ε と Poisson の係数 a^2 とは同じものではない。
$\Downarrow$ ● こうなれば、Navier にどうしたら自然界で物質の全ての個所で積み重ねたアクション無しで、物体の構成を理解させる事が出来るか考えるしかないのだ。(A3)	$\Downarrow$	● 私の式はその特別な場合 (Navier の式で弾性が色々な方向で同じ時) 当て嵌る。(Cauchy[2])
● 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、経験主義から流体の振舞いと浪費についての科学にしたのか? (Cournot[3])		● 同じ方程式は非圧縮流体の場合で Navier が得ているが私のものは Poisson がやったものに近い。(Stokes[20])

Poisson explains if he uses integral instead of sum in (2) as follows :

$$K = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} f r dr, \quad k = \frac{2\pi}{15} \int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d \cdot \frac{1}{r} f r, \quad (3)$$

en multipliant sous les signes $\sum$ par $\frac{dr}{\alpha}$, et remplaçant ces signes par ceux de l'intégration. Or, si l'on intègre par partie, et si l'on fait attention que $f r$ est nulle aux deux limites, il en résultera

$$k = -\frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} f r dr = -K \quad (4)$$

ce qui montre que la quantité K étant nulle, on aurait aussi $k = 0$. [13, pp.398-399, §14]

Je substitute, en outre, dans les équations (3)_{Pe} à la place de P , Q , etc., leurs valeurs, et je suppose le corps homogène; en observant que $K = 0$, il vient

⁷We mean the 'consumption' of time or all sort of resources including intellectual activities, etc.

$$(6)_{Pe} \quad X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3} \frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2u}{dz^2} \right) = 0, \quad Y - \dots = 0, \quad Z - \dots = 0. \quad (5)$$

a^2 étant un coefficient, égal à $\frac{3k}{\rho}$. Ces équations ont la même forme que celles qui ont été données par M.Navier⁸, et qu'il a obtenues en partant de l'hypothèse que les molécules du corps, après son changement de forme, s'attirent proportionnellement aux accroissements de leurs distances mutuelles; et en admettant, de plus, que les résultantes de ces forces peuvent s'exprimer *par des intégrales, ce qui rendrait nul le coefficient a^2* , ainsi qu'on l'a vu plus haut. Les équations relatives à la surface, formées de la même manière, se trouvent aussi dans le Mémoire de M.Navier. [13, pp.403-4, §16]

Our current issue is about (3) of the elastic body, which paper is previous to the fluid. Poisson says his consistency between physics and mathematics on the expression (3) and (5) :

こうして、それらの attraction と熱による分子の相互のアクションしか作用されない自然状態と見られる物体の状態の中で、分子を分離している区間ではこの方程式が物体の全ての個所で成り立っている事等が存在せねばならない。もし、熱の新たな量をそこに取り入れれば、同じ距離を保って repulsive force が attractive force で出来る量を変えずに増大する。分子の区間がこの方程式が存在し続けるように増大する必要がある。そして、関数 $f(r)$ がそこでは同じでない事から、それからの熱の膨張、物質的な違いの中で差異が生じる。この式は重要な事を喚起する原因となる。それは No.6 での総和 Σ は K と k がそれで表わされているが、これを積分へ変更出来ない事だ。ここに、変数 r は α と同様に極めて微小な差異で表す個々のそれの中で増大する。しかるにもしこの変換が可能ならば、 k は K と同時にゼロとなる。(cf. (4)) ここから物体の変形による力の要素 P, Q, R は変形しても以前と同じゼロとなり、物体に作用する加えられた力は平衡状態とは成り得ないという結果が生じる。これは受け入れられない事だ。

§3. "Notes and Additions" to [19]. ¶3.1 Reducibility from sum into integral on a function made with attraction and/or repulsion We discuss whether the sum is reducible into integral or not. Poisson points out this problem. We use the expressions : $\varphi 0 \equiv \varphi(0)$, $\varphi \varepsilon \equiv \varphi(\varepsilon)$, $\varphi 2\varepsilon \equiv \varphi(2\varepsilon)$, $\dots$ below according to the then generally descriptive style. Poisson expresses the sum of the function φx with p as follows : $p = \sum_{x=i\varepsilon, i \in \mathbb{N}} \varphi x = \varphi \varepsilon + \varphi 2\varepsilon + \varphi 3\varepsilon + \varphi 4\varepsilon + \dots$. Here, using the integral of the function φx , Poisson says, $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi 0$ will become an approximate value of sum of the function φx , which is expressed in (7). $\frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^\infty \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] \varphi x dx$. We think here is the point of Poisson's Notes, then we cite from his original.

L'intégrale $\int_0^\infty \varphi x dx$, divisée par ε et diminuée de $\frac{1}{2} \varphi 0$, sera une valeur approchée de la somme p ; et l'on a vu, dans mon Mémoire sur *Calcul numérique des Intégrales définies*⁹, que la différence de ces deux quantités peut s'exprimer par une autre intégrale définie, de sorte que l'on aura exactement (6). [19, p.278]

ε で割った積分値 $\int_0^\infty \varphi(x) dx$ から $\frac{1}{2} \varphi(0)$ を引いた値は総和 p の近似値となる。これについては私の論文 "Calcul..." (footnote 9) に書いたが、これらの二つの値の差が別の定積分で表される、そのため正確に (6) 式となる。 [19, p.278]

We show the difference of integral from sum as following :

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi 0 + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^\infty \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] \varphi x dx \quad (6)$$

Namely, if $\text{mod}(i, 2) = 1$, ($i \in \mathbb{N}$), for $\cos \frac{1}{2} i\pi = 0$, then the second integral in (6) is developed as follows :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^\infty \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] \varphi x dx &= \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon}{2i\pi x} \sum \sin \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \varphi x \right]_0^\infty - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{2i\pi x} \sum \sin \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \varphi' x dx \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left(-\frac{\varepsilon^2 \varphi'}{(2\pi)^2} \sum \frac{1}{i^2} + \frac{\varepsilon^4 \varphi''}{(2\pi)^4} \sum \frac{1}{i^4} - \frac{\varepsilon^6 \varphi''''}{(2\pi)^6} \sum \frac{1}{i^6} + \dots \right) = -a\varepsilon \varphi' + a'\varepsilon^3 \varphi''' - a''\varepsilon^5 \varphi'''' + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Poisson proposes a following discriminant p to judge the reducibility of φ , which expresses the difference between sum and integral :

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi - a\varepsilon \varphi' + a'\varepsilon^3 \varphi''' - a''\varepsilon^5 \varphi'''' + \dots \quad (8)$$

¶3.2 Reducible examples of sum transformable into integral We suppose $c, c', \alpha, \alpha', \dots$ are positive constants. An simple example : $\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}}$. By putting $\varepsilon \equiv \beta\alpha$, then (8) becomes $p = c \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} + a\beta - a'\beta^3 + a''\beta^5 - \dots \right)$ then, by putting $\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \equiv \gamma$, (6) becomes as following :

$$\begin{aligned} p &= c \left(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \right) e^{-4(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \right) e^{-9(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})^3} - \dots \right) \\ &= \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\pi} + \gamma e^{-\gamma} - \gamma^4 \gamma^2 + \gamma e^{-9\gamma^3} - \dots \right) \end{aligned} \quad (9)$$

⁸By Poisson's footnote : Tome VII de ces Mémoires, which is Navier[6].

⁹Tome VI des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1827, pp.571-604.

As γ is a big number in the hypothesis of ε very small in comparison with α , this series will converge extremely, all after the third terms are completely insensible. By the comparison of the first term with the second : $\frac{c}{2}(\frac{\sqrt{\pi}\alpha}{\varepsilon} - 1) \gg 0$, we can neglect the second term, then $p = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{2\pi\alpha}{2\varepsilon} = \frac{c\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx$, where, $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx$ is the first term of (9), then sum equals to integral.

¶3.3 Irreducible examples of sum intransformable into integral Poisson puts two cases of the irreducible functions as followings : the φx is not composed of only one term, and the φx is composed of the plural terms having inverse signes. At first, we consider the first pair of φx with term having inverse signes.

- $\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'}{\varepsilon}, \quad \varphi = c - c'.$
- $\varphi x = \left(ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}} \right) x \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha^2}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'^2}{\varepsilon}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = c - c'.$

Poisson summarizes his idea from the mathematical viewpoint as follows :

- 級数 (8) を打ち切るいずれかの項で p の正確な値を得るために加える剰余項は定積分で表せる。この定積分の値は一般的に項によって変化するし、その級数が収束しているかどうかを知る極限を割り当てることが出来るものである。この論文では、 p の計算で ● 剰余が定数になる場合や、● 級数 (8) が最初の 2 項を除いてゼロになる場合等の特異な場合を詳細に調べた。これには、 p の値を得るために式 (8) に訴えねばならない。(The Notes)
- これらの 2 つの例は $\varphi(x)$ の大きな値の範囲に比べて極めて微小な x の連続した値の区間 ε を想定する時、● $\varphi(x)$ が単項だけで出ている、● $\varphi(x)$ が同じ符号を持つ多項からなっている等の時はいつでも総和 p が ε で割ったある積分に変換される事を示すのに十分である。しかし、これはこの関数が逆の符号を持つ 2 つの部分で出来ている場合は常には成り立たない。(The Notes)

¶4. Conclusions In a word, we can conclude that Poisson choices sum or integral as the case may be of the material, after enough alternative. The Navier-Stokes equations was fixed until 1934, which is cited by a textbook by Prandtl. (cf. For further particulars, cf. [5].) There are disputes of sorts such as with Navier [9, 10, 11], with Fresnel, or about the application of algebraic root to transcendental equations with Fourier, however, at any rate, we should evaluate his uniqueness and rigorousness of integral method.

References

- [1] D.F.J.Arago, *Note du Rédacteur*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 107-110. (This is following with Navier[8], 99-107).
- [2] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercices de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.
- [3] A.Cournot, (Book review) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides ; par M.Navier.* (*Mém. de l'Acad. des Science ; Tom. VI, p. 389*), Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, **10**(1828), 11-14. (The title number : No.10.)
- [4] J.M.C.D., (Book review) *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques ; par M.Poisson*, Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 98-111. (The title number : No.35.)
- [5] S.Masuda, *Historical development of classical fluid dynamics*, Dissertation for a degree of Doctor of Science, Tokyo Metropolitan Univ., 2011. → <http://hdl.handle.net/10748/4129>
- [6] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, **7**(1827), 375-393. (Lu: 14/mai/1821.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.
- [7] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, **6**(1827), 389-440. (Lu: 18/mar/1822.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [8] C.L.M.H.Navier, *Note relative à l'article intitulé : Mémoire sur les équilibre et le mouvement des Corps élastiques, page 337 du tome précédent*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 304-314.
- [9] C.L.M.H.Navier, *Remarques sur l'Article de M.Poisson, inséré dans le Cahier d'août, page 435*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 145-151.
- [10] C.L.M.H.Navier, *Lettre de M.Navier à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 99-107. (This is followed by) *Note du Rédacteur*, 107-110.
- [11] C.L.M.H.Navier, *Note relative à la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 249-253. (The title number : No.142.)
- [12] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, (1819?), 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.)
- [13] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355.
- [14] S.D.Poisson, *Réponse à une Note de M.Navier insérée dans le dernier Cahier de ce Journal*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 435-440.
- [15] S.D.Poisson, *Lettre de M.Poisson à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1828), 204-211.
- [16] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828. The same with [13]) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [17] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre fluides*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, **9**(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v>
- [18] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
- [19] S.D.Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, Bachelier Père et Fils, Paris, 1831. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1103201>
- [20] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, *Mathematical and physical papers* **1**, 1966, 75-129, Cambridge.

Remark: we use *Lu* (: in French) in the bibliography meaning “read” date by the referees of the journals, for example MAS.

定電場へと漸近する時間変動電場内での2体散乱問題

石田 敦英*

概要

ゼロでない定電場へと収束するような時間変動電場が存在する2体問題について、最近得られた漸近完全性について解説したい。伝播評価をすべて積分型の一様評価で得ることにより、相互作用ポテンシャルの滑らかさの条件を緩和できることについて述べる。

1 Introduction

空間に一様に以下のような時間変動電場 $E(t) \in \mathbb{R}^d$ が存在する系を考える。

$$E(t) = E + e(t), \quad e(t) = O(t^{-\gamma}) \quad (1.1)$$

ここで、 $E \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\gamma > 0$ である。すなわち、変動電場 $E(t)$ は $t \rightarrow \infty$ において定電場 E へと近づくものとする。この2粒子系を担う Hamiltonian は

$$H(t) = H_0(t) + V, \quad H_0(t) = p^2/2 - E(t) \cdot x \quad (1.2)$$

で与えられ、 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素である。なお $p = -i\nabla$ であり、2つの粒子の相互作用を表すポテンシャル $V = V^s + V^1 \in \mathcal{V}^s + \mathcal{V}^1$ は以下の Assumption 1.1 をみたすものとする。さらに、 $U_0(t, s)$, $U(t, s)$ をそれぞれ $H_0(t)$, $H(t)$ によって生成される propagator とする。これらの存在および一意性については [2] を参照。

Assumption 1.1. $\mathcal{V}^s, \mathcal{V}^1$ はいずれも $C^1(\mathbb{R}^d)$ に属する実数値かけ算作用素の集合であり、 $V^s \in \mathcal{V}^s$ は $\rho_{s_0} > 1/2$ および $0 < \rho_{s_1} \leq 1 + \rho_{s_0}$ に対して次の空間についての減衰を持つとする。

$$|V^s(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\rho_{s_0}}, \quad |\nabla_x V^s(x)| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\rho_{s_1}}. \quad (1.3)$$

一方、 $V^1 \in \mathcal{V}^1$ には $0 < \rho_1 \leq 1/2$ および多重指数 $|\beta| \leq 1$ に対して、

$$|\partial_x^\beta V^1(x)| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\rho_1 - |\beta|/2} \quad (1.4)$$

の減衰を仮定する。さらに加えて V^s, V^1 いずれにも2階弱微分の有界性を課す。

実際の計算にあたっては $e(t)$ の時間変動が解析の大きな妨げとなる。そこで [2] と同様の手法により $e(t)$ の効果をポテンシャルに押し込むことで、いわゆる free Stark Hamiltonian の問題へと置き換える。 $0 < \gamma \leq 2$ のとき、 $b(t) = \int_0^t ds e(s)$, $c(t) = \int_0^t ds b(s)$ 。 $\gamma > 2$ のときは、 $e(t)$ の可積分性により、 $b(t) = -\int_t^\infty ds e(s)$, $c(t) = -\int_t^\infty ds b(s)$ とおく。 $U^S(t, s)$ を新たな時間依存の Hamiltonian $H^S(t)$,

$$H^S(t) = H_0^S + V(x + c(t)), \quad H_0^S = p^2/2 - E \cdot x \quad (1.5)$$

*神戸大学理学研究科 aishida@math.kobe-u.ac.jp

の生成する propagator とすると,

$$U(t, s) = \mathcal{T}(t)U^S(t, s)\mathcal{T}(s)^* \quad (1.6)$$

が成立する. ここで, unitary 作用素 $\mathcal{T}(t)$,

$$\mathcal{T}(t) = e^{-ia(t)}e^{ib(t)\cdot x}e^{-ic(t)\cdot p}, \quad a(t) = \int_0^t ds (b(s)^2 - E \cdot c(s)) \quad (1.7)$$

を用いた. すなわち, $H^S(t)$ について解析すれば元の Hamiltonian $H(t)$ による系を理解したことになる. 主結果を述べる前に, さらに 1 つ仮定をおく.

Assumption 1.2. $0 < \gamma \leq 2$ のとき,

$$e_0 = |E| - \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \omega \cdot (\nabla_x V)(x) > 0, \quad \omega = E/|E| \quad (1.8)$$

であり, $e_0 \leq |E|$ とする. $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \omega \cdot (\nabla_x V)(x) < 0$ のときは $e_0 = |E|$ とおく.

実は $\gamma = 2$ は全エネルギー $H^S(t)$ の propagator に沿った時間発展の有界性の閾値になっている ([2] を参照).

2 Main Theorem

まず, 次のようなポテンシャルを導入しておく.

$$V_1(t, x) = V^1(x)F_{\epsilon_0}(z/\langle t \rangle^2 \geq \epsilon_0), \quad z = \omega \cdot x. \quad (2.1)$$

$\epsilon_0 = \epsilon/6$ で, $\epsilon > 0$ は後の Proposition 3.1 または 3.2 で選ぶ. また $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対して smooth cut-off $0 \leq F_{\delta_1} \leq 1$ を以下で定めることとする.

$$F_{\delta_1}(\lambda \leq \delta_2) = \begin{cases} 1 & \lambda \leq \delta_2 - \delta_1, \\ 0 & \lambda \geq \delta_2. \end{cases} \quad F_{\delta_1}(\lambda \geq \delta_2) = \begin{cases} 1 & \lambda \geq \delta_2 + \delta_1, \\ 0 & \lambda \leq \delta_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

$U_1(t, s)$ を Hamiltonian

$$H_1^S(t) = H_0^S + V_1(t, x + c(t)) \quad (2.3)$$

の生成する propagator として, 主結果は次の形で述べられる.

Theorem 2.1. (Asymptotic Clustering) 以上の仮定の下,

$$W_1^S = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U^S(t, 0)^* U_1^S(t, 0) \quad (2.4)$$

が存在し, かつ unitary である.

関係式 (1.6) により, Theorem 2.1 は

$$W_1 = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t, 0)^* U_1(t, 0) \quad (2.5)$$

の存在と unitary 性を主張している. ここで $U_1(t, s)$ は Hamiltonian

$$H_1(t) = H_0(t) + V_1(t, x) \quad (2.6)$$

の生成する propagator である．もし $V^1 = 0$ ，すなわち V が Stark short-range ならば，これは波動作用素

$$W = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) \quad (2.7)$$

の漸近完全性そのものである．以下 $V^1 \neq 0$ の場合について考える． $|\beta| \leq 1$ に対して， $V^1 \in \mathcal{V}^1$ がより強い条件

$$|\partial_x^\beta V^1(x)| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\rho_1 - |\beta|} \quad (2.8)$$

をみたすならば，Theorem 2.1 より，次の Graf-type[4] (または Zorbas-type[10]) の修正波動作用素

$$W_G = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) e^{-i \int_0^t ds V^1(\tilde{c}(s))} \quad (2.9)$$

の存在および unitary 性を導くことができる．ここで $\tilde{c}(t) = \int_0^t ds \int_0^s dr E(r)$ である．さらに， $V^1 \in \mathcal{V}^1 \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，すべての多重指数 β に対して (1.4) をみたすすると，次の Dollard-type[6][8] の修正波動作用素

$$W_D = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) e^{-i \int_0^t ds V^1((\nabla_\xi K)(s, p))} \quad (2.10)$$

の存在と unitary 性が [1] または [3] と全く同様の手法により得られる．なお $K(t, \xi)$ は次の Hamilton-Jacobi 方程式の近似解である．

$$(\partial_t K)(t, \xi) = (\xi + \tilde{b}(t))^2/2 + V_1(t, (\nabla_\xi K)(t, \xi)). \quad (2.11)$$

Theorem 2.1 は，最初に [9] によって $V^1 = 0$ かつ $V^s \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ がすべての β に対して

$$|\partial_x^\beta V^s(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\rho_{s0} - |\beta|} \quad (2.12)$$

をみたす場合に $\gamma > 1$ のとき条件 (1.8) を仮定し， $\gamma > 7/2$ の場合は条件 (1.8) を仮定せずに得られた．その後 [2] では γ の条件およびそれに付随する条件 (1.8) は今回と同様であるが， $V^s, V^1 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，すべての β に対して

$$|\partial_x^\beta V^s(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\rho_{s0} - |\beta|/2}, \quad |\partial_x^\beta V^1(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\rho_1 - |\beta|/2} \quad (2.13)$$

を仮定して示された．[2] や [9] では，いずれも鍵となる伝播評価を [7] により導入された交換子の漸近展開による各点評価によって得ている．今回，ポテンシャルの滑らかさを大幅に緩和できたのは，伝播評価を各点評価ではなく全て積分型で導出できたことによる．

3 Propagation Estimates

最後に，上で述べた積分型の伝播評価を一部紹介しておく．まず $0 < \gamma \leq 2$ のときの評価として

Proposition 3.1. (Minimal Acceleration Bound) $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とし $\epsilon > 0$ を小さく取れば，定数 $C > 0$ が存在し

$$\int_1^\infty dt \|F_{\epsilon/2}(z/t^2 \leq \epsilon) U^S(t, 0) f(H_0^S) \langle z \rangle^{-1/2} \phi\|^2 / t \leq C \|\phi\|^2 \quad (3.1)$$

がすべての $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ．

Proposition 3.1 は、まず $\omega \cdot p/t = A/t$ の評価を導出し、その評価から z/t^2 評価を導く。 A/t^2 を評価する際、条件 (1.8) の positivity が重要な役割を果たす。次に $\gamma > 2$ の場合は

Proposition 3.2. (Minimal Acceleration Bound) $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とし $\epsilon > 0$ を小さく取る。このとき $\delta > 0$ が $\lambda \in \mathbb{R}$ に無関係に取れ、定数 $C > 0$ が存在し

$$\int_1^\infty dt \|F_{\epsilon/2}(z/t^2 \leq \epsilon) \chi_\delta(H^S(t) - \lambda) U^S(t, 0) f(H_0^S) \langle z \rangle^{-1/2} \phi\|^2 / t \leq C \|\phi\|^2 \quad (3.2)$$

がすべての $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ。ここで $\chi_\delta(\lambda) = F_{\delta/2}(|\lambda| < \delta)$ である。

χ_δ は Stark Hamiltonian $H^S = H_0^S + V$ に対しての Mourre estimate に由来する。

Theorem 3.3. (Mourre Estimate[5]) $0 < e_1 < |E|$ とする。 $\delta > 0$ が $\lambda \in \mathbb{R}$ に関して一様に取れ、以下の不等式が成り立つ。

$$\chi_\delta(H^S - \lambda) i[H^S, A] \chi_\delta(H^S - \lambda) \geq e_1 \chi_\delta(H^S - \lambda)^2. \quad (3.3)$$

$H^S(t) = e^{ic(t) \cdot p} (H^S + E \cdot c(t)) e^{-ic(t) \cdot p}$ に注意すれば (3.3) は H^S を $H^S(t)$ に取り替えても成り立つ。Proposition 3.2 も、まず先に A/t^2 の評価を導いてから得られるのであるが、条件 (1.8) の代わりに Mourre estimate の positivity を用いるのがポイントである。

References

- [1] Adachi, T. Asymptotic completeness for N-body quantum systems with long-range interactions in a time-periodic electric field, Comm. Math. Phys. **275**, 443-477 (2007).
- [2] Adachi, T. and Ishida, A. Scattering in an external electric field asymptotically constant in time, J. Math. Phys. **52**, 062101 (2011)
- [3] Adachi, T. and Tamura, H. Asymptotic completeness for long-range many particle systems with Stark effect II, Comm. Math. Phys. **174**, 537-559 (1996).
- [4] Graf, G. M. A remark on long-range Stark scattering, Helv. Phys. Acta **64**, 1167-1174 (1995).
- [5] Herbst, I., Møller, J. S. and Skibsted, E. Spectral analysis of N-body Stark Hamiltonians, Comm. Math. Phys. **174**, 261-294 (1995).
- [6] Jensen, A. and Yajima, K. On the long-range scattering for Stark Hamiltonians, J. Reine Angew. Math. **420**, 179-193 (1991).
- [7] Skibsted, E. Propagation estimates for N-body Schroedinger operators, Comm. Mth. Phys. **142**, 67-98 (1991).
- [8] White, D. Modified wave operators and Stark Hamiltonians, J. Math. Phys. **68**, 83-100 (1992).
- [9] Yokoyama, K. Asymptotic completeness for Hamiltonians with time-dependent electric fields, Osaka J. Math. **36**, 63-85 (1999).
- [10] Zorbas, J. Scattering theory for Stark Hamiltonians involving long-range potentials, J. Math. Phys. **19**, 577-580 (1978).

On absence of embedded eigenvalues and a unique continuation property for discrete Schrödinger operators ^{*1}

森岡 悠 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻 / 学振特別研究員 DC2) ^{*2}

1 導入

$\mathbf{R}^d$ 上の偏微分方程式 $(-\Delta - \lambda)u = f \in \mathcal{E}'$ の解については, 最小増大度の研究がよく知られており, 空間遠方である程度以上早く減衰する解はコンパクト台を持つことが分かっている ([6], [4], [1]). このことから, 一意接続定理を用いて埋蔵固有値の非存在や, 逆散乱問題を解く場合に有用かつ基本的な結果を得ることが可能である. ところが離散 Schrödinger 作用素の場合には, このような形の定理は, 少なくとも一般には成り立たない. 従って, 離散モデルの場合に同様の問題を考察するためには, 異なる手段を必要とすることが分かった. 本講演では, 離散 Schrödinger 作用素の逆散乱問題及び埋蔵固有値に関する研究を行う上で本質的となる, 解の増大度に関わる問題について述べる. ^{*3}

正方格子 $\mathbf{Z}^d$ に対し, 離散 Schrödinger 作用素 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ として,

$$(\hat{H}_0 \hat{u})(n) = -(\Delta_{disc} \hat{u})(n) = -\frac{1}{4} \sum_{|m-n|=1} (\hat{u}(m) - \hat{u}(n)), \quad \hat{u} \in \ell^2(\mathbf{Z}^d),$$

$$(\hat{V} \hat{u})(n) = \hat{V}(n) \hat{u}(n), \quad \#\text{supp} \hat{V} < \infty,$$

とおく. Fourier 変換 $\mathcal{U} : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{T}^d \simeq [-\pi, \pi]^d$ または $[0, 2\pi]^d$ により, $H = H_0 + V = \mathcal{U} \hat{H}_0 \mathcal{U}^* + \mathcal{U} \hat{V} \mathcal{U}^*$ は,

$$H_0 = h(x) = \frac{1}{2} \left(d - \sum_{j=1}^d \cos x_j \right), \quad (Vu)(x) = (2\pi)^{-d/2} (V * u)(x) \quad \text{on } \mathbf{T}^d,$$

となる. また, $\sigma(\hat{H}_0) = \sigma_{ac}(\hat{H}_0) = [0, d]$, $\sigma_{ess}(\hat{H}) = [0, d]$ である.

Sobolev 空間及び Besov 空間を次のように定める.

$$\hat{\mathcal{H}}^s = \mathcal{U}^* \mathcal{H}^s = \{ \hat{u} ; \|\hat{u}\|_{\hat{\mathcal{H}}^s} < \infty \}, \quad \|\hat{u}\|_{\hat{\mathcal{H}}^s}^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} (1 + |n|^2)^s |\hat{u}(n)|^2,$$

$$\hat{\mathcal{B}}^* = \mathcal{U}^* \mathcal{B}^* = \{ \hat{u} ; \|\hat{u}\|_{\hat{\mathcal{B}}^*} < \infty \}, \quad \|\hat{u}\|_{\hat{\mathcal{B}}^*}^2 = \sup_{R>1} \frac{1}{R} \sum_{|n|<R} |\hat{u}(n)|^2.$$

$s > 1/2$ に対して,

$$\hat{\mathcal{H}}^s \subset \hat{\mathcal{B}} \subset \hat{\mathcal{H}}^{1/2} \subset \ell^2(\mathbf{Z}^d) \subset \hat{\mathcal{H}}^{-1/2} \subset \hat{\mathcal{B}}^* \subset \hat{\mathcal{H}}^{-s}$$

^{*1} 本研究は科研費 (課題番号:23110) の助成を受けたものである. また, 磯崎 洋教授 (筑波大) との共同研究である.

^{*2} E-mail : hmorioka@math.tsukuba.ac.jp

Web : <http://researchmap.jp/morioka/>

^{*3} 本講演は, 発展方程式若手セミナー (2011 年 8 月 26 日~29 日, つくば市.), 及び, 夏の作用素論シンポジウム (2011 年 9 月 2 日~9 月 5 日, 熊本市.) で我々が述べた講演内容についての不十分な点を指摘し, 現時点での補足, 修正を与えることも目的とする.

が成り立つ. また, $\hat{R}(z) = (\hat{H} - z)^{-1}$ について, $\lambda \in (0, d) \setminus \mathbf{Z}$ で極限吸収ができて ([5]), $\lambda \in (0, d) \setminus (\mathbf{Z} \cup \sigma_p(\hat{H}))$ に対し $\hat{R}(\lambda \pm i0) \in \mathbf{B}(\hat{\mathcal{B}}; \hat{\mathcal{B}}^*)$ である. また, 散乱理論が展開でき, 散乱解は

$$\begin{aligned}\hat{u}(n) &= (\hat{\mathcal{G}}_0(\lambda)^* \phi)(n) - (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{V} \hat{\mathcal{G}}_0(\lambda)^* \phi)(n), \quad \phi \in L^2(S^{d-1}), \\ (\hat{\mathcal{G}}_0(\lambda) \hat{f})(\omega) &= (2\pi)^{-d/2} \sum_n e^{-in \cdot x} \hat{f}(n) \Big|_{h(x)=\lambda}, \\ (\hat{\mathcal{G}}_0(\lambda)^* \phi)(n) &= (2\pi)^{-d/2} \int_{M_\lambda} e^{in \cdot x(\lambda, \omega)} \phi(\omega) dM_\lambda(\omega), \quad M_\lambda = \{h(x) = \lambda\}\end{aligned}$$

で表される. Stationary phase method を用いると, この解は $|n| \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\hat{u}(n) &\simeq (\hat{\mathcal{G}}_0(\lambda) \phi)(n) + C_+ |n|^{-(d-1)/2} e^{in \cdot x(\lambda, \omega_n)} a_+(\lambda, \omega_n) (\mathcal{A}(\lambda) \phi)(\omega_n), \quad \omega_n = n/|n|, \\ \mathcal{A}(\lambda) &= \hat{\mathcal{G}}_0(\lambda) (\hat{V} - \hat{V} \hat{R}(\lambda + i0) \hat{V}) \hat{\mathcal{G}}_0(\lambda)^*\end{aligned}$$

となる. $\mathcal{A}(\lambda)$ は散乱振幅である.

2 放射条件と解の最小増大度

Rellich 型の定理と一意接続定理により, $\mathbf{R}^d$ 上の偏微分方程式 $(-\Delta - \lambda)u = 0$ の場合には, 0 でない解は $\hat{\mathcal{B}}^*$ から存在する. $\hat{\mathcal{B}}^*$ に含まれ, ある意味で早く減衰する解は 0 であることが知られている ([6], [4], [1]). また, レゾルベントの極限吸収で表わされる Helmholtz 方程式の解の必要十分条件として放射条件が知られている. 一方, 離散モデルの場合にも放射条件が存在し, レゾルベントの極限吸収で表せる $(\hat{H} - \lambda)\hat{u} = \hat{f}$ の解の必要十分条件を導くことが可能である. そのような解 $\hat{u}^{(\pm)} = \hat{R}(\lambda \pm i0)\hat{f}$ は $|n| \rightarrow \infty$ で次のような挙動を持つ.

$$\begin{aligned}\hat{u}^{(\pm)}(n) &\simeq C_\pm |n|^{-(d-1)/2} e^{\pm in \cdot x(\lambda, \omega_n)} a_\pm(\lambda, \omega_n) (\hat{\mathcal{G}}^{(\pm)}(\lambda) \hat{f})(\omega_n), \\ \hat{\mathcal{G}}^{(\pm)}(\lambda) &= \hat{\mathcal{G}}_0(\lambda) (I - \hat{V} \hat{R}(\lambda \pm i0)).\end{aligned}$$

Rellich 型定理は, $\hat{\mathcal{G}}^{(\pm)}(\lambda) \hat{f} = 0$ であるような $\hat{f}$ に対しては, 同じ方程式に対するコンパクト台を持つ解を考えれば良いことを示しているが, 離散モデルの場合にはこれは (少なくとも一般には) 成り立たない. 実際, $(\hat{H}_0 - \lambda)\hat{u} = \delta_{0n}$, $\hat{u} = O(|n|^{-(d+1)/2})$ とすれば, Fourier 変換により

$$u(x) = \frac{C}{h(x) - \lambda} \quad \text{on } \mathbf{T}^d$$

となる. 一方, $\hat{u}$ がコンパクト台を持つならば, $u(x)$ は $\hat{u}(n)e^{-in \cdot x}$ の多項式であるが, $u(x)$ は M_λ で特異であるため, これは矛盾である. 従って, この場合には $\hat{u}$ はコンパクト台ではありえない.

なお, 偏微分方程式に対する Rellich 型定理を証明する際に用いられる Paley-Wiener-Schwartz の定理は, 我々の扱う離散モデルの場合にも成立する.

3 埋蔵固有値の非存在

コンパクト台を持つポテンシャルの場合, 連続スペクトルに埋蔵された固有値の非存在については, 連続モデルの場合には基本的である. しかしながら, 離散モデルの場合には Rellich 型定理, あ

るいは Hankel 関数による解の取り扱いができず、全く自明な問題ではない。現時点で正しいと言えるのは次のような事実である。

Proposition 3.1 $\#\text{supp}\hat{V} \leq 2$ ならば、 $(0, d) \setminus \mathbf{Z}$ に含まれる $\hat{H}$ の固有値は存在しない。

4 逆散乱問題と境界値逆問題

ある $\lambda \in \sigma_{ac}(\hat{H})$ に対する散乱振幅 $\mathcal{A}(\lambda)$ から $\hat{V}$ を再構成する問題が逆散乱問題である。全ての $\lambda \in \sigma_{ac}(\lambda)$ に対して $\mathcal{A}(\lambda)$ が与えられている場合については、[3] によって解かれた。

ある固定された $\lambda \in \sigma_{ac}(\hat{H})$ に対する $\mathcal{A}(\lambda)$ のみが与えられている場合については、偏微分方程式の場合にはいくつかの方法が知られている。コンパクト台を持つポテンシャルの場合には、その台を囲むような有界領域 Ω に対する境界値逆問題と逆散乱問題が同値であることが知られている。すなわち、 Ω に対する Dirichlet-to-Neumann 写像 (D-to-N 写像) $\Lambda_V(\lambda)$ と、散乱振幅 $\mathcal{A}(\lambda)$ が同値であり、一方から他方を一意に構成できることが証明できる。この証明には、前述の方程式の散乱解の漸近挙動と、その解の最小増大度に関する性質が成立していることが本質的に重要である。

離散モデルの場合には、有界領域 Ω に対する境界値逆問題は、具体的な再構成アルゴリズムを与えることができる。従って、連続モデルの場合同様に逆散乱問題を解くために応用可能であると期待される。

具体的に $\Lambda_{\hat{V}}(\lambda)$ と $\mathcal{A}(\lambda)$ の同値性を与えるには、次のような状況を考える。 Ω_{int} として、 $\text{supp}\hat{V}$ を含むような立方体を考える。 Ω_{ext} を $\Omega_{int} \cup \partial\Omega_{int}$ の外部領域とおく。外部 Dirichlet 問題

$$(-\Delta_{disc} - \lambda)\hat{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_{ext}, \quad \hat{u}|_{\partial\Omega_{int}} = \hat{f}$$

の outgoing (+) 及び incoming (-) な解に対する D-to-N 写像を $\Lambda_{ext}^{(\pm)}(\lambda)$ とおく。すると、解 $\hat{u}$ の漸近挙動は、

$$\hat{u}^{(\pm)}(n) \simeq C_{\pm}|n|^{-(d-1)/2} e^{\pm in \cdot x(\lambda, \omega_n)} a_{\pm}(\lambda, \omega_n) (\hat{\Gamma}^{(\pm)}(\lambda) \hat{f})(\omega_n)$$

である。ここで、 $\hat{\Gamma}^{(\pm)}(\lambda) = \hat{\mathcal{G}}^{(\pm)}(\lambda) B_{\partial\Omega}^{(\pm)}(\lambda)$ であり、 $B_{\partial\Omega}^{(\pm)}(\lambda)$ は、 $\Lambda_{\hat{V}}(\lambda)$ と $\Lambda_{ext}^{(\pm)}(\lambda)$ によって決まる、境界上の関数に対して作用する有限次元作用素である。従って、 $B_{\partial\Omega}^{(\pm)}(\lambda)$ と $\mathcal{A}(\lambda)$ の同値を示せば良い。これは、本質的には次のような問題であることが分かる。

問題. 境界値 $\hat{f} \in \ell^2(\partial\Omega_{int})$ に対し、 $\hat{\mathcal{G}}_0(\lambda)\hat{f} = 0$ ならば、 $\hat{f} = 0$ であるか？

離散モデルの場合には、上述の通り Rellich 型の定理を用いることができず、この問題は自明ではなく、さらにこの事実が成り立たない反例を持つ可能性がある。他のアプローチとして、 $\hat{\mathcal{G}}_0(\lambda)\hat{f} = 0$, $\text{supp}\hat{f} \subset \partial\Omega_{int}$ を行列の問題として解くことである。すなわち、 $\partial\Omega_{int} = \{n^{(1)}, \dots, n^{(\mu)}, -n^{(1)}, \dots, -n^{(\mu)}\}$ に対し、 $x(\lambda, \omega^{(j)}) \perp n^{(j)}$, $(j = 1, \dots, \mu)$ となるように $\omega^{(j)} \in S^{d-1}$ を選び、 $e_{ij}(\lambda) = e^{-in^{(j)} \cdot x(\lambda, \omega^{(i)})}$, $c_{ij}(\lambda) = \cos(n^{(j)} \cdot x(\lambda, \omega^{(i)}))$, $s_{ij}(\lambda) = \sin(n^{(j)} \cdot x(\lambda, \omega^{(i)}))$

とおくと、次のような行列の行列式を考えれば良いことが分かる。

$$\det \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & e_{12}(\lambda) & \cdots & e_{1\mu}(\lambda) & 1 & \overline{e_{12}(\lambda)} & \cdots & \overline{e_{1\mu}(\lambda)} \\ e_{21}(\lambda) & 1 & \cdots & e_{2\mu}(\lambda) & \overline{e_{21}(\lambda)} & 1 & \cdots & \overline{e_{2\mu}(\lambda)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ e_{\mu 1}(\lambda) & e_{\mu 2}(\lambda) & \cdots & 1 & \overline{e_{\mu 1}(\lambda)} & \overline{e_{\mu 2}(\lambda)} & \cdots & 1 \\ \hline 0 & s_{12}(\lambda) & \cdots & s_{1\mu}(\lambda) & 0 & -s_{12}(\lambda) & \cdots & -s_{1\mu}(\lambda) \\ s_{21}(\lambda) & 0 & \cdots & s_{2\mu}(\lambda) & -s_{21}(\lambda) & 0 & \cdots & -s_{2\mu}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{\mu 1}(\lambda) & s_{\mu 2}(\lambda) & \cdots & 0 & -s_{\mu 1}(\lambda) & -s_{\mu 2}(\lambda) & \cdots & 0 \end{array} \right) \neq 0,$$

あるいは,

$$\det \left(\begin{array}{cccc} 1 & c_{12}(\lambda) & \cdots & c_{1\mu}(\lambda) \\ c_{21}(\lambda) & 1 & \cdots & c_{2\mu}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{\mu 1}(\lambda) & c_{\mu 2}(\lambda) & \cdots & 1 \end{array} \right) \neq 0,$$

$$\det \left(\begin{array}{cccc} 0 & s_{12}(\lambda) & \cdots & s_{1\mu}(\lambda) \\ s_{21}(\lambda) & 0 & \cdots & s_{2\mu}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{\mu 1}(\lambda) & s_{\mu 2}(\lambda) & \cdots & 0 \end{array} \right) \neq 0$$

ならば良い。この行列式は、 $n \in \partial\Omega_{int}$ と $x(\lambda, \omega) \in M_\lambda$ に依存し、計算は全く自明ではない。講演では、この行列の取り扱いについても紹介したい。

References

- [1] L. Hörmander, *Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients*, Israel J. Math., **16** (1973), 103-116.
- [2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer Verlag, Berlin- Heidelberg-New York, 1983.
- [3] H. Isozaki and E. Korotyaev, *Inverse problems, trace formulae for discrete Schrödinger operators*, arXiv:1107.2687.
- [4] W. Littman, *Decay at infinity of solutions to partial differential equations with constant coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), 449-459.
- [5] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum of certain self-adjoint operators*, Commun. Math. Phys., **78** (1981), 391-408.
- [6] F. Trèves, *Differential polynomials and decay at infinity*, Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 184-186.

Weyl Transforms and Solutions to Schrödinger Equations for Time-Dependent Hermite Operators

香川 智修*

(東京理科大学大学院理工学研究科)

1 はじめに

本講演は York 大学の M. W. Wong 教授との共同研究に基づいている。

$L^\infty(\mathbb{R})$ の radial 関数をシンボル関数に持つ Weyl 変換の固有値問題は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底である Hermite 関数を用いることで固有値を求めることができる。これを用いることで時間に依存する係数を持つ調和振動子の Schrödinger 方程式の初期値問題を解くことができることを述べる。

2 主結果

$\sigma \in L^2(\mathbb{R}^2)$ とする。このとき、Weyl 変換を

$$(W_\sigma f, g)_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sigma(x, \xi) W(f, g)(x, \xi) dx d\xi, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

と定義する。ただし、 $W(f, g)$ は f と g の Wigner 変換、つまり、

$$W(f, g)(x, \xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi p} f\left(x + \frac{p}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{p}{2}\right)} dp, \quad x, \xi \in \mathbb{R}$$

とする。

Wigner 変換と関係の深い変換として Fourier-Wigner 変換を

$$V(f, g)(q, p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{iqy} f\left(y + \frac{p}{2}\right) \overline{g\left(y - \frac{p}{2}\right)} dy, \quad q, p \in \mathbb{R}$$

と定義する。

また $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して Fourier 変換を

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

とする。

Weyl 変換と Heisenberg 群上の解析、および Twisted Laplacian との関係はよく知られている [5, 6, 7]。Twisted Laplacian による熱方程式の初期値問題の解は、Weyl 変換によって表されることが分かっている [7]。

*E-mail: kagawa_toshinao@ma.noda.tus.ac.jp

偏微分方程式における Weyl 変換の応用として、2011 年に S. Molahajloo と M. W. Wong により時間に依存する係数を持つ熱方程式の初期値問題に対して以下のような結果を得られている [4]。

α を有界かつ微分可能な $(0, \infty)$ 上の関数とし、 $0 < \alpha(t) < 1$ かつ $\lim_{t \rightarrow 0+} \alpha(t) = 1$ を満たしているとする。また g を有界かつ微分可能な $(0, 1)$ 上の関数とし、 $\lim_{a \rightarrow 1-} g(a) = 1$ を満たしているとする。このとき、任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \right) u(x, t) + \alpha'(t) \left(\frac{g'(\alpha(t))}{g(\alpha(t))} - \frac{1}{\alpha(t)} \right) u(x, t) \\ u(\cdot, t) \rightarrow f \quad \text{as } t \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2 \end{cases}$$

を考える。この解は

$$u(x, t) = (W_{\sigma_{\alpha(t)}} f)(x)$$

で与えられる。ただし、 $W_{\sigma_{\alpha(t)}}$ は時間に依存する係数を持つシンボル関数 $\sigma_{\alpha(t)} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ の Weyl 変換である。

本講演ではこの方法を時間に依存する係数を持つ調和振動子の Schrödinger 方程式に応用できたことを報告する。

γ を有界かつ微分可能で、 $\gamma \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$ かつ $|\gamma(it)| = 1$ となる $i\mathbb{R} - \{0\}$ 上の関数とし、 $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(it) = 1$ を満たしているとする。このとき、調和振動子の Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} -i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\gamma'(it)}{\gamma(it)} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \right) u(x, t) \\ u(\cdot, t) \rightarrow f \quad \text{as } t \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2 \end{cases} \quad (1)$$

の解は

$$u(x, t) = (W_{\sigma_{\gamma(it)}} f)(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \neq 0 \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $W_{\sigma_{\alpha(t)}}$ は時間に依存する係数を持つシンボル関数 $\sigma_{\gamma(it)} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の Weyl 変換である。また

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad t \in \mathbb{R}$$

を満たす。

$L^2(\mathbb{R}^2)$ のシンボル関数を持つ Weyl 変換は Hermite 関数により固有値問題を解くことができる。また重要な点として $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の radial 関数を持つ Weyl 変換は Bargmann 変換の Fock 空間の上でスケールリングと対応することが分かっている [1, 2]。時間に依存する係数を持つ調和振動子の Schrödinger 方程式と Schrödinger 核を得るための主なアイデアとしては、熱方程式における t を it と置き換えることである [3]。この形式的な数学の手法は物理学で言うところの Minkowski 空間での Schrödinger 核を Euclid 空間での熱核へ写すときに用いる Wick 変換と一致する。

3 証明に用いるいくつかの定理

L_k^δ を位数 δ の k 次 Laguerre 多項式とし

$$L_k^\delta(x) = \frac{x^{-\delta} e^x}{k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^k (e^{-x} x^{\delta+k}), \quad x > 0$$

とする。特にここでは $\delta = 0$ のときのみを考える。また k 次 Hermite 関数を

$$e_k(x) = (2^k k!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

とする。さらに

$$e_{k,j}(z) = V(e_k, e_j)(z)$$

と定義する。ただし、 $V(e_k, e_j)$ は e_k と e_j の Fourier-Wigner 変換である。

THEOREM 3.1. $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ を radial 関数とする。このとき、 $\hat{\sigma}(z) = \tau(|z|)$ とすると、

$$\hat{\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \tau(x) L_k^0 \left(\frac{x^2}{2} \right) e^{-\frac{x^2}{4}} x dx \right) e_{k,k}, \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

と展開することができる。

これを用いて、 L^∞ の radial 関数をシンボル関数と持つ Weyl 変換 W_σ の固有値問題を次のように解くことができる。

THEOREM 3.2. $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ を radial 関数とする。このとき、 $\hat{\sigma}(z) = \tau(|z|)$ とすると、

$$W_\sigma e_k = \lambda_k e_k$$

となる。ただし、 λ_k は

$$\lambda_k = \int_0^\infty \tau(x) L_k^0 \left(\frac{x^2}{2} \right) e^{-\frac{x^2}{4}} x dx$$

で与えられる。

次の LEMMA はシンボル関数の Fourier 変換を計算するときに用いる。

LEMMA 3.3. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対して

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{it|\xi|^2} d\xi = e^{(\operatorname{sgn} t) \frac{in\pi}{4}} (2|t|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{i|x|^2}{4t}}.$$

そこで、 $|c| = 1, c \neq \pm 1$ となる $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\sigma_c(z) = \frac{2c}{1+c} e^{-\frac{1-c}{1+c}|z|^2} \quad (3)$$

とする。このとき、Theorem 3.2 および Lemma 3.3 を用いると次のような定理が得られる。

THEOREM 3.4. σ_c をシンボル関数と持つ Weyl 変換の固有値 λ_k は $\lambda_k = c^{k+1}$ で与えられる。

Fock 空間 $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ を

$$\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 \rho(z) dz < \infty, \quad F \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$$

を満たす整関数全体とする。ただし、 dz は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度、 $\rho(z) = \pi^{-1} e^{-|z|^2}$ とする。 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、Bargmann 変換 Bf を

$$(Bf)(z) = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\sqrt{2}x \cdot z - \frac{x^2 + z^2}{2}} dx$$

とする。

Bargmann 変換を用いて、(3) で定義した σ_c をシンボル関数と持つ Weyl 変換について次のような定理が得られる。

THEOREM 3.5. 任意の $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ に対して

$$(BW_{\sigma_c} B^{-1} F)(z) = cF(cz)$$

が成り立つ。ただし、 σ_c は (3) で与えたものであり、 B^{-1} は逆 Bargmann 変換とする。

時間に依存する係数を持つ Schrödinger 方程式 (1) を構成するには、まず (3) における c を時間に依存する $i\mathbb{R} - \{0\}$ 上の関数 $\gamma(it)$ と置き換え、初期値 f および解 u を Bargmann 変換したものを (2) に代入する。さらに上の定理 3.5 を用いて整理すればよい。

参考文献

- [1] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I. *Comm. Pure. Appl. Math.* **14**(1961), 187-214
- [2] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part II. A family of related function spaces application to distribution theory, *Comm. Pure. Appl. Math.* **20**(1967), 1-101.
- [3] S. Molahajloo and M. W. Wong, The Schrödinger kernel of the twisted Laplacian and cyclic models, *Arch. Math (Basel)* **95** (2010), 593-599.
- [4] S. Molahajloo and M. W. Wong, Diagonalization of Weyl transforms and heat equations for time-dependent Hermite operators, *Complex Anal. Oper. Theory* **5**(2011), 283-298.
- [5] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre Functions*, Princeton University Press, 1993.
- [6] M. W. Wong, *Weyl Transforms*, Springer, 1998.
- [7] M. W. Wong, The heat equation for the Hermite operator on the Heisenberg group, *Hokkaido Math. J.* **34**(2005), 393-404.

摂動管状領域における Navier-Stokes 方程式の時間周期問題

小林徹平 (明治大学)

1 時間周期の Poiseuille flow

無限管領域 ω_i を定義する.

$$(n = 2) \quad \Sigma = (-a, a),$$

$$(n = 3) \quad \Sigma: \text{smooth simply connected bounded domain in } \mathbb{R}^2$$

に対して

$$\omega = \Sigma \times \mathbb{R}$$

と置く. この領域 ω において以下の時間周期条件を伴う Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \omega, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \mathbb{R}_+ \times \partial\omega, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + T) \quad \text{in } \omega, \quad (1.4)$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \alpha(t). \quad (1.5)$$

を考える. 但し

$\mathbf{u}$: 速度ベクトル

p : 圧力

ν : 粘性係数

α : 流量関数, 時間周期的, 周期 T

とする. この Navier-Stokes 方程式に以下のような仮定を置く.

$$\mathbf{u} = (v, 0, 0),$$

$$p(t, x_1) = \frac{1}{|\Sigma|} \left(\alpha'(t) - \nu \int_{\Sigma} \Delta v(t) dx \right) x_1.$$

この仮定によって以下のような発展方程式に変形できる.

$$v' + \nu A v - \nu \frac{1}{|\Sigma|} (A v, e) e = \frac{1}{|\Sigma|} \alpha'(t) e \quad \text{on } (0, T), \quad (1.6)$$

$$v(t) = v(t + T), \quad (1.7)$$

$$(v(t), e) = \alpha(t). \quad (1.8)$$

但し, 以下の記号を用いている.

$$\begin{aligned} A &= -\Delta, \\ D(A) &= H^2(\Sigma) \cap H_0^1(\Sigma), \\ e(x) &= 1 \quad \text{on } \Sigma. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 (*H. Beirão da Veiga*(2005))

$\alpha \in H_\pi^1(\mathbb{R}_+)$ とする. このとき

$$\begin{aligned} v^\alpha &\in L_\pi^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Sigma) \cap H^2(\Sigma)) \cap C_\pi(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Sigma)), \\ (v^\alpha)' &\in L_\pi^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Sigma)). \end{aligned}$$

であるような (1.6)-(1.8) の解がただ 1 つ存在する.

$\mathbf{V}^\alpha(t) = (v^\alpha(t), 0, 0)$ を「Time-periodic Poiseuille flow」と呼ぶ.

2 摂動管状領域における時間周期問題

まず摂動管状領域を定義する.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{x \in \omega; x_1 \leq -L\}, \\ \omega_2 &= \{x \in \omega; x_1 \geq L\}. \end{aligned}$$

ω_0 は有界領域とする. $\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_0$ と置く. Ω は滑らかで非有界かつ単連結な領域であるとしよう. この非有界領域 Ω を摂動管状領域と呼ぶ. Ω を満たす流体の速度と圧力をそれぞれ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, $p = p(t, x)$ とする. このとき, 時間周期条件を伴う Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{V}^\alpha \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \quad \text{in } \omega_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.5)$$

と表される. 但し, $\mathbf{f}$ は外力とする.

本講演の目的は, 摂動管状領域において遠方で Time-periodic Poiseuille-flow に収束し, 時間周期条件を満たす Navier-Stokes 方程式の弱解をもとめることである.

$$\mathbb{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0\}.$$

$$\mathbf{H}(\Omega) = \overline{\mathbb{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_2}.$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \overline{\mathbb{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\nabla \cdot\|_2}.$$

$(\mathbf{H}(\Omega))'$, $(\mathbf{V}(\Omega))'$ をそれぞれ $\mathbf{H}(\Omega)$, $\mathbf{V}(\Omega)$ の共役空間とする.

いま $\hat{\mathbf{V}}^\alpha$ は

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \hat{\mathbf{V}}^\alpha &= 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \hat{\mathbf{V}}^\alpha &= \mathbf{0} & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \hat{\mathbf{V}}^\alpha &= \mathbf{V}^\alpha & \text{in } (0, T) \times \omega_i \quad (i = 1, 2)\end{aligned}$$

を満たすとする.

3 時間周期弱解

Definition 3.1

可測関数 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ が Ω における *Navier-Stokes* 方程式 (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) の弱解であるとは, $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{V}^\alpha$ と置いたときに $\mathbf{v} \in L^2((0, T); \mathbf{V}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); \mathbf{H}(\Omega))$ となりかつ

$$\begin{aligned}& \int_0^T -(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})\psi' + \{\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})\}\psi dt \\ &= \int_0^T (V(\Omega))' \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{V(\Omega)} \psi dt \quad (\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}(\Omega), \psi \in C_0^\infty(0, T))\end{aligned}\tag{3.1}$$

を満たすことである. またその弱解 $\mathbf{u}$ が時間周期弱解であるとは, $\mathbf{v}$ が $[0, T]$ から $\mathbb{L}^2(\Omega)$ への弱連続関数であり

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(T) \quad \text{in } \mathbb{L}^2(\Omega)\tag{3.2}$$

を満たすことである.

4 結果

先行の結果である H. Beirão da Veiga の研究を紹介する.

Proposition 4.1

$\alpha \in H_\pi^1(0, T)$, $\mathbf{f} \in L^2((0, T); (V(\Omega))')$ とし, α は

$$c_0 \sqrt{\nu + \nu^{-2}} \|\alpha\|_{H^1(0, T)} \leq \frac{1}{2} \nu\tag{4.1}$$

を満たすとする, 但し定数 c_0 は領域に依存する定数である.

このとき, *Navier-Stokes* 方程式の時間周期弱解 $\mathbf{u}$ が存在する.

これに対する講演者の結果は以下の通りである.

Definition 4.1

$$\gamma^\alpha(t) = \sup_{\boldsymbol{\varphi} \in V(\omega)} \frac{((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{V}^\alpha(t))_\omega}{\|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbb{L}^2(\omega)}^2},\tag{4.2}$$

$$\hat{\gamma}^\alpha = \sup_{[0, T]} \gamma^\alpha(t)\tag{4.3}$$

と置く.

Theorem 4.1

$\mathbf{f} \in L^2((0, T); (\mathbf{V}(\Omega))')$, $\hat{\gamma}^\alpha < \nu$ であるとする.

このとき, *Navier-Stokes* 方程式 (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) の時間周期弱解 $\mathbf{u}$ が存在する.

参考文献

- [1] C. J. Amick, Steady solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded channels and pipes, Ann. Scuola Norm. Pisa, 4, 473-513 (1977)
- [2] H. Beirão da Veiga, Time-periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded cylindrical domains—Leray’s problem for periodic flows, Arch. Rational Mech. Anal. 178, 301-325 (2005)

変数係数の摩擦項を持つ半線形波動方程式の大域解の存在について

若杉 勇太 (大阪大学)

次の半線形消散型波動方程式の初期値問題を考える.

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)b(t)u_t = f(u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

物理的には, この方程式は摩擦を持った媒質中を伝わる波動現象を記述する一つのモデルである. ここで $a(x)b(t)u_t$ は摩擦項またはダンピング項と呼ばれ, 一般に解の全エネルギー

$$E(u; t) := \int_{\mathbf{R}^n} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx$$

を減らす効果がある. ここでは摩擦項の係数は

$$a(x) = a_0 \langle x \rangle^{-\alpha}, \quad b(t) = (1+t)^{-\beta}, \quad a_0 > 0, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1,$$

で与えられるものとする. ただし, $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ とする. また u は実数値の未知関数, 初期値 (u_0, u_1) は $H^1(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ に属すると仮定する. 非線形項 $f(u)$ は

$$f(u) = \pm |u|^p \quad \text{or} \quad |u|^{p-1}u$$

で与えられているとし, その指数 p は

$$1 < p \leq \frac{n}{n-2} \quad (n \geq 3), \quad 1 < p < \infty \quad (n = 1, 2)$$

なる範囲をとるとする.

我々は次のような問題に興味がある:

1. 時間局所的な解は存在するのか?
2. 時間大域的な解は存在するのか? 特に, 自明解 ($u \equiv 0$) の安定性はどうか? つまり, 初期値が (適当なノルムで) 十分小さければ, 時間大域的に解が存在してさらにその解も十分小さいか?
3. 解は十分時間が経ったときどのように振る舞うのか? (漸近挙動)

時間局所解の存在については, Banach 空間における縮小写像の原理を用いることにより証明できるが, ここでは省略する.

一般に非線形偏微分方程式については任意の初期値に対して時間大域的に解が存在することは期待できないが, p が十分大きくてさらに初期値が (適当なノルムで) 十分小さければ時間大域解の存在が保障される場合がある. それは, 直観的には u が小さければ $|u|^p$ は u に比べて十分小さいので, (1) が線形化方程式 $u_{tt} - \Delta u + a(x)b(t)u_t = 0$ の摂動とみなせるからである. 逆に, p が小さいときは, たとえ初期値が小さくても, 非線形項の効果が無視できなくなり, 解が大域的に存在しないおそれがある.

そこで, このような解の大域的存在または非存在を分けるような境目の指数 (臨界指数) が存在するのか, あるとしたらその値は何なのか, という問題を考えることにする.

つまり我々の目的は, (1) に対し, 次のような性質を持つ指数 (臨界指数) p_c を決定することである:

$p_c < p$ ならば, 小さい初期値に対し (1) の時間大域解が存在し, $1 < p \leq p_c$ ならば, (初期値が小さくても) 適当な条件を満たす初期値に対し, (1) の時間局所解は大域的には延長できない.

(1) の臨界指数は

$$p_c = 1 + \frac{2}{n - \alpha}$$

であると予想されている. 今回, $p > 1 + 2/(n - \alpha)$ の場合に時間大域解の存在が得られたので紹介する. しかし, $1 < p \leq 1 + 2/(n - \alpha)$ のときの大域解の非存在については未解決である.

ここで消散型波動方程式の解の拡散現象について説明しておく. 拡散現象とは, 消散型波動方程式の解が対応する熱方程式の解に漸近する現象のことをいう. 松村氏 [8], 望月氏 [9], Han 氏, Milani 氏 [2], 西原氏 [10] らをはじめとする数多くの研究者によって, 拡散現象が徐々に明らかにされてきた. 線形の消散型波動方程式

$$(2) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + c(t, x)u_t = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

を考える. 摩擦項の係数が定数 $c(t, x) = 1$ のとき, 松村氏 [8] により, $(u_0, u_1) \in (H^1 \cap L^1) \times (L^2 \cap L^1)$ の仮定のもとで, 解の減衰率が対応する熱方程式 $v_t - \Delta v = 0$ のものと同じになることが示された:

$$E(u; t) \leq C(1 + t)^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Han 氏と Milani 氏 [2] は, 実際に (2) の解が対応する熱方程式の解に漸近することを示し, 西原氏 [10] は, 空間次元が 3 のときに, 解表示を用いて (2) の解が漸近的に

$$u(t, x) \sim v(t, x) + e^{-t/2}w(t, x)$$

なる形に表されることを発見した. ここで, $v(t, x)$ は対応する熱方程式

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^3, \\ v(0, x) = u_0(x) + u_1(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

の解で, $w(t, x)$ はフリーの波動方程式

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^3, \\ w(0, x) = u_0(x), w_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^3. \end{cases}$$

の解である. これらの結果は, 消散型波動方程式の拡散構造を表現している. 一方, 望月氏 [9] により, ある正数 δ に対し摩擦項の係数が $0 \leq c(t, x) \leq C(1 + |x|)^{-1-\delta}$ を満たすならば, (2) の解のエネルギーは 0 に減衰せず, 解はフリーの波動方程式のある解に漸近する (漸近自由) ことが示された. これは, 摩擦項の係数の減衰が速すぎて, 方程式の放物性が失われ双曲性が回復したためであると解釈できる.

摩擦項の係数が時間変数にのみ依存する場合, すなわち $c(t, x) = b(t)$ の場合には, Wirth 氏 [14], [15], [16] により精密な結果が得られている. 彼は Fourier 変換を用いる方法により, $b(t)$ に対し一般的な仮定の下でいくつかの最良な $L^p - L^q$ 評価を得た. さらに $b(t) = (1 + t)^{-\beta}$, $(-1 < \beta < 1)$ を含む一般の $b(t)$ に対し, (2) の解が対応する熱方程式の解に漸近することを示した.

Todorova 氏と Yordanov 氏 [13] は空間変数に依存する摩擦項 $c(t, x) = a(x) = a_0 \langle x \rangle^{-\alpha}$ の場合を取り扱い, J. S. Kenigson 氏と J. J. Kenigson 氏 [6] は時間-空間両方に依存する摩擦項 $c(t, x) = a(x)b(t)$, $a(x) = a_0 \langle x \rangle^{-\alpha}$, $b(t) = (1 + t)^{-\beta}$, $(0 \leq \alpha + \beta < 1)$ の場合を考えた. 彼らは重み付きエネルギー法を用いて, 解の拡散現象を表す減衰率を導いている. これらの結果は, Khader 氏 [5] によりさらに一般化されている.

以上の結果から、摩擦項の遠方での減衰率 -1 が、方程式 (2) が拡散構造を持つ閾値になっていることが分かる。なお、 $c(t, x) = b(t) = \frac{\mu}{1+t}$ ($\mu > 0$) の場合は Wirth 氏 [14], $c(t, x) = a_0 \langle x \rangle^{-1}$ の場合は池畠氏, Todorova 氏, Yordanov 氏 [4] により、解の精密な減衰率が求められている。

非線形項が湧き出し項として働く場合、Todorova 氏と Yordanov 氏 [12] により、

$$(3) \quad u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p$$

の臨界指数が、対応する熱方程式と同じ $p_F(n) = 1 + \frac{2}{n}$ で与えられることが示された。この指数は藤田氏 [1] の熱方程式に関する先駆的な仕事にちなんで藤田指数と呼ばれる。 $p = p_F(n)$ の臨界の場合は未解決であったが、後に Zhang 氏 [17] により大域解の非存在の結果が得られている。

池畠氏, Todorova 氏, Yordanov 氏 [3] らは空間変数に依存する摩擦項の場合を考えた。

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = |u|^p,$$

ここで、係数 $a(x)$ については

$$a(x) \sim a_0 \langle x \rangle^{-\alpha}, |x| \rightarrow \infty, \quad \text{radially symmetric and } 0 \leq \alpha < 1$$

を仮定する。彼らは臨界指数が $p_c = 1 + \frac{2}{n-\alpha}$ で与えられることを示した。

最近、西原氏 [11] と Lin 氏, 西原氏, Zhai 氏 [7] らは時間変数に依存する摩擦項を持つ場合

$$u_{tt} - \Delta u + b(t)u_t = |u|^p, \quad b(t) = b_0(1+t)^{-\beta}, \quad \beta \in (-1, 1)$$

に対し、臨界指数が $p_c = 1 + \frac{2}{n}$ で与えられることを示した。臨界指数に β が現れない理由は、対応する熱方程式

$$b(t)v_t - \Delta v = |v|^p$$

において、 $T = \int_0^t b(s)^{-1} ds$ と変数変換を行うと、方程式が定数係数に変換されるからである。これは (1) に対しても同じである。従って、(1) の臨界指数は $p_c = 1 + \frac{2}{n-\alpha}$ で与えられると予想できる。

以下が我々の主結果である。

Theorem 1. $p > 1 + \frac{2}{n-\alpha}$ とし、任意に $\varepsilon > 0$ をとる。このとき、ある正数 $\delta_0 > 0$ が存在し、任意の $0 < \delta \leq \delta_0$ に対し以下が成り立つ：もし

$$I_0^2 := \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\psi(0,x)} (u_1^2 + |\nabla u_0|^2 + |u_0|^2) dx \quad \text{with} \quad \psi(t, x) := \frac{a_0(1+\beta)}{(2-\alpha)^2(2+\delta)} \frac{\langle x \rangle^{2-\alpha}}{(1+t)^{1+\beta}}$$

が十分小さければ、(1) の唯一つの時間大域解 $u \in C([0, \infty); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ が存在し、

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\psi(t,x)} a(x) u^2 dx &\leq C_\delta (1+t)^{-(1+\beta)\frac{n-\alpha}{2-\alpha} + \varepsilon}, \\ \int_{\mathbf{R}^n} e^{\psi(t,x)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx &\leq C_\delta (1+t)^{-(1+\beta)(\frac{n-\alpha}{2-\alpha} + 1) + \varepsilon} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 C_δ は δ に依存する定数である。

評価式 (4) を用いると、ある放物型領域の外で解が指数的に減衰していることが分かる：

Corollary 2. $p > 1 + \frac{2}{n-\alpha}$ とし, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. このとき, ある正数 $\delta_0 > 0$ が存在して, 任意の $0 < \delta \leq \delta_0$ に対して以下が成り立つ. 正数 ρ と μ を

$$0 < \rho < 1 - \alpha - \beta, \quad 0 < \mu < \frac{2a_0(1+\beta)}{(2-\alpha)^2(2+\delta)}$$

を満たすよう十分小さく選び,

$$\Omega_\rho(t) := \{x \in \mathbf{R}^n; \langle x \rangle^{2-\alpha} \geq (1+t)^{1+\beta+\rho}\}$$

と定める. このとき, 前定理の大域解 u は

$$\int_{\Omega_\rho(t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2) dx \leq C_{\delta,\rho,\mu} (1+t)^{-\frac{(1+\beta)(n-2\alpha)}{2-\alpha} + \varepsilon} e^{-\left(\frac{2a_0(1+\beta)}{(2-\alpha)^2(2+\delta)} - \mu\right)(1+t)^\rho}$$

を満たす. ここで, $C_{\delta,\rho,\mu}$ は δ, ρ, μ に依存する定数である.

すなわち, 領域 $\Omega_\rho(t)$ において解は指数的に減衰する. ここでたとえ初期値がコンパクトな台を持っていたとしても, 解 $u(t)$ の台と $\Omega_\rho(t)$ は共通部分を持ちうることを注意しておく. この現象は Todorova 氏と Yordanov 氏 [12] により発見されたもので, 解の台は摩擦の効果により光錐のずっと内側に押し込められていると解釈できる.

REFERENCES

- [1] H. FUJITA, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, **13** (1996), 109-124.
- [2] Y. HAN, A. MILANI, *On the diffusion phenomenon of quasilinear hyperbolic waves*, Bull. Sci. Math. **124** (5) (2000) 415-433.
- [3] R. IKEHATA, G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Critical exponent for semilinear wave equations with space-dependent potential*, Funkcialaj Ekvacioj, **52** (2009) 411-435.
- [4] R. IKEHATA, G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Optimal Decay Rate of the Energy for Wave Equations with Critical Potential* J. Math. Soc. Japan (to appear).
- [5] M. KHADER, *Nonlinear dissipative wave equations with space-time dependent potential*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 12, 3945-3963.
- [6] J. S. KENIGSON, J. J. KENIGSON, *Energy decay estimates for the dissipative wave equation with space-time dependent potential*, Math. Methods Appl. Sci. **34** (2011), no. 1, 48-62.
- [7] J. LIN, K. NISHIHARA, J. ZHAI, *Critical exponent for the semilinear wave equation with time-dependent damping*, preprint.
- [8] A. MATSUMURA, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1976), 169-189.
- [9] K. MOCHIZUKI *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1976/77), 383-390.
- [10] K. NISHIHARA, *$L^p - L^q$ estimates to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z., **244** (2003), 631-649.
- [11] K. NISHIHARA, *Asyptotic behavior of solutions to the semilinear wave equation with time-dependent damping*, Tokyo J. Math. (to appear).
- [12] G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations, **174** (2001), 464-489.
- [13] G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Weighted L^2 -estimates for dissipative wave equations with variable coefficients*, J. Differential Equations, **246** (2009), 4497-4518.
- [14] J. WIRTH, *Solution representations for a wave equation with weak dissipation*, Math. Methods Appl. Sci. **27** (2004), no. 1, 101-124.
- [15] J. WIRTH, *Wave equations with time-dependent dissipation. I. Non-effective dissipation*, J. Differential Equations, **222** (2006), 487-514.
- [16] J. WIRTH, *Wave equations with time-dependent dissipation. II. Effective dissipation*, J. Differential Equations **232** (2007), 74-103.
- [17] QI S. ZHANG, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333** (2001), 109-114.

ある準線形双曲型方程式の解の爆発について*

杉山裕介[†]

東京理科大学理学研究科 D 1

概要

第二音波の方程式と呼ばれる超流体中の温度波を記述する方程式を扱う. 空間一次元第二音波の方程式の解の爆発を考える. この方程式は伝播速度が未知関数の二乗となる双曲型方程式であるため, 未知関数が真に正と仮定することで, 強圧的な双曲型見なすことができる. 初期値問題の標準的な可解性定理を考慮すると, 2 種類の爆発現象が存在する. 本講演ではこの 2 つの現象が起こる十分条件を与える

1 導入

本研究では以下のような非線形波動方程式の初期値問題を考える.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u = u \partial_x (u \partial_x u), & (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, & (1.1)_a \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, & (1.1)_b \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, & (1.1)_c \end{array} \right. \quad (1.1)$$

ここで u_0, u_1 は実数値関数, $u(t, x)$ は実数値未知関数である. ソボレフ空間 $(1 - \partial_x^2)^{-s/2} L^2(\mathbb{R})$ ($s \in \mathbb{R}$) を $H^s(\mathbb{R})$ と書く.

第二音波と呼ばれる超流体の温度波を記述する方程式として

$$\partial_t^2 S = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial S} S^2 \operatorname{div}(\nabla S),$$

がよく知られている. $(1.1)_a$ は, 上の方程式の導出過程において $|\nabla S|^2 \ll |S \Delta S|$ を仮定せずに得られる (そう言った意味ではより自然な) 方程式

$$\partial_t^2 S = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial S} S \operatorname{div}(S \nabla S),$$

*本講演は東京理科大学理学部 加藤圭一先生との共同研究に基づくものである.

[†]mail:yoursmine1986@c3-net.ne.jp

を簡略化し、一次元版にしたものである。ここで T, S はそれぞれ温度とエントロピーであり、 ρ_s, ρ_n は超流体の密度に関連した物理量である。

初期値 u_0 について次を仮定する。

$$u_0(x) \geq A > 0, \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

ここで A は定数である。この仮定によって、時刻 $t = 0$ で方程式 (1.1)_a が退化しなくなるため、強圧的な双曲型方程式と見なすことができる。

初期値問題 (1.1) の時間局所解の一意存在の結果を紹介する。

定理 1 (K.Kato and S). $s > \frac{1}{2}$ とし、 $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\partial_x u_0, u_1 \in H^s(\mathbb{R})$ とする。さらに正定数 A があって $u_0(x) \geq A$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) と仮定する。この時、初期値問題 (1.1) の時間局所解 u は次のクラスで一意的に存在する。

$$\begin{aligned} u - u_0 &\in \bigcap_{j=0,1,2} C^j([0, T]; H^{s-j+1}(\mathbb{R})), \\ u(t, x) &\geq A/2, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

この定理はエネルギー法を用いて示される。方程式の導出や上の定理の証明は [4] に詳しく載せてある。

2 主結果 (解の爆発)

第二音波の方程式の解の爆発について考える。定理 1 を繰り返し用いて、(1.1) の解を延長していくことを考えると、解の延長 (定理 1 を用いた解の延長) ができなくなる時刻 T において次の (A) と (B) のどちらかが起こる。

$$(A) \quad \lim_{t \nearrow T} \|\partial_t u(t)\|_{H^s} + \|\partial_x u(t)\|_{H^s} = \infty.$$

または

$$(B) \quad \lim_{t \nearrow T} \inf_{[0, t] \times \mathbb{R}} u(t, x) = 0.$$

(A), (B) は、強圧的な双曲型方程式において、標準的な解の爆発 (詳しく言うと Blow-up criterion) と同等またはそれに含まれるものである ([1], [3] を参照せよ)。

我々は (A), (B) が起きる十分条件をそれぞれ与えた。

定理 2. A を正定数、 $s > \frac{1}{2}$, $\phi \in H^{s+1}(\mathbb{R})$ として、 $u(t, x)$ は、次を初期値に持つ (1.1) の解とする。

$$u_0(x) = A + \epsilon \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad u_1(x) = -u_0(x) \partial_x u_0(x), \quad (2.1)$$

この時、 ϵ が十分小ならば、(1.1)、ある時刻 T が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{t \nearrow T} \|\partial_t u(t)\|_{H^s} + \|\partial_x u(t)\|_{H^s} = \infty. \quad (2.2)$$

定理 3. A を正定数とする, (1) の初期値 $u(0, x) = A + \phi(x) > 0$, $\partial_t u(0, x) = u_1(x)$ が次を満たすとする,

$$\begin{aligned}\phi &\in H^{s+1} \setminus \{0\}, \quad u_1 \in H^s, \\ \phi, u_1 &\text{ compact な台を持つ}, \\ u_1(x) \pm u_0(x) \partial_x u_0(x) &\leq 0, \text{ for } x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

この時, ある時刻 T が存在して, (1.1) の一意解 $u \in C^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ が存在し $\lim_{t \rightarrow T} u(t, x_0) = 0$ for some $x_0 \in \mathbb{R}$.

注意 4. 第二音波の方程式と似た方程式: $\partial_t^2 u = c(u) \partial_x (c(u) \partial_x u)$ (Variational wave equation) が P. Zhang, Y. Zheng によって多く研究されている ([6], [7]). R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng ([2]) は, この方程式の解の爆発を考えている. しかしながら彼らは, この方程式にある定数 c_1, c_2 があって

$$0 < c_1 \leq c(r) \leq c_2, \quad r \in \mathbb{R},$$

という仮定を付している. K. Song [5] は [2] の手法を使って $\partial_t^2 u = c(u) \partial_x (c(u) \partial_x u) + \sin(u)$ の解の爆発を扱っている.

注意 5.

$$\partial_t^2 S = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial S} S^2 \operatorname{div}(\nabla S),$$

を簡略化かつ一次元化した方程式 $\partial_t^2 u = u^2 \partial_x^2 u$ に対しても定理 3 と同様の結果が成り立つことがわかった.

参考文献

- [1] S. Alinhac, Blowup for nonlinear hyperbolic equations, in: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 17, Birkhäuser.
- [2] R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng, Singularities of a variational wave equation. J. Differential Equations **129** (1996). 49-78.
- [3] A. Majda, Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, Appl. Math. Sci. **53**, Springer, (1984).
- [4] K. Kato, Y. Sugiyama, Local existence and uniqueness theory for the second sound equation in one space dimension, to appear in J. Hyperbolic Differential Equations.

- [5] K. Song, On singularity of a nonlinear variational sine-Gordon equation. *J. Differential Equations* **189** (2003), 183-198.
- [6] P. Zhang, Y. Zheng, Rarefactive solutions to a nonlinear variational wave equation of liquid crystals, *Comm. Partial differential equations* **26** (2001), 381-419.
- [7] P. Zhang, Y. Zheng, Singular and rarefactive solutions to a nonlinear variational wave equation, *Chinese Ann. Math. Ser. B* **22** (2001), 159-170.

非線形波動方程式の一般論に対する 最適性の最終問題¹

若狭恭平

公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科修士1年

e-mail : g2111045@fun.ac.jp

1 序論

まず、主結果の位置付けを述べるために、次の非線形波動方程式の初期値問題に対する一般論の概観から始める。実数値未知関数 $u = u(x, t)$ に対する初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = H(u, Du, D_x Du) & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える。ここで、

$$\begin{aligned} Du &= (u_{x_0}, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad x_0 = t, \\ D_x Du &= (u_{x_i x_j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i + j \geq 1), \end{aligned}$$

$f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ で $\varepsilon > 0$ は、小さいパラメータとする。

$$\hat{\lambda} = (\lambda; (\lambda_i), i = 0, 1, \dots, n; (\lambda_{ij}), i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i + j \geq 1)$$

と書くとき、非線形項 $H = H(\hat{\lambda})$ は、十分滑らかな関数で $\hat{\lambda} = 0$ の近傍で

$$H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$$

をみたすとする。ここで α は自然数である。ライフスパン $T(\varepsilon)$ を次のように定義する。

$$T(\varepsilon) = \sup\{t > 0 : \text{任意に固定した } (f, g) \text{ に対して (1.1) の古典解 } u(x, t) \text{ が存在する}\}$$

(1.1) は、 $T(\varepsilon) = \infty$ のとき時間大域解を持ち、 $T(\varepsilon) < \infty$ のときは、時間区間 $[0, T(\varepsilon))$ において時間局所解を持つことを意味する。この設定では、時間局所解に対して、解の一意性より $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \infty$ となることが予想されるが、そのときの $T(\varepsilon)$ の下界を ε の詳細なオーダーで表現することが一般論である。簡単のため時間大域解が得られない $n = 1$ の場合を除いて、以下 $n \geq 2$ とする。

ライフスパンの下からの評価は、1980年代から多くの研究者達によって改良され続け、最終的には1995年に次の表にあるように α と n に関する分類が落ち着いた。

¹高村博之先生 (公立はこだて未来大学複雑系知能学科) との共同研究

$T(\varepsilon) \geq$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha \geq 3$
$n = 2$	$ca(\varepsilon)$ (一般の場合) $c\varepsilon^{-1} (\int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx = 0)$ $c\varepsilon^{-2} (\partial_u^2 H(0) = 0)$	$c\varepsilon^{-6}$ (一般の場合) $\exp(c\varepsilon^{-2}) (\partial_u^b H(0) = 0 \ (b = 3, 4))$	∞
$n = 3$	$c\varepsilon^{-2}$ (一般の場合) $\exp(c\varepsilon^{-1}) (\partial_u^2 H(0) = 0)$	∞	∞
$n = 4$	$\exp(c\varepsilon^{-2})$ (一般の場合) $\infty (\partial_u^2 H(0) = 0)$	∞	∞
$n \geq 5$	∞	∞	∞

ここで、 $a = a(\varepsilon)$ は $a^2 \varepsilon^2 \log(a+1) = 1$ をみたす数で、 c は ε に依らない正定数である。これらの結果は $H = |u|^p$ や $H = |u_t|^p$ などというモデル方程式の爆発解を解析することにより、 $n = 4$ かつ $\alpha = 1$ の場合を除いて最適であることが知られていた。 $(n = 2$ かつ $\alpha = 2$ で $b = 4$ の条件は不要と思われる。) ここで、最適という意味は、前述のような特別なモデル方程式と特別な初期値を使って $T(\varepsilon)$ が上から同じ ε のオーダーで評価されているということである。この表については、Li & Chen [1] の第2章を参考にした。

講演では、 $n = 4$ かつ $\alpha = 1$ の場合の最適性が得られたことを報告する。すなわち、 $\mathbf{R}^4 \times [0, \infty)$ で $H = u^2$ に対し特別な初期値を使って $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-2})$ を示すことである。この結果は、Takamura & Wakasa [2] の $n \geq 4$ におけるモデル方程式 $H = |u|^{p_0(n)}$ に対する最適な解のライフスパンの上からの評価を得た結果の一部であることに注意する。ここで、 $p_0(n)$ はモデル方程式 $H = |u|^p$ における Strauss 予想の臨界冪としてよく知られている。 $p_0(n)$ は $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ の正根で、 $p_0(4) = 2$ である。Strauss 予想の完全解決への歴史やライフスパンの評価については [2] の序章を参照されたい。

初期値問題 (1.1) において $H = u^2$ かつ $n = 4$ とすると、 $T(\varepsilon) < \infty$ となることは Yordanov & Zhang [3] と Zhou [4] によってそれぞれ独立に示されている。我々の証明法は、[3] の手法が基礎となっているが、我々の論文の発表受理後、Zhou & Han [5] によって得られた異なる証明法は、[4] の手法が基礎となっている。

2 主結果

定理 $H = u^2$ 、 $n = 4$ とする。 $f \in C_0^4(\mathbf{R}^4)$ 、 $g \in C_0^3(\mathbf{R}^4)$ は非負で、恒等的にゼロでないとする。(1.1) は

$$\text{supp } u \subset \{(x, t) \in \mathbf{R}^4 \times [0, \infty) : |x| \leq t + R\} \ (R \geq 1/4)$$

となるような解 $u \in C^2(\mathbf{R}^4 \times [0, T(\varepsilon)))$ を持つとする。このとき、 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, R)$ が存在して、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ である限り $T(\varepsilon)$ は

$$T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-2})$$

をみたす。ここで、 C は ε に依らない正定数である。

定理の証明の概略 [3] の解の L^2 ノルムと解のラドン変換との間に成立する2つの不等式を組み合わせて作った解の L^2 ノルムの逐次代入枠と、独自に開発した時間に関して‘前

進する ' 逐次代入法の組み合わせで、常微分不等式の解の最大存在時間評価に持ち込む。鍵となる逐次代入後の評価式は次のものである。

命題 定理の仮定の下で、ある正定数 $C = C(f, g, R)$ が存在して、 $F(t) = \int_{\mathbf{R}^4} u(x, t) dx$ は次の不等式をみたす。

$$F''(t) \geq C_j \left(\log \frac{t - R}{(a_j - 1)R} \right)^{2^j - 1} \quad \text{for } t \geq a_j R \quad (2.1)$$

をみたす。ここで、 $a_j = 2^{j+1} - 2$ ($j = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} C_j &= \exp \left\{ 2^{j-1} (\log(C_0 C_1 8^{-S(j)})) - \log C_0 \right\} \quad (j \geq 2), \\ C_1 &= \frac{C^3}{2^2 \cdot 3^3} \varepsilon^4, \quad C_0 = \frac{C}{2^{10}}, \quad S(j) = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{k}{2^k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

補題 $F \in C^2([0, T))$ は、

$$\begin{cases} F(t) \geq Kt^2 & \text{for } t \geq T_0, \\ F''(t) \geq B(t + R)^{-4} F(t)^2 & \text{for } t \geq 0, \\ F(0) > 0, \quad F'(0) > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

をみたすとする。ここで、 B, K, R, T_0 は正定数で、特に $T_0 \geq R$ である。このとき、 $K \geq K_0$ である限り、 T は $T \leq 2T_1$ をみたす。ここで

$$K_0 = \left\{ \frac{1}{2^3} \sqrt{\frac{B}{3}} \left(1 - \frac{1}{2^{2\delta}} \right) \right\}^{-2}, \quad T_1 = \max \left\{ T_0, \frac{F(0)}{F'(0)} \right\}, \quad (2.4)$$

δ は、 $0 < \delta < 1/2$ をみたすような任意数である。

参考文献

- [1] T-T.Li & Y.Chen, “Global Classical Solutions for Nonlinear Evolution Equations”, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 45, Longman Scientific & Technical, 1992.
- [2] H.Takamura & K.Wakasa, *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations **251** (2011), 1157-1171.
- [3] B.Yordanov & Q.S.Zhang, *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal., **231**(2006), 361-374.
- [4] Y.Zhou, *Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **28**(2007), 205-212.
- [5] Y.Zhou and W.Han, *Life-span of solutions to critical semilinear wave equations*, arXiv:1103.3758 [math.AP] 19 Mar. 2011.

不動点問題と均衡問題への近似法

冨澤 佑季乃 (中央大学大学院 理工学研究科)*

1. 均衡問題

$\mathbb{R}$ を実数全体, E をノルム $\|\cdot\|$ を持つ実 Banach 空間, E^* を E の共役空間, C を E の空でない閉凸集合とする. $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で表す. $f: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ を実数値関数, $A: C \rightarrow E^*$ を非線形作用素とする. **一般均衡問題**(generalized equilibrium problem) とは, 任意の $y \in C$ に対して,

$$f(u, y) + \langle Au, y - u \rangle \geq 0 \quad (1)$$

を満たす $u \in C$ を求める問題である. この問題の解集合を EP で表す. すなわち

$$EP := \{u \in C : f(u, y) + \langle Au, y - u \rangle \geq 0, \forall y \in C\}$$

である. $A = 0$ のとき, 問題 (1) は任意の $y \in C$ に対して, $f(u, y) \geq 0$ を満たす $u \in C$ を求める問題と同等である. この問題を**均衡問題**(equilibrium problem) といい, その解集合を $EP(f)$ で表す.

2. 準距離射影と擬非拡大写像

以下, 点列 $\{x_n\}$ が x に強収束すること及び弱収束することをそれぞれ $x_n \rightarrow x$ と $x_n \rightharpoonup x$ で表す. E を滑らか, 狭義凸かつ反射的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸集合とする. 関数 $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ を, すべての $x, y \in E$ に対して,

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義する. このとき, 各 $x \in E$ に対して, $\phi(x_0, x) = \min\{\phi(y, x) : y \in C\}$ を満たすような $x_0 \in C$ が唯一つ存在する. x に対して, この x_0 を対応させる写像 $\Pi_C: E \rightarrow C$ を**準距離射影**(generalized projection) といい, 各 $x \in E$ に対して,

$$\Pi_C x = \arg \min_{y \in C} \phi(y, x)$$

で定義する. 写像 $T: C \rightarrow E$ の不動点集合を $F(T) := \{x \in E : Tx = x\}$ で表す. 点 $p \in C$ が T の**漸近的不動点**(asymptotic fixed point) であるとは, $x_n \rightharpoonup p$ かつ $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在するときをいう. T の漸近的不動点の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. 写像 $T: C \rightarrow E$ が**擬非拡大**(relatively nonexpansive) であるとは, 次の性質を満たすことをいう:

- (i) $\hat{F}(T) = F(T) \neq \emptyset$;
- (ii) すべての $x \in C$ と $p \in F(T)$ に対して, $\phi(p, Tx) \leq \phi(p, x)$.

キーワード: W -mapping, 擬非拡大写像, 一般均衡問題.

* 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院 理工学研究科

e-mail: tomizawa@gug.math.chuo-u.ac.jp

次に, 実数値関数 $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ に次の条件 (f_1) – (f_4) を仮定する:

- (f_1) すべての $x \in C$ に対して, $f(x, x) = 0$;
- (f_2) すべての $x, y \in C$ に対して, $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$;
- (f_3) すべての $x, y, z \in C$ に対して, $\limsup_{t \downarrow 0} f((1-t)x + tz, y) \leq f(x, y)$;
- (f_4) すべての $x \in C$ に対して, 写像 $y \mapsto f(x, y)$ は凸かつ下半連続.

補題 2.1 ([6]). 実数値関数 $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ が (f_1) – (f_4) を満たすとする. 任意の $r > 0$ と $x \in E$ に対して, 写像 $T_r : E \rightarrow C$ を次で定義する:

$$T_r(x) = \{u \in C : f(u, y) + \frac{1}{r} \langle y - u, Ju - Jx \rangle \geq 0, \forall y \in C\}. \quad (2)$$

このとき T_r は次を満たす:

- (i) T_r : 一価;
- (ii) 任意の $x, y \in E$ に対して, $\langle T_r x - T_r y, JT_r x - JT_r y \rangle \leq \langle T_r x - T_r y, Jx - Jy \rangle$;
- (iii) $F(T_r) = \hat{F}(T_r) = EP(f)$;
- (iv) $EP(f) \subset C$: 閉凸部分集合;
- (v) 任意の $p \in F(T_r)$ に対して, $\phi(p, T_r x) + \phi(T_r x, x) \leq \phi(p, x)$.

註. (2) で定義された T_r は 擬非拡大写像である.

3. W -mappings

E を狭義凸かつ一様に滑らかな Banach 空間, C を E の閉凸集合, $\{S_i\}_{i=0}^\infty$ を C 上の写像族, $\{\beta_{n,i} : 0 \leq i \leq n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ を実数列とする. 任意の $n \geq 0$ に対して, 写像 $W_n : C \rightarrow C$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} U_{n,n+1} &= I, \\ U_{n,n} &= \Pi_C J^{-1}(\beta_{n,n} J(S_n U_{n,n+1}) + (1 - \beta_{n,n}) J), \\ &\dots \\ U_{n,i} &= \Pi_C J^{-1}(\beta_{n,i} J(S_i U_{n,i+1}) + (1 - \beta_{n,i}) J), \\ &\dots \\ U_{n,1} &= \Pi_C J^{-1}(\beta_{n,1} J(S_1 U_{n,2}) + (1 - \beta_{n,1}) J), \\ W_n &= U_{n,0} = J^{-1}(\beta_{n,0} J(S_0 U_{n,1}) + (1 - \beta_{n,0}) J), \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, I は C 上の恒等写像である. このような写像 W_n を $\{S_i\}_{i=0}^n$ と $\{\beta_{n,i}\}_{i=0}^n$ から生成される W -mapping という.

補題 3.1 ([4]). $\{S_i\}_{i=0}^n$ を C 上の擬非拡大写像族とし, $\bigcap_{i=0}^n F(S_i) \neq \emptyset$ であると仮定する. $\{\beta_{n,i}\}_{i=0}^n$ が実数列で, $0 < \beta_{n,0} \leq 1$, かつすべての $1 \leq i \leq n$ に対して $0 < \beta_{n,i} < 1$ を満たすとする. $\{U_{n,i}\}_{i=0}^{n+1}$ を (3) で定義する写像族, W_n を $\{S_i\}_{i=0}^n$ と $\{\beta_{n,i}\}_{i=0}^n$ で生成された W -mapping とする. このとき次が成り立つ:

- (i) $F(W_n) = \bigcap_{i=0}^n F(S_i)$;
- (ii) すべての $0 \leq i \leq n$, $x \in C$ と $z \in F(W_n)$ に対して, $\phi(z, U_{n,i} x) \leq \phi(z, x)$ かつ $\phi(z, S_i U_{n,i+1} x) \leq \phi(z, x)$.

E を一様凸かつ滑らかな Banach 空間, C を E の閉凸集合, $\{S_i\}_{i=0}^\infty$ を C 上の写像族, $\{\lambda_{n,i} : 0 \leq i \leq n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ を実数列とする. 任意の $n \geq 0$ に対して, 写像 $V_n : C \rightarrow C$ を次のように定義する:

$$V_n = J^{-1} \sum_{i=0}^n \lambda_{n,i} JS_i. \quad (4)$$

補題 3.2 ([4]). $\{S_i\}_{i=0}^\infty$ を C 上の擬非拡大写像族とし, $\bigcap_{i=1}^\infty F(S_i) \neq \emptyset$ であると仮定する. $\{\lambda_{n,i}\}_{i=0}^n \subset [0, 1]$ が実数列で任意の $n \geq 0$ に対して, $\sum_{i=0}^n \lambda_{n,i} = 1$ かつ各 $i \geq 0$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,i} > 0$ を満たすとする. 写像 $V_n : C \rightarrow C$ を (4) で定義する. このとき次が成り立つ:

- (i) $\bigcap_{n=0}^\infty F(V_n) = \bigcap_{i=0}^\infty F(S_i)$;
- (ii) 全ての $n \geq 0$, $x \in C$ かつ $z \in \bigcap_{i=0}^\infty F(S_i)$ に対して, $\phi(z, V_n x) \leq \phi(z, x)$.

4. 共通不動点問題と均衡問題

E を一様に滑らかで一様凸な Banach 空間, C を E の空でない閉凸集合とする. (f_1) – (f_4) を満たす実数値関数, $\{S_i\}_{i=0}^\infty$ を C 上の可算無限個な擬非拡大写像の族として $F := \bigcap_{i=0}^\infty F(S_i) \cap EP(f) \neq \emptyset$ とおく. f に関する $EP(f)$ と擬非拡大写像族の共通不動点集合 $\bigcap_{i=0}^\infty F(S_i)$ の共通部分へ強収束する近似列を, W -mapping W_n 及び写像 V_n を用いることで得た.

定理 4.1. $\{\beta_{n,i} : 0 \leq i \leq n\}$ は実数列で $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,i}(1 - \beta_{n,i}) > 0$ を満たすとする. W_n を $\{S_i\}_{i=0}^n$ と $\{\beta_{n,i}\}_{i=0}^n$ から生成される W -mapping とし, $r > 0$ かつ $\{\gamma_n\} \subset [r, \infty)$ を実数列として, 点列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ を次で定義する:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = W_n x_n, \\ u_n \in T_{\gamma_n} y_n, \text{ that it, } f(u_n, y) + \frac{1}{\gamma_n} \langle y - u_n, Ju_n - Jy_n \rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ C_n = \{z \in C : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx_0 - Jx_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

このとき, $\{x_n\}$ は点 $\Pi_F x_0$ に強収束する.

定理 4.2. $\{\lambda_{n,i}\}_{i=0}^n \subset [0, 1)$ を実数列とし, 任意の $n \geq 0$ に対して $\sum_{i=0}^n \lambda_{n,i} = 1$, かつ各 $i \geq 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,i} > 0$ を満たすとする. 写像 V_n を (4) で定義し, $r > 0$ かつ $\{\gamma_n\} \subset [r, \infty)$ を実数列として, 点列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ を次で定義する:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = V_n x_n, \\ u_n \in T_{\gamma_n} y_n, \text{ that it, } f(u_n, y) + \frac{1}{\gamma_n} \langle y - u_n, Ju_n - Jy_n \rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ C_n = \{z \in C : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx_0 - Jx_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

このとき, $\{x_n\}$ は点 $\Pi_F x_0$ に強収束する.

5. 共通不動点問題と一般均衡問題

E を滑らか, 狭義凸かつ反射的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸集合とする. 作用素 $A : C \rightarrow E^*$ が α -逆強単調 (*inverse strongly monotone*) であるとは, $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

を満たすことである.

補題 5.1 ([3]). $A : C \rightarrow E^*$ を α -逆強単調作用素とする. 実数値関数 $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ が (f_1) – (f_4) を満たし, 関数 $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する: 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$g(x, y) := f(x, y) + \langle Ax, y - x \rangle. \quad (5)$$

このとき g は (f_1) – (f_4) を満たす. また $r > 0$ かつ $x \in E$ のとき, $u \in C$ が存在して, 任意の $y \in C$ に対して, 次を満たす:

$$g(u, y) + \frac{1}{r} \langle y - u, Ju - Jx \rangle \geq 0.$$

上の補題より, (5) で定義された実数値関数 $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ は補題 2.1 を満たす. したがって, 一般均衡問題 (1) に対しても定理 4.1–4.2 が成り立つ.

参考文献

- [1] K. Aoyama, F. Kohsaka, W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publ. (2007), 7-26.
- [2] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5**(2009), 201-225.
- [3] S.-s. Chang, H. W. J. Lee, C. K. Chan, *A new hybrid method for solving a generalized equilibrium problem, solving a variational inequality problem and obtaining common fixed points in Banach spaces, with applications*, Nonlinear Anal. **73** (2010) 2260–2270.
- [4] S. Matsushita, K. Nakajo, W. Takahashi, *Strong convergence theorems obtained by a generalized projections hybrid method for families of mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010) 1466–1480.
- [5] S. Matsushita, W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005) 257–266.
- [6] W. Takahashi, K. Zembayashi, *Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009) 45–57.

ポスターセッション

大型ヘリカル装置の磁場分布逆解析結果に対する最外殻磁気面の数値的同定

Numerical Identification of the Last Closed Magnetic Surface for the Reconstructed Magnetic Field in the Large Helical Device

赤澤眞之¹⁾, 大久保岳¹⁾, 松本裕¹⁾, 板垣正文¹⁾, 關良輔²⁾, 鈴木康浩²⁾, 渡邊清政²⁾

¹⁾北海道大学大学院工学院, 〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目

²⁾核融合科学研究所, 〒509-5292 岐阜県土岐市下石町322-6

Abstract

3次元コーシー条件面法により, 大型ヘリカル装置の磁場分布が外部磁気センサー信号から逆解析される. 逆解析磁場に基づく磁力線追跡で得たポアンカレ・プロットは鋭利な最外殻磁気面 (LCMS) を描かない. そこで, 動径基底関数展開によりポアンカレ・プロットを擬似的な磁気面関数の等高線分布に加工した. 各等高線に対応するポアンカレ・プロットにつき, 等高線の内側と外側でのばらつきの比をとる. この比が顕著に変化する等高線は LCMS の正解とよく一致した.

1. 背景

大型ヘリカル装置 (LHD) を対象として, プラズマ外部に配置した磁気センサーの信号から 3 次元磁場分布を逆解析するために, 3 次元コーシー条件面 (CCS) 法を開発している [1, 2].

運転制御上の観点およびプラズマの電磁流体平衡に関わる知見を得るために, 最外殻磁気面 (LCMS) の同定は重要である. 軸対称トカマクプラズマの場合と異なり, ヘリカル装置では磁気面関数を数学的に与えるのは困難である. CCS 法による逆解析磁場を用いて, 磁力線追跡を行う. 磁力線追跡により得たポアンカレ・プロットが最も外側で閉じている面を LCMS とする. 比較のための正解として平衡計算コード HINT2 [3] による順解析結果を用いた.

ストカスティック領域 (磁力線が磁気面を描かず, ダイバータ板に向かう領域) の外側では, ポアンカレ・プロットの逆解析結果と正解はよく一致しており, ダイバーターレッグも再現されている (図 1). LCMS に関しては, 真空の場合の LCMS よりも高ベータプラズマの場合に近づいているものの, 明確に再現はされていない (図 2). ポアンカレ・プロット点を用いて, 数値的に LCMS を定義する手法を検討する.

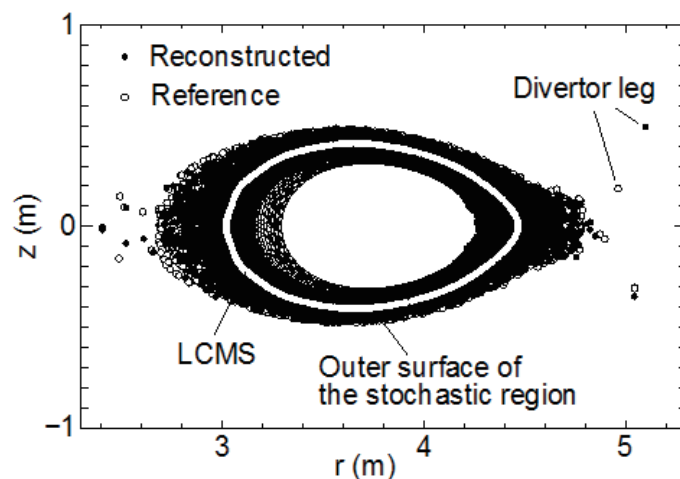


図1 ポアンカレ・プロット: ストカスティック領域

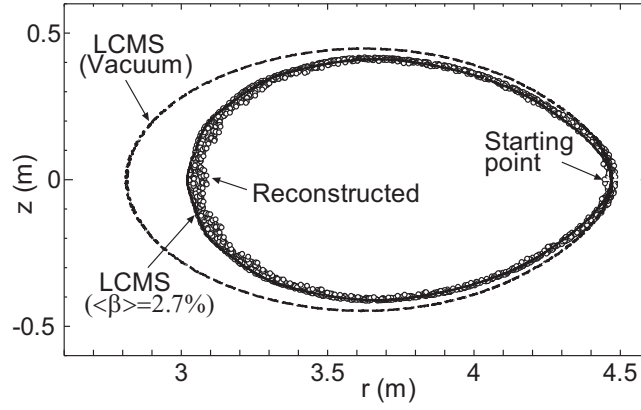


図2 ポアンカレ・プロット：LCMS

2. 数値処理によるLCMSの明瞭化

2.1 擬似磁気面関数

磁力線追跡の出発点を

$$r_{start}^{(k)} = 3.55 + 0.01k \quad (k = 0, 1, \dots, 40) \text{ m}, \quad z_{start}^{(k)} = 0.0 \text{ m}, \quad \varphi_{start}^{(k)} = \text{横長断面}$$

として、磁力線追跡を行った。同一出発点によるポアンカレ・プロットは、同じ値の磁気面関数を有する。便宜上、出発点の r 座標を擬似磁気面関数の値として $\psi^{(k)} = r_{start}^{(k)}$ と与える。Radial basis function (RBF) 展開を用いると、擬似磁気面関数は、

$$\psi^{(k)}(r, z) = \sum_{i=1}^N w_i f_i(r, z; r_i, z_i) = r_{start}^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, 40)$$

と表せる。RBFはガウシアン型

$$f_i(r, z; r_i, z_i) = \exp\left\{-\left((r-r_i)^2 + (z-z_i)^2\right)/\sigma^2\right\}$$

を用いた。ここで、 (r_i, z_i) はRBFの中心座標、 σ はScaling factorである。重み係数 w_i を最小二乗法により求める。RBF近似を用いると、図2のようなポアンカレ・プロットは擬似磁気面関数の等高線に変換される (図3)。LCMSの外側にも閉曲線があるが、これは真の磁気面ではないので棄却する必要がある。

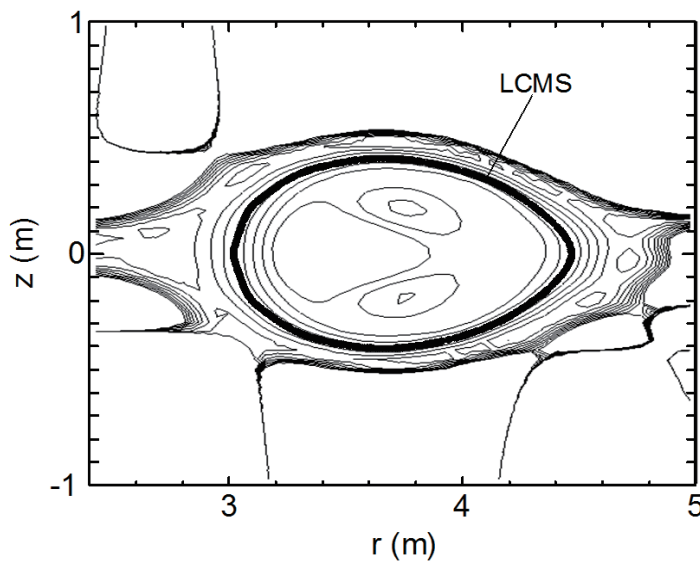


図3 擬似磁気面関数の等高線

2.2 4つの領域の定義

真空領域（プラズマ電流の存在しない領域）やストカスティック領域に加えて，新たな2つの領域を定義する（図4）．LCMSとCCSに挟まれる領域を'dirty'領域，CCSの内側を解析対象外の'black'領域とする．

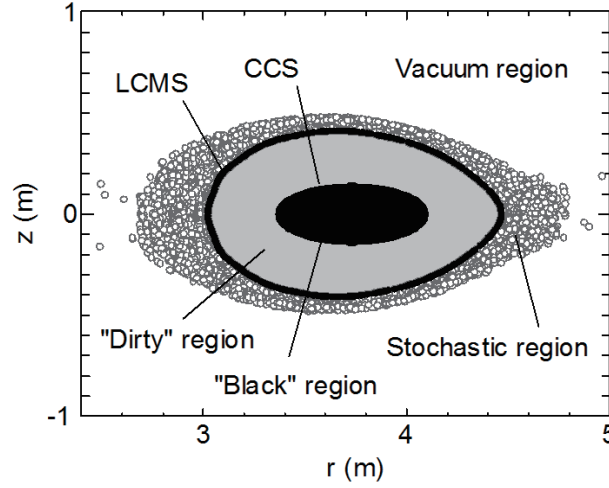


図4 4つの領域

真空磁場を仮定したCCS法による逆解析では，'dirty'領域での磁場の誤差が大きいため，ポアンカレ・プロットのばらつきは大きくなる．LCMS近傍では，擬似磁気面の内側のばらつきの方が，外側のばらつきよりも大きくなる（図2）．これは，LCMSの内側の点が'dirty'領域を通過したためである．

表1 4つの領域の特徴

領域	電流密度	逆解析磁場の精度
Vacuum	No	Acceptable
Stochastic	Weak	Fair
"Dirty"	Strong	Large error
"Black"	Strong	解析対象外

2.3 内側のばらつきと外側のばらつきの比

ポアンカレ・プロット点のばらつきを

$$s^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d_j^2$$

で定義する． d_j はRBFによる擬似磁気面とポアンカレ・プロット点の距離， m はポアンカレ・プロットの点数である．内側と外側のばらつきの比を

$$R = s_{inside}^2 / s_{outside}^2$$

のようにとる．

3. 結果

各出発点の r 座標， r_{start} での内側と外側のばらつきの比を，図5に示す．比は $r_{start} = 4.47\text{m}$ で急に変化していることがわかる． $r_{start} = 4.47\text{m}$ をLCMSと判定する．

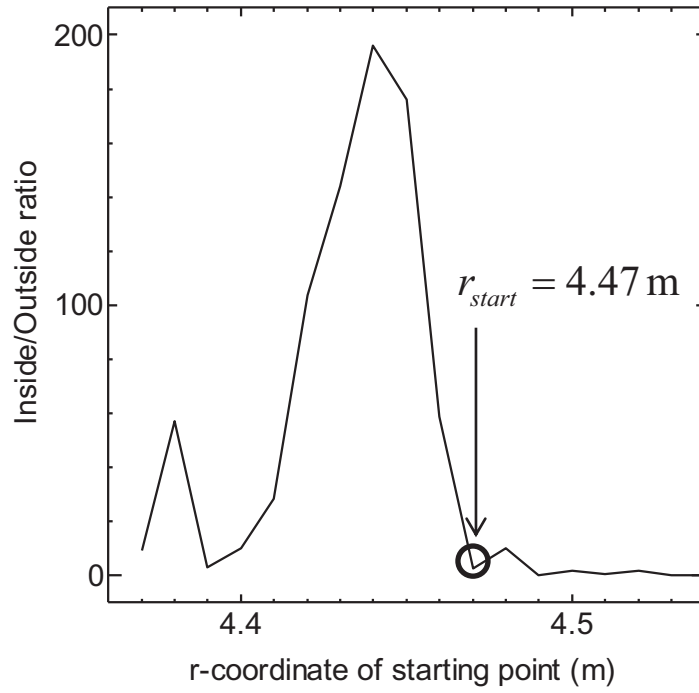


図5 内側と外側のばらつきの比

擬似磁気面関数の値が $\psi = r_{start} = 4.47 \text{ m}$ となる等高線を図3より抽出する．抽出した擬似磁気面は，LCMSの正解とよく一致している（図6）．

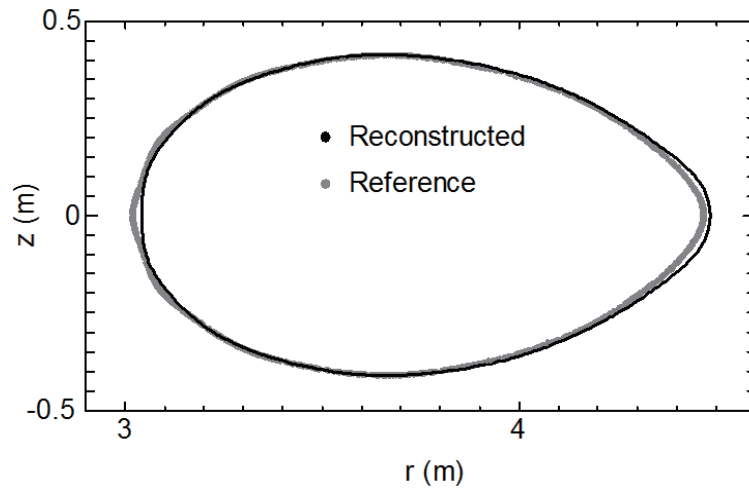


図6 再構成されたLCMSと正解のLCMS

4. 結論

逆解析磁場におけるポアンカレ・プロットは，RBF 展開によって滑らかな等高線に変換された．内側と外側のばらつきの比を導入することにより，等高線図分布から擬似磁気面を抽出した．擬似磁気面は，LCMS の正解とよく一致した．

References

- [1] M. Itagaki et al.: *Plasma Phys. Control. Fusion* **53** (2011) 105007.
- [2] G. Okubo et al.: *Proc. PLASMA2011, Kanazawa, 2011*, 23P067-P
- [3] Y. Suzuki et al.: *Nucl. Fusion* **46** (2006) L19.

実二次体の類数の非可除性について

伊東 杏希子* (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

概要

総実代数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の岩澤不変量は, すべての素数 p について $\lambda_p = \mu_p = 0$ となることが予想されている (Greenberg 予想). Greenberg 予想へのアプローチの一つとして代数体の類数の非可除性を考える問題がある. この問題に関連して, 本稿では, 与えられた奇素数 $p > 3$ に対して類数が p で割れない実二次体のある無限族の存在について得られた結果を報告する.

1 Introduction.

整数論での重要なキーワードの一つに「イデアル類群」がある. イデアル類群は代数体ごとに決まる有限群で, 考える対象を数からイデアルに移した時の情報の広がりを表すものである. イデアル類群は代数体の構造を知る上で重要な情報を持つため, 多くの研究がなされている. 「岩澤不変量 λ_p, μ_p, ν_p 」(ただし, p は素数) は代数体の $\mathbb{Z}_p$ -拡大でのイデアル類群の振る舞いに大きく関与する不変量である. 特に λ_p はイデアル類群の構造に関わる不変量であるため, 重要な研究対象とされている.

定理 1. (岩澤, [Iwa59]). p を素数, k を有限次代数体, $k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset K$ を k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大, A_n を k_n のイデアル類群の Sylow p 部分群とする. 十分大きな n に対し, A_n の位数は非負整数 $\lambda_p(K/k), \mu_p(K/k)$ と整数 $\nu_p(K/k)$ を用いて

$$|A_n| = p^{\mu_p(K/k)p^n + \lambda_p(K/k)n + \nu_p(K/k)}$$

と書ける.

この整数 $\lambda_p(K/k), \mu_p(K/k), \nu_p(K/k)$ を岩澤不変量という. 総実代数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の岩澤不変量について, 次が予想されている.

*日本学術振興会特別研究員 DC2

予想 1. (Greenberg 予想, [Gr76]). 総実代数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の岩澤不変量は, すべての素数 p について $\lambda_p = \mu_p = 0$ となるだろう.

Greenberg 予想については多くの研究がなされているが, 任意の素数でこの予想が成り立つ総実代数体は $\mathbb{Q}$ 以外には知られていない. そこで, 素数 p を固定して考える.

問題 1. p を素数とする.

$$\#\{k : \text{有限次代数体} \mid \lambda_p(k_\infty^c/k) = 0\} = \infty ?$$

ただし, k_∞^c は k の円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大体を表す.

岩澤 λ 不変量が 0 となるための十分条件として, 次の結果が知られている.

定理 2. (岩澤, [Iwa56]). p を素数, k を有限次代数体, K/k を k の任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大体とする. この時, p が k で不分解でかつ, k の類数 (イデアル類群の位数のこと) が p で割れなければ, $\lambda_p(K/k) = \mu_p(K/k) = \nu_p(K/k) = 0$ となる.

定理 2 により, 問題 1 は

$$\#\{k : \text{有限次代数体} \mid p \nmid h(k), p \text{ が } k \text{ で不分解}\} = \infty ?$$

という問題に帰着できる ($h(k)$ は k の類数を表す). 本稿では, 実二次体に対しこの問題を考える.

問題 2. p を素数とする.

$$\#\left\{ 0 < D : \text{実二次体の基本判別式} \mid p \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{D})), \left(\frac{D}{p}\right) = 0, -1 \right\} = \infty ?$$

実二次体に関しては, 素数 p が分解する場合にも岩澤 λ 不変量が 0 となるための十分条件が知られている.

定理 3. (福田-小松, [FK86]). p を奇素数, D を実二次体の基本判別式とする. p が $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ で分解し, かつ $p \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ と $|R_p(D)|_p = \frac{1}{p}$ を満たすならば, $\lambda_p(\mathbb{Q}(\sqrt{D})) = \mu_p(\mathbb{Q}(\sqrt{D})) = \nu_p(\mathbb{Q}(\sqrt{D})) = 0$ となる.

ここで, $R_p(d)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の p 進単数基準とし, $|\cdot|_p$ で $|p|_p = 1/p$ で正規化された乗法的 p 進付値を表すものとする.

注意 1. 実二次体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大は円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大のみであるため, $\lambda_p(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ で実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の岩澤 λ 不変量を表すものとする.

注意 2. [FK86] での主結果はより一般的な形となっている.

定理 3 に対して次の問題が提起できる.

問題 3. p を奇素数とする.

$$\#\left\{ D : \text{実二次体の基本判別式} \mid p \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{D})), \left(\frac{D}{p}\right) = 1, |R_p(D)|_p = \frac{1}{p} \right\} = \infty ?$$

2 Main Result.

問題 2, 3 に対して次が示されている.

定理 4. (Byeon, [By01]). $p > 3$ を奇素数とし, $\varepsilon = 1$ または -1 とする. 実二次体の基本判別式 $D_0 > 0$ で次の (i) ~ (iii) を満たすものが存在すると仮定する.

$$(i) \left(\frac{D_0}{p}\right) = \varepsilon.$$

$$(ii) h(D_0) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

$$(iii) |R_p(D_0)|_p = \frac{1}{p}.$$

この時, 十分大きな実数 X に対して次が成り立つ ;

$$\#\left\{ 0 < D < X : \text{基本判別式} \mid \left(\frac{D}{p}\right) = \varepsilon, h(D) \not\equiv 0 \pmod{p}, |R_p(D)|_p = \frac{1}{p} \right\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X}.$$

定理 4 の精密化を考えることにより次が示せた.

主結果 1. $p > 3$ を奇素数とし, S_+, S_- を互いに disjoint な奇素数の有限集合とする (ただし, $p \notin S_+ \cup S_-$). $(A, B) \in \{(1, 8), (5, 8), (8, 16)\}$ とする (固定). 実二次体の基本判別式 $D_0 (\neq 8)$ で次の (i) ~ (v) を満たすものが存在すると仮定する.

$$(i) D_0 \equiv A \pmod{B}.$$

$$(ii) \left(\frac{D_0}{p}\right) = \varepsilon.$$

$$(iii) q \in S_+, S_- \text{ に応じて } \left(\frac{D_0}{q}\right) = 1, -1 \text{ となる.}$$

$$(iv) h(D_0) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

$$(v) |R_p(D_0)|_p = \frac{1}{p}.$$

この時, 十分大きな実数 X に対して次が成り立つ ;

$$\# \left\{ 0 < D < X : \begin{array}{l} \text{基本判別式} \left\{ \begin{array}{l} (I) D \equiv A \pmod{B}, (II) \left(\frac{D}{p}\right) = \varepsilon, \\ (III) q \in S_+, S_- \text{ に応じて } \left(\frac{D}{q}\right) = 1, -1 \text{ となる,} \\ (IV) h(D) \not\equiv 0 \pmod{p}, (V) |R_p(D)|_p = \frac{1}{p} \end{array} \right. \end{array} \right\} \\ \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X}.$$

条件 (I), (III) を加えたところが定理 4 の精密化になっている. 主結果 1 では, 扱う実二次体の基本判別式に有限個の奇素数の分解条件を課している. これは, 虚二次体の類数の非可除性に関する木村氏の結果 [Ki03] の実二次体版に対応している. また, 素数の分解条件は合同条件の形に書き直せるため, 扱う実二次体の基本判別式に合同条件を課した場合の考察と見ることもできる.

参考文献

- [By01] D.Byeon, Indivisibility of class numbers and Iwasawa λ -invariants of real quadratic fields, Compositio Math. **126**(2001), no. 3, 249-256.
- [FK86] T.Fukuda and K.Komatsu, On the λ -invariants of Z_p -extensions of real quadratic fields, J. Number Theory **23**(1986), 238-242.
- [Gr76] R.Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, Amer. J. Math. **98**(1976), no. 1, 263-284.
- [Iwa56] K.Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20**(1956), 257-258.
- [Iwa59] K. Iwasawa, On Γ -extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc., **65**(1959), 183-226.
- [Ki03] I.Kimura, A note on the existence of certain infinite families of imaginary quadratic fields, Acta Arith. **110**(2003), no. 1, 37-43; Corrigendum, Acta Arith. **114**(2004), no. 4, 397.

ひねりコーシー条件面法を用いた非軸対称核融合プラズマの境界形状逆解析

Use of twisted Cauchy-condition surface to reconstruct the boundary shape
of a non-axisymmetric nuclear fusion plasma

北海道大学大学院工学院，核融合科学研究所*

大久保岳，赤澤眞之，松本裕，板垣正文，關良輔*，鈴木康浩*，渡邊清政*

1. はじめに

核融合炉実現のためには，高温のプラズマを安定に長時間閉じ込める必要がある．そのためには，MHD 平衡配位の監視が運転管理上および種々の実験において重要である．

この MHD 平衡配位は3つのパラメータ（圧力分布，電流分布，境界形状）を適切に与えることで同定が可能となる．しかし，大型ヘリカル装置にみられるような非軸対称プラズマでは，実験的に“境界形状”を同定する有効な手段が確立されていない．発表者らは，2次元解析が可能なトカマク型装置においてプラズマ境界形状計算に用いられてきた Cauchy 条件面（CCS）法^{[1][2]}を非軸対称プラズマに対応するように3次元に拡張した．しかし，この3-D CCS法は2-D CCS法に比べ，未知数の数が極めて多く，十分な解析精度が得られなかった．そこで，本研究では，CCSの形状に注目し，更なる解析精度の向上を図った．

2. 3次元 Cauchy 条件面法^[3]

Cauchy 条件面(CCS)法はプラズマ外部に配置した磁気センサー信号の情報のみから間接的にプラズマ境界形状を逆推定する手法である．

CCSを図1のように3次元空間のプラズマ領域内に収まるように円環状に設置し，境界要素の数に比例したノード点を設ける．この各ノード点に対して Dirichlet 条件と Neumann 条件を定める．これらの条件は共に未知（Cauchy 条件）とし，プラズマ外部の多数の磁気センサー信号と CCS 上の節点に対する境界積分方程式を立て，これらを連立させてセンサー信号を再現するように解く．その際，CCS と無限遠方境界の間を真空磁場と仮定して解く．なお，3-D CCS法では Dirichlet 条件と Neumann 条件をそれぞれベクトル・ポテンシャル A ，およびその法線方向微分値 $\partial A / \partial n$ とする．

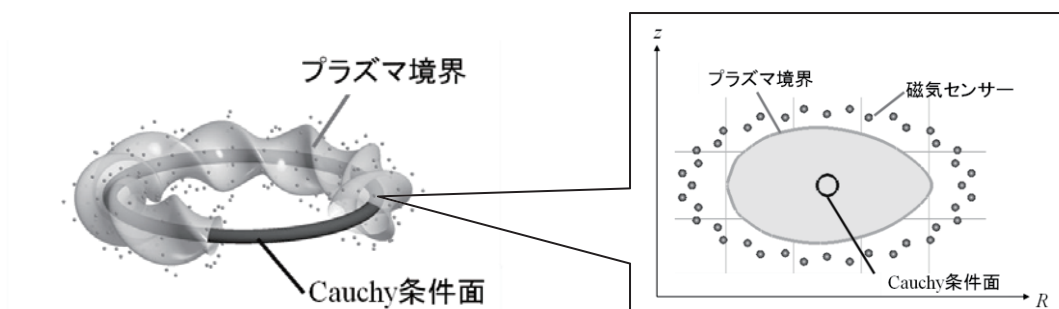


図1 CCSの配置図

境界積分方程式の組を離散化して得られる行列方程式を

$$\mathbf{D}\mathbf{p}=\mathbf{g} \quad (1)$$

の形式に変形して解く．ここで，解ベクトル $\mathbf{p}$ は CCS 上のベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ およびその法線方向微分値 $\partial\mathbf{A}/\partial n$ とする．この行列方程式を解く際，打切り特異値分解(TSVD)法が使える．この方法では，行列 $\mathbf{D}$ を $\mathbf{D}=\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^T$ のように分解する．ここに， $\mathbf{U}$ と $\mathbf{V}^T$ は直交行列であり， T は行列の転置を意味する． $\mathbf{A}$ は，正の特異値と零要素を含む対角行列である． $\mathbf{A}$ から k 番目以降の微小な特異値を割愛したものを $\mathbf{A}_k$ とかくとき，式(1)の解は $\mathbf{p}=\mathbf{V}\mathbf{A}_k\mathbf{U}^T\mathbf{g}$ で与えられる．いったん，CCS 上の $\mathbf{A}$, $\partial\mathbf{A}/\partial n$ が全て既知となれば，任意の点における磁場は

$$\begin{aligned} B_j - W_j^{(B)} = & \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left(L_x^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_x}{\partial n} - A_x \left(L_x^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left(L_y^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_y}{\partial n} - A_y \left(L_y^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left(L_z^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_z}{\partial n} - A_z \left(L_z^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (j=r, \phi, z) \quad (2)$$

にしたがって計算できる．

3. ひねり CCS

CCS の断面寸法は大きいほど CCS 表面と磁気センサーとの距離が短くなるので，センサー信号の情報を正確に受け取ることができる．しかし，CCS 法では最外殻磁気面(LCMS)の内側，特に CCS 近傍で解が乱れる傾向にあり，この乱れが LCMS の外側まで波及すると解析精度に悪い影響を与える．そのため，より小さい断面寸法の CCS を設置しなければならない．このような理由から，以前採用していた“円形断面 CCS”では，半径 0.075m と非常に小さな CCS を設置するしかなかった．

そこで，本研究では図 2 に示すような CCS の断面が楕円形状で真空容器断面形状のトロイダル方向の変化に追従させた“ひねり CCS”を考案した．

断面形状および CCS の座標 $(\mathbf{r}, z)$ はそれぞれ

$$(r-r_0)^2/a^2 + (z-z_0)^2/b^2 = 1 \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} r-r_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 5\varphi & \sin 5\varphi \\ -\sin 5\varphi & \cos 5\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(\theta+5\varphi) \\ b \sin(\theta+5\varphi) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

($0 \leq \theta \leq 180^\circ$, $0 \leq \varphi \leq 36^\circ$)

で表される．

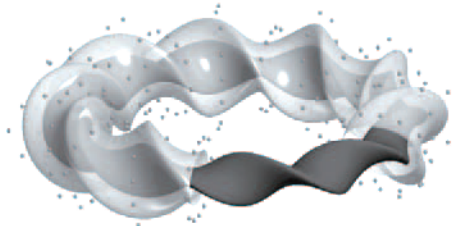


図 2 ひねり CCS

4. 解析条件

解析対象を核融合科学研究所の大型ヘリカル装置(LHD)における平均ベータ $\langle\beta\rangle=2.7\%$ のプラズマとした．基準解および磁気センサー信号の値は 3 次元磁気流体平衡コード HINT2^[4]を用いて計算した．磁気センサー信号として 126 本の磁束ループセンサーおよび 440 個の磁場センサーを設けた．円形断面 CCS の断面寸法は半径 $a=0.075\text{m}$ とし，ひねり CCS では，式(3)における a および b をそれぞれ 0.150m , 0.375m とした．境界要素の数はトロイダル方向に 8 分割，ポロイダル方向に 6 分割とし，それぞれの要素に 9 個の節点を配置した．

5. 解析結果

図 3 は横長断面における磁場の r 方向成分の絶対誤差分布を示している．(a)は円形断面 CCS，(b)はひねり CCS を設置して得られた結果である．円形断面 CCS の場合，解の乱れが最外殻磁気面(LCMS)の外側まで波及していることがわかる．一方，ひねり CCS の場合は解の乱れがおおよそ LCMS 内に留まっていることがわかる．表 1 は解析対象領域内の絶対誤差 ε の傾向をまとめたものである．ひねり CCS を設置した場合，いずれの項目においても解析精度の向上が確認できた．

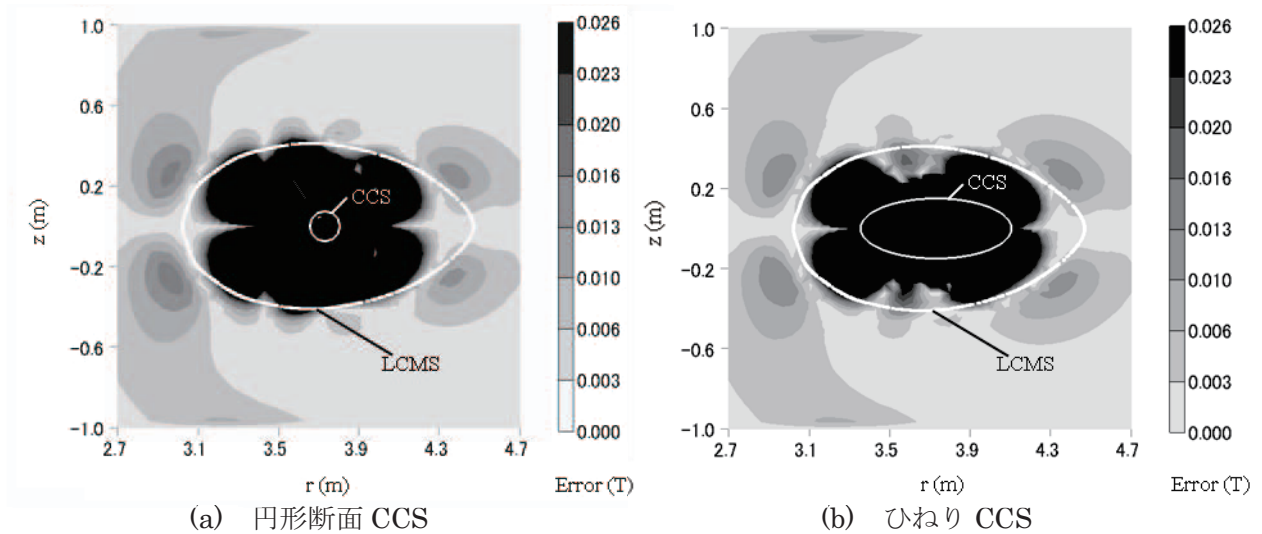


図 3 Br の絶対誤差分布

表 I 解析対象領域内における Br の絶対誤差の傾向

	Axisymmetric CCS	Twisted CCS
$\varepsilon < 0.01(\text{T})$	74.4%	81.7%
$\varepsilon < 0.005(\text{T})$	45.9%	50.3%
$\varepsilon < 0.001(\text{T})$	9.8%	12.1%
Max. Error	0.034(T)	0.025(T)
Ave. Error	0.007(T)	0.006(T)

解析で得られた 3 次元磁場分布に基づき磁力線追跡を行った．図 4 は横長断面におけるポアンカレ・プロットを示している．図 4(a),(b)はそれぞれ円形断面 CCS，ひねり CCS を設置した場合を示す．いずれの図においても，破線の閉曲線は真空磁場($\langle\beta\rangle=0\%$)における LCMS である．また，実線の閉曲線は ($\langle\beta\rangle=2.7\%$)における基準解による LCMS である． β 値が大きくなると LCMS が外側にずれることがわかる．一方，白抜きのプロット点は逆解析で得られた磁場($\langle\beta\rangle=2.7\%$)に基づく結果であり，追跡開始点は基準解の場合と同じである．図 4(a),(b)のいずれにおいても，ポアンカレ・プロットの分布に広がりが見られるが，($\langle\beta\rangle=2.7\%$)の基準解に沿うように分布していることがわかる．ひねり CCS を設置した場合のポアンカレ・プロットの分布は円形断面 CCS を設置した場合に比べて狭くなり，精度が大幅に改善したことが確認できる．

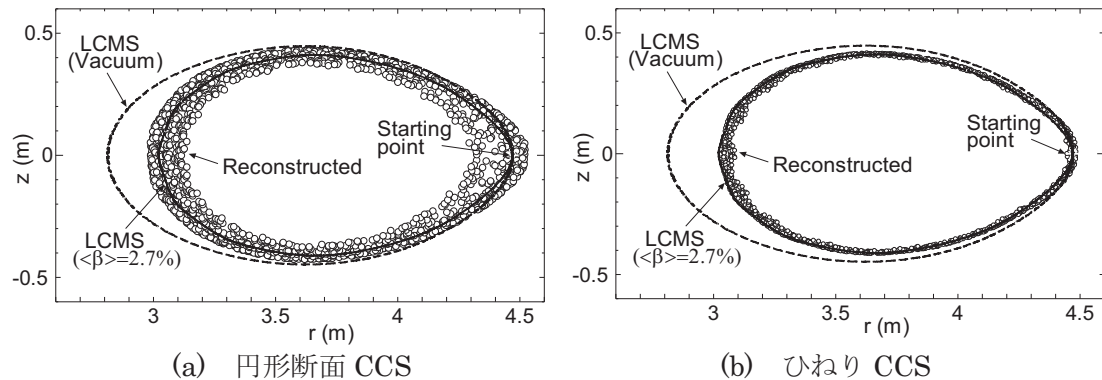


図 4 磁力線追跡による LCMS の再現

6. まとめ

ひねり CCS を用いた場合，円形断面 CCS を用いた場合に比べて 3 次元磁場分布の解析精度が向上した．これにより磁力線追跡で得られた LCMS の再現度が大幅に向上した．今後は，未知数の数に従って磁気センサーの設置数を低減した場合，解析精度が保たれるかどうかを検証していく．さらに，センサー信号にノイズが含まれる場合の解の安定性についても検討していく．

参考文献

- [1] Kurihara, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- [2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.
- [3] M. Itagaki et al.: *Plasma Phys. Control. Fusion* **53** (2011) 105007.
- [4] Y. Suzuki et al.: *Nucl. Fusion* **46** (2006) L19.

E_6, E_8 型部分因子環の平面代数と 3次元多様体の状態和不変量の組み合わせ的構成について

京都大学数理解析研究所 D2
岡崎 建太

ABSTRACT. このテクニカルレポートでは、第1節で部分因子環を理論的背景に持つ平面代数と状態和不変量についての概説をした後、第2節で E_6 型部分因子環の平面代数について具体的に考察し、主結果を述べる。第3節では E_6 型 $6j$ 記号の値を列挙する。

1. 導入

1.1. **平面代数.** 平面代数 (planar algebra) とは 1999 年に Jones [4] によって提示された概念で、おおまかに言えば、ラベル付けられた基点付きの円板を含む影付きタングル (平面タングルと呼ばれる。FIGURE 1 参照。) たちによって構成されるフィルター付き代数のことである。Jones は指数有限で II_1 型の部分因子環と、「よい条件」(有限次元, 球面的, 非退化, 半単純) を満たす平面代数の間に対応関係があることを示した。これにより部分因子環の議論が、平面代数の言葉だけで組み合わせ的に再構成できる可能性が生まれたのである。与えられた部分因子環に対応する平面代数を、部分因子環の平面代数 (subfactor planar algebra) という。

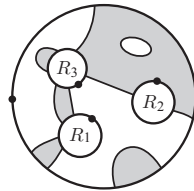


FIGURE 1. 平面タングル

続いて提唱されたのが、次の **Kuperberg 問題** である。

部分因子環の平面代数について、生成元と関係式を具体的に与え、それが実際に元の平面代数と一致していること、さらに上述の「よい条件」を満たしていることを平面代数の議論だけで証明せよ。

例えば A_n 型部分因子環の平面代数は Temperley-Lieb 代数であり、対応する平面代数はラベルがついていない平面タングルたちによって構成されることがよく知られている [1, 2]。また、Morrison-Peters-Snyder [5] は D_{2n} 型部分因子環の平面代数について、Kuperberg の問題に完全な回答を与えた。また、Bigelow [6] は E_6, E_8 型部分因子環の平面代数について、その生成元と関係式を与え、有限次元性と球面性を平面代数の議論だけで示した。しかしそれがもとの部分因子環と同型であること、及びに非退化性, 半単純性の証明には『 E_6, E_8 型部分因子環は存在する』という事実 (作用素環論の分野で証明されたもの [3]) を用いており、完全に組み合わせ的ではなかった。

1.2. **状態和不変量.** 一方部分因子環 $N \subset M$ が指数有限かつ II_1 型の時、ここから導かれる $6j$ -記号という量を用い、三角形分割された 3 次元多様体の各“状態”の“重み”を足し上げるにより、三角形分割のとり方に寄らない 3 次元多様体の不変量を得ることができる。これを **状態和不変量** という。しかしこの不変量を構成する際の $6j$ -記号の構成の仕方は抽象的であり、実際に具体的計算が行えるケースは限られている。

2. 主結果

今回報告する主結果は次の 2 つである。

- (1) Kupenberg 問題の E_6, E_8 型に対する完全な解答.
- (2) E_6, E_8 型状態和不変量の組み合わせ的再構成.

以下これらについて順に説明していく。ただし、簡単のため E_6 型に話を限ることにする (E_8 型についてもほぼ同じ議論が可能である)。

2.1. (1) **について.** まず平面代数で、生成元がラベル付けられた 6 本足の円盤  , 関係式が以下のようなものであるものを考える。Bigelow はこの平面代数が E_6 型部分因子環の平面代数を与えることを示した。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \bigcirc &= [2] \emptyset, & \text{(ii)} \quad \text{circle with dot and loop} &= 0, & \text{(iii)} \quad \text{circle with dot and line} &= e^{2\pi\sqrt{-1} \cdot \frac{2}{3}} \text{circle with dot and line}, \\ \text{(iv)} \quad \text{two circles with dots} &= \text{circle with dot} + [2]^2[3] \text{rectangle}, & \text{(v)} \quad \text{circle with dot inside a box} &= 0. \end{aligned}$$

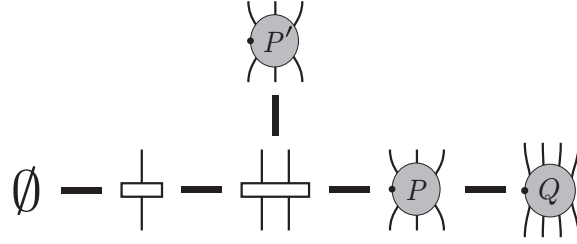
ここで一番外側の円盤は略記してあり (基点は全て左上にあるものと約束する), 長方形の箱は Jones-Wenzl 射影をあらわし, $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$, $q = e^{\pi\sqrt{-1}/12}$ とする。

次にこの平面代数の特別な元 , ,  を以下で定める。

$$\begin{aligned} \text{P} &= \frac{1}{[2][4]} ([2]^2 \text{rectangle} - \text{circle with dot}), & \text{P}' &= \frac{1}{[2][4]} ([3] \text{rectangle} + \text{circle with dot}), \\ \text{Q} &= \text{rectangle} - \frac{1}{[2][4]} \text{two circles with dots}. \end{aligned}$$

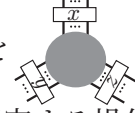
主結果 1. E_6 型部分因子環の平面代数の主要グラフは FIGURE 2. で与えられる。

ここで主要グラフは単純射影 (のある同値類) を点集合にもち、その間の関係式によって辺の集合が決定される。主要グラフは半単純部分因子環 (とその平面代数) の構造を記述する非常に重要なものである。正確な定義については [5, §4.1] を参照されたい。これを用いることで, [5, §4.2] の議論と同様にしてこの平面代数の非退化性も示すことができる。

FIGURE 2. E_6 型平面代数の主要グラフ

2.2. (2) について. $\mathcal{M}^{(0)} = \{\emptyset, f^{(2)}, Q\}$ とおく. ただし $f^{(2)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$ と表記した. さらに

$$(2.1) \quad \begin{array}{lll} f^{(0)} \text{ --- } f^{(0)} = \emptyset, & f^{(2)} \text{ --- } f^{(2)} = \text{---}, & Q \text{ --- } Q = \text{---}, \\ f^{(2)} \text{ --- } f^{(2)} = \text{---}, & f^{(2)} \text{ --- } f^{(2)} = \text{---}, & f^{(2)} \text{ --- } Q = \text{---}. \end{array}$$

と表す. これは $\mathcal{M}^{(0)}$ の元の 3 つ組 (x, y, z) について, $H(x, y, z)$ を  の形で生成される複素ベクトル空間とするときに, 各 $H(x, y, z)$ の基底を固定する操作に対応している. 例えば

$$H\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = \text{---} \oplus \text{---}$$

である. (回転対称を除いて) 式 (2.1) に出てこない 3 つ組 (x, y, z) に対しては, $H(x, y, z) = 0$ である.

さて, 向き付け可能な 3 次元多様体 M と三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し, 状態和を以下のように定義していこう. $\mathcal{T}$ の各 2 単体に対しそれに属する 1 単体 (3 つある) の 1 つを選ぶ選び方 m をマーキングと呼ぼう. $\mathcal{T}$ の 2 単体全体から集合 $\{\cdot, \circ\}$ への写像 φ と, $\mathcal{T}$ の 1 単体全体から $\mathcal{M}^{(0)}$ への写像 λ の組 (φ, λ) を $\mathcal{T}$ の色付けとよぶ. このとき, 状態和 $Z(M, \mathcal{T}, \Phi, m) \in \mathbb{C}$ を次で定める.

$$Z(M, \mathcal{T}, \Phi, m) = w^{-v} \sum_{(\varphi, \lambda)} \prod_E \text{tr}(\lambda_E) \prod_T W(T, \varphi, \lambda, \Phi, m),$$

ここで $w = 2 + [3]^2$, $\text{tr}(\emptyset) = \text{tr}(f^{(2)}) = 1$, $\text{tr}(Q) = [3]$, v は $\mathcal{T}$ の 0 単体の数であり, (φ, λ) は $\mathcal{T}$ の色付け全体を, E は $\mathcal{T}$ の 1 単体全体を, そして T は $\mathcal{T}$ の 3 単体全体を走る. さらに, “重み” $W(T, \varphi, \lambda, \Phi, m)$ を次で定めた.

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ a \end{array} \begin{array}{c} c \\ \text{---} \\ A \end{array} \begin{array}{c} d \\ \text{---} \\ B \end{array} \begin{array}{c} f \\ \text{---} \\ b \end{array}\right) = \begin{cases} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right|, & T \text{ の向きが } \Phi \text{ と一致しているとき} \\ \text{上式の複素共役}, & \text{その他} \end{cases}.$$

ただし, $(x, y, z) = (a, b, c), (a, e, f), (e, c, d), (b, d, f)$ のいずれかが $H(x, y, z) = 0$ となるときは $W(T, \varphi, \lambda, \Phi, m) = 0$ とし, 白丸につく $*$ 記号はマーキングに従ってつけるものとする. ここで $6j$ 記号 $|\cdot|$ は次のように定めた. (右辺分子の $*$ 記号は左辺の $*$ 記号と同じにとる.)

$$|\text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c}| = \frac{|\text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c}|}{\sqrt{|\text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c}| + |\text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c}| + |\text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c}| + |\text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c}|}}.$$

主結果 2. $Z^{E_6}(M, \mathcal{T}, m)$ の値は三角形分割 $\mathcal{T}$ やマーキング m のとり方に依らない. ゆえに $Z^{E_6}(M) = Z^{E_6}(M, \mathcal{T}, m)$ は M の位相不変量である.

3. 補遺: E_6 型 $6j$ 記号の表

以下に前節で述べた E_6 型 $6j$ 記号の値を記す. ただし, 表記の簡単のため $f^{(0)}, f^{(2)}, Q$ を各々点線, 実線, 太線で表している. E_8 型については現在計算中である.

$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = 1,$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{2^{1/4}[2]^{1/2}},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = 1,$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$
$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = 1,$
$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{3}[2]^2},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = -\frac{1}{\sqrt{6}[2]},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{6}[2]^2},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = -\frac{1}{\sqrt{6}[2]},$
$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = -\frac{1}{\sqrt{3}[2]},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = \frac{1}{\sqrt{6}[2]},$	$ \text{triangle with vertices A, B, C and edges a, b, c} = -\frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	

REFERENCES

- [1] L. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, *Topology*, **26** (1987), 395–407.
- [2] L. Kauffman, *An invariant of regular isotopy*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **318** (1990), 417–471.
- [3] Masaki Izumi, *Application of fusion rules to classification of subfactors*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **27** (1991), 953–994.
- [4] V. Jones, *Planar algebras, I* (1999), [arxiv.org:math/9909027v1](https://arxiv.org/abs/math/9909027v1) [math.QA].
- [5] *Skein theory for the D_{2n} planar algebras*, [arXiv:math/0808.0764](https://arxiv.org/abs/math/0808.0764) DOI:10.1016/j.jpaa.2009.04.010
- [6] S. Bigelow, *Skein theory for the ADE planar algebras* (2009), [arXiv:math/0903.0144](https://arxiv.org/abs/math/0903.0144)

大域結合振動子系における遷移現象

Transient phenomena in globally coupled oscillators

奈良女院、お茶女[^]A、さががけ[^]B、北大電子研[^]C、兵庫県立大[^]D、奈良女理[^]E

甲谷里奈、郡宏[^]A[^]B、佐藤譲[^]C、島伸一郎[^]D、戸田幹人[^]E

パーキンソン病のような神経系の疾患の治療法の研究の一つに、脳に信号を送り、手足の震えを止めるというものがある。震えている状態は、もともとの脳の信号が完全に同期し、集団化してしまっている異常な状態であり、そこに雑音の信号を加えることによって集団を崩壊させるのである。この雑音を送り続けると、相互作用により同期し、固まってしまうのを崩し、再び集団化することが無くなる。他の同期現象の例として、蛍の光の周期運動があげられる。蛍は集団で光るタイミングが揃っている。これは蛍同士が同調し光るためである。しかしその場にいるすべての蛍が同じタイミングではない。時間とともにだんだんといくつかの集団に分かれていくことが知られている。本研究では、多数の振動子が相互作用する大自由度系において、その集団運動が示す挙動を解析する。

1. 位相モデル

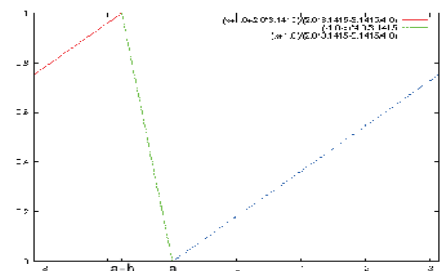
$$\frac{d}{dt}\psi_i(t) = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\psi_i - \psi_j) + \epsilon_t \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

振動子の相互作用の様子を見るために、上式の位相モデルを用いる。

Ψ :各振動子の位相、 ω :周期、 K :相互作用の強さ、 N :振動子数、 Γ :結合関数、 ϵ_t :雑音結合関数

この結合関数は、今回下図の区分線形の式を用いる。

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi-b}(x-a+2\pi) & (-\pi < x \leq a-b) \\ -\frac{1}{b}(x-a) & (a-b < x < a) \\ \frac{1}{2\pi-b}(x-a) & (a \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

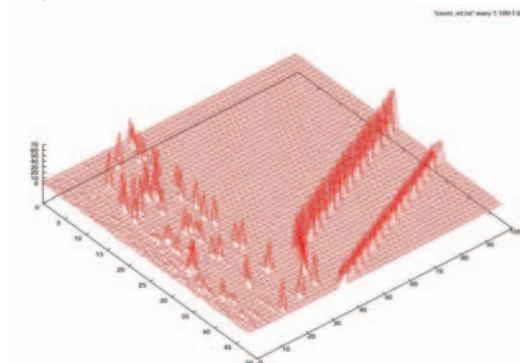


図(1)区分線形の結合関数

図(1)からわかるように、 a, b の値により傾きが正の部分と負の部分が現れる。そのため安定、不安定の領域は a, b に依存する。

2. a, b の変化による cluster 数の変化

時間発展させると、大域結合位相振動子系では、振動子はいくつかの集団(cluster)に分かれて運動する。ここで、 a, b を変化させると cluster の動きはどう変わるのか見ていく。

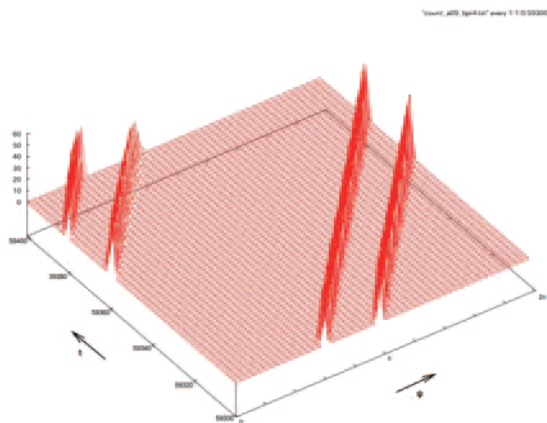


図(2)振動子が、相互作用により同期していく様子
($\omega=0.79, K=5.0, N=100, a=-1.0, b=4/\pi$)

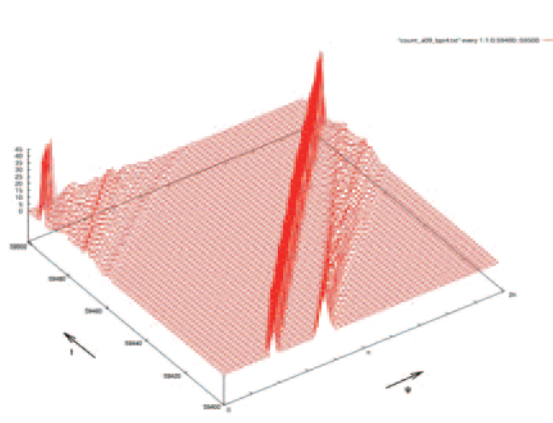
左図は $b=4/\pi$ で固定させ、 a を変化させた時の cluster 数の遷移を表したものである。初めバラバラだった振動子たちが時間が進むにつれ集団化しているのがわかる。振動子の位相の初期値は乱数で表されており、100種類の

乱数(メルセンヌツイスターによる)の組を用意してシミュレーションした。この図より、cluster の数は初期値に依存していることが分かる。また、 a の小さな変化で cluster 数が変わることが分かった。この図の計算は上式の雑音 $\varepsilon t=0$ で計算したものである。

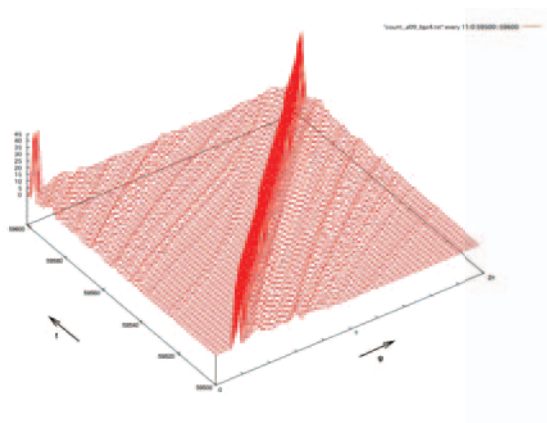
一方、雑音 εt を入れた場合の cluster 数の変化は下図のようになる。



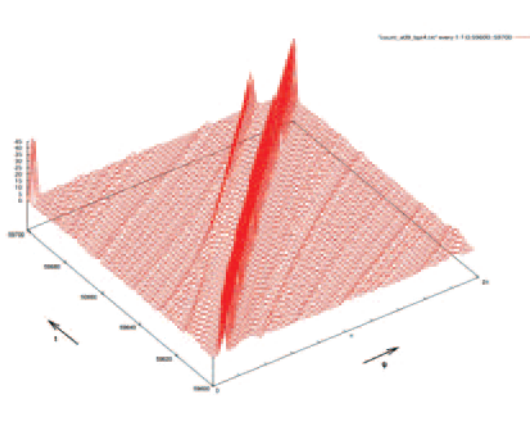
図(3.1)



図(3.2)



図(3.3)



図(3.4)

図(3.1-4) Cluster 化した振動子が崩壊し再び集団化していく時間変化の様子(雑音ありの場合)
($\omega=0.79, K=5.0, N=100, a=-2.1, b=0.5$)

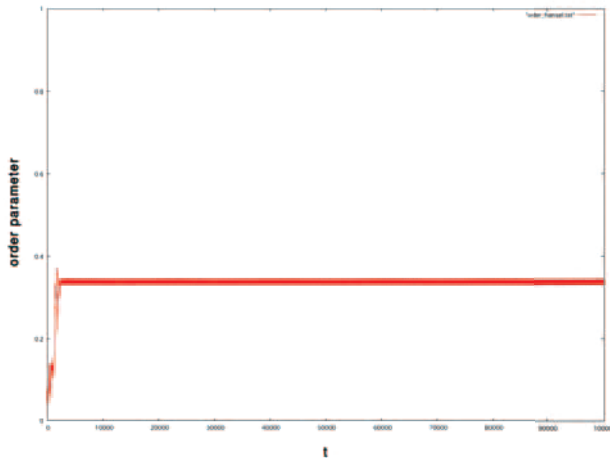
こちらは、ある初期値で a, b を変化させたもので、雑音なしの場合とは違い、slow switching と cluster が綺麗に分かれるものと二種類が見られる。また、変化は緩やかなのも雑音なしの場合との相違点である。小さな雑音 εt を入れると、一旦形成された集団が崩壊し再び集団化する現象が見られる。これは slow switching と呼ばれる現象である。

この slow switching は上図のような流れで cluster の崩壊と再生を繰り返す。Slow switching の動きを見ていると、複数の cluster のうちの 하나가崩壊し、隣の cluster に吸収されたり再び集まることで再生しているのが見られ、また同じ集団のものが崩壊するという繰り返しが見られる。

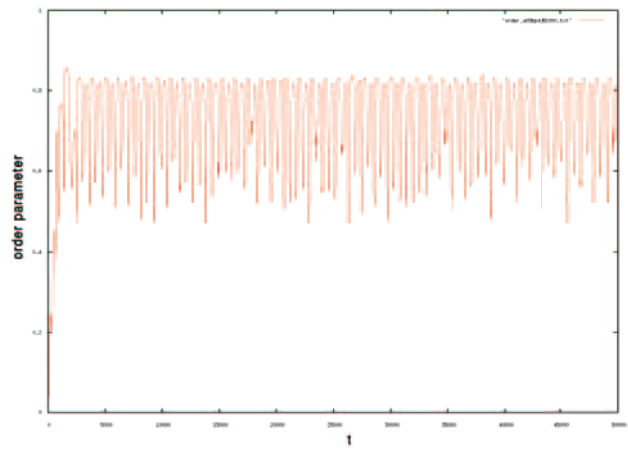
3. オーダーパラメーターを用いた解析

$$O(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\psi_j) \right|$$

cluster 化された振動子と switching を起こす振動振動子が、相互作用により同期していくものは動きが大きく異なる。完全に cluster されているとオーダーパラメーターは変動はみられない。しかし switching のように cluster の状態が安定でない場合、オーダーパラメーターは時間と共に変動していく。



図(4.1)cluster のオーダーパラメーター



図(4.2)switching のオーダーパラメーター

この様に、cluster 化する場合一度安定するとオーダーパラメーターは変化しないが、switching のオーダーパラメーターは複雑な動きが見られる。さらにこの switching は位相モデルに雑音を入れると必ず現れるものではなく、結合関数の値に依存して変化する。結合関数 $\Gamma(\Psi)$ の a, b をそれぞれ変えていくと、cluster 数が増減する。その変化の境目で switching は起こる。

4. 展望

これまでで区分線形モデルの結合振動子の動きがわかった。しかし、情報が多すぎて状態が分からない。この問題を解決するために、特異値分解等を用いて情報を可視化していきたい。さらにこれまでは区分線形モデルのみを解析していたので、結合関数を別のモデルに変えての解析もしていきたい。

参考文献

- [1] 郡宏. slow-switching 現象の構造の解明と神経細胞モデルによる実例. 2000
- [2] D.Hansel, G.Mato, C.Meunier. Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators. 1993
- [3] H.Kori, Y.Kuramoto. Slow switching in globally coupled oscillators: robustness and occurrence through delayed coupling. 2001

Two metrics on Teichmüller spaces

Erina Kinjo

Tokyo Institute of Technology, Department of Mathematics
Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan;
kinjo.e.aa@m.titech.ac.jp

Abstract. We consider the length spectrum metric on the Teichmüller spaces of topologically infinite Riemann surfaces.

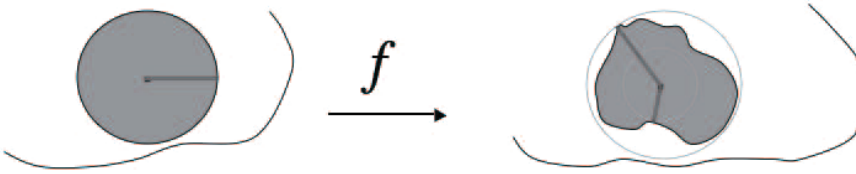
R : Riemann surface (except $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$, torus)

$T(R)$: Teichmüller space of $R := \{(S, g) \mid g : R \rightarrow S \text{ a quasiconformal map}\} / \sim \square$

A quasiconformal map f on $D \subset \mathbb{C}$ is a homeomorphism with some constant $H < \infty$ s.t.

for any $z \in D$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{|z-w|=r} |f(z) - f(w)|}{\inf_{|z-w|=r} |f(z) - f(w)|} \leq H.$$



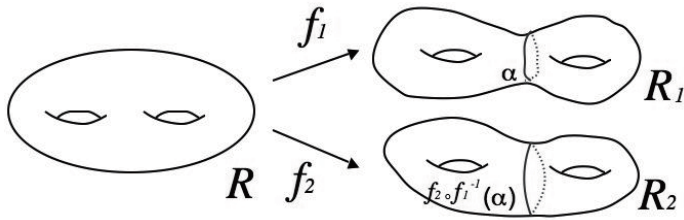
$H \geq 1$.

f is a conformal map $\Leftrightarrow H = 1$.

$ \begin{array}{ccc} & f_1 & \\ & \nearrow & \\ R & & R_1 \\ & \downarrow \exists \text{ conformal } \sim g_1 \circ f_1^{-1} & \\ & \searrow g_1 & \\ & S_1 & \end{array} $	$ \begin{array}{c} (R_1, f_1) \\ \wr \text{ equivalent} \\ (S_1, g_1) \end{array} $
---	---

We denote the equivalence class of (R, f) by $[R, f]$.

★ Two metrics on $T(R)$



Put $p_1 := [R_1, f_1], p_2 := [R_2, f_2]$.

• Teichmüller metric d_T

$$d_T(p_1, p_2) = \log \left\{ \inf_{f \sim f_2 \circ f_1^{-1}} K(f) \right\}$$

$K(f) \doteq H$. f is a conformal map. $\Leftrightarrow K(f) = 1$

d_T measures how far $f_2 \circ f_1^{-1}$ is from a conformal map.

• length spectrum metric d_L

$$d_L(p_1, p_2) = \log \sup_{\alpha} \left\{ \frac{\ell_{R_2}(f_2 \circ f_1^{-1}(\alpha))}{\ell_{R_1}(\alpha)}, \frac{\ell_{R_1}(\alpha)}{\ell_{R_2}(f_2 \circ f_1^{-1}(\alpha))} \right\}$$

$\alpha \in \Sigma_{R_1} := \{\text{a simple closed curve in } R_1\}$

$\ell_{R_1}(\alpha)$: hyperbolic length of α

d_L measures how $f_2 \circ f_1^{-1}$ changes length of curves in R_1 .

Subject:

When does d_L define the same topology as that of d_T on the Teichmüller space?

d_L defines the same topology as that of d_T on $T(R)$.

$\Leftrightarrow$ For sequence $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \subset T(R)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_L(p_n, p_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_T(p_n, p_0) = 0$

We write $d_T \sim d_L$ on $T(R)$ if both metrics define the same topology.

A sufficient condition (H. Shiga)

R is a Riemann surface with a pants decomposition $R = \cup_{k=1}^{\infty} P_k$ satisfying following conditions:

(1) Each connected component of ∂P_k is either a puncture or a simple closed geodesic of R . ($k = 1, 2, \dots$)

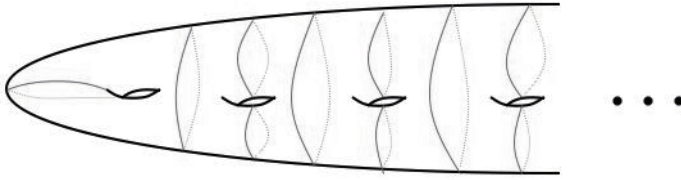
(2) $\exists M > 0$ s.t. if α is a boundary curve of some P_k then

$$0 < M^{-1} < \ell_R(\alpha) < M.$$

$\Rightarrow d_T \sim d_L$ on $T(R)$.

Examples ($d_T \sim d_L$ on $T(R)$.)

- all Riemann surfaces of finite topological type
- some Riemann surfaces of infinite topological type as the following:



· **A necessary condition**

$d_T \sim d_L$ on $T(R)$.

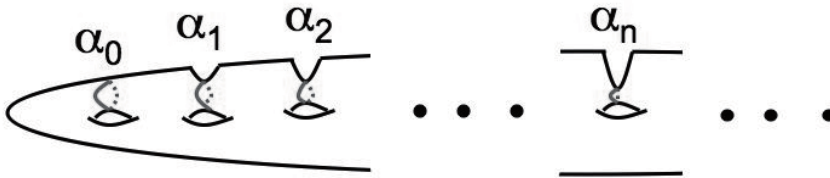
$\Rightarrow$ There is a constant $M > 0$ such that for any $\alpha \in \Sigma_R$, there is $\beta \in \Sigma_R$ such that $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ and

$$\frac{\ell_R(\beta)}{\sharp(\alpha \cap \beta) \ell_R(\alpha)} < M$$

holds.

Example ($d_T \approx d_L$ on $T(R)$.)

- a Riemann surface R with $\{\alpha_n\} \subset \Sigma_R$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_R(\alpha_n) = 0$



References

- [1] E. Kinjo, *On Teichmüller metric and the length spectrums of topologically infinite Riemann surfaces*; Kodai Math. J. **34** (2011), 179-190.
- [2] H. Shiga, *On a distance by the length spectrum on Teichmüller space*; Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A, I Math. **28** (2003), 315-326.
- [3] T. Sorvali, *The boundary mapping induced by an isomorphism of covering groups*; Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A, I Math. **526** (1972), 1-31.

対称群及び交代群における方程式の解の個数

香田竜彦（室蘭工業大学院数理システム工学専攻）

概要 p を素数, u を非負整数として, n 次対称群 S_n 及び n 次交代群 A_n における単位元の p^u 乗根の個数を割り切る p のべき数について考察し, いくつかの結果を得た. 特に, n 次交代群における involution の個数を割り切る p のべき数が, n 及び n に依らないある 2 進整数により定まるという D. Kim と J. S. Kim の予想を肯定的に解決した. また, n 次対称群 S_n 及び n 次交代群 A_n における単位元の 4 乗根の個数を割り切る 2 のべき数を n の関数として表した.

1. 既知の結果

記号 p : 素数, u : 非負整数, $\mathbb{Q}_p$: p 進体, $\mathbb{Z}_p$: p 進整数環,

$\text{ord}_p(a) = i \stackrel{\text{def}}{\iff} a = a_i p^i + a_{i+1} p^{i+1} + \cdots, a_i \neq 0, \quad |a|_p \stackrel{\text{def}}{=} p^{-\text{ord}_p(a)}, a \in \mathbb{Q}_p,$

$$\mathbb{Z}_p\langle X \rangle := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}_p[[X]] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p = 0 \right\}.$$

$a_n(p^u)$ を n 次対称群 S_n における単位元の p^u 乗根の個数とすると, $a_n(p^u)$ の母関数は

$$E_{C_{p^u}}(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(p^u)}{n!} X^n = \exp \left(X + \frac{1}{p} X^p + \frac{1}{p^2} X^{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^u} X^{p^u} \right)$$

となることを置換の型の考察により示される. ここで $a_0(p^u) = 1$ である. 次に, $t_n(p^u)$ を n 次交代群 A_n における単位元の p^u 乗根の個数とし, 数列 $a_n^-(2^u)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, を

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^-(2^u)}{n!} X^n := \exp \left(X - \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2^2} X^{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^u} X^{2^u} \right)$$

により定義すると, $t_n(2^u)$ は次のように表される.

$$t_n(2^u) = \frac{1}{2} (a_n(2^u) + a_n^-(2^u)).$$

定義 1.1 形式的べき級数 $E_p(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^- X^n$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n := \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k} \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^- X^n := \exp \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k} \right)$$

で定める. $E_p(X)$ は Artin-Hasse exponential と呼ばれる.

次のことが知られている.

命題 1.2 ([2]) $c_n, c_n^- \in \mathbb{Z}_p, n = 0, 1, 2, \dots$.

この事実を用いて、次の定理が得られる.

定理 1.3 r を p^{u+1} 未満の非負整数, y を非負整数とする.

(1) $p \geq 3$ とする. このとき

$$f(X) \in c_r - c_{p^{u+1}+r} p^{u+1} X + p^{2u+2} X \mathbb{Z}_p \langle X \rangle$$

を満たす $f(X)$ が存在し、次の式が成り立つ.

$$f(y) = \frac{a_{p^{u+1}y+r}(p^u)}{(p^{u+1}y+r)!} (-p^{u+1})^y y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

(2) $p = 2, u \geq 2$ とする. このとき

$$\begin{aligned} f(X) &\in c_r(1 - 2^u X(X-1) + 2^{2u-1} X(X-1)(X-2)(X-3)) \\ &\quad - c_{2^{u+1}+r} 2^{u+1} X + 2^{2u+2-\delta_{u2}} X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle, \\ f^-(X) &\in c_r^-(1 + 2^u X(X-1) + 2^{2u-1} X(X-1)(X-2)(X-3)) \\ &\quad + c_{2^{u+1}+r}^- 2^{u+1} X + 2^{2u+2-\delta_{u2}} X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle \end{aligned}$$

を満たす $f(X), f^-(X)$ が存在し、次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{a_{2^{u+1}y+r}(2^u)}{(2^{u+1}y+r)!} (-2^{u+1})^y y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \\ f^-(y) &= \frac{a_{2^{u+1}y+r}^-(2^u)}{(2^{u+1}y+r)!} (-1)^r 2^{(u+1)y} y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(3) $p = 2, u = 1$ とする. このとき

$$\begin{aligned} f(X) &\in c_r(1 - 2X - 4X(X-1)(X-2)(X-3)) + 4c_{4+r} X + 8X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle, \\ f^-(X) &\in c_r^-(1 - 2X + 4X(X-1) - 4X(X-1)(X-2)(X-3)) \\ &\quad - 4c_{4+r}^- X + 8X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle \end{aligned}$$

を満たす $f(X), f^-(X)$ が存在し、次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{a_{4y+r}(2)}{(4y+r)!} 4^y y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \\ f^-(y) &= \frac{a_{4y+r}^-(2)}{(4y+r)!} (-1)^r (-4)^y y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

系 1.4 ([5]) r を p^{u+1} 未満の非負整数, y を非負整数とする. このとき

$$\text{ord}_p(a_{p^{u+1}y+r}(p^u)) \geq \left\{ \frac{p^{u+1}-1}{p-1} - (u+1) \right\} y + \text{ord}_p(r!) = \sum_{j=1}^u \left[\frac{p^{u+1}y+r}{p^j} \right] - uy$$

である. また $\text{ord}_p(c_r) < u + 1$ ならば

$$\begin{aligned}\text{ord}_p(a_{p^{u+1}y+r}(p^u)) &= \left\{ \frac{p^{u+1} - 1}{p - 1} - (u + 1) \right\} y + \text{ord}_p(a_r(p^u)) \\ &= \sum_{j=0}^u \left[\frac{p^{u+1}y + r}{p^j} \right] - uy + \text{ord}_p(c_r)\end{aligned}$$

となる.

注意 1.5 $a_p(p) = 1 + (p - 1)! \equiv 0 \pmod{p}$, すなわち $\text{ord}_p(a_p(p)) \geq 1$ であることは Wilson の定理として知られている.

系 1.6 $E_{C_{p^u}}(X)$ の収束域は $|x|_p < p^\alpha$, $\alpha = -\left(\frac{1}{p-1} + u + 1\right) \frac{1}{p^{u+1}}$ である.

注意 1.7 系 1.6 は $|x|_p < p^\alpha$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n(p^u)}{n!} x^n \right|_p = 0$ であることを意味する.

例 1.8 ([3, 4, 5, 6]) $a_0(2) = a_1(2) = 1$, $a_2(2) = 2$, $a_3(2) = 4$ より, 次が得られる.

$$\text{ord}_2(a_n(2)) = \left[\frac{n+2}{4} \right] + \left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n}{4} \right].$$

p -adic Weierstrass Preparation Theorem より次の定理が得られる.

定理 1.9 ([1]) r を p^{u+1} 未満の非負整数, y を非負整数とする.

(1) $\text{ord}_p(c_r) = u + 1$ かつ $\text{ord}_p(c_{p^{u+1}+r}) > 0$ ならば

$$\text{ord}_p(a_{p^{u+1}y+r}(p^u)) = \left\{ \frac{p^{u+1} - 1}{p - 1} - (u + 1) \right\} y + \text{ord}_p(r!) + u + 1$$

が成り立つ.

(2) $\text{ord}_p(c_r) = u + 1$ かつ $\text{ord}_p(c_{p^{u+1}+r}) = 0$ ならば

$$\text{ord}_p(a_{p^{u+1}y+r}(p^u)) = \left\{ \frac{p^{u+1} - 1}{p - 1} - (u + 1) \right\} y + \text{ord}_p(r!) + u + 1 + \text{ord}_p(y + b)$$

を満たす p 進整数 b が存在する.

例 1.10 ([4]) $\text{ord}_3(a_{9y+6}(3)) = 2y + 4 + \text{ord}_3(y + b)$, $b = 2 + 3^2 + 2 \cdot 3^7 + 3^8 \pmod{3^{10}}$, $y = 0, 1, 2, \dots$

2. 結果

定理 2.1 $p = 2$, $u = 1$ とする. y を任意の非負整数とし, y が奇数のとき $\chi_o(y) = 1$, y が偶数のとき $\chi_o(y) = 0$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $\text{ord}_2(t_{4y}(2)) = y + \chi_o(y)$, $\text{ord}_2(t_{4y+2}(2)) = \text{ord}_2(t_{4y+3}(2)) = y$
- (2) $\text{ord}_2(t_{4y+1}(2)) = y + \chi_o(y) \cdot (\text{ord}_2(y+b) + 1)$ を満たす 2 進整数 $b = 1 + 2 + 2^3 + 2^8 + \dots$ が存在する.

注意 2.2 (1) は [6] で証明され, (2) は [6] で予想されていた.

$\text{ord}_2(a_n(4))$, $\text{ord}_2(t_n(4))$ に関して次の定理が得られた.

定理 2.3 $p = 2$, $u = 2$ とする. y を任意の非負整数とし, y が奇数のとき $\varphi_o(y) = 2$, $\chi_e(y) = 0$, y が偶数のとき $\varphi_o(y) = 0$, $\chi_e(y) = 1$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(a_{8y}(4)) &= 4y, & \text{ord}_2(a_{8y+1}(4)) &= 4y, & \text{ord}_2(a_{8y+2}(4)) &= 4y + 1, \\ \text{ord}_2(a_{8y+3}(4)) &= 4y + 2, & \text{ord}_2(a_{8y+4}(4)) &= 4y + 4, & \text{ord}_2(a_{8y+5}(4)) &= 4y + 3, \\ \text{ord}_2(a_{8y+6}(4)) &= 4y + 8, & \text{ord}_2(a_{8y+7}(4)) &= 4y + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(t_{8y}(4)) &= 4y + \varphi_o(y), & \text{ord}_2(t_{8y+1}(4)) &= 4y + \varphi_o(y), \\ \text{ord}_2(t_{8y+2}(4)) &= 4y + 1, & \text{ord}_2(t_{8y+3}(4)) &= 4y, \\ \text{ord}_2(t_{8y+4}(4)) &= 4y + 2, & \text{ord}_2(t_{8y+5}(4)) &= 4y + 3 + \chi_e(y), \\ \text{ord}_2(t_{8y+6}(4)) &= 4y + 3, & \text{ord}_2(t_{8y+7}(4)) &= 4y + 4 + \chi_e(y). \end{aligned}$$

参考文献

- [1] K. Conrad, p -adic properties of truncated Artin-Hasse coefficients, 1998, preprint
- [2] J. Dieudonné, On the Artin-Hasse exponential series, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 210–214.
- [3] A. Dress and T. Yoshida, On p -divisibility of the Frobenius numbers of symmetric groups, 1991, preprint.
- [4] H. Ochiai, A p -adic property of the Taylor series of $\exp(x + x^p/p)$, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 71–85.
- [5] H. Katsurada, Y. Takegahara, and T. Yoshida, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group, Comm. Algebra **28** (2000), 2271–2290.
- [6] D. Kim and J. S. Kim, A combinatorial approach to the power of 2 in the number of involutions, J. Combin. Theory Ser. A **117** (2010), 1082–1094.

FINITE TYPE INVARIANTS FOR CYCLIC EQUIVALENCE CLASSES OF NANOPHRASES

YUKA KOTORII

1. INTRODUCTION

Turaev developed the theory of words based on the analogy with curves on the plane, knots in the 3-sphere, virtual knot diagrams, etc. in [4, 5, 6, 7]. A word will be a sequence of symbols, called letters, belonging to a given set, called alphabet.

Vassiliev developed in [8] the theory of finite type invariants of knots, which is conjectured to classify knots. In [1], Fujiwara provided a simple idea to define finite type invariants for cyclic equivalence classes of signed words by introducing a new type of crossing, called singular crossing, which plays intermediate role between an actual and virtual crossing. Here the signed word is a nanoword over $\alpha = \{+, -\}$. We extend Fujiwara's finite type invariants, to those for cyclic equivalence classes of nanophrases over a general α not necessarily to be $\{+, -\}$. The purpose of this paper is to construct the universal ones in Theorem 4.1, by following the approach in [3]. In addition, we identify the universal finite type invariant of degree 1 essentially with the linking matrix.

2. NANOWORDS AND NANOPHRASES

2.1. Words and phrases. An *alphabet* is a finite set and its element is called a *letter*. A *word* of length m is a finite sequence of m letters. The unique word of length 0 is called the *trivial word* and is written by $\emptyset$. An n -component *phrase* is a sequence of n words, each of which we call a *component*. We write a phrase as a sequence of words, separated by '|'. The unique n -components phrase for which every component is the trivial word is called the *trivial n -component phrase* and is denoted by $\emptyset_n$. In this paper, we will regard words as 1-component phrases.

2.2. Nanowords and nanophrases. Let α be a finite set. An α -alphabet is an alphabet $\mathcal{A}$ together with an associated map from $\mathcal{A}$ to α . This map is called a *projection*. The image of any $A \in \mathcal{A}$ in α will be denoted by $|A|$. An *isomorphism* f of an α -alphabet $\mathcal{A}_1$ to $\mathcal{A}_2$ is a bijection such that $|f(A)|$ is equal to $|A|$ for any letter A in $\mathcal{A}_1$. A *Gauss word* on an alphabet $\mathcal{A}$ is a word on $\mathcal{A}$ such that every letter in $\mathcal{A}$ appears exactly twice. Similarly, a *Gauss phrase* on $\mathcal{A}$ is a phrase which satisfies the same condition. By definition, a 1-component Gauss phrase is a Gauss word.

Let p be a Gauss word or a Gauss phrase. The *rank* of p is the number of distinct letters appearing in p . We denote it by $\text{rank}(p)$. Note that the rank of a Gauss word must be a half of its length. For example, the rank of $ABCBAC$ is 3 and the rank of $A|B|\emptyset|BA$ is 2.

An n -component *nanophrase* over α is a pair $(\mathcal{A}, p)$ where $\mathcal{A}$ is an α -alphabet and p is an n -component Gauss phrase on $\mathcal{A}$. When n is equal to 1, we call it a *nanoword*.

Let $(\mathcal{A}_1, p_1)$ and $(\mathcal{A}_2, p_2)$ be nanophrases over α . An *isomorphism* f of a nanophrase $(\mathcal{A}_1, p_1)$ to $(\mathcal{A}_2, p_2)$ is an isomorphism f of α -alphabets such that f

applied letterwisely to the i th component of p_1 gives the i th component of p_2 for all i . If such an isomorphism exists, we say that $(\mathcal{A}_1, p_1)$ and $(\mathcal{A}_2, p_2)$ are isomorphic.

We can define the rank of a nanoword and a nanophrase similar to that of a Gauss word and a Gauss phrase.

2.3. Shift move on nanowords and nanophrases. In [5], Turaev defined a *shift move* on nanophrases. Let ν be an involution on α . Suppose p is an n -component nanophrase over α . A ν -*shift move* on the i th component of p is a move which gives a new nanophrase p' as follows. If the i th component of p is empty or only a single letter, then p' is p . If not, we can write the form of the i th component of p by Ax . Then the i th component of p' is xA and other components of p' are the same as the corresponding components of p . Furthermore, if we write $|A|_p$ for $|A|$ in p and $|A|_{p'}$ for $|A|$ in p' , then $|A|_{p'}$ equals $\nu(|A|_p)$ when x contains the letter A and otherwise, $|A|_{p'}$ equals $|A|_p$.

3. DEFINITIONS OF FINITE TYPE INVARIANTS

In [1], Fujiwara defined finite type invariants for cyclic equivalence classes of signed words. We now extend the definition of finite type invariants for general α .

Let α be any finite set. Let $P(\alpha, n)$ denote the set of isomorphism classes of n -component nanophrases over α . Let ν be any involution on α . We define the *cyclic equivalence relation* over n -component nanophrases as equivalence relations generated by isomorphisms and ν -shift moves. Let $P(\alpha, \nu, n)$ denote the set of cyclic equivalence classes of n -component nanophrases over α .

We define $\alpha^* = \{a^* \mid a \in \alpha\}$ and let $\mathcal{A}$ be an $\alpha \cup \alpha^*$ -alphabet. Then the letter whose projection is contained in α^* is called a *singular letter* and is denoted with asterisk, say by A^* , for easy distinction. Let $P_m(\alpha, n)$ denote the set of isomorphism classes of n -component nanophrases over $\alpha \cup \alpha^*$ with m singular letters. We call the phrase with singular letters a *singular phrase*. By definition, $P_0(\alpha, n)$ is the set of non-singular n -component nanophrases and so $P_0(\alpha, n) = P(\alpha, n)$.

Given an involution ν over α , we extend ν to $\alpha \cup \alpha^*$ as follows. For any $a \in \alpha$, we define

$$\nu(a^*) = \nu(a)^*.$$

Then let $P_m(\alpha, \nu, n)$ denote the set of cyclic equivalence classes of n -component nanophrases over $\alpha \cup \alpha^*$ with m singular letters, where m is at least 0. By definition, $P(\alpha, \nu, n) = P_0(\alpha, \nu, n)$. Put $\mathcal{P}(\alpha, \nu, n) = \bigcup_{m \geq 0} P_m(\alpha, \nu, n)$.

An invariant u for cyclic equivalent classes of nanophrases is a map from the set of n -component nanophrases in an abelian group G , which takes equal values on nanophrases related by isomorphisms and ν -shift moves. In other words, it is a map $u : P(\alpha, \nu, n) \rightarrow G$.

Given an invariant $u : P(\alpha, \nu, n) \rightarrow G$, we define its extension $\hat{u} : \mathcal{P}(\alpha, \nu, n) \rightarrow G$ by the following rule

$$\begin{cases} \hat{u}(p) = u(p) & \text{if } p \in P_0(\alpha, \nu, n) \\ \hat{u}(xA^*yA^*z) = \hat{u}(xAyAz) - \hat{u}(xyz) & \text{if } xA^*yA^*z \in P_m(\alpha, \nu, n) \ (m \geq 1), \end{cases}$$

where A is a non-singular letter such that $|A|^*$ is equal to $|A^*|$ and x , y and z are arbitrary sequences of letters possibly including ‘|’ or ‘ $\emptyset$ ’. This map is well defined because the result does not depend on the order of the singular letters which we exclude. That is, the following two calculations have the same result.

Let p and q be n -component nanophrases. A nanophrase q is a *subphrase* of p , denoted by $q \triangleleft p$, if it is a nanophrase obtained from p by deleting pairs of letters. Here each letter does not change the value of the projection. We use this word even if we eliminate no-letters. If the rank of p is k , then p has exactly 2^k subphrases.

Example 3.1. Let $p = ABA|B$. Then the subphrases of p are $ABA|B$, $AA|\emptyset$, $B|B$ and $\emptyset|\emptyset$.

For any nanophrases p and q , we define $\delta(p, q)$ by

$$\delta(p, q) = \text{rank}(p) - \text{rank}(q).$$

A map $u : P(\alpha, \nu, n) \rightarrow G$ is a *finite type invariant* if there exists a non-negative integer m such that for any n -component nanophrases p with more than m singular letters, $\hat{u}(p)$ is zero. The minimal such m is called the *degree* of u .

The map $u : P(\alpha, \nu, n) \rightarrow G$ is a *universal finite type invariant* of degree m if for any finite type invariant v of degree less than or equal to m taking values in some abelian group H , there exists a homomorphism f from G to H such that

$$\begin{array}{ccc} P(\alpha, \nu, n) & \xrightarrow{u} & G \\ & \searrow v & \downarrow f \\ & & H \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array}$$

In particular, if p and q are two n -component nanophrases over α which can be distinguished by a finite type invariant of degree less than or equal to m and u is the universal invariant of degree m , then $u(p)$ is not equal to $u(q)$.

In [3], Goussarov, Polyak and Viro constructed the universal finite type invariants of virtual knots and links. In [2], Gibson and Ito constructed the universal finite type invariants for homotopy classes of nanophrases. In a similar way, we construct the universal finite type invariants for cyclic equivalence classes of nanophrases in the next section.

4. UNIVERSAL FINITE TYPE INVARIANTS

Let $\mathbb{Z}P(\alpha, n)$ be the additive abelian group freely generated by isomorphism classes of n -component nanophrases. Let $G(\alpha, \nu, n)$ be the group obtained from $\mathbb{Z}P(\alpha, n)$ by taking quotient with the following relations,

$$\begin{cases} w|AxAy|t - w|xB yB|t = 0 \\ w|Az|t - w|zA|t = 0, \end{cases}$$

where $|B| = \nu(|A|)$, x, y and z do not contain ‘|’ and z does not contain A .

For each non-negative integer m , we define a map $O_m : P(\alpha, n) \rightarrow P(\alpha, n)$ by

$$(1) \quad O_m(p) = \begin{cases} p & \text{if } \text{rank}(p) \leq m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We extend O_m linearly to all of $\mathbb{Z}P(\alpha, n)$.

We introduce the following relation on $G(\alpha, \nu, n)$,

$$p = 0$$

if p is an n -component nanophrase with $\text{rank}(p) > m$.

Let $G_m(\alpha, \nu, n)$ be the group obtained from $G(\alpha, \nu, n)$ by taking quotient with the above relation which depends on m .

Theorem 4.1. *There exists a map $\Gamma_{m,n} : P(\alpha, \nu, n) \rightarrow G_m(\alpha, \nu, n)$ which is the universal finite type invariant of degree m for cyclic equivalence classes of nanophrases.*

Also, we identify the universal finite type invariant of degree 1 essentially with the linking matrix.

REFERENCES

- [1] M. Fujiwara, *Finite type invariants of words and Arnold's invariants*, arXiv:math.GT/0808.3646. (2008).
- [2] A. Gibson and N. Ito, *Finite type invariants of nanowords and nanophrases*, arXiv:1007.1693. (2011).
- [3] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, *Topology* **39** (2000), no. 5, 1045–1068. MR 1763963 (2001i:57017)
- [4] V. Turaev, *Curves on surfaces, charts, and words*, *Geom. Dedicata* **116** (2005), 203–236. MR 2195447 (2007b:57031)
- [5] ———, *Knots and words*, *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 84098, 23. MR 2276346 (2007k:57017)
- [6] ———, *Lectures on topology of words*, *Jpn. J. Math.* **2** (2007), no. 1, 1–39. MR 2295606 (2008i:57024)
- [7] ———, *Topology of words*, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **95** (2007), no. 2, 360–412. MR 2352565 (2008i:57025)
- [8] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, *Theory of singularities and its applications*, *Adv. Soviet Math.*, vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 23–69. MR 1089670 (92a:57016)

対称群及び交代群による環積における 方程式の解の個数

室蘭工業大学大学院数理システム工学専攻 佐藤将樹

概要 位数が素数 p の巡回群の n 次対称群による環積において、位数 p^u の元の個数を調べた。特に $u = 1$ のとき、その個数を割り切る p べき数が $n - [n/p]$ であることを示した。この結果は $p = 2$ の場合に示された T.Yoshida の結果の一般化である。同様に、位数 2 の巡回群の n 次交代群による環積における involution の個数を調べて結果を得た。

1. 環積 $G \wr S_n, G \wr A_n$ における $x^m = \epsilon$ の解の個数に関する母関数

G を有限群, K を n 次対称群 S_n の部分群とする。群の直積

$$G^{(n)} := \underbrace{G \times \cdots \times G}_n$$

について,

$$\rho(\sigma)(g_1, \dots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \forall \sigma \in K, \quad \forall (g_1, \dots, g_n) \in G^{(n)}$$

で定義される K から $G^{(n)}$ の自己同型群 $\text{Aut } G^{(n)}$ への準同型 $\rho : K \rightarrow \text{Aut } G^{(n)}$ が存在する。よって, K による $G^{(n)}$ の上への作用

$$\sigma(g_1, \dots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n)})$$

が定義される。この作用に関する $G^{(n)}$ と K の半直積を G の K による環積といい, $G \wr K$ で表す。特に $|G \wr K| = |G|^n |K|$ である。定義から, $(g_1, \dots, g_n) \in G^{(n)}$ と $\sigma \in K$ に対して

$$\sigma(g_1, \dots, g_n) \sigma^{-1} = (g_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n)})$$

である。 G の単位元を e で, $G \wr S_n$ の単位元を ϵ で表す。 m を自然数とする。長さ ℓ の巡回置換 $\sigma \in S_n$ に対して $(g_1, \dots, g_n) \sigma \in G \wr S_n$ が $((g_1, \dots, g_n) \sigma)^m = \epsilon$ を満たすための必要十分条件は ℓ が m の約数であり, かつ

$$\begin{aligned} \epsilon &= (g_1, \dots, g_n) \cdot \sigma(g_1, \dots, g_n) \cdots \sigma^{m-1}(g_1, \dots, g_n) \\ &= ((g_1 g_{\sigma^{-1}(1)} \cdots g_{\sigma^{-\ell+1}(1)})^{m/\ell}, \dots, (g_n g_{\sigma^{-1}(n)} \cdots g_{\sigma^{-m+1}(n)})^{m/\ell}) \end{aligned}$$

が成り立つことである。 $\{d_0, \dots, d_r\}$ を m の約数の集合とし,

$$a(G, m/d_k) = \#\{g \in G \mid g^{m/d_k} = e\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r,$$

とおく。また $G \wr S_0 = G \wr A_0 = \{\epsilon\}$ とする。 $a(G \wr S_n, m)$ および $a(G \wr A_n, m)$ の指数型母関数について上記の事実と置換の型の考察より次の命題が成り立つ。

命題 1.1 ([Oka90, Chi96])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(G \wr S_n, m)}{|G|^n n!} X^n = \prod_{d|m} \exp \left(\frac{a(G, m/d)}{|G| d} x^d \right) = \exp \left(\sum_{d|m} \frac{a(G, m/d)}{|G| d} X^d \right).$$

命題 1.2 ([Chi96])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(G \wr A_n, m)}{|G|^n n!} X^n = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left(\sum_{d|m} \frac{a(G, m/d)}{|G| d} X^d \right) + \exp \left(\sum_{d|m} (-1)^{d-1} \frac{a(G, m/d)}{|G| d} X^d \right) \right\}.$$

p を素数, u を自然数とする. $b_n(p^u) = a(C_p \wr S_n, p^u)$, $q_n(2^u) = a(C_2 \wr A_n, 2^u)$, ただし C_p は位数 p の巡回群, とする. このとき, 命題 1.1 より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(p^u)}{n!} X^n = \exp \left(\sum_{k=0}^{u-1} p^{p^k-k} X^{p^k} + p^{p^u-u-1} X^{p^u} \right)$$

である. 数列 $b_n^-(p^u)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, を

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^-(2^u)}{n!} X^n = \exp \left(2X - \sum_{k=1}^{u-1} 2^{2^k-k} X^{2^k} - 2^{2^u-u-1} X^{2^u} \right)$$

で定めると, 命題 1.2 より次が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(2^u)}{n!} X^n = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(2^u)}{n!} X^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^-(2^u)}{n!} X^n \right\}.$$

2. Artin-Hasse exponential

$\mathbb{Q}_p$ を p 進体, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数の環とする. $\mathbb{Q}_p$ の元 a に対して, $a = a_i p^i + a_{i+1} p^{i+1} + \dots$, $a_i \neq 0$ である i を $\text{ord}_p(a)$ と表す. さらに, a の p 進絶対値を $|a_n|_p := p^{-\text{ord}_p(a)}$ で定義する. また Tate ring $\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$ を次の式で定義する.

$$\mathbb{Z}_p\langle X \rangle := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}_p[[X]] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p = 0 \right\}.$$

形式的べき級数 $E_p(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, $E_p^-(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^- X^n$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n := \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k} \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^- X^n := \exp \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k} \right)$$

により定義する. $E_p(X)$ は Artin-Hasse exponential と呼ばれ, 次の事が知られている.

命題 2.1 ([Die57]) $c_n, c_n^- \in \mathbb{Z}_p$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

3. 結果

命題 2.1 を用いて次の事が得られた.

定理 3.1 r を p^u 未満の非負整数 とする. このとき

$$f(X) \in p^r c_r \left(1 + (-1)^{p+1} \frac{p^{(u+1)(p-1)}}{(p-1)^p} X(X-1) \cdots (X-p+1) \right) - \frac{p^{u+1+r}}{p-1} c_{p^u+r} X + p^{2u+1+r} X \mathbb{Z}_p \langle X \rangle$$

を満たす $f(X)$ が存在して, 次を満たす.

$$f(y) = \frac{b_{p^u y+r}(p^u)}{(p^u y+r)!} \left(-\frac{p^{u+1}}{p^{p^u}(p-1)} \right)^y y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

定理 3.1 と p -adic Weierstrass Preparation Theorem を用いて次の系を得る.

系 3.2 r を p^u 未満の非負整数とし, y が非負整数とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\text{ord}_p(c_r) < u+1 \implies$

$$\text{ord}_p(b_{p^u y+r}(p^u)) = \sum_{j=0}^{u-1} \left[\frac{p^u y+r}{p^j} \right] - u \left[\frac{p^u y+r}{p^u} \right] + \text{ord}_p(c_r).$$

(2) $\text{ord}_p(c_r) = u+1$ かつ $\text{ord}_p(c_{p^u+r}) \geq 1 \implies$

$$\text{ord}_p(b_{p^u y+r}(p^u)) = \sum_{j=0}^{u-1} \left[\frac{p^u y+r}{p^j} \right] - u \left[\frac{p^u y+r}{p^u} \right] + u+1.$$

(3) $\text{ord}_p(c_r) = u+1$ かつ $\text{ord}_p(c_{p^u+r}) = 0 \implies$

$$\text{ord}_p(b_{p^u y+r}(p^u)) = \sum_{j=0}^{u-1} \left[\frac{p^u y+r}{p^j} \right] - u \left[\frac{p^u y+r}{p^u} \right] + u+1 + \text{ord}_p \left(\left[\frac{p^u y+r}{p^u} \right] + b \right)$$

を満たす p 進整数 b が存在する.

例 3.3 $u=1$ とする. $r=0, 1, \dots, p-1$ のとき, $c_r = \frac{1}{r!}$ であり, $\text{ord}_p(c_r) = 0$ となる. よって, 系 3.2(1) より

$$\text{ord}_p(b_n(p)) = n - \left[\frac{n}{p} \right]$$

である. 特に, $p=2$ のとき次が成り立つ.

$$\text{ord}_2(b_n(2)) = n - \left[\frac{n}{2} \right] = \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

系 3.2 より次の事が分かる.

定理 3.4 $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\text{ord}_p(b_n(p^u)) - \text{ord}_p(n!)}{n} = -\left(\frac{1}{p-1} + u + 1\right) \frac{1}{p^u} + 1$ であり,
 さらに $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(p^u)}{n!} X^n$ の収束域は $|x|_p < p^\alpha$ である.

注意 3.5 定理 3.4 で $u = 0$ とすれば, 主張は $\exp(X)$ の収束域が $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ であることに
 対応している. また, $u \rightarrow \infty$ とすれば, 主張は Artin-Hasse exponential の収束域が $|x|_p < 1$
 であることに対応している.

定理 3.6 r を p^u 未満の非負整数 とする. このとき

$$f^-(X) \in 2^r c_r^- (1 + 2^{u+1} X(X-1)) + 2^{u+1+r} c_{2^u+r}^- X + 2^{2u+1+r} X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle$$

を満たす $f^-(X)$ が存在して, 次を満たす.

$$f^-(y) = \frac{b_{2^u y+r}^-(2^u)}{(2^u y+r)!} (-1)^r \left(\frac{2^{u+1}}{2^{2^u}} \right)^y y!, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

定理 3.1, 3.6 より次の定理が成り立つ.

定理 3.7 r を p^u 未満の非負整数 とし, y を非負整数 とする. このとき 位数 2 の巡回群 C_2 の n
 次交代群 A_n による環積において, involution の個数を割り切る 2 のべき数は

$$\text{ord}_2(q_{2^u y+r}(2^u)) = (2^{u+1} - (u+2))y - 1 + \text{ord}_2(r!) + \text{ord}_2 \left(\frac{f(y)}{(-1)^y} + \frac{f^-(y)}{(-1)^r} \right)$$

となる. ただし, $f(X)$ と $f^-(X)$ はそれぞれ定理 3.1, 3.6 で述べられた形式的べき級数であ
 る. 特に $u = 1$ のとき次が成り立つ.

$$\text{ord}_2(q_{2y+r}(2)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2y+r+1}{2} \right\rfloor & y+r \text{ が偶数のとき,} \\ \left\lfloor \frac{2y+r+1}{2} \right\rfloor + 1 & y+r \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

参考文献

- [Chi96] N. Chigira, The solutions of $x^d = 1$ in finite groups, J. Algebra **180** (1996), 653–661.
- [Die57] J. Dieudonné, On the Artin-Hasse exponential series, Proc. Amer. Math. Soc. **8**
 (1957), 210–214.
- [Oka90] S. Okada, Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's
 lattices, J. Combin. Theory Ser. A **55** (1990), 14–32.

ある2自由度ハミルトン系双曲×双曲型固定点における、化学反応と標準形

Reaction Dynamics and Normal Form of a 2 DoF Hamiltonian System Associated with a Saddle-saddle Stability Type Fixed Point

永幡裕¹、河合信之輔^{1,2}、寺本央^{1,2}、李振風^{2,3,4}、小松崎民樹^{1,3,4}

¹ 北大生命科学院, ² 北大電子研, ³ 北大理学院, ⁴ 北大数学連携研究センター

概要

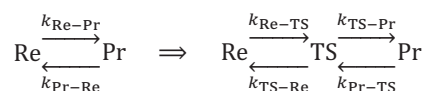
構造異性化など古典系で記述される反応の可否は、軌道の配位空間上の起源、行き先が反応物と生成物のどちらにあるかで定まる。この起源、行き先が反応物と生成物のどちらでもない軌道の集合はそれぞれ軌道の過去、未来を分かつ多様体となる。本研究では、双曲×楕円×楕円...型サドルで標準形を用いて抽出可能とされたこの多様体が、2自由度系の双曲×双曲型サドルでも存在し、任意に小さい摂動係数でも標準形を用いて抽出できない例と理由を示す。

1 はじめに

構造異性化など分子内自由度が主に寄与する化学反応において、反応速度定数を定量的に見積もる試みは、遷移状態理論に端を発する。以下では、(統計力学的)遷移状態理論の概要と、近年研究されるようになった力学的遷移状態理論について簡単に述べる。

1.1 遷移状態理論

Lindemann によって提案された反応機構によって化学反応の圧力依存性が定性的に示された。低圧極限では衝突による活性化過程が律速になり、高圧極限では励起された分子の異性化過程が律速となる。単分子反応と呼ばれるこの様な化学反応における反応速度定数 k を理論的かつ定量的に予測する為には遷移確率を各分子応じて見積もる必要があった。この問題を解決したのが遷移状態理論である¹。反応系(Re: reactant)と生成系(Pr: product)の間に遷移状態(TS: transition state)があると仮定しよう。このとき化学反応式は、次のように書き直せる。



化学反応式に遷移状態を仮定した遷移状態理論のもっとも重要な帰結の1つは、この化学反応式の初期条件・速度定数に対する仮定 ($[\text{TS}]_0 = 0, k_{\text{P-TS}} \cong 0, k_{\text{R-TS}} \ll k_{\text{TS-R}}$)²を満たす際に成立する関係式(下式左辺)によって反応速度定数を近似的に得られる点である。

$$k_{\text{Re-Pr}} \cong \frac{k_{\text{TS-Pr}}[\text{TS}](t)}{[\text{Re}](t)}$$

この式は、反応系から生成系に至る化学反応が、仮定される条件を満たす場合、遷移状態と反応系によって決まる事を示している。次の節で述べるように、この条件を満たす遷移状態は統計力学を用いて相空間において定式化された。このように、遷移状態理論の登場によって間接的に反応速度定数 $k_{\text{Re-Pr}}$ を計算する手法が示された。

1.2 統計力学的遷移状態理論³

前述した様に、分子間衝突が律速となる低圧極限とは異なり、高圧極限では衝突などで励起された分子の構造異性化や解離反応が律速となる。高圧極限(単分子反応)における化学反応を定量的に示したのが RRK 理論である。しかし、この理論で用いられている振動子の平均振動数が分子の基準振動数より $10^1 \sim 10^4$ 程度桁が異なる場合があった。Marcus はこの問題を遷移状態理論と組み合わせマイクロカノニカルな遷移状態理論を構築することで解消した(RRKM 理論)。以下ではマイクロカノニカルな遷移状態理論について紹介し、その問題について述べる。

統計力学的に遷移状態理論を導入するにあたり、次のような3つの仮定を前述の仮定に代えて導入した。それぞれ、不帰帰点(point of no return)の存在、準平衡仮説(quasi-equilibrium hypothesis)、1次元の反応座標(reaction coordinate)の存在である。不帰帰点とは、「遷移状態から生成物の方向へ進出した分子が2度と反応系に戻ってくることはない」点のことであり反応分断面(dividing surface)とも言われる。準平衡仮説とは、反応系と遷移状態の反応速度式、遷移状態から生成系への流束(flux)だけ考えた時の反応速度定数 $k_{\text{Re} \rightarrow \text{Pr}}$ が平衡状態で得られるそれと等価であるという仮定である。

1次元の反応座標の存在とは、反応を記述する自由度が独立した1つの自由度であるという仮定である。分断面上を交差する

¹この概念を最も初期に導入した Eyring の目的は、Arrhenius 式 $k = A \exp(-\Delta E/k_B T)$ の衝突因子 A を計算することであった。^[2]

² Eyring は彼の著作「絶対反応速度論」(吉岡書店)^[2]で $k_{\text{TS} \rightarrow \text{P}} \cong 0$ も仮定しているが結論は同じである。

³ 詳細は適当な書籍、例えば「大学院講義物理化学第2版」(東京化学同人)^[1]4章、7章、付録 E を参照

軌道が局所的に再交差 (local recrossing) すると、準平衡仮説をもとに $k_{p-TS} \cong 0$ として計算された反応速度定数 $k_{Re \rightarrow Pr}$ が、実際よりも過大に見積もられてしまう。反応分断面の存在と、反応座標の存在は関係しており、通常は反応座標の原点を分断面とする。反応座標が正の値をとる方向を反応方向とした時、反応分断面での軌道が反応方向と同じ向き (正值) を取る軌道の流束を計算することで、次のような反応速度定数 $k(E)$ が得られる。

$$k_{Re \rightarrow Pr}(E) \cong \frac{k_{TS \rightarrow Pr}[TS](E)}{[Re](E)} = \frac{\int \dots \int d\Omega \delta(H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - E) J\chi}{\int \dots \int_{Re} d\Omega \delta(H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - E)} = \frac{N_{TS}(E - E_{TS})}{hN_R(E)}$$

ここで E_{TS} は遷移状態でのポテンシャルエネルギー (サドル点エネルギー)、 Re はそれぞれ遷移状態、反応系での積分、 $J\chi$ は遷移状態から生成系に向かう流束、 N_X は状態 X における状態数、 h はプランク定数である。カノニカルな反応速度定数 $k_{Re \rightarrow Pr}(T)$ はこの反応速度定数 $k(E)$ を Boltzmann 分布 ($e^{-H/k_B T}/Z$) で平均をとる事によって得られる。通常 TS は反応座標 $q^\ddagger$ の原点 $q^\ddagger = 0$ に定義され、 $J\chi$ はその面を横断的に交差する流束として定義される。

しかし、3つの仮説はいずれも非自明であり、反応速度定数が得られる理由を解明するためには、反応分断面や反応座標に対応する相空間構造をみつける必要があった。こうした相空間構造を、ひとつの反応方向をもつサドル (ランク1サドル) について Birkhoff-Gustavson の標準形を用いて反応分断面に代わる概念を持ち込んだのが次の力学的遷移状態理論である。

1.3 力学的遷移状態理論

1.3.1 基準座標系

ハミルトン力学系における線形ベクトル場を考える。質量荷重座標 (mass-weighted coordinate) で書きなおしたハミルトニアンを固定点で適当な配位空間に線形変換し、多項式展開すると一般に次のように書くことが出来る。

$$H(p, q) = E_0 + H_0 + V_\epsilon(q) \\ H_0(p, q) = (p^2 - \chi q^2)/2, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$$

この線形ベクトル場にしたときのハミルトニアンの正準共役となる固有ベクトルは (p, q) を用いて次のように書ける

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1/\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \text{where } \sqrt{\chi} = \lambda$$

この線形ベクトル場は運動の積分 I が求まる (つまり、このベクトル場では $\dot{I} = 0$ となっている)。 I と正準共役な座標 θ と共に次のように定義する事ができる。

$$I = \xi\eta, \quad \theta = \ln|\lambda\eta/\xi|/2$$

1.3.2 標準形

ハミルトニアン $H(I, \theta)$ を Birkhoff-Gustavson の標準形に適当な変数変換をもちいて変換すると次のような式になる。

$$\tilde{H}(\hat{I}, \hat{\theta}) = \tilde{H}_0(\hat{I}) + \tilde{H}_\epsilon(\hat{I}, \hat{\theta}) = \tilde{H}_0(\hat{I}) + O(\epsilon^n)$$

ここで n は共鳴条件が成立する摂動次数である。共鳴次数とは、正準母関数 W を用いて、

$$\tilde{H}(\hat{I}, \hat{\theta}) = \tilde{H}(\hat{I}, \hat{\theta}) - \{\tilde{H}_0(\hat{I}), W(\hat{I}, \hat{\theta})\}$$

と変換できなくなる最小の次数を指す。 $O(\epsilon^n)$ を無視し、作用変数 I だけに依存したハミルトニアンについては、前述の線形ベクトル場で得られた微分方程式と同等の式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad \text{where } \bar{\lambda}(\hat{I}) := \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \hat{I}}, \quad \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \in \mathbb{R}$$

前述の $\xi(p, q), \eta(p, q)$ は $\hat{\xi} = \xi(\hat{p}, \hat{q}), \hat{\eta} = \eta(\hat{p}, \hat{q})$ と書きなおすだけで済み、同様の性質を局所的 ($O(\epsilon^n)$) にもつ。

この様な変数変換は例えば Lie 正準変換摂動理論をもちいて実現することが出来る。

1.3.3 Lie 正準変換摂動理論

Lie 母関数 W をハミルトニアンとした仮想的な時間 τ 発展を関数 $f(p, q)$ について考える。そのとき、ハミルトン方程式の形式的な一般解は

$$f(p(\tau), q(\tau)) = f(p, q; \tau) = T_W f(p, q; \tau = 0) := \exp(-\tau L_W) f(p, q; \tau = 0)$$

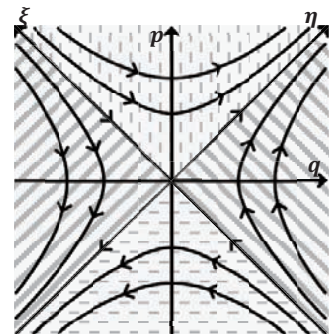


図 1 $\chi < 0$ での基準座標系の流れ
 $\eta > 0$ の軌道は $q > 0$ に、 $\eta < 0$ の軌道は $q < 0$ にそれぞれ向かっていることから、 $\eta = 0$ は軌道の配位空間における未来を決定づけている。同様に $\xi = 0$ は軌道の配位空間における過去を決定づけている。

と書ける。ここで、線形演算子 $L_W = \{W, \cdot\}$ を Lie 微分 T_W を Lie 正準変換演算子と呼ぶ。前出の標準形は次のような変換を用いることで実現できる。

$$H(I, \theta) = T_W^{-1} T_W H(I, \theta) = (T_W^{-1} H)(T_W I, T_W \theta) := \tilde{H}(\tilde{I}, \tilde{\theta})$$

1.3.4 相空間構造と反応の可否

1.3.2では、標準形を用いて変換したベクトル場が局所的には同じ軌道の流れをもつことを示した。本節では、その軌道の流れの化学反応における意義付けを行う。

力学的遷移状態理論は、ランク1サドル(双曲型($\chi > 0$)自由度が1で他が楕円型自由度($\chi < 0$))において標準形を用いて抽出した不変多様体 $\{(p, q) | \tilde{I}_1(p, q) = 0\}$ が反応の可否を決定づけている⁴という仮説に基づいて軌道を解釈している。前述した様に、この不変多様体は、局所的には基準座標系の $I_1 = 0$ とその幾何学的性質は変わらない⁵ことから、以下では基準座標系で求まる線形ベクトル場に基づいて反応の可否を論じる。

$\eta > 0$ (■と□の領域)の軌道は $q > 0$ に、 $\eta < 0$ (■と□の領域)の軌道は $q < 0$ にそれぞれ向かっていることから、 $\eta = 0$ は軌道の配位空間における未来を決定づけている。同様に $\xi = 0$ は軌道の配位空間における過去を決定づけている。従って、軌道の行き先 $\eta = 0$ と起源 $\xi = 0$ を定める多様体 ($\xi = 0$ または $\eta = 0$ または両方) をどう解析的に抽出するかという問題となる。

1.3.5 ランク2以上のサドルへの拡張

志田は^[3] Ar₇ グラスターのシミュレーションにおいて、各温度(運動エネルギー)における、各サドル周辺での滞在時間分布を調べた。その結果、溶解温度付近ではランク2サドル周辺に最も長く滞在していた。この研究によってランク2サドルが相転移において重要な役割を演じている可能性が指摘された。

ひとつの反応方向をもつサドル(ランク1サドル)における、力学的遷移状態理論はここ10年程で大きく発展した。近年、2つの反応方向をもつサドル(ランク2サドル、双曲型($\chi > 0$)自由度が2つ)への力学的遷移状態理論の拡張が G. Ezra と S. Wiggins による問題提起^[4]を皮切りに、なされるようになった。G. Haller et.al. はランク2サドルにおいて NHIM の定理が成立しないことを指摘し、pseudo-NHIM の定理を定式化^[6]、ランクNサドルでも成り立つことを示した^[7]。P. Collins et.al.^[5] はランク2サドル以上において不明瞭となる、サドルを超えた瞬間を定める反応分断面(dividing surface)を定式化した。これら一連のランク2サドルにおける研究は、いずれも共鳴の生じていない標準形に基づいており、ランク1サドルとのアナロジーにおいて、不変多様体の構造や果たす役割を論じるものであった。本研究では、2自由度のモデル系において、ランク2以上で生じ得る双曲型自由度間の共鳴条件下であっても、反応の過去と未来を分ける多様体を数値的に構築することができることを示す。また、それらと標準形作用によって求まる不変多様体がどのような関係にあるのかを明らかにする。

2 計算

ランク2サドル近傍における過去と未来を分ける多様体の存在を確認するため、次のようなモデルを構築した。

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} (p_j^2 - \lambda_j^2 q_j^2) + \alpha q_1^2 q_2^2 e^{2-q_1^2-q_2^2}$$

このモデルでは、非線形項(第2項)が $(|q_1|, |q_2|) = (1, 1)$ のとき最大値 α をとり、その周辺でのみ非線形項が有効である(図2 [0])。従って、漸近領域 $|q| = \infty$ で用意した初期条件のうちサドル点に向ってゆくものは、非線形項が有効な領域に達するまでは、サドル点の線形ベクトル場と同じ軌道の流れをとる。漸近領域では作用が運動局所的な運動の積分 $\dot{I}^{\text{ex}} = 0$ になっているので、 $\xi^{\text{ex}} = 0$ は軌道の起源を定めるといえる。この過去を分ける軌道群(多様体)をサドル近傍で時間発展し、その軌跡を観測した(図2)。また、同様の計算を異なる線形共鳴条件(λ_1 と λ_2 の比が有理数なら線形共鳴が生じ

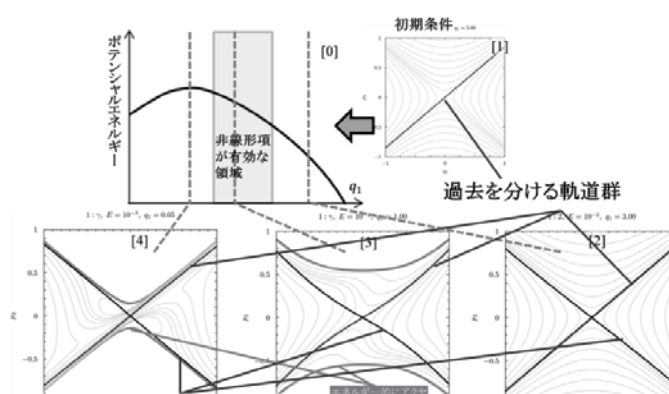


図2 過去と未来を分ける軌道群

[1]-[4]は漸近領域 $q_1 = 5$ で初期条件を用意した過去・未来を分ける軌道群の軌跡の $q_1 = \text{一定}, p_1 > 0$ のときの断面。エネルギー $E = 10^{-2}, \alpha = 0.1, \lambda_1 : \lambda_2 = 1:2, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ の時。

⁴ ランク1サドルに於いてはエネルギーが高くなければ殆どの場合この主張は正しい

⁵ Hartman & Grobman の定理から双曲型固定点はその線形ベクトル場に対して C^0 共役である事が示せる。ランク1サドルでは、標準形に変換後の標準形作用 $\tilde{I}$ が定める不変多様体 ($\tilde{I} = 0$) が法双曲不変多様体(NHIM)であることが示せ、構造安定である。

る)とエネルギーを変えて行った。同じエネルギー $E = 10^{-2}$ で異なる線形共鳴条件 $\lambda_1:\lambda_2 = 1:1, 1:2, 1:3$ と線形共鳴が生じない条件 $\lambda_1:\lambda_2 = 1$:(golden ratio)で行ったところ、同様に過去と未来を分ける軌道群が観測された。高いエネルギーでは同様に過去・未来を分ける軌道群が観測されたが、低いエネルギー($E = 10^{-5}$ 以下)では、摂動による変形によって、軌道群がエネルギー的にアクセス出来ない領域に接し、一部の軌道群が跳ね返された。

観測された過去・未来を分ける軌道群が、標準形作用によって予測可能か確かめるため、標準摂動を用いて標準形作用を計算し、その等高面と過去を分ける軌道群を比較した(図3)。その結果、過去を分ける軌道群の基準座標系から摂動を受ける方向が常に $\xi < 0$ であったのに対して、標準形作用の摂動を受ける方向は、断面(q_1 または q_2 一定)によって異なった。比較した断面において、標準形作用の摂動次数を下げて多項式次数4次で打ち切った際の等高線の摂動の受け方と多項式次数16次まで計算した場合が同程度であったことから、標準形作用の各項のうち多項式次数4次の項がドミナントな摂動項であった。

3 議論

構築したモデル系における、過去・未来を分ける軌道群は、複雑に折りたたまれることがなかったことから、誤差に対して鋭敏ではないと考えられる。つまり、過去・未来を分ける軌道群を抽出できた場合、高い予測性が期待される。

標準形作用の摂動次数を多項式次数4次で打ち切った際の項には、 $(\lambda_1 - \lambda_2)$ を含む項があり、その係数が最も大きかった。この項は観測する断面を変える((p_j, q_j) の j を1,2入れ替えることに相当)と符号を変えるため、摂動を受ける方向が断面によって異なると考えられる。この帰結は、任意に小さい摂動係数 α によっても変わらない事が示せた。

標準形作用と、過去を分ける軌道群の不一致は、標準形作用を用いた軌道の過去・未来の予測が誤ってしまう領域が存在する事を示している。このような領域が存在する原因は、標準形作用が分けている軌道の過去未来が、正準摂動により座標変換した後の空間 $(\hat{p}, \hat{q})$ での過去・未来(すなわち、 $\hat{q}$ の符号)を予測しているものの、もとの空間での過去・未来を予測しているとは必ずしも言えないことが起因していると考えられる。

4 結論

モデル系を用いて、ランク2サドルにおける、過去と未来を分ける軌道群を共鳴条件下であっても数値的に抽出できることを示した。さらに、過去を分ける軌道群と標準形作用と比較した。この結果、任意に小さい摂動係数 α であっても過去を分ける軌道群と標準形作用が一致しない領域が存在することモデル系において示した。この不一致は、標準形に座標変換した後の空間 $(\hat{p}, \hat{q})$ での過去・未来(すなわち、 $\hat{q}$ の符号)と、もとの空間での過去・未来(q の符号)が異なることに起因していると考えられる。

本研究の結果は、ランク2サドルにおいて、過去・未来を分ける多様体の存在を示せたことで、ランク2サドルにおいても力学的遷移状態理論を展開できる可能性を指摘できたが、同時に標準形を用いてそれらを抽出できない場合があることを示した。ランク2サドルで反応の可否を明らかにする鍵は、ランク2サドル一般における過去・未来を分ける多様体と標準形の関係と、過去・未来を分ける多様体を直接抽出する解析的手法の構築にあると考えられる。

また、ランク2サドルが化学反応のボトルネックとなる殆どの場合、ランク1サドルを伴っている。すなわち、サドル・サドル間の相空間構造を明らかにすることと、ランク2サドルを伴った場合の反応速度式を明らかにすることが力学的遷移状態理論をランク2サドルひいてはより高次ランクのサドルに展開する上で必須であると考えられる。

5 参考文献

- [1] 幸田清一郎, 染田清彦, 阿波賀邦夫, 小谷正博 編「大学院講義物理化学(第2版): II. 反応速度論とダイナミクス」(東京化学同人, 2011)
- [2] S. Glasstone, K. J. Laidler, and H. Eyring, *The Theory of Rate Processes* (McGraw-Hill, 1941): 長谷川繁夫, 平井西夫, 後藤春雄共訳「絶対反応速度論(上)」(吉岡書店, 1977)
- [3] N. Shida, *Adv. Chem. Phys.* **130B**, 129-153 (2005)
- [4] G. S. Ezra and S. Wiggins, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**, 205101 (2009)
- [5] P. Collins, G. S. Ezra, S. Wiggins, *J. Chem. Phys.* **134**, 244105 (2011)
- [6] G. Haller, et al., *Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.*, **15**, 48-59 (2010)
- [7] G. Haller, et al., *Nonlinearity* **24**, 527-561 (2011)

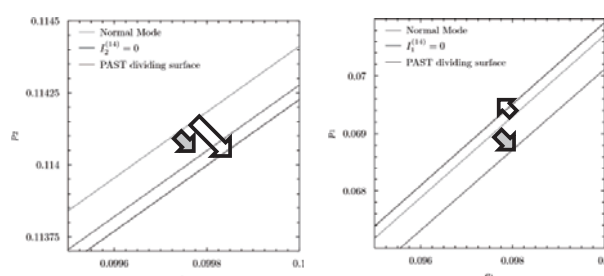


図3 過去を分ける軌道群と標準形作用の基準座標系からの摂動(p_1, q_1)断面では基準座標系作用からの摂動は、過去を分ける軌道群(灰色)と標準形作用(白抜き)とで向きが異なる。断面はそれぞれ $q_1 = 0.05$ (左図)と $q_2 = 0.05$ (右図)

生体分子の分子動力学に対する時系列解析

— 集団運動の揺らぎと構造変化の関係を探る —

奈良女大院 東工大 奈良女
富士 香奈 関嶋 政和 戸田 幹人

概要

生体内における様々な機能のほとんどはタンパク質の働きが大きく関わっている。そのタンパク質の機能発現には構造が重要な役割を果たしているとされる。そのため、これまで多くの研究によってその構造が明かにされてきた。今日では分子動力学法という手法を用いて、タンパク質の動きをシミュレートすることが可能となり、タンパク質の構造変化に迫る研究は大きく発展した。しかし、生体分子などの多自由度な時系列データ解析において、その膨大なデータの中からいかにして必要な情報を読み取るかは重要な問題の一つである。本研究ではタンパク質の分子動力学データに対し、構造変化解析を行うことで新たな解析手法を探るきっかけをつかみたいと考えている。

1 目的

本研究はシニョリンという 10 残基からなる人工タンパク質の分子動力学時系列データを用いて、複数の構造間を遷移する生体分子の振る舞いに対する理解を深めることを目的とした。

2 解析対象

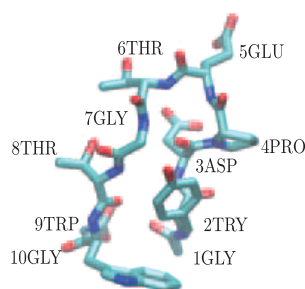


図 1: シニョリン

シニョリン (chignolin) とは独立行政法人 産業技術総合研究所で作られた世界最小の人工タンパク質である [1]。このシニョリンは 10 個のアミノ酸が鎖状につながったポリペプチドで、図 1 のような構造をしている。

シミュレーションデータの全時間は $1[\mu \text{ sec}]$ である。 $20[\text{psec}]$ ごとにサンプリングされているので、50000 個の時系列データとなっている。

3 解析の流れ

まず両末端間距離の時系列を調べ、タンパク質が開いたり閉じたりする構造変化の頻度を調べた。次にタンパク質のねじれや曲がりを表す指標を用いて出現頻度の高い構造の分類を行い、それらの構造間遷移を解析した。最後に出現頻度の高い構造の水素結合に着目し、構造遷移が生じる際の水素結合の時間変化を調べた。

4 結果

4.1 両末端間距離の時間変化

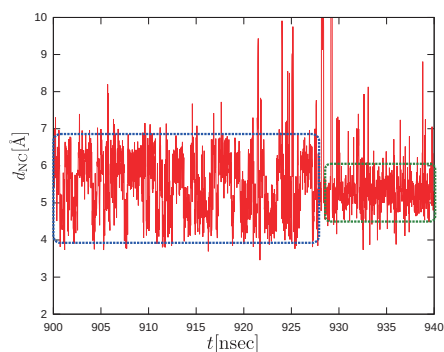


図 2: 安定な構造における両末端間距離の時間変化

図 2 は 900-940[nsec] での両末端間距離の時間変化を示す。タンパク質が閉じた状態のとき、2 種類の揺らぎを交互に示す領域と、1 種類の揺らぎを示す領域が存在することがわかる。

4.2 二面角座標を用いた主成分分析 [2]

タンパク質のねじれや曲がりを表す指標のことを二面角とよぶ。タンパク質を構成する原子座標から二面角を計算し、その座標を用いて主成分分析を行った。

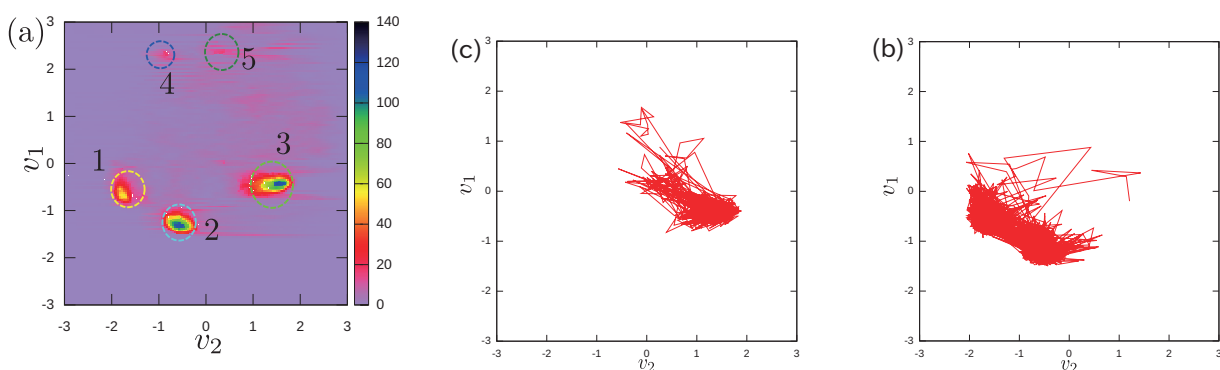


図 3: 二面角座標を用いた主成分分析

高い値を示す領域を丸い点線で囲い(900-928[nsec])
それぞれを集団 1 ~ 5 とした。

図 4: v_2 - v_1 平面上での時間変化
図 5: v_2 - v_1 平面上での時間変化
(928-940[nsec])

図 3 全時間の時系列を用いて主成分分析を行った結果である。図 4 と図 5 を見ると、前節で定義した集団 1、2、3 を遷移していることがわかる。900-928[nsec] 時刻では主に集団 1 と集団 2 を何度も移り変わり、(c)928-940[nsec] の時刻は集団 3 の周辺を行き来している。つまり N 末端と C 末端の距離で見られた安定した構造のわずかな違いが、dPCA によって出現頻度の高い構造に対応することが示された。

4.3 水素結合の時間変化

安定した構造を形成する際に重要となる要素は、安定した構造で向かい合う主鎖または側鎖の間に働く水素結合である。図2で示した安定な構造が継続する時間帯において構造形成に重要な役割を果たす可能性のある水素結合の振る舞いを調べ、安定構造間を遷移する際の水素結合の時間変化を解析する。

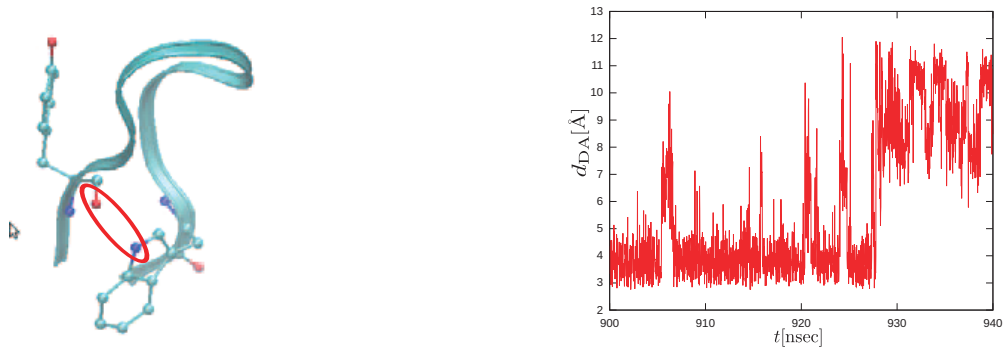


図 6: 水素結合距離の時間変化

図6を見ると、900~928[nsec]の範囲で一定の距離を保つ関係が見られる。928[nsec]あたりで距離が急激に広がり、その後安定せず波うつように変動している。よって928[nsec]より前では水素結合を形成していた部分が、928[nsec]以降外れたと考えられる。また、906[nsec]、921[nsec]、924[nsec]あたりでピークが見られる。主鎖の酸素原子の位置が大きく変動することはほぼ無いと考え、これらの時刻では、トリプトファンの側鎖がタンパク質の内側から外側に大きく向きを変えたと考えられる。

この結果は、水素結合の切り替わりによって、構造間遷移を読み取ることが可能であることを示唆する。

5 考察

dPCAによる構造解析の結果では、出現頻度の高い構造が5つの集団に分けられることを示し、安定構造を形成する時間帯においては、そのうちの3つの集団を遷移していることを突き止めた。さらにその3つの集団のうちでも、遷移しやすい構造間とそうでないものに分けられた。このことは安定した構造の違いによって構造間の遷移にも特徴があることを示唆する。水素結合の結果より、安定構造を形成する時間帯で現れる3つの集団それぞれにおいて、構造中の水素結合のとり方に違いが見られることがわかった。つまりシニョリンの安定構造は結びつく水素結合の種類とその振る舞いに基づく分類ができる可能性を示唆している。

今回の解析は主に900-940[nsec]の解析を行ったが、他の構造が比較的に安定な時間帯にも同様の解析を行う必要がある。さらに今後は、解析の新たな切り口として運動に焦点を当てた解析を行う必要があると考えている。

参考文献

- [1] S. Honda, K. Yamasaki, Y. Sawada and H. Morii: “10 Residue Folded Peptide Designed by Segment Statistics”, *Structure*, Vol. 12, pp. 1507-1518 (2004)
- [2] Y. Mu, P. H. Nguyen and G. Stock: “Energy landscape of a small peptide revealed by dihedral angle principal component analysis”, *PROTEINS: Structure, Function, and Bioinformatics*, Vol. 58, pp. 45-52 (2005)

連続測定を受ける量子系の状態の時間発展について*

布田 徹†

北海道大学大学院理学院数学専攻

概要

量子系において、観測を連続的に行うと系の状態が初期状態のまま凍結してしまう場合がある。今回はこの効果—量子ゼノン効果—の数学的側面について紹介する。まず、量子ゼノン効果の厳密な生起条件を提示し、量子ゼノン効果が起らない場合についても例を挙げる。次に、量子ゼノン効果が起る場合の時間分割の個数に関する漸近挙動について述べる。最後に、連続的な観測によって、状態ベクトルを状態空間上の曲線に乗せて移動させることが出来ることをみる。

1 Introduction

量子系の状態は、状態空間と呼ばれる複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の 0 でない元で表され、物理量は状態空間上の自己共役作用素で表される。いま、単位ベクトル $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$ を状態であるとする、量子系が観測によって状態 Ψ から状態 Φ に遷移する確率は、量子力学の公理により $|\langle \Phi, \Psi \rangle|^2$ で与えられる。一方、量子系の状態の時間発展は、 $\hbar := \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) が 1 となる単位系を用いると、途中で系に対する観測を行わない限り、系のハミルトニアン H から定まる強連続 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$ によって記述される。したがって、初期状態が Ψ であるとき、時刻 t における観測で状態が Ψ へ遷移する確率(生き残り確率)は $|\langle \Psi, e^{-itH} \Psi \rangle|^2$ で与えられる。このような観測を繰り返し行うことを考える。

任意の時間 $t > 0$ に対して、 Δ を区間 $[0, t]$ の任意の分割で、

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = t$$

であるものとし、 $k = 1, \dots, N$ に対して、 $\Delta_k := t_k - t_{k-1}$, $|\Delta| := \max_{1 \leq k \leq N} \Delta_k$ とおく。このとき、

$$P_\Delta(\Psi, t) := \prod_{k=1}^N |\langle \Psi, e^{-i\Delta_k H} \Psi \rangle|^2$$

を考える。 $P_\Delta(\Psi, t)$ は、 Δ の分点 $(t_1, \dots, t_N)$ において順に観測を行い、いずれの観測でも状態が初期状態 Ψ に遷移する確率である。

$|\Delta|$ を無限小にすると $P_\Delta(\Psi, t)$ が 1 になる、つまり観測を間断なく行つてやると状態が初期状態のまま凍結される、というのが量子ゼノン効果である (B. Misra and E. C. G. Sudarshan [6])。

*本研究は新井朝雄教授（北海道大学）との共同研究 [1] に基づく。

†E-mail: t-fuda@math.sci.hokudai.ac.jp

定義 1.1

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} P_\Delta(\Psi, t) = 1$$

のとき, 初期状態 Ψ に対する, 時間 t の**量子ゼノン効果**が起こるという.

まず, 簡単に量子ゼノン効果が起こる場合があることを見ておく. 分割 Δ を N 等分割で
あるとすると,

$$P_\Delta(\Psi, t) = \left| \langle \Psi, e^{-itH/N} \Psi \rangle \right|^{2N}.$$

任意の $\Psi \in \cap_{n=1}^\infty D(H^n)$ に対して,

$$e^{-itH} = I - itH - \frac{t^2}{2}H^2 + O(t^3) \quad (t \rightarrow 0)$$

が成り立つことに注意すると, この Ψ に対して,

$$\left| \langle \Psi, e^{-itH} \Psi \rangle \right|^2 = 1 - (\Delta H)_\Psi^2 t^2 + O(t^4) \quad (t \rightarrow 0).$$

ただし,

$$(\Delta H)_\Psi := \|(H - \langle \Psi, H \Psi \rangle) \Psi\| = \sqrt{\|H \Psi\|^2 - \langle \Psi, H \Psi \rangle^2}$$

である. このとき, 十分大きな N に対して,

$$P_\Delta(\Psi, t) \approx \left[1 - (\Delta H)_\Psi^2 \left(\frac{t}{N} \right)^2 \right]^N \approx e^{-(\Delta H)_\Psi^2 t^2 / N} \approx 1.$$

したがって, 量子ゼノン効果が起こることがわかる. しかし, このような摂動論的手法で
得られる量子ゼノン効果の生起条件は強い制限を受けており, 量子ゼノン効果のより詳細
な解析を行うには, より制限の少ない生起条件が要求される.

2 任意の分割に対する量子ゼノン効果

ここでは, まず, 量子ゼノン効果の生起条件に関する次の定理を紹介する.

定理 2.1 $\Psi \in D(H)$, $\|\Psi\| = 1$ とするとき,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} P_\Delta(\Psi, t) = 1$$

が成り立つ.

また, この定理において, 仮定 $\Psi \in D(H)$ がない場合は必ずしも量子ゼノン効果が起こ
るわけではないことを次の例で示す.

例 2.2 状態のヒルベルト空間として $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, ハミルトニアンとして 1 次元空間 $\mathbb{R}$ の
中の質量 $m > 0$ の量子力学的な自由粒子のハミルトニアン $H_0 := p^2/2m$, $p := -iD_x$ を考
える. ただし, D_x は $L^2(\mathbb{R})$ 上の (変数 x に関する) 一般化された偏微分演算子とする.

さらに, $c > 0$ を定数とし, $\hat{\psi}_0$ を $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ の L^2 -Fourier 変換とする.

このとき,

$$\hat{\psi}_0(k) = \sqrt{\frac{2c}{\pi}} \sqrt{\frac{|k|}{k^4 + c^2}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

とおくと, 簡単な計算から $\|\psi_0\| = 1$ と $\psi_0 \notin D(H_0)$ がわかる. さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $c > -(m/t) \log \varepsilon$ とおくと,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N |\langle \psi_0, e^{-i\Delta_k H_0} \psi_0 \rangle|^2 < \varepsilon$$

であることもわかる.

したがって, この場合, 量子ゼノン効果は起らない.

3 時間分割の個数に関する漸近挙動

次に, 量子ゼノン効果が起こる場合の時間分割の個数に関する漸近挙動について得られた結果を述べる.

定理 3.1 Δ が等分割であるとき, 単位ベクトル $\Psi \in D(H)$ に対して,

$$P_\Delta(\Psi, t) = \left| \langle \Psi, e^{-i\frac{t}{N}H} \Psi \rangle \right|^{2N} = 1 - t^2(\Delta H)_\Psi^2 \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ただし, $(\Delta H)_\Psi^2 = \|H\Psi\|^2 - |\langle \Psi, H\Psi \rangle|^2$ は Ψ におけるエネルギーの分散である.

4 状態空間における曲線上の量子ゼノン効果

量子ゼノン効果が連続測定によって状態ベクトルを一点に留めておく効果であるのに対して, 連続測定によって状態ベクトルを曲線に乗せて移動させることができることを示す.

定理 4.1 $\Psi(\cdot)$ を区間 $[0, t]$ 上の $\mathcal{H}$ -値関数で, 任意の $\lambda \in [0, t]$ に対して, $\Psi(\lambda) \in D(H)$, $\|\Psi(\lambda)\| = 1$ であるものとする. さらに,

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq t} \|H\Psi(\lambda)\| < \infty, \quad \sup_{\substack{\lambda, \nu \in [0, t] \\ \lambda \neq \nu}} \frac{\|\Psi(\lambda) - \Psi(\nu)\|}{|\lambda - \nu|} < \infty,$$

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \langle \Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1}), \Psi(t_{k-1}) \rangle = 0$$

が満たされていると仮定する. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N |\langle \Psi(t_k), e^{-i\Delta_k H} \Psi(t_{k-1}) \rangle|^2 = 1.$$

例 4.2 任意の $\lambda \in [0, t]$ に対して, $\Psi(\lambda) \equiv \Psi_0 \in D(H)$, $\|\Psi_0\| = 1$ とすると, $\Psi(\cdot)$ は定理 4.1 の仮定を全て満たすので, $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} P_\Delta(\Psi(\cdot), t) = 1$ である.

したがって, 定理 2.1 は定理 4.1 の特殊な場合である.

定理 4.1 を応用することで次の系 4.3 が得られる.

系 4.3 $\Psi(\cdot)$ を区間 $[0, t]$ 上の強微分可能な $\mathcal{H}$ -値関数で, 任意の $\lambda \in [0, t]$ に対して, $\Psi(\lambda) \in D(H)$, $\|\Psi(\lambda)\| = 1$ であるものとする. さらに,

$$\xi := \sup_{0 \leq \lambda \leq t} \|H\Psi(\lambda)\| < \infty, \quad \eta := \sup_{0 \leq \lambda \leq t} \|\Psi'(\lambda)\| < \infty$$

であるとき, 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} P_\Delta(\Psi(\cdot), t) = 1.$$

5 連続測定による任意の二つの状態間の遷移

任意の単位ベクトル $\Psi, \Phi \in D(H)$ に対して, 系 4.3 の仮定を満たし, 始点を Ψ , 終点を Φ とするような曲線が存在する. したがって, 系 4.3 により, 次の解釈が可能な数学的内容が証明される:

任意の単位ベクトル $\Psi, \Phi \in D(H)$ に対して, 連続測定によって状態を Ψ から Φ へ遷移させることができる.

References

- [1] A. Arai and T. Fuda, Some Mathematical Aspects of Quantum Zeno Effect, *Lett. Math. Phys.*, Springer, to appear.
- [2] O. Alter and Y. Yamamoto, Quantum Measurement of a Single System, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [3] D. Home and M. A. B. Whitaker, A Conceptual Analysis of Quantum Zeno; Paradox, Measurement, and Experiment, *Annals of Physics* **258**(1997), 237–285.
- [4] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, Quantum Zeno effect, *Phys. Rev. A* **41**(1990), 2295.
- [5] R. Joos, Decoherence Through Interaction with the Environment, Chapter 3, §3.3 in *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Editors: D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.-O. Stamatescu and H. D. Zeh), Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [6] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, The Zeno's paradox in quantum theory, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 756–763.
- [7] J. von Neumann, Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. Reprint:1981.