



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2012年代数幾何学シンポジウム
Author(s)	松下, 大介
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 155, 1-127
Issue Date	2013-01-25
DOI	https://doi.org/10.14943/81517
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/68079
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech155.pdf



2012
代数幾何学シンポジウム
記録

Series #155. February, 2013

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #132 H. Kang, 第 16 回 COE 研究員連続講演会『CHAOS IN TRAVELING WAVES IN LATTICE SYSTEMS OF UNBOUNDED MEDIA』, 13 pages. 2008.
- #133 G.-J. Chung, editor: Y. Kimura, Introduction to Various Models in Image Processing, 61 pages. 2008.
- #134 H. Takagi and R. Uno, 研究会報告書『動的システムの情報論 (7)』, 110 pages. 2008.
- #135 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, 第 33 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 72 pages. 2008.
- #136 T. Sakajo, Y. Nishiura, H. Suito, K. Nishinari, M. Nagayama and T. Amemiya, JST さきがけ研究集会『環境問題における数理の可能性』, 83 pages. 2008.
- #137 H. Hida, T. Ito, H. Katsurada, K. Kitagawa (transcribed by T. Suda), Y. Taguchi, A. Murase and A. Yamagami. K. Arai, T. Hiraoka, K. Itakura, T. Kasio, H. Kawamura, I. Kimura, S. Mochizuki, M. Murata and T. Okazaki, 整数論札幌夏の学校, 201 pages. 2008.
- #138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.
- #139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.
- #140 T. Suda, Y. Umeta, K. Kasai, M. Kasedou, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.
- #141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.
- #142 K. Kasai, H. Kuroda, T. Nagai, K. Nishi, S. Tsujie and T. Yamaguchi, 第 6 回数学総合若手研究集会, 267 pages. 2010.
- #143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.
- #144 Liang Chen, Doctoral thesis “On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space”, 79 pages. 2010.
- #145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.
- #146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.
- #147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.
- #148 T. Fukunaga, N. Nakashima, A. Sekisaka, T. Sugai, K. Takasao and K. Umeta, 第 7 回数学総合若手研究集会, 280 pages. 2011.
- #149 M. Kasedou, Doctoral thesis “Differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space”, 69 pages. 2011.
- #150 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.
- #151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第 8 回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.
- #152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第 20 回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.
- #153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2012.
- #154 N. Hu, Doctoral thesis “Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces”, 2012.

目次

1. 瀧新悟, $K3$ 曲面上の非シンプレクティック自己同型 ... 1.
2. 徳永浩雄, Geometry of sections of certain rational elliptic surfaces and its application ... 13.
3. 安田健彦, p 巡回 McKay 対応 ... 24.
4. 古川勝久, Duality with expanding maps and shrinking maps, and its applications to Gauss maps ... 30.
5. 石田正典, The graded rings associated to cusp singularities ... 41.
6. 森脇淳, Birational Arakelov geometry ... 51.
7. 伊藤浩行, On wild quotient singularities ... 73.
8. 田中公, 正標数の曲面に対する消滅定理 ... 85.
9. 藤田健人, The Mukai conjecture for log Fano manifolds ... 90.
10. 伊藤敦, セシャドリ定数と定義多項式の次数について ... 98.
11. 柳田伸太郎, Moduli spaces of Bridgeland stable objects on abelian surfaces ... 108.
12. 並河良典, Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry ... 119.
13. ポスター発表 ... 123.

$K3$ 曲面上の非シンプレクティック自己同型

瀧 真語

ABSTRACT. This note is a survey about non-symplectic automorphisms of $K3$ surfaces and a reproduction on my talk at Kinoshita Symposium 2012.

1. はじめに

与えられた代数多様体の自己同型を調べることは代数幾何学における基本的問題の一つである．今回は $K3$ 曲面の自己同型を考察する．なお， $K3$ 曲面は $\mathbb{C}$ 上のものを考えることにする． $K3$ 曲面はその定義から至る所消えない正則 2 形式が存在するが， $K3$ 曲面に自己同型として作用する有限群は，その正則 2 形式への作用が自明か，そうでないかによってシンプレクティックまたは非シンプレクティックと呼ばれる．このノートのテーマは非シンプレクティック自己同型である．非シンプレクティック自己同型は Nikulin [12] によって調べられ始め，その後多くの数学者によって研究されてきた．現在もその応用も含めて活発に研究され続けている対象である．

まず $K3$ 曲面の自己同型の一般的な話から始めることにする．一般に $K3$ 曲面は代数的とは限らないが，今回は代数的な $K3$ 曲面のみを扱うことにする．以下 $K3$ 曲面 X に対し， ω_X を X の至る所消えない正則 2 形式とする． $H^2(X, \mathbb{Z})$ はカップ積によって格子の構造がはいる．その部分格子 $S_X := \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid \langle x, \omega_X \rangle = 0\}$ を X の Néron-Severi 格子， $T_X := S_X^\perp$ を超越格子とする．なお， $1 \leq \text{rank } S_X \leq 20$ ， $2 \leq \text{rank } T_X \leq 21$ が成り立つ．

1.1. $K3$ 曲面の自己同型． $K3$ 曲面 X の有限自己同型を調べたい．そこで G を X へ自己同型として作用する有限群とする． X の自己同型 $g \in G$ は Hodge 分解を保つことに注意すれば， $g^*\omega_X = \alpha(g)\omega_X$ をみたす 0 ではない複素数 $\alpha(g)$ を定めることができる．つまり $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ という表現が定まる． G が有限群であることから $\text{Im } \alpha$ は有限アーベル群であることに注意する．以上から次の完全列を得ることができる：

$$(1) \quad 1 \rightarrow \text{Ker } \alpha \rightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/I\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

例を一つ見る．

Date: January 24, 2013.

例 1.1. $\mathbb{P}^3$ の超曲面 $X : X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ は $K3$ 曲面である． X には座標を入れ替えることで $\mathfrak{S}_4$ が作用している．また各座標を $\sqrt{-1}$ 倍することで $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ が作用している．つまり $G := \mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ が射影変換として X に作用している．そして ω_X への作用を見ることで $\text{Ker } \alpha = \mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ であることが分かる．つまり

$$1 \rightarrow \mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \rightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

である．

定義 1.2. $K3$ 曲面 X の自己同型 g が $g^*\omega_X = \omega_X$ をみたすとき，シンプレクティックという．また有限群 $G \subset \text{Aut}(X)$ の全ての元がシンプレクティックであるとき G のこともシンプレクティックという．

上の完全列 (1) でいうと $G = \text{Ker } \alpha$ をみたすものがシンプレクティックである．例 1.1 の場合は， $\mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ が X へシンプレクティックに作用していることになる．

$K3$ 曲面にシンプレクティックに作用する有限群 G に関しては Nikulin [12] が有限アーベル群の場合に分類し，向井 [11] が一般の場合の分類を行った．また有限単純群のひとつである Mathieu 群との対応も知られている（金銅 [9] の格子理論を用いた証明も見よ．）

ところで，我々が今回扱いたい自己同型はシンプレクティック自己同型ではない．次を定義しておく．

定義 1.3. σ を $K3$ 曲面 X 上の位数 I の自己同型とする． $\sigma^*\omega_X = \zeta_I \omega_X$ をみたすとき， σ を非シンプレクティック自己同型という．ここで ζ_I は 1 の原始 I 乗根である．

注意 1.4. 定義 1.2 によると，自己同型が ω_X に自明に作用するか否かで自己同型のタイプを決めていた．従って， σ の位数が 6 で $\sigma^*\omega_X = \zeta_3 \omega_X$ をみたす場合も非シンプレクティックと呼びそうである．それは正しい．実際にこの手の自己同型を調べたという結果もある（たとえば [6] ）．

ただ，このノートでは定義 1.3 のような自己同型のみを扱い，非シンプレクティック自己同型と呼んでいる．混同がありそうな場合は今回扱う場合を purely non-symplectic (純非シンプレクティックとでも訳すのか?) と呼ぶ事もある．

非シンプレクティック自己同型の研究結果は数多くあるが，最初に Nikulin [14] による位数 2 の非シンプレクティック自己同型の研究を見る．ただし今現在はいくらか準備不足なので，[14] の主張をそのまま書くことはしない．なお， U は交点形式を $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる階数 2 の双曲格子であり， E_8 はディンキン図形から定まる偶で負定値なルール格子である．格子 L に対して， $L(m)$ は L の交点行列を m 倍した格子の意味である．

定理 1.5. ι を Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 2 の非シンプレクティック自己同型とする．このとき ι の固定点集合は

$$X^\iota = \begin{cases} \phi & S_X = U(2) \oplus E_8(2), \\ C^{(1)} \amalg C^{(1)} & S_X = U \oplus E_8(2), \\ C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる．ここで $C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線であり， E_i は非特異有理曲線である．また g や k は S_X の階数などの言葉で記述できる．

上で書いた「いづれか準備不足」というのは S_X に関することである．実は ι のような自己同型を持つ場合， S_X は特別な格子の構造を持つ．また g や k はその格子が持つ不変量で記述される．

命題 1.6 ([22], [8]). p を素数とする． σ を S_X に自明に作用する位数 p^l の非シンプレクティック自己同型とする．このとき S_X は p -elementary 格子になる．

注意 1.7. 実のところ S_X が p -elementary 格子になるというよりは，不変格子 $S^{\sigma^*} := \{x \in S_X \mid \sigma^*(x) = x\}$ が p -elementary 格子になる，という方が正しい．今の場合は仮定から $S_X = S^{\sigma^*}$ である．

1.2. p -elementary 格子.

定義 1.8. p を素数， L を格子とし， L^* を L の双対格子（すなわち $\text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ ）とする．判別式群が p -elementary アーベル群，すなわち $L^*/L = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$ となるとき， L を p -elementary 格子と言う．

例 1.9. A_m, D_n はディンキン図形から定まる偶で負定値なルール格子とする．

- A_2 型の格子は $a = 1$ の 3-elementary 格子である．
- D_4 型の格子は $a = 2$ の 2-elementary 格子である．
- U は $a = 0$ の p -elementary 格子である．これは $U^* = U$ を意味する．すなわちユニモジュラー格子である．

定義 1.10. L を 2-elementary 格子とする．

$$\delta := \begin{cases} 0 & \text{if } x^2 \in \mathbb{Z}, \forall x \in L^*, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この δ という量は 2-elementary 格子の場合に意味がある．

命題 1.11 ([13], [17]). 偶で不定値な 2-elementary 格子はその階数と a と δ で分類される．また，偶で不定値な $p(\neq 2)$ -elementary 格子はその階数と a で分類される．

つまるところ，この命題が言っていることは今回扱いたい Néron-Severi 格子をリストアップできる，ということである．[1] [2] [18] [20] などには幾つかの場合の具体的なリストがある．

さて，定理 1.5 に借金があった．改めて書いておく．

定理 1.12 ([14]). ι を S_X に自明に作用する位数 2 の非シンプレクティック自己同型とする．このとき ι の固定点集合は

$$X^\iota = \begin{cases} \phi & S_X = U(2) \oplus E_8(2), \\ C^{(1)} \amalg C^{(1)} & S_X = U \oplus E_8(2), \\ C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる．また

$$g = \frac{22 - \text{rank } S_X - a}{2}, \quad k = \frac{\text{rank } S_X - a}{2}$$

である．

今の場合 S_X は 2-elementary 格子であるから，その不変量は $\text{rank } S_X$ と a と δ である． δ の姿が見えないようだが，実は $S_X = U(2) \oplus E_8(2)$ や $S_X = U \oplus E_8(2)$ というところに δ が隠されている． $U(2) \oplus E_8(2)$ は階数 10 で， $a = 10$ ， $\delta = 0$ である．一方 $A_1(-1) \oplus A_1^9$ は階数 10 で， $a = 10$ ， $\delta = 1$ である． δ はこの 2 つを区別しているのである．

1.3. 自己同型の位数と固定点．今まで見てきたように， $K3$ 曲面の非シンプレクティック自己同型の一つの研究方針として「固定点集合を格子の言葉で記述せよ」というものがある．これから位数 2 以外の場合を見ていく．その前に非シンプレクティック自己同型が取り得る位数とその固定点集合の一般的な形を見ておく．

命題 1.13 ([12]). σ を $K3$ 曲面 X 上の非シンプレクティック自己同型， Φ を Euler 関数とする．このとき $\Phi(\text{ord } \sigma)$ は超越格子 T_X の階数を割り切る．特に $2 \leq \text{rank } T_X \leq 21$ であるから $\text{ord } \sigma \leq 66$ である．

この命題において，非シンプレクティック自己同型は S_X に自明に作用していなくても成り立つ．また， $\Phi(60) = 16$ なのだが，実は次が成り立つ．これは多くの人々([23], [10], [24]) が独立に色々な証明を与えている．

命題 1.14. 位数 60 の非シンプレクティック自己同型は存在しない．

命題 1.6 によると， $K3$ 曲面が素数ベキ位数の非シンプレクティック自己同型を持つとき，その Néron-Severi 格子は p -elementary 格子になっていた．では素数ベキ位数でない非シンプレクティック自己同型場合はどうであろうか？実はユニモジュラー格子になる．例えば， $K3$ 曲面が位数 $6 (= 2 \times 3)$ の非シンプレクティック自己同型を持つとすると，

その Néron-Severi 格子は 2-elementary かつ 3-elementary である．そのような格子はユニモジュラー格子である．

命題 1.15 ([8]). σ を $K3$ 曲面 X の Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する合成数位数の非シンプレクティック自己同型とする．このとき S_X はユニモジュラー格子であり，

- (1) $S_X = U$ ならば $\text{ord } \sigma | 66, 44 \text{ or } 12$
- (2) $S_X = U \oplus E_8$ ならば $\text{ord } \sigma | 42, 36 \text{ or } 28$
- (3) $S_X = U \oplus E_8^2$ ならば $\text{ord } \sigma | 12$.

が成り立つ．

この命題によって，Néron-Severi 格子に自明に作用する合成数位数の非シンプレクティック自己同型のことは大体分かったと思ってよい．[8] には特別な合成数位数の場合の一意性の事も書かれている．

次に非シンプレクティック自己同型の固定点の様子について見る．

補題 1.16. σ を $K3$ 曲面 X 上の位数 I の非シンプレクティック自己同型とする．このときその固定点集合は

$$X^\sigma = C_1 \amalg \cdots \amalg C_m \amalg \{P_1, \dots, P_n\}$$

と表せる．ここで C_i は非特異曲線， P_j は孤立点である．

p を σ の固定点とし，その局所座標を (x, y) とする． σ が非シンプレクティック自己同型であることと $dx \wedge dy$ の作用に注意し， $p = (x, y)$ への σ の作用を見ると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_I \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \zeta_I^\alpha & 0 \\ 0 & \zeta_I^\beta \end{pmatrix}$ ($\alpha + \beta \equiv 1 \pmod{I}$) が考えられる．作用が前者であれば p は非特異固定曲線上の点であり，後者であれば孤立固定点である．

もちろん P_j への σ の作用は色々な種類のものが考えられる．例えば $\text{ord } \sigma = 5$ の場合は $\begin{pmatrix} \zeta_5^2 & 0 \\ 0 & \zeta_5^4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & \zeta_5^3 \end{pmatrix}$ がある．これらを区別するのが正則版 Lefschetz 公式¹である．位相版の Lefschetz 公式と共に紹介する．

命題 1.17 (位相 Lefschetz 公式). σ を $K3$ 曲面 X 上の非シンプレクティック自己同型とする．このとき固定点集合 X^σ の位相的 Euler 数 $\chi(X^\sigma)$ は

$$\chi(X^\sigma) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{tr}(\sigma^* | H^i(X, \mathbb{R}))$$

をみたす．

¹位数が大きくなるとこの計算は結構大変である．

命題 1.18 (正則 Lefschetz 公式). σ を $K3$ 曲面 X 上の位数 I の非シンプレクティック自己同型²とする. このとき

$$\sum_{i=0}^2 \operatorname{tr}(\sigma^* | H^i(X, \mathcal{O}_X)) = \sum_j a(P_j^{\alpha, \beta}) + \sum_l b(C_l)$$

が成り立つ. ここで $P_j^{\alpha, \beta}$ は σ の作用が $\begin{pmatrix} \zeta_I^\alpha & 0 \\ 0 & \zeta_I^\beta \end{pmatrix}$ である孤立固定点である. また

$$a(P_j^{\alpha, \beta}) = \frac{1}{(1 - \zeta_I^\alpha)(1 - \zeta_I^\beta)}, \quad b(C_l) = \frac{1 - g(C_l)}{1 - \zeta_I} - \frac{\zeta_I C_l^2}{(1 - \zeta_I)^2}.$$

である.

2. 素数位数の場合

p を素数, X を $K3$ 曲面とし, σ を Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 p の非シンプレクティック自己同型とする. 命題 1.13 によると $\operatorname{ord} \sigma = p$ が取り得る値は 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 であるが, それぞれの場合の固定点集合 X^σ を決定したい. 詳細は [1] [2] [16] [18] などを見て欲しい.

$p \geq 3$ の場合, σ の固定点集合は

$$X^\sigma = C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \dots, P_n\}$$

となるのだが, g や k や n を p -elementary 格子としての S_X が持つ量で記述する.

X が σ のような自己同型を持つときは S_X は p -elementary 格子になるが, S_X が p -elementary 格子だからといって, X が必ずそのような自己同型をもつかどうかは別問題である. そこで「どのような p -elementary 格子が S_X になるのか」ということも気になる. これも S_X の言葉で記述できる.

まずは X が S_X に自明に作用する位数 p の非シンプレクティック自己同型を持つと仮定する. そのとき g と k と n という 3 つの量を求めたい. 従って, 連立方程式としては少なくとも 3 つの式が欲しい. そのうちの 2 つは命題 1.17 と命題 1.18 である. これらを用いることで次が分かる.

²実はもっと広い対象に対して成り立つ. [3, page 542] や [4, page 567] を見よ.

命題 2.1. 位数 p の非シンプレクティック自己同型 σ の孤立固定点の数 n は次で与えられる：

$$n = \begin{cases} 0 & \text{if } p = 2, \\ \frac{9 \operatorname{rank} S_X + 2}{10} & \text{if } p = 11, \\ \frac{(p-2) \operatorname{rank} S_X + 22}{p-1} & \text{if } p = 17, 19, \\ \frac{(p-2) \operatorname{rank} S_X - 2}{p-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この命題の証明をちゃんと追うと、 σ の孤立固定点への局所的な作用も分かる。つまり $P_j^{\alpha, \beta}$ の数も $\operatorname{rank} S_X$ と p で書ける。Lefschetz 公式からいきなり n が得られるのではなく、丁寧に計算することで各 $P_j^{\alpha, \beta}$ の数がちゃんと記述できるから n も分かる、という具合である。

注意 2.2. $p = 13, 17, 19$ のときは p の値だけで具体的に n の値が定まる。(それぞれ $n = 9, 7, 5$ である。) 命題 1.13 によって、 $p = 13$ のときは $\operatorname{rank} S_X = 10$ 、 $p = 17$ のときは $\operatorname{rank} S_X = 6$ 、 $p = 19$ のときは $\operatorname{rank} S_X = 4$ だからである。

固定点は $X^\sigma = C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \dots, P_n\}$ という型をしている。 $\chi(C^{(g)}) = 2 - 2g$ 、 $\chi(E_i) = 2$ であるから、 n が分かった今、 g か k のどちらかが定まればもう一方も定まる。その g を定める式³が Smith の完全系列から得られる。

2.1. Smith の完全系列. 詳細は [5] か [7] を見て欲しい。 $K3$ 曲面と非シンプレクティック自己同型以外にも適用できる⁴理論である。

$\alpha := 1 + \sigma^* + \sigma^{*2} + \cdots + \sigma^{*(p-1)}$ 、 $\beta := 1 - \sigma^*$ とし、 $\rho = \beta^i$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$) とする。また、 $K3$ 曲面 X の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数の鎖複体 (chain complex) を $C(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ とし、その部分鎖複体 $\rho C(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を考える。これから自然に定まるホモロジー群を $H_q^\rho(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と記し、Smith の特別ホモロジー群と言う。以下係数の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は省略する。

我々が扱うケースで Smith の特別ホモロジー群が実際に有用なのは ρ が α と β の時である。特に $H_q^\alpha(X) \simeq H_q(X/\langle \sigma \rangle, X^\sigma)$ が成り立ち、相対ホモロジーという馴染みある話に帰着できる。 $p = 2$ の時は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上では $\alpha = \beta$ であるから、この辺りの話は相対ホモロジー群の意外な(?) 話と解釈もできなくはない。

次が Smith の特別ホモロジーの間に成り立つ完全系列である。

³上で述べた連立方程式で言えば 3 つ目の式。

⁴最近では正則シンプレクティック多様体への応用が知られている。ただし、Smith のホモロジーは自己同型が素数位数の時に定義されていることに注意する。色々考えてみたところ、素数ベキ位数くらいであればホモロジー群くらいなら何とか定義できると思う。しかし命題 2.3 が上手くないので、あまり意味はなさそうである。

命題 2.3. $\rho = \beta^i$, $\bar{\rho} = \beta^{p-i}$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$) とする. このとき

$$\cdots \rightarrow H_q^{\bar{\rho}}(X) \oplus H_q(X^\sigma) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q^\rho(X) \rightarrow \cdots$$

と

$$\cdots \rightarrow H_q^\alpha(X) \rightarrow H_q^{\beta^j}(X) \rightarrow H_q^{\beta^{j+1}}(X) \rightarrow \cdots$$

という完全列が存在する.

上で少し触れたが, 実際に使うのは $\rho = \alpha$, $\bar{\rho} = \beta$ と $\rho = \beta$, $\bar{\rho} = \alpha$ の時である. これらの場合の多くのホモロジー群 (特に $q = 0, 1, 3, 4$) は実際に計算できる. そして $H_2(X)$ の周辺が問題となって, ここで p -elementary 格子が現れてくるのである.

命題 2.3 をちょっと観察してみる, というなら $p = 3$ の時をおススメする. これ以外の場合は 2 つ目の完全系列が意味をなさなかったり, 同じような計算を何度も繰り返すことになる.

さて, この辺り (命題 2.3) をちゃんと調べることで次を得る.

$$\text{命題 2.4. } \sum_q \dim H_q(X^\sigma) = \frac{20 + 2p + (p-2)r - 2(p-1)a}{p-1}.$$

これと命題 1.17 によって σ の固定点集合 X^σ の第 1 Betti 数 $b_1(X^\sigma)$ を得る. 従って X^σ の型から, $C^{(g)}$ の種数を求めることができる. つまりは非特異有理曲線の数 k も分かる.

2.2. 素数位数の非シンプレクティック自己同型. 今までの議論 ($+\alpha$) によって次の定理を得る.

定理 2.5. $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 p の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとする. その固定点集合は

$$X^\sigma = \begin{cases} \phi & S_X = U(2) \oplus E_8(2) \\ C^{(1)} \amalg C^{(1)} & S_X = U \oplus E_8(2) \\ C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \dots, P_n\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である. ここで

$$g = \frac{22 - r - (p-1)a}{2(p-1)},$$

$$k = \begin{cases} \frac{\text{rank } S_X - a}{2} & \text{if } p = 2, \\ \frac{\text{rank } S_X - 10a - 2}{20} & \text{if } p = 11, \\ 0 & \text{if } p = 17, 19, \\ \frac{\text{rank } S_X - (p-1)a + 2}{2(p-1)} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

である. n に関しては命題 2.1 で与えてある.

また, 符号が $(1, r-1)$ である偶な p -elementary 格子がこのような $K3$ 曲面の Néron-Severi 格子になる必要十分条件は

$$(2) \quad 22 - r - (p-1)a \in 2(p-1)\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が成り立つ⁵ことである. なお $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は 0 以上の整数全体を意味する.

注意 2.6. $k = -1$ となる場合があるが, これは $C^{(0)}$ を打ち消していることを意味する. すなわち X^σ は孤立点だけである.

注意 2.7. $p \geq 3$ のとき, (2) をみたす全ての場合の $(X, \langle \sigma \rangle)$ の具体例は構成されている. $p = 2$ の場合は Torelli の定理によって, その存在は確認⁶できる.

例 2.8. $y^2 = x^3 + x + t^7$ で与えられる楕円 $K3$ 曲面 X を考える. このとき $S_X = U \oplus E_8$ であり, $\sigma : (x, y, t) \mapsto (x, y, \zeta_7 t)$ は S_X に自明に作用する位数 7 の非シンプレクティック自己同型である. また, σ の固定点集合は $X^\sigma = C^{(1)} \amalg \mathbb{P}^1 \amalg \{P_1, \dots, P_8\}$ である.

3. 素数ベキ位数の場合

p を素数とし, σ を Néron-Severi 格子に自明に作用する位数 p^l の非シンプレクティック自己同型とする. 命題 1.13 によるとその位数は 2^α ($\alpha \leq 5$), 3 ($\beta \leq 3$), 5, 5^2 , 7, 11, 13, 17, 19 である. しかし金銅 [8, Lemma 6.3] によって $\text{ord } \sigma \neq 2^5$ が示されている. 前節 (素数位数の場合) の事も考慮すると, 残る位数は 4, 8, 16, 9, 27, 25 である. ここでは主に 2 ベキ位数の場合を扱う. 詳細は [20] を参照してほしい. また 3 ベキ位数の場合は [19] や [16] を, 位数 25 の場合は [8] や [10] を参照してほしい.

ここで命題 1.6 を思い出す. $K3$ 曲面が Néron-Severi 格子に自明に作用する位数 p^k の非シンプレクティック自己同型を持つとき, その Néron-Severi 格子は p -elementary 格子であった. 定義 1.10 で導入した δ は 2-elementary 格子の不変量の一つであったが, 2 ベキ位数の非シンプレクティック自己同型に関する重要な情報を備えている.

命題 3.1. $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 4 の非シンプレクティック自己同型を持つとき, S_X において $\delta = 0$ が成り立つ.

$K3$ 曲面の Néron-Severi 格子になり得る 2-elementary 格子は 75 種類あるのだが, そのうち $\delta = 0$ のものは 16 種類である. もちろん全部具体的に書き下すことが可能である. そして位数 4 の非シンプレクティック自己同型については次が成り立つ.

⁵固定曲線の種数 g の式に注目してほしい. ギョクッて行ってしまうと, 分数や負の数の種数が出ては困る, というのである.

⁶具体的な方程式などを記述してある文献を私は知らない.

定理 3.2. $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 4 の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとき, S_X は $U \oplus E_8(2)$, $U(2) \oplus E_8(2)$, $U \oplus D_4^{\oplus 3}$, $U \oplus D_8^{\oplus 2}$ 以外の符号が $(1, r-1)$ であり偶かつ $\delta = 0$ な 2-elementary 格子である. また固定点集合は

$$X^\sigma = E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \dots, P_n\}$$

である. ここで $k = (\text{rank } S_X - 2)/2$, $n = (\text{rank } S_X + 6)/2$ である.

基本的なアイディアは位数 2 の固定点集合 X^{σ^2} と位数 4 の固定点集合 X^σ を比較するのである. Smith の完全系列 (命題 2.3) は機能しないのだが, Lefschetz の公式 (命題 1.17 と命題 1.18) によって孤立固定点の数 n や X^σ の位相的 Euler 数は計算できる. これらと σ^2 の固定曲線の様子を用いて σ の固定曲線を決定していく.

位数 8 と 16 の場合は次が成り立つ.

定理 3.3.

- (1) $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 8 の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとき, S_X は $U \oplus D_4$, $U(2) \oplus D_4$, $U \oplus D_4 \oplus E_8$ である. また固定点集合は

$$X^\sigma = E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \dots, P_n\}$$

である. ここで $k = (\text{rank } S_X + 2)/8$, $n = (3 \text{rank } S_X + 6)/4$ である.

- (2) $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 16 の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとき, S_X は $U \oplus D_4$, $U \oplus D_4 \oplus E_8$ である. また固定点集合は

$$X^\sigma = E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \dots, P_n\}$$

である. ここで $k = (\text{rank } S_X + 2)/8$, $n = (3 \text{rank } S_X + 6)/4$ である.

基本的な証明の方針は定理 3.2 と同じである. ただし孤立固定点のふるまいには注意する必要がある. 位数 8 自己同型の孤立固定点が位数 4 の自己同型の固定曲線の上に沢山ない, ということは確認すべきことである.

なお, 定理 3.2, 定理 3.3 の各場合とも $(X, \langle \sigma \rangle)$ の具体例は構成されている.

例 3.4. $y^2 = x^3 + t^2x + t^{11}$ で与えられる楕円 $K3$ 曲面 X を考える. このとき $S_X = U \oplus D_4$ であり, $\sigma : (x, y, t) \mapsto (\zeta_{16}^2 x, \zeta_{16}^{11} y, \zeta_{16}^2 t)$ は S_X に自明に作用する位数 16 の非シンプレクティック自己同型である.

X は $t = 0$ と ∞ 上で I_0^* 型の特異ファイバーと II 型の特異ファイバーを持っている. σ は I_0^* 型の特異ファイバーの重複度 2 のコンポーネントを固定曲線とし, その他の 4 つの重複度 1 のコンポーネント上に孤立

固定点に1点ずつ定める．これら4点のうち1点は切断（セクション）との交点であり，残りの3点は σ^8 の固定曲線 $C^{(7)}$ との交点である．またII型の特異ファイバーでは尖点（カスプ）を固定し，切断との交点上に固定点を持つ．つまり σ の固定点集合は $X^\sigma = \mathbb{P}^1 \amalg \{P_1, \dots, P_6\}$ である．

4. 位数32の場合

前節までの話で Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する非シンプレクティック自己同型の話は大体落ち着いた．ここでもう一度命題 1.13 を思い出すと，2ベキ位数の非シンプレクティック自己同型の最大位数は32であった．しかしそれは S_X に自明に作用しない．位数32の非シンプレクティック自己同型と $K3$ 曲面の例は次が知られている．

例 4.1 ([15]). $y^2 = x^3 + t^2x + t^{11}$ で与えられる楕円 $K3$ 曲面 X_{og} の自己同型 $\sigma_{\text{og}}(x, y, t) = (\zeta_{32}^{18}x, \zeta_{32}^{11}y, \zeta_{32}^2t)$ は位数32の非シンプレクティック自己同型である．特に σ_{og} は $S_{X_{\text{og}}}$ へ位数2で作用する．

なお一番大きな3ベキ位数は27であり，5ベキ位数は25である．これらの場合は S_X に自明に作用するものが存在する．またそのような $K3$ 曲面と自己同型の組は同型を除いて一意的である．位数32の場合は次が成り立つ．

定理 4.2 ([21]). X を $K3$ 曲面， σ を X 上の位数32の非シンプレクティック自己同型とする．このとき σ の固定点集合は $X^\sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_6\}$ である．また組 $(X, \langle \sigma \rangle)$ は組 $(X_{\text{og}}, \langle \sigma_{\text{og}} \rangle)$ に同型である．

「位数32の非シンプレクティック自己同型」という条件から Weierstrass 方程式を決定するわけだが，最初のステップは σ の S_X への作用を決めることである．命題 1.17 と命題 1.18 と定理 3.2 と定理 3.3 を用いた簡単な計算を行うことで， X^σ の様子や不変格子 $S^{\sigma^*} := \{x \in S_X \mid \sigma^*(x) = x\}$ の階数が5であることが分かる．これによって σ -安定な楕円曲面の構造が存在し，それを調べる．

REFERENCES

- [1] M. Artebani, A. Sarti, Non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces, Math. Ann. **342** (2008), 903–921.
- [2] M. Artebani, A. Sarti, S. Taki, $K3$ surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order, Math. Z. **268** (2011), 507–533.
- [3] M.F. Atiyah, G.B. Segal, The index of elliptic operators: II, Ann. of Math. **87** (1968), 531–545.
- [4] M.F. Atiyah, I.M. Singer, The index of elliptic operators: III, Ann. of Math. **87** (1968), 546–604.
- [5] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Math. **46**, Academic Press, New York-London, 1972.

- [6] A. Garbagnati, A. Sarti, On symplectic and non-symplectic automorphisms of $K3$ surfaces, to appear in *Rev. Mat. Iberoam.*
- [7] 川久保 勝夫, 変換群論, 岩波書店, 1987.
- [8] S. Kondo, Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups, *J. Math. Soc. Japan* **44** (1992), 75–98.
- [9] S. Kondo, Niemeier lattices, Mathieu groups, and finite groups of symplectic automorphisms of $K3$ surfaces *Duke Math. J.* **92** (1998), 593–603
- [10] N. Machida, K. Oguiso, On $K3$ surfaces admitting finite non-symplectic group actions, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **5** (1998), no. 2, 273–297.
- [11] S. Mukai, Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group, *Invent. Math.* **94** (1988), 183–221.
- [12] V.V. Nikulin, Finite automorphism groups of Kählerian $K3$ surfaces, *Trans. Moscow Math. Soc.* **38** (1980), No 2, 71–135.
- [13] V.V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 103–167.
- [14] V.V. Nikulin, Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections. *Algebrogeometric applications*, *J. Soviet Math.*, **22** (1983), 1401–1475.
- [15] K. Oguiso, A remark on the global indices of $\mathbb{Q}$ -Calabi-Yau 3-folds, *Math. Proc. Camb. Phil. soc.* **114** (1993), 427–429.
- [16] K. Oguiso, D.-Q. Zhang, On Vorontsov’s theorem on $K3$ surfaces with non-symplectic group actions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), no. 6, 1571–1580.
- [17] A.N. Rudakov and I.R. Shafarevich, Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic, *J. Soviet Math.*, **22** (1983), 1476–1533.
- [18] S. Taki, Classification of non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces, *Math. Nachr.* **284** (2011), 124–135.
- [19] S. Taki, Non-symplectic automorphisms of 3-power order on $K3$ surfaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **86** (2010), no. 8, 125–130.
- [20] S. Taki, Classification of non-symplectic automorphisms on $K3$ surfaces which act trivially on the Néron-Severi lattice, *J. Algebra* **358** (2012), 16–26.
- [21] S. Taki, On Oguiso’s $K3$ surface, preprint, (2012).
- [22] S.P. Vorontsov, Automorphisms of even lattices that arise in connection with automorphisms of algebraic $K3$ surfaces, *Vestnik Mosk. Univ. Math.* **38** (1983), 19–21.
- [23] G. Xiao, Non-symplectic involutions of a $K3$ surface, preprint, (1995).
- [24] D.-Q. Zhang, Automorphisms of $K3$ surfaces, *AMS/IP Studies in advanced Mathematics*, **39** (2007), 379–392.

SCHOOL OF INFORMATION ENVIRONMENT, TOKYO DENKI UNIVERSITY, 2-1200 MUZAI GAKUENDAI, INZAI-SHI, CHIBA 270-1382, JAPAN

E-mail address: taki@sie.dendai.ac.jp

URL: <http://www.math.sie.dendai.ac.jp/~taki/>

Geometry of sections of certain rational elliptic surfaces and its application

徳永浩雄¹

イントロダクション

ここでは、多様体はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする。 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面とする。ここで、楕円曲面と云えば、

- φ は相対極小であり、
- 切断 O を持つものとする。

さらに、この報告では、

φ は少なくとも一つは特異ファイバーを持つ

と仮定する。 $MW(S)$ は $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断の集合とする。仮定から、 $MW(S) \neq \emptyset$ である。 $MW(S)$ は $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ -有理点の集合とみなされ、よく知られているように O を単位元とするような可換群の構造が入る (Mordell-Weil 群)。この加法を $+$ で表し、 m 倍写像を $[m]s$ で表す。 m が負の整数の場合は、逆元を $-m$ 倍したものと解釈する。なお、以下では切断をその像と同一視し、 S 上の曲線と考えることにする。

さて、 k 個の切断 $s_1, \dots, s_k \in MW(S)$ を選んでその和 $\sum_i [a_i]s_i$ を考えるとこれは $MW(S)$ の新たな元であり、その像は S 上の新たな曲線を与える。本報告の目的は $MW(S)$ 上の演算の結果として得られるこうした S 上の曲線の幾何学的な応用を考察することである。ここでは、ある特別な有理楕円曲面上で、 $s, [2]s$ が与える曲線が、conic-line arrangement の Zariski 対の例を構成するのに利用できることを紹介する。

まず、Zariski 対の定義を復習しておく：

Definition 1 次数 n の被約な平面代数曲線の対 (B_1, B_2) が以下の条件を満たすとき、これを次数 n の Zariski 対という。

- B_i ($i = 1, 2$) はともに次数 n の曲線であり、 B_1 の combinatorial type (以下の Definition 2 を参照) は B_2 のそれと等しい。
- ペア $(\mathbb{P}^2, B_1)$ からペア $(\mathbb{P}^2, B_2)$ への同相写像は存在しない。

Definition 2 ([6]) 曲線 B の combinatorial type とは以下の 7 つ組

$$(\text{Irr}(B), \deg, \text{Sing}(B), \Sigma_{\text{top}}(B), \sigma_{\text{top}}, \{B(P)\}_{P \in \text{Sing}(B)}, \{\beta_P\}_{P \in \text{Sing}(B)}),$$

で与えられる。

¹首都大学東京 理工学研究科, tokunaga@tmu.ac.jp

- $\text{Irr}(B)$ は B の既約成分の集合であり, $\deg : \text{Irr}(B) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は各既約成分にその次数を対応させる写像である.
- $\text{Sing}(B)$ は B の特異点の集合であり, $\Sigma_{\text{top}}(B)$ は $\text{Sing}(B)$ の各点の topological type の集合である. さらに, $\sigma_{\text{top}} : \text{Sing}(B) \rightarrow \Sigma_{\text{top}}(B)$ は各特異点に対し, その topological type を対応させる写像とする.
- $B(P)$ は B の $P \in \text{Sing}(B)$ は局所分枝の集合とし, $\beta_P : B(P) \rightarrow \text{Irr}(B)$ は各局所分枝にその分枝を含む既約成分を対応させる写像とする.

二つの被約な平面曲線 B_1 と B_2 が, *same combinatorial type* をもつ (または, 単に *same combinatorics* をもつ) とは, 上記の combinatorial types のデータ

$$(\text{Irr}(B_i), \deg_i, \text{Sing}(B_i), \Sigma_{\text{top}}(B_i), \sigma_{\text{top}_i}, \{\beta_{i,P}\}_{P \in \text{Sing}(B_i)}, \{B_i(P)\}_{P \in \text{Sing}(B_i)}), \quad i = 1, 2,$$

が等しいことをいう. すなわち, $\Sigma_{\text{top}}(B_1) = \Sigma_{\text{top}}(B_2)$, であり, 全単射写像 $\varphi_{\text{Sing}} : \text{Sing}(B_1) \rightarrow \text{Sing}(B_2)$, $\varphi_P : B_1(P) \rightarrow B_2(\varphi_{\text{Sing}}(P))$ (各 $P \in \text{Sing}(B_1)$) $\varphi_{\text{Irr}} : \text{Irr}(B_1) \rightarrow \text{Irr}(B_2)$ が存在して, 以下条件をみたす: $\deg_2 \circ \varphi_{\text{Irr}} = \deg_1$, $\sigma_{\text{top}_2} \circ \varphi_{\text{Sing}} = \sigma_{\text{top}_1}$, and $\beta_{2, \varphi_{\text{Sing}}(P)} \circ \varphi_P = \varphi_{\text{Irr}} \circ \beta_{1,P}$.

B_i ($i = 1, 2$) が既約のとき, B_1 と B_2 は次数が等しく, 特異点の数, 対応する各特異点の topological type が等しいとき, *same combinatoric* を持つ. また, line arrangement の場合は, それぞれの incidence relations が等しいとき, B_1 と B_2 は *same combinatorial type* を持つ.

Zarsiki 対の最初の例はその名が示す通り Zariski ([17, 18]) により与えられた以下の例である:

Example 3 (B_1, B_2) は以下の条件を満たす既約な 6 次曲線の対とする: (i) B_1 と B_2 はともに既約 6 次曲線でその特異点は 6 個のカスプのみである. (ii) B_1 の 6 個のカスプはある 2 次曲線上にあるが, B_2 の 6 個のカスプを通る 2 次曲線は存在しない. このとき, (B_1, B_2) は Zariski 対である.

Zariski の例以降, Zariski 対の研究はしばらく進展がほとんどなかったが, 90 年代に入ってから多くの研究がなされた (例えば, [6] の参考文献を参照). そのなかでも, 次のような例がある:

Example 4 1. (Artal Bartolo, 徳永 [7]) B_1, B_2 はそれぞれ 2 つの nodal cubic を既約成分にもつ 6 次曲線とする. $B_i = C_{i,1} + C_{i,2}$ とおく. B_1, B_2 ともに $C_{i,1}$ と $C_{i,2}$ は 1 点で 9 重に交わっているものとする. さらに, $C_{1,1} \cap C_{1,2}$ は各 nodal cubic の変曲点, $C_{2,1} \cap C_{2,2}$ は各 cubic の変曲点ではない, とする. このとき, (B_1, B_2) は Zariski 対である.

2. (土橋, 難波 ([12])) B_1, B_2 はともに 4 つの既約な 2 次曲線を既約成分にもつ 8 次曲線とする. $B_i = \sum_{j=1}^4 C_{i,j}$ とおく. さらに,

- (i) $i = 1, 2$ に対して, $C_{i,j}$ ($j = 1, 2$) は $C_{i,j}$ ($j = 3, 4$) に相異なる 2 点で接する.
- (ii) $C_{i,1} \cap C_{i,2}, C_{i,3} \cap C_{i,4}$
- (iii) B_i ($i = 1, 2$) の特異点は node と tacnode のみである.

(iv) B_1 に関しては, 8 つの接点を通る 2 次曲線が存在するが, B_2 にはそのような 2 次曲線は存在しない.

このとき, (B_1, B_2) は Zariski 対である.

3. (Artal-Bartolo, Carmona-Ruber, Cogolludo-Agustin, Marco-Buzunariz ([4], [5])) 9 本の直線, 11 本の直線からなる line arrangement の Zariski 対

ここでは, ある有理楕円曲面の切断 $s, [2]s$ を利用して, conic-arrangement の Zariski 対が構成できることを紹介したい.

Remark 5 Conic-line arrangements については, M. Amram, M. Friedman, D. Garber, M. Teicher and A. M. Uludag による研究がある ([1, 2, 3, 9]). 彼らの結果は conic-line arrangement の補空間の基本群の性質に関するものだが, Zariski 対の例は与えて無いようである.

[6] において述べているように (乱暴かもしれないが) Zariski 対の研究は以下の 2 つのステップからなると云える:

(I) same combinatorics を持つけれども, “何か違った性質,” 例えば— Example 3 にあるように特異点の location に関する違い—を持つように B_1 と B_2 を構成すること.

(II) 対 $(\mathbb{P}^2, B_1)$ が $(\mathbb{P}^2, B_2)$ 同相にならないことを示す.

ここでは, 上記の (I) について, 新たな手法を紹介したい. すなわち, 楕円曲面の Mordell-Weil 群の演算および切断から構成できる曲線の幾何学を用いる手法である. 以下, どのようにして平面曲線を構成するかを簡単に説明する.

まず, この節のはじめに述べた楕円曲面 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は常に以下のような形で得られていることに注目する (詳しくは, [11] 等を参照されたい).

- Σ_d は次数 d (d は偶数) の Hirzebruch 曲面とする.
- Δ_0 は $\Delta_0^2 = -d$ を満たす切断, T は (i) 高々単純特異点しか持たず (単純特異点については, [8] 参照), (ii) $\Delta_0 \cap T = \emptyset$ を満たす Σ_d 上の tri-section とする (この条件のもと, $\Delta_0 + T$ は $\text{Pic}(\Sigma_d)$ で 2-divisible である).
- $f': S' \rightarrow \Sigma_d$ は $\Delta_0 + T$ で分岐する 2 次被覆とする.
- $\mu: S \rightarrow S'$ は標準特異点解消とする (標準特異点解消については [10] 参照). 仮定から μ は最小特異点解消であり, 以下の ‘double cover diagram’ を満たす:

$$\begin{array}{ccc} S' & \xleftarrow{\mu} & S \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma_d & \xleftarrow[q]{} & \hat{\Sigma}_d. \end{array}$$

ここで, q は blow-up の合成であり, f は誘導された 2 次被覆である (f の分岐因子は非特異である).

上記の設定のもと、 S は以下の二つの条件を満たす $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面となる：

- 楕円ファイバー空間 $\varphi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $\Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}^1$ から引き起こされたものである。
- φ は Δ_0 の preimage として切断 O を持つ。

Δ_1 及び Δ_2 はともに Σ_d の切断で条件： $\Delta_i^2 = d$ 及び $\Delta_i \cap \Delta_0 = \emptyset$ ($i = 1, 2$) を満たすものとする。 $\overline{\Delta}_i$ ($i = 1, 2$) はそれぞれ q より Δ_i ($i = 1, 2$) の狭義引き戻しとする。ここで、以下の条件が満たされているとしよう：

1. 各 i に対し、 $f^*(\overline{\Delta}_i)$ は二つの切断 $s_{\Delta_i}^\pm$ である。
2. $\widehat{\Sigma}_d$ は有限回の blow-down のち、 $\mathbb{P}^2$ になる。この blow-down の写像を $\bar{q} : \widehat{\Sigma}_d \rightarrow \mathbb{P}^2$ で表す。

上記の設定で、 $[2]s_{\Delta_i}^+$ ($i = 1, 2$) を $\text{MW}(S)$ において $s_{\Delta_i}^+$ を 2 倍して定まる切断とし、same combinatorics をもつ平面代数曲線 B_1 及び B_2 を構成する手法として $\bar{q} \circ f(s_{\Delta_i}^+)$, $\bar{q} \circ f([2]s_{\Delta_i}^+)$ ($i = 1, 2$), 及び $\bar{q}(\Delta(S/\widehat{\Sigma}_d))$ を利用することを考える。ただし、 $\Delta(S/\widehat{\Sigma}_d)$ は f の分岐因子である。本稿では、このアイデアを $d = 2$ に利用して、次数 7 の conic-line arrangement に関する Zariski 対を構成する。

Zariski 対研究の Step (II) については、これまでの論文 [13, 14, 15] 同様、Galois 群が位数 $2n$ の二面体群 D_{2n} に同型となるような $\mathbb{P}^2$ の Galois 分岐被覆 (D_{2n} -被覆) を利用する。さて、この報告で扱う次数 7 の conic-line arrangement は以下の通りである：

Conic-line arrangement 1

C_i ($i = 1, 2$) はともに非特異な 2 次曲線、 L_j ($i = 1, 2, 3, 4$) は直線で以下の条件を満たすものとする：

- (i) L_1 と L_2 は共に C_1 と横断的に交わる。 $C_1 \cap L_1 = \{P_1, P_2\}$, $C_1 \cap L_2 = \{P_3, P_4\}$ とおく。
- (ii) C_2 は C_1 に相異なる 2 点 $\{Q_1, Q_2\}$ で接するかまたは 1 点 $\{Q\}$ で接する。ここで、前者を type (a)、後者を type (b) と呼ぶ。
- (iii) $C_1 \cap C_2$ の点における接線は $L_1 \cap L_2$ を通らない。
- (iv) C_2 は L_1 と L_2 に接する。
- (v) L_3 は P_1 と P_3 を通る。
- (vi) L_4 は P_1 と P_4 を通る。
- (vii) L_3 と L_4 は共に C_2 と横断的に交わる。

$B_1 := C_1 + C_2 + L_1 + L_2 + L_3$, $B_2 := C_1 + C_2 + L_1 + L_2 + L_4$ とおく。すると、 B_1 と B_2 は same combinatorics を持つ。

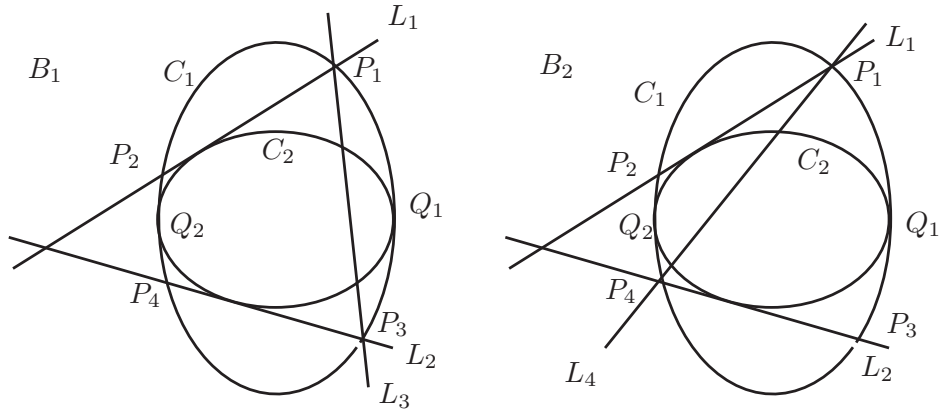
続いて Conic-line arrangement 2 について説明する. この conic-line arrangement は Conic-line arrangement 1 の直線 L_1 と L_2 を非特異な 2 次曲線に置き換えたものである.

Conic-line arrangement 2

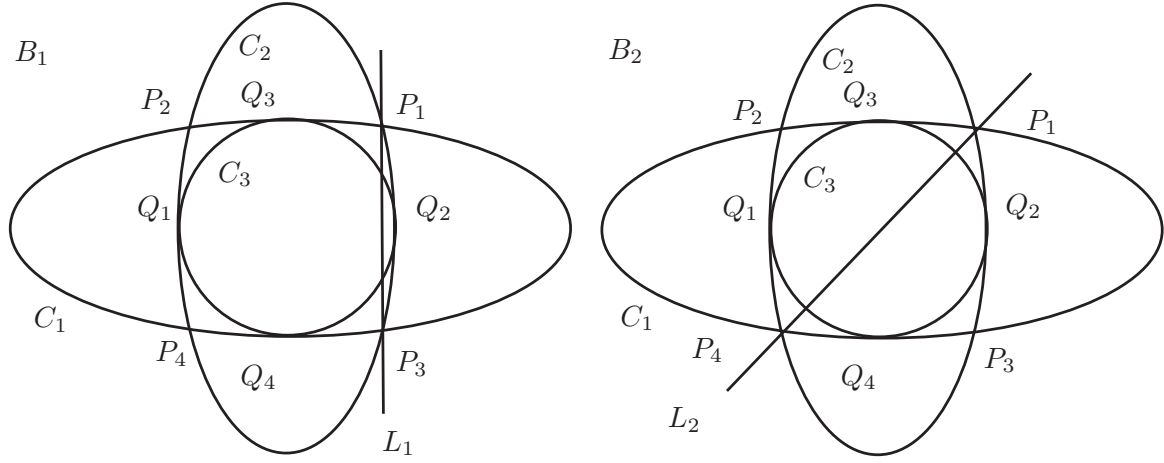
C_1, C_2, C_3 はすべて非特異な 2 次曲線, L_1 は L_2 は直線で以下の条件を満たすものとする:

- (i) C_1 と C_2 は横断的に交わる. $C_1 \cap C_2 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ とおく.
- (ii) C_3 は C_1 及び C_2 に各交点での交点数が偶数になるように接する. 必要なら C_1 と C_2 を取り替えると, 以下の 3 通りのどれかが起きているとしてよい:
 - (a) $C_3 \cap C_1 = \{Q_1, Q_2\}, C_3 \cap C_2 = \{Q_3, Q_4\}$.
 - (b) $C_3 \cap C_1 = \{Q_1\}, C_3 \cap C_2 = \{Q_2, Q_3\}$.
 - (c) $C_3 \cap C_1 = \{Q_1\}, C_3 \cap C_2 = \{Q_2\}$.
- (iii) 各 Q_i における接線は $C_1 + C_2$ の 2 重接線 (bitangent line) でない.
- (iv) L_1 は P_1 と P_3 を通る.
- (v) L_2 は P_1 と P_4 を通る.
- (vi) L_1 及び L_2 共に C_3 と横断的に交わる.

$B_1 := C_1 + C_2 + C_3 + L_1$, $B_2 := C_1 + C_2 + C_3 + L_2$ とおく. B_1 と B_2 は same combinatorics をもつ.



Conic-line arrangement 1 of type (a)



Conic-line arrangement 2 of type (a)

ここでは、明示的に与えられた有理楕円曲面とそのうえの切断を利用して以下の二つの条件を満たす conic-line arrangement の対の例を与える。より一般の statement や証明の詳細については [16] を参照されたい。

Theorem 6 (i) conic-line arrangement の対 (B_1, B_2) で、(イ) B_i ($i = 1, 2$) は Conic-line arrangement 1 で述べた combinatorics をもつ、(ロ) (B_1, B_2) は Zariski 対である、を満たすものが存在する。

(ii) conic-line arrangement の対 (B_1, B_2) で、(イ) B_i ($i = 1, 2$) は Conic-line arrangement 2 で述べた combinatorics をもつ、(ロ) (B_1, B_2) は Zariski 対である、を満たすものが存在する。

1 例の構成

Example 1.1 $[T, X, Z]$ は $\mathbb{P}^2$ の同次座標 $(t, x) := (T/Z, X/Z)$ は $Z = 0$ を無限遠直線とおいたときの $\mathbb{P}^2$ の非同次座標とする。以下のような 2 次曲線 C_1 と 4 つの直線 L_1, L_2, L_3, L_4 を考える：

$$\begin{aligned} C_1 : x - t^2 = 0, \quad L_1 : x - 3t + 2 = 0, \quad L_2 : x + 3t + 2 = 0, \\ L_3 : x - t - 2 = 0, \quad L_4 : x - 1 = 0. \end{aligned}$$

$C_1 \cap (L_1 \cup L_2) = \{[\pm 1, 1, 1], [\pm 2, 4, 1]\}$ であることに注意する。 $Q_1 = C_1 + L_1 + L_2$ とおき、 $z_o = [0, 1, 0]$ とおく。 S'_1 は Q_1 で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆とする。 z_o を通る直線のペンシルは S'_1 上に種数 1 の曲線束 Λ_{z_o} を引き起こす。 S'_1 の特異点を解消し、さらに $\Lambda_{z_o, 1}$ の base point を解消すると有理楕円曲面 $\varphi_{z_o, 1} : S_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ をえる。この有理楕円曲面は Weierstrass 方程式

$$S_1 : y^2 = (x - t^2)(x - 3t + 2)(x + 3t + 2).$$

で与えられる楕円曲面である。

この設定のもと、 S_1 の切断 $s_{L_i}^\pm (i = 3, 4)$ を以下のように選ぶ：

$$s_{L_3}^\pm = (t + 2, \pm 2\sqrt{2}(t - 2)(t + 1)) \quad s_{L_4}^\pm = (1, \pm 3(t + 1)(t - 1)).$$

S_1 の生成ファイバーを $\mathbb{C}(t)$ 上の楕円曲線とみて、楕円曲線上の ‘2 倍’ 写像を計算すると、

$$[2]s_{L_3}^+ = (\frac{9}{8}t^2, \frac{1}{32}t\sqrt{2}(9t^2 - 16)), \quad [2]s_{L_4}^+ = (t^2 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}t^2 - \frac{9}{8})$$

を得る。ここで、

$$C_2 : x - \frac{9}{8}t^2 = 0, \quad C'_2 : x - t^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

とおく。 $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_3$ と $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_4$ はともに Conic-line arrangement 1 of type (a) の combinatorics をもつ。また、 $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_3$ と $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_4$ はともに Conic-line arrangement 1 of type (b) の combinatorics をもつ。

p は奇素数、 D_{2p} は位数 $2p$ の二面体群とする。このとき、[16] より、

- $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_3$ (resp. $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_4$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で、 $\mathcal{Q}_1$ に沿って 2 重に分岐、 $C_2 + L_3$ (resp. $C'_2 + L_4$) に沿って p 重に分岐するものが存在する。
- $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_4$ (resp. $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_3$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で、 $\mathcal{Q}_1$ に沿って 2 重に分岐、 $C_2 + L_4$ (resp. $C'_2 + L_3$) に沿って p 重に分岐するものは存在しない。

が従う。故に、 $(\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_3, \mathcal{Q}_1 + C_2 + L_4)$, $(\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_3, \mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_4)$ はともに Zariski 対となる。

Example 1.2 座標に関する記号は Example 1.1 のものを踏襲する。

Conic-line arrangement 2 of type (a).

以下の定義方程式で与えられる 2 次曲線 C_1, C_2 と直線 L_1, L_2 を考える：

$$\begin{aligned} C_1 : x - t^2 + 2 &= 0, & C_2 : x^2 - 2x + t^2 - 4 &= 0, \\ L_1 : x - t &= 0, & L_2 : x - 3t + 4 &= 0. \end{aligned}$$

$C_1 \cap C_2 = \{[\pm 2, 2, 1], [\pm 1, -1, 1]\}$ であることに注意する。 $\mathcal{Q}_2 = C_1 + C_2$, $z_o = [0, 1, 0]$ とおく。 Example 1.1 と同様、 S'_2 を $\mathcal{Q}_2$ で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆とすれば、 z_o を通る直線のペンシルは S'_2 上に種数 1 の曲線束 $\Lambda_{z_o, 2}$ を引き起こす。 S'_2 の特異点を解消し、さらに $\Lambda_{z_o, 2}$ の base point を解消すると有理楕円曲面 $\varphi_{z_o, 2} : S_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る。この有理楕円曲面は Weierstrass 方程式

$$y^2 = (x - t^2 + 2)(x^2 - 2x + t^2 - 4).$$

で与えられる楕円曲面である。この設定のもと S_2 の切断 $s_{L_i}^\pm (i = 1, 2)$ を以下のように選ぶ：

$$s_{L_1}^\pm = (t, \pm \sqrt{-2}(t + 1)(t - 2)), \quad s_{L_2}^\pm = (3t - 4, \pm \sqrt{-10}(t - 1)(t - 2)).$$

すると、Example 1.1 と同様にして、

$$[2]s_{L_1}^+ = (\frac{1}{2}t^2 - 2, -\frac{1}{4}\sqrt{-2}t(t^2 - 4)), \quad [2]s_{L_2}^+ = (\frac{1}{10}t^2 - 2, -\frac{3}{100}\sqrt{-10}t(t^2 + 20)).$$

を得る．ここで，

$$C_3 : x - \frac{1}{2}t^2 + 2 = 0, \quad C'_3 : x - \frac{1}{10}t^2 + 2 = 0$$

とおく． $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$, $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$, $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_1$, $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_2$ はすべて Conic-line arrangement 2 of type (a) の combinatorics をもつ．Example 1.1 と同様にして，[16] より，

- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$ (resp. $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_2$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で， $\mathcal{Q}_1$ に沿って 2 重に分岐， $C_3 + L_1$ (resp. $C'_3 + L_2$) に沿って p 重に分岐するものが存在する．
- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$ (resp. $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_1$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で， $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐， $C_3 + L_2$ (resp. $C'_3 + L_1$) に沿って p 重に分岐するものは存在しない．

が従う．故に， $(\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2)$, $(\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_2)$ はともに Zariski 対となる．

Conic-line arrangement 2 of type (b).

Conic-line arrangement 2 of type (a) で考えた楕円曲面 $\varphi_{z_0,2} : S_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ とつぎの定義方程式で与えられる直線 L_1, L_2 を考える．

$$L_1 : x - t = 0, \quad L_2 : x + 1 = 0.$$

L_2 から定まる S_2 の切断を

$$s_{L_2}^\pm = (-1, \pm\sqrt{-1}(t-1)(t+1)).$$

とおく．すると，

$$[2]s_{L_2}^+ = \left(t^2 - \frac{17}{4}, \frac{3}{8}\sqrt{-1}(4t^2 - 19)\right).$$

を得る．ここで，

$$C_3 : x - t^2 + \frac{17}{4} = 0.$$

とおく．すると，2 次曲線 C_3 は C_1 には 1 点で， C_2 には相異なる 2 点で接することがわかる． C_3 と L_i ($i = 1, 2$) の交わりを考えると $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$ と $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$ はともに Conic-line arrangement 2 of type (b) の combinatorics をもつ．さらに，これまでと同様にして，[16] より，

- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で， $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐， $C_3 + L_2$ に沿って p 重に分岐するものが存在する．
- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で， $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐， $C_3 + L_1$ に沿って p 重に分岐するものは存在しない．

が従う．故に， $(\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2)$ は Zariski 対となる．

Conic-line arrangement 2 of type (c).

以下の定義方程式で与えられる 2 次曲線 C_1, C_2 と直線 L_1, L_2 を考える：

$$\begin{aligned} C_1 : x - t^2 + \frac{1}{2} &= 0, & C_2 : x^2 - x + t^2 &= 0, \\ L_1 : x &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & L_2 : \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{-1}c_1 - c_2)x + t - \frac{1}{4} (\sqrt{-1}c_1 + c_2) &= 0, \end{aligned}$$

ただし, $c_1 = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}, c_2 = \sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}$ とする. このとき,

$$C_1 \cap C_2 = \left\{ \left[\pm \sqrt{-1/2 + 1/\sqrt{2}}, 1/\sqrt{2}, 1 \right], \left[\pm \sqrt{-1/2 - 1/\sqrt{2}}, -1/\sqrt{2}, 1 \right] \right\}.$$

である. $\mathcal{Q}_3 = C_1 + C_2$ とし, $z_o = [0, 1, 0]$ とおく. これまでの例と同様に, $\mathcal{Q}_3$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆上で z_o を通る直線のペンシルから得られる種数 1 の曲線束の固定点を除去して, 有理楕円曲面 $\varphi_{z_o,3} : S_3 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る. この楕円曲面は Weierstrass 方程式

$$y^2 = \left(x - t^2 - \frac{1}{2} \right) (x^2 - x + t^2).$$

で与えられるている. ここで, L_1, L_2 から定まる S_3 の切断を

$$s_{L_1}^{\pm} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} (-2t^2 - 1 + \sqrt{2}) \right).$$

とおく. すると,

$$[2]s_{L_1}^+ = \left(t^2, \sqrt{-\frac{1}{2}}t^2 \right)$$

を得る. ここで,

$$C_3 : x - t^2 = 0$$

とおく. このとき, $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_1$ 及び $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_2$ は共に Conic-line arrangement 2 of type (c) の combinatorics を持つ. さらに, これまでと同じように [16] より,

- $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_1$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_2$ に沿って p 重に分岐するものが存在する.
- $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_2$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_1$ に沿って p 重に分岐するものは存在しない.

が従う. 故に, $(\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2)$ は Zariski 対となる.

参考文献

- [1] M. Amram, D. Garber and M. Teicher: *Fundamental groups of tangent conic-line arrangements with singularities up to order 6*, Math. Z. **256**, 837-870 (2007).

- [2] M. Amram, D. Garber and M. Teicher: *Fundamental groups of two tangent conics and an arbitrary number of tangent lines*, [arXiv:math/0612346v2](#).
- [3] M. Amram, M. Teicher and A. M. Uludag: *Fundamental groups of some quadric-line arrangements*, *Topology Appl.* **130**, 159-173 (2003).
- [4] E. Artal, J. Carmona, J.I. Cogolludo, and M.Á. Marco: *Topology and combinatorics of real line arrangements*, *Compos. Math.* **141** (2005), no. 6, 1578–1588.
- [5] E. Artal, J. Carmona, J.I. Cogolludo, and M.Á. Marco: *Invariants of combinatorial line arrangements and Rybnikov's example*, *Singularity theory and its applications*, *Adv. Stud. Pure Math.* **43** (2007), 1–34.
- [6] E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo and H. Tokunaga: *A survey on Zariski pairs*, *Adv.Stud.Pure Math.*, **50**(2008), 1-100.
- [7] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: *Zariski pairs of index 19 and Mordell-Weil groups of K3 surfaces*, *Proc. London Math. Soc.*, **80** (2000), 127 -144.
- [8] W. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters and A. Van de Ven: *Compact complex surfaces*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **4** 2nd Enlarged Edition, Springer-Verlag (2004).
- [9] M. Friedman and D. Garber: *On the structure of fundamental groups of complements of conic-line arrangements*, [arXiv:math/1111.5291](#).
- [10] E. Horikawa: *On deformation of quintic surfaces*, *Invent. Math.* **31** (1975), 43 – 85.
- [11] R. Miranda: *Basic theory of elliptic surfaces*, *Dottorato di Ricerca in Matematica*, ETS Editrice, Pisa, 1989.
- [12] M. Namba and H. Tsuchihashi, *On the fundamental groups of Galois covering spaces of the projective plane*, *Geom. Dedicata* **104** (2004), 97–117.
- [13] H. Tokunaga: *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces*, *Math. Z.* **227** (1998), 465-477
- [14] H. Tokunaga: *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces II: Degtyarev's conjecture*, *Math.Z.* **230** (1999), 389-400
- [15] H. Tokunaga: *Dihedral covers and an elementary arithmetic on elliptic surfaces*, *J. Math. Kyoto Univ.* **44**(2004), 55-270.
- [16] H. Tokunaga: *Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers* to appear in *J. of Math. Soc. of Japan*.

- [17] O. Zariski: *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.
- [18] O. Zariski: *The topological discriminant group of a Riemann surface of genus p* , Amer. J. Math. **59** (1937), 335–358.

p 巡回 McKay 対応

安田健彦 (大阪大学)

2012 年 12 月 14 日

この記事は基本的に論文 [4] の内容の解説である．詳細は論文を参照のこと．

1 標数 0 の McKay 対応

この章では標数 0 の代数的閉体 k 上で考える．非特異代数多様体 M に有限群 G が忠実に作用している状況を考える． $X := M/G$ を商多様体とし， $Y \rightarrow X$ をクレパント特異点解消とする．このとき，一般に *McKay* 対応とは，多様体 Y の不変量と G 多様体 M の不変量が等しいことを言う（ことが多い）．その中でも以下の結果は著者の知る限り，一般次元での最初の結果だ．Reid により予想され，Batyrev[1] により証明された．

定理 1. $G \subset SL_d(k)$ を有限部分群， $X = \mathbb{A}_k^d/G$ を商多様体， $f: Y \rightarrow X$ をクレパント特異点解消（つまり，相対標準因子 K_f が消える）とする．このとき， Y の位相的 *Euler* 標数は G の元の共役類の数に等しい．

$$e_{top}(Y) = \#Conj(G)$$

これは次の定理により精密化できる（これも，本質的には Batyrev により同じ論文で示されている．）

定理 2. 同じ仮定で，

$$[Y] = \sum_{g \in Conj(G)} \mathbb{L}^{age(g)}.$$

ここで等式は，代数多様体の圏の *Grothendieck* 環 $K_0(Var_k)$ の適当な拡大の中で考え， $\mathbb{L}$ はアフィン直線の類 $[\mathbb{A}_k^1]$ を表す．

この等式の両辺に、位相的 Euler 標数実現 e_{top} を適用すると左辺は $e_{top}(Y)$ になる．一方、 $e_{top}(\mathbb{L}) = 1$ なので、右辺は $\#Conj(G)$ に等しく、定理 1 が従う．

2 モチーフ積分によるアプローチ

上記の Batyrev の結果に対し、Denef-Loeser[2] によるモチーフ積分を使ったアプローチがある．ここでは、その概要を、著者による Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分 [3] の言葉で説明する．まず、 $J_\infty X$ を代数多様体 X のアーク空間とする．つまり、

$$J_\infty X = \{Spec k[[t]] \rightarrow X\}.$$

(ただし、この論説では簡単のためにスキームとその閉点の集合を同一視する．) この空間にはモチーフ測度が入り、可測関数

$$F : J_\infty X \supset C \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

に対し、積分

$$\int_C \mathbb{L}^F d\mu_X$$

が定まる．さらに X が $\mathbb{Q}$ -Gorenstein の場合、標準的な可測関数 F_X が定まり、弦理論的¹モチーフが

$$M_{st}(X) = \int_{J_\infty X} \mathbb{L}^{F_X} d\mu_X \quad (1)$$

と定義される．元々、弦理論的不変量は Batyrev により特異点解消のデータを使い定義されたのだったが、このようにモチーフ積分を使うことで、特異点解消を使わずに標準的に定義することが出来る．後の章では正標数の場合について述べるが、そこでは特異点解消の存在が知られていないため、このような定義方法を採用するのが適切である．

さて、 $f : Y \rightarrow X$ を特異点解消とすると、変数変換公式より

$$M_{st}(X) = \int_{J_\infty Y} \mathbb{L}^{-F_{K_f}} d\mu_Y$$

¹Batyrev はミラー対称性の研究のために弦理論的不変量を導入し、このような名前を付けた．さらに、この不変量は、アーク空間上の積分として定義可能なので、その意味でも弦理論的といえることができなくもない．

となり，弦理論的モチーフは特異点解消のアーキ空間上のモチーフ積分として表される．さらに， K_f が単純正規交差なら，この積分は明示的に計算できる．さらに， $K_f = 0$ つまり f がクレパントなら，

$$M_{st}(X) = \int_{J_\infty Y} 1 d\mu_Y = [Y]$$

となる．

ここで， X が商多様体 M/G であるとしよう． $\mathcal{X}$ を商スタック $[M/G]$ を表すとすると，これは非特異 Deligne-Mumford スタックになり，自然な射 $\mathcal{X} \rightarrow X$ は有限双有理射になる．つまり， $\mathcal{X} \rightarrow X$ はスタックの圏での特異点解消とみなせる．ここで，適切にモチーフ積分をスタックに一般化しておく，変数変換公式を使い (1) を $\mathcal{X}$ の一般化されたアーキの空間上のモチーフ積分に書き直すことができ，それは簡単に計算できる．（元の積分を直接計算するのは X のジェット・スキームの構造がよく分からないので難しい．）

定義 3. $\mathcal{X}$ の捩れアーキを

$$[\mathrm{Spec} k[[t^{1/l}]]/\mu_l] \rightarrow \mathcal{X}$$

という形の表現可能射と定義する（ここで μ_l は 1 の l 乗根のなす群を表す．表現可能とは，誘導される有限群の準同型が単射であることと同値．） $\mathcal{X}$ の捩れアーキ全体の空間を $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ を書く．

この定義で自然数 l は固定しないが，表現可能という条件より $\sharp G$ の約数のみを考えればよい．空間 $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ は G の元の共役類の数だけ連結成分をもち，各成分も簡単に記述できる．射 $\mathcal{X} \rightarrow X$ に対する変数変換公式から

$$M_{st}(X) = \int_{\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}} \mathbb{L}^{s_{\mathcal{X}}} d\mu_{\mathcal{X}}$$

となる．右辺は $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ 上のモチーフ積分で $s_{\mathcal{X}}$ は各連結成分上で一定となる関数．さらに，これは

$$\sum_{g \in \mathrm{Conj}(G)} \mathbb{L}^{\mathrm{age}(g)}$$

に等しいことが，簡単に分かる．これより，定理 2 が従う．

3 標数 p で p 巡回群の場合

ここまでは標数 0 の基礎体上で話を進めてきたが、標数が群の位数を割りきらない場合にまで問題なく一般化できる．逆に、標数が群の位数を割り切る時を野生的と良い、一般に（この McKay 対応に限らず）問題が難しくなる．McKay 対応については、野生的な場合はほとんど調べられていなかったの、まず一番簡単な場合つまり、群の位数と標数が一致する場合を調べたのが今回の結果だ．

3.1 主結果

k を標数 $p > 0$ の完全体とし、 G を位数 p の巡回群、 $V = \mathbb{A}_k^d$ を G 表現、つまり G 線形作用を与えられているとする．主結果を述べるために、まず V の不変量 $D_V \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を以下のように定義する． V は

$$V = \bigoplus_{\lambda=1}^l V_{d_\lambda}, \quad (1 \leq d_\lambda \leq p, \sum d_\lambda = d)$$

と一意的に分解する．ここで V_{d_λ} は唯一の d_λ 次元直既約 G 表現．このとき、

$$D_V := \sum_{\lambda=1}^l \frac{(d_{\lambda-1} - 1)d_\lambda}{2}$$

と定義する．

$X = V/G$ とする．このとき、同様に弦理論的モチーフ $M_{st}(X)$ を $J_\infty X$ 上のモチーフ積分として定義する．標数 0 の場合と違い、 $M_{st}(X) = \infty$ となる（積分が発散する）ことがある．

定義 4. X は弦理論的ログ端末 $\Leftrightarrow M_{st}(X) \neq \infty$

もし X が弦理論的ログ端末なら通常の意味でログ端末である．もし特異点解消 $f : Y \rightarrow X$ で K_f が単純交差となるものがあれば、逆も成り立つ．

また、次の事実は簡単に確かめられる．

事実 5. 次が成り立つ．

1. V は自明（つまり G は V に自明に作用する） $\Leftrightarrow D_V = 0$

2. V は非自明とする．このとき， $\text{codim}(V^G \subset V) = 1 \Leftrightarrow X$ は非特異
 $\Leftrightarrow D_V = 1$

さて，主結果を述べよう．

定理 6. $D_V \geq 2$ とする ($D_V = 1$ の場合については [4] を参照のこと.)

1. X は弦理論的ログ端末 $\Leftrightarrow D_V \geq p$.
 2. クレパント特異点解消 $f: Y \rightarrow X$ が存在すると仮定する．このとき，

- (a) $D_V = p$.
 (b) Y の (l 進コホモロジーで定義した) 位相的 Euler 標数は p . ($p = \sharp G$ なので，定理 1 はこの場合にも成り立つ.)
 (c) k が有限体， f は k 上で定義されているとする．さらに $x \in X$ を原点の像， $E_0 = f^{-1}(x) \subset Y$ をその逆像とする．このとき，任意の有限拡大 $\mathbb{F}_q/k$ に対し，

$$\sharp E_0(\mathbb{F}_q) = 1 + \frac{p-1}{p} \sum_{j>0, p \nmid j} \frac{N_{q,j}}{q^{\text{sht}_V(j)}}.$$

ここで， $N_{q,j}$ は $\mathbb{F}_q((t))$ の分岐ジャンプが j の次数 p ガロア拡大の数，

$$\text{sht}_V(j) := \sum_{\lambda=1}^l \sum_{i=1}^{d_\lambda-1} \left\lfloor \frac{ij}{p} \right\rfloor.$$

最後の結果は，商特異点の弦理論的不変量，そしてその特異点解消の幾何と局所体の拡大の数え上げが深く関連している（または一致している）という著者の予想²の特別な場合と見なせる．

3.2 証明の概略

標数 0 と同じ方針での証明を試みる．簡単のために k は代数閉体とする． $\mathcal{X} := [V/G]$ とおく．まず捩れアークを以前と同様に定義する．

²work in progress

定義 7. $\mathcal{X}$ の掬れアークとは $\mathrm{Spec} k[[t]]$ のある G 拡大 E に対し

$$[E/G] \rightarrow \mathcal{X}$$

という形の表現可能射 $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の掬れアーク全体の空間とする。

標数 0 と大きく違う点は、標数 0 では E の取り方が有限通りしかなかったのに対し、標数 p では無限通りの取り方がある。それだけでなく、 E は族として現れ、パラメタ空間は無限次元になる。しかし、 $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ の構造は Artin-Schreier 理論などから詳細に分かり、この空間上にモチーフ測度を定義することができる。従って、モチーフ積分を考えることができる。そこで、射 $\mathcal{X} \rightarrow X$ に対し変数変換公式を使い、

$$M_{st}(X) = \int_{\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}} \mathbb{L}^{w_{\mathcal{X}}} d\mu_{\mathcal{X}}$$

と書ける。 $w_{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ 上に標準的に定義される重み関数である。 $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ の構造と、 $w_{\mathcal{X}}$ を明示的に計算することで、右辺は比較的計算できる。定理 6 はこれから従う。

参考文献

- [1] Victor V. Batyrev. Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(1):5–33, 1999.
- [2] Jan Denef and François Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compositio Math.*, 131(3):267–290, 2002.
- [3] Takehiko Yasuda. Motivic integration over Deligne-Mumford stacks. *Adv. Math.*, 207(2):707–761, 2006.
- [4] Takehiko Yasuda. The p -cyclic McKay correspondence via motivic integration. <http://arxiv.org/abs/1208.0132>, 2012.

Duality with expanding maps and shrinking maps, and its applications to Gauss maps

古川 勝久 (早大理工)

1 Introduction

任意標数の代数閉体上の射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して, ガウス写像 γ を

$$\gamma: X \dashrightarrow \mathbb{G}(\dim X, \mathbb{P}^N): x \mapsto \mathbb{T}_x X$$

により定義する. ただし, $\mathbb{T}_x X$ は非特異点 $x \in X$ に対する $\mathbb{P}^N$ 内の埋込み接空間を表す. また, 一般に有理写像 $f: X \dashrightarrow Y$ が分離的であるとは, $K(X)/K(f(X))$ が分離的であることを言う. 本稿では, 主にガウス写像 γ が分離的である場合について考察し「分離的ガウス写像のファイバー線型性」などの結果について解説する. なお, 本稿で解説する結果は論文 [Fur12b] にて得られたものであり, 議論のさらなる詳細などについてはそれを参照されたい.

はじめに, 標数零においては射影多様体の再帰性とよばれるところの, 「すべての射影多様体 X に対し等号 $X^{**} = X$ が成立する」という性質が γ を調べる上で有用である (任意標数では $C(X) = C(X^*)$ が成立するとき再帰的であると定義する; 詳細は §4 にて補足する). 一方で正標数においては, たとえ X のガウス写像が分離的であっても, X の再帰性は成立しない例が存在する (楯 [Ka03a]・深澤 [Fuk06b] の各氏による, Kleiman-Piene の問題の否定的解決として知られている). そこで, 本研究では再帰性にかわるものとして, 任意標数での γ の調査のために, expanding map および shrinking map という写像に着目した (詳細は §2 で後述). これらの写像を用いて得られた主結果 (定理 7) から導かれる事のひとつが以下の定理である:

定理 1 ([Fur12b, Thm. 1.1]). 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ のガウス写像 γ が分離的であるとする. このとき γ の一般ファイバー (の閉包) は $\mathbb{P}^N$ 内の線型多様体となる (特に連結となる).

さて, $X \subset \mathbb{P}^N$ を線型多様体ではないとする. この時, X が非特異ならば γ は有限射となる事が知られている (Zak [Z, I, 2.8. Cor.]). この事実と定理 1 とをあわせると以下の系を得る:

系 2 ([Fur12b, Cor. 3.7]). 射影多様体 X が非特異ならば, 分離的ガウス写像 γ は双有理となる.

幾何学的には, この γ の双有理性は「一般の埋込み接空間は唯一の点でのみ X と接する」ことを意味している.

標数零においては, 上述の「ガウス写像の一般ファイバーの線型性」は古典的に知られた結果であり (Griffiths-Harris [GH, (2.10)], Zak [Z, I, 2.3. Thm.]), 特に, Kleiman-Piene の両氏により再帰性をもちいた証明があたえられていた ([KP91, pp. 108–109]). また一方で, 正標数においては, γ が非分離的な場合にその一般ファイバーが線型とならない例が存在する (楯 [Ka86] [Ka89], Rathmann [R87], 野間 [N01], 深澤 [Fuk05] [Fuk06a] の各氏による). このことから, 「分離的ガウス写像に対して一般ファイバーの線型性は成立するか?」という問題が提起された ([Ka03b] など). 定理 1 によりこの問題は肯定的に解かれたこととなる.

以下では, §2 にて expanding map · shrinking map の定義を紹介し, それらを用いて得られる主結果について解説する. つぎに, §3 にて, 定理 1 の内容にあたる主結果の一部について証明を見てゆく.

2 Expanding maps and shrinking maps

2.1 定義

ここでは表題の有理写像の定義を与えてゆく. なお, shrinking map は, もともと標数零での「Gauss image の特徴づけ」を行うために, Landsberg と Piontkowski との各氏により独立に導入されたものであった ([IL, p. 93] の記述によると 1996 年頃のこととなる; [FP, 2.4.7] についても参照). さらに本研究では, expanding map として shrinking map の双対にあたるものを定義した. これは後でみる様にガウス写像の一般化となるものである.

定義 3. グラスマン多様体の部分多様体 $\mathcal{X} \subset \mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)$ に対し, expanding map $\gamma: \mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(m^+, \mathbb{P}^N)$ が以下の様に定義される (m, m^+ は $m \leq m^+$ を満す整数である).

はじめに, $\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)$ に対し $\mathcal{Q}_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)}$ および $\mathcal{S}_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)}$ により, その上の階数 $m+1$ の universal quotient bundle と 階数 $N-m$ の universal subbundle とを表す (ここで, $0 \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)} \rightarrow H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \otimes_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)} \mathcal{Q}_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)} \rightarrow 0$ なる完全列が成立する). また, $\mathcal{Q}_{\mathcal{X}} :=$

$\mathcal{Q}_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)}|_{\mathcal{X}}$ により $\mathcal{X}$ 上の universal quotient bundle を表わすことにする (以下, $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ など
も同様に定義する). さて, 層の準同型写像 φ を合成写像

$$\varphi: \mathcal{S}_{\mathcal{X}^{sm}} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{S}_{\mathcal{X}^{sm}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{X}^{sm}}), \mathcal{Q}_{\mathcal{X}^{sm}}) \rightarrow \mathcal{H}om(T_{\mathcal{X}^{sm}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{X}^{sm}})$$

により定める. ただし, 一番目の写像は $\mathcal{Q}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{Q}_{\mathcal{X}}^{\vee} \rightarrow \mathcal{O}$ の双対から, 二番目の写像は
 $T_{\mathcal{X}^{sm}} \hookrightarrow T_{\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)}|_{\mathcal{X}^{sm}} = \mathcal{H}om(\mathcal{S}_{\mathcal{X}^{sm}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{X}^{sm}})$ から導かれたものである. さて, 整数 m^+
($m \leq m^+ \leq N$) を, 一般点 $x \in \mathcal{X}$ に対し

$$\dim(\ker \varphi \otimes k(x)) = N - m^+$$

を満たすものとして取る. すると, ある開集合 $\mathcal{X}^{\circ} \subset \mathcal{X}$ が取れて, $\ker \varphi|_{\mathcal{X}^{\circ}}$ は階数 $N - m^+$ の
 $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\circ}} \simeq H^0(\check{\mathbb{P}}^N, \mathcal{O}(1))^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\circ}}$ の subbundle となる (ここで $\check{\mathbb{P}}^N := \mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N)$
は双対射影空間を表す). これにより, グラスマン多様体の普遍性から,

$$\gamma = \gamma_{\mathcal{X}/\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)}: \mathcal{X}^{\circ} \rightarrow \mathbb{G}(m^+, \mathbb{P}^N)$$

なる射を得られ, これを X の expanding map と呼ぶこととする.

注 4. $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{G}(0, \mathbb{P}^N)$ に対して, expanding map $\gamma = \gamma_{X/\mathbb{P}^N}$ は ガウス 写像
 $X \dashrightarrow \mathbb{G}(\dim(X), \mathbb{P}^N)$ に一致する. と言うのも, 上の定義の設定のもとで, $\mathcal{S}_{\mathbb{P}^N} = \Omega_{\mathbb{P}^N}^1(1)$ か
つ $\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ であり, 故に φ は自然な準同型写像 $\Omega_{\mathbb{P}^N}^1(1)|_X \rightarrow \Omega_X^1(1)$ に一致する. この
ことから等号 $\ker \varphi = N_{X/\mathbb{P}^N}^{\vee}(1)$ を得る.

定義 5. 部分多様体 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ に対し shrinking map $\sigma: \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathbb{G}(M^-, \mathbb{P}^N)$ が以下の様
に定義される (M, M^- は $M \geq M^-$ なる整数である).

層の準同型写像 Φ を合成写像

$$\Phi: \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee}), \mathcal{S}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee}) \rightarrow \mathcal{H}om(T_{\mathcal{Y}^{sm}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee})$$

として定める. ただし二番目の写像は $T_{\mathcal{Y}^{sm}} \hookrightarrow T_{\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)}|_{\mathcal{Y}^{sm}} = \mathcal{H}om(\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}^{sm}}^{\vee})$ により
導かれるものである. ここで整数 M^- ($-1 \leq M^- \leq M$) を, 一般点 $y \in \mathcal{Y}$ に対し

$$\dim(\ker \Phi \otimes k(y)) = M^- + 1$$

を満たすものとして取る. すると, ある開集合 $\mathcal{Y}^{\circ} \subset \mathcal{Y}$ に対し, $\ker \Phi|_{\mathcal{Y}^{\circ}}$ は階数 $M^- + 1$ の
 $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{\circ}}$ の subbundle となり,

$$\sigma = \sigma_{\mathcal{Y}/\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)}: \mathcal{Y}^{\circ} \rightarrow \mathbb{G}(M^-, \mathbb{P}^N)$$

なる射を誘導する. これが shrinking map と呼ばれるものとなる.

注 6. $\mathcal{X} \subset \mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)$ に対して, 同一視 $\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(N-m-1, \check{\mathbb{P}}^N)$ の下で対応する多様体を $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{G}(N-m-1, \check{\mathbb{P}}^N)$ により表す. この時, $\gamma_{\mathcal{X}/\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)}$ は shrinking map

$$\sigma_{\mathcal{X}/\mathbb{G}(N-m-1, \check{\mathbb{P}}^N)} : \tilde{\mathcal{X}} \dashrightarrow \mathbb{G}(N-m^+-1, \check{\mathbb{P}}^N)$$

と $\mathbb{G}(m^+, \mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(N-m^+-1, \check{\mathbb{P}}^N)$ の下で同一視することができる. 同様にして, $\sigma_{\mathcal{Y}/\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)}$ を expanding map $\gamma_{\tilde{\mathcal{Y}}/\mathbb{G}(N-M-1, \check{\mathbb{P}}^N)}$ と同一視することができる.

2.2 主結果

部分多様体 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ に対し, shrinking map $\sigma : \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathbb{G}(m_0, \mathbb{P}^N)$ を取る. 定義 5 の様に, M, m_0 は $M \geq m_0$ なる整数である ($m_0 := M^-$ とおく). また, $\mathcal{X}_0$ により $\sigma(\mathcal{Y}) \subset \mathbb{G}(m_0, \mathbb{P}^N)$ の閉包を表し, $U_{\mathcal{X}_0} \subset \mathcal{X}_0 \times \mathbb{P}^N$ により $\mathcal{X}_0$ 上の universal family を表す. また, $\pi_0 : U_{\mathcal{X}_0} \rightarrow \mathbb{P}^N$ をその射影とする. さて

$$\sigma^* U_{\mathcal{X}_0} \subset \mathcal{Y} \times \mathbb{P}^N$$

を $U_{\mathcal{X}_0}$ の σ の下での引戻しの閉包として定め, $\sigma^* \pi_0 : \sigma^* U_{\mathcal{X}_0} \rightarrow \mathbb{P}^N$ によりその射影を表す. ここまでの σ や $\sigma^* \pi_0$ やの構成は $\mathcal{Y}$ のみに依存することを注意しておく.

つぎに $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し

$$\Gamma(X) := \overline{\{(\mathbb{T}_x X, x) \in \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N) \times \mathbb{P}^N \mid x \in X^{sm}\}}$$

により埋込み接空間とその接点の incidence variety を表わすこととする.

定理 7 ([Fur12b, Thm. 3.1]). 整数 N, M ($0 < M < N$) について, M 次元射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ と, 閉部分多様体 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ とを取る. また σ などを上の様に決める. このとき以下の三条件は同値となる:

- (a) ガウス写像 $\gamma = \gamma_X : X \dashrightarrow \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ は分離的で, その像 (の閉包) は $\mathcal{Y}$ に一致する.
- (b) $\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N) \times \mathbb{P}^N$ 内にて $\Gamma(X) = \sigma^* U_{\mathcal{X}_0}$ が成立する.
- (c) $\sigma^* \pi_0 : \sigma^* U_{\mathcal{X}_0} \rightarrow \mathbb{P}^N$ は分離的かつ generically finite で, その像は X に一致する (特に, 像の次元が M となる).

系 8. 条件 (a-c) のいずれかが成立するとする. この時 $m_0 = M - \dim(\mathcal{Y})$ が成立し, また, つ

ぎの図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathcal{X}_0} & \xrightarrow{\pi_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow \gamma_X \\ \mathcal{X}_0 & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{X}_0}} & \mathcal{Y}. \end{array}$$

ここで $\gamma_{\mathcal{X}_0}$ は $\mathcal{X}_0$ の expanding map であり, 実のところ双有理で shrinking map σ の逆写像となる. また, 一般点 $y \in \mathcal{Y}$ に対し, $\sigma(y) \in \mathcal{X}_0$ はファイバー $\gamma_X^{-1}(y) \subset \mathbb{P}^N$ の閉包で得られる線型多様体に対応する.

注 9. 定理 7 における “(a) $\Rightarrow$ (b)” の部分は, 定理 1 で述べたところの「分離的ガウス写像の一般ファイバー線型性」の成立を導く. また “(c) $\Rightarrow$ (a)” の部分は Landsberg と Piontkowski との各氏による「Gauss image の特徴づけ」の任意標数での一般となるもので「グラスマン多様体の部分多様体が分離的ガウス写像の像であるための同値条件」を与えている.

注 10. 実際の証明では “(a) $\Rightarrow$ (b)” および “(c) $\Rightarrow$ (a)” は一つ枠組みのなかで議論をすすめることができる. というのも, 注 6 でみた様に, “(c) $\Rightarrow$ (a)” の中で σ と γ との役割をいれかえると, 似た形の状況の下である程度まで話ができるためである.

本稿では, “(a) $\Rightarrow$ (b)” の部分を示し 定理 1 を得る部分について見てゆく. そのために次節にて, ガウス写像 γ と shrinking map σ の合成 $\sigma \circ \gamma$ について調査してゆく. (上の注にのべた様に “(c) $\Rightarrow$ (a)” まで示すことを考える場合には, γ を expanding map として議論した方が効率がよい. 本稿では定理 7 全体の証明はしないので, γ をガウス写像とした場合のみ考える.)

3 Gauss maps and shrinking maps

本節では, M 次元射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ を取り, そのガウス写像を $\gamma: X^{sm} \rightarrow \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ と置く. ここでは $\mathcal{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ を $\gamma(X)$ の閉包として定める. この $\mathcal{Y}$ について 定義 5 の層の

射 Φ を考える. さて, Φ を γ で引き戻すことにすると, つぎの図式を得られる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \gamma^* \Phi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \gamma^* \mathcal{Q}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\gamma^* \mathcal{Q}^\vee, \gamma^* \mathcal{S}^\vee), \gamma^* \mathcal{S}^\vee) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\gamma^* T_{\mathcal{Y}^{sm}}, \gamma^* \mathcal{S}^\vee) \\
 & \searrow & & \nearrow & \downarrow \\
 & & - \circ d\gamma & & \mathcal{H}om(T_{X^{sm}}, \gamma^* \mathcal{S}^\vee). \\
 & \searrow & \Psi & &
 \end{array} \quad (1)$$

ここで, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)}$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)}$ の様に置いた. また, Ψ を合成写像 $\Psi: \gamma^* \mathcal{Q}^\vee \xrightarrow{\gamma^* \Phi} \mathcal{H}om(\gamma^* T, \gamma^* \mathcal{S}^\vee) \rightarrow \mathcal{H}om(T_{X^{sm}}, \gamma^* \mathcal{S}^\vee)$ により定義し, ついで $d\gamma$ を次の様な tangent bundle 間の射として定義した:

$$d\gamma: T_{X^{sm}} \rightarrow \gamma^* T_{\mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)} \simeq \mathcal{H}om(\gamma^* \mathcal{Q}^\vee, \gamma^* \mathcal{S}^\vee).$$

注 11. ガウス写像 γ が分離的であるとすると, ある開集合 X° が取れて次が成立する:

$$\ker \gamma^* \Phi|_{X^\circ} = \ker \Psi|_{X^\circ}.$$

というのもこの時, 一般点 $x \in X$ にて (1) における縦の矢印 $\mathcal{H}om(T_{\gamma(x)} \mathcal{Y}, \mathcal{S}^\vee \otimes \gamma(x)) \rightarrow \mathcal{H}om(T_x X, \mathcal{S}^\vee \otimes \gamma(x))$ は単射的となるからである.

つぎに $\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$ とおくと, 縦横について完全な, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \mathcal{O}_X(-1) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_X(-1) & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 \longrightarrow & \gamma^* \mathcal{Q}^\vee & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))^\vee \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \gamma^* \mathcal{S}^\vee & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \xi & & \downarrow & & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & T_{X^{sm}}(-1) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^N}(-1)|_X & \longrightarrow & \gamma^* \mathcal{S}^\vee & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & & 0 & & & &
 \end{array} \quad (2)$$

(なお, $\gamma^* \mathcal{S}^\vee(1)$ は $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^n}$ に一致し, また $\gamma^* \mathcal{Q}$ は一次の $\mathcal{O}_X(1)$ の principal parts $\mathcal{P}_X^1(\mathcal{O}_X(1))$ に一致する.) ここで ξ を (2) の最初の縦の部分にあらわれる層の射とする. さすれば, 次の

合成射 $d\gamma(-1) \circ \xi$ を得る:

$$d\gamma(-1) \circ \xi: \gamma^* \mathcal{Q}^\vee \xrightarrow{\xi} T_{X^{sm}}(-1) \xrightarrow{d\gamma(-1)} \gamma^* T_{G(r, \mathbb{P}^n)}(-1)|_X.$$

注 12. 点 $x \in X$ について, (2) の二番目の横の成分 $\gamma^* \mathcal{Q}^\vee \otimes k(x) \subset H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))^\vee$ は包含関係 $\mathbb{T}_x X \subset \mathbb{P}^N$ に対応する. また (2) の最初の縦の成分により, $\ker(\xi) \otimes k(x) \subset \gamma^* \mathcal{Q}^\vee \otimes k(x)$ は一次元のベクトル空間となり, さらにその射影化は $x \in \mathbb{T}_x X$ に対応することとなる.

以上の設定のもと Ψ と $d\gamma(-1) \circ \xi$ との間の同一視を得ることができる. より正確には:

定理 13. ある開集合 $X^\circ \subset X$ について次が成立する:

$$\ker \Psi|_{X^\circ} = \ker d\gamma(-1) \circ \xi|_{X^\circ}.$$

特に, 右側の $X^\circ \times \mathbb{P}^N$ 内での射影化は対角線集合 $\Delta_{X^\circ} := \{(x, x) \in X^\circ \times \mathbb{P}^N \mid x \in X^\circ\}$ を含んでいる.

注 14. $(Z^0: Z^1: \dots: Z^N)$ を $\mathbb{P}^N$ の斉次座標とする. このとき標準的開集合 $\mathbb{G}^\circ \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ を $\mathbb{P}^N$ の M 次元線型部分空間で $(N-M-1)$ 次元線型部分空間 $(Z^0 = \dots = Z^M = 0)$ と交わらないものの全体とおく. なお, $Z_0, \dots, Z_N$ によって $Z^0, \dots, Z^N$ の双対基底をあらわすこととする. 以下, 表記をさだめるために, 以下の様に $\mathbb{G}^\circ$ の記述を与えてゆく.

$\mathcal{Q}|_{\mathbb{G}^\circ}$ および $\mathcal{S}^\vee|_{\mathbb{G}^\circ}$ は $\mathbb{G}^\circ$ 上では自由層となる. ここで, q^i は $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q}$ のもとでの Z^i の像とし, s_j は $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))^\vee \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}^\vee$ のもとでの Z_j の像とし, さらに, ふたつのベクトル空間を以下で定める:

$$Q := \bigoplus_{i=0}^M K \cdot q^i \text{ and } S^\vee := \bigoplus_{j=M+1}^N K \cdot s_j.$$

このときに, $\mathcal{Q}|_{\mathbb{G}^\circ} = Q \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}^\circ}$ および $\mathcal{S}|_{\mathbb{G}^\circ} = S^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}^\circ}$ なる等式を得られる.

さて, ここで以下の標準的同型を得る:

$$\mathbb{G}^\circ \simeq \text{Hom}(Q^\vee, S^\vee): y \mapsto \sum_{0 \leq i \leq M, M+1 \leq j \leq N} a_i^j \cdot q^i \otimes s_j, \quad (3)$$

ここで M 次元線型部分空間 $y \in \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ はつぎの $(M+1) \times (N+1)$ 行列の横ベクトルで張られるものとなっている:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_0^{M+1} & \dots & a_0^N \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_1^{M+1} & \dots & a_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_M^{M+1} & \dots & a_M^N \end{bmatrix}.$$

定理 13 の証明. 一般点 $x_o \in X$ をとり, 次の等式を示せば充分である:

$$\ker \Psi \otimes k(x_o) = \ker(d\gamma(-1) \circ \xi) \otimes k(x_o). \quad (4)$$

以下では二段階にわけて考える. はじめに標準的方法にて $\gamma(x) \in \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ の記述を与える (cf. [FK07, Proof of Proposition]). 次にそれを用いて Ψ をも記述し, さらに Ψ と $d\gamma(-1) \circ \xi$ とが同一視されることを見る.

段階 1. $\mathbb{P}^N$ の座標 $(Z^0 : Z^1 : \dots : Z^N)$ の変換によって,

$$x_o = (1 : 0 : \dots : 0), \quad \mathbb{T}_{x_o} X = (Z^{M+1} = \dots = Z^N = 0)$$

となる様にする. さらに元々の埋込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ が x_o のまわりで以下の様にパラメータづけられていると要請できる:

$$(1 : z^1 : \dots : z^M : f^{M+1} : \dots : f^N). \quad (5)$$

ここで $z^1, \dots, z^M$ は正則局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の system of regular parameters であり, $f^{M+1}, \dots, f^N$ は正則関数である. (5) を横ベクトルとみて v と記す. このとき次の行列を得る:

$$\begin{bmatrix} v \\ v_{z^1} \\ \vdots \\ v_{z^M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^1 & \dots & z^M & f^{M+1} & \dots & f^N \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_{z^1}^{M+1} & \dots & f_{z^1}^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & f_{z^M}^{M+1} & \dots & f_{z^M}^N \end{bmatrix},$$

ここで $f_{z^e}^j := \partial f^j / \partial z^e$ のように置いた. さて x_o に充分近い点 $x \in X$ について, 埋込み接空間 $\mathbb{T}_x X$ は点 $v(x), v_{z^1}(x), \dots, v_{z^M}(x) \in \mathbb{P}^N$ により張られている事になる. v から $\sum z^e \cdot v_{z^e}$ を引き算して次の行列を得る:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f^{M+1} - \sum_e z^e f_{z^e}^{M+1} & \dots & f^N - \sum_e z^e f_{z^e}^N \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_{z^1}^{M+1} & \dots & f_{z^1}^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & f_{z^M}^{M+1} & \dots & f_{z^M}^N \end{bmatrix}. \quad (6)$$

これらの横ベクトルは, なおも $\mathbb{T}_x X$ を張ることとなる.

注 14 の様に $\mathbb{G}^\circ$ を置く. すると (3) と (6) とにより, x_o に近い点 $x \in X$ について, $\gamma(x) \in \mathbb{G}^\circ$ は以下で表示されることが考えられる:

$$\sum_{M+1 \leq j \leq N} \left((f^j - \sum_{1 \leq e \leq M} z^e f_{z^e}^j)(x) \cdot q^0 \otimes s_j + \sum_{1 \leq i \leq M} f_{z^i}^j(x) \cdot q^i \otimes s_j \right). \quad (7)$$

段階 2. Q を $\mathcal{Q} \otimes k(\gamma(x_0))$ により, また S を $\mathcal{S} \otimes k(\gamma(x_0))$ により同一視する. 線型写像 $\Psi_{x_0}: Q^\vee \rightarrow \text{Hom}(T_{x_0}X, S^\vee)$ は, 図式 (1) を用いて以下の手順により表現が与えられる. まづ $x_0 = (1:0:\cdots:0)$ であることと $(f^j - \sum z^e f_{z^e}^j)_{z^\vee} = \sum_e z^e f_{z^e, z^\vee}^j$ であることにより, (7) を用いて, 線型写像 $d_{x_0}\gamma: T_{x_0}X \rightarrow T_{\gamma(x_0)}\mathbb{G} \simeq \text{Hom}(Q^\vee, S^\vee)$ が以下で与えられるとわかる:

$$\frac{\partial}{\partial z^e} \mapsto \sum_{1 \leq i \leq M, M+1 \leq j \leq N} f_{z^i, z^e}^j(x_0) \cdot q^i \otimes s_j. \quad (8)$$

よって $\text{Hom}(\text{Hom}(Q^\vee, S^\vee), S^\vee) \rightarrow \text{Hom}(T_{x_0}X, S^\vee)$ は次で与えられる:

$$q_0 \otimes s^j \otimes s_v \mapsto 0, \quad q_i \otimes s^j \otimes s_v \mapsto \sum_{1 \leq e \leq M} f_{z^i, z^e}^j(x_0) \cdot dz^e \otimes s_v \quad (1 \leq i \leq M).$$

いま $Q^\vee \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(Q^\vee, S^\vee), S^\vee)$ は $q_i \mapsto q_i \otimes (\sum_j s^j \otimes s_j)$ により定まるものであったから, 目的の線型写像 $\Psi_{x_0}: Q^\vee \rightarrow \text{Hom}(T_{x_0}X, S^\vee)$ は以下で与えられるとわかる:

$$q_0 \mapsto 0, \quad q_i \mapsto \sum_{1 \leq e \leq M, M+1 \leq j \leq N} f_{z^i, z^e}^j(x_0) \cdot dz^e \otimes s_j \quad (1 \leq i \leq M). \quad (9)$$

さて $\xi_{x_0}: Q^\vee \rightarrow T_{x_0}X$ は $\xi_{x_0}(q_0) = 0$ および $\xi_{x_0}(q_e) = \partial/\partial z^e$ ($1 \leq e \leq M$), により与えられるので線型写像 $d_{x_0}\gamma \circ \xi_{x_0}$ と Ψ_{x_0} とは (8) および (9) により同一視できる. 特にそれらの kernel は一致することとなり等式 (4) の成立を得られる.

また, 注 12 により, 一般点 $x \in X$ について $\ker d_x\gamma \circ \xi_x$ を $\mathbb{P}^N$ 内に射影化したものは x を含むこととなる. よって $X^\circ \times \mathbb{P}^N$ の部分多様体となる $\ker d\gamma(-1) \circ \xi|_{X^\circ}$ の射影化は対角線集合 Δ_{X° を含む. $\square$

定理 7 の (a) $\Rightarrow$ (b) の証明. 部分多様体 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ を $\gamma(X)$ の閉包として得られるものと置き, $\sigma: \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{G}(m_0, \mathbb{P}^N)$ によりその shrinking map を表す. ここで, ある開集合 $X^\circ \subset X$ について, $\gamma^*\sigma^*U_{\mathcal{X}_0}|_{X^\circ}$ が $\ker(\gamma^*\Phi)|_{X^\circ}$ の射影化で得られることに注意する. さて, γ が分離的なので, 注 11 に述べた様に $\ker \gamma^*\Phi|_{X^\circ} = \ker \Psi|_{X^\circ}$ となる. さらに定理 13 によれば

$$\ker \gamma^*\Phi|_{X^\circ} = \ker(d\gamma(-1) \circ \xi)|_{X^\circ}$$

が成立することとなる. ここで, ふたたび分離性から右側の bundle の階数は $M - \dim \mathcal{Y} + 1$ になると分かる. よって, 等式 $m_0 = M - \dim \mathcal{Y}$ を得られる. さらに, 定理 13 の後半に述べたことから, $\gamma^*\sigma^*U_{\mathcal{X}_0}|_{X^\circ}$ は対角線集合 Δ_{X° を含むこととなる. これは等式 $\Gamma(X) = \sigma^*U_{\mathcal{X}_0}$ を導く. というのも, まづ包含関係 $\Gamma(X) \subset \sigma^*U_{\mathcal{X}_0}$ が成立し, ついで, 右辺の次元が $\dim \mathcal{Y} + m_0 = M$ の様に計算されるからである. $\square$

上述した (a) $\Rightarrow$ (b) の成立により, 分離的ガウス写像の一般ファイバーの線型性が証明される:

定理 1 の証明. $\sigma^*U_{\mathcal{X}_0} \rightarrow \mathcal{Y}$ の一般ファイバー F_y ($y \in \mathcal{Y}$) に対し, その像 $\sigma^*\pi_0(F_y)$ は m_0 次元の線型多様体 $\sigma(y) \subset \mathbb{P}^N$ に一致する. ここで γ が分離的なら, (b) により $\Gamma(X) = \sigma^*U_{\mathcal{X}_0}$ を得て, 以下の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X) & \xlongequal{\quad} & \sigma^*U_{\mathcal{X}_0} \\ \downarrow & \swarrow \sigma^*\pi_0 & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad \gamma \quad} & \mathcal{Y}. \end{array}$$

故に, $\sigma^*\pi_0$ は双有理であって, 一般点 $y \in \mathcal{Y}$ に対し $\gamma^{-1}(y) = X^{sm} \cap \sigma(y)$ を得る. $\square$

4 補足

分離性 有理写像 $f: X \dashrightarrow Y$ が分離的 (separable) であるとは体の拡大 $K(X)/K(f(X))$ が分離的に生成されていることを言う. これは, Zariski 接空間のあいだの線型写像 $d_x f: T_x X \rightarrow T_{f(x)} f(X)$ が一般点 $x \in X$ で全射であることと同値である. 有理写像 f が分離的でないとき, f は非分離的 (inseparable) であると言う. 正標数においては, ガウス写像は非分離的となりえる (Wallace [W56]).

ところで, ガウス写像 γ が分離的であるか, あるいは非分離的であるか, ということは X のもつ幾何学的性質に大きく影響すると考えられる. 非分離的な γ の研究としては, §1 で述べた非線形なファイバーの研究に, また, 別の視点のものとして階数零のガウス写像の研究 [FK10], [FFK], [Fur12a] などがある.

再帰性 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して $\check{\mathbb{P}}^N$ により $\mathbb{P}^N$ の超平面全体の集合 $\mathbb{G}(N-1, N)$ をあらわす. ここで以下を定義する:

$$\begin{aligned} C(X) &:= \overline{\{(x, H) \in X^{sm} \times \check{\mathbb{P}}^N \mid \mathbb{T}_x X \subset H\}} && \text{(conormal variety),} \\ \tau: C(X) &\rightarrow \check{\mathbb{P}}^N && \text{(conormal map),} \\ X^* &:= \tau(C(X)) \subset \check{\mathbb{P}}^N && (X \text{ の双対射影多様体).} \end{aligned}$$

ここで, X が再帰的 (reflexive) であるとは, $\mathbb{P} \times \check{\mathbb{P}}^N \simeq \check{\mathbb{P}} \times \check{\mathbb{P}}^N$ の同一視のもとで $C(X) = C(X^*)$ となることで定義する. 特に, X が再帰的であれば $X^{**} = X$ が成立することもわかる. また, 次のことが知られている: 「 X が再帰的であることと, τ が分離的であることとは同値であ

る」 (Monge-Segre-Wallace criterion). 故に, 標数零であれば全ての射影多様体は再帰的である.

参考文献

- [FP] G. Fischer and J. Piontowski, Ruled varieties, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001.
- [Fuk05] S. Fukasawa, Developable varieties in positive characteristic. Hiroshima Math. J. **35** (2005), 167-182.
- [Fuk06a] —, Varieties with non-linear Gauss fibers, Math. Ann. **334** (2006), 235-239.
- [Fuk06b] —, On Kleiman-Piene's question for Gauss maps, Compositio Math. **142** (2006), 1305-1307.
- [FFK] S. Fukasawa, K. Furukawa, H. Kaji, Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero, Adv. Math. **224** (2010) 2645-2661.
- [FK07] S. Fukasawa and H. Kaji, The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface, Math. Z. **256** (2007), 699-703.
- [FK10] S. Fukasawa and H. Kaji, Any algebraic variety in positive characteristic admits a projective model with an inseparable Gauss map, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 3, 297-300.
- [Fur12a] K. Furukawa, Cubic hypersurfaces admitting an embedding with Gauss map of rank 0, Adv. Math. **230** (2012) 1174-1183.
- [Fur12b] —, Duality with expanding maps and shrinking maps, and its applications to Gauss maps, arXiv:1110.4841v2.
- [GH] P. Griffiths and J. Harris, Algebraic geometry and local differential geometry, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **12** (1979), 355-432.
- [IL] T. A. Ivey and J. M. Landsberg, Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems. Grad. Stud. Math. **61**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.
- [Ka86] H. Kaji, On the tangentially degenerate curves. J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 430-440.
- [Ka89] —, On the Gauss maps of space curves in characteristic p . Compositio Math. **70** (1989), 177-197.
- [Ka03a] —, On the duals of Segre varieties, Geom. Dedicata **99** (2003), 221-229.
- [Ka03b] —, ガウス写像の非分離性に関する Kleiman-Piene の問題について, 2003 年 1 月 17 日, 代数幾何学シンポジウム —高次元多様体、正標数上の話題を中心として—, 九州大学.
- [KP91] S. L. Kleiman and R. Pieni, On the inseparability of the Gauss map, "Enumerative Algebraic Geometry (Proceedings of the 1989 Zeuthen Symposium)," Contemp. Math. **123**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 107-129.
- [N01] A. Noma, Gauss maps with nontrivial separable degree in positive characteristic. J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 81-93.
- [R87] J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p . Math. Ann. **276** (1987), 565-579.
- [W56] A. H. Wallace, Tangency and duality over arbitrary fields. Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 321-342.
- [Z] F. L. Zak, Tangents and secants of algebraic varieties, Transl. Math. Monographs **127**, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

E-mail address: katu@toki.waseda.jp

Department of Mathematics, School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, Ohkubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo, 169-8555, Japan

The graded rings associated to cusp singularities

Masanori Ishida

Mathematical Institute, Tohoku University

Introduction

In 1983, Tsuchihashi [T] constructed an isolated singularity called a cusp singularity from a pair of an open cone and a discrete group acting on it, which is a generalization of the Hilbert modular cusp singularities. By the construction, Tsuchihashi's cusp singularity is described by the fan decomposing the open cone. Although the cusp does not depend on the choice of the fan, it describes a desingularization of the singularity. Furthermore, some important invariants are calculated by the fan.

In this note, we will show the possibility of using computer for analyzing cusp singularities by introducing the method of Gröbner basis. Since the completed local ring of a cusp singularity is a subring of the completion of a semigroup ring, it is possible to define the leading monomials of the elements if we fix a monomial order on the semigroup. However, we have difficulties since the semigroup consisting of the leading monomials is not finitely generated in general. This indicates that monomial orders are too strong for our purpose.

In most of monomial orders, the grading is the first step of the ordering. We will show that the grading of the semigroup ring gives a filtration of the local ring, and the associated graded ring is finitely generated. Using this result, we can show that the local ring is Noetherian over a general field. In the last section, we will give some remarks on the local ring related to the theory of Gröbner basis.

1 Subrings of a semigroup ring

Let N be a free $\mathbf{Z}$ -module of rank $r \geq 0$. The dual $\mathbf{Z}$ -module $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ is denoted by M . We set $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ and $M_{\mathbf{R}} = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. N and M are contained in $N_{\mathbf{R}}$ and $M_{\mathbf{R}}$, respectively, as lattices. The natural pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbf{Z}$ is extended to the perfect pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ of $\mathbf{R}$ -vector spaces.

A subset $\sigma \subset N_{\mathbf{R}}$ is said to be a *strongly convex rational polyhedral cone* if there exists a finite subset $\{u_1, \dots, u_s\} \subset N$ with $\sigma = \mathbf{R}_0 u_1 + \dots + \mathbf{R}_0 u_s$ and $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$, where $\mathbf{R}_0 = \{c \in \mathbf{R} ; c \geq 0\}$. A strongly convex rational polyhedral cone is denoted by a greek lowercase character as σ, τ, π , and is called simply a *cone*.

For a cone σ , we introduce the following notation. $N(\sigma)_{\mathbf{R}} = \sigma + (-\sigma)$ is the minimal linear subspace of $N_{\mathbf{R}}$ containing σ . We define $\dim \sigma = \dim_{\mathbf{R}} N(\sigma)_{\mathbf{R}}$. We set

$N(\sigma) = N \cap N(\sigma)_{\mathbf{R}}$ and $N[\sigma] = N/N(\sigma)$. We set also $M[\sigma]_{\mathbf{R}} = \sigma^\perp = \{x \in M_{\mathbf{R}} ; \langle x, u \rangle = 0 \text{ for all } u \in \sigma\}$, $M[\sigma] = M \cap M[\sigma]_{\mathbf{R}}$ and $M(\sigma) = M/M[\sigma]$. $M(\sigma)$ and $N(\sigma)$ are mutually dual $\mathbf{Z}$ -modules of rank $\dim \sigma$, while $M[\sigma]$ and $N[\sigma]$ are mutually dual $\mathbf{Z}$ -modules of rank $r - \dim \sigma$.

In this section, we fix a cone $\pi \subset N_{\mathbf{R}}$ of dimension r . Then the dual cone

$$\pi^\vee = \{x \in M_{\mathbf{R}} ; \langle x, u \rangle \geq 0 \text{ for all } u \in \pi\}$$

is a strongly convex rational polyhedral cone of dimension r in $M_{\mathbf{R}}$.

Since $\pi^\vee$ is a convex cone, $x, y \in \pi^\vee$ implies $x+y \in \pi^\vee$. Hence $M \cap \pi^\vee$ is a semigroup with the unit 0. Since $\pi^\vee$ is strongly convex, 0 is the unique invertible element of the semigroup. An element m of $M \cap \pi^\vee$ is said to be *irreducible* if there do not exist $m_1, m_2 \in M \cap \pi^\vee \setminus \{0\}$ with $m = m_1 + m_2$.

Lemma 1.1 (Gordan) *The semigroup $M \cap \pi^\vee$ is finitely generated. Namely, $M \cap \pi^\vee$ has only finite irreducible elements and the semigroup is generated by them.*

We fix a field k of any characteristic. Lemma 1.1 implies that the semigroup ring

$$S_\pi = k[M \cap \pi^\vee] = \bigoplus_{m \in M \cap \pi^\vee} k\mathbf{e}(m)$$

is a finitely generated k -algebra, where we define $\mathbf{e}(m)\mathbf{e}(m') = \mathbf{e}(m+m')$ for $m, m' \in M$ and $\mathbf{e}(0) = 1$. In particular, S_π is a Noetherian ring. For each face σ of π , we denote $\mathcal{S}(\sigma) = M \cap \pi^\vee \cap \sigma^\perp$ and $\mathcal{S}(\sigma)^\circ = M \cap \text{rel.int}(\pi^\vee \cap \sigma^\perp)$. In particular, $\mathcal{S}(\mathbf{0}) = M \cap \pi^\vee$. Since $\mathcal{S}(\sigma)$ is a subsemigroup of $M \cap \pi^\vee$, $k[\mathcal{S}(\sigma)]$ is a subring of S_π . Note that $k[\mathcal{S}(\sigma)]$ is also considered as the residue ring of S_π by the prime ideal $\bigoplus_{m \in M \cap (\pi^\vee \setminus \sigma^\perp)} k\mathbf{e}(m)$. We denote by $F(\pi)$ the set of faces of π .

Lemma 1.2 *The semigroup $M \cap \pi^\vee$ has a decomposition*

$$M \cap \pi^\vee = \coprod_{\sigma \in F(\pi)} \mathcal{S}(\sigma)^\circ$$

as a set. If $m \in \mathcal{S}(\sigma)^\circ$ and $m' \in \mathcal{S}(\tau)^\circ$, then $m + m' \in \mathcal{S}(\rho)^\circ$ for $\rho = \sigma \cap \tau$.

Proof Let m be an element of $M \cap \pi^\vee$. Then $\sigma = \pi \cap (m = 0)$ is a face of π , where $(m = 0) = \{u \in N_{\mathbf{R}} ; \langle m, u \rangle = 0\}$. Then this is the unique face σ of π such that m is in the relative interior of $\pi^\vee \cap \sigma^\perp$. If $\tau = \pi \cap (m' = 0)$, then $\pi \cap (m + m' = 0) = \sigma \cap \tau$ since π is contained in both $(m \geq 0)$ and $(m' \geq 0)$. This implies $\rho = \sigma \cap \tau$. QED

We take a primitive element $n_0 \in N \cap \text{int } \pi$. Then we can define the grading of S_π by $\deg \mathbf{e}(m) = \langle m, n_0 \rangle$ for all m . Note that S_π is positively graded and $\deg \mathbf{e}(m) = 0$ if and only if $m = 0$.

For each face σ of π , we denote by $n_0(\sigma)$ the image of n_0 in $N[\sigma]$. We define the category $\text{Iso}(\pi, n_0)$ as follows. Each object of $\text{Iso}(\pi, n_0)$ is the semigroup $\mathcal{S}(\sigma)$ for $\sigma \in F(\pi)$ and a morphism is an isomorphism $\phi : M[\sigma] \rightarrow M[\tau]$ such that $\phi(\mathcal{S}(\sigma)) =$

$\mathcal{S}(\tau)$ and $\phi^*(n_0(\tau)) = n_0(\sigma)$. We denote this morphism also by $\phi : \mathcal{S}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}(\tau)$. In particular, all morphisms are isomorphisms, i.e., $\text{Iso}(\pi, n_0)$ is a groupoid.

For a subgroupoid H of $\text{Iso}(\pi, n_0)$, we consider the following conditions.

- (1) For any element $\mathcal{S}(\sigma)$ of H , there exists a morphism $\phi : \mathcal{S}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}(\tau)$ in H which is not the identity map.
- (2) If $\phi : \mathcal{S}(\sigma_1) \rightarrow \mathcal{S}(\sigma_2)$ is in H and it induces a non-identity map $\phi' : \mathcal{S}(\tau_1) \rightarrow \mathcal{S}(\tau_2)$ for $\tau_1, \tau_2 \in F(\pi)$ with $\sigma_1 \prec \tau_1, \sigma_2 \prec \tau_2$, then ϕ' is in H .

Let H be a subgroupoid of $\text{Iso}(\pi, n_0)$ satisfying the conditions (1) and (2).

Clearly, H is decomposed into a finite union of connected components. The dimension $\dim H_0$ of a connected component is defined as $\dim H_0 = \dim \sigma$ for an object $\mathcal{S}(\sigma) \in H_0$, which is independent of the choice of the object. If $\dim H_0$ is minimal among the connected components of H , then $H' = H \setminus H_0$ is a subgroupoid satisfying the conditions (1) and (2). Actually the condition (1) is obviously satisfied for H' . The condition (2) is also satisfied since $\sigma_i \prec \tau_i$ and $\sigma_i \neq \tau_i$ imply $\dim \tau_i > \dim \sigma_i \geq \dim H_0$, and hence ϕ' is in H' .

We define the vector subspace $S_\pi(H)$ of S_π by

$$S_\pi(H) = \left\{ \sum_{m \in M \cap \pi^\vee} a_m \mathbf{e}(m) ; a_m = a_{\phi(m)} \text{ if } \phi : \mathcal{S}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}(\tau) \text{ is in } H \text{ and } m \in \mathcal{S}(\sigma) \right\}.$$

It is checked easily that this is a k -subalgebra.

The H -equivalence $\stackrel{H}{\sim}$ on $M \cap \pi^\vee$ is defined by $m \stackrel{H}{\sim} m'$ when $m = m'$ or there exists $\phi : \mathcal{S}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}(\tau) \in H$ with $m \in \mathcal{S}(\sigma)$ and $m' = \phi(m)$. For $m \in M \cap \pi^\vee$, we set

$$\mathbf{e}_H(m) = \sum_{m' \stackrel{H}{\sim} m} \mathbf{e}(m').$$

Then a basis of $S_\pi(H)$ as a k -vector space is given by

$$\{\mathbf{e}_H(m) ; m \in M \cap \pi^\vee / \stackrel{H}{\sim}\}.$$

Theorem 1.3 *The ring S_π is integral over $S_\pi(H)$, and $S_\pi(H)$ is finitely generated over k .*

Proof We prove that S_π is integral over $S_\pi(H)$ by induction on the number of connected components of H . If H is empty, then $S_\pi(H) = S_\pi$ and the assertion is trivial.

Assume that H is nonempty and H_0 is a connected component of minimal dimension. Set $H' = H \setminus H_0$. Then we have the relation $S_\pi(H) \subset S_\pi(H') \subset S_\pi$. Since S_π is integral over $S_\pi(H')$ by the induction assumption, it suffices to show that $S_\pi(H')$ is integral over $S_\pi(H)$.

$S_\pi(H')$ is generated by

$$\{\mathbf{e}(m) ; m \in \mathcal{S}(\sigma)^\circ, \mathcal{S}(\sigma) \in H_0\}$$

over $S_\pi(H)$. Take an element $\mathbf{e}(m)$ in this set. Let $\{m_1, \dots, m_d\}$ be the H -equivalent class of m with $m_1 = m$. If $\{\mathcal{S}(\sigma_1), \dots, \mathcal{S}(\sigma_c)\}$ is the set of objects of H_0 , then $e = d/c$

is an integer and each $\mathcal{S}(\sigma_i)^\circ$ contains e elements of $\{m_1, \dots, m_d\}$. Let $p(t)$ be the monic polynomial

$$(t - \mathbf{e}(m_1)) \cdots (t - \mathbf{e}(m_d)) = t^d + u_1 t^{d-1} + \cdots + u_{d-1} t + u_d.$$

Then we have the equation $p(\mathbf{e}(m)) = 0$ since $m_1 = m$. The coefficient u_s is $(-1)^s$ times the elementary symmetric polynomial in $\mathbf{e}(m_1), \dots, \mathbf{e}(m_d)$ of degree s for each $1 \leq s \leq d$. We will show that this symmetric polynomial is an element of $S_\pi(H)$. Let $\mathbf{e}(m_{l_1}) \cdots \mathbf{e}(m_{l_s}) = \mathbf{e}(m_{l_1} + \cdots + m_{l_s})$ be a monomial of the symmetric polynomial. If there exists no $\mathcal{S}(\sigma_i)^\circ$ which contains all $m_{l_1}, \dots, m_{l_s}$, then $m_{l_1} + \cdots + m_{l_s}$ is contained in $\mathcal{S}(\rho)^\circ$ for ρ with $\dim \rho < \dim H_0$ by Lemma 1.2. In particular, the monomial $\mathbf{e}(m_{l_1} + \cdots + m_{l_s})$ is in $S_\pi(H)$ by the minimality of $\dim H_0$.

On the other hand, the sum f of all monomials such that $\{m_{l_1}, \dots, m_{l_s}\}$ is contained in $\mathcal{S}(\sigma_i)^\circ$ for some i is an element of $S_\pi(H)$ since $\{\phi(m_{l_1}), \dots, \phi(m_{l_s})\}$ has the same property for any ϕ in H_0 when this map is applicable. In order to see this fact more precisely, let X be the set of subsets of $\{m_1, \dots, m_d\}$ consisting of s elements and contained in $\mathcal{S}(\sigma_i)^\circ$ for some i . We introduce a relation $V \sim V'$ in X when there exists $\phi : \mathcal{S}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}(\tau)$ in H_0 such that $V \subset \mathcal{S}(\sigma)^\circ$, $V' \subset \mathcal{S}(\tau)^\circ$ and $V' = \phi(V)$. This is an equivalence relation since H_0 is a groupoid. Let $\{X_1, \dots, X_a\}$ be the set of equivalence classes of X . Take an arbitrary class X_q . Then for each σ_i , we set $X_{q,i} = \{V \in X_q ; V \subset \mathcal{S}(\sigma_i)^\circ\}$ and define an element

$$f_{q,i} = \sum_{V \in X_{q,i}} \mathbf{e}(V),$$

where $\mathbf{e}(V) = \mathbf{e}(\sum_{m \in V} m)$. Then we have $\phi(f_{q,i}) = f_{q,j}$ if $\phi : \mathcal{S}(\sigma_i) \rightarrow \mathcal{S}(\sigma_j)$ is in H_0 , where we denote also by ϕ the isomorphism $k[\mathcal{S}(\sigma_i)] \rightarrow k[\mathcal{S}(\sigma_j)]$ induced by ϕ . This implies that $f_q = f_{q,1} + \cdots + f_{q,c}$ is an element of $S_\pi(H)$. Hence the sum $f = f_1 + \cdots + f_a$ is also in $S_\pi(H)$.

Thus we know that u_s is an element of $S_\pi(H)$. Since $p(\mathbf{e}(m)) = 0$, $\mathbf{e}(m)$ is integral over $S_\pi(H)$. Hence $S_\pi(H')$ is integral over $S_\pi(H)$.

Since we proved that S_π is integral over $S_\pi(H)$, the finite generation of $S_\pi(H)$ follows from that of S_π (see, for example, [AM, Proposition 7.8]). QED

2 Associated graded rings of cusp singularities

Assume $r \geq 2$. Let C be a strongly convex open cone of $N_{\mathbf{R}}$ and Γ a subgroup of $\mathrm{GL}(N)$ acting effectively on C . The quotient $D = C/\mathbf{R}_+$ has a structure of $(r-1)$ -dimensional topological manifold. We assume the action of Γ on D is properly discontinuous and the quotient D/Γ is compact. It is known that there exists a Γ -invariant fan Σ of $N_{\mathbf{R}}$ such that Σ is locally finite at each point of C , the support $|\Sigma|$ is equal to $C \cup \{0\}$, the stabilizer $\Gamma_\sigma = \{\gamma \in \Gamma ; \gamma(\sigma) = \sigma\}$ is finite for every $\sigma \in \Sigma \setminus \{0\}$ and the quotient $(\Sigma \setminus \{0\})/\Gamma$ is finite. The action of Γ on D is free if and only if Γ acts on $\Sigma \setminus \{0\}$ freely. In this case, the pair (C, Γ) defines a Tsuchihashi cusp singularity [T].

Lemma 2.1 *There exists a fan Σ with the following additional property. The stabilizer Γ_σ acts on the cone σ trivially for every $\sigma \in \Sigma \setminus \{0\}$.*

Proof For any Γ -invariant fan, its barycentric subdivision satisfies this condition. QED

Let $C^* \subset M_{\mathbf{R}}$ be the interior of the dual cone of $\bar{C}$. For $n_0 \in N \cap C$, we define

$$\Theta^*(n_0) = \{x \in M_{\mathbf{R}} ; \langle x, \gamma(n_0) \rangle \geq 1 \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}.$$

The faces of $\Theta^*(n_0)$ form a cell complex consisting of infinite number of $(r-1)$ -dimensional bounded polytopes and their faces. The base space of the cell complex is the boundary $\partial\Theta^*(n_0)$ of $\Theta^*(n_0)$. For each $0 \leq i \leq r-1$, we denote by $K_i(\partial\Theta^*(n_0))$ the set of i -dimensional polytopes in the cell complex.

Lemma 2.2 *The action of Γ on $K_{r-1}(\partial\Theta^*(n_0))$ is transitive, and there exists $n_0 \in N \cap C$ such that the action is principal.*

Proof A polytope P in $K_{r-1}(\partial\Theta^*(n_0))$ is defined by $\Theta^*(n_0) \cap (\gamma(n_0) = 1)$ for an element $\gamma \in \Gamma$, which is equal to $\gamma^{-1}(\Theta^*(n_0) \cap (n_0 = 1))$. Hence the action is transitive. Since the action of Γ on C is effective, the stabilizer is trivial for a point in a non-empty open cone in C . An element $n_0 \in N \cap C$ on a rational line intersecting it makes the action principal. QED

We fix a primitive n_0 in $N \cap C$. Then $P_0 = \Theta^*(n_0) \cap (n_0 = 1)$ is an $(r-1)$ -dimensional face of $\Theta^*(n_0)$. Since $\mathbf{R}_0 P_0$ is a maximal dimensional strongly convex rational polyhedral cone, there exists a cone $\pi \subset N_{\mathbf{R}}$ such that $\pi^\vee = \mathbf{R}_0 P_0$. Since $\pi^\vee \subset C^*$ and C is open, we have $\bar{C} \subset \text{int } \pi \cup \{0\}$. For each $\sigma \in F(\pi)$, we denote $\sigma^* = \pi^\vee \cap \sigma^\perp$. Note that σ^* is a cone contained in $C^* \cup \{0\}$. For $\mathcal{S} = M \cap \pi^\vee$, the subcategory $H(\Gamma)$ of $\text{Iso}(\pi, n_0)$ is defined as follows. An object of $H(\Gamma)$ is $\mathcal{S}(\sigma)$ such that there exist $\sigma, \tau \in F(\pi)$ and $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ satisfying $\gamma(\sigma^*) = \tau^*$, and a morphism is $\phi : M[\sigma] \rightarrow M[\tau]$ induced by γ for such σ, τ and γ .

We set $\mathcal{U} = (M \cap C^*) \cup \{0\}$. $\mathcal{U}$ is a semigroup with the unit 0, and we get the semigroup ring

$$k[\mathcal{U}] = \bigoplus_{m \in \mathcal{U}} k\mathbf{e}(m)$$

as a subring of the group ring $k[M]$. Note that $\mathcal{U}$ is not finitely generated. Actually, if $\mathcal{U}$ was finitely generated, it generates a strongly convex closed cone D contained in $C^* \cup \{0\}$. Since $C^* \setminus D$ is a nonempty open cone, it contains a point m in M . This is a contradiction, since $m \in \mathcal{U} \subset D$. In particular, $k[\mathcal{U}]$ is not finitely generated over k . $k[\mathcal{U}]$ has a structure of graded ring by defining $\deg \mathbf{e}(m) = \langle m, n_0 \rangle$. Namely, $k[\mathcal{U}]_d$ is the k -vector space with the basis $\{\mathbf{e}(m) ; m \in \mathcal{U}, \langle m, n_0 \rangle = d\}$.

Since $\pi^\vee = \mathbf{R}_0 P_0 \subset C^* \cup \{0\}$, $S_\pi = k[M \cap \pi^\vee]$ is a subalgebra of $k[\mathcal{U}]$.

Since n_0 is in the open cone C , the convex set $C^* \cap (n_0 < d)$ is bounded for every $d > 0$, where $(n_0 < d)$ is the open half space $\{x \in M_{\mathbf{R}} ; \langle x, n_0 \rangle < d\}$. In particular, $M \cap C^* \cap (n_0 < d)$ is a finite set.

For each positive integer d , we define the ideal $I_d \subset k[\mathcal{U}]$ by

$$I_d = (\mathbf{e}(m) ; m \in \mathcal{U}, \langle m, n_0 \rangle \geq d) .$$

Note that $\{\mathbf{e}(m) ; \langle m, n_0 \rangle \geq d\}$ is a k -basis of the ideal I_d . Since the complement of this set in $\mathcal{U}$ is finite, the quotient $k[\mathcal{U}]/I_d$ is an Artinian ring. We consider the completion $k[[\mathcal{U}]] = \text{projlim}_i k[\mathcal{U}]/I_i$. It is easy to see that this k -algebra is written as the product

$$k[[\mathcal{U}]] = \prod_{m \in \mathcal{U}} k\mathbf{e}(m) .$$

In particular, it does not depend on the choice of n_0 .

An element of $k[[\mathcal{U}]]$ is written as an infinite sum $f = \sum_{m \in \mathcal{U}} a_m \mathbf{e}(m)$. The action of Γ on $k[[\mathcal{U}]]$ is defined by

$$\gamma(f) = \sum_{m \in \mathcal{U}} a_m \mathbf{e}(\gamma(m))$$

for $f \in k[[\mathcal{U}]]$ and $\gamma \in \Gamma$. Note that $(\gamma\gamma')(f) = \gamma'(\gamma(f))$. The ring $k[[\mathcal{U}]]$ has an induced filtration $\{\hat{I}_d\}$ of ideals, where $\hat{I}_d = k[[\mathcal{U}]]I_d$ for each $d \geq 0$. Note that

$$\hat{I}_d/\hat{I}_{d+1} = I_d/I_{d+1} = k[\mathcal{U}]_d .$$

Hence the associated graded ring

$$G(k[[\mathcal{U}]]) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \hat{I}_d/\hat{I}_{d+1}$$

of $k[[\mathcal{U}]]$ for this filtration is naturally isomorphic to $k[\mathcal{U}]$.

For each $f \in k[[\mathcal{U}]] \setminus \{0\}$, we denote by $L(f)$ the image of f in $\hat{I}_d/\hat{I}_{d+1}$ for the maximal d with $f \in \hat{I}_d$ and call it the *leading part* of f . Note that $f - L(f)$ is in $\hat{I}_{d+1}$.

We consider the invariant subring $A = k[[\mathcal{U}]]^\Gamma$. We can show that this is the completion of the local ring of the cusp singularity when $k = \mathbf{C}$ and the action of Γ on C is free. The ring A has the filtration defined by $I(A)_d = \hat{I}_d \cap A$ for $d \geq 0$. We define the associated graded ring B by

$$B = G(A) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I(A)_d/I(A)_{d+1} .$$

Theorem 2.3 *B is equal to $S_\pi(H(\Gamma))$ in $k[\mathcal{U}]$. In particular, B is finitely generated over k .*

Proof Let $f = \sum_{m \in \mathcal{U}} a_m \mathbf{e}(m)$ be an element of $I(A)_d$. If $a_m \neq 0$, then $a_{\gamma(m)} = a_m \neq 0$ and $\langle m, \gamma(n_0) \rangle = \langle \gamma(m), n_0 \rangle \geq d$ for every $\gamma \in \Gamma$. This implies m is in $d\Theta(n_0)$ since $\Theta(n_0) = \{x \in C^* ; \langle x, \gamma(n_0) \rangle \geq 1 \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}$. If $\deg \mathbf{e}(m) = d$, then since $d\Theta(n_0) \cap (n_0 = d) = dP_0$, $\mathbf{e}(m)$ is in $k[M \cap \pi^\vee]_d$. Since $L(f)$ is the sum of $a_m \mathbf{e}(m)$ with $\deg \mathbf{e}(m) = d$, we have $L(f) \in k[M \cap \pi^\vee]_d$. If $\phi : \mathcal{S}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}(\tau)$ is in $H(\Gamma)$, $m \in \mathcal{S}(\sigma)^\circ$ and $\mathbf{e}(m) \in k[\mathcal{S}(\sigma)]_d$, then there exists $\gamma \in \Gamma$ such that $\phi(m) = \gamma(m)$. Since f is

Γ -invariant and $n_0(\sigma) = n_0(\tau)$, we have $n_0(\phi(m)) = n_0(m) = d$ and $a_{\phi(m)} = a_m$. Hence $L(f)$ is in $S_\pi(H(\Gamma))$. Thus we know that B is a subring of $S_\pi(H(\Gamma))$.

In order to show $B = S_\pi(H(\Gamma))$, it suffices to see that $\mathbf{e}_{H(\Gamma)}(m)$ is in B for every $m \in M \cap \pi^\vee$. This is clear since $\mathbf{e}_{H(\Gamma)}(m) = L(f)$ for $f = \sum_{\gamma \in \Gamma/\text{St}(m)} \mathbf{e}(\gamma(m)) \in A$, where $\text{St}(m)$ is the stabilizer of m and $\Gamma/\text{St}(m)$ is the set of the right cosets. QED

Let $k[[x_1, \dots, x_s]]$ be the power series ring of s variables. The local ring $k[[x_1, \dots, x_s]]$ has the filtration $\{(x_1, \dots, x_s)^d\}$ defined by the maximal ideal $(x_1, \dots, x_s)$. For any given elements $u_1, \dots, u_s$ of I_1 , there exists a continuous k -algebra homomorphism $\phi : k[[x_1, \dots, x_s]] \rightarrow k[[\mathcal{U}]]$ such that $\phi(x_i) = u_i$ for every i . Actually, an element $f \in k[[x_1, \dots, x_s]]$ is written as

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

with f_i a homogeneous polynomial of degree i for every i . Then $f_i(u_1, \dots, u_s) \in I_i$ for every i , and

$$f_0(u_1, \dots, u_s) + f_1(u_1, \dots, u_s) + f_2(u_1, \dots, u_s) + \dots$$

defines an element of $k[[\mathcal{U}]]$ which should be $\phi(f)$. If $u_1, \dots, u_s$ are in the subring A , the image of ϕ is in A since every finite sum $\sum_{i=0}^d f_i(u_1, \dots, u_s)$ is in A and A is closed (cf. Proposition 3.2).

It is known that formal power series ring with finite variables over a Noetherian ring is Noetherian [CC, 18]. We have the following theorem.

Theorem 2.4 (cf. [CC, 18, Théorème 4]) *Let $\{y_1, \dots, y_s\}$ be a set of homogeneous elements of B which generates B over k . Assume $y_i \in I(A)_{l_i}/I(A)_{l_i+1}$ and y_i is represented by $u_i \in I(A)_{l_i} \setminus I(A)_{l_i+1}$ for each i . Then the homomorphism $\phi : k[[x_1, \dots, x_s]] \rightarrow A$ defined by $u_1, \dots, u_s$ is surjective. In particular, A is a Noetherian local ring.*

Proof Let w be an arbitrary element of A . We define inductively a sequence of polynomials $f_i \in k[x_1, \dots, x_s]$ such that $f_i(u_1, \dots, u_s) \in I(A)_i$ for every i ,

$$w - \{f_0(u_1, \dots, u_s) + f_1(u_1, \dots, u_s) + \dots + f_d(u_1, \dots, u_s)\}$$

is in $I(A)_{d+1}$ for every d and $\{f_0 + f_1 + \dots + f_d\}$ is a Cauchy sequence. Assume $f_0, \dots, f_{d-1}$ are defined so that they satisfy the first two conditions. Then

$$g = w - \{f_0(u_1, \dots, u_s) + f_1(u_1, \dots, u_s) + \dots + f_{d-1}(u_1, \dots, u_s)\}$$

is an element of $I(A)_d$. The image $\bar{g}$ of g in $I(A)_d/I(A)_{d+1}$ is represented by a linear combination

$$\sum_{e_1, \dots, e_s} a_{e_1, \dots, e_s} y_1^{e_1} \dots y_s^{e_s}$$

with coefficients in k , where the summation is taken over $e_1, \dots, e_s \geq 0$ satisfying $e_1 l_1 + \dots + e_s l_s = d$. Since this element is represented by $f_d(u_1, \dots, u_s)$ for the polynomial

$$f_d(x_1, \dots, x_s) = \sum_{e_1, \dots, e_s} a_{e_1, \dots, e_s} x_1^{e_1} \dots x_s^{e_s},$$

we have

$$\begin{aligned} w - \{f_0(u_1, \dots, u_s) + f_1(u_1, \dots, u_s) + \dots + f_d(u_1, \dots, u_s)\} \\ = g - f_d(u_1, \dots, u_s) \in I(A)_{d+1} . \end{aligned}$$

By the equality $e_1 l_1 + \dots + e_s l_s = d$, the degree $e_1 + \dots + e_s$ of the monomial $x_1^{e_1} \dots x_s^{e_s}$ of f_d is at least $d / \max\{l_1, \dots, l_s\}$. This implies that $\{f_0 + f_1 + \dots + f_d\}$ is a Cauchy sequence. Hence the infinite sum $f = f_0 + f_1 + \dots$ defines an element of $k[[x_1, \dots, x_s]]$ and $\phi(f) = w$. Since w is arbitrary, ϕ is surjective.

Since the power series ring is Noetherian, so is the homomorphism image A . QED

3 Some results related to Gröbner basis

We think k has a discrete topology, and the k -algebra $k[[\mathcal{U}]] = \prod_{m \in \mathcal{U}} k\mathbf{e}(m)$ has the product topology. This topology is equal to that of the completion of $k[\mathcal{U}]$ with respect to the filtration $\{I_d\}$.

For a subset E of $k[[\mathcal{U}]]$, an element $x = \sum_{m \in \mathcal{U}} a_m \mathbf{e}(m)$ is in the closure of E if and only if there exists a sequence $\{y_i\}$ of elements of E such that the image of y_d to $k[[\mathcal{U}]]/I_d$ is equal to that of x for every d . This implies that a vector subspace $V \subset k[[\mathcal{U}]]$ is closed if and only if

$$V = \bigcap_{d=0}^{\infty} (V + I_d) .$$

For a vector subspace $V \subset k[[\mathcal{U}]]$, we denote

$$L(V) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (V \cap I_d + I_{d+1}) / I_{d+1} .$$

This is a vector subspace of $k[\mathcal{U}]$.

Lemma 3.1 *Let V_1, V_2 be vector subspaces of $k[[\mathcal{U}]]$ with $V_1 \subset V_2$. Assume that V_1 is closed. Then $V_1 = V_2$ if and only if $L(V_1) = L(V_2)$.*

Proof It is obvious that $L(V_1) = L(V_2)$ if $V_1 = V_2$. Hence it suffices to show that any element $x \in V_2$ is in V_1 if $L(V_1) = L(V_2)$. For any $d \geq 0$, we have

$$\begin{aligned} \dim_k(V_1 + I_d) / I_d \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \dim_k(V_1 \cap I_i + I_{i+1}) / I_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \dim_k(V_2 \cap I_i + I_{i+1}) / I_{i+1} \\ &= \dim_k(V_2 + I_d) / I_d . \end{aligned}$$

Since $(V_1 + I_d) / I_d \subset (V_2 + I_d) / I_d$, these vector spaces are equal. Hence x is in $V_1 + I_d$ for every d . This implies $x \in V_1$ since V_1 is closed. QED

The following proposition was used in Section 2.

Proposition 3.2 *The ring $A \subset k[[\mathcal{U}]]$ is closed.*

Proof Let $x = \sum_{m \in \mathcal{U}} a_m \mathbf{e}(m)$ be an element of the closure of A . It suffices to show that x is in A . For $m \in \mathcal{U}$ and $\gamma \in \Gamma$, let $d = \max\{\langle m, n_0 \rangle, \langle \gamma(m), n_0 \rangle\} + 1$. Since $x \in A + I_d$, there exists $y \in A$ with $x - y \in I_d$. This implies $a_m = a_{\gamma(m)}$ since the coefficients of x and y are equal for every $\mathbf{e}(m')$ with $\langle m', n_0 \rangle \leq d$. Since m and γ are arbitrary, x is an element of A . QED

Theorem 3.3 *Any ideal of A is closed in $k[[\mathcal{U}]]$. In particular, ideals I_1, I_2 of A with $I_1 \subset I_2$ are equal if and only if $L(I_1) = L(I_2)$.*

Proof Let I be an ideal of A . We may assume $I \neq A$. Since A is a complete Noetherian local ring by Theorem 2.4, all ideals are closed in $I(A)_1$ -adic topology by Artin-Rees's lemma. Since the induced topology of A is $I(A)_1$ -admissible, it is equal to the $I(A)_1$ -adic topology (see EGA I, Chap. 0, §7). Hence any ideal I of A is closed in $k[[\mathcal{U}]]$. The second assertion follows from Lemma 3.1 since ideals are closed. QED

References

- [AM] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Westview Press.
- [CC] H. Cartan and C. Chevalley, Géométrie algébrique, Séminaire de l'École Normale Supérieure, 8e année, 1955–1956.
- [Sin] G.-M. Greuel and G. Pfister, A Singular — Introduction to Commutative Algebra, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [I1] M.-N. Ishida, Tsuchihashi's cusp singularities are Buchsbaum singularities, Tohoku Math. J. **36**, (1984), 191-201.
- [I2] M.-N. Ishida, T-complexes and Ogata's zeta zero values, in *Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties* (Y. Namikawa and K. Hashimoto, eds.), Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and Academic Press, Boston, San Diego, New York, Berkeley, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1989, 351-364.
- [I3] M.-N. Ishida, Polyhedral Laurent series and Brion's equalities, International J. Math. **1**, (1990), 251-265.
- [I4] M.-N. Ishida, Cusp singularities given by reflections of stellable cones, International J. Math. **2**, (1991), 635-657.
- [I5] M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **294**, (1992), 81-97.

- [Ku] S. Kuroda, The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings, Osaka J. Math. **39**, (2002), 665–680.
- [T] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, (1983), 607-639.

Birational Arakelov Geometry

Atsushi MORIWAKI

Kyoto University

October 24, 2012



Atsushi MORIWAKI

Birational Arakelov Geometry

Problem:

For a real number $\lambda > 1$, find an asymptotic estimate of

$$\log \# \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n} \}$$

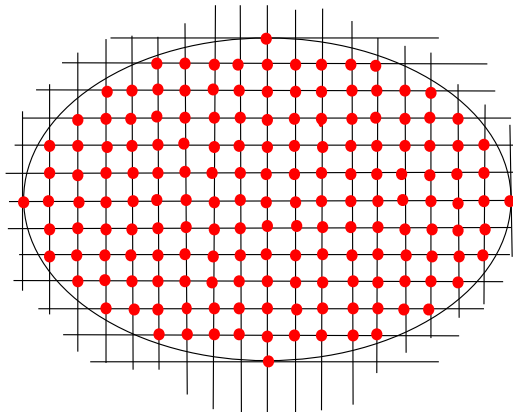
with respect to n .



Atsushi MORIWAKI

Birational Arakelov Geometry

How many lattice points in the ellipse?



$$a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n}$$

Considering a shrinking map $(x, y) \mapsto (\lambda^{-n}x, \lambda^{-n}y)$,

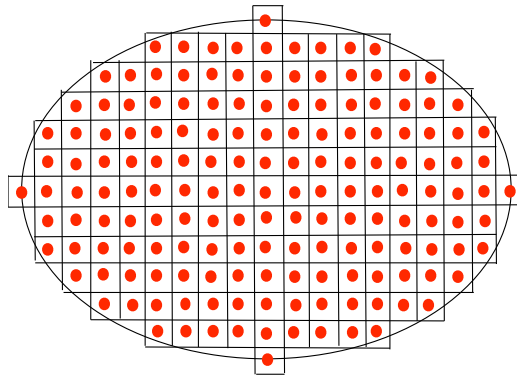
$$\begin{aligned} \# \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n} \} \\ = \# \{ (a', b') \in (\mathbb{Z}\lambda^{-n})^2 \mid a'^2 + 2b'^2 \leq 1 \}. \end{aligned}$$

We assign a square

$$\left[a' - \frac{\lambda^{-n}}{2}, a' + \frac{\lambda^{-n}}{2} \right] \times \left[b' - \frac{\lambda^{-n}}{2}, b' + \frac{\lambda^{-n}}{2} \right]$$

to each element of

$$\{ (a', b') \in (\mathbb{Z}\lambda^{-n})^2 \mid a'^2 + 2b'^2 \leq 1 \}.$$



$$x^2 + 2y^2 \leq 1$$

$\sum$ (the volume of each square) $\sim$ the volume of the ellipse

Thus

$$\begin{aligned} & \# \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n} \} \times (\lambda^{-n})^2 \\ & \sim \text{the volume of } \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1 \} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\log \# \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n} \} \sim (2 \log \lambda)n.$$

Let K be a number field (i.e. a finite extension of $\mathbb{Q}$) and let $K(\mathbb{C})$ be the set of all embeddings $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Note that $\#(K(\mathbb{C})) = [K : \mathbb{Q}]$ and $K(\mathbb{C})$ is the set of $\mathbb{C}$ -valued points of $\text{Spec}(K)$. Let O_K be the ring of integers in K , that is,

$$O_K = \{x \in K \mid x \text{ is integral over } \mathbb{Z}\}.$$

We set $X = \text{Spec}(O_K)$. Let $\text{Div}(X)$ be the group of divisors on X , that is,

$$\text{Div}(X) := \bigoplus_{P \in X \setminus \{0\}} \mathbb{Z}[P].$$

For $D = \sum_P a_P [P]$, $\deg(D)$ is defined by

$$\deg(D) := \sum_P a_P \log \#(O_K/P).$$

$\widehat{\text{Div}}(X)$ is defined by

$$\widehat{\text{Div}}(X) = \text{Div}(X) \times \{\xi \in \mathbb{R}^{K(\mathbb{C})} \mid \xi_\sigma = \xi_{\bar{\sigma}} \ (\forall \sigma \in K(\mathbb{C}))\},$$

where $\bar{\sigma}$ is the composition of $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ and the complex conjugation $\mathbb{C} \xrightarrow{\bar{}} \mathbb{C}$. An element of $\widehat{\text{Div}}(X)$ is called an [arithmetic divisor](#) on X . For simplicity, an element $\xi \in \mathbb{R}^{K(\mathbb{C})}$ is denoted by $\sum_\sigma \xi_\sigma [\sigma]$. For example, if we set

$$(\widehat{x}) := \left(\sum_P \text{ord}_P(x) [P], \sum_\sigma -\log |\sigma(x)|^2 [\sigma] \right)$$

for $x \in K^\times$, then $(\widehat{x}) \in \widehat{\text{Div}}(X)$, which is called an [arithmetic principal divisor](#).

The **arithmetic degree** $\widehat{\deg}(\overline{D})$ for $\overline{D} = (D, \xi)$ is defined by

$$\widehat{\deg}(\overline{D}) := \deg(D) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \xi_{\sigma}.$$

Note that $\widehat{\deg}(\widehat{(x)}) = 0$ by the product formula. For

$$\overline{D} = \left(\sum_P n_P [P], \sum_{\sigma} \xi_{\sigma} [\sigma] \right),$$

$$\overline{D} \geq 0 \iff_{\text{def}} n_P \geq 0 \text{ and } \xi_{\sigma} \geq 0 \text{ for all } P \text{ and } \sigma$$

We set

$$\hat{H}^0(X, \overline{D}) := \{x \in K^{\times} \mid \overline{D} + \widehat{(x)} \geq 0\} \cup \{0\}.$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ↺ ↻

Atsushi MORIWAKI

Birational Arakelov Geometry

Set $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Then $O_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-2}$ and $K(\mathbb{C}) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ given by $\sigma_1(\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}$ and $\sigma_2(\sqrt{-2}) = -\sqrt{-2}$. We set $\overline{D} = (0, \log(\lambda^2)[\sigma_1] + \log(\lambda^2)[\sigma_2])$. Then $\widehat{\deg}(\overline{D}) = 2 \log(\lambda)$. Note that, for $x = a + b\sqrt{-2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} n\overline{D} + \widehat{(x)} \geq 0 &\iff \begin{cases} n \log(\lambda^2) - \log(a^2 + 2b^2) \geq 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n} \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ↺ ↻

Atsushi MORIWAKI

Birational Arakelov Geometry

Therefore,

$$\begin{aligned}\hat{H}^0(X, n\bar{D}) &= \left\{ x \in K^\times \mid n\bar{D} + \widehat{(x)} \geq 0 \right\} \cup \{0\} \\ &= \{a + b\sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \mid a^2 + 2b^2 \leq \lambda^{2n}\}.\end{aligned}$$

Thus the previous observation means that

$$\log \# \hat{H}^0(X, n\bar{D}) \sim \widehat{\deg}(\bar{D})n.$$

Theorem (Arithmetic Hilbert-Samuel formula for $\text{Spec}(O_K)$)

If $\widehat{\deg}(\bar{D}) > 0$, then $\log \# \hat{H}^0(n\bar{D}) = n\widehat{\deg}(\bar{D}) + O(1)$. In particular, if $n \gg 1$, then there is $x \in K^\times$ with $n\bar{D} + \widehat{(x)} \geq 0$. Moreover, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \# \hat{H}^0(n\bar{D})/n = \widehat{\deg}(\bar{D})$.

Remark

Let r_2 be the number of complex embeddings K into $\mathbb{C}$ and let D_K be the discriminant of K over $\mathbb{Q}$. If

$$\widehat{\deg}(\bar{D}) \geq \log((\pi/2)^{r_2} \sqrt{|D_K|}),$$

then $\hat{H}^0(\bar{D}) \neq \{0\}$.

Indeed, we set $\bar{D} = (0, \xi)$. As $\widehat{\deg}(\bar{D}) = 0$, there are $x \in K_{\mathbb{R}}^{\times}$ such that $\bar{D} + (\widehat{x})_{\mathbb{R}} \geq 0$. Note that $\widehat{\deg}(\bar{D} + (\widehat{x})_{\mathbb{R}}) = 0$, so that

$$\bar{D} + (\widehat{x})_{\mathbb{R}} = (0, 0).$$

On the other hand, we can find $x_1, \dots, x_r \in K^{\times}$ and $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ such that $x = x_1^{a_1/2} \cdots x_r^{a_r/2}$ and $a_1, \dots, a_r$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$. Thus,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r a_i \operatorname{ord}_P(x_i) = 0 & \text{for all } P \\ \xi_{\sigma} = \sum_{i=1}^r a_i \log |\sigma(x_i)| & \text{for all } \sigma \end{cases}$$

Using the linear independency of $a_1, \dots, a_r$ over $\mathbb{Q}$, we have $\operatorname{ord}_P(x_i) = 0$ for all P and i . This means that $x_i \in O_K^{\times}$ for all i , as required.

Remark

The above theorem does not hold on an algebraic curve. In this sense, it is a purely arithmetic problem.

Let M be an n -equidimensional smooth projective variety over $\mathbb{C}$. Let $\operatorname{Div}(M)$ be the group of Cartier divisors on M and let $\operatorname{Div}(M)_{\mathbb{R}} := \operatorname{Div}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, whose element is called an $\mathbb{R}$ -divisor. Let us fix $D \in \operatorname{Div}(M)_{\mathbb{R}}$. We set $D = a_1 D_1 + \cdots + a_l D_l$, where $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ and D_i 's are prime divisors on M .

Let $g : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ be a locally integrable function on M . We say g is a D -Green function of C^{∞} -type (resp. C^0 -type) if, for each point $x \in M$, there are an open neighborhood U_x of x , local equations $f_1, \dots, f_l$ of $D_1, \dots, D_l$ respectively and a C^{∞} (resp. C^0) function u_x over U_x such that

$$g = u_x + \sum_{i=1}^l (-a_i) \log |f_i|^2 \quad (a.e.)$$

over U_x . The above equation is called a local expression of g .

Let g be a D -Green function of C^0 -type on M . Let

$$g = u + \sum (-a_i) \log |f_i|^2 = u' + \sum (-a_i) \log |f'_i|^2 \quad (a.e.)$$

be two local expressions of g . Then, as $\sum(-a_i) \log |f_i/f'_i|^2$ is dd^c -closed, we have $dd^c(u) = dd^c(u')$ as currents, so that it can be defined globally. We denote it by $c_1(D, g)$. Note that $c_1(D, g)$ is a closed $(1, 1)$ -current on M . If g is of C^∞ -type, then $c_1(D, g)$ is represented by a C^∞ -form.

Let X be a d -dimensional, generically smooth normal projective arithmetic variety, that is,

- 1 X is projective flat integral scheme over $\mathbb{Z}$.
- 2 If $X_{\mathbb{Q}} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(\mathbb{Q})$ is the generic fiber of $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$, then $X_{\mathbb{Q}}$ is smooth over $\mathbb{Q}$.
- 3 The Krull dimension of X is d , that is, $\dim X_{\mathbb{Q}} = d - 1$.
- 4 X is normal.

Let $\text{Div}(X)$ be the group of Cartier divisors on X and $\text{Div}(X)_{\mathbb{R}} = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, whose element is called an **$\mathbb{R}$ -divisor** on X . For $D \in \text{Div}(X)_{\mathbb{R}}$, we set $D = \sum_i a_i D_i$, where $a_i \in \mathbb{R}$ and D_i 's are reduced and irreducible subschemes of codimension one. We say D is **effective** if $a_i \geq 0$ for all i . Moreover, for $D, E \in \text{Div}(X)_{\mathbb{R}}$,

$$D \leq E \text{ (or } E \geq D) \iff E - D \text{ is effective}$$

Let D be an $\mathbb{R}$ -divisor on X and let g be a locally integrable function on $X(\mathbb{C})$. We say a pair $\overline{D} = (D, g)$ is an **arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor** on X if $F_\infty^*(g) = g$ (a.e.), where $F_\infty : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ is the complex conjugation map, i.e. for $x \in X(\mathbb{C})$, $F_\infty(x)$ is given by the composition $\text{Spec}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} X$. Moreover, we say $\overline{D}$ is **of C^∞ -type (resp. C^0 -type)** if g is a D -Green function of C^∞ -type (resp. C^0 -type). For arithmetic divisors $\overline{D}_1 = (D_1, g_1)$ and $\overline{D}_2 = (D_2, g_2)$, we define $\overline{D}_1 = \overline{D}_2$ and $\overline{D}_1 \leq \overline{D}_2$ to be

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 = \overline{D}_2 &\iff D_1 = D_2 \text{ and } g_1 = g_2 \text{ (a.e.)}, \\ \overline{D}_1 \leq \overline{D}_2 &\iff D_1 \leq D_2 \text{ and } g_1 \leq g_2 \text{ (a.e.)}.\end{aligned}$$

We say $\overline{D}$ is effective if $\overline{D} \geq (0, 0)$.

Let $\text{Rat}(X)$ be the field of rational functions on X . For $\phi \in \text{Rat}(X)^\times$, we set

$$(\phi) := \sum_{\Gamma} \text{ord}_{\Gamma}(\phi) \Gamma \quad \text{and} \quad \widehat{(\phi)} := ((\phi), -\log |\phi|^2).$$

Note that $\widehat{(\phi)}$ is an arithmetic divisor of C^∞ -type

Let $\overline{D} = (D, g)$ be an arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor of C^0 -type on X .

- $H^0(X, D) := \{\phi \in \text{Rat}(X)^\times \mid D + (\phi) \geq 0\} \cup \{0\}$. Note that $H^0(X, D)$ is finitely generated $\mathbb{Z}$ -module.
- $\hat{H}^0(X, \overline{D}) := \{\phi \in \text{Rat}(X)^\times \mid \overline{D} + (\widehat{\phi}) \geq (0, 0)\} \cup \{0\}$. Note that $\hat{H}^0(X, \overline{D})$ is a finite set.
- $\hat{h}^0(X, \overline{D}) := \log \# \hat{H}^0(X, \overline{D})$.
- $\widehat{\text{vol}}(\overline{D}) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \# \hat{H}^0(X, n\overline{D})}{n^d/d!}$.

Theorem

- 1 $\widehat{\text{vol}}(\overline{D}) < \infty$.
- 2 (H. Chen) $\widehat{\text{vol}}(\overline{D}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \# \hat{H}^0(X, n\overline{D})}{n^d/d!}$.
- 3 $\widehat{\text{vol}}(a\overline{D}) = a^d \widehat{\text{vol}}(\overline{D})$ for $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- 4 (Moriwaki) $\widehat{\text{vol}} : \widehat{\text{Div}}_{C^0}(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous in the following sense: Let $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_r, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_s$ be arithmetic $\mathbb{R}$ -divisors of C^0 -type on X . For a compact subset B in $\mathbb{R}^r$ and a positive number ϵ , there are positive numbers δ and δ' such that

$$\left| \widehat{\text{vol}} \left(\sum a_i \overline{D}_i + \sum \delta_j \overline{A}_j + (0, \phi) \right) - \widehat{\text{vol}} \left(\sum a_i \overline{D}_i \right) \right| \leq \epsilon$$

for all $a_1, \dots, a_r, \delta_1, \dots, \delta_s \in \mathbb{R}$ and $\phi \in C^0(X)$ with $(a_1, \dots, a_r) \in B$, $|\delta_1| + \dots + |\delta_s| \leq \delta$ and $\|\phi\|_{\text{sup}} \leq \delta'$.

Let C be a reduced and irreducible 1-dimensional closed subscheme of X . We would like to define $\widehat{\deg}(\overline{D}|_C)$. It is characterized by the following properties:

- ① $\widehat{\deg}(\overline{D}|_C)$ is linear with respect to $\overline{D}$.
- ② If $\phi \in \text{Rat}(X)_{\mathbb{R}}^{\times}$, then $\widehat{\deg}(\widehat{(\phi)}_{\mathbb{R}}|_C) = 0$.
- ③ If $C \not\subseteq \text{Supp}(D)$ and C is vertical, then $\widehat{\deg}(\overline{D}|_C) = \log(p) \deg(D|_C)$, where C is contained in the fiber over a prime p .
- ④ If $C \not\subseteq \text{Supp}(D)$ and C is horizontal, then $\widehat{\deg}(\overline{D}|_C) = \widehat{\deg}(\overline{D}|_{\tilde{C}})$, where $\tilde{C}$ is the normalization of C . Note that $\tilde{C} = \text{Spec}(O_K)$ for some number field K .

- $\overline{D}$ is **big** $\iff \widehat{\text{vol}}(\overline{D}) > 0$.
- $\overline{D}$ is **psedo-effective** $\iff \overline{D} + \overline{A}$ is big for any big arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor $\overline{A}$ of C^0 -type.
- $\overline{D} = (D, g)$ is **nef** $\iff$
 - ① $\widehat{\deg}(\overline{D}|_C) \geq 0$ for all reduced and irreducible 1-dimensional closed subschemes C of X .
 - ② $c_1(D, g)$ is a positive current.
- $\overline{D} = (D, g)$ is **relatively nef** $\iff$
 - ① $\widehat{\deg}(\overline{D}|_C) \geq 0$ for all **vertical** reduced and irreducible 1-dimensional closed subschemes C of X .
 - ② $c_1(D, g)$ is a positive current.
- $\overline{D} = (D, g)$ is **integrable** $\iff \overline{D} = \overline{P} - \overline{Q}$ for some nef arithmetic $\mathbb{R}$ -divisors $\overline{P}$ and $\overline{Q}$.

Theorem (Arithmetic Hilbert-Samuel formula)

(Gillet-Soulé-Abbes-Bouche-Zhang-Moriwaki) If $\overline{D}$ is nef, then

$$\hat{h}^0(X, n\overline{D}) = \frac{\widehat{\deg}(\overline{D}^d)}{d!} n^d + o(n^d).$$

In other words, $\widehat{\text{vol}}(\overline{D}) = \widehat{\deg}(\overline{D}^d)$.

Remark

The above theorem suggests that $\widehat{\deg}(\overline{D}^d)$ can be defined by $\widehat{\text{vol}}(\overline{D})$. Note that

$$d!X_1 \cdots X_d = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, d\}} (-1)^{d-\#(I)} \left(\sum_{i \in I} X_i \right)^d$$

in $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$. Thus, for nef arithmetic $\mathbb{R}$ -divisors $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_d$,

$$d! \widehat{\deg}(\overline{D}_1 \cdots \overline{D}_d) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, d\}} (-1)^{d-\#(I)} \widehat{\text{vol}} \left(\sum_{i \in I} \overline{D}_i \right).$$

In general, for integrable arithmetic $\mathbb{R}$ -divisors $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_d$, we can define $\widehat{\deg}(\overline{D}_1 \cdots \overline{D}_d)$ by linearity.

Theorem (Generalized Hodge index theorem)

(Moriwaki) If $\overline{D}$ is relatively nef, then $\widehat{\text{vol}}(\overline{D}) \geq \widehat{\text{deg}}(\overline{D}^d)$.

Corollary (The existence of small sections)

(Faltings-Gillet-Soulé-Zhang-Moriwaki) If $\overline{D}$ is a relatively nef and $\widehat{\text{deg}}(\overline{D}^d) > 0$, then there are n and $\phi \in \text{Rat}(X)^\times$ such that $n\overline{D} + \widehat{(\phi)} \geq 0$.

Corollary (Arithmetic Bogomolov's inequality)

(Miyaoka-Soulé-Moriwaki) We assume $d = 2$ and X is regular. Let (E, h) be a C^∞ -hermitian locally free sheaf on X . If E is semistable on the generic fiber, then

$$\widehat{\text{deg}} \left(\widehat{c}_2(\overline{E}) - \frac{r-1}{2r} \widehat{c}_1(\overline{E})^2 \right) \geq 0,$$

where $r = \text{rk } E$.

Let $\pi : Y = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(E) \right) \rightarrow X$ and D the tautological divisor on Y (i.e. $\mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}(1)$). Roughly speaking, if we give a suitable Green function g to D , then $(D, g) - (1/r)\pi^*(\widehat{c}_1(\overline{E}))$ is relatively nef and its volume is zero, so that

$$\widehat{\text{deg}} \left(((D, g) - (1/r)\pi^*(\widehat{c}_1(\overline{E})))^{r+1} \right) \leq 0$$

by the Generalized Hodge index theorem, which gives the above inequality.

Theorem (Arithmetic Fujita's approximation theorem)

(Chen-Yuan) We assume that $\overline{D}$ is big. For a given $\epsilon > 0$, there are a birational morphism $\nu_\epsilon : Y_\epsilon \rightarrow X$ of generically smooth, normal projective arithmetic varieties and a nef and big arithmetic $\mathbb{Q}$ -divisor $\overline{P}$ of C^∞ -type such that $\nu_\epsilon^*(\overline{D}) \geq \overline{P}$ and $\widehat{\text{vol}}(\overline{P}) \geq \widehat{\text{vol}}(\overline{D}) - \epsilon$.

Let S be a non-singular projective surface over an algebraically closed field. Let D be an effective divisor on S . By virtue of Bauer, the positive part of the Zariski decomposition of D is characterized by the greatest element of

$$\{M \mid M \text{ is a nef } \mathbb{R}\text{-divisor on } S \text{ and } M \leq D\}.$$

Theorem (Zariski decomposition on arithmetic surfaces)

(Moriwaki) We assume that $d = 2$ and X is regular. Let $\overline{D}$ be an arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor of C^0 -type on X such that the set

$$\Upsilon(\overline{D}) = \{ \overline{M} \mid \overline{M} \text{ is a nef arithmetic } \mathbb{R}\text{-divisor on } X \text{ and } \overline{M} \leq \overline{D} \}$$

is not empty. Then there is a nef arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor $\overline{P}$ such that $\overline{P}$ gives the greatest element of $\Upsilon(\overline{D})$, that is, $\overline{P} \in \Upsilon(\overline{D})$ and $\overline{M} \leq \overline{P}$ for all $\overline{M} \in \Upsilon(\overline{D})$. Moreover, if we set $\overline{N} = \overline{D} - \overline{P}$, then the following properties hold:

- 1 $\hat{H}^0(X, n\bar{P}) = \hat{H}^0(X, n\bar{D})$ for all $n \geq 0$.
- 2 $\widehat{\text{vol}}(\bar{D}) = \widehat{\text{vol}}(\bar{P}) = \widehat{\text{deg}}(\bar{P}^2)$.
- 3 $\widehat{\text{deg}}(\bar{P} \cdot \bar{N}) = 0$.
- 4 If $\bar{B}$ is an integrable arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor of C^0 -type with $(0, 0) \not\leq \bar{B} \leq \bar{N}$, then $\widehat{\text{deg}}(\bar{B}^2) < 0$.

For the proof of the property (3), the following characterization of nef arithmetic $\mathbb{R}$ -Cartier is used:

Theorem (Generalized Hodge index theorem on arithmetic surfaces)

(Moriwaki) We assume that $d = 2$ and $\overline{D}$ is integrable. If $\deg(D_{\mathbb{Q}}) \geq 0$, then $\widehat{\deg}(\overline{D}^2) \leq \widehat{\text{vol}}(\overline{D})$. Moreover, we have the following:

- 1 We assume that $\deg(D_{\mathbb{Q}}) = 0$. The equality holds if and only if there are $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\phi \in \text{Rat}(X)_{\mathbb{R}}^{\times}$ such that $\overline{D} = (\widehat{\phi})_{\mathbb{R}} + (0, \lambda)$.
- 2 We assume that $\deg(D_{\mathbb{Q}}) > 0$. The equality holds if and only if $\overline{D}$ is nef.

Let X be a d -dimensional, generically smooth normal projective arithmetic variety and let $\overline{D}$ be a big arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor of C^0 -type on X . By the above theorem, a decomposition $\overline{D} = \overline{P} + \overline{N}$ is called a *Zariski decomposition of $\overline{D}$* if

- ① $\overline{P}$ is a nef arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor on X .
- ② $\overline{N}$ is an effective arithmetic $\mathbb{R}$ -divisor of C^0 -type on X .
- ③ $\widehat{\text{vol}}(\overline{D}) = \widehat{\text{vol}}(\overline{P})$.

Let $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Proj}(\mathbb{Z}[T_0, T_1, \dots, T_n])$, $D = \{T_0 = 0\}$ and $z_i = T_i/T_0$ for $i = 1, \dots, n$. Let us fix a positive number a . We define a D -Green function g_a of C^∞ -type on $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ and an arithmetic divisor $\overline{D}_a$ of C^∞ -type on $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ to be

$$g_a := \log(1 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) + \log(a) \quad \text{and} \quad \overline{D}_a := (D, g_a).$$

Note that $c_1(\overline{D}_a)$ is positive. Let

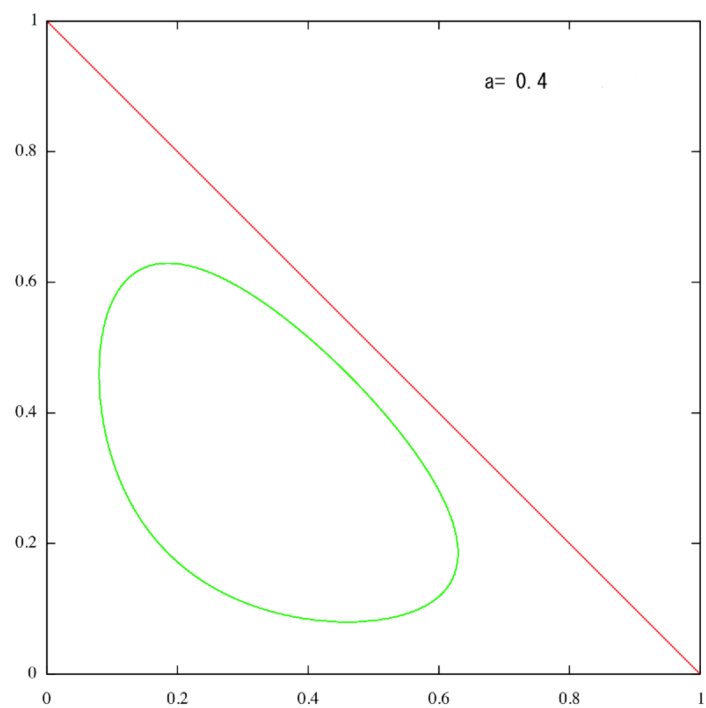
$$\Delta_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$$

and let $\vartheta_a : \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}$ be a function given by

$$2\vartheta_g = -(1 - x_1 - \dots - x_n) \log(1 - x_1 - \dots - x_n) - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i + \log(a).$$

We set

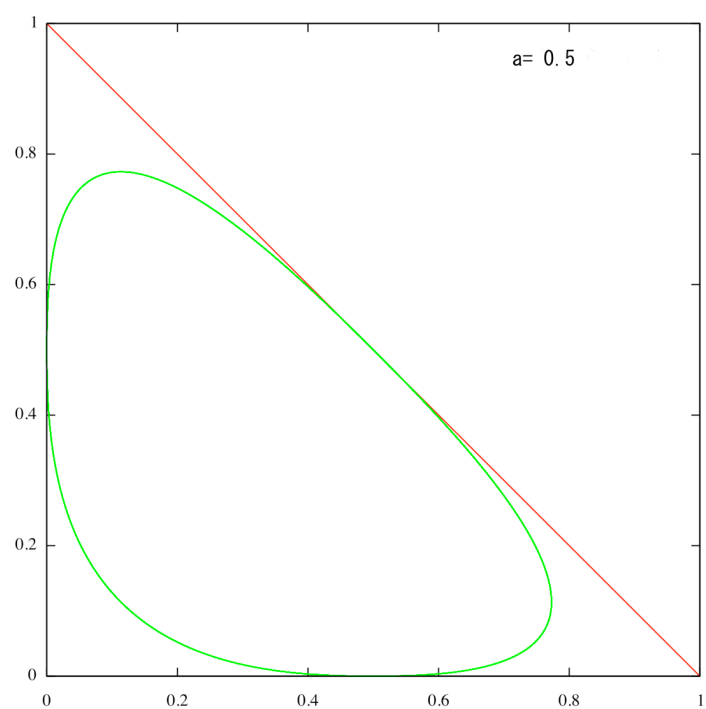
$$\Theta_a := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid \vartheta_a(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}.$$



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Atsushi MORIWAKI

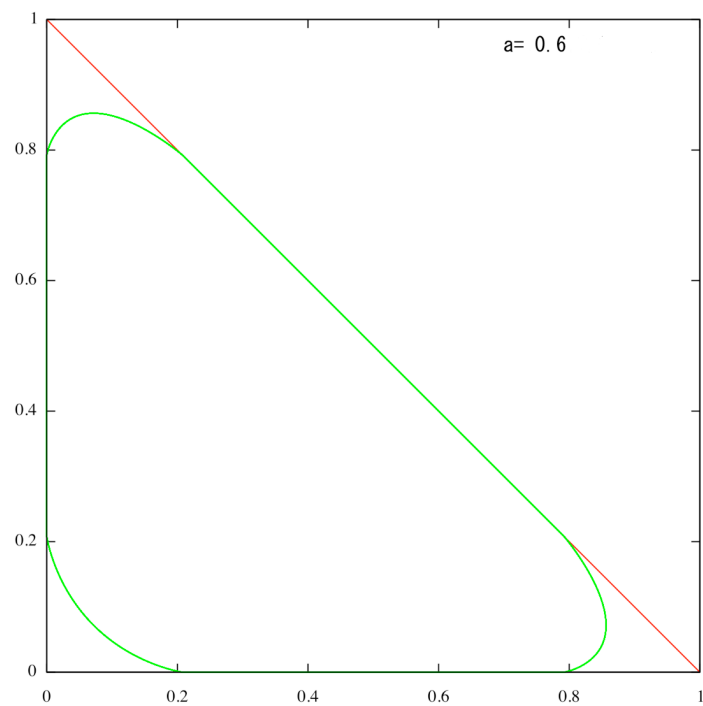
Birational Arakelov Geometry



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Atsushi MORIWAKI

Birational Arakelov Geometry



The following properties (1) – (6) hold for $\overline{D}_a$:

- (1) $\overline{D}_a$ is ample $\iff a > 1$.
- (2) $\overline{D}_a$ is nef $\iff a \geq 1$.
- (3) $\overline{D}_a$ is big $\iff a > \frac{1}{n+1}$.
- (4) $\overline{D}_a$ is pseudo-effective $\iff a \geq \frac{1}{n+1}$.

(5) (Integral formula) The following formulae hold:

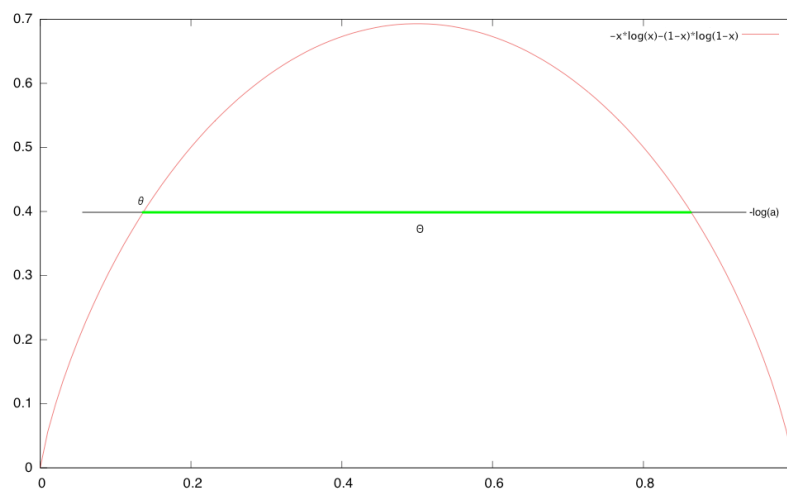
$$\widehat{\text{vol}}(\overline{D}_a) = (n+1)! \int_{\Theta_a} \vartheta_a(1-x_1-\cdots-x_n, x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

and

$$\widehat{\text{deg}}(\overline{D}_a^{n+1}) = (n+1)! \int_{\Delta_n} \vartheta_a(1-x_1-\cdots-x_n, x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Boucksom and H. Chen generalized the above formulae to a general situation by using Okounkov bodies.

(6) (Zariski decomposition for $n = 1$) We assume $n = 1$. The Zariski decomposition of $\overline{D}_a$ exists if and only if $a \geq 1/2$. Moreover, we set $H_0 = D = \{T_0 = 0\}$, $H_1 = \{T_1 = 0\}$ and $\theta_a = \inf \Theta_a$.



Theorem (Burgos Gil, Moriwaki, Philippon and Sombra)

There is a Zariski decomposition of $f^(\overline{D}_g)$ for some birational morphism $f : Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ of generically smooth and projective normal arithmetic varieties if and only if*

$$\Theta_g := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid \vartheta_g(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$$

is a quasi-rational convex polyhedron, that is, there are $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{Q}^n$ and $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ such that

$$\Theta_g = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \gamma_i \rangle \geq b_i \ \forall i = 1, \dots, l\},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the standard inner product of $\mathbb{R}^n$.

The above theorem holds for toric varieties.

For example, if $g = \log \max\{a_0, a_1|z_1|^2, a_2|z_2|^2\}$, then $\overline{D}_g$ is big if and only if $\max\{a_0, a_1, a_2\} > 1$. Moreover,

$$\Theta_g = \left\{ (x_1, x_2) \in \Delta_2 \mid \log\left(\frac{a_1}{a_0}\right)x_1 + \log\left(\frac{a_2}{a_0}\right)x_2 + \log(a_0) \geq 0 \right\}.$$

Thus there is a Zariski decomposition of $f^*(\overline{D}_g)$ for some birational morphism $f : Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^2$ of generically smooth and projective normal arithmetic varieties if and only if there is $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ such that

$$\lambda \left(\log\left(\frac{a_1}{a_0}\right), \log\left(\frac{a_2}{a_0}\right) \right) \in \mathbb{Q}^2.$$

ON WILD QUOTIENT SINGULARITIES

伊藤 浩行

1. 序

正標数の代数多様体を扱う際にしばしば問題となるのが“野生的”現象である。群作用による商を考えると、群の位数が標数で割り切れる場合にこのような野性的状況となる。分岐被覆を考えると野性的分岐や野生的ファイバーの問題となり、商特異点を考えると野性的商特異点の問題となるが、標数 0 とは異なり正標数特有の病理現象が起こることがあり、しばしば標数 0 の証明が適用できず解析が困難である。

本稿では、2 次元の正標数商特異点に関してその野生的群作用で得られる場合について最近までの結果を述べる。尚、本研究は S. Schröer 氏 (Düsseldorf) との共同研究であり、また、科学研究費 24540051 の援助を受けている。

本稿を通して k で標数 $p \geq 0$ の代数的閉体を表し、 q で標数 p のべきを表すこととする。特異点一般の用語等については石井 [10] 等を参照のこと。

2. 商特異点

A を剰余体が k に同型であるネーター的 2 次元正則局所環、 $G \subset \text{Aut}(A)$ をその自己同型群の有限部分群とし、 G の作用による A の不変環を $R = A^G$ と書く。

また簡単のため、本稿では A は完備であり、 G の A への作用は余次元 1 で自由であるとする。このとき $(X, x) = (\text{Spec } R, \mathfrak{m})$ を商特異点と呼ぶことにする。

定義 2.1. 上の記号の下で有限群 G の位数が標数で割り切れる場合に作用が野生的 (wild) であるといい、 $(\text{Spec } R, \mathfrak{m})$ を野生的商特異点 (*wild quotient singularity*) と呼ぶ。また、そうでない場合の作用を順的 (tame) 作用といい、 $(\text{Spec } R, \mathfrak{m})$ を順的商特異点 (*tame quotient singularity*) (または単に商特異点) と呼ぶ。

はじめに標数が 0 の商特異点の場合に知られていることを復習しておこう。尚、正標数であっても作用が順的であれば同様のことが成立する。

事実 2.2 (Cartan [4]). 標数が 0 であれば G の作用は線形化可能である

従って小さい (small) 有限部分群 $G \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$ を用いて $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$ としてよい。

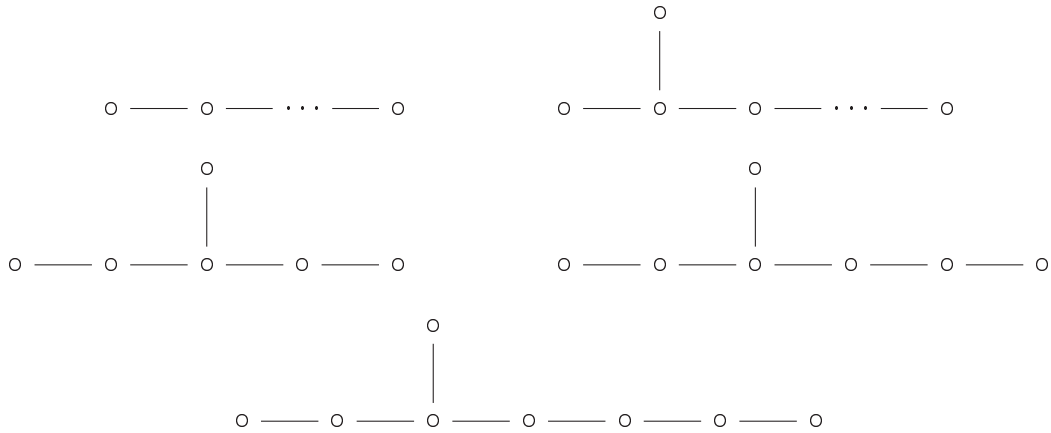
注意 2.3. 本稿では G の作用が余次元 1 で自由と仮定しているが、標数 0 では「アフィン空間の有限鏡映群による商はアフィン空間となる」という Chevalley の定理があるので、この仮定がなくても商特異点を考える上では鏡映を含まない小さい有限部分群として良い。しかしながら一般に正標数では状況が異なる。

次に Brieskorn による 2 次元複素商特異点の特徴付けについて述べる。

事実 2.4 (Brieskorn [3]). (X, x) が商特異点であることと以下はそれぞれ同値である。

- (1) 非特異な有限被覆 $(Y, y) \longrightarrow (X, x)$ が存在する。
- (2) 局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が有限である。

特に、 (X, x) が非特異であることと局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が自明であることは同値である。また、商特異点の双対グラフは以下のいずれかのグラフ (に適切な重みをつけたもの) であり、逆にそれぞれのグラフ (に適切な重みをつけたもの) に対して特異点が一意的に定まる。



適切な重みについては [3] を参照のこと。

更に、商特異点であって群が巡回群であるときは次のことがわかる。

事実 2.5. 商特異点について次は同値である。

- (1) 巡回商特異点である。
- (2) トーリック特異点である。
- (3) 例外集合が $\mathbb{P}^1$ の鎖に適切な重みを与えたものである。即ち、双対グラフは次の通りである。

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ -b_1 & & -b_2 & & & & -b_{r-1} & & -b_r \end{array}$$

注意 2.6. 上の双対グラフの重みは連分数を用いて $\frac{n+1}{b} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \cdots - \frac{1}{b_r}}}$ と表される。ここで、 n と b は G の作用により次のように決まる数である。

$$G \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^b \end{pmatrix} \right\rangle$$

ただし、 ζ は 1 の原始 $n+1$ 乗根である。

定義 2.7. 双対グラフと重みが上述の (3) の形の特異点を $\frac{n+1}{b}$ 型 *Hirzebruch-Jung* 特異点と呼ぶ。

また、商特異点の中の重要なクラスとして標数 0 では有理二重点がある。

事実 2.8. 特異点 (X, x) が有理二重点であることと次のそれぞれは同値である。

- (1) *Gorenstein* 特異点かつ商特異点である。
- (2) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群 G により $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$ と表される。
- (3) $\mathbb{C}^3$ の超曲面であり定義方程式は下の表のいずれかである。

群	定義方程式	双対グラフ	基本群
μ_{n+1}	$z^2 + x^2 + y^{n+1}$ $\cong xy + z^{n+1}$	$A_n (n \geq 1)$	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
D_n	$z^2 + x^2y + y^{n-1}$	$D_n (n \geq 4)$	D_n
T	$z^2 + x^3 + y^4$	E_6	T
O	$z^2 + x^3 + xy^3$	E_7	O
I	$z^2 + x^3 + y^5$	E_8	I

ここで μ_{n+1} は位数 $n+1$ の巡回群を、 D_n は位数 $4n$ の 2 項正 2 面体群を、 T (O , I) は位数 24 (48, 120) の 2 項正 4 (8, 20) 面体群をそれぞれ表す。

- (4) 双対グラフは A, D, E 型 *Dynkin* 図形である。

より詳しくは Durfee [6] 等を参照のこと。

注意 2.9. $\mathbb{C}$ 上では、商特異点是对数的末端特異点であり、従って有理特異点である。また 2 次元であれば対数的特異点は商特異点でもある。しかしながら、正標数では必ずしも商特異点是有理特異点とはならず、いくらでも大きな種数の商特異点が構成可能である。

また、正標数では、有理二重点であっても一般に必ずしもここで言う商特異点ではない (§5 参照)。

3. 野生的商特異点

標数が 0 の場合の性質を前節で復習したが、それらに応じた正標数、特に野生的商特異点の場合に対応する事実を順に見ていく。

命題 3.1. 野生的商特異点は一般に線形化不可能である。

Proof. 簡単のため位数 p の有限群 G が 2 変数形式冪級数環に作用する場合を考える。作用が線形であると仮定し G の生成元 σ をとる。必要なら適当な変数変換を施すことにより、 σ の作用は次の Jordan 標準形の形であることができる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a \text{ と } c \text{ は } \sigma \text{ の固有値}$$

このとき $\sigma^p = 1$ より $a^p = c^p = 1$ となるが、標数が p なので $a = c = 1$ 、即ち σ の作用は $X \mapsto X + bY, Y \mapsto Y$ となる。 $b \neq 0$ とすると σ の固定軌跡が $\{Y = 0\} = X$ 軸となり、原点のみが固定点である仮定に反する。従って $b = 0$ より $\sigma = 1$ となってしまう。□

このことから、作用を具体的に書き下すと 2 次以上の項が現れ、標数 0 のように作用が “有限” 種類となるようなことも、特異点の定義方程式の標準形を決めることも一般には期待できそうにない。しかしながら、低標数では次のような結果が知られている。

事実 3.2 (Artin [1]). k を標数 2 の代数的閉体とし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が $k[[U, V]]$ へ余次元 1 で自由に作用しているとする。このとき、互いに素な非単元 $a, b \in k[[U, V]]$ が存在して不変環は

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + abZ + Xb^2 + Ya^2)$$

と書ける。

より詳しく言うと、 R を不変環とすると、 $k[[U, V]]$ にパラメータ系 X, Y が存在し、あるパラメータ系 $a, b \in k[[X, Y]]$ を用いて $R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + abZ + Xb^2 + Ya^2)$ と表される。このとき環拡大 $R \subset k[[U, V]]$ は

$$U^2 + aU + X = 0, V^2 + bV + Y = 0$$

で表され、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元 σ の作用は $U \mapsto U + a, V \mapsto V + b$ と書ける。またこのとき、

$$X = U^2 + aU = U\bar{U}, Y = V^2 + bV = V\bar{V}, Z = U\bar{V} + \bar{U}V = Ub + Va$$

である。ただし、 $\bar{U}, \bar{V}$ でそれぞれ U, V の共役を表す。

例 3.3. (1) $a = X, b = Y$ とすると

$$R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + XYZ + X^2Y + XY^2)$$

となり有理二重点 D_4^1 が得られる。(記号の説明は § 5 参照のこと。)

(2) $a = Y^2, b = X$ とすると

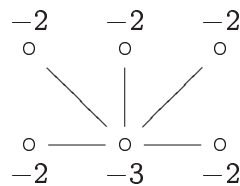
$$R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + XY^2Z + X^3 + Y^5)$$

となり有理二重点 E_8^2 が得られる。

(3) $a = X^2, b = Y^2$ とすると

$$R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^2Y^2Z + X^4Y + XY^4)$$

となり最小楕円型特異点 $\textcircled{19}_0$ が得られる。記号 $\textcircled{19}_0$ は Wagreich [22] による最小楕円型特異点の分類記号。また、 $\textcircled{19}_0$ の双対グラフは以下の通りである。



事実 3.4 (Peskin [18]). k を標数 3 の代数的閉体とし $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が $k[[U, V]]$ へ余次元 1 で自由に作用しているとする。また、作用の線形部分の *Jordan* ブロックがただ一つであるとする。(即ち、作用が適当な変数変換の後 $U \mapsto U + V + \mathcal{O}(2), V \mapsto V + \mathcal{O}(2)$ と書けるとする。) このとき、不変環は

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^3 + Y^{2j}Z^2 - Y^{3j+1} - X^2) \quad (j \geq 1)$$

に同型となる。

例 3.5. (1) $j = 1$ とすると不変環は

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^3 + Y^2Z^2 - Y^4 - X^2)$$

となり有理二重点 E_6^1 となる。

(2) $j > 1$ ならば不変環は *Cohen-Macaulay* であるが非有理的特異点となる。

標数が 2 の場合 (Artin)、標数が 3 の場合 (Peskin) 何れの場合も非常に巧妙に証明をしているので、一般の標数において野生的巡回商の場合に限定しても標準形を得るのはかなり難しそうな感じである。

基本群との関係は準非分離被覆があるため標数 0 のように単純ではない。

事実 3.6. (X, x) を正標数の商特異点とする。このとき非特異代数曲面による有限被覆が存在する。即ち、

$$\exists (Y, y) \text{ 非特異} \longrightarrow (X, x) \text{ 有限射}$$

また、非特異代数曲面による有限被覆が存在するならば、局所基本群 $\pi_1^{\text{loc}}(X, x)$ が有限となる。更に、商特異点の双対グラフは木構造 (サイクルを含まない) となる。

注意 3.7. (1) 局所基本群が有限であるとき非特異代数曲面による有限被覆が存在するかどうかについては、任意正標数の有理二重点 (Artin [2]), *Brieskorn* 型特異点 ($p > 2$, *Cutkosky-Srinivasan* [5]) の場合に肯定的に証明されている。

(2) 正標数では局所基本群が自明であっても非特異であるとは限らない。実際、非特異代数曲面による純非分離被覆がある場合に基本群が自明となることがある。(§5 の有理二重点を参照のこと。)

巡回商特異点については順的な場合と野性的な場合で様相がちがうが、見方を変えて双対グラフが鎖となるもの、即ち *Hirzebruch-Jung* 特異点を対象と考えると次の事実が成り立つ。

事実 3.8. *Hirzebruch-Jung* 特異点であることトーリック特異点であることは同値である。

証明は例えば、原 [7]、Lee-中山 [14] を参照のこと。

これらが商特異点であるか否かについては、*Hirzebruch-Jung* 特異点の型を $\frac{m}{b}$ とするとき、 m と標数が互いに素であれば $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ による順的商特異点となるが、 m が標数で割れる場合は導分による商 (=乗法型群スキームによる商) になると考えられる。実際、 $m = p$ の場合は群スキーム μ_p による商として記述される (廣門 [9] 参照)。

4. 野生的商特異点の双対グラフ

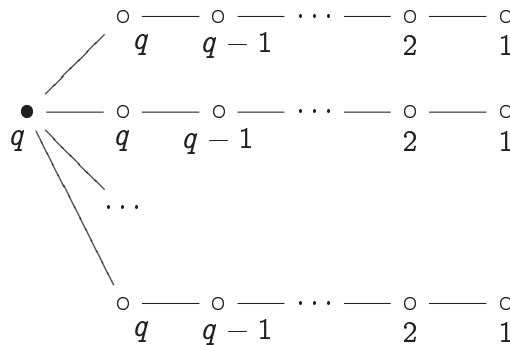
野生的商特異点の双対グラフについて考察する。標数が 0 の商特異点については既に § 2 でみたように双対グラフはノードの数が高々 1 つである木構造であり、巡回商特異点であることと鎖 (ノードを持たない木構造) であることが必要十分であることがわかっている。しかしながら正標数の場合は状況が異なる。

事実 4.1. 野生的商特異点の双対グラフについて以下が成り立つ。

- (1) 順的巡回商特異点の双対グラフは鎖である。
- (2) (Lorenzini [15]) 野生的商特異点の双対グラフは有理曲線による木構造 (サイクルを含まない) である。
- (3) (Lorenzini [15]) 野生的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 商特異点の交叉行列の行列式は p べきである。

次に野生的商特異点の双対グラフについてこれまで得られている少ない例をあげる。

- 例 4.2. (1) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商 (例 3.3) として D_4 型特異点、 E_8 型特異点、 $(19)_0$ 型特異点が得られ、いずれも 1 つのノードを持つ。
- (2) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 商 (例 3.5) として得られる E_6 型特異点 のノード数は 1 である。
- (3) 標数 2 の Kummer 曲面 (塩田 [20], 桂 [13]) に現れる特異点として D_4 型、 D_8 型、 $(19)_0$ 型、 $(4)_{0,1}^1$ 型の各特異点についていずれも 1 のノードを持つ。(記号は Wagreich [22] によるもの。)
- (4) $\mathbb{F}_q$ 上の Artin-Schreier 曲線の自己積への $\mathbb{F}_q$ の対角作用による商として現れる特異点 (伊藤-Schröer [11]) で、双対グラフは以下の図の通り星形グラフ (ノード数は 1) となる。また、基本種数は $p_f = \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ であり q とともに増大する。



ここで $\bullet$ からでている枝の数は $q+1$ で、数字は因子としての重複度を表し、重みは $\circ$ が全て -2 で、 $\bullet$ は $-q$ である。

上の例の (4) 以外はいずれも種数の小さい特異点であったが、(4) の例によりいくらかでも種数が大きな特異点が野生的商特異点として得られることがわかる。以下にこの特異点の構成法を述べる。詳しくは伊藤-Schröer [12] を参照のこと。

C として標数 p のある種の Artin-Schreier 曲線を考える。

$$C : y^{q-1} = x^q - x$$

これは、 $q = 3$ とすると標数が 3 の時に唯一存在する超特異楕円曲線となる。また、この曲線の自己同型群の有限 p 部分群とその作用として

$$(\mathbb{F}_q, +) \ni a, \quad x \mapsto x + a, y \mapsto y$$

を考える。これは p 基本的 (p -elementary) である。尚、上の作用は標数 3 の超特異楕円曲線への自己同型群 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 内の位数 3 の元的作用を一般化したものである。

この作用を $C \times C$ へ対角的に作用させその商を考えると欲しい特異点

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^q - X^{q-1}Y^{q-1}Z - X^qY + XY^q)$$

が得られる。尚、この特異点は 1 点ブローアップすると $q + 1$ 個の有理二重点 A_q が例外曲線 $\mathbb{P}^1$ の $q + 1$ 個の $\mathbb{F}_q$ 有理点上にのっている。

さて、上で見たように正標数の商特異点については、双対グラフが鎖であるかノードを持つ木構造であるかによりその性質が異なるようである。実際、 $\frac{m}{b}$ 型 Hirzebruch-Jung 特異点について標数 p が m を割り切らない場合は順的巡回特異点であり、標数 p に等しい場合は本稿で用いている有限群による商特異点ではなく、群スキーム μ_p による商特異点である。また、 m が標数 p のべき p^e の場合は、群スキーム μ_{p^e} による商特異点 (高次導分による商) であると予想され、一般の場合はこれらの合成と考えられる。(現在検証中)

Hirzebruch-Jung 特異点の局所基本群に関しては次の結果が得られている。

定理 4.3 (伊藤-Schröer [12]). $\frac{m}{b}$ 型の *Hirzebruch-Jung* 特異点の局所基本群は、位数 m の巡回群の p と互いに粗な部分 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})'$ に同型である。

証明は Log 幾何学を用いるが論文 [12] を参照のこと。尚、論文ではより一般に混標数の場合も含めて証明している。

系 4.4. 野生的商特異点の双対グラフは 1 つ以上のノードを持つ。

特に、標数 0 では商特異点の双対グラフのノードの数は 0 または 1 出会ったことを思い出すと正標数との違いがよくわかる。

このことから双対グラフとしてノードの数が 2 以上のものが現れるか否かが問題となるが、結果は次の通りである。

定理 4.5 (伊藤-Schröer [12]). 任意の正標数において双対グラフのノードの数が少なくとも 2 である野生的商特異点が存在する。

この定理の証明は具体的に商特異点を構成するのであるが、その定義方程式を書き下すのがうまくいかないので間接的にノード数を下から評価する。尚、詳細は [12] を参照のこと。

次の $\mathbb{F}_q$ 上の Hermit 曲線と言われる曲線を考える。

$$C : y^q - y = x^{q+1}$$

これは自己同型群が例外的に大きい曲線として知られ、Fermat 曲線

$$X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1} = 0$$

に $\mathbb{F}_{q^2}$ 上同型¹である。この曲線の自己同型群は

$$\text{Aut}(C) \cong \begin{cases} \text{PU}(3, q) & q > 2 \\ Q \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & q = 2 \end{cases}$$

であり、その位数は

$$|\text{Aut}(C)| = \begin{cases} q^3(q^3 + 1)(q^2 - 1) & q > 2 \\ 24 & q = 2 \end{cases}$$

となる。

今、 G として $\text{Aut}(C)$ の Sylow p 部分群 をとると $|G| = q^3$ となる。このとき群 G は特別な部分群 (special subgroup) となる。即ち Frattini 部分群と中心と交換子群がすべて一致 ($\cong (\mathbb{F}_p, +)$) する。また、 G の C への作用は

$$G = \{(t, r) \in k^2 \mid r^{q^2} + r = 0 \text{ and } t^q - t = r^{q+1}\}$$

とするとき

$$X \mapsto X + r, Y \mapsto Y - r^q X + t$$

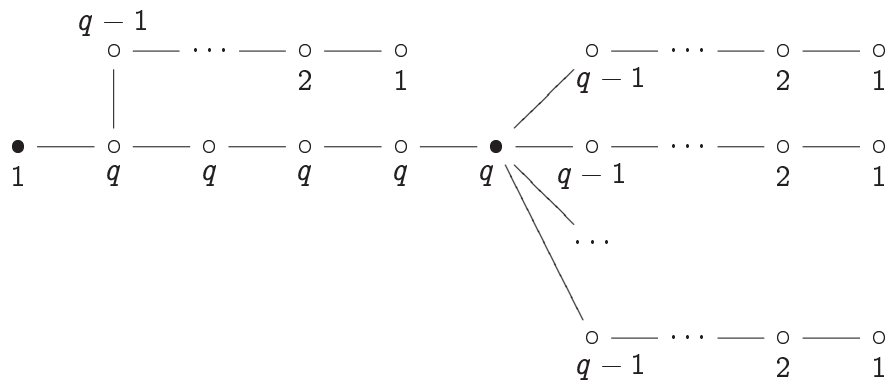
で与えられる。ただし、この作用は可換ではないことに注意する。

この作用を自己積 $C \times C$ に対して対角作用させ、その商 $C \times C/G$ を考えるのであるが、ここに現れる特異点を直接計算するのは困難なので自然に誘導される $\mathbb{P}^1$ 上のファイブレーション

$$C \times C/G \longrightarrow C/G \cong \mathbb{P}^1$$

の相対極小モデルの特異ファイバーを求める。相対極小モデルは $C \times C/G$ の最小特異点解消から (-1) 曲線を blow down して得られるので、この特異ファイバーの形がわかれば特異点の双対グラフのノード数の下限がわかることになる。

計算すると相対極小モデル $S \longrightarrow C/G \cong \mathbb{P}^1$ について、一般ファイバーの種数は $\frac{q(q-1)}{2}$ であり、生成ファイバーの方程式は $y^q - y = x^{q+1} + \tau x^q$ 、唯一の特異ファイバー ($\tau = \infty$ 上) の双対グラフは次の通りであることがわかる。



¹この事実とその自己同型群が $\text{PU}(3, q)$ となることについて講演後、塩田先生に論文 [21] とともにご教示いただきました。

ここで、右の●から出ている枝は q 本で、数字は因子としての重複度を表し、重みは○がすべて -2 、●はすべて $-q$ である。

従って商特異点の双対グラフのノード数は少なくとも 2 であることがわかる。

5. もう一つの野生的“商”特異点

講演においても少し触れたが、本講演での主対象である野生的商特異点の他に、正標数ではもう一つの“商”特異点である導分による商特異点がある。これらの関係について有理二重点を題材として簡単に述べる。

複素数体上の有理二重点は §2 で述べたように、双対グラフが ADE 型 Dynkin 図形に 1 対 1 対応し、それぞれに $SL(2, \mathbb{C})$ の小さい有限部分群がただ一つ対応した商特異点となっている。特に、このように双対グラフから特異点 (の局所同型類) が決まるこのような特異点を taut 特異点と言う。しかしながら、正標数では 1975 年に Artin [1] により、同じ Dynkin 図形を双対グラフに持つが異なる (局所同型でない) 有理二重点、即ち taut 特異点ではない有理二重点が存在することが分類によりわかった。

以下での議論のため Artin [1] による分類表 (Table 1、Table 2) を書いておく。

TABLE 1. 標数 $p > 2$ の有理二重点

双対グラフ	定義方程式	Tjurina 数	基本群
$A_n (n \geq 1)$	$z^2 + x^2 + y^{k+1}$	$n (p \nmid n+1)$ $n+1 (p \mid n+1)$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})'$
$D_n (n \geq 4)$	$z^2 + x^2y + y^{k-1}$	n	D_n
E_6 $\exists \text{ in } p = 3$	$E_6^0 \quad z^2 + x^3 + y^4$ $E_6^1 \quad z^2 + x^3 + y^4 + x^2y^2$	$6 (p \neq 3), 9 (p = 3)$ 7	$T, 0$ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
E_7 $\exists \text{ in } p = 3$	$E_7^0 \quad z^2 + x^3 + xy^3$ $E_7^1 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + x^2y^2$	$7 (p \neq 3), 9 (p = 3)$ 7	$O, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_8 $\exists \text{ in } p = 3$ $\exists \text{ in } p = 3$ $\exists \text{ in } p = 5$	$E_8^0 \quad z^2 + x^3 + y^5$ $E_8^1 \quad z^2 + x^3 + y^5 + x^2y^3$ $E_8^2 \quad z^2 + x^3 + y^5 + x^2y^2$ $E_8^1 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xy^4$	$8 (p \neq 3, 5)$ $10 (p = 5)$ $12 (p = 3)$ 10 8 8	I 0 0 0 $Q \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

表より、例えば標数が 2 の D_4 型特異点は D_4^0 と D_4^1 の非同型な 2 種類の特異点があることがわかる。定義方程式が与えられており Tjurina 数を計算するとそれぞれ $\tau(D_4^0) = 8, \tau(D_4^1) = 6$ であることからこれらが非同型であることがわかる。また、例 3.3 で見たように D_4^1 は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による野生的商特異点であるが、 D_4^0 は局所基本群が自明であることから本稿で論じているような有限群の商にはなり得ない。では D_4^0 はどのように作られているかと

TABLE 2. 標数 $p = 2$ の有理二重点

双対グラフ	定義方程式	Tjurina 数	基本群
$A_n (n \geq 1)$	$z^{n+1} + xy$	n (n even) $n + 1$ (n odd)	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})'$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
D_{2m} ($m \geq 2$)	$D_{2m}^0 \quad z^2 + x^2y + xy^m$ $D_{2m}^r \quad z^2 + x^2y + xy^m + xy^{m-r}z$	$4m$ $4m - 2r$	0 $D_{2(2r-n)'}'$
D_{2m+1} ($m \geq 2$)	$D_{2m+1}^0 \quad z^2 + x^2y + y^mz$ $D_{2m+1}^r \quad z^2 + x^2y + y^mz + xy^{m-r}z$	$4m$ $4m - 2r$	0 $D_{2(4r-2n+1)}$
E_6	$E_6^0 \quad z^2 + x^3 + y^2z$ $E_6^1 \quad z^2 + x^3 + y^2z + xyz$	8 6	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_7	$E_7^0 \quad z^2 + x^3 + xy^3$ $E_7^1 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + x^2yz$ $E_7^2 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + y^3z$ $E_7^3 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + xyz$	14 12 10 8	0 0 0 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
E_8	$E_8^0 \quad z^2 + x^3 + y^5$ $E_8^1 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xy^3z$ $E_8^2 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xy^2z$ $E_8^3 \quad z^2 + x^3 + y^5 + y^3z$ $E_8^4 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xyz$	16 14 12 10 8	0 0 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 0 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

言う、群スキーム α_2 による商、より詳しく言うと導分 $D = X^2 \frac{\partial}{\partial X} + Y^2 \frac{\partial}{\partial Y}$ による商となっている。(導分による商については Rudakov-Shafarevich [19] 等を参照のこと。)

同様のことは標数が 3 の E_6^0 (α_3 商) と E_6^1 (例 3.5) や、標数が 2 の E_8^0 (α_2 商) と E_8^2 (例 3.3) についても言える。

しかし、表を見るとこのような商だけでは説明がつかないものがたくさんあるように見える。例えば標数 2 の E_8 型特異点は 5 つがあるが、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商の E_8^2 、 α_2 商の E_8^0 の他がどのような「商」により得られているのか(得られていないのか)がよくわかっていない。可能性としては、余次元 1 で自由ではない作用による商やそれと導分による商、順的作用による商の組み合わせなどが考えられる。勿論 Artin [2] では非特異な被覆が全ての有理二重点について具体的に構成されているので個別に計算することにより説明をつけることは可能と思われるが、数学的な理由がよくわかっていない。

このように一つの双対グラフに対して、導分による商として得られる特異点と野生的商として得られる特異点に対応する例は有理二重点以外にも作ることがでる。

例 5.1. 例 3.3 で扱った最小楕円型特異点 $\mathfrak{I}9_0$ には標数が 2 において非同型な次の 2 つの特異点が存在する。

(1) 導分 $D = X^2 \frac{\partial}{\partial X} + Y^2 \frac{\partial}{\partial Y}$ による商としての $\mathfrak{I}9_0$ で定義方程式は

$$Z^2 + X^4Y + XY^4 = 0$$

で与えられるもの。

(2) 例 3.3 で与えられた野生的商特異点として

$$Z^2 + X^2 Y^2 Z + X^4 Y + XY^4 = 0$$

を定義方程式とするもの。

例 5.2. 例 4.2 (4) で扱った一般標数 p での星形グラフを持つ特異点についても非同型な次の 2 つの特異点が存在する。

(1) 導分 $D = X^q \frac{\partial}{\partial X} + Y^q \frac{\partial}{\partial Y}$ による商として特異点で定義方程式は

$$Z^q - X^q Y + XY^q = 0$$

で与えられるもの。

(2) 例 4.2 で与えられた野生的商特異点として

$$Z^q - X^{q-1} Y^{q-1} Z - X^q Y + XY^q$$

を定義方程式とするもの。

何れの例も (1) にあたる純非分離型の特異点は Frobenius サンドイッチ特異点である。詳しくは 原-澤田 [8] を参照のこと。このように純非分離型特異点 (例えば Frobenius サンドイッチ特異点) があると、それを“変形”させることにより、より Tjurina 数の小さな特異点で同じ双対グラフを持つものが構成可能であることが推察される。

一方で、本稿で扱った Artin-Schreier 商で得られるような「分離型特異点」についても、純非分離型特異点に対する Frobenius 写像によるサンドイッチ構造と類似の扱いをすることが可能である。

これらのことや、両者を (導分と群作用を)「つなぐ」ことが可能そうなこと、また、正標数の有理二重点の「更なる不思議」については別の機会に論ずることにする。

最後に本稿を

問題 1. これら導分の商 (群スキームの商) により得られる「純非分離型特異点」と野生的商として得られる「分離型特異点」を「変形」の立場から、作用を込めて統一的に扱え

という問いで締めくくりたい。

REFERENCES

- [1] M. Artin : Wildly ramified $\mathbb{Z}/2$ actions in dimension two. Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), pp.60–64.
- [2] Coverings of the rational double points in characteristic p , In: W. Baily, T. Shioda (eds.), Complex analysis and algebraic geometry, pp.11–22. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.
- [3] E. Brieskorn : Rationale Singularitäten Komplexer Flächen, Invent. Math. **4** (1968), pp.336–358.
- [4] E. Cartan, Automorphism
- [5] D. Cutkosky, H. Srinivasan : The algebraic fundamental group of a curve singularity, J. Algebra **230** (2000), pp.101–126.

- [6] A. Durfee : Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, *L'Enseignement* **XXV** 1-2 (1979), pp.131–163.
- [7] N. Hara : F-blowups of F-regular surface singularities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140** (2012), pp.2215–2226.
- [8] N. Hara, T. Sawada : Splitting of Frobenius sandwiches, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B24** (2011), pp.121–141.
- [9] M. Hirokado : Singularities of multiplicative p-closed vector fields and global 1-forms of Zariski surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **39** (1999), pp.455–468.
- [10] 石井志保子 : 特異点入門、シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997.
- [11] H. Ito, S. Schröer : Wildly Ramified Actions and Surfaces of General Type Arising from Artin-Schreier Curves, In: C. Faber, G. Farkas, R. de Jong (eds), *Arithmetic and Geometry in honor of Gerard van der Geer*, pp.213–241, *European Math. Soc.*, 2012.
- [12] H. Ito, S. Schröer : Wild quotient surface singularities whose dual graphs are not star-shaped, preprint, arXiv:1209.3605.
- [13] T. Katsura : On Kummer surfaces in characteristic 2, In: M. Nagata (ed), *Proceedings the international symposium on algebraic geometry*, pp.525–542, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.
- [14] Y. Lee, N. Nakayama : Simply connected surfaces of general type in positive characteristic via deformation theory, to appear in *Proc. London Math. Soc.*
- [15] D. Lorenzini : Wild quotient singularities of surfaces, preprint, <http://www.math.uga.edu/~lorenz/paper.html>
- [16] D. Lorenzini : Quotients on wild $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -quotient singularities in dimension 2, preprint, <http://www.math.uga.edu/~lorenz/paper.html>
- [17] D. Lorenzini : Wild quotients of products of curves, preprint, <http://www.math.uga.edu/~lorenz/paper.html>
- [18] B. Peskin : Quotient-Singularities and Wild p -Cyclic Actions, *J. of Algebra* **81** (1983), pp.72–99.
- [19] A. N. Rudakov, I. R. Shafarevich : Inseparable morphisms of algebraic surfaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **40** (1976), no. 6, pp.1269–1307 (Russian); English transl., *Math. USSR-Izv.* **40** (1976), no. 6, pp.1205–1237.
- [20] T. Shioda : Kummer surfaces in characteristic 2, *Proc. Japan Acad.* **50** (1974), 718–722.
- [21] T. Shioda : Arithmetic and Geometry of Fermat Curves, In: *Proceedings of the Algebraic Geometry Seminar Singapore*, pp.95–102, World Scientific, 1987.
- [22] P. Wagreich : Elliptic Singularities of Surfaces, *Amer. J. Math.* **92** (1970), pp.419–454.

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, 東京理科大学理工学部数学科

E-mail address: ito_hiroyuki@ma.noda.tus.ac.jp

正標数の曲面に対する消滅定理

田中 公*

概要

本稿では、筆者の結果 [T] について概説する。詳細については [T] を見て頂けると嬉しいです。

1 イン트로ダクション

標数ゼロの時は小平消滅定理が成立する。

定理 1.1 (小平消滅定理). X を標数ゼロの代数閉体上の非特異射影多様体で、 A を豊富なカルティエ因子とする。すると、 $i > 0$ ならば、

$$H^i(X, K_X + A) = 0$$

となる。

この小平消滅定理やその一般化である川又-フィーベックの消滅定理を用いる事により、極小モデル理論のいくつかの基本的な定理たちを示す事ができる。例えば、以下のような基定点自由性定理が示される。([Kollár-Mori, セクション 3])

定理 1.2 (基定点自由性定理). X を標数ゼロの代数閉体上の対数的端末な射影多様体とする。 D をネフなカルティエ因子で $D - K_X$ が豊富だとする。すると、任意の十分大きい自然数 $b \gg 0$ に対して、 $|bD|$ は基定点自由となる。

今回考えたいのは、「基定点自由性定理が正標数で成立しないか？」という問いである。するとまず、小平消滅定理が正標数で成立するかどうか気になってくる。しかし、これには反例があり正標数では曲面の時でさえ、小平消滅定理の反例が存在してしまう。([Raynaud]) しかしながら、基定点自由性定理に反例があるかどうかはまた別の話である。なので、次のような問いを考える。

問い 1.3. 基定点自由性定理を成立させるような、良い消滅定理を正標数で作る事はできないか？

この問いを考えるには、まずは基定点自由性定理の証明を解説する必要がある。そこで基定点自由性定理の証明を眺めてみると、もし次の問いが肯定的に解決されれば、「 D が巨大な場合の基定点自由性定理」が成立してくれる。

問い 1.4. 次のような消滅定理は成立するか？

X を正標数の代数閉体上の非特異射影多様体とする。 A を豊富なカルティエ因子とし、 N をネフで巨大なカルティエ因子とする。すると、 $m \gg 0$ ならば、

$$H^1(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

この問いは X が曲線の時はセール双対によって従う。よって、非自明でかつ一番簡単な場合は、 X が2次元の時である。次のセクションでは2次元の時に、この問いに対する肯定的な解答を与える。

*tanakahi@math.kyoto-u.ac.jp

2 曲面に対する消滅定理

正標数の代数閉体 k を 1 つ固定して、以下では全て k 上で考える。このセクションでは次の消滅定理を証明する。

定理 2.1. X を非特異射影曲面とする。 A を豊富なカルティエ因子とし、 N を数値的に自明ではないネフ因子とする。すると、 $i > 0$ と $m \gg 0$ に対して、

$$H^i(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

この証明にはフロベニウス写像と藤田消滅定理という 2 つの道具を使う。これら 2 つについて、まず説明する。フロベニウス写像 $F: X \rightarrow X$ は元を p 乗する事によって得られる有限射である。 X が非特異の時には次の事実が成立し、証明にはこれを用いる。

事実 2.2. X を非特異射影多様体とすると、次の完全列が存在する。

$$F_*\omega_X \rightarrow \omega_X \rightarrow 0.$$

次に藤田消滅定理について説明する。藤田消滅定理はセール消滅定理の一般化である。 ([Fujita])

事実 2.3 (藤田消滅定理). X を非特異射影多様体とする。 G を接続層とし、 A を豊富なカルティエ因子とする。すると、ある自然数 $m_0 = m(X, G, A)$ が存在し、次を満たす。任意の自然数 $i > 0$ と、任意の自然数 $m \geq m_0$ と、任意のネフなカルティエ因子 N に対して、

$$H^i(X, G(mA + N)) = 0$$

となる。

セール消滅定理と違う点はネフ因子 N が加わっている所である。先に、 m_0 が固定されて、その後どんなネフ因子を足しても良いという所にメリットがある。

先ず、藤田–セール型の主張を H^2 に対して示す。

補題 2.4. X を非特異射影曲面とする。 G を接続層とし、 N を数値的に自明でないネフなカルティエ因子とする。すると、ある自然数 $m_0 = m(X, G, N)$ が存在し、次を満たす。任意の自然数 $m \geq m_0$ と、任意のネフなカルティエ因子 N' に対して、

$$H^2(X, G(mN + N')) = 0$$

となる。

証明. まず、 G が可逆層の場合に帰着する。 X は射影的なので、ある豊富因子 H に対して、完全列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus r} \rightarrow G(H) \rightarrow 0$$

を得る。 $\mathcal{O}_X(-H + mN + N')$ をテンソルしてコホモロジーをとると、完全列

$$(H^2(X, \mathcal{O}_X(-H + mN + N')))^{\oplus r} \rightarrow H^2(X, G(mN + N')) \rightarrow 0$$

を得る。従って、 G を $\mathcal{O}_X(-H)$ で取りかえれば、 G は可逆層としてよい。

G を可逆層として、主張を示す。あるカルティエ因子 D に対して、 $G = \mathcal{O}_X(D)$ と書ける。すると、セール双対から、

$$h^2(X, D + nN + N') = h^0(X, K_X - D - mN - N') = 0$$

が $m \gg 0$ に対して成立する。実際、 A を豊富因子とすると、 $A \cdot N > 0$ だから、十分大きい m と任意のネフ因子 N' に対して、

$$(K_X - D - mN - N') \cdot A < 0$$

となり、豊富因子と負で交わるから、有効因子と線形同値にはなりえない。 $\square$

定理 2.1 を証明する。

定理 2.1 の証明. $i = 1$ と $i = 2$ の場合を考えればよいが、補題 2.4 により $i = 2$ の時は成立する。従って、 $i = 1$ としてよい。

事実 2.2 によって、全射

$$F_*\omega_X \rightarrow \omega_X$$

がある。 e を自然数とする。 $F, F^2, \dots, F^{e-1}$ で上記の全射を押し出したものたちを合成すると、全射

$$F_*^e\omega_X \rightarrow \omega_X$$

を得る。カーネルを B_e と書いて、完全列

$$0 \rightarrow B_e \rightarrow F_*^e\omega_X \rightarrow \omega_X \rightarrow 0$$

を得る。ここで、 B_e は自然数 e に依存して定まる連接層である。

$\mathcal{O}_X(A + mN)$ をテンソルしてコホモロジーを取ると、完全列

$$H^1(X, \omega_X(p^e A + p^e mN)) \rightarrow H^1(X, \omega_X(A + mN)) \rightarrow H^2(X, B_e(A + mN))$$

を得る。真ん中を消滅させたいので、両端を消滅させれば十分である。藤田消滅定理によって、ある自然数 e_0 が存在して、任意の自然数 m に対して左側のコホモロジーが消える。つまり、

$$H^1(X, \omega_X(p^{e_0} A + p^{e_0} mN)) = 0$$

となる。ここで、藤田消滅定理のおかげで、 e_0 を先に固定した後、 m を任意の自然数で動かす事ができるようになる。あとは、右側のコホモロジー

$$H^2(X, B_{e_0}(A + mN))$$

が十分大きな m に対して消えればよいが、これは補題 2.4 から従う。□

これで、小平消滅定理に似たものを正標数の曲面に対して作る事ができた。川又による被覆を使って、川又-フィーバックの消滅定理に似たものを作る事ができる。

系 2.5. X を非特異射影曲面とする。 A を豊富な $\mathbb{Q}$ -カルティエな $\mathbb{Q}$ -因子とし、小数部分 $\{A\}$ が単純正規交叉であるとする。 N を数値的に自明ではないネフなカルティエ因子とする。すると、 $i > 0$ と $m \gg 0$ に対して、

$$H^i(X, K_X + \lceil A \rceil + mN) = 0$$

となる。

証明. [KMM, Theorem 1-1-1] を用いればよい。□

この川又-フィーバックの消滅定理に似たものを使ってやると、標数ゼロの時の基定点自由性定理の証明を辿る事により、次の基定点自由性定理が証明できる。

系 2.6 (正標数曲面に対する基定点自由性定理). X を正標数の代数閉体上の対数的端末な射影曲面とする。 D をネフなカルティエ因子で $D - K_X$ が豊富だとする。もし D が数値的に自明でないなら、任意の十分大きい自然数 $b \gg 0$ に対して、 $|bD|$ は基定点自由となる。

このセクションの議論を一般次元でも同様に行うか超平面で切っていく事により、次が分かる。

系 2.7. X を非特異射影多様体とする。 A を豊富なカルティエ因子とし、 N を数値的に自明ではないネフ因子とする。すると、 $i \geq \dim X - 1$ と $m \gg 0$ に対して、

$$H^i(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

証明. このセクションの議論を辿るか、超平面切断により曲面の場合に帰着すればよい。 $\square$

よって例えば、 $\dim X = 3$ なら、 $i = 2$ と $i = 3$ では消えてくれる事になる。しかし、欲しいのは $i = 1$ で消えてくれるかどうかである。これについては次のセクションで考える。

3 3次元の時

前のセクションでは曲面の時に、基底点自由性定理を証明する為に十分な消滅定理を作る事ができた。このセクションでは定理 2.1 を 3次元の時に一般化できるかどうかを考えたい。系によって、 $i = 2$ と $i = 3$ では消滅してくれているので、 $i = 1$ について考えたい。つまり、次の問いを考える。

問い 3.1. 次のような消滅定理は成立するか？

X を非特異射影的な 3次元多様体とする。 A を豊富なカルティエ因子とし、 N を数値的に自明でないネフ因子とする。すると、 $m \gg 0$ ならば、

$$H^1(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

しかし、残念ながら、このような消滅定理は成立しない。実際、次のような例が存在する。

例 3.2. ある非特異射影的な 3次元多様体 X と、豊富なカルティエ因子 A と、数値的に自明でないネフ因子 N が存在して、次を満たす。

任意の十分大きな自然数 $m \gg 0$ に対して、

$$H^1(X, K_X + A + mN) \neq 0$$

となる。

構成. 先ず、 Z を小平消滅定理の反例である曲面とする。つまり、 Z は非特異射影曲面で A_Z は Z 上の豊富なカルティエ因子であり、

$$H^1(Z, K_Z + A_Z) \neq 0$$

とする。ここで、 H^2 はセール双対によって消えてくれるので、小平消滅定理の反例である事と H^1 が消えない事は同じである。

C を非特異射影曲線として、 $X := C \times Z$ とおく。 π_C と π_Z をそれぞれへの射影とする。 c_0 と c_1 を C の異なる 2 点として、 Z_0 と Z_1 をそれぞれのファイバーとする。 A_C を C 上の豊富因子とする。次のように、 X 上の 2 つの豊富因子 A, A' とネフ因子 N を定める。

$$\begin{aligned} A' &:= \pi_C^* A_C + \pi_Z^* A_Z \\ A &:= \pi_C^* A_C + \pi_Z^* A_Z + Z_0 \\ N &:= \pi_C^* A_C \end{aligned}$$

ここで、 N は数値的に自明ではない。次の完全列を考える。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + A' + mN) \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + A + mN) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_0}(K_X + A + mN)$$

コホモロジーをとって、

$$H^1(X, K_X + A + mN) \rightarrow H^1(Z_0, K_X + A + mN) \rightarrow H^2(X, K_X + A' + mN)$$

を得る。右側のコホモロジーは $m \gg 0$ なら系 2.7 によって、消滅する：

$$H^2(X, K_X + A' + mN) = 0.$$

よって、 $m \gg 0$ なら、

$$H^1(X, K_X + A + mN) \rightarrow H^1(Z_0, K_X + A + mN)$$

は全射。任意の m に対して、右のコホモロジー $H^1(Z_0, K_X + A + mN)$ が消えない事を示す。これが示されれば十分である。 Z_0 は π_C のファイバーなので、 $(\pi_C^* A_C)|_{Z_0} = 0$ となるから、

$$\begin{aligned} H^1(Z_0, K_{Z_0} + A + mN) &= H^1(Z_0, K_X + \pi_C^* A_C + \pi_Z^* A_Z + Z_0 + m\pi_C^* A_C) \\ &= H^1(Z_0, K_X + \pi_Z^* A_Z + Z_0) \\ &= H^1(Z_0, K_{Z_0} + \pi_Z^* A_Z) \\ &\simeq H^1(Z, K_Z + A_Z) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となり、主張が示された。 □

注意 3.3. 上記の例において、 N は数値次元が 1 である。数値次元が 2 の例や数値次元が 3 の例（つまり、 N が巨大）なものも作れる。詳しい構成は [T] を見て下さい。

謝辞

城崎代数幾何シンポジウムに講演の機会を下さった世話人の永井保成先生、松下大介先生、山木孝彦先生に感謝しています。筆者は J S P S の特別研究員で補助を受けています。

参考文献

- [Fujita] T. Fujita, Vanishing theorems for semipositive line bundles, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), 519–528, Lecture Notes in Math., **1016**, Springer, Berlin, 1983.
- [KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Program, volume **10** of adv. Stud. Pure Math., 283–360. Kinokuniya–North–Holland, 1987.
- [Kollár-Mori] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.
- [Raynaud] M. Raynaud, Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$, C. P. Ramanujam — A tribute, Studies in Math., **8** (1978), 273–278.
- [T] H. Tanaka, The X-method for klt surfaces in positive characteristic, preprint (2012).

The Mukai conjecture for log Fano manifolds

藤田健人* (京都大学数理解析研究所)

概要

本稿では、ファノ多様体 (Fano manifold) の自然な一般化の一つである「対数的ファノ多様体 (log Fano manifold)」について考察する。特に、ファノ多様体についての向井予想 (the Mukai conjecture) から対数的ファノ多様体についての向井予想が導出されることを紹介したい。

1 導入

この報告集では、基礎体は常に複素数体 $\mathbb{C}$ とする。また、極小モデル理論の用語は [KM98] に従って用いる。

1.1 ファノ多様体

定義 1.1. 非特異射影多様体 X の反標準因子、つまり $-K_X$ 、が豊富なとき、 X をファノ多様体 (**Fano manifold**) とする。本稿では常にファノ多様体に非特異性を要求することに注意する。

本稿では特に、ファノ多様体の分類及び評価について主眼を置いて考える。より詳しく言うと、ファノ多様体 (や、その一般化である「対数的ファノ多様体」) について、ピカル数 (ρ_X で表す) の評価や、それに関連した分類についてを考察したい。

これらの問題を考えるにあたり、まずファノ多様体は3次元以下では完全に分類されている ([Isk77, MM81]) が、それより大きい次元ではあまり多くのことが分かっていない事に注意したい。故に、新たな不変量を導入し、その不変量について条件を課した高次元ファノ多様体についてを考えるということは理に適っている。

定義 1.2. ファノ多様体 X に対し、 X の指数 (**index**) を、 r_X で表し、以下で定義する:

$$r_X := \max\{r \in \mathbb{Z}_{>0} \mid -K_X \sim rL \quad (\exists L \in \text{Pic}(X))\}.$$

事実 1.3. 以下のファノ多様体 X は分類されている:

- (1) [KO73, Fjt90, Isk77, MM81, Muk89, Wiś90a, Wiś90b, Wiś91a] $r_X \geq \dim X - 2$.
- (2) [Wiś90b, Wiś91a] $r := r_X \geq (\dim X + 1)/2$ かつ $\rho_X \geq 2$;
 - (a) [Wiś90b] もし $r \geq (\dim X + 2)/2$ なら、 $r = (\dim X + 2)/2$ で、 $X \simeq \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{r-1}$.
 - (b) [Wiś91a] もし $r = (\dim X + 1)/2$ なら、 $X \simeq \mathbb{Q}^r \times \mathbb{P}^{r-1}$, $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^r}(\mathcal{O}^{\oplus r-1} \oplus \mathcal{O}(1))$, もしくは $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^r}(T_{\mathbb{P}^r})$.
(ここで $\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の非特異二次超曲面.)

本稿の主定理の一つは、上記の事実 1.3 の対数的ファノ多様体への拡張版 (定理 3.5 及び系 3.6) である。

* fujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

1.2 向井予想

上記の事実 1.3 (2a) は、ファノ多様体が同じ次元の二つの射影空間の積と同型となる判定法を与えた、と言い換えることができる。一般にこの類の主張は、向井予想型の結果と呼ばれ、広く研究されている。以下に向井氏によるオリジナルの予想を述べる。

予想 1.4 (向井予想 [Muk88]). X をファノ多様体としたとき、以下の不等式が成立するであろう：

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X.$$

更に、もし等号が成立するならば、 $X \simeq (\mathbb{P}^{r_X-1})^{\rho_X}$ だろう。

筆者は最近、この向井予想を「分割して考える」ことが自然な方法の一つなのではないか、としばしば主張している。より具体的には、以下の予想 M_ρ^n を (各自然数 n, ρ に対して) 考えることが自然なのではないか、ということである。

予想 1.5 (予想 M_ρ^n). n, ρ を自然数とする。もし n 次元ファノ多様体 X が

- $\rho_X \geq \rho$ かつ
- $r := r_X \geq (n + \rho)/\rho$

を満たすならば、 $X \simeq (\mathbb{P}^{r-1})^\rho$ だろう。

明らかに、向井予想が正しいということと、予想 M_ρ^n が任意の自然数 n, ρ に対して正しいことは同値である。以下本稿では、この予想 M_ρ^n (より正確にはこの予想の対数的ファノ多様体版) について考えたい。

先ほどの事実 1.3(2a) は、予想 M_2^n の肯定的な結果に他ならない。現在では、以下のことが知られている (しかしながら一般の場合は未解決である)。

事実 1.6. 予想 M_ρ^n は、 $n \leq 5$ ([ACO04]) もしくは $\rho \leq 3$ ([NO10]) のときは正しい。

1.3 対数的ファノ多様体

以下で、本稿の主役となる対数的ファノ多様体を定義する。

定義 1.7. 対 (X, D) が n 次元対数的ファノ多様体 (**log Fano manifold**) であるとは、以下で定義される：

- X は n 次元非特異射影多様体、
- D は X 内の被約かつ単純正規交叉因子 (simple normal crossing divisor), そして
- 反対数的標準因子、つまり $-(K_X + D)$, が豊富。

特に日本語で述べる場合、「対数的ファノ多様体」という呼称は一般的でなく、更にこの呼称は他の対象と誤解を招きやすいので注意が必要である。本稿では、 X が非特異かつ D が被約単純正規交叉因子のときのみを考察する。

注意 1.8. • 対数的ファノ多様体の定義に於いて、もし $D = 0$ ならば、対 $(X, 0)$ はファノ多様体ということに他ならない。故に対数的ファノ多様体は、非常に自然なファノ多様体の一般化の一つと見ることが

できる.

- 対数的ファノ多様体は, 前田氏 ([Mae86]) によって既に考察されていた対象である. 前田氏は, 3 次元以下の対数的ファノ多様体 (X, D) で $D \neq 0$ なるものをすべて分類した. しかしながら, (ファノ多様体同様) 高次元の対数的ファノ多様体は多くのことが分かっていない.

高次元の対数的ファノ多様体について分類や (ピカル数) の評価を考えるにあたり, ファノ多様体同様に, 対数的ファノ多様体に対しても指数を定義することは最早自然な発想であろう.

定義 1.9. 対数的ファノ多様体 (X, D) に対し, (X, D) の指数 (**index**) を, $r_{(X,D)}$ で表し, 以下で定義する:

$$r_{(X,D)} := \max\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid -(K_X + D) \sim rL \quad (\exists L \in \text{Pic}(X))\}.$$

ここで, 対数的ファノ多様体についての向井予想を以下で定めることにする.

予想 1.10 (予想 LM_ρ^n [Fjt12b]). n, ρ を 2 以上の自然数とする. もし n 次元対数的ファノ多様体 (X, D) が $D \neq 0$ で, さらに以下を満たすとする:

- $\rho_X \geq \rho$ かつ
- $r := r_{(X,D)} \geq (n + \rho - 1)/\rho$.

このとき

$$\begin{aligned} X &\simeq \mathbb{P}_{(\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}}(\mathcal{O}^{\oplus r} \oplus \mathcal{O}(m_1, \dots, m_{\rho-1})) \\ D &\simeq \mathbb{P}_{(\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}}(\mathcal{O}^{\oplus r}), \end{aligned}$$

ここで $m_1, \dots, m_{\rho-1} \geq 0$ で, 埋め込み $D \subseteq X$ は, $\mathcal{O}^{\oplus r} \oplus \mathcal{O}(m_1, \dots, m_{\rho-1}) \rightarrow \mathcal{O}^{\oplus r}$ なる標準的な射影により得られたもの, となるだろう.

この予想は, $D \neq 0$ を課しているので, 予想 M_ρ^n で考えている対象とは真に異なる事に注意する. また予想 LM_ρ^n は, 指数についての条件が予想 M_ρ^n の条件より弱いことにも注意しておく. この予想 LM_ρ^n は, 前田氏の分類結果から $n = 2$ のときは正しい.

2 例

まず, 対数的ファノ多様体のいくつかの例を見る.

例 2.1. (X, D) が 1 次元対数的ファノ多様体とする. このとき X は非特異射影曲線で, また $-(K_X + D)$ が豊富というのはその次数が正ということに他ならない. Riemann-Roch の定理より $\deg(-(K_X + D)) = 2 - 2g - \deg D$ (ここで g は X の種数) が成立するので, $X \simeq \mathbb{P}^1$ かつ, $D = 0$ もしくは 1 点, しかありえない.

例 2.2. $(n-1)$ 次元ファノ多様体 Y , そして Y 上のネフ (nef) 直線束 L を任意にとる. このとき, $(X, D) := (\mathbb{P}_Y(\mathcal{O} \oplus L), \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}))$ (但し埋め込み $D \subseteq X$ は $\mathcal{O} \oplus L \rightarrow \mathcal{O}$ なる標準的な射影より与える) なる対は常に n 次元対数的ファノ多様体となる.

例 2.3. 例 2.2 の特別な場合として, $(X, D) := (\mathbb{P}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m)), \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O}))$ のとき ($m \geq 0$) を考える. このとき, 簡単な計算から, 反対数的標準因子の自己交点数 $-(K_X + D))^n = \{(n+m)^n - m^n\}/m$ となり, $n \geq 3$ ならいくらでも大きくなりうる.

3 主定理

本稿の主定理を以下に述べる.

定理 3.1 ([Fjt12b]). (X, D) を, 対数的ファノ多様体で, $D \neq 0$ とする. このとき, 次のどちらかが成立:

- (1) 制限から誘導される自然なピカル群の間の準同型 $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(D)$ が単射, もしくは
- (2) X は $\mathbb{P}^1$ -束構造 $\pi: X \rightarrow Y$ をもち, D は π の切断 (section).

ここで定理 3.1 (2) のときを詳しく見よう. このとき, D は Y と同型なので, 特に D は既約かつ非特異. 同源性より, $\mathcal{O}_D(-K_D) \simeq \mathcal{O}_X(-(K_X + D))|_D$ が成立. よって, D 及び Y はファノ多様体であることもわかる. 更に, X は $\pi_*\mathcal{O}_X(D)$ なる Y 上の階数 2 のベクトル束の射影化で得られていることにも注意する.

また, 定理 3.1 (2) のとき, (X, D) の指数は必ず 1 になることにも注意する. なぜなら, $l \subseteq X$ を π のファイバー ($\simeq \mathbb{P}^1$) とすると, $-(K_X + D) \cdot l = 2 - 1 = 1$ となる為, $-(K_X + D)$ はこれ以上割り切ることができないからである. これより, もし対数的ファノ多様体 (X, D) が $r_{(X,D)} \geq 2$ を満たすならば, 定理 3.1 (1) の場合しか起こりえない. 以上の考察及び後で述べる命題 4.1 (4) 等から, 次の系を得る.

系 3.2. 対数的ファノ多様体 (X, D) が, もし $r_{(X,D)} \geq 2$ なら, 任意の D の既約成分 D_1 に対し, 制限から誘導される自然なピカル群の間の準同型 $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(D_1)$ は単射となる.

次の定理は, 標語的には「向井予想から対数版向井予想が従う」ということを主張する.

定理 3.3 ([Fjt12b]).

$$M_\rho^n + \text{LM}_\rho^n \Rightarrow \text{LM}_\rho^{n+1}.$$

この定理と事実 1.6 より, 直ちに次の系を得る.

系 3.4. 予想 LM_ρ^n は, $n \leq 6$ もしくは $\rho \leq 3$ のときは正しい.

最後に, 事実 1.3 (2) の対数的ファノ多様体版を述べる.

定理 3.5 ([Fjt12a]). n 次元対数的ファノ多様体 (X, D) で, $r_{(X,D)} \geq n/2$, $\rho_X \geq 2$ かつ $D \neq 0$ なるものを分類した. (具体的なリストは, 今年の代数幾何学城崎シンポジウムでのポスター発表で与えた ([藤田 11]) ので割愛する.)

この定理 3.5 と既存の結果等を組み合わせると, 事実 1.3 (1) の対数的ファノ多様体版が得られる.

系 3.6. 対数的ファノ多様体 (X, D) で, $r_{(X,D)} \geq \dim X - 2$ なるものが分類された.

定理 3.5 では, X のピカル数が 2 以上の場合しか考察していないが, ピカル数が 1 の場合は寧ろ (系 3.6 を考える場合は) 状況が簡単になっている. というのも, 対数的ファノ多様体 (X, D) で $D \neq 0$ なるものに対し, もし X のピカル数が 1 ならば, X それ自身ファノ多様体になり, $r_X > r_{(X,D)}$ が成立するからである. なぜなら, 上記の仮定の下では D は豊富となり, $-K_X = -(K_X + D) + D$ は「より豊富」となる為である.

4 基本性質

対数的ファノ多様体の基本性質を以下に述べる. 明示的に述べられているもの以外の文献は, [Mae86] もしくは [Fjt12a] を見て頂きたい.

命題 4.1. (X, D) を n 次元対数的ファノ多様体とし, D の既約分解を $D = \sum_{i=1}^m D_i$ とする. このとき以下が成立する:

- (1) 自然な準同型 $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X^{\text{an}}; \mathbb{Z})$ が同型で, これらはどちらも有限生成で振れを持たないアーベル群である. 特に X のピカル数は $\text{Pic}(X)$ の階数に等しい.
- (2) 任意の i, j に対し, $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ が成立. 更に言うとも, (X, D) の極小 lc センターはただ一つに定まる. これより特に $m \leq n$ が成立.
- (3) 任意の $1 \leq i \leq m$ に対し, $E_i := \bigcup_{j \neq i} (D_i \cap D_j) \subseteq D_i$ とおく. このとき同伴性から, (D_i, E_i) は $(n-1)$ 次元対数的ファノ多様体で, $r_{(X,D)}|_{r_{(D_i, E_i)}}$ が成立する.
- (4) 以下の列は完全:

$$0 \rightarrow \text{Pic}(D) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \text{Pic}(D_i) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} \text{Pic}(D_i \cap D_j),$$

ここで α は制限より誘導される自然な準同型, そして $\beta((L_i)_i) := (L_i|_{D_i \cap D_j} \otimes L_j^\vee|_{D_i \cap D_j})_{i < j}$ で与えられる.

- (5) (錐定理及び収縮定理) 曲線の錐 $\text{NE}(X)$ は有限本の端射線で張られる. また, 各端射線 $R \subseteq \text{NE}(X)$ に対し, R は X 上の有理曲線のクラスで張られ, また R に付随した収縮射 $\text{cont}_R: X \rightarrow Y_R$ が存在する.
- (6) [Zha06] X は有理連結多様体 (*rationaly connected variety*).
- (7) [BCHM10] X は森夢空間 (*Mori dream space*). (森夢空間の定義は [HK00] を見て頂きたい.)

5 証明の方針

以下, 3 章の定理の証明のあらすじを述べる.

5.1 定理 3.1 の証明の方針

この証明のアイデアは, Casagrande 氏の一連の結果 [Cas09, Cas11] に基づく. Casagrande 氏はファノ多様体上の因子について同様の議論を展開しているのだが, 今回のセッティングだと, (考えるべき因子がはっきりしている為) 簡潔な議論で証明することができる. 以下 (X, D) を対数的ファノ多様体で, $D \neq 0$ とする.

Step 1 まず, 命題 4.1 (7) でみたように, X は森夢空間だった. これより, $(-D)$ -MMP を走らせることができる. この MMP は (D がゼロでない有効因子ゆえ) 必ずファイバー型で終わる. また, $-(K_X + D)$ でスケールをつけることにより, この $(-D)$ -MMP は $(K_X + D)$ -MMP であるようにもとれる. この MMP を

$$X = X^0 \dashrightarrow X^1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X^k \xrightarrow{\pi} Y$$

で表すことにする.

Step 2 次に, $D^i \subseteq X^i$ を, D の固有変換 (strict transform) とする. このとき, (詳しくは述べないが) 各 MMP のステップで D^i の中の曲線が潰れることがわかる. これは収縮射のファイバーの次元の評価等から従う (この MMP は K_X -MMP でもあるので, 各 X^i は高々端末的故, ファイバー次元の評価がうまくいく). この性質より, $\dim(\text{Coker}(N_1(D^i) \rightarrow N_1(X^i)))$ は各 $0 \leq i \leq k$ で不変なことが証明できる.

Step 3 この MMP は $(-D)$ -MMP だったので, $\pi|_{D^k}: D^k \rightarrow Y$ は全射. よって合成 $N_1(D^k) \rightarrow N_1(X^k) \rightarrow N_1(Y)$ も全射. ここで, 全射 $N_1(X^k) \rightarrow N_1(Y)$ の核は 1 次元なので, 次のどちらかが成立する:

- (1) $N_1(D^k) \rightarrow N_1(X^k)$ は全射, もしくは
- (2) D^k 内のどの曲線も π で潰れない.

まず (1) のときは, Step 2 より $N_1(D) \rightarrow N_1(X)$ も全射. よって $N^1(X) \rightarrow N^1(D)$ は単射. ここで命題 4.1 (1) より $\text{Pic}(X) \rightarrow N^1(X)$ は単射. よって可換図式

$$\begin{array}{ccc} N^1(X) & \longrightarrow & N^1(D) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(D) \end{array}$$

に於いて, 合成が単射ゆえ $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(D)$ も単射.

次に (2) のときを考える. このとき, π のファイバーの次元は常に 1. (なぜなら, もし 2 次元以上のファイバー F をもつと, F と D^k との交わりは曲線を含んでしまい矛盾.) ここでもし $k > 0$ と仮定すると, π のファイバー内の曲線 $l^k \subseteq X^k$ で, 有理写像 $X^k \dashrightarrow X$ の不確定部分と交わりつつ含まれないようなものが取れる. このとき負性補題 (negativity lemma) より, $-(K_X + D) \cdot l < -(K_{X^k} + D^k) \cdot l^k$ が成立 (ここで $l \subseteq X$ は l^k の固有変換). l^k は π のファイバー内でとったので, $-(K_{X^k} + D^k) \cdot l^k \leq 2 - 1 = 1$ となるが, $-(K_X + D)$ は豊富な Cartier 因子ゆえ $-(K_X + D) \cdot l$ は自然数値しかとれず矛盾. よって $k = 0$ しかありえない. このとき $\pi: X \rightarrow Y$ は, 一般ファイバー $C \subseteq X$ に対し, $C \simeq \mathbb{P}^1$, $(-K_X \cdot C) = 2$ かつ $(D \cdot C) = 1$ が (π が $(K_X + D)$ -負かつ D -正であることから) 確かめられる. よって [Fjt87] より π は $\mathbb{P}^1$ -束で D は π の切断であることが証明できる.

5.2 定理 3.3 の証明の方針

予想 M_ρ^n 及び LM_ρ^n の仮定の下, 予想 LM_ρ^{n+1} を導出したい. 以下, (X, D) を, 予想 LM_ρ^{n+1} の仮定を満たす対数的ファノ多様体, つまり $(n+1)$ 次元対数的ファノ多様体で $D \neq 0$ なもの, 更に $\rho_X \geq \rho$ かつ $r := r_{(X,D)} \geq ((n+1) + \rho - 1)/\rho$ とする.

Step 1 まず, D の任意の既約成分 D_1 をとる. このとき対 (D_1, E_1) は, 命題 4.1 (3) より n 次元対数的ファノ多様体で $r_{(D_1, E_1)} \geq r \geq (n + \rho)/\rho$ が成立. 更に系 3.2 より $\rho_{D_1} \geq \rho_X (\geq \rho)$ が成立. よって LM_ρ^n を対 (D_1, E_1) に適用することで, $E_1 = 0$, つまり $D = D_1$ でなくてはならないことがわかる. この D に M_ρ^n を適用することで, $D \simeq (\mathbb{P}^{r-1})^\rho$ かつ $\rho_D = \rho_X = \rho$ が成立する.

Step 2 次に, D と正に交わる端射線 $R \subseteq \text{NE}(X)$ を任意にとり, R の極小有理曲線 (minimal rational curve) を $C_R \subseteq X$ とかく. R に付随する収縮射を $\pi: X \rightarrow Y$ とかくと, 以下が成立:

- π の D への制限の, 像への全射 $\pi|_D: D \rightarrow \pi(D)$ は代数ファイバー空間 (algebraic fiber space) (これは $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(-D) = 0$ より従う).

- $\pi|_D: D \rightarrow \pi(D)$ は同型射ではない (これは 5.1 章の Step 2 と同様に示すことができる).

ここで $D \simeq (\mathbb{P}^{r-1})^\rho$ だったので, 上記の事実から特に $\dim D > \dim \pi(D)$ がわかる. よって π はファイバー型 (そうでないなら π は D を潰す因子収縮射でないといけませんが, 今, D と正に交わるように端射線を選んでいたので矛盾). よって, 任意の π のファイバーが D と交わるので $Y = \pi(D)$ も成立. $\rho_Y = \rho - 1$ ゆえ, $\pi|_D: (\mathbb{P}^{r-1})^\rho \rightarrow (\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}$ (一番目の成分を潰す射影) とみることができる.

Step 3 収縮射 π の任意のファイバー F をとる. このとき,

- 上で得られた $\pi|_D$ の明示的な記述より, $\dim(F \cap D) = r - 1$ が成立. よって, $\dim F \leq r$ が成立する.
- [Wi91b] により, $\dim F \geq (-K_X \cdot C_R) - 1$ が知られている. ここで, 指数の定義から, ある豊富な Cartier 因子 L が存在し, $-(K_X + D) \sim rL$ とかける. このとき, $(-K_X \cdot C_R) - 1 = r(L \cdot C_R) + (D \cdot C_R) - 1 \geq r + 1 - 1 = r$ が成立.

これらより, $\dim F = r$, $(-K_X \cdot C_R) = r + 1$ かつ $(D \cdot C_R) = 1$ が成立する. よって, [Fjt87] より, π は $(\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}$ 上の $\mathbb{P}^r$ -束で, $\pi|_D$ は部分 $\mathbb{P}^{r-1}$ -束であることが示され, あとは容易に結論を得られる.

5.3 定理 3.5 の証明の方針

これは基本的に定理 3.3 の証明と同じである. つまり, まず D の構造が帰納的な議論によりわかり, あとは D と正に交わる端射線に付随する収縮射を詳しく見ることで X の構造がわかる.

6 謝辞

代数幾何学城崎シンポジウムにて講演の機会を下さった世話人の永井保成さん, 松下大介さん, 山木壱彦さんに感謝致します. 筆者は日本学術振興会特別研究員として補助を受けています.

参考文献

- [ACO04] M. Andreatta, E. Chierici and G. Occhetta, *Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), no. 2, 272–293.
- [BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.
- [Cas09] C. Casagrande, *On Fano manifolds with a birational contraction sending a divisor to a curve*, Michigan Math. J. **58** (2009), no. 3, 783–805.
- [Cas11] C. Casagrande, *On the Picard number of divisors in Fano manifolds*, to appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.
- [Fjt87] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, Algebraic Geometry, Sendai, 1985. Adv. Stud. Pure Math. **10**, 167–178. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [Fjt90] T. Fujita, *Classification theories of polarized varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series **155**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [藤田 11] K. Fujita, *On simple normal crossing Fano varieties and logarithmic Fano varieties with large index*, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集 (2011), p.155.

- [Fjt12a] K. Fujita, *Simple normal crossing Fano varieties and log Fano manifolds*, arXiv:1206.1994.
- [Fjt12b] K. Fujita, *The Mukai conjecture for log Fano manifolds*, arXiv:1206.2475.
- [HK00] Y. Hu and S. Keel, *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348.
- [Isk77] V. A. Iskovskikh, *Fano threefolds. I, II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 3, 516–562, 717; **42** (1978), no. 3, 506–549.
- [KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math, vol.134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [KO73] S. Kobayashi and T. Ochiai, *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. **13**, (1973), 31–47.
- [Mae86] H. Maeda, *Classification of logarithmic Fano threefolds*, Compositio Math. **57** (1986), no. 1, 81–125.
- [MM81] S. Mori and S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$* , Manuscripta Math. **36** (1981), no. 2, 147–162. Erratum: **110** (2003), no. 3, 407.
- [Muk88] S. Mukai, *Problems on characterization of the complex projective space*, Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Proceedings of the 23rd Symposium of the Taniguchi Foundation at Katata, Japan, 1988, pp.57–60.
- [Muk89] S. Mukai, *Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 9, 3000–3002.
- [NO10] C. Novelli and G. Occhetta, *Rational curves and bounds on the Picard number of Fano manifolds*, Geom. Dedicata **147** (2010), 207–217.
- [Wiś90a] J. A. Wiśniewski, *Fano 4-folds of index 2 with $b_2 \geq 2$. A contribution to Mukai classification*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **38** (1990), no. 1–12, 173–184.
- [Wiś90b] J. A. Wiśniewski, *On a conjecture of Mukai*, Manuscripta Math. **68** (1990), no. 2, 135–141.
- [Wiś91a] J. A. Wiśniewski, *On Fano manifolds of large index*, Manuscripta Math. **70** (1991), no. 2, 145–152.
- [Wiś91b] J. A. Wiśniewski, *On contractions of extremal rays of Fano manifolds*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 141–157.
- [Zha06] Q. Zhang, *Rational connectedness of log Q -Fano varieties*, J. Reine Angew. Math. **590** (2006), 131–142.

セシャドリ定数と定義多項式の次数について

伊藤 敦*

概要

セシャドリ定数は豊富な直線束の局所的な正值性を測る不変量である．本稿ではセシャドリ定数と定義多項式の次数の関係を概説する．本研究は三浦真人氏との共同研究である．

1 導入

多様体などはすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする．射影代数多様体 X 上の豊富な直線束 L はある種の正值性を持っているので，以下の問は自然なものと思われる．

問 1.1. L の正值性はどうすれば計れるだろうか？

L の正值性をはかる基本的な不変量として体積 $L^{\dim X}$ がある．もちろんこれは非常に重要な不変量であるが，体積だけでは必ずしも十分とは言いがたい．

例 1.2. $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $L_1 = \mathcal{O}(k, k)$, $L_2 = \mathcal{O}(1, k^2)$ とする．この時， $K_X + L_1$ は $k \geq 2$ の場合は基底点自由であり， $k \geq 3$ の場合は非常に豊富である．一方 $K_X + L_2$ は有効的でさえない．

この例のように，二つの直線束の体積が同じでもその随伴束の振る舞いが大きく異なる場合がある．随伴束の視点からは， L_1 のほうが L_2 よりも正值性が大きいとみることができる．

20 年ほど前に Demailly は豊富な直線束の局所的な正值性を測る不変量であるセシャドリ定数を導入した [Dem] ．

* 東京大学数理科学研究科 itoatsu@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 1.3. 射影代数多様体 X 上の豊富な直線束 L と点 $p \in X$ に対し, L の p におけるセシャドリ定数 $\varepsilon(X, L; p)$ を

$$\varepsilon(X, L; p) := \max\{t \geq 0 \mid \mu^*L - tE \text{ がネフ}\}$$

と定める. ここで $\mu: \tilde{X} \rightarrow X$ は p での爆発, $E = \mu^{-1}(p)$ はその例外因子である. また

$$\varepsilon(X, L; p) = \inf_C \left\{ \frac{C.L}{\text{mult}_p(C)} \right\}$$

という同値な定義もある. ここで下限は X 上の既約かつ被約な曲線 C で p を通るものに対してとり, $\text{mult}_p(C)$ は C の p における重複度である. $\varepsilon(X, L; p) = \frac{C.L}{\text{mult}_p(C)}$ となる曲線 C を L の p におけるセシャドリ曲線と呼ぶ.

注意 1.4. セシャドリ曲線が存在しない例を筆者は知らない. ただし, セシャドリ定数が有理数でない例があれば, それはセシャドリ曲線が存在しない例にもなっている. セシャドリ定数が有理数でない例を見つけることは, セシャドリ定数における未解決問題の一つである.

セシャドリ定数の簡単な例を見てみよう.

例 1.5. (1) 任意の点 $p \in \mathbb{P}^n$ に対し $\varepsilon(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1); p) = 1$.

(2) 任意の点 $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対し $\varepsilon(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(a, b); p) = \min\{a, b\}$.

(3) 非特異 3 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ に対し

$$\varepsilon(S, \mathcal{O}_S(1); p) = \begin{cases} 1 & S \text{ 上に点 } p \text{ を通る直線が存在する場合,} \\ 3/2 & S \text{ 上に点 } p \text{ を通る直線が存在しない場合.} \end{cases}$$

これらの場合はセシャドリ曲線を具体的に見つけることができる. (1) と (3) の前者では p を通る直線が, (2) では $p = (p_1, p_2)$ に対し $\{p_1\} \times \mathbb{P}^1$ もしくは $\mathbb{P}^1 \times \{p_2\}$ の少なくとも一方がセシャドリ曲線である. (3) の後者の場合は p で S に接するような超平面 $H \subset \mathbb{P}^3$ に対し $C := H \cap S$ とおくと, $\deg(C) = C \cdot \mathcal{O}_S(1) = 3$, $\text{mult}_p(C) = 2$ が成り立ち C がセシャドリ曲線であることがわかる.

セシャドリ定数は様々な興味深い性質を持っている. 例えば, セシャドリ定数の下界からは随伴束のジェット分離やグロモフ幅 (実シンプレクティック幾何学の不変量) の下界が得られる [Dem], [MP]. また上界からは, ファイバー構造や葉層構造が得られることもある [Na1], [Na2], [HK]. Ross と Thomas による偏極多様体のスロープ安定性を定義する際にもセシャドリ定数が用いられる [RT].

しかしながら，与えられた豊富な直線束に対し具体的にセシャドリ定数の値を求めることは一般には非常に難しい．例えば $\mathbb{P}^3$ 内の次数が 5 以上の非特異射影曲面についてさえ（幾つかの評価はあるが）一般にその値は求められていない．特に 3 次元以上の場合の計算例は少ない．セシャドリ定数の詳しい扱いについては [La, Chapter 5], [B+] を参照されたい．

本稿では，代数多様体 X が射影空間に埋め込まれている場合を扱う．そのような場合， $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ は X の定義多項式の次数を用いて評価できることを解説する．まず第 2 節では，次数 4 の 3 次元超曲面 X について $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ の値の求め方を説明する．第 3 節では，定義多項式の次数を用いてセシャドリ定数を下から評価できることを述べる．第 4 節では，第 3 節で得られた下界が幾つかのファノ多様体に対してはセシャドリ定数と一致することを述べる．これらは三浦真人氏との共同研究 [IM] である．

謝辞

この度，歴史ある城崎代数幾何シンポジウムにおける講演の機会をくださった世話人の永井保成さん，松下大介さん，山木壱彦さんに感謝致します．

2 次数 4 の 3 次元超曲面の場合

$X \subset \mathbb{P}^4$ を次数 4 の超曲面， p を X 上の点とする．簡単のため X も p も一般のものとする．この節では， $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ をどう計算するかを説明する．ここにあらわれるアイデアを自然に一般化することで，本稿で説明するほぼすべて（小節 4.2 以外の部分）が得られる．

$p = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ となるような $\mathbb{P}^4$ の斉次座標 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をとる． X の定義式 $f \in H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))$ は x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 の 4 次斉次多項式で $f(p) = 0$ なので， $f = x_0^3 f_1 + x_0^2 f_2 + x_0 f_3 + f_4$ となるような i 次の斉次多項式 $f_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ($1 \leq i \leq 4$) がとれる． X と p が一般なので

$$(f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0) \subset \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4] \quad (\dagger)$$

は空集合になる．

X 上の有効因子 D_1, D_2, D_3 を

$$D_1 := (f_1 = 0)|_X, \quad D_2 := (x_0 f_1 + f_2 = 0)|_X, \quad D_3 := (x_0^2 f_1 + x_0 f_2 + f_3 = 0)|_X$$

で定める． X 上では $f_1|_X = -x_0^{-3}(x_0^2 f_2 + x_0 f_3 + f_4)|_X$ なので， $\text{ord}_p(D_1) = 2$ であることがわかる．ここで X 上の有効因子 D に対し $\text{ord}_p(D)$ を

$$\text{ord}_p(D) := \max\{m \geq 0 \mid g \in \mathfrak{m}_{X,p}^m\}$$

と定める．ただし g は p の近傍での D の定義関数， $\mathfrak{m}_{X,p}$ は X の p における極大イデアルである．同様に $\text{ord}_p(D_2) = 3$ ， $\text{ord}_p(D_3) = 4$ が成り立つ．また定義より

$$\begin{aligned} D_1 \cap D_2 \cap D_3 &= (f_1 = f_2 = f_3 = 0)|_X \\ &= (f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0) \subset \mathbb{P}^4 = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

であるが， $(\dagger)$ より $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{p\}$ となる． $(\dagger)$ では $\text{Proj } \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4] \cong \mathbb{P}^3$ のなかで共通零点を考えていたが，ここでは $\mathbb{P}^4$ のなかで考えていることに注意する．

まず $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ を下から評価しよう．既約かつ被約な曲線 C で p を通るものを一つ固定する． $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{p\}$ なので，ある D_i ($1 \leq i \leq 3$) で C を含まないものがとれる． $D_i \sim \mathcal{O}_X(i)$ ， $\text{ord}_p(D_i) = i + 1$ より， D_i と C の p での局所交点数を考えることで

$$i \deg(C) = D_i \cdot C \geq \text{ord}_p(D_i) \cdot \text{mult}_p(C) = (i + 1) \text{mult}_p(C)$$

が得られる．従って $\frac{\deg(C)}{\text{mult}_p(C)} \geq \frac{i+1}{i} \geq \frac{4}{3}$ が成り立つので，定義 1.3 より $\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) \geq \frac{4}{3}$ となる．

次に $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ を上から評価しよう．

$$C' := D_1 \cap D_2 = (f_1 = f_2 = x_0 f_3 + f_4 = 0) \subset \mathbb{P}^4$$

とおくと，定義から $p \in C' \subset X$ である．また C' は $\mathbb{P}^4$ 中の 3 つの有効因子 ($f_1 = 0$)，($f_2 = 0$)，($x_0 f_3 + f_4 = 0$) の完全交差なので， C' の次数や重複度は各因子の次数や重複度の積になる (f_1, f_2, f_3, f_4 が一般の元であることに注意する)．従って

$$\deg(C') = 1 \cdot 2 \cdot 4, \quad \text{mult}_p(C') = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

なので， $\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) \leq \frac{\deg(C')}{\text{mult}_p(C')} = \frac{4}{3}$ が成り立つ．

上下からの評価を合わせることで $\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) = \frac{4}{3}$ が得られる．この場合 C' がセシャドリ曲線になっている．

3 定義多項式の次数を用いた下界

この節では，前節で説明した下からの評価を一般化する．

X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体， p を X 上の点とすると，定義より

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) \geq \varepsilon(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1); p) = 1$$

が成り立つ．さらに $\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) = 1$ となることと， X 上に点 p を通る直線が存在することが同値であることがわかる ([Ch, Lemma 2.2])．ここで直線とは，射影空間内の次数 1 の射影代数曲線のこととする．

X が 2 次元または 3 次元の場合，Bauer と Chan が多様体の次数 $\deg(X) := \mathcal{O}_X(1)^{\dim X}$ を用いて $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ の下界を与えた．

定理 3.1 ([Ba, Theorem 2.1], [Ch, Theorem 1.4] 参照). X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の 2 次元もしくは 3 次元非特異射影代数多様体， p を X 上の点とする．もし X 上に点 p を通る直線がなければ

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) \geq \frac{\deg(X)}{\deg(X) - 1}$$

が成り立つ．

この節では，上記の定理の高次元への一般化を述べる．そのために $\deg(X)$ の代わりに次の不変量を用いる．

定義 3.2. X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体， p を X 上の点とする．正の整数 $d_p(X)$ を，自然な写像

$$H^0(\mathbb{P}^N, I_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \rightarrow I_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$$

が p で全射になるような d の最小値として定義する．ここで $I_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ は X に対応するイデアル層である．すなわちスキーム論的に X は p において次数が $d_p(X)$ 以下の超曲面によって定義される．

以下が本節の主結果である．定理 3.1 とは異なり， X の非特異性は仮定していないことに注意する．

定理 3.3 ([IM, Theorem 1.5]). X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体, p を X 上の点とする. もし X 上に点 p を通る直線がなければ

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) \geq \frac{d_p(X)}{d_p(X) - 1}$$

が成立する. さらに任意の $n \geq 1$ と $d \geq 2$ に対し, ある n 次元非特異射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ と点 $p \in X$ が存在し, $d = d_p(X)$ かつ上の不等号において等号が成り立つ.

注意 3.4. 一般に, 射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ と点 $p \in X$ に対し $d_p(X) \leq \deg(X)$ が成り立つ ([Mu, Theorem 1] の証明を参照). したがって定理 3.3 は定理 3.1 の高次元への拡張になっている.

定理 3.3 の証明は, 本質的に第 2 節と同じである. すなわち p を通る曲線 C に対し, X の定義多項式を “いじる” ことにより, ある $i \leq d_p(X) - 1$ と C を含まない有効因子 $D \sim \mathcal{O}_X(i)$ で $\text{ord}_p(D) \geq i + 1$ となるものがとれる.

4 幾つかのファノ多様体の場合

定理 3.3 の下界は一般には良い評価ではない. 実際 $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ はいくらでも大きい値を取りうるが, 定理 3.3 の下界はたかだか 2 だからである. しかしながら, 幾つかのファノ多様体については定理 3.3 で等号が成立することを示すことができる.

定理 4.1 ([IM, Theorem 1.7]). $Y \subset \mathbb{P}^N$ をピカル数 1 の有理等質空間で, $\mathcal{O}_Y(1)$ が $\text{Pic}(Y)$ の生成元であるものとする. Y の部分多様体 X を, 次数 $d_1 \leq \dots \leq d_r$ の超曲面の Y における完全交差で $-K_X = \mathcal{O}_X(1)$ となるものとする. 点 $p \in X$ に対し X 上に点 p を通る直線がなければ,

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) = \frac{d_p(X)}{d_p(X) - 1} = \begin{cases} d_r / (d_r - 1) & d_r \geq 2 \text{ の場合,} \\ 2 & d_r = 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

が成立する.

注意 4.2. $X \subset Y$ を次数 $d_1 \leq \dots \leq d_r$ の超曲面の Y における完全交差として得られる代数多様体で, $-K_X = \mathcal{O}_X(i)$, $i \geq 2$ となるものとする. この場合 X は直線で覆われることが簡単に確かめられる ([Deb, Proposition 2.13]). よって $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) = 1$ が任意の $p \in X$ に対して成り立つ.

従って定理 4.1 と組み合わせると, ピカル数 1 の有理等質空間における完全交差として得られるファノ代数多様体のセシャドリ定数は計算できることがわかる.

例 4.3. $Y = \mathbb{P}^{r+3}$ 内の次数 $d_1 \leq \dots \leq d_r$ の超曲面の完全交差として得られる 3 次元ファノ多様体 $X = X_{d_1, \dots, d_r}$ で $-K_X = \mathcal{O}(1)$ となるものを考える．随伴公式より，このような多様体は $X_4, X_{2,3}, X_{2,2,2}$ に限られる． X 上に点 p を通る直線がなければ，以下が成り立つ．

$$\varepsilon(X_4, \mathcal{O}(1); p) = \frac{4}{3}, \quad \varepsilon(X_{2,3}, \mathcal{O}(1); p) = \frac{3}{2}, \quad \varepsilon(X_{2,2,2}, \mathcal{O}(1); p) = 2.$$

X のファノ指数が 1 なので， X が非特異の場合一般の点 $p \in X$ を通る X 上の直線は存在しないことに注意する．

定理 4.1 の片方の不等号は定理 3.3 から簡単に従う．実際，定理 4.1 のような Y に対して $d_p(Y)$ は 1 (Y が射影空間の場合) か 2 (それ以外の場合) であることが知られている (例えば [Li] を参照) ので，

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) \geq \frac{d_p(X)}{d_p(X) - 1} \geq \begin{cases} d_r / (d_r - 1) & d_r \geq 2 \text{ の場合,} \\ 2 & d_r = 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

が従う．以下の小節で逆向きの不等号の証明のアイデアについて説明する．

4.1 証明の概略： $d_r \geq 2$ の場合

この場合，証明のアイデアは本質的に第 2 節と同じである．すなわち，適当な有効因子の交差をとることでセシャドリ曲線を見つけることができる．ただし有理等質空間 Y が射影空間ではない場合は Y を直接切るのではなく，適当な錐といくつかの有効因子の交差をとる．そのために直線のモジュライ空間を用いる．

定義 4.4. 射影代数多様体 $Y \subset \mathbb{P}^N$ と点 $p \in X$ に対し， Y のヒルベルト空間 $\text{Hilb } Y$ の部分スキーム $F_p(Y)$ を

$$F_p(Y) := \{ [l] \in \text{Hilb } Y \mid l \text{ は点 } p \text{ を通る } Y \text{ 上の直線} \}$$

と定める．

Y が定理 4.1 のような有理等質空間， Z を $F_p(Y)$ の既約成分とする．定義より

$$\text{Cone}_p(Z) := \bigcup_{[l] \in Z} l \subset \mathbb{P}^N$$

は p を頂点とする錐で Y に含まれる． X を定理 4.1 のようなファノ多様体で， X 上に p を通る直線がないものとする． $d_r \geq 2$ の場合， $\text{Cone}_p(Z)$ を適当な有効因子で切ることに

より X 上の曲線 C で $\frac{\deg(C)}{\text{mult}_p(C)} \leq \frac{d_r}{d_r - 1}$ となるものが取れる．第 2 節では，そのような C として $C' = (f_1 = f_2 = x_0 f_3 + f_4 = 0)$ をとったが， $x_0 f_3 + f_4$ のような式を得るために $d_r \geq 2$ という仮定が必要になる．

同様の議論で以下の定理を示せる．この定理では，ピカル数や Y の特異点について特に仮定をしていないことに注意する．

定理 4.5 ([IM, Theorem 3.1]). Y を $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体， p を Y 上の点とする． p を含む Y の部分射影代数多様体 X が以下を満たすとする．

- i) p の近傍で， X は次数 $d_1 \leq \dots \leq d_r$ の超曲面の Y における局所完全交差である．
すなわち $r = \text{codim}(X, Y)$ で各 j に対してある $f_j \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_j))$ が存在し

$$X = Y \cap \bigcap_{1 \leq j \leq r} (f_j = 0)$$

が p の近傍で成り立つ．

- ii) $F_p(Y) \neq \emptyset$ かつ $\sum_{j=1}^r d_j \leq \dim F_p(Y) + 1$.
- iii) $d_p(Y) \leq d_r$.

この時以下が成立する．

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) = \begin{cases} 1 & F_p(X) \neq \emptyset \text{ の場合,} \\ d_r / (d_r - 1) & F_p(X) = \emptyset \text{ の場合.} \end{cases}$$

4.2 証明の概略： $d_r = 1$ の場合

定理 4.1 で $d_r = 1$ の場合， Y は射影空間ではないとしてよい．すると $d_p(Y) = 2$ かつ $d_r = 1$ なので， $d_p(X) = 2$ である．よって定理 3.3 によって得られる下界は $\frac{d_p(X)}{d_p(X) - 1} = 2$ となる．もし X 上に点 p を通る滑らかな 2 次曲線 C が存在すれば

$$2 \leq \varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) \leq \frac{\deg(C)}{\text{mult}_p(C)} = 2$$

がいえる．そのような滑らかな 2 次曲線の存在を示す為に以下の命題を用いる．

命題 4.6. $Y \subset \mathbb{P}^N$ を非特異射影代数多様体で以下を満たすものとする．

- i) $I_{Y/\mathbb{P}^N} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(2)$ は大域切断によって生成される．

ii) 一般の点 $p \in Y$ に対し,

$$\dim\{[C] \in \text{Hilb } Y \mid C \text{ は点 } p \text{ を通る } Y \text{ 上の滑らかな 2 次曲線}\} = 2$$

が成り立つ .

この時 , 一般の点 $p \in Y$ と p を含む一般の超平面 $H \subset \mathbb{P}^N$ に対し , p を通る $Y \cap H$ 上の滑らかな 2 次曲線が存在する .

定理 4.1 の証明の概略 : $d_r = 1$ の場合 . $d_r = 1$ なので $X = Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r$, $H_j \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$ とかける . セシャドリ定数はある種の下半連続性を持つので , 上界を求めるためには点 p や H_j は一般のもの仮定してよい . この時 $Y' := Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{r-1}$ は命題 4.6 の条件 i), ii) をみたすことがわかるので , 点 p を通る $X = Y' \cap H_r$ 上の滑らかな 2 次曲線の存在がいえる . $\square$

参考文献

- [Ba] T. Bauer, *Seshadri constants on algebraic surfaces*, Math. Ann. **313** (1999), no. 3, 547-583.
- [B+] T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, M. Kapustka, A. Knutsen, W. Syzdek, and T. Szemberg, *A primer on Seshadri constants*, Interactions of classical and numerical algebraic geometry, 33-70, Contemp. Math., **496**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [Ch] K. Chan, *A lower bound on Seshadri constants of hyperplane bundles on three-folds*, Math. Z. **264** (2010), no. 3, 497-505.
- [Deb] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001. xiv+233 pp.
- [Dem] J.P. Demailly, *Singular Hermitian metrics on positive line bundles*, Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), 87-104, Lecture Notes in Math., **1507**, Springer, Berlin, 1992.
- [HK] J.-M. Hwang and J.H. Keum, *Seshadri-exceptional foliations*, Math. Ann. **325** (2003), no. 2, 287-297.
- [IM] A. Ito and M. Miura, *Seshadri constants and degrees of defining degrees*, preprint (2012).

- [La] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **48**. Springer, Berlin (2004).
- [Li] W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), no. 4, 605-608.
- [Mu] D. Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, 1970 Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969) pp. 29-100 Edizioni Cremonese, Rome.
- [MP] D. McDuff and L. Polterovich, *Symplectic packings and algebraic geometry*, Invent. Math. **115** (1994), no. 3, 405-434.
- [Na1] M. Nakamaye, *Seshadri constants on abelian varieties*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 3, 621-635.
- [Na2] M. Nakamaye, *Seshadri constants and the geometry of surfaces*, J. Reine Angew. Math. **564** (2003), 205-214.
- [RT] J. Ross and R. Thomas, *A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), no. 2, 201-255.

Moduli spaces of Bridgeland stable objects on abelian surfaces

柳田伸太郎 (京大数研)

概要

代数曲面上の安定層のモジュライ空間の研究において, Fourier-Mukai 変換の下で Gieseker 安定性が保たれるかという問題は重要であった. 2000 年代には Bridgeland により三角圏上の安定性の概念が導入されたが, この問題は Bridgeland 安定性で考えた方がより良く扱える事が分かりつつある. 今回の講演では, Fourier-Mukai 変換を用いた安定層のモジュライ空間の間の双有理射の構成と, Bridgeland 安定性条件の空間の説明をアーベル曲面の場合にする. ある場合には, 壁越え現象が半等質層を用いた安定層のモジュライ空間の具体的な記述と密接に関係することも解説する.

0 イントロダクション

本稿の内容は神戸大の吉岡康太氏との共同研究 [YY1, YY2] に基づく.

本稿の主対象は表題にあるようにアーベル曲面上の安定層ないし Bridgeland の意味での安定対象のモジュライ空間である. Mumford 及び Gieseker の古典的な仕事によって代数曲線ないし代数曲面上の接続層の安定性が確立され, その後 (半) 安定層のモジュライ空間の研究が発展してきた. 安定層に関して基本的な問題というのはいくつかあるが, その一つとして安定層の構成問題, 即ちどうすれば安定な接続層を構成することができるか, という問題がある. 底空間が Calabi-Yau, 即ち標準層が自明な時, Fourier-Mukai 変換が安定層の構成の強力な道具になる.

底空間がアーベル曲面の場合に Fourier-Mukai 変換が有効な研究手段であることを解説するのが本稿の最初の目的である. その際, Fourier-Mukai 変換の下で Gieseker 安定性が保たれるかという問題をクリアすることになる. 本稿で扱うのは, 半等質表示という複体を活用することで, ある程度一般的な状況下で安定性の保存を保障できる場合である. 結果, 安定層のモジュライの間の双有理射を構成することができる. これにより (1980 年の) 向井の予想を解決することもできる.

本稿の第 2 の目的は, 特殊な場合には上記の双有理射が同型になることを示すことである. この主張はやはり向井が 1980 年ごろに提出している (が, 証明は書き下されていなかったようである). その際に Bridgeland 安定性を導入するのが便利である. 安定性条件の空間には壁と部屋の構造があるが, ある場合には壁越え現象が半等質層を用いた安定層のモジュライ空間の具体的な記述と関係することを解説する.

本稿の構成を簡単に述べる. §1 では安定層のモジュライ空間の基本的な性質を復習し, その後で講演で紹介した 2 つの主定理を述べる. 1 つ目はアーベル曲面上のモジュライ空間の双有理同値類に関する主張であり, 2 つ目は同型類に関する主張である. §2 では [YY1] に従って定理 1 の証明のアイデアを説明する. 一言でいうと, 一般の安定層に対し半等質表示という分解が存在することが鍵になる. §3 では [YY2] に従って定理 2 について説明する. §2 では Gieseker 安定性のみが議論に現れるのに対し, §3 では Bridgeland 安定性を使うこと

が鍵になる．最後に §4 でまとめと残っている予想について述べる．

記号 断らない限り X は複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された代数多様体, H は X 上の豊富な因子とする．また $D(X) := D^b \text{Coh}(X)$ と略記する．

1 2つの主定理

この節は代数曲面上の古典的な安定性の話から始めて, 2つの主定理を述べることにする．前半の話については文献が数多くあるが, ここでは論説 [M87, Y04] と教科書 [HL10] を挙げておく．

代数曲面 X とその上の豊富な因子 H に関する Gieseker 安定性の定義から思い出すことにしよう． X 上の torsion free な連接層 E が H (半) 安定であるとは, 任意の部分層 $F \subsetneq E$, $F \neq 0$ について $p(F(nH))/\text{rk}(F) \underset{(\text{=})}{<} p(E(nH))/\text{rk}(E)$ が $n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$ で成立するということであった．ここで $p(E) := \chi(E)/\text{rk}(E)$ は正規化された Euler 指標である．

$c \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Q})$ に対し $M_X^H(c)$ で $(\text{rk } E, c_1(E), c_2(E)) = c$ なる H 安定層 E のモジュライ空間を記す．Gieseker の結果により $M_X^H(c)$ は準射影的概型の構造をもち, 半安定層の S 同値類を付け加えることで射影的概型 $\overline{M}_X^H(c)$ にコンパクト化できる．

以下 X は K3 曲面ないしアーベル曲面とする．この場合は $E \in \text{Coh}(X)$ の Chern 指標の代りに所謂 Mukai ベクトル

$$v(E) := \text{ch}(E)\sqrt{\text{td}_X} = (\text{rk}(E), c_1(E), \chi(E) - \epsilon \text{rk}(E)) \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})$$

を用いるのが便利である．但し $\epsilon := 1$ (X : K3) もしくは $\epsilon := 1$ (X : アーベル)． $H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})$ 上の対称双線型形式を

$$\langle (r, \xi, a), (s, \eta, b) \rangle := (\xi, \eta) - as - rb$$

で定める．また $v = (r, \xi, a)$ が正であるとは, 辞書式順序で正, 即ち $r > 0$ 又は “ $r = 0$ かつ ξ が有効的” 又は “ $r = 0$ かつ $\xi = 0$ かつ $a > 0$ ” である事とする．

安定層のモジュライ空間の基本性質をここで思い出そう．

事実． X は K3 曲面又はアーベル曲面とする．

- (1) [M84] $M_X^H(v)$ は (空でなければ) 非特異, $\dim = \langle v^2 \rangle + 2\epsilon$ で正則シンプレクティック構造を持つ．また, H が v に関し一般的なら $M_X^H(v)$ は射影的．
- (2) [Y03a, Y03a] もし $v = (r, \xi, a)$ が正なら, $M_X^H(v) \neq \emptyset$ と $\langle v^2 \rangle \geq 0$ は同値．また $\langle v^2 \rangle > 0$ かつ H が v に関し一般的なら $\overline{M}_X^H(v)$ は既約な正規射影多様体．

さて本稿では X がアーベル曲面の場合に限って話をする．この場合のモジュライ空間については上で述べたより更に精密な主張が成立する．

定理 1. X を主偏極アーベル曲面でかつ $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ だとする．また Mukai ベクトル v が正で, $\ell := \langle v^2 \rangle / 2$

(これは常に整数) が

$$\#\{\text{判別式が } \ell \text{ の整係数 2 次形式}\} / \sim_{\text{GL}(2, \mathbb{Z})} = 1$$

を満たすものとする. この時双有理射

$$M_X^H(v) \dashrightarrow X \times \text{Hilb}^\ell(X)$$

が存在する.

注意. (1) これは [M80] の予想 1 に述べられている主張である.

(2) “ X が主偏極” という仮定を外して類似の主張が証明できる. 正確な主張は §2 で触れる. 証明の鍵になるのは Fourier-Mukai 変換と **半等質表示** である.

(3) 整係数 2 次形式とは $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) のことである. その判別式とは $b^2 - ac$ のことである. 整係数 2 次形式には $A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ が

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \mapsto a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 \quad \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} = {}^t A \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} A$$

で作用する. これで得られる同値関係が主張の仮定の中で用いた $\sim_{\text{GL}(2, \mathbb{Z})}$ である.

主定理の 2 つ目は, 仮定を強めると主定理 1 の双有理同値が同型を与えることを主張するものである.

定理 2. X を主偏極アーベル曲面でかつ $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ だとする. また Mukai ベクトル v が正で, $\ell := \langle v^2 \rangle / 2$ が $\ell = 1, 2, 3$ だとする. この時同型

$$M_X^H(v) \xrightarrow{\sim} X \times \text{Hilb}^\ell(X)$$

がある.

注意. (1) $\ell = 2, 3$ は定理 1 の仮定を満たす. つまり “整係数 2 次形式の同値類の数は 1” である.

(2) これは [M79, M80] で定理として述べられているものであるが, 証明が書き下されていなかった.

(3) 証明の鍵は Bridgeland **安定性** 条件の空間の壁と部屋の構造の解析である.

2 モジュライ空間の双有理同値

この節では定理 1 を示すためのアイデアを紹介する. まず半等質層について説明する. これはアーベル多様体上で定義される層であり, アーベル曲面の Fourier-Mukai 対並びに Fourier-Mukai 変換の分類に役立つものである.

以下では断らない限り X は $\mathbb{C}$ 上定義されたアーベル曲面とする.

2.1 半等質層とアーベル曲面上の Fourier-Mukai 変換

半等質層は [M78] で導入・分類され, 後の Fourier-Mukai 変換の研究の礎になった.

定義 (半等質層 (semi-homogeneous sheaves)). $E \in \text{Coh}(X)$ に対し

$$S(E) := \{(x, y) \in X \times \hat{X} \mid T_x^* E \otimes \mathbf{P}|_{X \times \{y\}} \cong E\}$$

と定める. ここで $\widehat{X} := \text{Pic}^0 X$ は Picard 多様体, T_x は $x \in X$ による平行移動, $\mathbf{P}$ は $X \times \widehat{X}$ 上の Poincaré 束. この時 $S(E)$ は $X \times \widehat{X}$ のアーベル部分多様体であり, 次元は 2 以下である.

$\dim S(E) = 2$ のとき, E を半等質層と呼ぶ.

注意. E が半等質層かつベクトル束なら, 任意の $x \in X$ について $L \in \text{Pic}^0 Y$ が存在して $T_x^* E \cong L \otimes E$ となる. つまり E は平行移動しても, 次数 0 の直線束による捻じれを除けば自分自身と同型である. これが “半等質” という言葉の由来である.

事実 1. (1) (2 次元の安定層のモジュライの分類) [M78]

H を X 上の豊富な因子とする. $E \in \text{Coh}(X)$ は $\langle v(E)^2 \rangle = 0$ を満たすものとする.

- (a) E は H 半安定なら半等質層.
- (b) E が H 安定であることと $v(E)$ が原始的である事は同値.

(2) (アーベル曲面上の Fourier-Mukai 変換の分類) [Or02]

X と Y はアーベル曲面で導来同値 $\Phi : D(X) \xrightarrow{\sim} D(Y)$ が存在するものと仮定する.

- (a) 正かつ $\langle v^2 \rangle = 0$ である Mukai ベクトル v が存在して $Y \cong M_X^H(v)$.
- (b) $Y \times X$ 上の普遍族 $\mathcal{E}$ が存在して, ある $k \in \mathbb{Z}$ でもって $\Phi \cong \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{E}[k]} := \mathbb{R}p_{Y*}(p_x^*(-) \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{E}[k])$ となる.

注意. (1) つまりアーベル曲面の Fourier-Mukai 対は必ず半等質層のモジュライ空間であり, 全ての導来同値は半等質層の普遍族を核とする Fourier-Mukai 変換で与えられる.

(2) また (1) より $\langle v(E)^2 \rangle = 0$ なら E の安定性は因子 H の取り方に依存しない.

2.2 半等質表示

[YY1] で導入した次の概念を紹介する.

定義. $E \in \text{Coh}(X)$ の半等質表示とは短完全系列

$$0 \rightarrow E \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow 0 \quad \text{又は} \quad 0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E \rightarrow 0$$

であって, E_1 と E_2 は以下の条件を満たす半等質層である.

$$(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -1 \tag{1}$$

ここで $\ell_i \in \mathbb{Z}$ と原始的な Mukai ベクトル v_i は $v(E_i)$ を $v(E_i) = \ell_i v_i$ と表す時に用いたもの.

注意 3. (1) 事実 1 を用いると, 条件 (1) から以下が従う.

- (a) E_1 または E_2 は安定.
- (b) Fourier-Mukai 変換 $\Phi : D(X) \xrightarrow{\sim} D(Y_i)$ が存在する. 但し $Y_i := M_X^H(v_i)$ で, $i \in \{1, 2\}$ は (a) の安定層 E_i に対応する番号.

(2) 半等質表示の導入の動機を説明するために,

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E \rightarrow 0$$

で $\ell_1 = 1$ の場合を考える. 実は $\Phi := \Phi_{X \rightarrow Y_1}^{\mathcal{E}[-1]}$ によって

$$\Phi(E) \cong L \otimes I_Z$$

となる. 但し $L \in \widehat{Y}_1 = \text{Pic}^0(Y_1)$ 及び $Z \in \text{Hilb}^{\langle v^2 \rangle/2}(Y_1)$. また I_Z は Z のイデアル層. つまり半等質表示があると E は Fourier-Mukai 変換によって (次数 0 の直線束分の自由度を除いて) イデアル層に写すことができる. 写した後の層のモジュライ空間は $\widehat{Y}_1 \times \text{Hilb}^\ell(Y_1)$ と思えるから, 双有理写像の構成をするには半等質表示が一般の安定層に対して存在するを言えば良いことになる.

実は半等質表示の存在の判定をするには位相不変量にのみ依存した情報を考えれば十分である. それを説明するために, 次のものを考えることにする.

定義. Mukai ベクトル v の数値的方程式 (numerical equation) を

$$\begin{aligned} (\#) \quad & v = \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2 \\ \text{但し} \quad & \begin{cases} \ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}, & v_i : \text{正かつ原始的}, \\ (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0, \\ \langle v_i^2 \rangle = 0, & \langle v_1, v_2 \rangle = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する.

数値的方程式 $(\#)$ は未知数を $(\ell_1, \ell_2, v_1, v_2)$ とする不定方程式である. この方程式に解があれば一般の安定層が半等質表示を持つ, というのがこの節の議論で最も重要である.

命題 4. $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する. また Mukai ベクトル v は正かつ $\langle v^2 \rangle > 0$ とする. もし数値的方程式 $(\#)$ が解 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を持てば, $M_X^H(v)$ の一般の元は半等質表示を持つ.

ここではこの命題を認めて定理 1 の証明の概略を述べる.

定理 1 の証明の概略. $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する. Mukai ベクトル v は 3 つの整数 (r, d, a) を用いて $v = (r, dH, a)$ と書ける. 以下 $n := (H^2)/2$ (これは整数) を用いる.

(r, d, a) 及び n を用いて数値的方程式を書き換えることができる. すると注意 3 と命題 4 より, もし

$$-rx^2 + 2ndxy - ay^2 = \pm 1 \tag{*}$$

に解 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ があれば, ある Fourier-Mukai 変換が存在してそれにより双有理射

$$M_X^H(v) \dashrightarrow \text{Pic}^0(Y) \times \text{Hilb}^\ell(Y)$$

が定まる. 但し $Y = M_X^H(v_i)$.

さらに X が主偏極だと仮定する. この時 $n = 1$ だが, それと定理の仮定 (2 次形式の同値類の数が 1) から $(*)$ に解がある事が従う. 従って前段落の議論が適用できる. また任意の Fourier-Mukai 対は X と同型なので, 特に $Y \cong \widehat{Y} \cong X$ である. これで定理 1 が得られる. $\square$

3 モジュライ空間の同型射

この節の目標は定理 2 の解説である. その為に Bridgeland による導来圏上の安定性の概念を思い出す必要がある. そして安定性条件の空間の壁と部屋の構造を考える. アーベル曲面 X について, $D(X)$ の安定性条件の空間は (他の曲面の場合と比較して) ある程度詳しく記述できる. 特に余次元 0 の壁がモジュライ空間の解析の上で大切な役割を果たす.

3.1 Bridgeland 安定性

Bridgeland が導入した三角圏での安定性の定義を復習する.

定義. 三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件 σ とは

$$\begin{cases} (\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 1}) & \mathcal{T} \text{ の } t \text{ 構造 (その core を } \mathcal{A} \text{ と記す)} \\ Z : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} & \text{群準同型} \end{cases}$$

であって, 任意の $0 \neq E \in \mathcal{A}$ について以下が成り立つものの事である.

- (1) $Z(E) = re^{\sqrt{-1}\pi\phi}$, 但し $r, \phi \in \mathbb{R}$, $0 < r$, $0 < \phi \leq 1$. この ϕ の事を以下 $\phi(E)$ と書く.
- (2) $\mathcal{A}$ でのフィルトレーション $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$ が存在して, 各 $F_j := E_j/E_{j-1}$ について
$$\phi(F_1) > \cdots > \phi(F_n)$$

かつ F_j は半安定 (任意の $0 \neq F' \subset F_j$ について $\phi(F') \leq \phi(F_j)$ が成立する).

以下では安定性条件を $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ と略記する. 代数曲面 X について $\mathcal{T} = D(X)$ 上の安定性条件の構成は Bridgeland のアイデアが基本的である. 現在では様々な場合に安定性条件が構成されているが, ここでは [MYYY] で証明した以下の形で述べる.

命題. X をアーベル曲面とする. 各 $\beta \in \text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ と $\omega \in \text{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ について $D(X)$ 上の安定性条件

$$\sigma_{(\beta, \omega)} := (\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}, Z_{(\beta, \omega)})$$

が定義できる. ここで

$$Z_{(\beta, \omega)}(E) := \langle \exp(\beta + \sqrt{-1}\omega), v(E) \rangle$$

であり, また $\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}$ は $\text{Coh}(X)$ の torsion pair $(\mathcal{T}_{(\beta, \omega)}, \mathcal{F}_{(\beta, \omega)})$ に関する tilting で得られる t 構造 (の core) である. torsion pair は

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(\beta, \omega)} &:= \langle \beta\text{-twisted stable sheaf } E, Z_{(\beta, \omega)}(E) \in \mathbb{H}' \rangle \\ \mathcal{F}_{(\beta, \omega)} &:= \langle \beta\text{-twisted stable sheaf } E, -Z_{(\beta, \omega)}(E) \in \mathbb{H}' \rangle \end{aligned}$$

で与えられる. 但し $\mathbb{H}' := \{re^{\sqrt{-1}\pi\phi} \mid r, \phi \in \mathbb{R}, 0 < r, 0 < \phi \leq 1\}$.

定義. (1) ($\sigma_{(\beta, \omega)}$ 安定性)

$E \in D(X)$ が $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 半安定であるとは, ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して $E[-n]$ が $\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}$ の半安定な対象であることと定義する.

(2) (Bridgeland 安定対象のモジュライ空間)

$\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}$ の半安定対象 E で $v(E) = v$ なるものの S 同値類のモジュライ概型を $M_{(\beta, \omega)}(v)$ と記す.

以下は [MYYY] で証明してある.

命題 (巨大体積極限). $E \in D(X)$ を $\text{rk}(E) \geq 0$ かつ $\langle v(E)^2 \rangle \ll (\omega^2)$ なるものとする. この時 E が $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 半安定であることと $E \in \text{Coh}(X)$ かつ β -twisted H -semi-stable であることは同値.

命題 5 (安定性の保存). $D(X)$ の任意の導来同値 Φ は安定性を保つ. 即ち任意の $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 半安定な対象 E に対しある (β', ω') があって $\Phi(E)$ は $\sigma_{(\beta', \omega')}$ 半安定.

3.2 Bridgeland 安定性条件の空間の壁と部屋の構造

引き続きアーベル曲面 X について $D(X)$ 上の安定性条件を考える.

定義. Mukai ベクトル v を固定する. もう 1 つの Mukai ベクトル v_1 であって

$$v_1 \notin \mathbb{Q}v, \quad \langle v_1^2 \rangle \geq 0, \quad \langle (v - v_1)^2 \rangle \geq 0, \quad \langle v_1, v - v_1 \rangle > 0$$

を満たすものを考える.

(1) (type v_1 の) v に関する壁を以下で定義する.

$$W_{v_1, v} := \{(\beta, \omega) \mid \mathbb{R}Z_{(\beta, \omega)}(v) = \mathbb{R}Z_{(\beta, \omega)}(v_1)\}.$$

(2) $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}} \setminus \cup_{v_1} W_{v_1, v}$ の連結成分を v に関する部屋と呼ぶ.

次の補題は“壁と部屋”という言葉遣いが正しいことを保障する.

補題. Mukai ベクトル v は $\langle v^2 \rangle > 0$ を満たすものとし, C を v に関する部屋とする. この時 $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 安定性は $(\beta, \omega) \in C$ の取り方によらない.

つまり $M_{(\beta, \omega)}(v)$ は $(\beta, \omega) \in C$ によらない. そこでこのモジュライ空間を $M_C(v)$ と記すことにする.

以下 $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ を仮定する. $\beta = sH, \omega = tH$ とおいて安定性条件の空間を

$$\{(sH, tH) \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

と表すことにする.

補題. (1) v に関する壁 $W_{v_1, v}$ は次の様に書ける:

$$W_a := \{(sH, tH) \mid (s - a)^2 + t^2 = (p - a)^2 - q\} \quad \text{又は} \quad W_{\infty} := \{(sH, tH) \mid s = p\}.$$

ここで $p \in \mathbb{Q}$ と $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ は v のみに依存して定まり, $a \in \mathbb{Q}$ は v_1 と v に依存して定まる.

(2) $a \neq a'$ なら $W_a \cap W_{a'} = \emptyset$.

つまり壁は (半) 円であり, 異なる壁は交わらない.

次に壁の余次元という概念を導入する.

定義 (壁の余次元). v に関する壁 W の余次元 $\mathrm{codim} W$ を

$$\mathrm{codim} W := \min_{v = \sum_i v_i} \left\{ 1 + \sum_{i < j} \langle v_i, v_j \rangle - \sum_i (\dim \mathcal{M}_X^{H, \beta'}(v_i)^{ss} - \langle v_i^2 \rangle) \right\}$$

で定義する. ここで右辺の和の $v = \sum_i v_i$ は $i = 1, \dots, s, s > 2$ かつ

$$\phi_{(\beta, \omega)}(v) = \phi_{(\beta, \omega)}(v_i) \quad (\forall i), \quad \phi_{(\beta', \omega')}(v_i) > \phi_{(\beta', \omega')}(v_j) \quad (\forall i < j)$$

を満たすように動く. 但し (β, ω) は W 上にあり, (β', ω') は W に隣接する部屋にあるものとする.

壁の余次元は、安定対象のモジュライ空間の中で壁越えで安定性が崩れる対象のなす部分空間の余次元として定義してある。特に**余次元 0 の壁**というのは“安定対象が全て不安定になる”壁であり、一見統制のつかないものに見える。しかし次の命題により、我々の状況ではそのような壁がむしろ**良い壁である**ことが示唆される。

補題 6 (余次元 0 = 数値的方程式の解)。

$$\{W_{v_1, v} \mid v \text{ に関する余次元 0 の壁}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{数値的方程式 } (\#) \text{ の解 } (v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)\}$$

3.3 $v = (1, 0, -\ell)$ に関する壁

引き続き $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し、自然数 n を $n := (H^2)/2$ で定める。

X の 1 次元部分概型 Z で長さ ℓ のものを考える。 Z のイデアル層 I_Z に対応する Mukai ベクトル $v = (1, 0, -\ell)$ の余次元 0 の壁を記述したい。補題 6 より数値的方程式の解を考えればよいが、今の場合はその解を $\sqrt{\ell/n}$ の連分数展開を用いて表示できる。

補題.

$$\{v = (1, 0, -\ell) \text{ に関する余次元 0 の壁}\} = \{W_m^0 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

ここで W_m は

$$\begin{aligned} W_m^0 &:= \{(sH, tH) \mid (s - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{b_m}{a_m})(s - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\ell b_m}{a_m}) + t^2 = 0\} \quad (m \neq 0), \\ W_0^0 &:= \{(sH, tH) \mid s = 0\} \end{aligned}$$

で与えられる。但し

$$\begin{pmatrix} b_m & \ell a_m \\ a_m & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \ell p \\ p & q \end{pmatrix}^m, \quad p, q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad q^2 - \ell p^2 = \pm 1.$$

有理数 b_m/a_m は $m \rightarrow \infty$ で $\sqrt{\ell/n}$ に収束することに注意する。

次の図 1 では余次元 0 の壁を実線で、余次元 1 以上の壁を破線で表す。壁 W_m に隣接した部屋で W_m の内側にあるものを C_m^+ 、外側にあるものを C_m^- と記す。

ここで $M_m := M_{C_m^-}(1, 0, -\ell) \cap M_{C_{m-1}^+}(1, 0, -\ell)$ とおく。

命題 7. (1) $M_0 \cong \widehat{X} \times \text{Hilb}^\ell(X)$.

(2) $M_m \neq \emptyset$. また $M_m \dashrightarrow M_{C_{m-1}^+}, M_{C_m^-}$.

(3) 概型の同型の列

$$\cdots \rightarrow M_{-2} \xrightarrow{\Psi_{-2}} M_{-1} \xrightarrow{\Psi_{-1}} M_0 \xrightarrow{\Psi_0} M_1 \xrightarrow{\Psi_1} M_2 \rightarrow \cdots$$

が存在する。各 Ψ_m は Fourier-Mukai 変換と双対関手 D_Y の合成 $\Phi_{Y \rightarrow X}^\mathcal{E} D_Y \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{E}^\vee}[-]$ の形で書ける。

これで定理 2 の証明の概略を説明する準備ができた。ここでは $\ell = 2$ の場合について解説する。

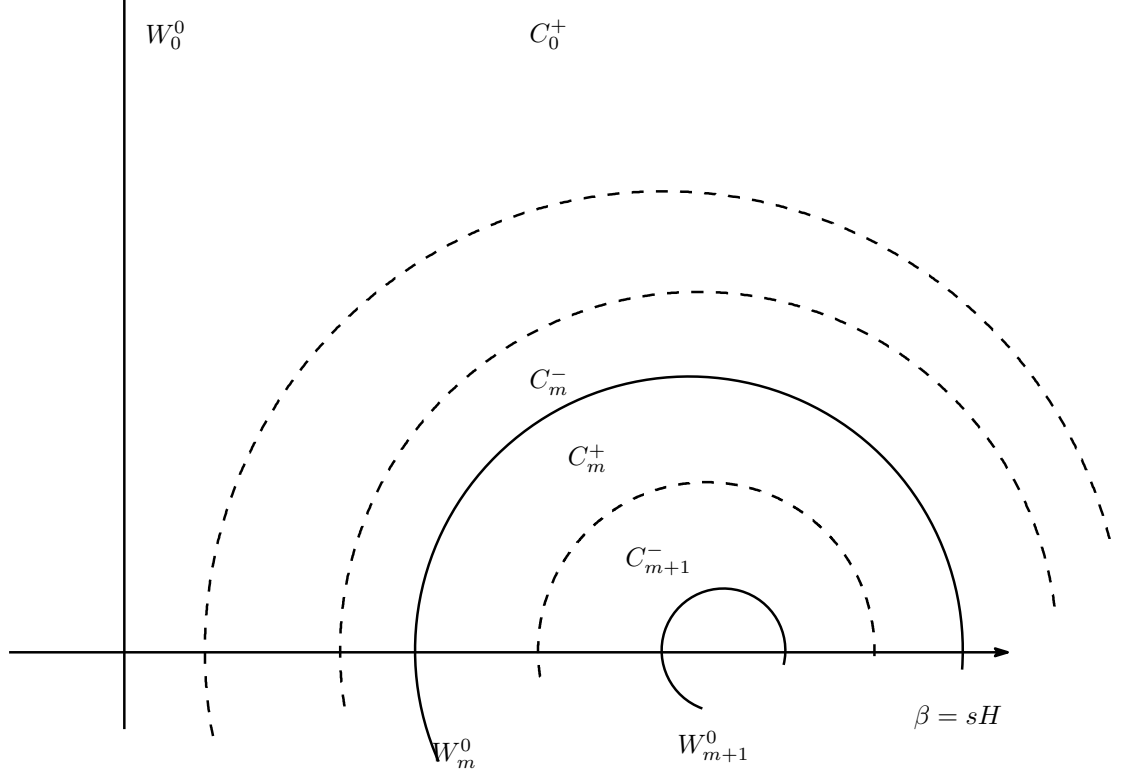


図1 $v = (1, 0, -\ell)$ に関する壁と部屋

定理2の証明の概略 ($\ell = 2$). “判別式が ℓ の2次形式の同値類の数が1” という仮定と命題5 (安定性の保存) から, ある Fourier-Mukai 変換があつて同型 $M_X^H(v) \xrightarrow{\sim} M_{(\beta, \omega)}(1, 0, -\ell)$ を引き起こす. ここで (β, ω) は Mukai ベクトル $(1, 0, -\ell)$ に関する部屋 C に属する安定性条件.

ここで仮定 $\ell = 2$ と $n = 1$ から, $(1, 0, -\ell)$ に関する壁で余次元1以上のものは存在しない. 特に $C = C_{m-1}^+ = C_m^-$ である.

すると

$$M_X^H(v) \cong M_{(\beta, \omega)}(1, 0, -\ell) = M_m \stackrel{\text{命題 7(3)}}{\cong} M_0 \stackrel{\text{命題 7(1)}}{\cong} X \times \text{Hilb}^\ell(X)$$

となり, 結論を得る. □

注意. 特に同型射 $M_X^H(v) \xrightarrow{\sim} X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ は命題 refprop:mm(3) のような Fourier-Mukai 変換の合成と考える. その合成の回数は $v = (r, dH, a)$ のスロープ $2d/r$ と $\sqrt{\ell/n} = \sqrt{2}$ の連分数展開で得られる有理数列との大小関係から定まることも分かる. 実はこの連分数展開を利用した同型射の構成は [M79] に (証明なしだが) 書かれている. 我々の仕事により [M79] の主張が Bridgeland 安定性の言葉で正当化されたことになる.

4 最後に

今回紹介した結果をまとめる.

- 半等質表示と *Fourier-Mukai* 変換を活用することで, 安定層のモジュライ空間の間の双有理射を構成できた.
- *Bridgeland* 安定性条件の空間の壁と部屋の構造を解析することで, 上記の双有理射がある場合には 同型を与えることが分かった.

最後に未解決の問題を 1 つ紹介して本稿を終えることにする.

予想. [M80] X は主偏極かつ $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する. この時

$$\#\{\text{判別式 } \ell \text{ の整係数 2 次形式}\} /_{GL(2, \mathbb{Z})} \stackrel{?}{\sim} \#\{M_X^H(v) \mid v : \text{positive}, \langle v^2 \rangle = 2\ell\} /_{\sim \text{双有理}}$$

注意. 定理 1 の証明の議論から片方の不等式

$$(\mathrm{LHS}) \geq (\mathrm{RHS})$$

は得られている [YY1].

参考文献

- [HL10] Huybrechts, D., Lehn M., *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Second edition, Cambridge University Press, 2010.
- [MYYY] Minamide, H., Yanagida, S., Yoshioka, K., *Fourier-Mukai transforms and the wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions*, preprint, arXiv:1106.5217.
- [M78] Mukai, S., *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), no. 2, 239–272.
- [M79] 向井茂, フーリエ関手とそのアーベル曲面上のベクトル束への応用について, 代数幾何学シンポジウム講演録 (東北大学, 1979 年 6 月), 76–93.
- [M80] 向井茂, アーベル曲面上のベクトル束の分類について, 数理解析研究所講究録 **409** (1980), 103–127.
- [M81] Mukai, S., *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175.
- [M84] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian and K3 surface*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.
- [M87] 向井茂, K3 曲面上のベクトル束のモジュライとシンプレクティック多様体, 数学 **39** (1987), 216–235.
- [Or02] Orlov, D., *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Math. **66** (2002), no. 3, 569–594.
- [YY1] Yanagida, S., Yoshioka, K., *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, to appear in J. Reine Angew. Math. (available by online, DOI: 10.1515/crelle-2011-0010), arXiv:0906.4603.

- [YY2] Yanagida, S., Yoshioka, K., *Bridgeland's stabilities on abelian surfaces*, preprint, arXiv:1203.0884.
- [Y03a] Yoshioka, K., *Twisted stability and Fourier-Mukai transforms I*, Compositio Math. **138** (2003), 261–288.
- [Y03b] Yoshioka, K., *Twisted stability and Fourier-Mukai transforms II*, Manuscripta Math. **110** (2003), 433–465.
- [Y04] 吉岡康太, 代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間, 数学 **56** (2004), 225–247.

Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry

YOSHINORI NAMIKAWA

A normal complex algebraic variety X is a *symplectic variety* if there is a holomorphic symplectic 2-form ω on the regular part X_{reg} of X and ω extends to a (possibly degenerate) holomorphic 2-form on a resolution $f : \tilde{X} \rightarrow X$.

Example: Let $\mathfrak{g}$ be a semisimple complex Lie algebra and let G be its adjoint group. Let us consider the *adjoint quotient map* $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G$. If $\text{rank}(\mathfrak{g}) = r$, then $\mathfrak{g}/G$ is isomorphic to the r -dimensional affine space $\cong \mathbf{C}^r$. The nilpotent variety N is, by definition, the set of all nilpotent elements of $\mathfrak{g}$ and we have $N = \chi^{-1}(0)$. The nilpotent variety decomposes into the disjoint union of (finite number of) nilpotent orbits. There is a unique nilpotent orbit O_{reg} that is open dense in N , which we call the *regular nilpotent orbit*. Then $N = \overline{O_{reg}}$. The regular nilpotent orbit O_{reg} coincides with the regular part of N and it admits a holomorphic symplectic form ω_{KK} so called the *Kostant-Kirillov* 2-form. Then (N, ω_{KK}) is a symplectic variety. Moreover $N \subset \mathfrak{g}$ is defined as a complete intersection of r homogeneous polynomials (with respect to the standard $\mathbf{C}^*$ -action on $\mathfrak{g}$).

In this talk I characterize the nilpotent varieties of semisimple Lie algebras among affine symplectic varieties.

Let (X, ω) be a singular affine symplectic variety of dimension $2n$ embedded in an affine space $\mathbf{C}^{2n+r}$ as a complete intersection of r homogeneous polynomials. Assume that ω is also homogeneous, i.e. there is an integer l such that $t^*\omega = t^l \cdot \omega$ for $t \in \mathbf{C}^*$.

Main Theorem ([1]): *One has $(X, \omega) \cong (N, \omega_{KK})$, where N is the nilpotent variety of a semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}$ together with the Kostant-Kirillov 2-form ω_{KK} .*

Before starting the proof, we give a few observations.

Observation 1. $l = 1$, where $l := wt(\omega)$.

Write X as $f_1 = \dots = f_r = 0$ with homogeneous polynomials $f_i(z_1, \dots, z_{2n+r})$. We put $a_i := \deg(f_i)$. As X is singular, we may assume that $a_i > 1$ for every i . The holomorphic volume form $\omega^n := \omega \wedge \dots \wedge \omega$ can be written, by the adjunction formula (or the residue formula), as

$$\omega^n = c \cdot \text{Res}(dz_1 \wedge \dots \wedge z_{2n+r} / (f_1, \dots, f_r))$$

with a nonzero constant c . Since X has only canonical singularities, we see that $wt(\omega) > 0$. Computing the weights of both sides, we get

$$0 < n \cdot wt(\omega) = 2n + r - \sum a_i < 2n.$$

The last inequality follows from the fact that $a_i > 1$ and so $\sum a_i > r$. Hence $wt(\omega) = 1$ and $\sum a_i = n + r$.

Observation 2. X has a $\mathbf{C}^*$ -equivariant crepant resolution $\pi : Y \rightarrow X$.

(Sketch of Proof): Take a resolution $f : W \rightarrow X$ and apply the MMP (Minimal Model Program) to the morphism f . Then we get a partial crepant resolution $\pi : Y \rightarrow X$ where Y may possibly have $\mathbf{Q}$ -factorial terminal singularities. The $\mathbf{C}^*$ -action on X extends to a $\mathbf{C}^*$ -action in such a way that π is $\mathbf{C}^*$ -equivariant. The symplectic form ω induces a Poisson structure on the regular locus X_{reg} . By the normality of X , this Poisson structure extends to a Poisson structure on X . The pull-back of ω by π is a symplectic form on Y_{reg} because π is crepant. Then it induces a Poisson structure on Y_{reg} and it extends to a Poisson structure on Y . Now let us consider a *Poisson deformation* $\mathcal{Y} \rightarrow \Delta$ of Y . Then π extends to a birational morphism $\tilde{\pi} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ over Δ for a Poisson deformation $\mathcal{X} \rightarrow \Delta$ of X . If the Poisson deformation $\mathcal{Y}/\Delta$ is very general, then $\tilde{\pi}_t : Y_t \rightarrow X_t$ is an isomorphism for $t \neq 0$. Since X has only complete intersection singularities, X_t also does. On the other hand, we have $\text{Codim}_Y \text{Sing}(Y) \geq 4$ because Y has only terminal singularities. This implies that $\text{Codim}_{Y_t} \text{Sing}(Y_t) \geq 4$; and hence $\text{Codim}_{X_t} \text{Sing}(X_t) \geq 4$. Notice that X_t is a symplectic variety and such a symplectic variety X_t must be smooth by a proposition of Beauville. As $Y_t \cong X_t$, we have seen that Y_t is smooth. Finally, by the $\mathbf{Q}$ -factoriality of Y , we see that any Poisson deformation $\mathcal{Y} \rightarrow \Delta$ is a locally trivial flat deformation of Y . Therefore Y must be smooth and π is a crepant resolution.

We put $\mathbf{P}(X) := X - \{0\}/\mathbf{C}^*$ and $Z := Y - \pi^{-1}(0)/\mathbf{C}^*$. Then π induces a map $\bar{\pi} : Z \rightarrow \mathbf{P}(X)$. By using the fact that $wt(z_i) = 1$ for all i , we have:

Observation 3. $\bar{\pi} : Z \rightarrow \mathbf{P}(X)$ is a crepant resolution.

Notice that Z is a projective manifold of dimension $2n - 1$. An important fact is that Z has a *contact structure*.

Let W be a complex manifold of odd dimension $2n - 1$. A contact structure on W is an exact sequence of vector bundles

$$0 \rightarrow E \rightarrow \Theta_W \xrightarrow{\theta} M \rightarrow 0,$$

where M is a line bundle and the induced pairing $E \times E \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow \theta([x, y])$ is nondegenerate. Recall that a subbundle of Θ is called *integrable* if the bracket $[\cdot, \cdot]$ is closed in the subbundle. In this sense, E is a *highly non-integrable* subbundle of Θ . The line bundle M is called the *contact line bundle* and the twisted 1-form $\theta \in \Gamma(W, \Omega_W^1 \otimes M)$ is called the *contact form*. If W admits a contact structure, then $-K_W \cong M^{\otimes n}$ and $(d\theta)^{n-1} \wedge \theta$ is a nondegenerate $2n - 1$ -form on W .

Let us return to our situation. The $\mathbf{C}^*$ -bundle $X - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(X)$ restricts to the $\mathbf{C}^*$ -bundle $X_{reg} \rightarrow \mathbf{P}(X)_{reg}$. We put $L := \mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(1)|_{\mathbf{P}(X)_{reg}}$ and denote by $(L^{-1})^\times$ the $\mathbf{C}^*$ -bundle on $\mathbf{P}(X)_{reg}$ obtained from the dual line bundle L^{-1} by removing the 0-section. Then $X_{reg} \rightarrow \mathbf{P}(X)_{reg}$ can be identified with $p : (L^{-1})^\times \rightarrow \mathbf{P}(X)_{reg}$. The $\mathbf{C}^*$ -action on X_{reg} coincides with the natural $\mathbf{C}^*$ -action on $(L^{-1})^\times$ as a $\mathbf{C}^*$ -bundle. Let ζ be a vector field on $(L^{-1})^\times$ generating this $\mathbf{C}^*$ -action. We regard ω as a symplectic 2-form on $(L^{-1})^\times$ by the identification of X_{reg} with $(L^{-1})^\times$. Then one can write

$$\omega(\zeta, \cdot) = p^*\theta$$

with a twisted 1-form $\theta \in \Gamma(\mathbf{P}(X)_{reg}, \Omega_{\mathbf{P}(X)_{reg}}^1 \otimes L)$. We remark that p^*L has a natural trivialization on $(L^{-1})^\times$. This twisted 1-form θ determines a contact structure on $\mathbf{P}(X)_{reg}$.

Denote by $i : \mathbf{P}(X)_{reg} \rightarrow \mathbf{P}(X)$ the inclusion map. Then $i_*\Omega_{\mathbf{P}(X)_{reg}}^1 = \bar{\pi}_*\Omega_Z^1$. Since $\Gamma(\mathbf{P}(X), i_*\Omega_{\mathbf{P}(X)_{reg}}^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(1)) = \Gamma(Z, \Omega_Z^1 \otimes \bar{\pi}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(1))$, the twisted 1-form θ can be regarded as an element of $\Gamma(Z, \Omega_Z^1 \otimes \bar{\pi}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(1))$.

Proposition 1. *Z has a contact structure with the contact line bundle $\bar{\pi}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(1)$.*

For a contact projective manifold Z , the following structure theorem was proved by Kebekus, Peternell, Sommese and Wisniewski.

Theorem 2: *Assume that Z is a contact projective manifold with $b_2(Z) > 1$ and K_Z not nef. Then Z is a projectivized cotangent bundle $\mathbf{P}(T^*M) := T^*M - (0 - \text{section})/\mathbf{C}^*$ of a projective manifold M . Moreover, the contact line bundle is isomorphic to $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T^*M)}(1)$.*

As $K_Z \cong \bar{\pi}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(-n)$, it is not nef. Moreover, since X is a symplectic variety of complete intersection, $\text{Codim}_X \text{Sing}(X) = 2$. Thus, if $n \geq 2$, then $\mathbf{P}(X)$ has singularities and $\bar{\pi}$ has an exceptional locus. This implies that $b_2(Z) > 1$. When $n = 1$, it is easily checked that X is isomorphic to an A_1 -surface singularity $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ in $\mathbf{C}^3$.

In the remainder we assume that $n \geq 2$. Then Z is a projectivized cotangent bundle $\mathbf{P}(T^*M)$ for some projective manifold by the theorem above. Which kind of manifold is M ?

First notice that $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T^*M)}(1) = \bar{\pi}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(X)}(1)$. In particular, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T^*M)}(1)$ is nef. The following theorem was proved by Demailly, Peternell and Schneider.

Theorem 3. *Let M be a projective manifold with $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T^*M)}(1)$ nef. Assume that $\chi(M, \mathcal{O}_M) \neq 0$. Then M is a Fano manifold.*

Actually it is conjectured that M is a rational homogeneous space under the same assumption; but it is still open except when $\dim M = 2$ or 3 . But, in our case, we can prove more:

Proposition 4. *Let M be a Fano manifold such that $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T^*M)}(1)|$ is free from base points. Then M is a rational homogeneous space, that is, $M = G/P$ with a complex semisimple Lie group G and its parabolic subgroup P .*

(Sketch of Proof). By the assumption we see that the map

$$H^0(M, \Theta_M) \otimes \mathcal{O}_M \rightarrow \Theta_M$$

is surjective. Let G be the neutral component of $\text{Aut}(M)$. Then G is a linear algebraic group. By the surjectivity G acts transitively on M . Hence M can be written as G/P with a parabolic subgroup P . Let us prove that G is semisimple. Let $r(G)$ be the radical of G . Then $r(G)$ is contained in P . But this implies that $r(G)$ acts trivially on G/P . By the definition of G , G acts effectively on M . This implies that $r(G) = 1$.

By the proposition $Z = \mathbf{P}(T^*(G/P))$. Let us consider the moment map $\mu : T^*(G/P) \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Since $\mathfrak{g}$ is semisimple, $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$. Then $\text{Im}(\mu)$ coincides with a nilpotent orbit closure $\bar{O}$ of $\mathfrak{g}$. One can take the projectivization $\bar{\mu} : \mathbf{P}(T^*(G/P)) \rightarrow \mathbf{P}(\bar{O})$. We compare this map with $\bar{\pi} : Z \rightarrow \mathbf{P}(X)$. The embeddings $\mathbf{P}(\bar{O}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathfrak{g})$ and $\mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}^{2n+r-1}$ determine the tautological line bundles $O_{\mathbf{P}(\bar{O})}(1)$ and $O_{\mathbf{P}(X)}(1)$. One can check that $\bar{\mu}^*O_{\mathbf{P}(\bar{O})}(1) = O_{\mathbf{P}(T^*(G/P))}(1)$ and $\bar{\pi}^*O_{\mathbf{P}(X)}(1) = O_{\mathbf{P}(T^*(G/P))}(1)$. Moreover both $\bar{\mu}$ and $\bar{\pi}$ coincide with the morphisms determined by the complete linear system $|O_{\mathbf{P}(T^*(G/P))}(1)|$. This implies that $(\mathbf{P}(X), O_{\mathbf{P}(X)}(1)) \cong (\mathbf{P}(\bar{O}), O_{\mathbf{P}(\bar{O})}(1))$ as polarized varieties. Therefore $X \cong \bar{O}$ as a $\mathbf{C}^*$ -varieties.

The final task is to show that $\bar{O}$ is the nilpotent variety N of $\mathfrak{g}$. For simplicity we only discuss the case when $\mathfrak{g}$ is an exceptional simple Lie algebra. See [1] for other cases. We are now assuming that $\bar{O}$ is complete intersection in $\mathfrak{g}$. Then one can construct a G -equivariant morphism $f : \mathfrak{g} \rightarrow V$ from $\mathfrak{g}$ to a G -representation V with $\dim V = \text{Codim}_{\mathfrak{g}} \bar{O}$ in such a way that $f^{-1}(0) = \bar{O}$. By the argument above the embedding $X \rightarrow \mathbf{C}^{2n+r}$ is identified with the embedding $\bar{O} \rightarrow \mathfrak{g}$. Recall that we have $\sum a_i = n + r$. As $a_i > 1$ for each i , we have $2r \leq n + r$; hence $r \leq n$. Note that $\dim \mathfrak{g} = 2n + r$ and $\text{Codim}_{\mathfrak{g}} \bar{O} = r$. Thus we have

$$\dim V \leq 1/3 \cdot \dim \mathfrak{g}.$$

When $\mathfrak{g}$ is exceptional, there is no non-trivial irreducible G -representation that satisfies this inequality. Thus V is a direct sum of trivial G -representations. In particular, $\bar{O}$ is the common zeros of some adjoint invariant polynomials. On the other hand, N is the common zeros of *all* adjoint invariant polynomials. Hence $\bar{O}$ contains N . As all nilpotent orbits are contained in N , $\bar{O}$ is contained in N . Therefore $\bar{O} = N$.

REFERENCES

- [1] Y. Namikawa, *On the structure of homogeneous symplectic varieties of complete intersection*, arXiv: 1201.5444, to appear in Invent. Math.

Non-normal very ample integral polytopes

大阪大学

東谷 章弘 (Akihiro Higashitani)

代数幾何学城崎シンポジウム (於 兵庫県立城崎大会議室)

2012年 10月22日 ~ 10月26日

1. DEFINITIONS

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$: an integral polytope of dimension n
 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \{(\alpha, 1) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha \in \mathcal{P}\} \cap \mathbb{Z}^{N+1}$

- We say that $\mathcal{P}$ is **normal** if $\mathcal{P}$ satisfies

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}.$$

- We say that $\mathcal{P}$ is **very ample** if $\mathcal{P}$ satisfies

$$|(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}| < \infty.$$

the elements of $(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$: the **holes** of $\mathcal{P}$
 Note : “normal $\Rightarrow$ very ample”

For simplicity, we assume

$$N = n \text{ and } \mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Then

$\mathcal{P}$ is normal (resp. very ample) $\iff$

$\mathcal{P}$ satisfies (*) for **all** $m \geq 1$ (resp. for **sufficiently large** m) :

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n, \\ (*) \quad & \exists \alpha_1, \dots, \exists \alpha_m \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n \text{ s.t.} \\ & \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m. \end{aligned}$$

♣ $\mathcal{P}$ is called **k-normal** if $\mathcal{P}$ satisfies (*) for all $m \geq k$.

2. BACKGROUNDS

From Commutative Algebra

K : field

$\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$: affine semigroups

- $K[\mathcal{P}] = K[\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}], \overline{K[\mathcal{P}]} = K[\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{n+1}]$:
affine semigroup graded K -algebras

$\implies \overline{K[\mathcal{P}]}$ is the **normalization** of $K[\mathcal{P}]$.

- $K[\mathcal{P}]$ and $\overline{K[\mathcal{P}]}$ are graded by grading $\deg X^\alpha = i$,
where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, i) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$.
- $\mathcal{P}$ is normal (resp. very ample) $\iff$
 $K[\mathcal{P}]$ (resp. m^k) is generated by degree one elements
(resp. for $k \gg 0$, where $m = K[\mathcal{P}]_+$).

From Algebraic Geometry

X : toric variety of dim n / K , L : ample line bundle on X
 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$: the corresponding integral polytope to (X, L)
 Then

$$\begin{aligned} H^0(X, L) &\cong \bigoplus_{v \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n} K e_v \\ R(X, L) &:= \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, L^{\otimes i}) \cong \overline{K[\mathcal{P}]} \end{aligned}$$

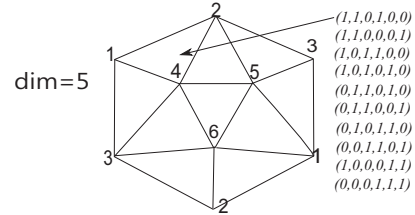
- $\mathcal{P}$ is normal $\iff L$ is *normally generated*
(in the sense of Mumford)
- $\mathcal{P}$ is very ample $\iff L$ is very ample

3. EXAMPLES

Our main interest is the existence of

**non-normal very ample
integral polytopes !!**

EXAMPLE (Bruns–Gubeladze ’02)



◦ non-normal : $(1, 1, 1, 1, 1) =$

$$1/2((1, 1, 0, 1, 0, 0) + (0, 1, 1, 0, 1, 0) + (0, 0, 1, 1, 0, 1) + (1, 0, 0, 0, 1, 1))$$

◦ very ample ; $(1, 1, 1, 1, 1) + (1, 1, 0, 1, 0, 0) =$

$$(1, 0, 1, 1, 0, 0) + (0, 1, 0, 1, 1, 0) + (1, 1, 0, 0, 0, 1) \text{ and so on...}$$

◦ the number of holes = 1

EXAMPLE (Bruns–Gubeladze ’09)

$$\text{conv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \dim = 3,$$

$$\circ (1, 1, 4) = \frac{1}{2}((0, 0, 1) + (1, 0, 2) + (0, 1, 3) + (1, 1, 2))$$

$$\circ (1, 1, 4) + (0, 0, 0) = (0, 0, 1) + (0, 0, 1) + (1, 1, 2) \dots\dots$$

◦ the number of holes = 1

REMARK (Ogata ’11)

In [3], infinitely many non-normal very ample integral polytopes of dim 3 are constructed.

4. MAIN RESULT

How about higher dimensions ?

Theorem

Let n and h be integers with $n \geq 3$ and $h \geq 1$. Then there exists a non-normal very ample integral polytope of dimension n having exactly h holes.

REMARK (Katthän ’12)

$\mathcal{P}$: non-normal very ample integral polytope

$\implies K[\mathcal{P}]$ is **NEVER** Cohen–Macaulay !!

REFERENCE

- [1] W. Bruns and J. Gubeladze, “Polytopes, rings and K-theory”, Springer–Verlag, Heidelberg, 2009.
- [2] D. Cox, J. Little and H. Schenck, “Toric varieties”, American Mathematical Society, 2011.
- [3] S. Ogata, Very ample but not normal lattice polytopes, to appear in *Beiträge Algebra Geom.*, (2011)

Example of Weierstrass semigroups of double covering type

Kenta Watanabe. Supervisor: Sampei Usui

Dept. of Math., Osaka Univ., Japan. u390547e@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

1 Numerical semigroup

We call a subsemigroup H of the monoid $\mathbb{N}_0$ consisting of non-negative integers a **numerical semigroup** if $\mathbb{N}_0 \setminus H$ is a finite set. The genus $g(H)$ of a numerical semigroup H is defined by the cardinality of the set $\mathbb{N}_0 \setminus H$.

Example 1. $H = \langle 3, 4 \rangle$ or $\langle 3, 5, 7 \rangle \implies g(H) = 3$.

2 Weierstrass semigroup

We work over the complex number field $\mathbb{C}$. A curve means a smooth projective curve. For a curve C and a point P on C , we call a non-negative integer $n \in \mathbb{N}_0$ a **gap** if there is no meromorphic function which is holomorphic on $C \setminus \{P\}$ and has a pole of order n at P .

Fact 1. For the set $G(P)$ consisting of gaps at a point P on a curve C , the set $\mathbb{N}_0 \setminus G(P)$ forms a numerical semigroup.

We call the numerical semigroup $\mathbb{N}_0 \setminus G(P)$ a **Weierstrass semigroup** and denote it by $H(P)$. For instance, both of two semigroups in Example 1 are Weierstrass semigroups of a plane pointed curve of degree 4.

3 Plane curve case

Theorem 3.1 (E. Kang, S. J. Kim). Let C be a plane curve of degree d , and let $P \in C$. then, we have the following results.

- (i) If $I_P(C \cap T_P(C)) = d$, then $H(P) = \langle d, d-1 \rangle$.
- (ii) If $I_P(C \cap T_P(C)) = d-1$, then

$$H(P) = \langle \{d-1 + r(d-2)\}_{0 \leq r \leq d-2} \rangle,$$

where $T_R(C)$ is the tangent line at R on a curve C , and $I_Q(C_1 \cap C_2)$ is the intersection multiplicity at an intersection point Q of two curves C_1 and C_2 .

It is well known that, in the case where C is a smooth plane curve of degree d , if the intersection multiplicity at P of C and the tangent line $T_P(C)$ at P on C is equal to d , $d-1$, or $d-2$, then the Weierstrass semigroup $H(P)$ of (C, P) is uniquely determined. Moreover, if $d \geq 7$, then $H(P)$ is completely determined by Komeda and Kim.

4 Weierstrass semigroups of double covering of curves

For a numerical semigroup H , we set $d_2(H) = \{\frac{h}{2} \mid h \in H \text{ is even}\}$.

Fact 2. $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ is a double covering of curves with a ramification point $\tilde{P} \implies d_2(H(\tilde{P})) = H(\pi(\tilde{P}))$.

We call a numerical semigroup H the **double covering type** if there is a double cover of curves $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ with $H = H(\tilde{P})$ as in Fact 2.

Question. For a pointed curve (C, P) , what is a condition for a numerical semigroup $\tilde{H}$ with $d_2(\tilde{H}) = H(P)$ to be the double covering type?

In general, it is difficult to consider this problem. However, if the genus of a pointed curve (C, P) is sufficiently small, then the following result is known.

Theorem 4.2 (Komeda). Let $\tilde{H}$ be a numerical semigroup of genus ≤ 9 with $g(d_2(\tilde{H})) = 3$. Then $\tilde{H}$ is the double covering type.

5 Main results

Theorem 5.1 Let X be an algebraic K3 surface which is given by a double cover $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Let C be a smooth projective curve on X with $\pi^{-1}\pi(C) = C$ which is not the ramification divisor of π , and let P be a ramification point of $\pi|_C : C \rightarrow \pi(C)$. Assume that the curve $\pi(C)$ is a plane curve of degree $d \geq 4$. Then, we have the following results.

- (i) If $I_{\pi(P)}(T_{\pi(P)}(\pi(C)) \cap \pi(C)) = d$, then

$$H(P) = 2H(\pi(P)) + (6d-1)\mathbb{N}_0.$$

- (ii) Assume that $I_{\pi(P)}(T_{\pi(P)}(\pi(C)) \cap \pi(C)) = d-1$ and let

$$T_{\pi(P)}(\pi(C))|_{\pi(C)} = (d-1)\pi(P) + Q.$$

If $I_Q(T_Q(\pi(C)) \cap \pi(C)) = d$, then

$$\begin{aligned} H(P) = & 2H(\pi(P)) + (8d-9)\mathbb{N}_0 + (10d-13)\mathbb{N}_0 \\ & + (8d-9+2r(d-2))\mathbb{N}_0 \\ & + (2(d-1)^2+5)\mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

In theorem 5.1 (ii), in the case where $d = 4$ and $I_Q(T_Q(\pi(C)) \cap \pi(C)) = 4$, the Weierstrass semigroup $H(P)$ is classified as follows.

n	$H(P)$
23	$2H(\pi(P)) + 23\mathbb{N}_0$
27	$2H(\pi(P)) + 27\mathbb{N}_0 + 31\mathbb{N}_0 + 35\mathbb{N}_0,$ $2H(\pi(P)) + 27\mathbb{N}_0 + 29\mathbb{N}_0$
29	$2H(\pi(P)) + 29\mathbb{N}_0 + 31\mathbb{N}_0 + 33\mathbb{N}_0$

References

- [1] E. Kang, S. J. Kim, A Weierstrass semigroup at a pair of inflection points on a smooth plane curve, Bull Korean Math. Soc. 44, No. 2, pp. 369-378 (2007).
- [2] Komeda, J., On Weierstrass semigroups of double coverings of genus three curves, Semigroup Forum 83, 479-488 (2011).
- [3] Komeda, J., S. J. Kim, The Weierstrass semigroups on the quotient curve of a plane curve of degree ≥ 7 by an involution, J. Algebra, 322, 137-152 (2009).
- [4] Torres, F., Weierstrass points and double coverings of curves with application: Symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups, Manuscr. Math. 83, 39-58 (1994).

On Fano fourfolds with nef bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$ and $\rho(X) \geq 2$

Yasutake Kazunori (Kyushu University)

Abstract

In this poster, I explain about the structure of Fano fourfolds whose the second exterior power of tangent bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$ is nef and Picard number $\rho(X)$ is at least 2.

Definition of nef vector bundle

X : smooth proj. var. / $\mathbb{C}$, $\mathcal{E}$: vector bundle on X ,
 $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \rightarrow X$: projectivization, $\xi_{\mathcal{E}}$: tautol. div.
 $(\diamond) \mathcal{E} : \text{nef (ample)} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \xi_{\mathcal{E}} : \text{nef (ample)}$

Known results

One of a generalization of Mori's Theorem (Hartshorne conjecture), K.Cho and E.Sato gave a characterization of smooth quadric as a variety with ample bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$.

Ample case, Cho-Sato [CS]

X sm. proj. variety. with **ample** vect. bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$
 $\Rightarrow X \cong \mathbb{P}^n$ or Q_n : smooth quadric hypersurface

As a further generalization of this theorem, F.Campana and T.Peternell classified threefolds with nef bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$.

Nef case in 3 dim., Campana-Peternell [CP1]

X sm. proj. **threefold** with **nef** vect. bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$
 $\Rightarrow$ Either $\mathcal{T}_X$: nef, the blowing up of $\mathbb{P}^3$ at a point.
 or del Pezzo threefold of degree ≥ 2 with $\rho(X) = 1$

Problem

Classify smooth projective fourfolds with nef vector bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$.

Fourfolds with nef tangent bundle are already classified by F.Campana-T.Peternell, N.Mok and J.-M. Hwang. We review the classification in Fano case.

Fano fourfolds with $\mathcal{T}_X$ nef, [CP2], [M] [H]

X : smooth **Fano fourfold** with nef tangent bundle $\mathcal{T}_X$.
 Then X is one of the following:
 $\mathbb{P}^4$, Q_4 , $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$, $Q_3 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$,
 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}) \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,
 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(\mathcal{N})$ with null correlation bundle $\mathcal{N}$.

General results

In the case where $\kappa(X) = 0$, we can classify in all dimension.

Kodaira dimension $\kappa(X) = 0$, Theorem1

X : smooth projective variety of $\kappa(X) = 0$.
 Then the following conditions are equivalent:

1. $\Lambda^r \mathcal{T}_X$ is nef for $1 \leq r \leq n - 1$;
2. $\mathcal{T}_X$ is nef;
3. There is an étale covering $\nu : A \rightarrow X$ from Abelian variety.

Proof. Nefness of $\Lambda^r \mathcal{T}_X$ implies that X has the flat tangent bundle. The theorem follows from the result of Yau $\square$

Next, we consider the case where X is Fano and obtained by the blowing up of a smooth variety along a smooth subvariety. This proposition plays an important role in my study.

Blowing up, Proposition2

X : blowing up of smooth variety Y of dimension n along smooth subvariety Z . If X is **Fano** and $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$ is nef $\Rightarrow X$ is the blowing up of $\mathbb{P}^n$ at a point.

Main theorem

As a first step of classification of the case where $\kappa(X) = -\infty$, we consider Fano fourfolds with $\rho(X) \geq 2$.

Fano fourfolds with $\rho(X) \geq 2$, Theorem3

X : smooth **Fano fourfold** with $\rho(X) \geq 2$ / $\mathbb{C}$.
 If $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$ is nef and $\mathcal{T}_X$ is not nef
 $\Rightarrow X$ is the blowing up of $\mathbb{P}^4$ at a point.

Proof. Using results about extremal contractions on smooth fourfolds $\square$

The proof of above theorem yields the following result.

Corollary

X : smooth Fano fourfold with $\rho(X) \geq 2$.
 If $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$ is nef on every extremal rational curve in X
 $\Rightarrow \Lambda^2 \mathcal{T}_X$ is nef.

References

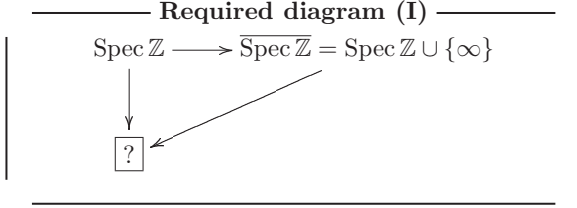
- [CP1] F. Campana and T. Peternell, *On the second exterior power of tangent bundles of threefolds*, Compos. Math. 83 no.3, (1992), 329–346.
- [CP2] F. Campana and T. Peternell, *4-folds with numerically effective tangent bundles and second Betti numbers greater than one*, Manuscripta Math. 79 (1993), 225–238.
- [CS] K. Cho and E. Sato, *Smooth projective varieties with the ample vector bundle $\Lambda^2 \mathcal{T}_X$ in any characteristic*, J. Math. Kyoto Univ. 35 (1995), 1–33.
- [H] J.-M. Hwang, *Rigidity of rational homogeneous spaces*, Proc. of ICM. (2006), 613–626.
- [M] N. Mok, *On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents*, Trans. of A.M.S. 357 no.7 (2002), 2639–2658.
- [Y] K. Yasutake, *Fano fourfolds with Picard number greater than two whose the second exterior power of tangent bundles are numerically effective*, preprint.

COMPACTIFYING $\text{Spec } \mathbb{Z}$

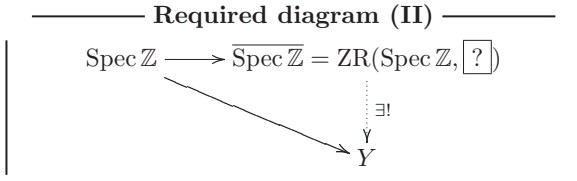
Satoshi Takagi / 高木 聡
Osaka City Univ. (OCAMI)

1 Motivation

We want a category in which we can compactify $\text{Spec } \mathbb{Z}$:



We want $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ to be the *Zariski-Riemann space* $\text{ZR}(\text{Spec } \mathbb{Z}, \boxed{?})$ of $\text{Spec } \mathbb{Z}$, namely to have the universal property as follows: $\text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow \boxed{?}$ is proper, and if $\text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow Y$ is a morphism over $\boxed{?}$ and $Y \rightarrow \boxed{?}$ is proper, then there should exist a unique morphism $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}} \rightarrow Y$:



However, these diagrams cannot be obtained in the category **(Sch)** of schemes:

- (1) $\text{Spec } \mathbb{Z}$ is the initial object in **(Sch)**, hence we don't have any object $\boxed{?}$ under $\text{Spec } \mathbb{Z}$.
- (2) The infinite place ∞ is not a prime ideal.

Several attempts have been made in the past (Haran, Durov, ...), but have not reached the characterization of $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ by the universal property.

Therefore, we must consider an algebraic type which generalizes that of commutative rings; this is what we call 'convexoid rings', as is defined below.

2 Definitions

An algebraic type τ is *commutative*, if any m -ary operator φ and n -ary operator ψ commutes:

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, \psi(x_{m1}, \dots, x_{mn})) \\ = \psi(\varphi(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, \varphi(x_{1n}, \dots, x_{mn})) \end{aligned}$$

This enables us to give a τ -algebra structure on Hom sets, and hence to define tensor products $\otimes$.

A *convexoid* is a quadruple $(M, \boxplus, -, 0)$ which satisfies:

- (1) M is a set, $0 \in M$, $\boxplus$ (resp. $-$) is a binary (resp. unary) operator on M ,

- (2) The algebraic structure on M is commutative in the above sense, and
- (3) $a \boxplus b = b \boxplus a$, $(-a) \boxplus a = 0$.

A *convexoid ring* is a commutative monoid object with respect to $\otimes$ in the category of convexoids.

Example 2.0.1. $\mathbf{D}\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| \leq 1\}$ is a convexoid ring, by setting $a \boxplus b = (a + b)/2$. Note that $\boxplus$ is **not associative**.

We can define 'convexoid schemes', just as in the way of usual schemes; however, this is **NOT sufficient** for our purpose.

If R is a convexoid ring, then $\gamma_R = 1 \boxplus 0$ is the *fundamental constant*.

– A ring is a localization of a convexoid –

$$\begin{aligned} R[\gamma_R^{-1}] \text{ becomes a ring, by setting} \\ a + b = \gamma_R^{-1}(a \boxplus b). \end{aligned}$$

A morphism $A \rightarrow B$ of convexoid rings is an *equivalence*, if $\gamma_A B = \gamma_B B$ and $A[\gamma_A^{-1}] \rightarrow B[\gamma_B^{-1}]$ is a ring isomorphism.

A *convexoid scheme* is a (multiplicative) **monoid**-valued space X which is locally isomorphic to the spectrum of some convexoid ring, and transition maps are **equivalences**.

3 Results

Let R_0 be the initial object in the category of convexoid rings. This is a submonoid of the polynomial ring $\mathbb{Z}[\gamma]$, and hence equipped with a canonical grading. We can define a convexoid scheme $\text{Proj } R_0$.

Valuation convexoid rings can be defined just like valuation rings. A *proper morphism* of convexoid schemes is defined by the valuative criterion.

Main theorem(T-) [1]

$$\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}} = \text{ZR}(\text{Spec } \mathbb{Z}, \text{Proj } R_0).$$

This is realized in the **pro-category** of convexoid schemes.

Remark 3.0.2. • The infinity place canonically appears, **without using the terminology of norms**. This can be shown by proving a generalization of Ostrowski's theorem.

- The above theorem can be generalized to any ring of algebraic integers $\mathcal{O}_K$.
- A locally free sheaf on $\overline{\text{Spec } \mathcal{O}_K}$ is, **by definition** a projective $\mathcal{O}_K$ -module equipped with a norm satisfying some finiteness property.

References

- [1] Takagi, S.: *Compactifying $\text{Spec } \mathbb{Z}$* , arXiv: math.AG/1203.4914

GRK 1463

ANALYSIS, GEOMETRIE
UND STRINGTHEORIE

MODULI SPACES OF TAUTOLOGICAL SHEAVES ON DEGREE TWO HILBERT SCHEMES

Malte Wandel
Leibniz Universität Hannover, Institut für Algebraische Geometrie



Leibniz
Universität
Hannover

Introduction

Since the proof of the Calabi conjecture by Yau in '77 the classification of compact Ricci-flat Kähler manifolds has made big progress. By the theorems of de Rham, Berger and Beauville every such manifold is – up to finite covering – isomorphic to a product of three kinds of basic building blocks: complex tori, so-called strict Calabi-Yau manifolds and hyperkähler manifolds. Whereas for strict Calabi-Yaus there is a vast range of examples, the situation in the hyperkähler case is much different:

Hyperkähler/IHS manifolds

Definition. A compact complex manifold X is called *hyperkähler manifold* or *irreducible holomorphic symplectic manifold (IHS)* if the following conditions are satisfied:

- $\pi_1(X) = 0$ and
- $H^2(X) = \mathbb{C} \cdot \omega$, where ω is a nowhere degenerate closed holomorphic two-form (also called holomorphic symplectic form).

There is a quite short list of known examples:

- Moduli spaces of sheaves on K3 surfaces. *This includes K3 surfaces and Hilbert schemes of points on these surfaces.*
- Two sporadic examples by O'Grady. *They as well are constructed from moduli spaces of sheaves on K3 surfaces.*
- Generalized Kummer Varieties.

Since the list of examples is this short one big aim of mathematicians working with holomorphic symplectic varieties is to construct new examples. As can be seen above, the starting point for most of the examples are moduli spaces of sheaves on a K3 surface. Such a surface is an IHS itself. So we end up with the following central question:

Questions

Let X be a projective IHS manifold. Let M be a moduli space of sheaves on X .
Does M admit a symplectic structure?
Or even:
Does M admit a symplectic resolution being again an IHS manifold?

Almost nothing is known in this direction and, as it seems, it is very difficult to answer this question in this generality. Therefore we pick for our IHS manifold one of the most basic examples, the Hilbert square $X^{[2]}$ of a projective K3 surface X . Then let us formulate a short list of seemingly more achievable aims:

Aims

- Find examples of stable sheaves on $X^{[2]}$.
- Find conditions such that the moduli spaces of these sheaves are smooth.
- Construct symplectic structures on these moduli spaces.

Tautological Sheaves 1 - Stability

The theory of moduli spaces of sheaves on K3 surfaces is very well understood. It is based on the fundamental paper on the symplectic structure and smoothness of these spaces by Mukai (cf. [Muk]). The central result is the following:

Theorem (Mukai). *Let X be a projective K3 surface. Then the moduli space of stable sheaves with fixed numerical data is a smooth quasi-projective variety admitting a symplectic structure.*

If one also considers semistable sheaves then the moduli spaces become compact but often singular. There is a complete classification of the possible

cases and of possible symplectic resolutions due to the work of Yoshioka, Lehn, O'Grady, Zois and many others.
The idea now is to use these results and to transfer them to the Hilbert square. There is a big class of sheaves on the Hilbert square of a surface which is quite well understood: the so-called tautological sheaves.

Tautological Sheaves

Let X be a projective K3 surface and denote by $X^{[2]}$ its Hilbert square. It consists of zero dimensional length two subschemes $\xi \subset X$. On the product $X \times X^{[2]}$ there exists a universal family $\Xi := \{(x, \xi) | x \in \xi\}$. Let $p: X \times X^{[2]} \rightarrow X$ and $q: X \times X^{[2]} \rightarrow X^{[2]}$ denote the first and second projection and let $\mathcal{F}$ be a sheaf on X . We set $\mathcal{F}^{[2]} := q_*(\mathcal{O}_\Xi \otimes p^*\mathcal{F})$. Since $q|_\Xi: \Xi \rightarrow X^{[2]}$ is two-to-one this is a sheaf on $X^{[2]}$ and we will call it *the tautological sheaf associated with $\mathcal{F}$* . Note that if $\mathcal{F}$ is a vector bundle then $\mathcal{F}^{[2]}$ is again a vector bundle where the rank of $\mathcal{F}^{[2]}$ is twice the rank of $\mathcal{F}$.

These tautological objects were studied by several people with very different interests like Ellingsrud, Göttsche and Lehn, Boissière and Nieper-Wikirchen, Danila, Scala, and Krug. The most useful results for us concern the cohomology and extension groups of tautological sheaves.

Theorem (Scala ([Sca]), Krug ([Kru])). *Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ be sheaves on a projective surface X . Then we have the following formulas for the cohomology and the extension groups of the associated tautological sheaves:*

$$\begin{aligned} H^*(X^{[2]}, \mathcal{F}^{[2]}) &\cong H^*(X, \mathcal{F}) \otimes H^*(X, \mathcal{O}_X) \\ &\text{and} \\ \text{Ext}_{X^{[2]}}^*(\mathcal{F}^{[2]}, \mathcal{G}^{[2]}) &\cong \text{Ext}_X^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes H^*(X, \mathcal{O}_X) \\ &\quad \oplus \\ &\quad H^*(X, \mathcal{F}^\vee) \otimes H^*(X, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

On a K3 surface a stable sheaf $\mathcal{F}$ always satisfies $h^2(\mathcal{F}) \cdot h^0(\mathcal{F}) = 0$ since otherwise the structure sheaf would be a destabilizing quotient or subbundle. Thus we get the following consequence from the theorem:

Corollary. *Let $\mathcal{F}$ be a stable sheaf on a projective K3 surface. Then the associated tautological sheaf is simple.*

Now this is a first hint that the tautological sheaf associated with a stable sheaf could be again stable. The first result in this direction was proven by Schlickeiw (cf. [Sch]). I could prove an extensive generalisation of it (cf. [Wan]):

Stability of Tautological Sheaves

Theorem. *Let (X, H) be a polarized K3 surface and let $\mathcal{F}$ be either a torsion free rank one sheaf or a μ_H -stable rank two vector bundle on X . Assume $c_1(\mathcal{F}) \neq 0$. Then $\mathcal{F}^{[2]}$ is a rank two (rank four resp.) μ_{H_X} -stable sheaf where H_X is a carefully chosen polarization on $X^{[2]}$ depending on H .*

Example. We explicitly excluded the case $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. In fact, for the associated rank two tautological bundle $\mathcal{O}_{X^{[2]}}^{[2]}$ we can find a destabilizing subbundle, namely the trivial bundle:

$$\mathcal{O}_{X^{[2]}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X^{[2]}}^{[2]}.$$

Tautological Sheaves 2 - Deformations

So we have found a big number of examples of stable sheaves on the Hilbert square. We can therefore consider the moduli space of these sheaves. The most important question then would be whether these spaces are smooth manifolds or singular spaces. In order to answer this question we have to study the deformation theory of tautological sheaves. Therefore we fix some stable sheaf $\mathcal{F}$ on X such that $\mathcal{F}^{[2]}$ is again stable. We may assume that $h^2(\mathcal{F}) = 0$. Again, the tangent space of the moduli space at the point corresponding to $\mathcal{F}^{[2]}$ is naturally isomorphic to the group of infinitesimal deformations of $\mathcal{F}^{[2]}$ which is given by the first extension group. Looking at Krug's formula () we see

$$\text{Ext}_{X^{[2]}}^1(\mathcal{F}^{[2]}, \mathcal{F}^{[2]}) \cong \text{Ext}_X^1(\mathcal{F}^{[2]}, \mathcal{F}^{[2]}) \oplus H^1(X, \mathcal{F})^\vee \otimes H^0(X, \mathcal{F}). \quad (1)$$

The first summand is just given by the infinitesimal deformations which come from the sheaf $\mathcal{F}$ on the surface and will therefore be called *surface-deformations*. Let us denote the second summand by the *additional deformations*. One can immediately deduce:

Surface-Deformations of Tautological Sheaves

Proposition. *The deformations of $\mathcal{F}^{[2]}$ coming from the surface are unobstructed. We therefore have an embedding of the moduli space of stable sheaves on X into the corresponding moduli space of stable sheaves on the Hilbert square.*

Corollary. *If in addition $h^1(X, \mathcal{F}) = 0$ we have an isomorphism of the moduli space of stable sheaves on X with a connected component of the corresponding moduli space of stable sheaves on $X^{[2]}$.*

Example. We can find an explicit example of a sheaf where the additional deformations are not unobstructed, i.e. the moduli space is singular in the point corresponding to this sheaf. The idea is the following: First of all find a sheaf $\mathcal{F}$ on X satisfying $h^0(\mathcal{F}) \cdot h^1(\mathcal{F}) \neq 0$ and $\dim \text{Ext}_X^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \neq 0$. Now, if $\mathcal{F}$ has a deformation $e \in \text{Ext}_X^1(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ such that some global section $\phi \in H^0(X, \mathcal{F})$ does not deform with the sheaf then the dimension of the tangent space $\text{Ext}_{X^{[2]}}^1(\mathcal{F}^{[2]}, \mathcal{F}^{[2]})$ has to drop when we move in the direction of the deformation $(e, \psi \otimes \phi)$ (where ψ is some nontrivial element in $H^1(X, \mathcal{F})^\vee$) and this deformation has a nontrivial obstruction.

So how to find such a sheaf? The easiest example is a tensor product of an ideal sheaf and a line bundle. Let X be an elliptically fibred K3 surface with fibre class E and section C . Following Donagi and Morrison (cf. [DM]) the linear system of $L := C + kE$ for $k \geq 2$ has C as a base component. Furthermore let $p \in C$ be a point, denote by $\mathcal{I}_p$ its ideal sheaf and set $\mathcal{F} := \mathcal{I}_p \otimes L$. Since p is a base point of L we have $H^0(\mathcal{F}) \cong H^0(L)$. Now the deformations of $\mathcal{F}$ correspond to deformations of the point p inside X . Thus if we deform $\mathcal{F}$ in a direction not tangent to C , p will not be longer a base point and the dimension of the space of global sections will drop.

Outlook

The most urgent task will be to study the behaviour of the additional deformations in broader generality. Is the defect described in the example above the only case where singularities may occur?

Suppose one can find examples where the additional deformations are unobstructed. What can be said about the whole moduli space in these cases. Can one find an explicit description of the deformed tautological sheaves? So far, we did not address the question for symplectic structures on the moduli spaces. As described in [Bot] and in Chapter 10 of [HL] the Atiyah class of a sheaf may play a central role in the construction of symplectic forms. Hence a good description of the Atiyah class of tautological bundles would be desirable. I could accomplish partial results in this direction.

References

- [Bot] F. Bottacin, *Atiyah Classes and Closed Forms on Moduli Spaces of Sheaves*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. 121, 165-177 (2009).
- [DM] R. Donagi and D. Morrison, *Linear Systems on K3-Sections*, Journal of Differential Geometry 29, 49-64 (1989).
- [HL] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Aspects of Mathematics 31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1997.
- [Kru] A. Krug, *Extension groups of tautological sheaves on Hilbert schemes*, arXiv:1111.4263v1 (2011).
- [Muk] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Inventiones mathematicae 77, 101-116 (1984).
- [Sch] U. Schlickeiw, *Stability of tautological vector bundles on Hilbert squares of surfaces*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. 124 (2010).
- [Sca] L. Scala, *Some remarks on tautological sheaves on Hilbert schemes of points on a surface*, Geom. Dedicata, Vol. 139, no 1, 313-329 (2009).
- [Wan] M. Wandel, *Stability of tautological bundles on the degree two Hilbert scheme of surfaces*, arXiv:1202.6528 (2012).