



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 第9回数学総合若手研究集会                                                                     |
| Author(s)        | 陶山, 大輔; 伊藤, 翼; 黒田, 匡迪 他                                                           |
| Citation         | Hokkaido University technical report series in mathematics, 157, i, 1-vii, 336    |
| Issue Date       | 2013-01-30                                                                        |
| DOI              | <a href="https://doi.org/10.14943/81519">https://doi.org/10.14943/81519</a>       |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/68081">https://hdl.handle.net/2115/68081</a> |
| Type             | departmental bulletin paper                                                       |
| File Information | tech157.pdf                                                                       |



第 9 回数学総合若手研究集会  
～多分野間の交流による発展・発見を目指して～  
The 9th Mathematics Conference for Young Researchers  
– MCYR9 –

世話人

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| 陶山 大輔 | 伊藤 翼  | 黒田 匡迪 | 後藤 良彰 |
| 寺西 功哲 | 二口伸一郎 | 布田 徹  | 宮川 尚紀 |

札幌, 2013

Series #157. February, 2013

HOKKAIDO UNIVERSITY  
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #135 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, 第 33 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 72 pages. 2008.
- #136 T. Sakajo, Y. Nishiura, H. Suito, K. Nishinari, M. Nagayama and T. Amemiya, JST さきがけ研究集会『環境問題における数理の可能性』, 83 pages. 2008.
- #137 H. Hida, T. Ito, H. Katsurada, K. Kitagawa (transcribed by T. Suda), Y. Taguchi, A. Murase and A. Yamagami. K. Arai, T. Hiraoka, K. Itakura, T. Kasio, H. Kawamura, I. Kimura, S. Mochizuki, M. Murata and T. Okazaki, 整数論札幌夏の学校, 201 pages. 2008.
- #138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.
- #139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.
- #140 T. Suda, Y. Umeta, K. Kasai, M. Kasedou, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.
- #141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.
- #142 K. Kasai, H. Kuroda, T. Nagai, K. Nishi, S. Tsujie and T. Yamaguchi, 第 6 回数学総合若手研究集会, 267 pages. 2010.
- #143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.
- #144 Liang Chen, Doctoral thesis “On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space”, 79 pages. 2010.
- #145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.
- #146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.
- #147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.
- #148 T. Fukunaga, N. Nakashima, A. Sekisaka, T. Sugai, K. Takasao and K. Umeta, 第 7 回数学総合若手研究集会, 280 pages. 2011.
- #149 M. Kasedou, Doctoral thesis “Differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space”, 69 pages. 2011.
- #150 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.
- #151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第 8 回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.
- #152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第 20 回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.
- #153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 81 pages. 2012.
- #154 N. Hu, Doctoral thesis “Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces”, 69 pages. 2012.
- #155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.
- #156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第 21 回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.

# はじめに

「第9回数学総合若手研究集会～多分野間の交流による発展・発見を目指して～」は、大学院生および若手研究者により運営される研究集会です。

本研究集会は、数学に関わる様々な分野の若手研究者に「交流と発見の場」を提供することを目的として行われております。多くの学問分野が数学的手法を取り入れることに関心を持つ今、数学を軸とした多分野間の交流による発展・発見を目指してこのような場を設けることには少なからず意義があると信じております。

本研究集会では、数学はもちろんのこと、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学など、幅広い分野の若手研究者の方々がご講演を行います。

講演は、口頭発表であるシングルセッション(60分)とパラレルセッション(30分)、そしてポスター発表からなります。シングルセッションでは、全ての分野の参加者に聴講して頂けるように、講演者の方には出来るだけ入門的な内容、特に問題の背景、動機から話して頂くようお願いしております。パラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分けて講演して頂きますので、より専門的な内容の講演をお聴きになることが出来ます。

このテクニカルレポート集は講演者の方々から事前に集めた原稿を印刷したものです。本研究集会の目的に合わせ、講演者の方には他分野の方々にも分かり易いように、入門的な事項を含めて書いて頂きました。参加者の皆様が講演をより深く理解し、様々な分野に渡った交流による発展・発見を促し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

なお、この研究集会は

- 北海道大学大学院理学研究院数学部門

の援助を受けて開催されます。

最後になりましたが、開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様、
- 北大数学教室の先生方、
- 数学事務の方々、
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。皆様のおかげで今年度も無事に本研究集会を開催することが出来ました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

2013年3月

MCYR9 世話人

|      |       |      |      |
|------|-------|------|------|
| 陶山大輔 | 伊藤翼   | 黒田匡迪 | 後藤良彰 |
| 寺西功哲 | 二口伸一郎 | 布田徹  | 宮川尚紀 |

# 第9回 数学総合若手研究集会

～多分野間の交流による発展・発見を目指して～

The 9th Mathematics Conference for Young Researchers

日時：2013年3月4日(月)～3月7日(木)

場所：北海道大学 学術交流会館

A：小講堂 (シングル・パラレル会場)      B：第2会議室 (パラレル会場)  
C：第3会議室 (パラレル会場)              D：第4会議室 (パラレル会場)  
E：第1会議室 (ポスター会場・休憩所)

URL: <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2013/>

## ● シングルセッション (A)

|                                                                                         |                      |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----|
| 梅田 耕平 (Kohei UMETA)                                                                     | 北海道大学大学院数学専攻         |    |
| 多変数 Laplace 超関数について .....                                                               |                      | 3  |
| 木村 恵二 (Keiji KIMURA)                                                                    | 京都大学数理解析研究所          |    |
| 両側境界面の回転を許容する回転球殻ブシネスク熱対流問題 .....                                                       |                      | 11 |
| 内藤 貴仁 (Takahito NAITO)                                                                  | 信州大学大学院総合工学系研究科      |    |
| 相対ループ空間におけるストリングトポロジーについて .....                                                         |                      | 19 |
| 星野 歩 (Ayumu HOSHINO)                                                                    | 香川高等専門学校             |    |
| $C, D$ 型 Macdonald 多項式の tableau 和表示 .....                                               |                      | 27 |
| 臼井 耕太 (Kouta USUI)                                                                      | 北海道大学                |    |
| 格子上の場の理論における伝搬関数のスペクトル表示について .....                                                      |                      | 35 |
| 隅田 大貴 (Daiki SUMIDA)                                                                    | 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 |    |
| Singularities of the maps associated with Milnor fibrations for mixed polynomials ..... |                      | 43 |
| 上山 健太 (Kenta UHEYAMA)                                                                   | 静岡大学創造科学技術大学院        |    |
| 非可換次数付き Gorenstein 孤立特異点について .....                                                      |                      | 51 |
| 若杉 勇太 (Yuta WAKASUGI)                                                                   | 大阪大学理学研究科            |    |
| 消散型波動方程式の解の拡散現象 .....                                                                   |                      | 59 |

## ● パラレルセッション 幾何学会場 (A, B)

|                                                           |                  |    |
|-----------------------------------------------------------|------------------|----|
| 水澤 篤彦 (Atsuhiko MIZUSAWA)                                 | 早稲田大学大学院基幹理工学研究科 |    |
| 双曲体積と関連する空間グラフの不変量 .....                                  |                  | 69 |
| 嶺山 良介 (Ryosuke MINEYAMA)                                  | 大阪大学大学院理学研究科     |    |
| タイヒミュラー空間の双正則自己同型について .....                               |                  | 73 |
| 大鳥羽 暢彦 (Nobuhiko OTOBA)                                   | 慶應義塾大学理工学研究科     |    |
| $S^2$ 上の2つの $S^2$ 束に定まる Riemann 計量について .....              |                  | 77 |
| 清水 達郎 (Tatsuro SHIMIZU)                                   | 東京大学数理科学研究科      |    |
| ホモロジー 3 球面の 1 次の有限型不変量とその correspondence に対する拡張について ..... |                  | 81 |

|                                                               |                     |     |
|---------------------------------------------------------------|---------------------|-----|
| 北澤 直樹 (Naoki KITAZAWA)                                        | 東京工業大学理工学研究科数学専攻    |     |
| Morse 理論の一般形の研究と多様体の幾何学への新たな応用                                |                     | 85  |
| 松村 真義 (Masayoshi MATSUMURA)                                   | 東京大学大学院数理科学研究科      |     |
| $C^*$ 完全群                                                     |                     | 89  |
| 佐藤 孝美 (Takami SATO)                                           | 北海道大学理学院数学専攻        |     |
| 反ド・ジッター空間内における空間的超曲面の縮閉超曲面について                                |                     | 93  |
| 鈴木 悠平 (Yuhei SUZUKI)                                          | 東京大学大学院数理科学研究科      |     |
| HAAGERUP PROPERTY について                                        |                     | 97  |
| 高岡 邦行 (Kuniyuki TAKAOKA)                                      | 早稲田大学大学院教育学研究科      |     |
| 平面閉曲線と LR 語                                                   |                     | 101 |
| 安本 真士 (Masashi YASUMOTO)                                      | 神戸大学理学研究科           |     |
| Weierstrass representation for semi-discrete minimal surfaces |                     | 105 |
| 佐藤 寛之 (Hiroyuki SATO)                                         | 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻 |     |
| 新しいリーマン多様体上の共役勾配法およびその収束性について                                 |                     | 109 |
| 野口 和範 (Kazunori NOGUCHI)                                      | 信州大学理学部             |     |
| finite category のオイラー標数とゼータ関数                                 |                     | 113 |
| Valle Cristina                                                | 首都大学東京理工学研究科        |     |
| On the Blow-Analytic Equivalence of Tribranched Plane Curves  |                     | 117 |
| 加藤 諒 (Ryo KATO)                                               | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科   |     |
| 代数的 K 理論を用いた球面の安定ホモトピー群の幾何的応用                                 |                     | 121 |
| 高橋 良輔 (Ryosuke TAKAHASHI)                                     | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科   |     |
| Kähler-Ricci flow のある種の変形とその自己相似解                             |                     | 125 |
| 十鳥 健太 (Kenta TOTTORI)                                         | 東北大学大学院理学研究科数学専攻    |     |
| ケーラー計量の空間の測地線に対応する Homogeneous Complex Monge-Ampère 方程式の解について |                     | 129 |
| 足立 真訓 (Masanori ADACHI)                                       | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科   |     |
| レビ平坦 3 次元多様体の射影埋め込み問題                                         |                     | 133 |

## ● パラレルセッション 数理科学会場 (B)

|                                                                             |                        |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----|
| 山本 健 (Ken YAMAMOTO)                                                         | 中央大学理工学部               |     |
| コインの分配におけるフラクタルパターン                                                         |                        | 139 |
| 犬伏 正信 (Masanobu INUBUSHI)                                                   | 京都大学数理解析研究所            |     |
| Orbital instability of the regeneration cycle in minimal Couette turbulence |                        | 143 |
| 寺西 功哲 (Noriaki TERANISHI)                                                   | 北海道大学大学院理学院            |     |
| Self-adjointness of the Generalized Spin Boson Hamiltonians                 |                        | 147 |
| 岸田 直子 (Naoko KISHIDA)                                                       | 奈良女子大学大学院人間文化研究科物理科学専攻 |     |
| シグナル伝達に参与するたんぱく質の時系列解析                                                      |                        | 151 |

|                                                                                                               |                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-----|
| 宮加谷 祥子 (Shoko MIYAGATANI)                                                                                     | 自由学園最高学部            |     |
| 矢野 真知子 (Machiko YANO)                                                                                         | 自由学園最高学部            |     |
| 栃木県那須地域の気象データを用いた統計モデルとデータ解析 .....                                                                            |                     | 155 |
| 飯田 溪太 (Keita IIDA)                                                                                            | 金沢大学大学院自然科学研究科      |     |
| Spontaneous Motion of a Deformed Camphor Disk .....                                                           |                     | 159 |
| 永幡 裕 (Yutaka NAGAHATA)                                                                                        | 北海道大学生命科学院          |     |
| index-two saddle に近傍おける相空間構造と大域的ダイナミクス：軌跡の終状態、始状態を分ける反応性境界 .....                                              |                     | 163 |
| <b>● パラレルセッション 代数学会場 (C, D)</b>                                                                               |                     |     |
| 小野塚 友一 (Tomokazu ONOZUKA)                                                                                     | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科   |     |
| Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数の 2 乗平均 (立命館大学の岡本卓也氏との共同研究) .....                                                  |                     | 169 |
| 齋藤 正顕 (Seiken SAITO)                                                                                          | 工学院大学               |     |
| The product over all norms of primes on a graph .....                                                         |                     | 173 |
| 坂田 実加 (Mika SAKATA)                                                                                           | 近畿大学大学院総合理工学研究科理学専攻 |     |
| 多重ベルヌーイ数の 2-order と 3-order について .....                                                                        |                     | 177 |
| 矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)                                                                                        | 九州大学大学院数理学府         |     |
| 一般の位置にある $n + 4$ 点集合の極小自由分解に関する考察 $\sim \deg X = \text{codim } X + i (i = 1, 2, 3)$ となる射影多様体について $\sim$ ..... |                     | 181 |
| 兒玉 浩尚 (Hiroataka KODAMA)                                                                                      | 近畿大学大学院総合理工学研究科理学専攻 |     |
| A congruence property of Igusa's cuspform of weight 35 .....                                                  |                     | 185 |
| 筒石 奈央 (Nao TAKESHI)                                                                                           | 津田塾大学大学院理学研究科       |     |
| 至る所 good reduction をもつ 3 次体上の楕円曲線について .....                                                                   |                     | 189 |
| 穂坂 秀昭 (Hideaki HOSAKA)                                                                                        | 東京大学大学院数理科学研究科      |     |
| 量子群の categorification .....                                                                                   |                     | 193 |
| 三内 顕義 (Akiyoshi SANNAI)                                                                                       | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科   |     |
| Dual $F$ -signature .....                                                                                     |                     | 197 |
| 三池 将隆 (Masataka MIIKE)                                                                                        | 九州大学大学院数理学府         |     |
| $\mathbb{P}^n$ 内の非正規 3 次超曲面の代数的自己同型群 .....                                                                    |                     | 201 |
| 山野井 隆晃 (Takaaki YAMANOI)                                                                                      | 北海道大学大学院理学院         |     |
| 双楕円曲面と安定性条件 .....                                                                                             |                     | 205 |
| 安東 雅訓 (Masanori ANDO)                                                                                         | 稚内北星学園大学            |     |
| 約数関数に関する $q$ -方程式 .....                                                                                       |                     | 209 |
| 小西 正秀 (Masahide KONISHI)                                                                                      | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科   |     |
| Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 .....                                                                              |                     | 213 |
| 辻栄 周平 (Shuhei TSUJIE)                                                                                         | 北海道大学大学院理学院         |     |
| 有限鏡映群の標準不変式系 .....                                                                                            |                     | 217 |

|                                     |             |     |
|-------------------------------------|-------------|-----|
| 小林 雅人 (Masato KOBAYASHI)            | 埼玉大学        |     |
| バイグラスマニアン置換の数え上げ公式                  |             | 221 |
| 加瀬 遼一 (Ryoichi KASE)                | 大阪大学情報科学研究科 |     |
| ある道代数における傾籐の post-projective 部分について |             | 225 |

## ● パラレルセッション 解析学会場 (D)

|                                                                      |                          |     |
|----------------------------------------------------------------------|--------------------------|-----|
| 相原 祐太 (Yuta AIHARA)                                                  | 北海道大学                    |     |
| Semi-Classical Asymptotics in an Abstract Bose Field Model           |                          | 231 |
| 船川 大樹 (Daiju FUNAKAWA)                                               | 北海道大学大学院理学院              |     |
| 一般化された量子電磁力学モデルの基底状態とエネルギーギャップについて                                   |                          | 235 |
| 二口 伸一郎 (Shinichiro FUTAKUCHI)                                        | 北海道大学大学院理学院              |     |
| 場の量子論に対する散乱理論の数学的構成について                                              |                          | 239 |
| 内免 大輔 (Daisuke NAIMEN)                                               | 大阪市立大学大学院理学研究科           |     |
| 不定符号の係数を持つ非線形 Neumann 境界値問題の無限個解の存在について                              |                          | 243 |
| 高埴 圭介 (Keisuke TAKASAO)                                              | 北海道大学数学専攻                |     |
| 移流項付き平均曲率流方程式の弱解の存在について                                              |                          | 247 |
| 佐々木 多希子 (Takiko SASAKI)                                              | 埼玉大学理工学研究科数理電子情報系専攻数学コース |     |
| 2 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式系の差分近似                                      |                          | 251 |
| 福田 尚広 (Naohiro FUKUDA)                                               | 筑波大学                     |     |
| ウェーブレット理論を用いた微分方程式の数値解法について                                          |                          | 255 |
| 坂田 繁洋 (Shigehiro SAKATA)                                             | 首都大学東京理工学研究科             |     |
| Poisson 積分の幾何学的評価と最大点挙動                                              |                          | 259 |
| 富澤 佑季乃 (Yukino TOMIZAWA)                                             | 中央大学大学院                  |     |
| 非自励微分方程式と Lipschitz 発展作用素                                            |                          | 263 |
| 下村 健吾 (Kengo SHIMOMURA)                                              | 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻   |     |
| overlap する反復関数系の極限集合の次元                                              |                          | 267 |
| 森田 健 (Takeshi MORITA)                                                | 大阪大学大学院情報科学研究科           |     |
| Connection problems on higher order linear $q$ -difference equations |                          | 271 |

## ● ポスターセッション (E)

|                                          |                 |     |
|------------------------------------------|-----------------|-----|
| 石丸 謙造 (Kenzo ISHIMARU)                   | 北海道大学大学院工学院     |     |
| 非軸対称核融合プラズマの 3 次元磁場分布逆解析に要求される磁気センサー数の削減 |                 | 277 |
| 今田 充洋 (Mitsuhiro IMADA)                  | 慶應義塾大学大学院理工学研究科 |     |
| 複素接触多様体とその構成法について                        |                 | 281 |
| 大森 興太郎 (Kotaro OMORI)                    | 自由学園最高学部        |     |
| 酒井 優行 (Masayuki SASAI)                   | 自由学園最高学部        |     |
| 高山 大樹 (Hiroki TAKAYAMA)                  | 自由学園最高学部        |     |
| 高橋 礼穂 (Ayaho TAKAHASHI)                  | 自由学園最高学部        |     |
| 栃木県那須地域の気象データを用いた統計モデルとデータ解析 (その 2)      |                 | 285 |

|                                                                                              |                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-----|
| 加世堂 公希 (Masaki KASEDOU)                                                                      | 北海道大学理学研究院               |     |
| ローレンツ空間の微分幾何学と特異点論 .....                                                                     |                          | 289 |
| 竹内 祐太 (Yuta TAKEUCHI)                                                                        | 信州大学大学院                  |     |
| 格子上のラプラシアンの特異点解析 .....                                                                       |                          | 293 |
| 只野 誉 (Homare TADANO)                                                                         | 大阪大学大学院理学研究科             |     |
| Dynamical construction of numerical Kähler-Einstein metric on toric del Pezzo surfaces ..... |                          | 297 |
| 反田 美香 (Mika TANDA)                                                                           | 近畿大学大学院総合理工学研究科理学専攻      |     |
| 超幾何微分方程式の Voros 係数の Borel 和 .....                                                            |                          | 301 |
| 塚本 靖之 (Yasuyuki TSUKAMOTO)                                                                   | 京都大学大学院人間環境学研究科          |     |
| 強独立な二分的部分基を持つハウスドルフ空間 .....                                                                  |                          | 305 |
| 橋口 啓伍 (Keigo HASHIGUCHI)                                                                     | 室蘭工業大学大学院数理システム工学専攻      |     |
| 2 次形式に付随する指標和について .....                                                                      |                          | 309 |
| 畑中 美帆 (Miho HATANAKA)                                                                        | 大阪市立大学理学研究科              |     |
| 擬トーリック多様体の直積分解の一意性 .....                                                                     |                          | 313 |
| 東谷 章弘 (Akihiro HIGASHITANI)                                                                  | 大阪大学大学院情報科学研究科           |     |
| Non-normal very ample polytopes .....                                                        |                          | 317 |
| 福川 由貴子 (Yukiko FUKUKAWA)                                                                     | 大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻      |     |
| カタラン数の一般化 .....                                                                              |                          | 321 |
| 富士 香奈 (Kana FUJI)                                                                            | 奈良女子大学大学院人間文化研究科複合現象科学専攻 |     |
| 生体分子の分子動力学に対する時系列解析 — 生体分子の複雑な動きの変化とその意味 — .....                                             |                          | 325 |
| Mirjana Milijevic                                                                            | 北海道大学大学院理学院              |     |
| CR submanifolds .....                                                                        |                          | 329 |
| 王 根明 (Genming WANG)                                                                          | 北海道大学理学院数学専攻電子科学研究所      |     |
| Partial control of chaos and continuity of safe set .....                                    |                          | 333 |

世話人： 陶山大輔 (代表) 伊藤翼 黒田匡迪 後藤良彰  
寺西功哲 二口伸一郎 布田徹 宮川尚紀

# Schedule

## 3月4日(月)

|             |             |            |             |             |
|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|
| 9:50-10:00  | 開会          |            |             |             |
| 10:00-11:00 | 梅田 耕平 (解析)  |            |             |             |
| 11:20-12:20 | 木村 恵二 (数理)  |            |             |             |
| 12:20-14:00 | 昼食          |            |             |             |
|             | 会場 A        | 会場 B       | 会場 C        | 会場 D        |
| 14:00-14:30 | 水澤 篤彦 (幾何)  | 山本 健 (数理)  | 小野塚 友一 (代数) | 相原 祐太 (解析)  |
| 14:50-15:20 | 嶺山 良介 (幾何)  | 犬伏 正信 (数理) | 齋藤 正顕 (代数)  | 船川 大樹 (解析)  |
| 15:40-16:10 | 大鳥羽 暢彦 (幾何) | 清水 達郎 (幾何) | 坂田 実加 (代数)  | 二口 伸一郎 (解析) |
| 16:30-17:00 | 北澤 直樹 (幾何)  | 松村 真義 (幾何) | 矢城 信吾 (代数)  | 兒玉 浩尚 (代数)  |
| 17:20-17:50 | 佐藤 孝美 (幾何)  | 鈴木 悠平 (幾何) | 筒石 奈央 (代数)  | 穂坂 秀昭 (代数)  |

## 3月5日(火)

|             |                  |                            |             |              |
|-------------|------------------|----------------------------|-------------|--------------|
| 10:00-11:00 | 内藤 貴仁 (幾何)       |                            |             |              |
| 11:20-12:20 | 星野 歩 (代数)        |                            |             |              |
| 12:20-14:00 | 昼食               |                            |             |              |
|             | 会場 A             | 会場 B                       | 会場 C        | 会場 D         |
| 14:00-14:30 | 高岡 邦行 (幾何)       | 寺西 功哲 (数理)                 | 三内 顕義 (代数)  | 内免 大輔 (解析)   |
| 14:50-15:20 | 安本 真士 (幾何)       | 岸田 直子 (数理)                 | 三池 将隆 (代数)  | 高棹 圭介 (解析)   |
| 15:40-16:10 | 佐藤 寛之 (幾何)       | 宮加谷 祥子 (数理)<br>矢野 真知子 (数理) | 山野井 隆晃 (代数) | 佐々木 多希子 (解析) |
| 16:30-18:00 | ポスターセッション (会場 E) |                            |             |              |

## 3月6日(水)

|             |                  |            |            |             |
|-------------|------------------|------------|------------|-------------|
| 10:00-11:00 | 臼井 耕太 (数理)       |            |            |             |
| 11:20-12:20 | 隅田 大貴 (幾何)       |            |            |             |
| 12:20-14:00 | 昼食               |            |            |             |
|             | 会場 A             | 会場 B       | 会場 C       | 会場 D        |
| 14:00-14:30 | 野口 和範 (幾何)       | 飯田 湊太 (数理) | 安東 雅訓 (代数) | 福田 尚広 (解析)  |
| 14:50-15:20 | V. Cristina (幾何) | 永幡 裕 (数理)  | 小西 正秀 (代数) | 坂田 繁洋 (解析)  |
| 15:40-16:10 | 加藤 諒 (幾何)        | 高橋 良輔 (幾何) | 辻栄 周平 (代数) | 富澤 佑季乃 (解析) |
| 16:30-17:00 |                  | 十鳥 健太 (幾何) | 小林 雅人 (代数) | 下村 健吾 (解析)  |
| 17:20-17:50 |                  | 足立 真訓 (幾何) | 加瀬 遼一 (代数) | 森田 健 (解析)   |
| 18:00-20:00 | 懇親会 (会場 E)       |            |            |             |

## 3月7日(木)

|             |            |  |  |  |
|-------------|------------|--|--|--|
| 10:00-11:00 | 上山 健太 (代数) |  |  |  |
| 11:20-12:20 | 若杉 勇太 (解析) |  |  |  |
| 12:20-12:30 | 閉会         |  |  |  |



# シングルセッション



# 多変数 Laplace 超関数について

梅田 耕平 (北海道大学大学院理学院数学専攻)  
k-umeta@math.sci.hokudai.ac.jp

## 1 はじめに

本講演で紹介する研究成果は北海道大学の本多尚文先生との共同研究に基づくものである。一変数 Laplace 超関数の理論は、小松彦三郎先生 ([2] - [4]) により確立され変数係数をもつ常微分方程式及び偏微分方程式の解法等に応用されている。元来、古典的な Laplace 変換は無限遠方で高々指数増大する関数に対して定義された。1987 年、小松彦三郎先生は Laplace 超関数を導入し、その Laplace 変換を構成する事により、すべての佐藤超関数は Laplace 超関数に拡張可能であることを示した。そのおかげで、我々は超関数の枠組みの中で増大度条件を持たない関数に対しても Laplace 変換を扱うことが出来るようになった。私は本多尚文先生と共に、小松彦三郎先生により導入された Laplace 超関数の理論を多変数に拡張することを目標に現在研究している。まずはじめに、[1] の中で指数型正則関数を係数とするコホモロジー群の消滅定理を示すことにより、Laplace 超関数のコホモロジー的な定義を与え代数的な取扱いを可能とした。最近、次数  $k$  の局所コホモロジー群  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^k(\mathcal{O}_X^{\text{exp}})$  が空間次元の次数以外で消滅することを示すことができ、それにより、多変数 Laplace 超関数を構成することができた。本講演ではこれまでの研究成果について紹介する。

## 2 一変数 Laplace 超関数

この節では小松彦三郎先生 ([2] - [4]) により導入された Laplace 超関数とその Laplace 変換について概略を紹介する。

$a \in \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$  とし、 $[a, \infty]$  に台のある Laplace 超関数の空間  $\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$  を定義するため、まず複素平面  $\mathbb{C}$  の方向別コンパクト化  $\mathbb{D}^2 = \mathbb{C} \sqcup S^1 \infty$  を考える。これは複素平面に各方向  $e^{i\theta}$  毎に一点ずつ無限遠点  $e^{i\theta} \infty$  をつけ加えてできる閉円板である。有限点  $re^{i\theta}$  には  $\mathbb{C}$  と同じ基本近傍系を与え、無限遠点  $e^{i\theta} \infty$  には  $e^{i\theta}$  方向を内点に持つ角領域

$$\{z \in \mathbb{C}; z/|z| \in \Gamma, |z| > r\} \sqcup \{w\infty; w \in \Gamma\}$$

を基本近傍系とする位相を導入する。ここで、 $r > 0$ 、 $\Gamma$  は  $S^1$  内での  $e^{i\theta}$  の近傍とする。

$\Omega$  を  $\mathbb{D}^2$  内の開集合とする。 $\Omega \cap \mathbb{C}$  上で正則な関数  $F(z)$  が指数増大とは、任意のコンパ

クト部分集合  $K \subset \subset \Omega$  に対し定数  $C_K, H_K > 0$  が存在し、

$$|f(z)| \leq C_K e^{H_K |z|}, \quad z \in K \cap \mathbb{C}^n$$

なる評価が成立する事を言う。このような関数全体を  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}(\Omega)$  で表す。前層  $\{\mathcal{O}_X^{\text{exp}}(\Omega)\}_\Omega$  は層を成し、その  $\mathbb{D}^n$  上の層  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}$  を指数型正則関数の層と呼ぶ。層  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}$  の  $\mathbb{C}^n$  への制限は通常の正則関数の層と一致する事に注意する。

**定義 2.1** ([2]).  $[a, \infty]$  に台のある Laplace 超関数の空間  $\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$  をベクトル空間の商空間

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\text{exp}}(\mathbb{D}^2 \setminus [a, \infty])}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\text{exp}}(\mathbb{D}^2)} \quad (1)$$

として定義する。

即ち、Laplace 超関数  $f(x) \in \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$  は  $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$  で定義された正則関数  $F(z)$  で、正の実数方向以外の方向では高々指数型の増大度を持つものの同値類であって、 $F(z) - G(z)$  が指数型整関数である時、同じ類に属するとして定義されるものである。この時、 $f(x) = [F(z)]$  または  $f(x) = F(x + i0) - F(x - i0)$  と表し、Laplace 超関数  $f(x)$  を指数型正則関数  $F(z)$  の上、下からの境界値  $F(x \pm i0)$  の差と表される。

**定義 2.2** ([2]). Laplace 超関数  $f(x) = [F] \in \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$  に対する Laplace 変換  $\hat{f}(\lambda)$  を

$$\hat{f}(\lambda) := \int_C e^{-\lambda z} F(z) dz \quad (2)$$

で定義する。ここで、積分路  $C$  は  $e^{i\alpha}\infty$  ( $-\pi/2 < \alpha < 0$ ) から点  $c < a$  までの半直線と  $c$  から  $e^{i\beta}\infty$  ( $0 < \beta < \pi/2$ ) までの半直線からなるものとする。

Laplace 超関数に対する、Laplace 逆変換は次で与えられる。

**定理 2.3** ([2]). Laplace 変換  $\mathcal{L}$  はベクトル空間としての同型

$$\mathcal{L} : \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \cong \mathcal{LB}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \quad (3)$$

を与える。ここで、 $\mathcal{LB}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$  は無限遠半円  $\{e^{i\theta}; |\theta| < \pi/2\}$  の  $\mathbb{D}^2$  内での近傍  $\Omega$  で定義された指数型正則関数であって、評価

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log |\hat{f}(\rho e^{i\theta})|}{\rho} \leq -a \cos \theta, \quad |\theta| < \pi/2. \quad (4)$$

を満たすもの全体とする。 $\hat{f}(\lambda) \in \mathcal{LB}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$  の Laplace 逆変換像  $\mathcal{L}^{-1}\hat{f}$  は

$$\left[ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Lambda e^{\lambda z} \hat{f}(\lambda) d\lambda \right] \in \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 $\Lambda$  は  $\Omega \cap \mathbb{C}$  の一点で積分路は  $\Omega \cap \mathbb{C}$  内にとる。

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  で  $\mathbb{C}$  上の正則関数の層を表すことにする。このとき、 $[a, \infty)$  に台のある通常の佐藤超関数の空間  $\mathcal{B}_{[a, \infty)}$  はベクトル空間の商空間

$$\mathcal{B}_{[a, \infty)} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) / \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \quad (6)$$

として定義されている。従って、制限写像  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\text{exp}}(\mathbb{D}^2 \setminus [a, \infty)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$  と  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\text{exp}}(\mathbb{D}^2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$  は標準写像  $\rho : \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{B}_{[a, \infty)}$  を誘導する。

定理 2.4 ([2]). 写像  $\rho : \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{B}_{[a, \infty)}$  は全射である。

上の定理により、 $[a, \infty)$  に台のあるすべての佐藤超関数は Laplace 超関数に延長され、次の同型が成り立つ。

$$\mathcal{B}_{[a, \infty)} \cong \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} / \mathcal{B}_{\{\infty\}}^{\text{exp}} \quad (7)$$

### 3 指数型正則関数を係数とするコホモロジー群の消滅定理

本節では、前節で与えられた Laplace 超関数の定義を多次元に拡張する為に必要な指数型正則関数の層を係数とするコホモロジー群の消滅定理について述べる。なお、第三節と第四節の詳細は [1] を参照して頂きたい。

$n \in \mathbb{N}$ 、 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とする。まずはじめに  $\mathbb{C}^n$  の方向別コンパクト化  $\mathbb{D}^{2n}$  を導入する。集合  $\mathbb{D}^{2n}$  を  $\mathbb{C}^n$  と実  $(2n-1)$  次元単位球面  $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$  との非連結な合併とする。 $D$  を  $\mathbb{C}^n$  の閉単位球とし、 $S^{2n-1}$  境界付き実  $2n$  次元位相多様体と同一視する。全単射  $\rho : D \rightarrow \mathbb{D}^{2n}$  は次で定義する。

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{z}{1-|z|} \in \mathbb{C}^n, & (z \in D^\circ) \\ z \in S^{2n-1}, & (z \in \partial D) \end{cases}.$$

この時、 $\rho$  が位相同型となるように  $\mathbb{D}^{2n}$  に位相を入れる。ここで  $\mathbb{D}^{2n}$  の任意の閉集合はコンパクトであることに注意する。

$X := \mathbb{C}^{n+m}$  とし  $\hat{X}$  を  $\mathbb{C}^{n+m}$  の部分方向別コンパクト化  $\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{C}^m$  とする。 $X_\infty := \hat{X} \setminus X$  とし、 $p_1 : \hat{X} = \mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{D}^{2n}$  (resp.  $p_2 : \hat{X} = \mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ ) を第一空間 (resp. 第二空間) への標準的射影とする。点  $(z_0, w_0) \in X \subset \hat{X}$  における基本近傍系は、 $\epsilon > 0$  に対して

$$B_\epsilon(z_0, w_0) := \{(z, w) \in X; |z - z_0| < \epsilon, |w - w_0| < \epsilon\} \quad (8)$$

からなり、点  $(z_0, w_0) \in X_\infty$  における基本近傍系は次の集合からなる。

$$G_r(\Gamma, w_0) := \left( \left\{ z \in \mathbb{C}^n; |z| > r, \frac{z}{|z|} \in \Gamma \right\} \cup \Gamma \right) \times \left\{ w \in \mathbb{C}^m; |w - w_0| < \frac{1}{r} \right\}, \quad (9)$$

ここで、 $\Gamma$  は  $z_0$  の  $S^{2n-1}$  における近傍で  $r > 0$  とする。

$\hat{X}$  の部分集合  $K$  に対して  $K$  がコンパクトである必要十分条件は  $K$  が閉かつ  $p_2(K)$  が  $\mathbb{C}^m$  内で有界となることに注意する。

定義 3.1.  $\Omega$  を  $\hat{X}$  内の開集合とする。  $\Omega \cap \hat{X}$  上で正則な関数  $F(z)$  が指数増大とは、任意のコンパクト部分集合  $K \subset \subset \Omega$  に対し定数  $C_K, H_K > 0$  が存在し、

$$|f(z, w)| \leq C_K e^{H_K |z|}, \quad (z, w) \in K \cap X$$

なる評価が成立する事を言う。このような関数全体を  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}(\Omega)$  で表す。前層  $\{\mathcal{O}_X^{\text{exp}}(\Omega)\}_\Omega$  は層を成し、その  $\mathbb{D}^{2n}$  上の層  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}$  を指数型正則関数の層と呼ぶ。層  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}$  の  $X$  への制限は通常の正則関数の層と一致する事に注意する。

消滅定理を述べる前にいくつかの記号を導入する。集合  $A \subset \hat{X}$  に対して  $\text{clos}_\infty^1(A) \subset X_\infty$  を次のように定める。点  $(z, w) \in X_\infty$  が  $\text{clos}_\infty^1(A)$  に属する必要十分条件は、 $A \cap X$  内に点列  $\{(z_k, w_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  が存在し、次の条件

$$(z_k, w_k) \rightarrow (z, w) \text{ in } \hat{X} \text{ and } \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (10)$$

を満たすものとする。また、集合  $N_\infty^1(A)$  を

$$N_\infty^1(A) := X_\infty \setminus \text{clos}_\infty^1(X \setminus A) \quad (11)$$

と定める。

定義 3.2.  $U$  を  $\hat{X}$  内の開集合とする。  $N_\infty^1(U) = U \cap X_\infty$  が成り立つとき、 $U$  は無限遠方で **regularity condition** を満たすという。

無限遠方で **regularity condition** を満たす開集合の有限和は再び **regularity condition** を満たすことに注意する。次に開集合が無限遠方で **regularity condition** を満たす為の十分条件を与える。

$\hat{X}$  内の部分集合  $A$  に対して、集合  $N_\infty^L(A)$  を

$$N_\infty^L(A) := \left\{ (\zeta, w) \in X_\infty; (\zeta, w) \in \overline{(\mathbb{R}_+ \zeta \times \{w\}) \cap A} \right\} \subset X_\infty \quad (12)$$

と定める。ここで、 $\mathbb{R}_+ \zeta$  は方向  $\zeta$  による  $\mathbb{C}^n$  内の実半直線とし、閉包は  $\hat{X}$  でとるものとする。

$\hat{X}$  内の部分集合  $A_1, A_2, \dots, A_\ell$  に対して、次が成立することは容易にわかる。

$$N_\infty^L(A_1 \cup \dots \cup A_\ell) = N_\infty^L(A_1) \cup \dots \cup N_\infty^L(A_\ell) \quad (13)$$

補題 3.3.  $U$  を  $\hat{X}$  内の開集合とする。もし  $N_\infty^L(U) = U \cap X_\infty$  が成り立つならば、 $U$  は無限遠方で **regularity condition** を満たす。

補題の条件を満たす開集合の有限和も式 (13) により **regularity condition** を満たす。

ここで **regularity condition** に関する開集合の例を与える。

例 3.4. 1  $\tilde{U}$  を  $X$  内の有界開集合とし、 $U := G_r(\Gamma, 0) \cup \tilde{U}$  とする。ここで、 $G_r(\Gamma, 0) \cup \tilde{U}$  は (9) で与えられた開集合とする。この時、 $N_\infty^L(U) = U \cap X_\infty$  が成り立つの

で  $U$  は無限遠方で regularity condition を満たす。特に、 $\mathbb{D}^2$  と  $\mathbb{D}^2 \setminus [a, +\infty]$  ( $a \in [-\infty, \infty)$ ) は無限遠方で regularity condition を満たす。

- 2 集合  $U := \mathbb{D}^2 \setminus \{1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$  に対して  $N_\infty^1(U) = S^1 \infty \setminus \{+\infty\}$  が成り立つ。従って  $U$  は無限遠方で regularity condition を満たす。他方、 $U := \mathbb{D}^2 \setminus \{1, 2, 4, 8, 16, \dots, +\infty\}$  は  $N_\infty^1(U) = S^1 \infty$  となるため regularity condition を満たさない。どちらの場合も  $N_\infty^L(U) = S^1 \infty$  となることに注意する。

部分集合  $A \subset X$  に対して、点  $p$  と  $A$  との距離  $\text{dist}(p, A)$  を次で表す。

$$\text{dist}(p, A) := \inf_{q \in A} |p - q|.$$

便宜上、 $A$  が空集合の時  $\text{dist}(p, A) = +\infty$  とおく。また、 $q = (z, w) \in X$  に対して

$$\text{dist}_{\mathbb{D}^{2n}}(q, A) := \text{dist}(q, A \cap p_2^{-1}(p_2(q))) = \inf_{(\zeta, w) \in A} |z - \zeta|$$

と定義する。次に開部分集合  $\Omega \subset \hat{X}$  に対して、 $X$  上の関数  $\psi$  と集合  $\Omega_\epsilon$  を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \psi(p) &:= \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\text{dist}_{\mathbb{D}^{2n}}(p, X \setminus \Omega)}{1 + |z|} \right\}, \quad (p = (z, w) \in X), \\ \Omega_\epsilon &:= \left\{ p = (z, w) \in \Omega \cap X; \text{dist}(p, X \setminus \Omega) > \epsilon, |w| < \frac{1}{\epsilon} \right\}, \quad (\epsilon > 0). \end{aligned} \tag{14}$$

$\psi(p)$  は下半連続 (i.e., 任意の  $c \in \mathbb{R}$  に対して  $\{p \in X; \psi(p) > c\}$  は開集合) かつ  $z$  変数に関して連続である。しかし、 $w$  変数に関しては必ずしも連続とは限らないことに注意する。さらに、 $p_1((X \setminus \Omega) \cap p_2^{-1}(w_0))(w_0 \in \mathbb{C}^m)$  が  $\mathbb{C}^n$  内の有界部分集合ならば、十分大きな  $z$  に対して  $\psi(z, w_0)$  は恒等的に  $\frac{1}{2}$  である。従って  $\psi(z, w)$  の値は、十分大きな  $z$  に対して有界領域内での  $\Omega$  の形に依存しない。

以上で定理を述べる為の準備ができたので、以下に指数型正則関数の層を係数とするコホモロジー群の消滅定理を記述する。

定理 3.5. 次の二つの条件を仮定する。

1.  $\Omega \cap X$  は  $X$  の擬凸領域かつ無限遠方で regularity condition を満たす。
2. 任意の正の定数  $\epsilon$  に対し、ある正の定数  $\delta_\epsilon, R_\epsilon$  が存在し、 $\psi(z, w)$  は  $\Omega_{\epsilon, R_\epsilon} := \Omega_\epsilon \cap \{|z| > R_\epsilon\}$  上で連続かつ評価

$$|\psi(z, w) - \psi(z, w')| < \epsilon, \quad ((z, w), (z, w') \in \Omega_{\epsilon, R_\epsilon}, |w - w'| < \delta_\epsilon).$$

を満たす。

このとき、

$$H^k(\Omega, \mathcal{O}_X^{\text{exp}}) = 0, \quad (k \neq 0) \tag{15}$$

が成り立つ。

領域  $\Omega$  が直積型の場合、定理の条件 2 は常に満たされることに注意する。従って次の系が得られる。

系 3.6.  $U \subset \mathbb{D}^{2n}$ ,  $W \subset \mathbb{C}^m$  を領域とし、 $U \cap \mathbb{C}^n$  と  $W$  は擬凸とする。このとき、 $U$  が  $\mathbb{D}^{2n}$  内の無限遠方で *regularity condition* を満たすならば、 $\Omega := U \times W$  に対して (15) が成立する。

$n = 1$  の場合、直積型の領域  $\Omega = U \times W \subset \mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^m$  に対して、 $U$  の無限遠方での *regularity condition* を課さなくても消滅定理は成立する。しかし、 $n \geq 2$  の場合無限遠方での *regularity condition* なしでは成立しないことが次の例によって示される。

例 3.7.  $X = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$ ,  $\hat{X} = \mathbb{D}^4$  のとき次の集合を考える。

$$U := \left\{ (z_1, z_2) \in X; |\arg(z_1)| < \frac{\pi}{4}, |z_2| < |z_1| \right\},$$

$$\Omega := (\overline{U})^\circ \setminus \{p_\infty\} \subset \hat{X}, \quad p_\infty = (1, 0, 0, 0) \in S^3 \subset \mathbb{D}^4$$

このとき  $\Omega \cap X = U$  は  $X$  内の擬凸領域であるが、 $\Omega$  は無限遠方で *regularity condition* を満たさない集合となることに注意する。この場合  $H^1(\Omega, \mathcal{O}_X^{\text{exp}}) \neq 0$  となる。

## 4 正則パラメータ付きの一変数 Laplace 超関数の層

前節の結果から、正則パラメータ付きの一変数 Laplace 超関数の層  $\mathcal{BO}_N^{\text{exp}}$  を構成することができる。本節では、層  $\mathcal{BO}_N^{\text{exp}}$  とそのいくつかの性質について述べる。

$N = \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m (m \geq 0)$  とし、 $\overline{N} = \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{C}^m$  を  $N$  の  $\hat{X} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^m$  内での閉包を表すことにする。このとき次の結果が消滅定理により導かれる。

定理 4.1. 集合  $\overline{N}$  は層  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}$  に関して 純 1-余次元的である。即ち、

$$\mathcal{H}_N^k(\mathcal{O}_X^{\text{exp}}) = 0, \quad (k \neq 1) \quad (16)$$

が成り立つ。ここで  $\mathcal{H}_N^k(\mathcal{O}_X^{\text{exp}})$  は次数  $k$  の局所コホモロジー群を表す。

定義 4.2. 正則パラメータ付きの一変数 Laplace 超関数の層  $\mathcal{BO}_N^{\text{exp}}$  を

$$\mathcal{BO}_N^{\text{exp}} := \mathcal{H}_N^1(\mathcal{O}_X^{\text{exp}}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\overline{N}}} \omega_{\overline{N}} \quad (17)$$

と定義する。ここで、 $\mathbb{Z}_{\overline{N}}$  は  $\mathbb{Z}$  を茎とする  $\overline{N}$  上の定数層、 $\omega_{\overline{N}}$  は  $\overline{N}$  上の向き付け層とする。

定理 4.1 により層  $\mathcal{BO}_N^{\text{exp}}$  の大域的切断はコホモロジー群として次のように表現できる。任意の開集合  $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}$  と擬凸開集合  $T \subset \mathbb{C}^m$  に対して  $\Omega$  の  $\mathbb{D}^2$  内の複素近傍  $V$  をとることにより

$$\mathcal{BO}_N^{\text{exp}}(\Omega \times T) = H_{\Omega \times T}^1(V \times T, \mathcal{O}_X^{\text{exp}}) = \frac{\mathcal{O}_X^{\text{exp}}((V \setminus \Omega) \times T)}{\mathcal{O}_X^{\text{exp}}(V \times T)} \quad (18)$$

が成り立つ。この表現は複素近傍  $V$  のとり方によらずに定まる。特に  $m = 0$  の場合、 $\overline{\mathbb{R}}$  上の Laplace 超関数の層

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\exp} := \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\exp}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\overline{\mathbb{R}}}} \omega_{\overline{\mathbb{R}}} \quad (19)$$

に対する大域的切断空間も、同様にコホモロジー群として表わすことができ、

$$\Gamma_{[a, \infty]}(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\exp}) = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\exp}(\mathbb{D}^2 \setminus [a, \infty])}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\exp}(\mathbb{D}^2)} \quad (20)$$

が成り立つ。従って小松彦三郎先生により定義された Laplace 超関数の空間  $\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp}$  と切断空間  $\Gamma_{[a, \infty]}(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\exp})$  は一致することがわかる。層  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\exp}$  の  $\mathbb{R}$  への制限は、通常の佐藤超関数の層  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  と一致することに注意する。次の消滅定理は  $\mathcal{BO}_N^{\exp}$  の脆弱性を証明するための鍵となる。

**定理 4.3.**  $U$  を  $\mathbb{D}^2$  の開集合とし、 $W$  を  $\mathbb{C}^m$  の擬凸開集合とする。このとき、次が成立する。

$$H^k(U \times W, \mathcal{O}_X^{\exp}) = 0, \quad k \neq 0.$$

次に、層  $\mathcal{BO}_N^{\exp}$  に対する脆弱性と一意接続性に関する定理を述べる。

**定理 4.4.**  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$  と  $W_1 \subset W_2 \subset \mathbb{C}^m$  を開集合とする。このとき、

- (i) もし  $W_1$  が  $\mathbb{C}^m$  の擬凸開集合ならば、写像  $\mathcal{BO}_N^{\exp}(\Omega_2 \times W_1) \rightarrow \mathcal{BO}_N^{\exp}(\Omega_1 \times W_1)$  は全射、*i.e.*, 層  $\mathcal{BO}_N^{\exp}$  は超関数の変数に関して脆弱である。
- (ii) もし、 $W_1$  と  $W_2$  が  $\mathbb{C}^m$  の空でない連結開集合ならば、写像  $\mathcal{BO}_N^{\exp}(\Omega_1 \times W_2) \rightarrow \mathcal{BO}_N^{\exp}(\Omega_1 \times W_1)$  は単射である。*i.e.*, 層  $\mathcal{BO}_N^{\exp}$  は正則パラメータに関して一意接続性を持つ。

## 5 多変数 Laplace 超関数の構成

この節では最近の結果を報告する。以下、 $\overline{\mathbb{R}^n}$  で  $\mathbb{D}^{2n}$  内での  $\mathbb{R}^n$  の閉包とする。次の指数型正則関数に対する Martineau 型の定理が局所コホモロジー群の消滅を示す為の重要な鍵となる。

**定理 5.1.** ( 指数型正則関数に対する Martineau 型の定理 )  $S$  を  $\overline{\mathbb{R}}$  内のコンパクト集合。 $K = K_1 \times \cdots \times K_{n-1} \subset L = L_1 \times \cdots \times L_{n-1}$  を二つの  $\mathbb{C}^{n-1}$  内の柱状コンパクト集合の対、 $W \subset V \subset \mathbb{C}^m (m \geq 0)$  を空でない連結な Stein 領域の対とすると、自然な写像

$$H_{S \times K \times V}^n(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times V}^{\exp}) \rightarrow H_{S \times L \times W}^n(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times W, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times V}^{\exp})$$

は単射である。

上の指数型正則関数に対する Martineau 型の定理から次の補題と定理が得られる。

補題 5.2. 集合  $S, K, L, V$  を定理 5.1 と同じ条件を満たすものとする。この時、

$$\begin{aligned} H_{S \times K \times V}^k(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times V}^{\text{exp}}) &= 0, & k \neq n, \\ H_{S \times (L \setminus K) \times V}^k(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times V}^{\text{exp}}) &= 0, & k \neq n \end{aligned} \quad (21)$$

が成り立つ。

定理 5.3.  $S$  を  $\mathbb{R}$  内のコンパクト集合。  $K, L$  を二つの閉じた解析的多面体、  $V$  を  $\mathbb{C}^m$  内の Stein 領域とする。この時、

$$H_{S \times (L \setminus K) \times V}^k(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times V}^{\text{exp}}) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

が成り立つ。

以上の結果から  $n$  次以外の次数の局所コホモロジー群の消滅が導かれる。

定理 5.4.  $\overline{\mathbb{R}^n}$  は指数型正則関数の層  $\mathcal{O}_X^{\text{exp}}$  に関して純  $n$  余次元的である。即ち、

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{R}^n}}^k(\mathcal{O}_X^{\text{exp}}) = 0, \quad k \neq n$$

が成り立つ。

従って、層  $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}^n}}^{\text{exp}} = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{R}^n}}^n(\mathcal{O}_X^{\text{exp}})$  を  $\overline{\mathbb{R}^n}$  上の Laplace 超関数の層と定義する。

本講演では、Laplace 超関数の層  $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}^n}}^{\text{exp}}$  の切断空間に対して、台以外では ( $\mathbb{D}^{2n}$  空間の位相の意味で) 実軸の近傍となるような開集合からなる Čech 被覆を構成することで、Čech コホモロジー群による良い表現を与え、Laplace 超関数に対する Laplace 変換を構成する。これについても併せて報告する。

## 参考文献

- [1] N. Honda and K. Umeta, On the sheaf of Laplace hyperfunctions with holomorphic parameters, Journal of Mathematical Sciences the University of Tokyo, to appear.
- [2] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions: a new foundation of the Heaviside calculus, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), 805-820.
- [3] —, Laplace transforms of hyperfunctions: another foundation of the Heaviside operational calculus, Generalized Functions, Convergence Structures, and Their Applications (Proc. Internat. Conf., Dubrovnik, 1987; B. Stanković, editor), Plenum Press, New York (1988), 57-70.
- [4] —, Multipliers for Laplace hyperfunctions - A Justification of Heaviside's rules, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **203** (1994), 323-333.

# 両側境界面の回転を許容する回転球殻ブシネスク熱対流問題

木村 恵二<sup>\*1</sup>，竹広 真一<sup>\*2</sup>，山田 道夫<sup>\*3</sup>

京都大学 数理解析研究所

## 概要

回転球殻ブシネスク熱対流問題は、天体規模熱対流現象の最も簡単なモデルとして、半世紀以上にもわたって盛んに研究がなされてきた。これらほとんどの研究では両側境界面が同じ一定回転角速度で回転（同期回転）していることを仮定していた。しかし実際の天体を念頭においた場合、両側球がトルクを受けて自由に回転できる方がより自然である。そこで本研究では、両側境界面の三軸回転を許容するモデルを構築し、両側境界面が同期回転する場合と比較して熱対流解の振る舞いがどのように変化するかを調べた。

## 1 イントロダクション

宇宙空間には非常に多くの天体が存在し、それぞれが様々な振る舞いを示している。しかしこれらの多くの天体に共通して、内部熱源や外部からの冷却によって天体規模の熱対流現象が発生していると考えられている。例えば、太陽には放射コアのまわりに対流層が存在することが知られており、木星や土星といった巨大惑星の表面に見られる縞状構造は内部の熱対流現象によって駆動・維持されていると考えられている。また地球型惑星では、惑星内部の金属流体核が対流することによって天体固有の磁場が生成・維持されているのではないかと考えられている。

この天体規模熱対流現象は、身の回りに存在する多くの熱対流現象のモデルとしてよく調べられている平行平板間の熱対流問題（ベナール問題）と比較して、

- (i) 熱対流が起こる領域が球または球殻領域である、
- (ii) 中心に向く自己重力場が存在する、
- (iii) 系が回転している、

という特徴を持っている。本研究の主題である回転球殻ブシネスク熱対流問題は、これら三つの特徴のみを考慮した天体規模熱対流現象の最も簡単なモデルの一つであり、Chandrasekhar [1] によって提唱されてから半世紀以上にわたって盛んに研究がなされてきた。

臨界レイリー数および臨界モード<sup>\*4</sup>の性質は、Chandrasekhar [1], Roberts [2], Busse [3, 4] の先駆的な研究以来、理論的にも数値的にも盛んに調べられてきており、その結果広いパラメタ領域でこれらの振る舞いが明らかにされつつある [5, 6, 7]。

最近、計算機性能の飛躍的な向上によって大規模高解像度な数値シミュレーションが可能となり、実際の惑星で観測される縞状構造に近い有限振幅熱対流解が得られたことが報告されている [8, 9]。しかしながらこれらの大規模数値シミュレーションのパラメタは実際の惑星で見積もられるパラメタと大きく離れており、これらの数値シミュレーション結果が実際の惑星大気を再現できているかどうかは即座に判断できない。今後計算機性能がさらに向上することを考慮しても、実際の惑星で見積もられるパラメタでの数値シミュレーションはまだ難しいのが現状である。

---

<sup>\*1</sup> Email: kimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

<sup>\*2</sup> Email: takepiro@gfd-dennou.org

<sup>\*3</sup> Email: yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

<sup>\*4</sup> 熱対流問題では通常、系 (system) の熱的不安定性は無次元パラメタであるレイリー数で表す（レイリー数が大きいほど熱的不安定性が高い）。他のパラメタ（球殻の厚さや回転角速度など）を固定した状態でレイリー数をゼロから大きくしていくと、ある値で熱対流が発生する。このパラメタ空間内での点を臨界点と呼び、そのレイリー数を臨界レイリー数、熱対流パターンを臨界モードと呼ぶ。また臨界レイリー数よりも大きいレイリー数で発現する熱対流解を有限振幅 (finite-amplitude) 熱対流解とよぶ。

一方で、この系の熱対流解の基本的な振る舞いを把握するべく、レイリー数を臨界値から増大させたときにどのような熱対流解が発現/消失するかを、同じく数値シミュレーションを用いて調べている研究も存在する。その結果、臨界モードからカオス的な振る舞いをする解に到るまでの遷移過程が徐々に明らかになりつつある [7, 10, 11, 12]。しかしながら、この系の熱対流解の大域的な振る舞いがよく理解されたとはいえない。特に、系の大域的な構造を理解する際の基礎的な情報となる、解の安定性と分岐構造は未だ調べられていなかった<sup>\*5</sup>。これは従来のほとんどの研究が数値シミュレーションを用いていることが原因であると考えられる。数値シミュレーションでは、熱対流解のダイナミクスは捉えられるものの、(i) 不安定解が捉えられない、(ii) 解の中立安定点を求めるために非常に長時間の積分が必要となる、という問題があり、パラメタ空間内の広い範囲を網羅的に調べることが困難である。

そこで我々はまず、臨界点から超臨界分岐する、方位角方向に伝播する定常進行波解に注目し、数値シミュレーションではなくニュートン法を用いてこの解を数値的に捉え、その線形安定性を固有値計算によって調べた [15]。ニュートン法は、数値シミュレーションと比較して一回の反復ステップにかかる計算コストが高いものの、(i) 安定解だけでなく不安定解もとらえることができる、(ii) 解に収束するまでのステップ数が少なく済む (実際我々の計算では 10 ステップ以下で収束する)、という利点があり、分岐構造を系統的かつ効率的に求めることが可能である。

本研究では、先述の研究結果 [15] を基礎として、内側球と外側球の回転が熱対流解の基本的な振る舞いに及ぼす影響を考える。従来、この系に対して非常に多くの研究がなされてきたが、それらほぼ全ての研究で内側球と外側球が同じ一定回転角速度で回転している (以下、同期回転と呼ぶ) ことを仮定していた<sup>\*6</sup>。しかし実際の天体を念頭においた場合、両側球が同期回転している理由は無く、むしろ球表面に働くトルクによって両側球が自由に回転できる状況の方が自然であると考えられる。実際、近年の目覚ましい地震波観測の発展により、地球内核がマントルに対して異なる回転角速度で回転していることが示唆されている [16, 17]。さらに、我々の以前の研究 [18] で、臨界点から分岐する定常進行波が内側球に及ぼすトルクの大きさは、内側球の回転角速度を有意に変化させうる、ということが見出された。従って本研究では両側球が熱対流によるトルクを受けて三軸回転できるモデルを構築し、熱対流解の性質を両側球が同期回転する場合と比較しながら、内側球・外側球の回転が熱対流解の基本的な振る舞いに及ぼす影響を調べたい。

2 節でまず系の設定と支配方程式を述べる。3 節では臨界点から分岐する、方位角方向に伝播する定常進行波解の対流構造ならびに安定領域を、両側球が同期回転する場合と内側球の回転を許容した場合で比較する。4 節では南北対称な熱対流解から南北非対称な熱対流解への遷移過程を、両側球が同期回転する場合と両側球の回転を許容した場合で比較する。5 節で結論および今後の課題を述べる。

## 2 系の設定と支配方程式

二つの同心球 (内側球、外側球の半径をそれぞれ  $r_{\text{in}}$ ,  $r_{\text{out}}$  とする) で囲まれた球殻領域内のブシネスク流体<sup>\*7</sup> を考える (図 1)。一定回転角速度  $\Omega \mathbf{k}$  で回転する系に対して内側球、外側球がそれぞれ  $\tilde{\Omega}_{\text{in}}$ ,  $\tilde{\Omega}_{\text{out}}$  で回転しているとする。すなわち、慣性系に対して内側球、外側球がそれぞれ  $\tilde{\Omega}_{\text{in}} + \Omega \mathbf{k}$ ,  $\tilde{\Omega}_{\text{out}} + \Omega \mathbf{k}$  で回転していることを意味する。球殻領域内には一様に内部熱源  $H$  (単位質量あたり) が分布しているとする。さらに一様な密度  $\rho$  からなる物体の自己重力場  $\mathbf{g} = -\gamma \mathbf{r}$  が流体に作用しているとする。ここで  $\gamma \equiv 4\pi G\rho/3$  は定数 ( $G$  は万有引力定数) であり、 $\mathbf{r}$  は球の中心からの位置ベクトルである。この場合、球殻とともに回転する系での静止状態 (熱伝導状態) における温度場は  $T_s(r) = -\beta r^2/2 + T_0$  となる。ここで  $\beta \equiv H/(3\kappa C_p)$ ,  $\kappa$  は

<sup>\*5</sup> 平行平板間の熱対流問題 (ベナール問題) では詳しく調べられている (例えば Busse [13])。

<sup>\*6</sup> これはおそらく系の設定を極力簡単化するためであると考えられる。実際、いくつかの MHD (magneto-hydrodynamic, 磁気流体力学) ダイナモモデルでは内側球の回転を許容している (例えば [14])。ただしここで MHD ダイナモモデルとは、ナビエーストークス方程式・エネルギー方程式と共に電磁場の支配方程式であるマクスウェル方程式を連立したものである。

<sup>\*7</sup> 非圧縮性を満たすが密度が温度にのみ弱く依存し、重力との相互作用 (浮力) は考慮する流体。

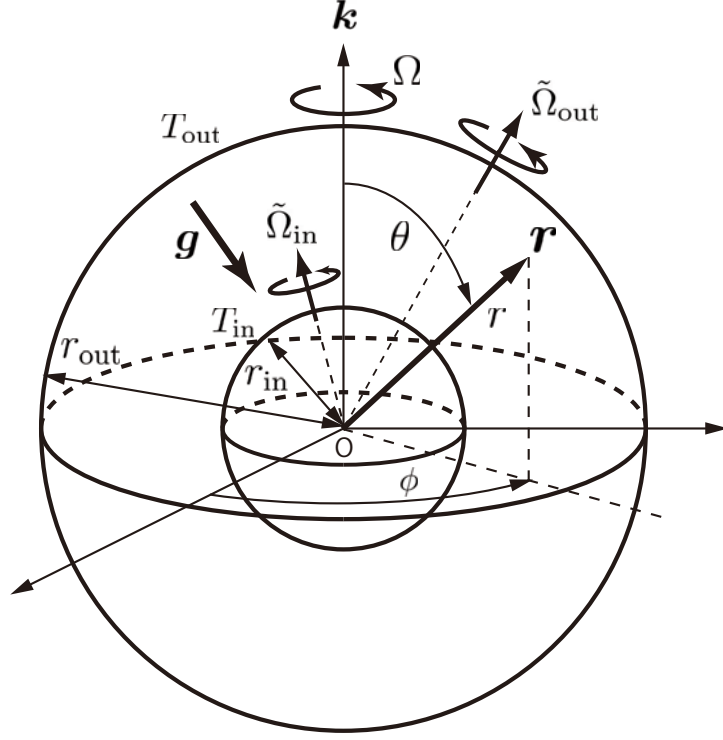


図 1 両側球の回転を許容する回転球殻ブシネスク熱対流問題の模式図

熱拡散係数,  $C_p$  は定圧比熱を表し,  $T_0$  は定数である. 球殻の厚さ  $d \equiv r_{\text{out}} - r_{\text{in}}$  を長さスケール, 粘性拡散時間  $d^2/\nu$  を時間スケール,  $\nu^2/(\gamma\alpha d^4)$  を温度スケールとする ( $\nu$  は動粘性係数,  $\alpha$  は熱膨張率). 圧力および慣性モーメントはそれぞれ  $\rho\nu^2/d^2$ ,  $\rho d^5$  で無次元化する. 一定回転角速度  $\Omega \mathbf{k}$  で回転する系での無次元化された支配方程式系は,  $\mathbf{U}$  を速度場,  $\Theta$  を温度攪乱場 ( $T_s$  からのずれ) として

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{U} = -\nabla \pi + \Theta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{U}, \quad (2)$$

$$P \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta \right) = R \mathbf{U} \cdot \mathbf{r} + \nabla^2 \Theta, \quad (3)$$

となる. 内側球, 外側球の運動方程式は

$$I_{\text{in}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{in}}}{dt} = \mathbf{N}_{\text{in}}(\mathbf{U}), \quad (4)$$

$$I_{\text{out}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{out}}}{dt} = \mathbf{N}_{\text{out}}(\mathbf{U}), \quad (5)$$

となる.  $I_{\text{in}}$ ,  $I_{\text{out}}$  はそれぞれ内側球, 外側球の無次元化された慣性モーメント,  $\mathbf{N}_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{N}_{\text{out}}$  は内側球, 外側球に働く無次元化されたトルクを表す. ただし球の中心は動かないと仮定している. この系の無次元パラメータは以下のとおりである:

$$\eta = \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}}, \quad \tau = \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{\alpha\beta\gamma d^6}{\nu\kappa}, \quad I_{\text{in}} = \frac{I_{\text{in}}^*}{\rho d^5}, \quad I_{\text{out}} = \frac{I_{\text{out}}^*}{\rho d^5}. \quad (6)$$

$\eta$  は内外球の半径比,  $T$  は系の回転の速さを表すテイラー数,  $P$  はプラントル数,  $R$  は熱的不安定性を表すレイリー数である.  $I_{\text{in}}^*$  と  $I_{\text{out}}^*$  は次元を持った内側球, 外側球の慣性モーメントである.

本研究では, 半径比およびプラントル数を標準的に用いられている値  $\eta = 0.4$ ,  $P = 1$  に固定し,  $\tau$  は回転が比較的遅いから中間的な領域である  $52 \leq \tau \leq 500$  の範囲で, またレイリー数  $R$  は臨界値からそのおよそ

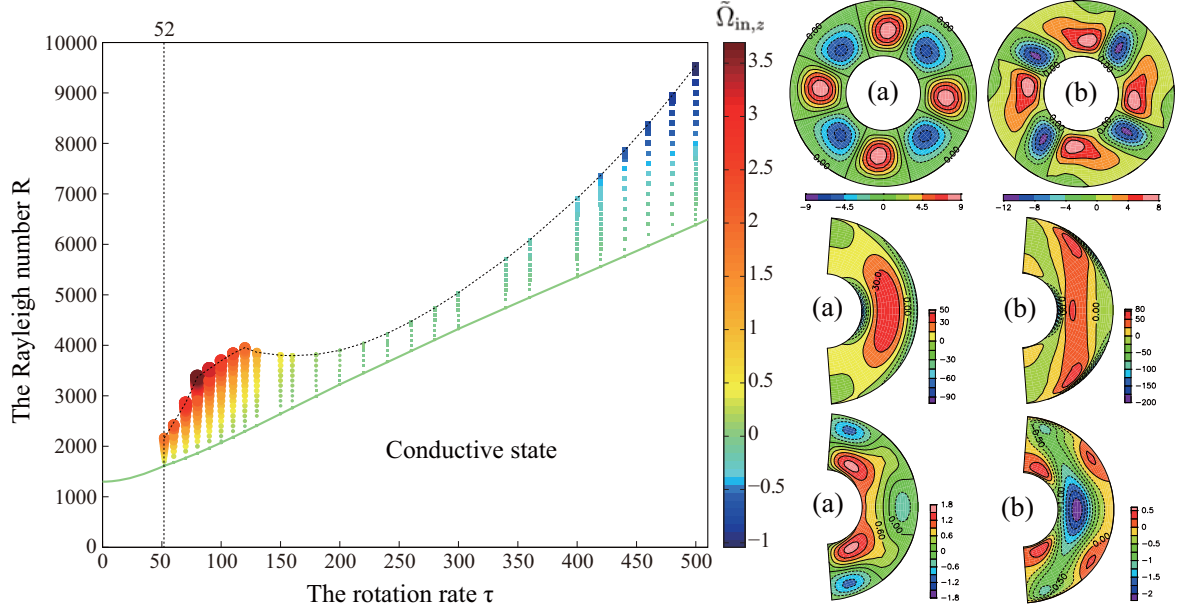


図2 (左図): 臨界点から超臨界分岐する有限振幅定常進行波解 TW4 が誘起する内側球の回転角速度。ただし TW4 は南北対称パターンであるため内側球の回転角速度は  $\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{in}} = \tilde{\Omega}_{\text{in},z}$  のみ値を持つ。丸は  $\tilde{\Omega}_{\text{in},z} > 0$ , 四角は  $\tilde{\Omega}_{\text{in},z} < 0$  を表し, 大きさはその振幅を表す。下側の緑実線は熱伝導解 (Conductive state) の中立曲線 (臨界曲線) を表しており, この実線より上側で熱伝導解が不安定化し熱対流が発生する。上側の黒点線は TW4 の中立曲線を示し, この点線よりも上側で TW4 は不安定となる。(右図): 安定な TW4 の典型的なパターン。(a) は  $\tau = 52$ ,  $R = 2100 \simeq 1.3R_c$ , (b) は  $\tau = 500$ ,  $R = 9200 \simeq 1.44R_c$  における対流パターンである。上から順に, 赤道断面における速度場動径方向成分  $U_r$ , 子午断面における渦度場回転軸方向成分  $\omega_z = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U})$ , 平均帯状流 (速度場方位角方向成分の方位角方向平均) を表す。

5 倍程度,  $1500 \lesssim R \lesssim 30000$  の範囲で変化させることにする。内側球の慣性モーメントは, 内側球の密度が流体の密度  $\rho$  と同じで一樣と仮定した場合の値  $I_{\text{in}} = 8\pi(\eta/(1-\eta))^5/15 \simeq 0.22$  に固定する。この仮定は自己重力場の設定と矛盾しない。外側球の慣性モーメントは, 3 節では  $\infty$  すなわち外側球が回転系に対して静止している ( $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{out}} = \mathbf{0}$ ) とし, 4 節では地球のマントルを模擬した値である 100 を用いる<sup>\*8</sup>。

また両側球面で不浸透・粘着境界, 温度固定の境界条件, すなわち

$$\mathbf{U}(r = r_{\text{in}}, \theta, \phi, t) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{in}} \times (r_{\text{in}} \mathbf{e}_r), \quad \mathbf{U}(r = r_{\text{out}}, \theta, \phi, t) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{out}} \times (r_{\text{out}} \mathbf{e}_r), \quad (7)$$

$$\Theta(r = r_{\text{in}}, \theta, \phi, t) = 0, \quad \Theta(r = r_{\text{out}}, \theta, \phi, t) = 0, \quad (8)$$

を用いる。ただし  $\mathbf{e}_r$  は動径方向の単位ベクトルを表す。

詳しい数値計算法については Kimura *et al.* (2011, 2013) [15, 19] を参照されたい。

### 3 臨界点から分岐する定常進行波解の振る舞い

$52 \leq \tau \leq 500$  では, 方位角方向の基本波数が 4 である, 方位角方向に伝播する有限振幅定常進行波解 (Traveling Wave 4, 以下 TW4 と呼ぶ) が臨界点から超臨界分岐する<sup>\*9</sup>。内側球のみの回転を許した系における, TW4 の安定領域およびこの解が誘起する内側球の回転角速度の変化を示したのが図 2 である。ただし

<sup>\*8</sup> 内側球を地球内核, 球殻流体領域を地球外核とみなした場合, マントルの慣性モーメントは, ここで用いたスケールで無次元化するとオーダーが 100 となる。

<sup>\*9</sup> これは両側球が同期回転する場合, 内側球の回転を許した場合の両方でこの分岐が起こる。

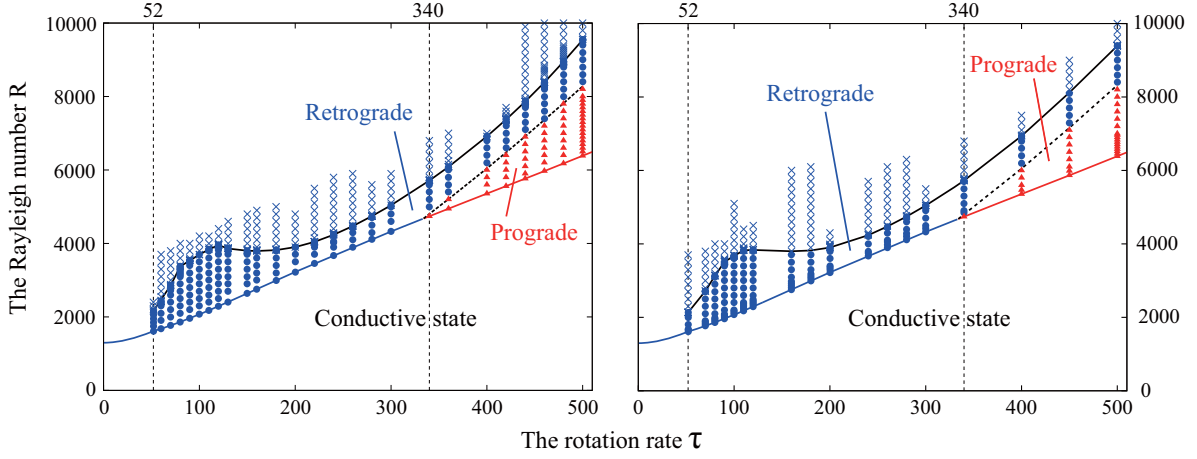


図3 (左図): 内側球の回転を許した場合、臨界点から超臨界分岐する有限振幅定常進行波解 TW4 の分岐ダイアグラム。下側の実線は熱伝導解 (Conductive state) の中立曲線 (臨界曲線) を表しており、この実線より上側で熱伝導解が不安定化して熱対流が発生する。青線は臨界モードが retrograde (系の回転と逆方向) に伝播し、赤線は臨界モードが prograde (系の回転と同じ方向) に伝播することを示している。青丸 (赤三角) は安定な TW4 が retrograde (prograde) に伝播する領域を、青クロスは TW4 (retrograde に伝播) が不安定な領域を表す。上側の実線は TW4 の中立曲線を示し、この実線よりも上の領域で TW4 は不安定化する。また伝播速度がゼロとなる部分を点線で示している。(右図): 両側球が同期回転する場合、臨界点から超臨界分岐する TW4 の分岐ダイアグラム。記号などは左図と同じ。

TW4 は南北対称パターン<sup>\*10</sup> であり内側球の回転角速度は  $\mathbf{k}$  方向 ( $\mathbf{k} \cdot \tilde{\Omega}_{\text{in}} = \tilde{\Omega}_{\text{in},z}$ ) のみ値をもつ。

まず内側球の回転方向に注目する。この図2左から、系の回転が遅い場合 ( $52 \leq \tau \lesssim 160$ ) は、内側球が prograde (回転と同方向) に回転するが、回転が速くなる ( $200 \lesssim \tau \lesssim 300$ ) と内側球はほとんど回転しない。さらに回転が速くなる ( $\tau \gtrsim 400$ ) と内側球が retrograde (回転と逆方向) に回転することが分かる。<sup>\*11</sup> ただし、これら TW4 の安定領域内では、内側球の回転角速度の変化及びそれに伴う熱対流構造はすべて連続的に変化している。内側球の回転角速度が遷移する際、分岐などに伴う構造の不連続な変化は生じていない。また内側球の回転を許した場合、TW4 は定常解であり内側球に働くトルクはゼロとなっていることに注意したい。

この内側球の回転方向の変化は、熱対流の非線形効果によって誘起される平均帯状流 (速度場方位角方向成分の方位角方向平均) の構造の変化によるものであると考えられる。実際、回転が遅い場合には内側球付近全体に prograde な平均帯状流が生成される (図2右 (a) 最下図) が、回転が速い場合には赤道面内側球付近につよい retrograde な平均帯状流が生成される (図2右 (b) 最下図)。

次に TW4 の伝播方向および安定領域に注目する。図2左から、TW4 は臨界点から分岐した後、回転の速さに依存して、レイリー数が  $R_c \leq R \lesssim 1.2R_c - 2R_c$  の範囲で安定である。回転が遅い領域では TW4 はその安定領域内で常に retrograde に伝播するが、回転が速い場合は臨界曲線付近で prograde に伝播するものの、レイリー数の増大と共に伝播方向が retrograde に変化する。この安定領域および伝播速度は、内側球が同期回転している場合と比較して定性的に変化がない (図3)。特に安定領域については、TW4 が不安定化するレイリー数の差が1%程度と非常に小さい。

<sup>\*10</sup> 赤道面に対して熱対流解が鏡像対称、すなわち

$$\begin{aligned} U_r(r, \theta, \phi) &= +U_r(r, \pi - \theta, \phi), \\ U_\theta(r, \theta, \phi) &= -U_\theta(r, \pi - \theta, \phi), \\ U_\phi(r, \theta, \phi) &= +U_\phi(r, \pi - \theta, \phi), \\ \Theta(r, \theta, \phi) &= +\Theta(r, \pi - \theta, \phi). \end{aligned}$$

が成立することを意味する。ただしここでは球座標系を用いており、 $r$  は動径、 $\theta$  は天頂角、 $\phi$  は方位角を表す。

<sup>\*11</sup> この傾向は、両側球が同期回転する場合に TW4 が内側球に及ぼすトルクの向きと同じである [18]。

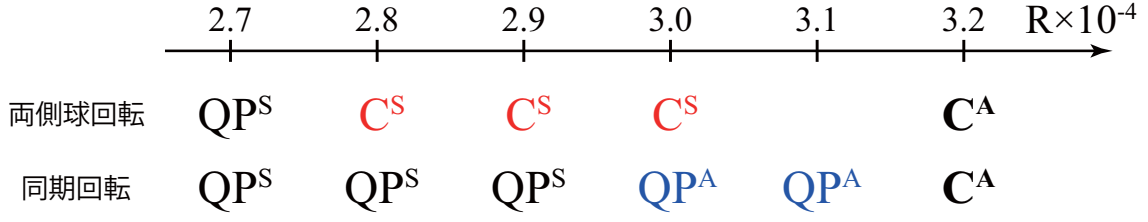


図 4 各レイリー数における熱対流解の性質 ( $\tau = 500$ ,  $R_c = 6387$ ).  $QP^S$ : 南北対称な (準) 周期解,  $QP^A$ : 南北非対称な (準) 周期解,  $C^S$ : 南北対称なカオス解,  $C^A$ : 南北非対称なカオス解.

TW4 の対流構造も定性的に変化はない. 特に, 速度場動径成分  $U_r$  や渦度場回転軸方向成分  $\omega_z$  は最大で数 % 程度の差しかない. これに対し, 平均帯状流の振幅は 15% – 20% 程度差が生じ, 伝播速度も最大で 10% 程度の差がある.

これらの振る舞いは弱非線形の観点から説明できる. 両側球が同期回転する場合, 安定な TW4 の対流構造は, 従属変数である速度場と温度場, およびレイリー数を臨界点近傍で振幅展開し, その二次までとれば良く近似できることが分かっている [18]. これはすなわち, 両側球が同期回転している場合の速度場を  $\mathbf{u}_{\text{corot}}$  と書けば,

$$\mathbf{u}_{\text{corot}} = \epsilon \mathbf{u}_{\text{corot}}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_{\text{corot}}^{(2)} + \dots \quad (9)$$

とかけることを表す. ただしここで  $\mathbf{u}_{\text{corot}}^{(1)}$  は臨界モードであり<sup>\*12</sup>,  $\mathbf{u}_{\text{corot}}^{(2)}$  は  $O(\epsilon^1)$  の非線形相互作用によって誘起される二次速度場である. 臨界モードは方位角方向に正弦的な振動をするためその方位角方向平均はゼロである. 特に速度場方位角方向成分の方位角方向平均である平均帯状流は臨界モードによって生成されないため, 平均帯状流は  $O(\epsilon^2)$  から始まる. 従って平均帯状流のシアによって生成される, 内側球に及ぼすトルクも  $O(\epsilon^2)$  となる<sup>\*13</sup>.

内側球の回転を許した場合には, このトルクが内側球の回転を誘起するため, 内側球の回転も  $O(\epsilon^2)$  の大きさとなる. 従って内側球の回転を許した場合の速度場  $\mathbf{U}$  は, 内側球に働くトルクがゼロになるべく,

$$\mathbf{U} = \epsilon \mathbf{u}_{\text{corot}}^{(1)} + \epsilon^2 (\mathbf{u}_{\text{corot}}^{(2)} + \mathbf{u}^{(f,2)}) + \dots \quad (10)$$

と,  $O(\epsilon^2)$  の部分が影響を受ける.  $\mathbf{u}^{(f,2)}$  はその変化量を表す. 故に, 速度場動径成分  $U_r$  や渦度場回転軸方向成分  $\omega_z$  は  $O(\epsilon)$  の量であるため内側球の回転の影響が小さいが, 平均帯状流は  $O(\epsilon^2)$  の量であるため影響が大きいと解釈できる. また有限振幅 TW4 の伝播速度は平均帯状流による対流セルの移流によって決まる [15] ため, 内側球の回転の影響が大きいと考えられる.

## 4 南北対称熱対流解から南北非対称熱対流解への遷移過程

前節で, 両側球が同期回転する場合と内側球の回転を許した場合で TW4 の対流構造を比較し,  $O(\epsilon)$  の量である  $U_r$  などはほとんど変化がないが,  $O(\epsilon^2)$  の量である平均帯状流などは内側球の影響を受けることを見

<sup>\*12</sup>  $\mathbf{u}_{\text{corot}}^{(1)}$  は支配方程式を臨界点回りで線形化した方程式を満たすため.

<sup>\*13</sup> 両側球が同期回転する場合, 内側球に働く回転軸方向のトルクは

$$N_{\text{in},z,\text{corot}} = 2\pi r_{\text{in}}^3 \int_0^\pi \left[ \frac{\partial \langle u_{\text{corot},\phi} \rangle}{\partial r} \right]_{r=r_{\text{in}}} \sin^2 \theta d\theta,$$

と計算される. ただし  $\langle \cdot \rangle$  は方位角方向平均, すなわち

$$\langle f \rangle(r, \theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \phi) d\phi$$

を表す.

出した．これは TW4 の安定領域が臨界点の近くにもみ存在するため非線形性が弱いことに起因すると考えられる．そこで本節では，レイリー数を増大させて非線形性が大きくなった領域で熱対流解が両側球の回転とともにどう変化するかを調べる．特に  $I_{\text{out}} = 100$ ,  $\tau = 500$ ,  $2.7 \times 10^4 \leq R \leq 3.2 \times 10^4$  ( $4.2R_c \lesssim R \lesssim 5.0R_c$ ,  $R_c = 6387$ ) のパラメタ領域に注目する．

このパラメタ領域では南北対称を保った熱対流解から南北非対称な熱対流解へと遷移する．図 4 はその遷移過程を示したものである．レイリー数の増大と共に，両側球の回転を許した場合は熱対流解が  $QPS \rightarrow CS \rightarrow CA$  と遷移するのに対し，両側球が同期回転する場合は  $QPS \rightarrow QPA \rightarrow CA$  と遷移する．ただし， $QPS$ : 南北対称な (準) 周期解,  $QPA$ : 南北非対称な (準) 周期解,  $CS$ : 南北対称なカオス解,  $CA$ : 南北非対称なカオス解, を表す．内側球の回転のみを許した場合 ( $I_{\text{out}} = \infty$ ) も両側球の回転を許した場合と同じ遷移過程をとるため，この遷移過程の変化は内側球の回転によると考えられる．

## 5 結論と今後の課題

両側球がトルクを受けて三軸回転できる回転球殻ブシネスク熱対流モデルを構築し，粘着・温度固定境界条件の下，半径比  $\eta = 0.4$ ，プラントル数  $P = 1$ ，内側球の慣性モーメント  $I_{\text{in}} \simeq 0.22$ ，外側球の慣性モーメント  $I_{\text{out}} = 100$  もしくは  $\infty$  の場合に， $52 \leq \tau \leq 500$ ,  $1500 \lesssim R \lesssim 30000$  の範囲で，両側球の回転が熱対流解に及ぼす影響を調べた．

まず内側球の回転のみを許した場合 ( $I_{\text{out}} = \infty$ ) に，臨界点から超臨界分岐する有限振幅定常進行波 TW4 をニュートン法によって求め，その線形安定領域を固有値計算によって定めた．TW4 は臨界レイリー数  $R_c$  からおよそその 1.2 倍から 2 倍の範囲で安定であり，この安定領域内で，系の回転が遅い場合は内側球が prograde に回転するが，回転が速くなると内側球が retrograde に回転する．この安定領域は両側球が同期回転する場合と比較してほとんど変化がない．また TW4 の対流構造も定性的に変化はない．速度場動径成分  $U_r$  や渦度場回転軸方向成分  $\omega_z$  は定量的にもほとんど変化がないが，平均帯状流の振幅は 15% – 20% 程度差が生じる．これは TW4 の安定領域が臨界曲線の近くにもみ存在し，安定な TW4 の非線形性が弱いいため， $O(\epsilon)$  の量である  $U_r$ ,  $\omega_z$  は内側球の回転の影響を受けないが， $O(\epsilon^2)$  の量である平均帯状流は影響を受けると解釈できる．

次に  $I_{\text{out}} = 100$ ,  $\tau = 500$ ,  $2.7 \times 10^4 \leq R \leq 3.2 \times 10^4$  のパラメタ領域で，南北対称熱対流解から南北非対称熱対流解への遷移過程を調べた．このパラメタ領域では，レイリー数の増大と共に，両側球の回転を許した場合は熱対流解が  $QPS \rightarrow CS \rightarrow CA$  と遷移するのに対し，両側球が同期回転する場合は  $QPS \rightarrow QPA \rightarrow CA$  と遷移する．内側球の回転のみを許した場合 ( $I_{\text{out}} = \infty$ ) も両側球の回転を許した場合と同じ遷移過程をとるため，このパラメタ領域における遷移過程の変化は内側球の回転によると考えられる．

今後の課題として，得られたカオス解のリアプノフ指数を調べることで，南北対称性が破れるパラメタ領域でレイリー数の増大と共に熱対流解の不安定性がどのように変化していくかを調べたいと考えている．また同時に南北対称解から南北非対称解へ遷移するメカニズムを明らかにしたい．このメカニズム解明には分岐構造の解析が有効であると考え，現在さらなる分岐構造の解析を進めている．

## 参考文献

- [1] S. Chandrasekhar, “Hydrodynamic and hydromagnetic stability,” Oxford Univ. Press, pp654 (1961).
- [2] P. H. Roberts, “On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources,” Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **263**, 93 (1968).
- [3] F. H. Busse, “Differential rotation in stellar convection zones,” Astrophys. J., **159**, 629 (1970).
- [4] F. H. Busse, “Thermal instabilities in rapidly rotating systems,” J. Fluid Mech., **44**, 441 (1970).
- [5] K. Zhang and F. H. Busse, “On the onset of convection in rotating spherical shells,” Geophys.

- Astrophys. Fluid Dynamics, **39**, 119 (1987).
- [6] S. Takehiro and Y.-Y. Hayashi, “Boussinesq convection in rotating spherical shells – a study on the equatorial superrotation,” *The Earth’s Center Part: Its Structure and Dynamics* edited by T. Yukutake, 123 (1995).
  - [7] M. Ardes, F. H. Busse and J. Wicht, ”Thermal convection in rotating spherical shells,” *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **99**, 55 (1997).
  - [8] M. Heimpel and J. Aurnou, “Turbulent convection in rapidly rotating spherical shells: A model for equatorial and high latitude jets on Jupiter and Saturn,” *Icarus*, **187**, 540 (2007).
  - [9] J. Aurnou, M. Heimpel and J. Wicht, “The effects of vigorous mixing in a convective model of zonal flow on the ice giants,” *Icarus*, **190**, 110 (2007).
  - [10] A. Tilgner and F. H. Busse, “Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells,” *J. Fluid Mech.*, **332**, 359 (1997).
  - [11] E. Grote and F. H. Busse, “Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells,” *Fluid Dynamics Research*, **28**, 349 (2001).
  - [12] R. Simitev and F. H. Busse, “Patterns of convection in rotating spherical shells,” *New Journal of Physics*, **5**, 97 (2003).
  - [13] F. H. Busse, “Non-linear properties of thermal convection,” *Rep. Prog. Phys.*, **41**, 1929 (1978).
  - [14] U. R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G. A. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht, K. Zhang, “A numerical dynamo benchmark,” *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25 (2001).
  - [15] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, “Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell,” *Phys. Fluids*, **23**, 074101 (2011).
  - [16] J. Tromp, “Inner-core anisotropy and rotation,” *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **29**, 47 (2001).
  - [17] J. Zhang, X. Song, Y. Li, P. G. Richards, X. Sun and F. Waldhauser, “Inner core differential motion confirmed by earthquake waveform doublets,” *Science*, **309**, 1357 (2005).
  - [18] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, ”Torques on the inner and outer spheres induced by the Boussinesq thermal convection in a rotating spherical shell,” *J. Phys. Soc. Japan*, **81**, 084401 (2012).
  - [19] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, “Stability and a bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell allowing rotation of the inner sphere,” (2013, submitted).

# 相対ループ空間におけるストリングトポロジーについて

内藤貴仁\*

信州大学大学院総合工学系研究科

向きづけられた  $d$  次元閉多様体  $M$  に対し,  $\mathcal{L}M = \text{Map}(S^1, M)$  を  $M$  の自由ループ空間とする. つまり 1 次元球面  $S^1$  から  $M$  への連続写像全体の空間である. 本稿において主人公となるのがこの自由ループ空間  $\mathcal{L}M$  である. 自由ループ空間とは, 幾何やトポロジーにおいて非常に興味深い対象の 1 つである. 例えば, リーマン多様体の測地線と自由ループ空間のベッチ数との関係 ([9] や, [19]), 自由ループ空間の余単体的モデルを考えることによる, 自由ループ空間のコホモロジーを Hochschild ホモロジーで記述する ([11]) 等がある. また本稿の主題にもある Chas, Sullivan によって創始されたストリングトポロジーの理論がある. 本稿の目的は, ストリングトポロジーの紹介と相対ループ空間におけるストリング作用素に関する著者の結果について紹介する事である.

本稿の構成は以下の通りである: 1 章では, ストリングトポロジーの理論, そしてその後の発展について紹介する. 2 章では, Félix, Thomas 等によって Gorenstein 空間に拡張されたストリング作用素の構成について詳しく述べる. 3 章では, 相対ループ空間のストリング作用素について考察する.

## 1 背景

### 1.1 ストリングトポロジー

初めに少し自由ループ空間ではなくループ空間の話をするにすることにする.  $M$  に 1 つ固定されている点 (基点)  $m_0 \in M$  を決めておく. この時,  $M$  のループ空間とは

$$\Omega M = \{\gamma : S^1 \rightarrow M \mid \gamma(0) = m_0\}$$

と定義される位相空間の事である. ここで  $\Omega M$  には, ループを繋ぐという写像で積  $\mu : \Omega M \times \Omega M \rightarrow \Omega M$  が定義される. つまり 2 つのループ  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega M$  に対し,

$$\mu(\gamma_1, \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \gamma_2(2t - 1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定義される. この積から誘導される写像により, ホモロジー  $H_*(\Omega M)$  は結合的な代数になる.

さて, 同様の事を自由ループ空間に対しても行おうと思うが, うまくいかない事が直ぐ分かる. 何故ならば,  $\mathcal{L}M$  から適当に 2 つループを取ってもそれらが繋がってるとは限らないからである. つまりループ空間と同様の方法では, ホモロジー  $H_*(\mathcal{L}M)$  に代数構造は入らない.

Chas, Sullivan は論文 [2] において, 自由ループ空間のホモロジーを多様体の次元  $d$  だけずらしたものの  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) = H_{*+d}(\mathcal{L}M)$  (ループホモロジーと呼ばれる) にループ積と呼ばれる代数構造を導入し, 次数付可換で結合的な代数であることを示した (実際には, Batalin-Vilkovisky 代数になる事も示しているが, 今回はループ積だけに着目する). このループ積は上記の  $H_*(\Omega M)$

---

\*naito@math.shinshu-u.ac.jp

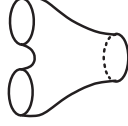
の代数構造と  $H_*(M)$  に定義される交差積を融合したようなものになっており、特に交差積の拡張となっている．ここで交差積とは次の図式で定義される：

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) \otimes H_m(M) & \xrightarrow{\text{交差積}} & H_{n+m-d}(M) \\ \text{P.D} \otimes \text{P.D} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \text{P.D} \\ H^{d-n}(M) \otimes H^{d-m}(M) & \xrightarrow{\text{カップ積}} & H^{2d-n-m}(M). \end{array}$$

P.D はポアンカレ双対同型である．つまりループに対し始点を対応させる写像  $\text{ev} : \mathcal{L}M \rightarrow M$ ,  $\text{ev}(\gamma) = \gamma(0)$  に対し，誘導される射  $\text{ev} : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \rightarrow \mathbb{H}_*(M)$  がループ積を交差積にうつす．

## 1.2 スtring作用素

ループ積は Cohen , Godin [4] によって一般化されている．ここで簡単にではあるが，どのように一般化されたかを紹介したいと思う．次のような 2 次元コボルディズム  $P$  を考える：



ここで  $\rho_{\text{in}} : S^1 \amalg S^1 \hookrightarrow P$  を左側の境界 (inboundary) への包含射とし， $\rho_{\text{out}} : S^1 \hookrightarrow P$  を右側の境界 (outboundary) への包含射とする．この時，自然に空間の列

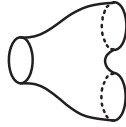
$$\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \cong \text{Map}(S^1 \amalg S^1, M) \xleftarrow{\rho_{\text{in}}^*} \text{Map}(P, M) \xrightarrow{\rho_{\text{out}}^*} \mathcal{L}M$$

が得られるが，Cohen , Godin はホモロジー間に次の様な射

$$(\rho_{\text{in}}^*)! : H_*(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M) \longrightarrow H_{*-d}(\text{Map}(P, M))$$

を構成し，合成射  $H(\rho_{\text{out}}^*) \circ (\rho_{\text{in}}^*)! : H_*((\mathcal{L}M)^{\times 2}) \rightarrow H_{*-d}(\mathcal{L}M)$  として積を定義した．これは Chas , Sullivan のループ積と一致することが知られている．

この構成は一般の 2 次元コボルディズムに対しても行われており，これを String 作用素と呼ぶ．例えば次の様なコボルディズム



に対しては余積

$$H_*(\mathcal{L}M) \longrightarrow H_{*-d}(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M)$$

が得られ，これをループ余積と呼ぶ．このように， $S^1$  に対して  $H_*(\mathcal{L}M)$ , 2 次元コボルディズムに対して上記の様な作用素が対応されるものを，2 次元の位相的量子場の理論と呼ぶ．Cohen , Godin はこれにより次の定理を示している．

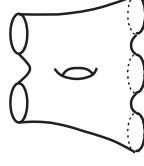
定理 1 ([4]).  $H_*(\mathcal{L}M)$  は余単位元を持たない可換な Frobenius 代数である．

ここで，Frobenius 代数とは大雑把に言うと代数構造，余代数構造を共に持ち合わせており，Frobenius 恒等式と呼ばれる関係式を満たすものである．また 2 次元の位相的量子場の理論の成す圏と可換な Frobenius 代数の成す圏が同値な事が知られている ([12]) ．

Cohen, Godin の仕事によって，自由ループ空間のホモロジーには沢山の作用素がある事が期待されたが，次の Tamanoi の結果によりそれは否定された．

定理 2 ([18]). (ループ積)  $\circ$  (ループ余積)  $= 0$

この結果が意味している事は、種数が 1 以上の 2 次元コボルディズム、つまりは次のように穴の空いているコボルディズム



に対して得られる作用素は自明になってしまうと言う事である。しかしながらループ積は常に非自明であり、ループ余積の自明、非自明性については Tamanoi[18] で調べられている。

### 1.3 スtringトポロジーの一般化

現在では、Stringトポロジーは多様体とは限らない空間に対しても考えられている。例えば Chataur, Menichi[3] はコンパクト連結リー群や有限群の分類空間に対してStringトポロジーを行う事を考えている。他には多様体上の Fiberwise monoid[10] や、Orbifold[14] 等がある。論文 [7] では、Félix, Thomas によって Gorenstein 空間と呼ばれる位相空間でもString作用素が考えられる事が示された。次章では Gorenstein 空間の定義及び、String作用素の構成について紹介する。

## 2 Gorenstein 空間におけるString作用素

### 2.1 Gorenstein 空間

まず初めに Gorenstein 空間を定義する為の準備をする。 $(A, d)$  を次数付き微分代数、 $M$  と  $N$  を (右)  $(A, d)$ -加群とする。この時、

$$\mathrm{Ext}_A^*(M, N) = H^*(\mathrm{Hom}_A(P, N))$$

と定義する。ここで  $\varepsilon : P \rightarrow M$  を  $M$  の  $(A, d)$ -semifree resolution とする。これは加群に対して定義される  $\mathrm{Ext}$  の次数付き版、または  $(A, d)$ -加群の導来圏の hom-set だと思って貰ってもいい (詳しくは [6, Appendix] を見てもらいたい)。また以下では、ホモロジーは全て体  $\mathbb{K}$  上のものを考える。また  $C^*(M)$  は  $M$  の  $\mathbb{K}$  上特異コチェイン複体とする。これを用いて、Félix, Halperin, Thomas は Gorenstein 空間を次のように定義した。

定義 3 ([6]). 位相空間  $M$  が次の条件を満たす時、次元  $d$  の  $\mathbb{K}$ -Gorenstein 空間と呼ぶ：

$$\mathrm{Ext}_{C^*(M)}^*(\mathbb{K}, C^*(M)) \cong \begin{cases} 0 & (* \neq d) \\ \mathbb{K} & (* = d). \end{cases}$$

この定義では、直感的にどのような空間が Gorenstein 空間なのかは分からないが、例えば  $\mathbb{K}$ -ポアンカレ双対空間 (特に向き付けられた閉多様体) は  $\mathbb{K}$ -Gorenstein 空間であり、次元はポアンカレ双対空間としての次元である。また次の Murillo の結果を紹介する。

定理 4 ([16]). 単連結空間のファイブレーション  $F \rightarrow E \rightarrow B$  で  $E, B$  は  $\mathbb{K}$  上コホモロジーが有限型で  $F$  の  $\mathbb{K}$  上コホモロジーが有限次元なものとする。この時、 $E$  が  $\mathbb{K}$ -Gorenstein 空間であることと、 $B$  と  $F$  が  $\mathbb{K}$ -Gorenstein 空間であることは同値である。

この結果の系として、コンパクト連結リー群  $G$  の分類空間  $BG$  もそうであり、その次元は  $-\dim G$  である事が分かる。

次に Gorenstein 空間におけるストリング作用素をどのように構成するか紹介する。次の Félix, Thomas の定理はその構成をする為の鍵となる結果である。

定理 5 ([7]).  $M$  を単連結な次元  $d$  の  $\mathbb{K}$ -Gorenstein 空間で、 $\mathbb{K}$  上コホモロジーが有限型であるものとする。この時、 $\mathbb{K}$  上ベクトル空間として次は同型である：

$$\mathrm{Ext}_{C^*(M^{\times n})}^*(C^*(M), C^*(M^{\times n})) \cong H^{*-(n-1)d}(M; \mathbb{K}).$$

ここで  $C^*(M)$  は対角写像  $M \rightarrow M^{\times n}$  から誘導された射により  $C^*(M^{\times n})$ -加群とみなす。

この定理の  $* = d$ ,  $n = 2$  の場合を見ると、次の同型が得られる：

$$\mathrm{Ext}_{C^*(M^{\times 2})}^d(C^*(M), C^*(M^2)) \cong H^0(M; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}.$$

単位元  $1 \in \mathbb{K}$  に対応する、 $\mathrm{Ext}_{C^*(M^{\times 2})}^d(C^*(M), C^*(M^2))$  の元を  $\Delta^! : P \rightarrow C^*(M^{\times 2})$  と置くことにする。ここで  $\varepsilon : P \rightarrow C^*(M)$  は  $C^*(M)$  の  $C^*(M^{\times 2})$ -semifree resolution である。特に  $M$  が向きづけられた閉多様体の時は、 $\Delta^!$  が誘導するコホモロジー間の写像

$$H(\Delta^!) : H^*(M) \longrightarrow H^{*+d}(M \times M)$$

の双対が当に交差積である。この  $\Delta^!$  を用いてループ積、ループ余積を定義するのだが、その前に双対ループ（余）積を定義し、その双対としてループ（余）積を定義する。

まず双対ループ積を次の合成で定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{Dlp} : H^*(\mathcal{L}M) &\xrightarrow{H(\mathrm{Comp})} H^*(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \\ &\cong \downarrow \mathrm{EM}^{-1} \\ &H^*(P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*((\mathcal{L}M)^{\times 2})) \xrightarrow{H(\Delta^! \otimes 1)} H^*((\mathcal{L}M)^{\times 2}). \end{aligned}$$

ここで  $\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \mid \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$ , つまり次の引き戻し図式が得られる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \\ \mathrm{ev} \downarrow & & \downarrow \mathrm{ev} \times \mathrm{ev} \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M. \end{array}$$

$\Delta$  は対角写像。EM は上記の図式から得られる Eilenberg-Moore 写像、つまり  $x \otimes a \in P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*((\mathcal{L}M)^{\times 2})$  に対し、 $\mathrm{EM}(x \otimes a) = \mathrm{ev}_0^* \varepsilon(x) \cdot \mathrm{inc}^*(a)$  で定義される。また  $\mathrm{Comp}$  はループを繋ぐ写像である。この定義から分かる用に、ループ積は本質的に写像  $\mathrm{Comp}$  と  $\Delta^!$  から構成されている。1 章でも述べたが、 $H_*(\Omega M)$  の代数構造と  $H_*(M)$  の交差積の融合したような積がループ積である。

次に双対ループ余積を次の合成で定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{Dlcp} : H^*(\mathcal{L}M^{\times 2}) &\xrightarrow{H(\mathrm{inc})} H^*(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \\ &\cong \downarrow \mathrm{EM}'^{-1} \\ &H^*(P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(\mathcal{L}M)) \xrightarrow{H(\Delta^! \otimes 1)} H^*(\mathcal{L}M). \end{aligned}$$

ここで  $EM'$  は次の引き戻し図式の Eilenberg-Moore 写像である：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M & \xrightarrow{\text{Comp}} & \mathcal{L}M \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow l \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M, \end{array}$$

写像  $l$  はループ  $\gamma$  に対して、 $l(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(\frac{1}{2}))$  で定義される。

双対空間  $H^*(\mathcal{L}M)^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(H^*(\mathcal{L}M), \mathbb{K}) \cong H_*(\mathcal{L}M)$  に誘導される写像

$$\begin{aligned} Lp &= (Dlp)^\vee : H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \longrightarrow H_*(\mathcal{L}M), \\ Lcop &= (Dlcp)^\vee : H_*(\mathcal{L}M) \longrightarrow H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \end{aligned}$$

をループ積，ループ余積と呼ぶ。特に  $M$  が向き付られた閉多様体の時は，これらの作用素は Cohen, Godin が導入したループ積，ループ余積と一致することに注意しておく。

上記の構成を見て分かる事は，Félix, Thomas はストリングトポロジーの理論を Gorenstein 空間に拡張しただけではなく，彼らの仕事によってストリング作用素がホモロジー代数的に扱えるようになった。

ここで少し話は脱線するが，Gorenstein 空間のストリング作用素に関する問題と筆者の結果について紹介したいと思う。論文 [7] において，Félix, Thomas は次の問題をあたえている：

問題. 単連結な  $\mathbb{K}$ -Gorenstein 空間  $M$  に対し， $H_*(\mathcal{L}M; \mathbb{K})$  は可換な Frobenius 代数か？

この問題で障害になってくるのは，所謂 “up to constant problem” と呼ばれる問題である。例えばループ積の結合性を考えると，スカラー倍の差で結合的であることは分かるが，真に結合的かどうか分からない。筆者は係数体が有理数体  $\mathbb{Q}$  の時に部分的にはあるが次の事を証明した。一般の場合は，まだ未解決な問題である。

定理 6. 単連結  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 空間  $M$  に対し， $H_*(\mathcal{L}M; \mathbb{Q})$  は単位元，余単位元を持たない Frobenius 代数である。

### 3 相対ループ空間とストリング作用素

前章の自由ループ空間でのストリング作用素を相対ループ空間に拡張することを考える。この章では， $N$  を次元  $d$  の単連結なポアンカレ双対空間， $M$  を単連結な空間とし， $f : N \rightarrow M$  を連続写像とする。

#### 3.1 相対ループ空間とループ積

相対ループ空間  $\mathcal{L}_f M$  を次の引き戻しで定義する：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_f M & \longrightarrow & M^{[0,1]} \\ \downarrow & & \downarrow (ev_0, ev_1) \\ N & \xrightarrow{(f, f)} & M \times M. \end{array}$$

ここで  $M^{[0,1]}$  は  $M$  内の道全体の空間，つまり閉区間  $[0, 1]$  から  $M$  への連続写像全体の空間とし， $(ev_0, ev_1)$  を道の始点と終点を対応させる写像とする。

例えば  $N = M$  で,  $f$  が恒等射  $1_M : M \rightarrow M$  の時は自由ループ空間  $\mathcal{L}_{1_M} M = \mathcal{L}M$  であり,  $M$  に基点があり  $N$  が 1 点からなる空間で,  $f$  が 1 点から基点への射  $c$  の時は, ループ空間  $\mathcal{L}_c M = \Omega M$  である事は直ぐに分かる.

相対ループ空間におけるストリング作用素を考える動機についてここで述べる事にする (もちろんただ単にストリング作用素の相対版を考えるというのも面白いと思うが). 注目するのはループホモロジーの関手性についてである. ポアンカレ双対空間の間の写像  $g : M_1 \rightarrow M_2$  が与えられているとする. 写像  $g$  は自然に自由ループ空間の間の射  $\mathcal{L}g : \mathcal{L}M_1 \rightarrow \mathcal{L}M_2$  を誘導するが, ホモロジー間に誘導される写像  $(\mathcal{L}g)_* : H_*(\mathcal{L}M_1) \rightarrow H_*(\mathcal{L}M_2)$  は, 一般にストリング作用素を保たない事が分かる ( $M_1$  と  $M_2$  の次元が一般には違う). さて, ここで相対ループ空間を考えるわけだが, まず直ぐ分かる事は自由ループ空間の時と同様の方法で相対ループ空間にもループ積

$$H_*(\mathcal{L}_g M_2) \otimes H_*(\mathcal{L}_g M_2) \longrightarrow H_*(\mathcal{L}_g M_2)$$

を定義することが出来る. 何故ならば自然にループを繋げる写像

$$\text{Comp} : \mathcal{L}_g M_2 \times_{M_1} \mathcal{L}_g M_2 \longrightarrow \mathcal{L}_g M_2$$

と次の引き戻し図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_g M_2 \times_{M_1} \mathcal{L}_g M_2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathcal{L}_g M_2 \times \mathcal{L}_g M_2 \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{ev} \times \text{ev} \\ M_1 & \xrightarrow{\Delta} & M_1 \times M_1. \end{array}$$

が得られるからである. 更に次の結果が示されている.

命題 7 ([13]).  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}_g M_2) = H_{*+\dim M_1}(\mathcal{L}_g M_2)$  は単位元を持つ結合的な代数である.

この命題は,  $M_2$  のポアンカレ双対性を仮定せず一般の単連結空間で成り立つ事を注意しておく.

定理 8 ([13]). 次の代数としての列が存在する:

$$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M_1) \xrightarrow{H(\mathcal{L}_{M_1} g)} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}_g M_2) \xleftarrow{(\mathcal{L}_g M_2)!} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M_2).$$

つまり, 直接的にループホモロジー  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M_1)$  と  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M_2)$  を繋げる事は一般的には出来ないが, 相対ループ空間を持ち出す事で上記の意味で関係付ける事が出来る.

では自然にループ余積も定義したいと考えるのだが, 同様の方法では出来ない事が分かる. 何故ならばループ余積を構成した時に用いた写像  $l : \mathcal{L}M \rightarrow M \times M$  が相対ループ空間では定義することが出来ない. 筆者は相対ループ空間におけるループ余積を別の方法で構成し, 次の結果を得ることが出来た. これが本稿の主結果である.

定理 9.  $H_*(\mathcal{L}_f M)$  は余結合的な余代数である. 特に,  $N = M$  で  $f$  が恒等射の時はその余積はループ余積と一致する.

さて, 相対ループ空間においてもループ積とループ余積が定義されたので自然と  $H_*(\mathcal{L}_f M)$  は可換な Frobenius 代数かどうかという疑問が生じる. この疑問に対しては否定的な答えが出ている. それについて次に述べたいと思う.

### 3.2 ループホモロジー $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}_f M)$ の非可換性

筆者は係数体が  $\mathbb{Q}$  の時に,  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}_f M; \mathbb{Q})$  のループ積が非可換になる十分条件を見つけた.  $\text{Map}(N, M; f)$  を写像空間  $\text{Map}(N, M)$  の  $f$  を含む連結成分とする.

**命題 10** ([17]). 有理ホモトピー群  $\pi_{\geq 2}(\text{Map}(N, M; f)) \otimes \mathbb{Q}$  が非自明な Whitehead 積を持つ時,  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}_f M; \mathbb{Q})$  のループ積は非可換である.

Whitehead 積とは位相空間  $X$  のホモトピー群で定義されるホモトピー作用素

$$[\cdot, \cdot] : \pi_n(X) \times \pi_m(X) \longrightarrow \pi_{n+m-1}(X)$$

である. 詳しい定義は例えば [20] を見てもらいたい.

写像空間といった複雑な空間の Whitehead 積の自明性, 非自明性など分かるのかと疑問に思うが,  $\mathbb{Q}$  上だと分かる事も多い. その例を 2 つ紹介したいと思う.

**例 11.**  $N$  と  $M$  をそれぞれ  $(n-1)$  次元と  $n$  次元の複素射影空間  $\mathbb{C}P^{n-1}$ ,  $\mathbb{C}P^n (n \geq 1)$  とし,  $f$  を包含写像  $i : \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$  とする. この時, 次の有理ホモトピー分解がある事知られている (Møller-Raussen [15]):

$$\text{Map}(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathbb{C}P^n; i) \simeq_{\mathbb{Q}} S^2 \times S^3 \times S^5 \times \cdots \times S^{2n+1}.$$

2 次元球面  $S^2$  は非自明な Whitehead 積 (Hopf 写像) を持つので,  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}_i \mathbb{C}P^n)$  は非可換な代数である.

上記の様な写像空間の有理ホモトピー分解が分からなくても  $\text{Map}(N, M; f)$  が非自明な Whitehead 積を有理ホモトピー論を用いる事で調べる事が出来る.

**例 12.**  $N$  を 2 次元複素射影空間  $\mathbb{C}P^2$ ,  $M$  を次の作用から得られる Borel construction  $ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C}P^2$  とする:

$$S^1 \times \mathbb{C}P^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^2, \quad t \cdot (x, y, z) = (tx, y, z).$$

また  $f$  を包含写像  $i : \mathbb{C}P^2 \longrightarrow ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C}P^2$  としたとき,  $\pi_*(\text{Map}(N, M; i)) \otimes \mathbb{Q}$  は非自明な Whitehead 積をもつ. これは写像空間の Whitehead 積の有理モデルを調べる事で分かる. この有理モデルは例えば [1] で調べられている. よって  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}_i(ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C}P^2); \mathbb{Q})$  は非可換な代数.

## 4 今後の展開

ストリングトポロジーはまだまだ活発に研究されており, 取り組むべき問題も沢山あると思われる. 最後に, 今後のストリングトポロジーの展開の一部であるか, 関連するキーワードを述べて終わりたいと思う.

- **Open closed string topology** ([5]): 自由ループ空間の元を弦理論でいう閉じた弦とするならば, もちろん開いた弦というの也被えられる. つまりは道の空間のような物を考える. このような物も同時に考えてストリングトポロジーの理論を行う.
- **Homological conformal field theory** ([8]): 自由ループ空間のホモロジーは 2 次元の位相的量子場の理論を与えるが, もっと一般にホモロジー的共形場の理論を与える事が知られている.
- **Brane topology** ([5]): 自由ループ空間ではなく, もっと高次元球面  $S^n$  からの写像空間  $\text{Map}(S^n, M)$  に対しストリングトポロジーを考える.

## 参考文献

- [1] U. Buijs and A. Murillo, The rational homotopy Lie algebra of function spaces, *Comment. Math. Helv.*, 83 (2008), 723-739.
- [2] M. Chas and D. Sullivan, String topology, [arXiv:math.GT/9911159](#).
- [3] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, [arXiv:math.AT/0801.0174](#).
- [4] R. L. Cohen, V. Godin, A polarized view of string topology, *Topology, geometry and quantum field theory*, 127-154, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [5] R. L. Cohen, A. A. Voronov, Notes on string topology, [arXiv:math.GT/0503625](#).
- [6] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Gorenstein spaces. *Adv. in Math.* 71 (1988), no. 1, 92-112.
- [7] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, *Math. Ann.*, 345 (2009), no. 2, 417-452.
- [8] V. Godin, Higher string topology operations, [arXiv:math.AT/0711.4859](#).
- [9] D. Gromoll, W. Meyer, Periodic geodesics on compact riemannian manifolds. *J. Differential Geometry* 3 (1969) 493-510.
- [10] K. Gruher and P. Salvatore, Generalized string topology operations. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 96 (2008), no. 1, 78-106.
- [11] J. D. S. Jones, Cyclic homology and equivariant homology, *Invent. Math.*, 87 (1987) no. 2, 403-423.
- [12] J. Kock, Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories. *London Mathematical Society Student Texts*, 59. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [13] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, [arXiv:1211.6833](#).
- [14] E. Lupercio, B. Uribe, M. A. Xicotencatl, Orbifold string topology. *Geom. Topol.* 12 (2008), no. 4, 2203-2247.
- [15] J. M. Møller and M. Raussen, Rational homotopy of spaces of maps into spheres and complex projective spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 292 (1985), no. 2, 721-732.
- [16] A. Murillo, The virtual Spivak fiber, duality on fibrations and Gorenstein spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), no. 8, 3577-3587.
- [17] T. Naito, On the mapping space homotopy groups and the free loop space homology groups. *Algebr. Geom. Topol.* 11 (2011), no. 4, 2369-2390.
- [18] H. Tamanoi, Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations, *J. Pure Appl. Algebra*, 214 (2010), 605-615.
- [19] M. Vigué-Poirrier, D. Sullivan, The homology theory of the closed geodesic problem. *J. Differential Geometry* 11 (1976), no. 4, 633-644.
- [20] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*. Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

# $C, D$ 型 Macdonald 多項式の tableau 和表示

星野歩 (香川高等専門学校)

## 概要

このテクニカルレポートでは、Macdonald 多項式の tableau 和表示の概要を簡単に紹介したいと思います。様々な分野の方々がこのレポートを読んでも理解して頂けるように、なるべく self-contained な形にするよう心掛けました。この研究は白石潤一氏、柴原淳氏 (東大数理)、野海正俊氏 (神戸大理) との共同研究です。

## 1 はじめに

$A$  型の Macdonald 多項式は、表現論などでお馴染みの Schur 多項式を 2 つのパラメータ  $q, t$  により変形した対称多項式です。Macdonald 多項式は表現論のみならず、共形場理論や超弦理論などの数理物理学的な対象を扱う場合にもよく現れます。ここでは Macdonald 多項式の扱いやすい明示公式の一つである tableau 和表示を紹介します。私達の結果から  $A$  型の Macdonald 多項式の tableau 和表示は  $A$  型の変形  $\mathcal{W}$  代数から構成できることが分かりました。この結果を応用し、 $A$  型でない Macdonald 多項式の tableau 和表示を  $A$  型でない変形  $\mathcal{W}$  代数から構成しようというのがここでの話です。具体的には  $C, D$  型の変形  $\mathcal{W}$  代数から今まで知られていなかった  $C, D$  型の Macdonald 多項式の tableau 和表示を構成します。

## 2 Macdonald 多項式の定義

ここでは  $A$  型の Macdonald 多項式の定義を紹介します。 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q, t)$  を基礎体、 $\Lambda_{n, \mathbb{F}}$  を変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に関する  $\mathbb{F}$  係数対称多項式のなす空間とします。自然数の分割を  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  ( $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ) とし、 $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  とします。ここに  $|\lambda| = |\mu|$  である 2 つの分割  $\lambda, \mu$  に対し dominance order を次のように定めます:

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i \quad \text{for any } i.$$

また monomial 対称多項式  $m_\lambda$  を

$$m_\lambda = \sum_{\alpha=(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_{\sigma_1(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{\sigma_n(n)}^{\lambda_n} \quad (\alpha \text{ は異なる置換})$$

とします。対称多項式環  $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$  上の差分作用素  $T_{q,x_i}$  を

$$T_{q,x_i}f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n)$$

により定め、差分作用素  $D_n$  を

$$D_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}$$

と定めます。このとき Macdonald によって次の定理が得られました。

**Theorem 2.1** ([M]). 自然数の分割  $\lambda$  と  $x = (x_1, \dots, x_n)$  に対し、次の条件を満たす対称多項式  $P_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$  が唯一存在する:

- (1)  $P_\lambda(x; q, t) = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu$  for some  $c_{\lambda\mu} \in \mathbb{F}$ ,
- (2)  $D_n P_\lambda(x; q, t) = \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i} P_\lambda(x; q, t).$

この Theorem 2.1 によって唯一存在することが示された対称多項式  $P_\lambda(x; q, t)$  を  $A_n$  型 Macdonald 多項式と呼びます。変数  $x_i$  達に添数の入替えで対称群  $\mathfrak{S}_n$  ( $A_n$  型 Weyl 群) が作用することから  $A_n$  型の Macdonald 多項式と呼ばれています。  $P_\lambda(x; q, t)$  を  $P_\lambda$  と略記することにして、具体的にいくつか例を挙げれば

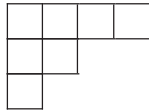
$$\begin{aligned} P_\phi &= m_\phi = 1, \\ P_{(1)} &= m_{(1)}, \\ P_{(2)} &= m_{(2)} + \frac{(1-t)(1-q^2)}{(1-q)(1-qt)} m_{(1,1)}, \quad P_{(1,1)} = m_{(1,1)}, \\ P_{(3)} &= m_{(3)} + \frac{(1-t)(1-q^3)}{(1-q)(1-q^2t)} m_{(2,1)} + \frac{(1-t)^2(1-q^2)(1-q^3)}{(1-q)^2(1-qt)(1-q^2t)} m_{(1,1,1)}, \\ P_{(2,1)} &= m_{(2,1)} + \left( \frac{(1-t)(1-q^2)}{(1-q)(1-qt)} + \frac{(1-t^2)(1-q^2t)}{(1-qt)(1-qt^2)} \right) m_{(1,1,1)}, \\ P_{(1,1,1)} &= m_{(1,1,1)} \end{aligned}$$

のようになります。

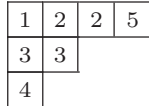
### 3 Macdonald 多項式の tableau 和表示

ここでは Macdonald 多項式の tableau 和表示を紹介します。準備としてまず、組合せ論や表現論で登場するいくつかの対象を紹介します。

自然数の分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  に対し、正方形の箱を左端をそろえて 1 行目に  $\lambda_1$  個、2 行目に  $\lambda_2$  個、 $\dots$ 、 $n$  行目に  $\lambda_n$  個並べた図形を Young 図形といいます。例えば自然数の分割

を  $\lambda = (4, 2, 1)$  とすると、対応する Young 図形は  となります。これから分かるように自然数の分割と Young 図形の間には 1 対 1 の対応があるので、以後、自然数の分割と対応する Young 図形を同一視して話を進めます。この Young 図形の各箱に数を入れてできる図形を tableau といいます。ここで Young 図形に入れる数に次のような規則を設けた tableau を semi-standard tableau といいます。

- 規則： 1. 同じ行にある数は左の数より右の数の方が等号付きで大きい  
2. 同じ列にある数は上の数より下の数の方が大きい

例えば、上記の例で用いた自然数の分割  $\lambda = (4, 2, 1)$  に対し  は semi-standard tableau の一つです。

自然数  $n$  の分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  に対応する Young 図形に対し semi-standard tableau  $T$  を一つ固定します。 $T$  の  $i$  行目にある数  $j$  の個数を  $\theta_{i,j}$  とし、 $\lambda_i^{(j)} = \sum_{k=i}^j \theta_{i,k}$ 、 $\theta^{(i)} = \theta_{1,i} + \dots + \theta_{i,i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とします (このとき  $\lambda_i = \sum_{k=i}^n \theta_{i,k}$  と表せることに注意しておきます)。標準的な shifted factorial の記号を  $(x; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x)$  とするとき Macdonald は次の定理を得ました (ここでの話に合うように少し記述は変えてあります)。

**Theorem 3.1** ([M]).

$$P_\lambda(x; q, t) = \sum_T \psi_T(q, t) x^T \quad (T : \text{semi-standard tableau}), \quad (3.1)$$

ここに

$$\psi_T(q, t) = \prod_{k=1}^n \prod_{1 \leq i \leq j \leq k-1} \frac{(q^{-\lambda_i^{(k)} + \lambda_j^{(k-1)} + 1} t^{-j+i-1}; q)_{\theta_{i,k}}}{(q^{-\lambda_i^{(k)} + \lambda_j^{(k-1)}} t^{-j+i}; q)_{\theta_{i,k}}} \frac{(q^{-\lambda_i^{(k)} + \lambda_{j+1}^{(k)}} t^{-j+i}; q)_{\theta_{i,k}}}{(q^{-\lambda_i^{(k)} + \lambda_{j+1}^{(k)} + 1} t^{-j+i-1}; q)_{\theta_{i,k}}},$$

$$x^T = x_1^{\theta^{(1)}} x_2^{\theta^{(2)}} \cdots x_n^{\theta^{(n)}}$$

とする。

この Theorem 3.1 の (3.1) で与えられた、Macdonald 多項式の semi-standard tableau による和公式を  $A$  型 Macdonald 多項式の tableau 和表示といいます。

## 4 $A$ 型変形 $\mathcal{W}$ 代数の定義

ここでは  $A$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の定義を紹介します。変形  $\mathcal{W}$  代数は  $\mathcal{W}$  代数を  $q, t$  変形した代数です。理論物理学における共形場理論の分類のため Zamolodchikov が導入した  $\mathcal{W}$  代数は、いくつかの場合を除いて生成元と関係式で表せないことが知られています。同様に変形  $\mathcal{W}$  代数も生成元と関係式で表せないのですが “基本的な” 生成元というものがあって、それを用いて具

体的な計算を行います。以後、未定義用語がいくつか登場しますが、具体的な計算に関係しない箇所の詳細は省略することとしますので、あまり気にせず読み進めてもらえれば幸いです。

まず、Fock 空間上の作用素  $\Lambda_i(z)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を次の作用素積展開

$$\Lambda_i(z)\Lambda_j(w) = \gamma_{i,j}(w, z) : \Lambda_i(z)\Lambda_j(w) :,$$

$$\gamma_{i,j}(z, w) = \begin{cases} \frac{(z - tw)(z - w/t)}{(z - w)^2} & (i = j), \\ \frac{(z - qw)(z - w/t)(z - tw/q)}{(z - w)^3} & (i < j), \\ \frac{(z - w/q)(z - tw)(z - qw/t)}{(z - w)^3} & (i > j) \end{cases}$$

で定めます。ここに  $:\dots:$  は正規化順序を表すこととします。Feigin-Frenkel や栗田-久保-小竹-白石によって  $A_{n-1}$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の“基本的な”生成元は次のように定められました。

**Definition 4.1** ([FF],[AKOS]). 不定元を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とする。 $A_{n-1}$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の生成元  $T(z)$  は

$$T(z) = x_1\Lambda_1(z) + x_2\Lambda_2(z) + \dots + x_n\Lambda_n(z)$$

と表される。

$A_{n-1}$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の生成元は Definition 4.1 で与えられた生成元  $T(z)$  から“fusion 構成”という方法で作ります。ランク  $n$  が  $n = 2, 3$  の場合には生成元間の関係式を書き下すことができますが、それ以上のランクで生成元間の関係式を書き下すことはできていないようです。

ここで生成元  $T(z)$  の積を計算してみると

$$\begin{aligned} & T(z_1)T(z_2) \\ &= (x_1\Lambda_1(z_1) + x_2\Lambda_2(z_1))(x_1\Lambda_1(z_2) + x_2\Lambda_2(z_2)) \\ &= x_1^2\Lambda_1(z_1)\Lambda_1(z_2) + x_1x_2\Lambda_1(z_1)\Lambda_2(z_2) + x_1x_2\Lambda_2(z_1)\Lambda_1(z_2) + x_2^2\Lambda_2(z_1)\Lambda_2(z_2) \\ &= x_1^2\gamma_{1,1}(z_2, z_1) : \Lambda_1(z_1)\Lambda_1(z_2) : + x_1x_2\gamma_{1,2}(z_2, z_1) : \Lambda_1(z_1)\Lambda_2(z_2) : \\ &\quad + x_1x_2\gamma_{2,1}(z_2, z_1) : \Lambda_2(z_1)\Lambda_1(z_2) : + x_2^2\gamma_{2,2}(z_2, z_1) : \Lambda_2(z_1)\Lambda_2(z_2) : \quad (4.1) \end{aligned}$$

のようになります。

## 5 $A$ 型変形 $\mathcal{W}$ 代数と Macdonald 多項式の tableau 和表示

ここでは  $A_{n-1}$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の  $m$  点真空期待値から Macdonald 多項式の tableau 和表示が得られることを見ます。

自然数  $m$  の分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  と関数  $f(z_1, \dots, z_n)$  に対して、変数を特殊化する写

像  $\varphi_\lambda^{(\zeta)}$  を

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^{(\zeta)} : \mathbb{F}(z_1, \dots, z_n) &\longrightarrow \mathbb{F}(y) \\ f(z_1, \dots, z_n) &\mapsto f(y, q^{-1}y, \dots, q^{-(\lambda_1-1)}y, \\ &\quad \zeta y, q^{-1}\zeta y, \dots, q^{-(\lambda_2-1)}\zeta y, \\ &\quad \dots, \\ &\quad \zeta^{l-1}y, q^{-1}\zeta^{l-1}y, \dots, q^{-(\lambda_l-1)}\zeta^{l-1}y)\end{aligned}$$

と定めます。ここで  $A_{n-1}$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の  $m$  点真空期待値とは

$$\langle 0 | T(z_1)T(z_2) \cdots T(z_m) | 0 \rangle$$

のこととします。この真空期待値の規格化を

$$\langle 0 | : \Lambda_{i_1}(z_1)\Lambda_{i_2}(z_2) \cdots \Lambda_{i_m}(z_m) : | 0 \rangle = 1 \quad \text{for } 1 \leq m \leq n, \quad i_j \in \{1, \dots, n\} \quad (1 \leq j \leq m)$$

としておきます。このとき私達は次の結果を得ました。

**Theorem 5.1** ([FHSSY]). 任意の自然数  $m$  の分割  $\lambda$  に対し、次を得る。

$$\lim_{\zeta \rightarrow t} \varphi_\lambda^{(\zeta)}(\langle 0 | T(z_1)T(z_2) \cdots T(z_m) | 0 \rangle) = c_\lambda P_\lambda(x; q, t) \quad (c_\lambda \text{ については省略}). \quad (5.1)$$

この Theorem 5.1 (5.1) の左辺について、先に計算した  $T(z_1)T(z_2)$  を例にとって少し補足をしておきます。分割  $\lambda = (2)$  として計算すると  $\varphi_\lambda^{(\zeta)}(\gamma_{2,1}(z_2, z_1)) = 0$ 、 $c_\lambda = 1$  に注意すれば

$$\lim_{\zeta \rightarrow t} \varphi_\lambda^{(\zeta)}(\langle 0 | T(z_1)T(z_2) | 0 \rangle) = x_1^2 + \frac{(1-t)(1-q^2)}{(1-q)(1-qt)}x_1x_2 + x_2^2$$

となります。一般に  $i > j$  に対して  $\varphi_\lambda^{(\zeta)}(\gamma_{i,j}(z_2, z_1)) = 0$  となるので  $: \Lambda_i(z_1)\Lambda_j(z_2) :$  の係数は 0 になります。つまり  $: \Lambda_i(z_1)\Lambda_j(z_2) :$  を  $\boxed{i} \boxed{j}$  と対応させれば、 $\varphi_\lambda^{(\zeta)}$  によって semi-standard tableau の規則に反する tableau の係数は 0 になることが分かります。各 semi-standard tableau  $T$  に対応する正規順序化された作用素積の係数と、Theorem 3.1 (3.1) の  $\psi_T(q, t)$  が等しいことを示すことで Theorem 5.1 は証明され、つまり結果として  $A$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の真空期待値から  $A$  型の Macdonald 多項式の tableau 和表示が構成できることが分かりました。

## 6 $C, D$ 型 Macdonald 多項式の tableau 和表示

この章では  $C, D$  型の Macdonald 多項式を扱いたいと思いますが、残念ながら一般の分割  $\lambda$  に付随する  $C, D$  型 Macdonald 多項式の tableau 和表示は今のところ得られていません。ここでは現在までに得られている結果を紹介したいと思います。

Koornwinder は Macdonald の枠組みを拡張し、 $BC_n$  型の Macdonald 多項式と呼べる対称多項式 (Koornwinder 多項式) を導入しました。ここでは Koornwinder 多項

式の退化版として  $C_n, D_n$  型の Macdonald 多項式を紹介したいと思います。基礎体  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}, c^{\frac{1}{2}}, d^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})$ 、変数  $z = (z_1, \dots, z_n)$  ( $z^{-1} = (z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$ ) に対し

$$\mathcal{A}_i^+(z) = \frac{(1-az_i)(1-bz_i)(1-cz_i)(1-dz_i)}{(abcdq^{-1})^{\frac{1}{2}}t^{n-1}(1-z_i^2)(1-qz_i^2)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{1-tz_iz_j}{1-z_iz_j} \frac{1-tz_i/z_j}{1-z_i/z_j}, \quad \mathcal{A}_i^-(z) = \mathcal{A}_i^+(z^{-1})$$

( $i = 1, \dots, n$ ) とし、 $\mathbb{K}[z^{\pm}] = \mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$  上の差分作用素を

$$\mathcal{D}_z = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i^+(z)(T_{q,z_i} - 1) + \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i^-(z)(T_{q^{-1},z_i} - 1)$$

と定めます。 $BC_n$  型の Weyl 群  $W = \{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  は  $\mathbb{K}[z^{\pm}]$  に添数の入替えと変数を逆数にする操作で作用するとし (分割  $\mu$  にも整合的な作用をします)、monomial 多項式を  $m_\mu(z) = \sum_{\nu \in W \cdot \mu} z^\nu$  と定めます。このとき Koornwinder は次の定理と命題を得ました。

**Theorem 6.1** ([K]). 自然数の分割  $\lambda$  に対し、次の条件を満たす対称多項式  $P_\lambda(z) \in \mathbb{K}[z^{\pm}]$  が唯一存在する:

$$(1) \quad P_\lambda(z) = m_\lambda(z) + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(z) \quad \text{for some } c_{\lambda\mu} \in \mathbb{K},$$

$$(2) \quad \mathcal{D}_z P_\lambda(z) = \left( \sum_{i=1}^n (\alpha t^{n-i} q^{\lambda_i} + \alpha^{-1} t^{-n+i} q^{-\lambda_i}) - \sum_{i=1}^n (\alpha t^{n-i} + \alpha^{-1} t^{-n+i}) \right) P_\lambda(z),$$

ただし  $\alpha = (abcdq^{-1})^{\frac{1}{2}}$ .

**Proposition 6.2** ([K]).  $P_\lambda(z)$  のパラメータ  $a, b, c, d$  を  $b^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$  (resp.  $1, q^{\frac{1}{2}}, -1, -q^{\frac{1}{2}}$ ) に取り換えると  $C_n$  (resp.  $D_n$ ) 型の Macdonald 多項式となる。

自然数  $r$  の分割を  $(r)$  とし  $P_{(r)}^{(C)}(x; q, t, T), P_{(r)}^{(D)}(x; q, t)$  をそれぞれ  $C_n, D_n$  型の Macdonald 多項式、添数の集合を  $I = \{1, 2, \dots, n, \bar{n}, \overline{n-1}, \dots, \bar{1}\}$  とします。まず、私達は Lassalle による次の予想を証明しました。

**Theorem 6.3** ([HNSS], (Conjecture 1, Conjecture 2 [L])). 自然数  $r$  に対して

$$G_r(x; q, t) = \sum_{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{\bar{1}} = r} \prod_{i \in I} \frac{(t; q)_{\theta_i}}{(q; q)_{\theta_i}} x_1^{\theta_1 - \theta_{\bar{1}}} x_2^{\theta_2 - \theta_{\bar{2}}} \dots x_n^{\theta_n - \theta_{\bar{n}}},$$

(ただし  $\theta_i, \theta_{\bar{i}} \geq \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )) とすると

$$\begin{aligned} G_r(x; q, t) &= \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(t; q)_{r-2i}}{(q; q)_{r-2i}} P_{(r-2i)}^{(D)}(x; q, t) \frac{(t; q)_i (t^n q^{r-2i}; q)_i}{(q; q)_i (t^{n-1} q^{r-2i+1}; q)_i}, \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(t; q)_{r-2i}}{(q; q)_{r-2i}} P_{(r-2i)}^{(C)}(x; q, t, T) T^i \frac{(t/T; q)_i (t^n q^{r-2i}; q)_i}{(q; q)_i (T t^{n-1} q^{r-2i+1}; q)_i}. \end{aligned}$$

同値なこととして

$$P_{(r)}^{(D)}(x; q, t) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{i=0}^{[r/2]} G_{r-2i}(x; q, t) t^i \frac{(1/t; q)_i (t^n q^{r-i}; q)_i}{(q; q)_i (t^{n-1} q^{r-i}; q)_i} \frac{1 - t^n q^{r-2i}}{1 - t^n q^{r-1}},$$

$$P_{(r)}^{(C)}(x; q, t, T) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{i=0}^{[r/2]} G_{r-2i}(x; q, t) t^i \frac{(T/t; q)_i (t^n q^{r-i}; q)_i}{(q; q)_i (T t^{n-1} q^{r-i}; q)_i} \frac{1 - t^n q^{r-2i}}{1 - t^n q^{r-1}}.$$

次に  $C$ 、 $D$  型の変形  $\mathcal{W}$  の定義を紹介します。Frenkel-Reshetikhin は Fock 空間上の  $C_n$  (resp.  $D_n$ ) 型の作用素  $\Lambda_i(z)$  ( $i \in I$ ) をそれぞれ次の作用素積展開で決めました:

$$\Lambda_i(z) \Lambda_j(w) = \gamma_{i,j}(z, w) : \Lambda_i(z) \Lambda_j(w) :,$$

$$\gamma_{i,j}(z, w) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ \gamma(w/z) & (i < j, j \neq \bar{i}), \\ \gamma(z/w) & (i > j, \bar{j} \neq i), \\ \gamma(w/z) \gamma(q t^{i-n-1} w/z) & (i < j, j = \bar{i}), \\ \gamma(z/w) \gamma(q t^{i-n-1} z/w) & (i > j, \bar{j} = i), \end{cases}$$

$$\left( \text{resp. } \gamma_{i,j}(z, w) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ \gamma(w/z) & (i < j, j \neq \bar{i}), \\ \gamma(z/w) & (i > j, \bar{j} \neq i), \\ \gamma(w/z) \gamma(q^{2(i-n+1)} t^{-2(i-n+1)} w/z) & (i < j, j = \bar{i}), \\ \gamma(z/w) \gamma(q^{2(i-n+1)} t^{-2(i-n+1)} z/w) & (i > j, \bar{j} = i) \end{cases} \right),$$

$$\text{ただし } \gamma(z) = \frac{(1 - z/q)(1 - qz/t)}{(1 - z)(1 - z/t)}.$$

**Definition 6.4** ([FR]). 不定元を  $x_1, \dots, x_n$  とする。 $C_n, D_n$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の生成元  $T(z)$  は

$$T(z) = x_1 \Lambda_1(z) + \dots + x_n \Lambda_n(z) + \frac{1}{x_n} \Lambda_{\bar{n}}(z) + \dots + \frac{1}{x_1} \Lambda_{\bar{1}}(z)$$

と表される。

このとき私達は Theorem 6.3 の結果を用いることで次を得ました。

**Theorem 6.5** ([HNSS]).  $C_n, D_n$  型変形  $\mathcal{W}$  代数の  $r$  点真空期待値  $\langle 0 | : T(z_1) \cdots T(z_r) : | 0 \rangle$  を特殊化した  $\langle 0 | : T(z) T(q^{-1} z) \cdots T(q^{-(r-1)} z) : | 0 \rangle$  はそれぞれ  $P_{(r)}^{(C)}(x; q, t, t^2/q)$ 、 $P_{(r)}^{(D)}(x; q, t)$  と等しい。

具体的には次のようになります。

$$P_{(r)}^{(C)}(x; q, t, t^2/q) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{\theta_1 + \dots + \theta_n + \theta_{\bar{n}} + \dots + \theta_{\bar{1}} = r} \prod_{k \in I} \frac{(t; q)_{\theta_k}}{(q; q)_{\theta_k}}$$

$$\times \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{(t^{n-k+1} q^{\theta_k + \dots + \theta_{k+1}}; q)_{\theta_{\bar{k}}} (t^{n-k+2} q^{\theta_{k+1} + \dots + \theta_{k+1} - 1}; q)_{\theta_{\bar{k}}}}{(t^{n-k+2} q^{\theta_k + \dots + \theta_{k+1} - 1}; q)_{\theta_{\bar{k}}} (t^{n-k+1} q^{\theta_{k+1} + \dots + \theta_{k+1}}; q)_{\theta_{\bar{k}}}} x_1^{\theta_1 - \theta_{\bar{1}}} \cdots x_n^{\theta_n - \theta_{\bar{n}}},$$

$$P_{(r)}^{(D)}(x; q, t) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{\substack{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{\overline{1}} = r \\ \theta_n \theta_{\overline{n}} = 0}} \prod_{k \in I} \frac{(t; q)_{\theta_k}}{(q; q)_{\theta_k}} \\ \times \prod_{1 \leq l \leq n-1} \frac{(q^{\theta_{l+1} + \theta_{l+2} + \dots + \theta_{l+1}} t^{n-l}; q)_{\theta_{\overline{l}}}}{(q^{\theta_{l+1} + \theta_{l+2} + \dots + \theta_{l+1} + 1} t^{n-l-1}; q)_{\theta_{\overline{l}}}} \frac{(q^{\theta_l + \theta_{l+1} + \dots + \theta_{l+1} + 1} t^{n-l-1}; q)_{\theta_{\overline{l}}}}{(q^{\theta_l + \theta_{l+1} + \dots + \theta_{l+1}} t^{n-l}; q)_{\theta_{\overline{l}}}} x_1^{\theta_1 - \theta_{\overline{1}}} x_2^{\theta_2 - \theta_{\overline{2}}} \dots x_n^{\theta_n - \theta_{\overline{n}}}.$$

これらの式に出てくるパラメータ  $\theta_i$  ( $i \in I$ ) とその条件は、柏原-中島 [KN] による量子群の結晶基底の  $C$  型 (resp.  $D$  型) の tableau と呼ばれる対象のパラメータと同一視できることから、私達はこの Theorem 6.5 で得られた 2 つの式を  $C$  型 (resp.  $D$  型) Macdonald 多項式の tableau 和表示と呼んでいます。

現在のところ得られている結果はここまでです。一般の分割  $\lambda$  に対する  $C, D$  型 Macdonald 多項式の tableau 和表示を得ることは今後の課題です。また、Theorem 6.5 の結果は  $C$  型変形  $\mathcal{W}$  代数のパラメータが 1 つ不足しているようにも思え、この tableau 和表示を手掛かりに変形  $\mathcal{W}$  代数を拡張できるのではないかと個人的には考えています。

長くなりましたが紙面も尽きたようですので、このあたりで擱筆させて頂くことに致します。私の力不足ゆえに読みづらい箇所もあると存じますが、何卒御容赦頂けると幸いです。

## 参考文献

- [M] I.G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, (1995).
- [FF] B. Feigin and E. Frenkel, Quantum  $\mathcal{W}$ -algebras and elliptic algebras, Comm. Math. Phys. **178** (1996), no. 3, 653–678.
- [AKOS] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, Quantum  $\mathcal{W}_N$  algebras and Macdonald polynomials, Comm. Math. Phys. **179** (1996), no. 2, 401–416.
- [L] M. Lassalle, Some conjectures for Macdonald polynomials of type  $B, C, D$ . Sem. Lothar. Combin. 52, (2004), Art. B52h, 24 pp. (electronic).
- [FHSSY] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi and S. Yanagida, Kernel function and quantum algebras, RIMS kōkyūroku **1689** (2010), 133–152.
- [HNSS] A. Hoshino, M. Noumi, J. Shibahara and J. Shiraishi, Deformed  $\mathcal{W}$  algebras and tableau sum formulas of Macdonald polynomials of type  $C_n$  and  $D_n$ , preprint.
- [FR] E. Frenkel and N. Reshetikhin, Deformations of  $\mathcal{W}$ -algebras associated to simple Lie algebras. Comm. Math. Phys. **197** (1998), no. 1, 1–32.
- [K] Koornwinder T. H., Askey–Wilson polynomials for root systems of type  $BC$ , in Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, Vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.
- [KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graphs for representations of the  $q$ -analogue of classical Lie algebras. J. Algebra **165** (1994), no. 2, 295–345.

# 格子上の場の理論における伝搬関数のスペクトル表示について

臼井耕太（北海道大学大学院理学院）

## 概要

このテクニカルレポートでは、格子近似された場の量子論における、伝搬関数のスペクトル表示について概説する。

## 1 ミクロな現象と量子力学

極微の世界の素粒子たちは、我々の素朴な直観とは相容れない、きわめて不思議な振る舞いをする。例えば、古典物理学においては粒子であるとされていた電子は、回折や干渉など、波動現象に特有の振る舞いを示すことが実験的に確認されている。一方、古典的には波動であると理解されていた光は、定まったエネルギーと運動量を持つ粒子としての振る舞いも示すことも実験により見いだされている。

ミクロの世界のこのように不思議な現象は、20 世紀はじめに発見された量子力学により、大変うまく記述されることがわかっている。量子力学においては、粒子はもはや「小さな粒」ではなく、古典物理学的な言葉では記述しようのない、粒子でも波でもない「何か」なのであり、その正確な記述は量子力学によらなければならない。そこで、von Neumann が整備した現代的な量子力学の枠組みを手短に解説することから始めよう。

### 1.1 状態と物理量

ある物理系の解析において重要となる対象は、「状態<sup>\*1</sup>」と「物理量」である。話を具体的にするために、1 つの粒子が 3 次元ユークリッド空間をポテンシャル  $V$  の元で運動する力学系を考えよう。ここにポテンシャルとは、数学的には関数  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  のことであり、物理的には、ポテンシャルの値  $V(x)$  が、位置  $x \in \mathbb{R}^3$  にある粒子のポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を表す。

古典力学においては、この系の力学的状態は粒子の位置  $x \in \mathbb{R}^3$  と運動量  $p \in \mathbb{R}^3$ （または速度）の組  $(x, p) \in \mathbb{R}^6$  を指定することによって、系の力学的状態が完全に定まると考える。すなわち、この系の状態の空間は  $\mathbb{R}^6$  である。また、古典力学でのこの系の物理量とは、状態空間  $\mathbb{R}^6$  上の関数のことである。例えば、粒子の力学的エネルギーを表す物理量は Hamiltonian と呼ばれ、写像

$$H: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

で与えられる。

---

<sup>\*1</sup> 細かい注：以下の記述において、「状態」とは「純粋状態」のことを指す。

一方で、量子力学においては、力学系の状態は、ある可分な Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の単位ベクトルで指定されると考える。また、この系の物理量とは、 $\mathcal{H}$  上の（有界とは限らない）自己共役作用素のことである。上の例の力学系ならば、例えば状態の Hilbert 空間として  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  をとることができる。このとき、系のエネルギーを表す自己共役作用素は（これも Hamiltonian と呼ぶ）ポテンシャル  $V$  に対する適当な仮定<sup>\*2</sup>の下で

$$H = \frac{1}{2m} \Delta + V$$

で与えられる。ただし、 $\Delta$  は一般化された Laplacian であり、 $V$  は関数  $V$  によるかけ算作用素を表す。

## 1.2 測定値と時間発展

次に、「測定値」に関して述べよう。

古典力学においては、状態  $(x, p) \in \mathbb{R}^6$  において物理量  $A : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  を測定したときに得られる測定値は、確実に関数の値  $A(x, p)$  である。従って、力学を決める運動方程式を適当な初期条件のもとで解くことにより、時刻  $t \in \mathbb{R}$  における状態  $(x(t), v(t))$  が求まり、そこから時刻  $t \in \mathbb{R}$  での物理量  $A$  の測定値  $A(x(t), v(t))$  が知れる。

一方、量子力学では、事情が劇的に異なる。量子力学の設定の下で、状態  $\psi \in \mathcal{H}$  において物理量  $A$  を測定することを考えよう。ここに  $\mathcal{H}$  は系の状態を表す可分な Hilbert 空間、 $A$  はそこで働く自己共役作用素である。さて、実験によると、ミクロの世界においては、ある定まった状態  $\psi$  を用意して、ある特定の物理量  $A$  を測定するという実験を複数回行くと、実験のたびに得られる測定値は異なる。量子力学においては、この観測事実を反映して、同じ状態において同じ物理量を測定しても、各回の測定値が確率的に分布すると考える。そして、その確率分布を計算する枠組みを与えるのである<sup>\*3</sup>。すなわち、測定値が確率分布するのは、状態に対する情報の不足ではなく、それこそがミクロの世界の本性であるにとらえるのである。具体的には、次のようになる。状態  $\psi$  で物理量  $A$  を測定したときの測定値は、（定まった数ではなく）ある確率空間  $(\Omega, P)$  上の確率変数  $X_{A,\psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  である。 $X_{A,\psi}$  の分布  $P^{X_{A,\psi}}$  は

$$P^{X_{A,\psi}}(J) = P(X_{A,\psi} \in J) = \|E_A(J)\psi\|^2, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

で与えられる。ただし、 $E_A(\cdot)$  は  $A$  のスペクトル測度<sup>\*4</sup>であり、略記法

$$(X_{A,\psi} \in J) := \{\omega \in \Omega \mid X_{A,\psi}(\omega) \in J\}$$

を用いた。

量子力学の時間発展は、状態の Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  で働く強連続 1 パラメータユニタリ群  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  によって支配される。時刻  $t = 0$  のとき、系が  $\psi \in \mathcal{H}$  で表される状態にあったとする

<sup>\*2</sup> 例えば、 $V$  が Laplacian に関して相対有界で、その相対限界が 1 以下であればよい (Kato-Rellich の定理)。

<sup>\*3</sup> 古典力学の枠組みでは、同じ物理量を複数回測定して得られる値が確率的に分布しているならば、測定時の状態自体が確率分布をしていたと考えるしかない。すなわち、古典力学の設定では、測定値が定まらないのは状態に対する情報の不足であると考えられることになる。

<sup>\*4</sup> ここでの記述から明らかなように、量子力学における確率解釈は、自己共役作用素のスペクトル定理に本質的に依っている。この意味で、物理量が（単に対称作用素ではなく）自己共役作用素であると要求していることはきわめて本質的である。一般に、具体的な量子力学系の解析においては、素朴に構成した物理量が対称作用素であることは容易に分かるが、その自己共役性は全く明らかでないことが多い。物理学の文献においては、物理量（特に Hamiltonian）が自己共役であるかどうかという問題は無視されることが多いが、物理量の自己共役性を示す問題は、単なる数学的は問題などでは決してなく、物理的に重要な意味を持つことをここで強調しておきたい。

と、時刻  $t$  では、系の状態は  $\psi(t) := U(t)\psi$  になる<sup>\*5</sup>。そして、この  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  の生成子こそが系のエネルギーを表す Hamiltonian である<sup>\*6</sup>。状態の時間発展  $t \mapsto \psi(t)$  が与えられると、物理量  $A$  の測定値の期待値の時間発展が予言できる。時刻  $t$  において、物理量  $A$  を測定したときに得られる値の期待値は、スペクトル定理により

$$\int_{\Omega} X_{A,\psi(t)} dP = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP^{X_A,\psi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\|E_A(\lambda)\psi(t)\|^2 = \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (1)$$

で与えられる事が分かる。

## 2 場の量子論と格子正則化

高エネルギーにおいては、素粒子たちは生成消滅を起こす。このような物理系を記述するには、無限自由度の量子力学、すなわち、場の量子論を扱わなければならない。また、特殊相対性理論を考慮することも必要になってくる。そこで、以下では特殊相対論的な場の量子論を考察しよう<sup>\*7</sup>。ここでも話を具体的にするために、電荷を持たないスピン 0 の中性粒子が相互作用をしながら生成消滅を繰り返している量子系を例として考えることにする。

まず、はじめに断っておかなければならないが、相対論的な場の量子論の具体的で現実的な模型には、(素粒子の標準模型も含めて) 数学的に厳密な定義が今のところ存在しない。従って、この章の記述は数学的な厳密さにはこだわらずに行う。途中、数学的には全く無意味な式も多く登場することをあらかじめ了承されたい。

### 2.1 Green 関数の経路積分表示

$\mathcal{H}$  を系の状態の Hilbert 空間としよう。量子場とは、 $\mathcal{H}$  上の対称作用素に値をとる<sup>\*8</sup>  $\mathbb{R}^4$  上の超関数のことである。この超関数核を  $\phi(x)$  と書く。物理的には、量子場は、時空の各点において粒子を生成または消滅させる作用を持つものである。この系の物理量は、この量子場を用いて構成される。例えば、今考えている系の全エネルギーを表す Hamiltonian  $H$  は、

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right\} \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $\lambda > 0$  は、結合定数と呼ばれる定数で、相互作用の強さを表す。

場の量子論においては、真空と呼ばれる特別なベクトルが存在する。これは、粒子が一つも存在しない状態を記述する単位ベクトルである。この真空を  $\Omega$  と書くことにしよう。場の量子論において興味のある対象は、場の  $n$  点 Green 関数と呼ばれる

$$\langle \Omega, \phi(t_1, \mathbf{x}_1) \phi(t_2, \mathbf{x}_2) \dots \phi(t_n, \mathbf{x}_n) \Omega \rangle_{\mathcal{H}}, \quad t_1 > t_2 > \dots > t_n, \quad (3)$$

<sup>\*5</sup> ただし、この間に系に対する測定は行わないとする。

<sup>\*6</sup> ここからも、Hamiltonian が自己共役作用素であることは本質的であることが分かる。

<sup>\*7</sup> 自然界の基本的な相互作用は、重力、電磁力、弱い相互作用、強い相互作用、の 4 つである。重力以外の 3 つの相互作用を量子論的に記述する物理理論は既に確立されており (ただし、数学的な、あるいは論理的に厳密な観点からは未だに完成にはほど遠い)、素粒子の標準模型とよばれている。この理論は、現在までに得られている素粒子の世界の観測事実を非常に良く説明する (標準模型では説明しきれない観測事実も一部存在し、それらをも説明する理論が模索されているが、まだ決定版と言ったものはないようである)。標準模型は、Weinberg-Salam の電弱統一理論 (弱い相互作用と電磁気学を統一する理論) と量子色力学 (強い相互作用を記述する理論) からなり、これらはいずれもゲージ対称性と特殊相対論的な対称性 (Lorentz 対称性) を持つ場の量子論である (と期待される)。

<sup>\*8</sup> 量子場が対称作用素であることは、対応する粒子が電荷を持たない事に対応する。量子場自体は物理量である必要はないので、自己共役性は要求されない。

である．これらの関数から，散乱断面積や粒子の寿命など物理的に重要な様々な量が計算される．特に  $n = 2$  の場合の

$$\langle \Omega, \phi(t_1, \mathbf{x}_1) \phi(t_2, \mathbf{x}_2) \Omega \rangle_{\mathcal{H}}, \quad t_1 > t_2, \quad (4)$$

が重要で，伝搬関数 (propagator) と呼ばれる．

形式的，発見法的議論によれば， $n$  点 Green 関数は次の「積分」で計算される：

$$\langle \Omega, \phi(t_1, \mathbf{x}_1) \phi(t_2, \mathbf{x}_2) \dots \phi(t_n, \mathbf{x}_n) \Omega \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi)} \varphi(t_1, \mathbf{x}_1) \varphi(t_2, \mathbf{x}_2) \dots \varphi(t_n, \mathbf{x}_n)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi)}}, \quad (5)$$

ただし， $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  であり，上の積分の測度  $\mathcal{D}\varphi$  は

$$\mathcal{D}\varphi = \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\varphi(x).$$

で“定義”される Lebesgue 測度の無限直積である．また， $S(\varphi)$  は作用と呼ばれる  $\varphi$  の汎関数で，Hamiltonian が (2) で与えられる系に対しては，

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi(x)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \varphi(x)|^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi(x)^4 \right\} \quad (6)$$

となる．表示 (5) を Feynman の経路積分表示という．

## 2.2 格子正則化

ここで，無意味な表式 (5) に意味を与えるために，右辺を正則化することを考えよう．まず，(5) の右辺に現れる振動積分の特異性を解消するために，時空を“ユークリッド化”する．(5) が時刻が純虚数の点  $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  を含む領域にまで解析接続できたとして， $\tau_j \in \mathbb{R}$  に対して (5) に  $t_j = -i\tau_j$  を代入すると ( $j = 1, 2, \dots, n$ )，

$$\langle \Omega, \phi(-i\tau_1, \mathbf{x}_1) \phi(-i\tau_2, \mathbf{x}_2) \dots \phi(-i\tau_n, \mathbf{x}_n) \Omega \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi_E e^{-S_E(\varphi_E)} \varphi_E(\tau_1, \mathbf{x}_1) \varphi_E(\tau_2, \mathbf{x}_2) \dots \varphi_E(\tau_n, \mathbf{x}_n)}{\int \mathcal{D}\varphi_E e^{-S_E(\varphi_E)}} \quad (7)$$

が得られる．ただし，

$$\varphi_E(\tau, \mathbf{x}) := \varphi(-i\tau, \mathbf{x}), \quad (8)$$

$$S_E(\varphi_E) := \int_{\mathbb{R}^4} d\tau d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_E(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_E(\tau, \mathbf{x})|^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi_E(\tau, \mathbf{x})^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi_E(\tau, \mathbf{x})^4 \right\} \quad (9)$$

$$\mathcal{D}\varphi_E := \prod_{(\tau, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} d\varphi_E(\tau, \mathbf{x}) \quad (10)$$

とおいた (添字  $E$  は Euclid の意味)．この手続きにより，特異な振動因子  $e^{iS(\varphi)}$  が姿を消し，より性質のよい関数  $e^{-S_E(\varphi_E)}$  現れたことに注意されたい．これを“ユークリッド化”という．

次に，自由度が無限大であることからくる問題を処理しよう．そのために，時空を有限の格子

$$\Lambda_L := \{-L+1, L, \dots, 0, 1, \dots, L\}^4 \subset \mathbb{Z}^4, \quad L \in \mathbb{N}$$

で近似する．以下では記号の煩雑さを避けるため，添字  $E$  を省略し，Euclid 時空の時間変数  $\tau$  を改めて  $t$  と書くことにする．さて，この下で格子近似された作用<sup>\*9</sup>は

$$S^{\text{lat}}(\varphi) = \sum_{x \in \Lambda_L} \left\{ \sum_{\mu=0}^3 \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi(x)^4 \right\} \quad (11)$$

となる．ただし， $\partial_\mu$  は  $\mu$  方向の差分作用素

$$\partial_\mu \varphi(x) := \varphi(x + e_\mu) - \varphi(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

である ( $e_\mu$  は  $\mu$  方向の単位ベクトル)．ここまでくると，(7) が意味を持つ．そこで，改めて格子上の Euclid  $n$  点 Green 関数を

$$\mathcal{G}^{\text{lat}}(x_1, \dots, x_n) := \frac{\int \mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi e^{-S^{\text{lat}}(\varphi)} \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)}{\int \mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi e^{-S^{\text{lat}}(\varphi)}}, \quad (12)$$

$$\mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi := \prod_{x \in \Lambda_L} d\varphi(x) \quad (13)$$

により定義する．右辺は通常の  $|\Lambda_L|$  次元 Lebesgue 積分であり  $S^{\text{lat}}$  の形から可積分性も明らかであろう．

以上の手続きを格子正則化といい，作用汎関数  $S^{\text{lat}}$  の形を決めることに定まる上の数学モデルを格子上の場の理論という．場の量子論の格子正則化は，Wilson が 1974 年に始めて提唱した [1]．ここでは，もっとも単純な中性スカラー場の理論を考察したが，Wilson は，強い相互作用を記述する量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) をゲージ対称性を保ったまま格子正則化することに成功したのである．(14) の右辺の測度

$$\frac{\int \mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi e^{-S^{\text{lat}}(\varphi)} (\dots)}{\int \mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi e^{-S^{\text{lat}}(\varphi)}}$$

は  $\mathbb{R}^{|\Lambda_L|}$  上の確率測度であるから，例えば Monte Carlo シミュレーションによって数値的に計算をすることが可能である<sup>\*10</sup>．形式的摂動論を用いることのできない QCD の解析にはこの手法はきわめて有用である．

### 3 量子論の再構成

場の量子論の格子正則化は，以上のようにして行われるが，これが本当に量子論の系を定義しているかどうかは自明とはほど遠い問題である．

Wilson が提唱した格子正則化された QCD に関しては次の事実が知られている [2, 3] ．

**Theorem 3.1** (Lüscher)．格子正則化された Wilson の QCD 模型から，状態ベクトルの Hilbert 空間およびその上で働く Hamiltonian が自己共役作用素として定まり，(5) 相当する式を満たす．

<sup>\*9</sup> 正確には  $\Lambda_L$  の境界条件を定める必要がある．ここでは，例えば周期的境界条件を選ぶことにする．

<sup>\*10</sup> この状況は，QCD のようにゲージ場が存在する系でも変わらない．実際，QCD の解析を目的として，格子 QCD を用いた大規模な数値計算が数多く行われてきており，膨大な研究の蓄積がある．

**Theorem 3.2** (Osterwalder-Seiler). 格子正則化された Wilson の QCD 模型は, *Reflection Positivity* と呼ばれる条件 (定義は後述の (A3) を参照) を満足する. また, *Reflection Positivity* を満足する格子模型は, (Wilson QCD に限らず) 対応する状態ベクトルの Hilbert 空間および Hamiltonian を持つ.

ここでの目的は, より一般的, 抽象的な設定で, 格子正則化された場の理論の模型から量子論を構成し, 伝搬関数に対する有用な表示を示すことである. まず, 「格子正則化された場の理論」を抽象的に, 次のように定義することにしよう. ただし, 簡単のため, 以下では複素スカラー場 (物理的には電荷を持ったスピン 0 の粒子に対応する場) の場合を考えることにする.

**Definition 3.1.** 格子正則化された場の理論とは, 次の (i)(ii) を満たす数学的対称の組  $(\mathfrak{A}, \langle \cdot \rangle)$  である.

(i)  $\mathfrak{A}$  とは, 各点  $x \in \mathbb{Z}^d$  に付随する格子上の場  $\varphi(x) \in \mathbb{C}$  に対して

$$\{\varphi(x), \varphi(x)^*, 1\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$$

で生成される多項式の全体である.

(ii)  $\langle \cdot \rangle : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$  は線形写像で  $\langle 1 \rangle = 1$  を満たすものである.  $\langle \cdot \rangle$  を期待値汎関数という.

前節との関係でいえば,  $\langle \cdot \rangle$  は  $a \in \mathfrak{A}$  が  $a = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)$  の形のとき,

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \rangle := \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi e^{-S^{\text{lat}}(\varphi)} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)}{\int \mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi e^{-S^{\text{lat}}(\varphi)}}, \quad (14)$$

$$\mathcal{D}^{\text{lat}} \varphi := \prod_{x \in \Lambda_L} d\varphi(x) \quad (15)$$

で与えられる汎関数である. 格子作用  $S^{\text{lat}}$  を選ぶことは, 汎関数  $\langle \cdot \rangle$  を選ぶことに対応する<sup>\*11</sup>. 以下では, 汎関数  $\langle \cdot \rangle$  として適当な条件を満足するもの考える. そのために, 少し記号を準備しよう.

まず,  $\mathfrak{A}$  で働く時間反転の作用素  $\theta$  を次のように定める. Generator に対しては

$$\theta\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(-t+1, \mathbf{x})^*, \quad \theta\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(-t+1, \mathbf{x})^*, \quad \theta 1 = 1$$

により定義し, 一般の  $\mathfrak{A}$  の元には関係式

$$\theta(ab) = \theta(b)\theta(a), \quad \theta(\lambda a + \mu b) = \lambda^* \theta(a) + \mu^* \theta(b)$$

により延長する. 次に,  $y \in \mathbb{Z}^d$  に対して, 並進作用素  $\tau_y \in \text{Aut } \mathfrak{A}$  を

$$\tau_y \varphi(x) = \varphi(x+y), \quad \tau_y \varphi(x)^* = \varphi(x+y)^*, \quad \tau_y 1 = 1$$

で定める. また,  $\{\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x})^*, 1\}_{t \geq 1}$  で生成される多項式環 ( $\mathfrak{A}$  の部分代数) を  $\mathfrak{A}_+$  と書く.

以上の記号の準備のもとで, ここで考察する理論に対する仮定 (A1)-(A4) を述べよう<sup>\*12</sup>.

<sup>\*11</sup> 格子上の場の理論から連続時空における場の理論に移行するには, 2つの極限 (1) 格子間隔をゼロにする (2) 格子サイズ  $L$  を無限大にする, を考える必要がある. (1) を連続極限, (2) を熱力学極限という. (2) の熱力学極限についてはある程度理解されており, 本質的に難しいのは (1) の連続極限である. ここでは, 熱力学極限をとった後の格子上の理論を考えている. これは, 理論の並進対称性を回復させるためであるが, 実際に数値計算に用いられる QCD などの模型はもちろんすべて有限体積のものである.

<sup>\*12</sup> 例えば, Wilson が提唱した格子 QCD はこれらの条件をすべて満たしている. しかし, 具体的な模型がこれらの条件を満足することを示すのは, それほど自明な問題ではない (特に (A3) の証明).

(A1) (エルミート性)

$$\langle a \rangle = \langle a \rangle^*, \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

(A2) (並進対称性)

$$\langle \tau_x(a) \rangle = \langle a \rangle, \quad \forall a \in \mathfrak{A}, \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

(A3) (Reflection Positivity)

$$\langle \theta(a) a \rangle \geq 0, \quad \forall a \in \mathfrak{A}_+.$$

(A4) (相関関数の多項式有界性) 任意の  $a, b \in \mathfrak{A}$  に対して定数  $C_{a,b} > 0$  と自然数  $n \in \mathbb{N}$  が存在して,

$$|\langle b \tau_x(a) \rangle| \leq C_{a,b}(1 + |x|^n), \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

具体的な作用の形を与えることなく, これらの条件のみから, 全く抽象的に量子力学の系が再構成できることが示せる.

**Theorem 3.3.**  $(\mathfrak{A}, \langle \cdot \rangle)$  を条件 (A1)-(A4) を満たす格子上の場の理論とせよ. このとき, 状態ベクトルの Hilbert 空間と, その上に働く Hamiltonian 作用素  $H$  および運動量作用素  $P_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, d-1$ ) が構成される. これらはすべて自己共役であり, 作用素の組  $(H, P_1, \dots, P_{d-1})$  は強可換である. さらに, 結合スペクトル測度  $\sigma_J(H, P_1, \dots, P_{d-1})$  は  $[0, \infty) \times [-\pi, \pi]^{d-1}$  に含まれる.

この定理の証明をみれば分かるのだが, この系の運動量作用素が有界になるのは, 実は格子間隔が有限であることの反映である<sup>\*13</sup>. 従って, 格子間隔を有限にするという正則化は, 運動量の大きい所からの寄与を取り除くことに相当していると言えよう. この意味で, 格子正則化された場の理論は, いわゆる紫外切断 (ultraviolet cutoff) の入った場の理論と見なせるのである.

## 4 伝搬関数のスペクトル表示

Theorem 3.3 により存在が保証される結合スペクトル  $\sigma_J(H, P_1, \dots, P_{d-1})$  は, 場の量子論において, 量子的粒子の質量などの系の物理的情報を担う重要な量である. そこで, 抽象的に構成されたこれらの作用素の結合スペクトルと, 格子上の場の理論から具体的に計算できる量 (典型的には  $n$  点 Green 関数) の関係がつくことが望まれる. その要求に応えるのが次の定理であり, このテクニカルレポートの結論である.

**Theorem 4.1.**  $(\mathfrak{A}, \langle \cdot \rangle)$  を条件 (A1)-(A4) を満たす格子上の場の理論とせよ. このとき,  $x = (2m+1, \mathbf{x})$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{d-1}$ ) に対して, 2点 Green 関数  $\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle$  は  $(H, P_1, \dots, P_{d-1})$  の結合スペクトル測度  $\sigma_J(H, P_1, \dots, P_{d-1})$  に台を持つ  $d$  次元 Borel 測度  $\rho$  を用いて次のように書ける:

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle = \int_{\sigma_J(H, P_1, \dots, P_{d-1})} e^{-2m\lambda - i\mathbf{p}\mathbf{x}} d\rho(\lambda, \mathbf{p}). \quad (16)$$

<sup>\*13</sup> 通常の連続時空においては運動量作用素は非有界になる.

$P$  さらに , この表示は一意的である .

この表式 (16) は , 連続時空上の場の量子論において , 伝搬関数の Umezawa-Kamefuchi-Källén-Lehmann 表示 [4, 5, 6] として知られる式のユークリッド格子版と見なされるべきものである .

## 参考文献

- [1] K. Wilson. “CONFINEMENT OF QUARKS.” Phys. Rev., D10, 2445-2459, 1974.
- [2] M. Lüscher. “Construction of a Selfadjoint, Strictly Positive Transfer Matrix for Euclidean Lattice Gauge Theories.” Comm. Math. Phys., 54:283, 1977.
- [3] K. Osterwalder and E. Seiler. “Gauge Field Theories on the Lattice.” Ann. Phys., 110:440, 1978.
- [4] H. Umezawa and S. Kamefuchi. “The vacuum in quantum electrodynamics.” Prog. Theor. Phys., 6:543-558, 1951.
- [5] G. Källén. “On the definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics.” Helv. Phys. Acta, 25:417, 1952.
- [6] H. Lehmann. “Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonsten quantisierter Felder.” Nuovo Cimento, 11:342, 1954.

# Singularities of the maps associated with Milnor fibrations for mixed polynomials

隅田大貴（九州大学IMI 博士研究員）

## 1 Introduction

古典的に知られる複素多項式から定まる Milnor 束 ([3]) を用いて、球面における絡み目の補空間からトーラスへの可微分写像である Milnor fibration product map を構成した。その特異点と折り目特異点の判別条件が [6] の主結果である。一方 Milnor 束は岡陸雄氏により、良い mixed polynomial から定まるものへと拡張されている ([4, 5])。そこで Milnor 束の射影の可微分写像の拡張に伴い、Milnor fibration product map を mixed polynomial から定まる可微分写像に拡張し、その特異点を調べた ([7])。2 章ではオリジナルの Milnor 束、3 章で実特異点について紹介し ([1])、4 章で Milnor fibration product map の特異点についての結果を述べる。5 章で mixed polynomial とそれから定まる Milnor 束について紹介し、6 章で Milnor fibration product map を拡張した可微分写像の特異点と折り目特異点の判別条件を述べる。6 章の結果が本講演で述べたい主結果である。

## 2 Milnor 束

原点  $O \in \mathbb{C}^n$  で消える複素  $n$  変数多項式  $f$  を定義多項式とする複素超曲面  $V_f = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$  と実  $2n - 1$  次元球面  $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = \varepsilon\}$  の交わりを  $K_f$  で表す。ある  $\varepsilon_f > 0$  が存在して  $\varepsilon_f$  以下の任意の正数  $\varepsilon$  に対し

$$\phi_f : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1, \phi_f(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

は臨界点を持たず、単位円周  $S^1 = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$  上の局所自明なファイバー束の射影になる。このファイバー束は **Milnor 束** と呼ばれ、任意のファイバー  $F_\theta = \phi_f^{-1}(e^{i\theta})$  は **Milnor ファイバー** と呼ばれる実  $2n - 2$  次元開多様体である。また実  $2n - 3$  次元閉多様体  $K_f$  は、任意の Milnor ファイバー  $F_\theta$  に対し  $\partial \overline{F_\theta} = K_f$  を満たす。ここで  $S_\varepsilon \setminus K_f$  の任意の点に対し、それを通るあるベクトル場に沿った積分曲線で、その  $\phi_f$  による射影が底空間  $S^1$  を速度 1 で正の方向に回るものが構成できる。この

曲線は  $S_\varepsilon \setminus K_f$  から自身への微分同相写像  $h_t : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S_\varepsilon \setminus K_f$  を誘導し、さらにそれを Milnor ファイバー上に制限することで、Milnor ファイバー間の微分同相写像の連続な 1 パラメータ族  $\{h_t : F_0 \rightarrow F_t\}$  が構成される。

$n$  個の自然数  $a_1, \dots, a_n$  は最大公約数が 1 であり  $m$  は自然数とする。複素  $n$  変数多項式  $f$  が  $\text{weight}(a_1, \dots, a_n; m)$  の**擬斉次多項式**であるとは、

$$a_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + a_n z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = m f$$

を満たすことであると定義する。これは任意の複素数  $\lambda$  に対して

$$f(\lambda^{a_1} z_1, \dots, \lambda^{a_n} z_n) = \lambda^m f(z)$$

が成り立つことと同値である。特に  $a_1 = \dots = a_n$  のとき  $f$  は**斉次多項式**という。擬斉次多項式  $f$  の  $\text{weight}$  が  $(a_1, \dots, a_n; m)$  のとき、 $h_t : F_0 \rightarrow F_t$  として

$$h_t(z) = \left( z_1 \exp\left(\frac{ia_1 t}{m}\right), \dots, z_n \exp\left(\frac{ia_n t}{m}\right) \right)$$

を選ぶことができる。

### 3 可微分写像の特異点

写像  $f : M \rightarrow N$  は  $\dim M \geq \dim N$  を満たす多様体間の可微分写像とする。その微分写像  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  の階数が  $\dim N$  未満になるとき、点  $p \in M$  は  $f$  の**特異点**であるといい、特異点の  $f$  による像を**特異値**という。さらに  $f$  の特異点  $p \in M$  に対して、 $p$  の周りの局所座標  $x = (x_1, \dots, x_{\dim M}) : U_M \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M}$  と特異値  $f(p) \in N$  の周りの局所座標  $y = (y_1, \dots, y_{\dim N}) : U_N \rightarrow \mathbb{R}^{\dim N}$  が存在して

$$\begin{aligned} y_k \circ f &= x_k \quad (k = 1, 2, \dots, \dim N - 1) \\ y_{\dim N} \circ f &= - \sum_{k=\dim N}^{s-1} x_k^2 + \sum_{k=s}^{\dim M} x_k^2 \end{aligned}$$

を満たすとき、 $I = \min \{s - \dim N, \dim M - s - 1\}$  として、特異点  $p$  は**指数  $I$  の折り目特異点**であるという。さらに  $f$  が折り目特異点以外の特異点を持たないとき、 $f$  は**折り目写像**であるという。

### 4 Milnor fibration product map

Milnor fibration product map は、一般次元のトーラスへの可微分写像として定義できるが、本章では 2 次元トーラスへの可微分写像として定義する。詳しい内容は [6] をご覧頂きたい。

複素  $n$  変数多項式  $f$  に対し正数  $\varepsilon_f$  を、 $\varepsilon_f$  以下の任意の正数  $\varepsilon$  に対し  $\phi_f : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1$  が臨界点を持たないものとする（同様に  $\varepsilon_g$  をとる）。絡み目  $K_{fg} = V_{fg} \cap S_\varepsilon$  は容易に、 $K_{fg} = K_f \cup K_g$  および  $S_\varepsilon \setminus K_{fg} = (S_\varepsilon \setminus K_f) \cap (S_\varepsilon \setminus K_g)$  を満たすことがわかる。ゆえに  $\min\{\varepsilon_f, \varepsilon_g\}$  以下の任意の正数  $\varepsilon$  に対して、トーラスへの可微分写像

$$\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow S^1 \times S^1 = T^2, \quad \Phi(z) = \left( \frac{f(z)}{|f(z)|}, \frac{g(z)}{|g(z)|} \right)$$

を定義すると、その各成分の写像は臨界点を持たないことがわかる。この可微分写像  $\Phi$  を **Milnor fibration product map** と呼ぶ。Milnor fibration product map は一般に Milnor 束の射影の可微分写像の拡張になっている。Milnor 束とその Hamm による拡張 ([2]) は、球面の半径  $\varepsilon$  を十分小さくすることにより、その射影である可微分写像は特異点を持たない。それらの例とは異なり Milnor fibration product map は、複素多項式  $f, g$  の取り方により球面のどのような半径  $\varepsilon$  についても特異点を持つことがある。複素超曲面の補空間  $\mathbb{C}^n \setminus V_f$  上にベクトル

$$\text{grad } \log f = \left( \frac{\partial \overline{\log f}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \overline{\log f}}{\partial z_n} \right)$$

を定義する。このとき、Milnor fibration product map について次の結果を得ている。

**Proposition 4.1.** 点  $p \in S_\varepsilon \setminus K_{fg}$  が  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点である為の必要十分条件は、 $p, i \text{grad } \log f(p), i \text{grad } \log g(p)$  が  $\mathbb{R}$  上一次従属となることである。

Proposition 4.1 の系として、次の結果を得ている。

**Corollary 4.2.** 複素多項式  $f, g$  が共通の変数を持たないとき、 $\min\{\varepsilon_f, \varepsilon_g\}$  以下の任意の正数  $\varepsilon$  に対して、Milnor fibration product map  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  は特異点を持たない。

複素多項式  $f, g$  が良い条件を満たすとき、Proposition 4.1 を精密化できた。

**Proposition 4.3.** 擬斉次多項式  $f, g$  の *weights*  $(w_f; m_f)$  と  $(w_g; m_g)$  は  $m_g w_f = s m_f w_g$  を満たすとする。このとき  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点集合は

$$\Sigma(\Phi) = \left\{ z \in S_\varepsilon \setminus K_{fg} \mid \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial g}{\partial z_l} - \frac{\partial f}{\partial z_l} \frac{\partial g}{\partial z_k} = 0 \quad \forall k, l \right\}$$

である。

2 章で紹介した球面における絡み目の補空間から自身への微分同相写像を  $h_{f,t} : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S_\varepsilon \setminus K_f$ ,  $h_{g,t} : S_\varepsilon \setminus K_g \rightarrow S_\varepsilon \setminus K_g$  とする。Proposition 4.3 の条件は  $z \in S_\varepsilon \setminus K_{fg}$  に対して  $h_{g,st}(z) = h_{f,t}(z)$  が成り立つことを主張している。この結果から Milnor fibration product map  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点  $p$  とその特異値  $\Phi(p)$  の周りの局所座標をうまくとると、 $p$  が  $\Phi$  の折り目特異点であることと、 $\phi_f^{-1}(\phi_f(p))$  に  $\phi_g : S_\varepsilon \setminus K_g \rightarrow S^1$  を制限した写像の非退化臨界点であることが同値であるとわかる。ゆえにヘッセ行列を計算することで、次の結果を得た。

**Theorem 4.4.** 擬斉次多項式  $f, g$  の *weights*  $(w_f; m_f), (w_g; m_g)$  は  $m_g w_f = s m_f w_g$  を満たすとする。Milnor fibration product map  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点  $p$  について、Milnor ファイバー  $F_f = \phi_f^{-1}(\phi_f(p))$  の点  $p$  での接空間  $T_p F_f$  の実基底  $v_1, \dots, v_{2n-2} \in \mathbb{C}^n$  を並べた  $n \times (2n-2)$  行列を  $V = (v_1, \dots, v_{2n-2})$  とする。このとき  $p$  が  $\Phi$  の折り目特異点である為の必要十分条件は

$$\operatorname{Re}(V^T \operatorname{Hess}_p(-i(\log g - s \log f))V)$$

が正則になることである。ただし  $\operatorname{Hess}_p(\cdot)$  は点  $p$  でのヘッセ行列で、 $V^T$  は  $V$  の転置行列であるとし、 $\operatorname{Re}(W)$  は行列  $W$  の実部行列とする。

Theorem 4.4 で判別された折り目特異点  $p$  について、 $p$  と  $i \operatorname{grad} \log f(p)$  が  $\mathbb{C}$  上一次従属の場合、折り目特異点  $p$  の指数は  $n-1$  になることを得た ([6])。これらの結果を用いることで得られた、Milnor fibration product map の特異点, 特異値, 折り目特異点, 折り目写像の例を述べる。

**Example 4.5.** 斉次多項式  $f = \sum_{k=1}^n c_k z_k^m$ ,  $g = \sum_{l=1}^n d_l z_l^m$  は、 $m \geq 2$  および、任意の  $k, l$  について  $c_k \neq 0$ ,  $d_l \neq 0$ ,  $k \neq l$  について  $A_{k,l} = c_k d_l - c_l d_k \neq 0$  を満たすとする。Milnor fibration product map  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  は、 $m = 2$  のとき折り目写像である。さらに  $m > 2$  のとき  $\Phi$  は特異点を持つが、それは折り目特異点以外の特異点である。

ベクトル  $e_u \in \mathbb{C}^n$  は第  $u$  成分が 1 の単位ベクトルとし、 $\zeta_u = c_u / |c_u|$ ,  $\eta_u = d_u / |d_u|$  とする。このとき  $\Phi$  の特異点集合は

$$\Sigma(\Phi) = \{\varepsilon e^{i\theta} e_u \mid \theta \in \mathbb{R}, 1 \leq u \leq n\}$$

であり、特異値集合は

$$\Phi(\Sigma(\Phi)) = \{(\zeta_u e^{mi\theta}, \eta_u e^{mi\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}, 1 \leq u \leq n\}$$

である。ゆえに特異値集合はいくつかの  $(1, 1)$  トーラス絡み目で、 $\Phi|_{\Sigma(\Phi)} : \Sigma(\Phi) \rightarrow \Phi(\Sigma(\Phi))$  の写像度は  $m$  である。

**Example 4.6.** 斉次多項式  $f = z_1^m + z_2^m$  ( $m \geq 2$ ) と  $g = z_1 z_2$  について、 $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  は折り目写像である。さらに各折り目特異点の指数は 1 である。

このとき  $\Phi$  の特異点集合は

$$\Sigma(\Phi) = \left\{ \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{\sqrt{2}} (1, \omega) \mid \theta \in \mathbb{R}, \omega^m = 1 \right\}$$

であり、特異値集合は

$$\Phi(\Sigma(\Phi)) = \{(e^{mi\theta}, \omega e^{2i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}, \omega^m = 1\}$$

である。ゆえに特異値集合は、 $m$  が奇数のときは  $m$  個の連結成分からなる  $(m, 2)$  トーラス絡み目で、 $m$  が偶数のときは  $m$  個の連結成分からなる  $(m/2, 1)$  トーラス絡み目であり、 $\Phi|_{\Sigma(\Phi)} : \Sigma(\Phi) \rightarrow \Phi(\Sigma(\Phi))$  の写像度は  $m$  が偶数のとき 1 で、 $m$  が奇数のとき 2 である。

以上の例は特異点集合が完全に記述できるものである。次に述べる例では特異点集合の一部しか決定できていないが、特異値集合が横断的に交わる変わった状況が現れている。

**Example 4.7.** 複素多項式  $f, g$  を  $f = z_1^3 + z_2^2, g = z_1^2 + z_2^3$  とする。このとき  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点集合  $\Sigma(\Phi)$  は

$$\Sigma(\Phi) \supset \{(\varepsilon e^{i\theta}, 0), (0, \varepsilon e^{i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

を満たす。その特異値を計算することで

$$\Phi(\Sigma(\Phi)) \supset \{(e^{3i\theta}, e^{2i\theta}), (e^{2i\theta}, e^{3i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

を得る。ゆえに特異値集合は  $(3, 2)$  トーラス結び目と  $(2, 3)$  トーラス結び目を含むが、それらがトーラス上の 5 点で横断的に交わっている。

## 5 Mixed polynomial

$2n$  個の変数  $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  で定まる多項式  $f(z, \bar{z})$  を **mixed polynomial** という。すなわち  $z = (z_1, \dots, z_n)$  と  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対し  $z^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$ 、 $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  と  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対し  $\bar{z}^\mu = \bar{z}_1^{\mu_1} \cdots \bar{z}_n^{\mu_n}$  としたとき、

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} z^\nu \bar{z}^\mu$$

の形に表されるものをいう。Milnor 束の射影を定義する複素多項式を mixed polynomial に拡張した場合、それがファイバー束になるとは限らないが、

$$\phi_f : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1, \quad \phi_f(z) = \frac{f(z, \bar{z})}{|f(z, \bar{z})|}$$

が十分小さい  $\varepsilon$  に対して臨界点を持たず、局所自明なファイバー束になる mixed polynomial  $f(z, \bar{z})$  のクラスが岡睦雄氏により導入された ([5])。このファイバー束も同様に Milnor 束といい、各ファイバーは Milnor ファイバーという。そのクラスに属する多項式として、複素多項式における擬斉次多項式に似た性質を持つ、mixed polynomial のあるクラスを導入する。整数  $a_1, \dots, a_n$  は最大公約数が 1 であり、 $m$  は自然数とする。絶対値 1 の任意の複素数  $\lambda$  に対して

$$f(\lambda^{a_1} z_1, \dots, \lambda^{a_n} z_n, \bar{\lambda}^{a_1} \bar{z}_1, \dots, \bar{\lambda}^{a_n} \bar{z}_n) = \lambda^m f(z, \bar{z})$$

を満たすとき、 $f(z, \bar{z})$  は  $\text{weight}(a_1, \dots, a_n; m)$  の **polar weighted homogeneous polynomial** であるという。この性質から

$$h_t(z) = \left( z_1 \exp\left(\frac{ia_1 t}{m}\right), \dots, z_n \exp\left(\frac{ia_n t}{m}\right) \right)$$

と定義すると  $f(h_t(z), \overline{h_t(z)}) = e^{it} f(z, \bar{z})$  を満たし、 $\phi_f(z) = f(z, \bar{z}) / |f(z, \bar{z})|$  と定義して  $\phi_f(h_t(z)) = e^{it} \phi_f(z)$  を満たす。ゆえに Milnor ファイバー  $\phi_f^{-1}(e^{i\theta})$  を  $F_\theta$  と表すと、 $h_t : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  はファイバー間の微分同相写像  $h_t : F_0 \rightarrow F_t$  を誘導し、Milnor ファイバー間の微分同相写像の 1 パラメータ族  $\{h_t : F_0 \rightarrow F_t\}$  が構成される。

## 6 Milnor fibration product map の拡張

この章では、4 章で扱った Milnor fibration product map を定義する複素多項式  $f, g$  を mixed polynomial に拡張した、トーラスへの可微分写像について得られた結果を述べる。詳しくは [7] をご覧頂きたい。

原点で消える mixed polynomials  $f, g$  に対し、Milnor fibration product map と同様にトーラスへの可微分写像

$$\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow S^1 \times S^1 = T^2, \quad \Phi(z) = \left( \frac{f(z, \bar{z})}{|f(z, \bar{z})|}, \frac{g(z, \bar{z})}{|g(z, \bar{z})|} \right)$$

を定義する。解析関数  $h$  に対し

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n} \right), \quad \bar{d}h = \left( \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_n} \right)$$

とし、さらに mixed hypersurface  $V_f = f^{-1}(0)$  の補空間  $\mathbb{C}^n \setminus V_f$  上でベクトル

$$v_f(z) = i \left( \overline{d \log f(z, \bar{z})} - \bar{d} \log f(z, \bar{z}) \right)$$

を定義する。ベクトル  $v_f(z)$  は  $f$  が複素多項式の場合、4 章で述べた  $i \text{grad} \log f(z)$  に一致する。このとき次の結果を得た。

**Proposition 6.1.** 点  $p \in S_\varepsilon \setminus K_{fg}$  が  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点である為の必要十分条件は、 $p, v_f(p), v_g(p)$  が  $\mathbb{R}$  上一次従属であることである。

さらに polar weighted homogeneous polynomials  $f, g$  が良い条件を満たすとき、Proposition 6.1 の精密化を得られた。

**Proposition 6.2.** Mixed polynomials  $f, g$  は weights  $(w_f; m_f), (w_g; m_g)$  の polar weighted homogeneous polynomials で、 $m_g w_f = s m_f w_g$  を満たすとする。点  $p$  が  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点である為の必要十分条件は、 $v_f(p), v_g(p)$  が  $\mathbb{C}$  上一次従属になることである。

Proposition 6.2 における mixed polynomials  $f, g$  の条件の下、可微分写像  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点  $p$  について、微分同相写像  $h_t : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S_\varepsilon \setminus K_f$  を用いて  $p, \Phi(p)$  それぞれの周りの局所座標を構成することで、点  $p$  が折り目特異点であることと、 $\phi_g : S_\varepsilon \setminus K_g \rightarrow S^1$  を Milnor ファイバー  $\phi_f^{-1}(\phi_f(p))$  に制限した写像の非退化臨界点になることが同値であることがわかる。その為 4 章と同様に、 $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の折り目特異点について結果を得た。ここで解析関数  $h$  に対し  $n$  次正方行列

$$H_p^{\alpha, \beta}(h) = \lim_{z \rightarrow p} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_k \partial \beta_l} \right)_{k, l}, \quad \alpha, \beta = z, \bar{z}$$

とする。

**Theorem 6.3.** *Mixed polynomials  $f, g$  は weights  $(w_f; m_f), (w_g; m_g)$  の polar weighted homogeneous polynomials で、 $m_g w_f = s m_f w_g$  を満たすとする。可微分写像  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_{fg} \rightarrow T^2$  の特異点  $p$  が折り目特異点である為の必要十分条件は、*

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left( V^T H_p^{z, z} (-i(\log g - s \log f)) V \right) \\ & + \operatorname{Re} \left( V^T H_p^{z, \bar{z}} (-i(\log g - s \log f)) \bar{V} \right) \\ & + \operatorname{Re} \left( \bar{V}^T H_p^{\bar{z}, z} (-i(\log g - s \log f)) V \right) \\ & + \operatorname{Re} \left( \bar{V}^T H_p^{\bar{z}, \bar{z}} (-i(\log g - s \log f)) \bar{V} \right) \end{aligned}$$

が正則になることである。ただし Milnor ファイバー  $F_f = \phi_f^{-1}(\phi_f(p))$  について、接空間  $T_p F_f$  の実基底  $v_1, \dots, v_{2n-2} \in \mathbb{C}^n$  を並べた  $n \times (2n-2)$  行列を  $V$  とし、その複素共役行列を  $\bar{V}$  とする。

この章で扱ったトーラスへの可微分写像  $\Phi : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1$  は、4 章で述べた Milnor fibration product map の拡張なので、その例が全て  $\Phi$  の特異点、特異値、折り目特異点、折り目写像の例になる。それ以外の mixed polynomial に拡張したという意味で特有の特異点の例はまだ計算できていない。また、Proposition 6.1, Proposition 6.2, Theorem 6.3 はそれぞれ、Milnor fibration product map の拡張に伴う Proposition 4.1, Proposition 4.3, Theorem 4.4 の拡張になっている。

## 7 最後に

Milnor fibration product map とそれを拡張した可微分写像は、定義する多項式の与え方によって特異点を持つ持たないが分かれる。ゆえに本稿に記したような特異点の構成・分類の研究や、トーラス上のファイバー束の研究、それを用いた複素超曲面および完全交叉代数多様体の特異点の幾何の研究への応用などを期待している。

## 参考文献

- [1] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singular points*, Grad. Texts in Math., Vol. 14, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [2] H. Hamm. Lokale topologische Eigenschaften komplexer Raume, *Mathematische Annalen* **191**, 235-252, 1971.
- [3] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [4] M. Oka. Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces. *Kodai Math. J.*, 31(2):163—182, 2008.
- [5] M. Oka. Non-degenerate mixed functions. *Kodai Math. J.*, 33(1):1—62, 2010.
- [6] D. Sumida. The singularities of the maps associated with Milnor fibrations, arXiv:1211.5670v1, 2012.
- [7] D. Sumida. Fold singularities of the maps associated with Milnor fibrations for mixed polynomials, arXiv:1211.5715v1, 2012.

# 非可換次数付き Gorenstein 孤立特異点について

上山 健太<sup>\*†</sup>

静岡大学大学院創造科学技術大学院

## 1 序文

1990 年代に M. Artin らによって非可換代数幾何学と呼ばれる研究分野が創設された。大雑把に言うと、非可換代数幾何学とは非可換代数を代数幾何学の手法を用いて研究しようとする分野である。代数幾何学において低次元スキームの分類が盛んに行われ成功していることに倣い、非可換代数幾何学では Artin-Zhang [4] によって定義された非可換射影スキームを分類することを一つの大きな研究課題としてきた。例えば、量子射影平面の座標環にあたる 3 次元 AS-regular algebra は Artin-Tate-Van den Bergh [3] によって分類されている。量子射影平面の以外の非可換射影曲面や高次元量子射影空間（高次元 AS-regular algebra）の研究・分類は現在の主要な研究課題である。

また AS-regular algebra より条件を弱めた AS-Gorenstein algebra の研究も盛んに行われている。AS-Gorenstein algebra は現在の可換環論において中心的な役割を果たしている Gorenstein 環の非可換版である。AS-Gorenstein algebra をホモロジー代数的に研究することによって様々な可換環論の手法を非可換代数幾何学に応用することが可能となる。

この報告では非可換次数付き孤立特異点を定義する。可換環の場合、孤立特異点は素イデアルによる局所化を用いて定義される。しかしその定義は非可換ではうまくいかない。そこで本稿では非可換射影スキームをつかって非可換次数付き孤立特異点の定義を与える。そして主結果として AS-Gorenstein 孤立特異点の特徴付けを紹介する。

非可換次数付き孤立特異点を紹介する前に、非可換代数幾何学で重要な研究対象となっている非可換射影スキームや AS-regular algebra の基本的なことを紹介することから始める。

---

<sup>\*</sup> e-mail: f5144004@ipc.shizuoka.ac.jp

web: <http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~f5144004/>

<sup>†</sup> 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

## 2 非可換射影スキーム

本稿を通して、 $k$  を標数 0 の代数的閉体とし、次数付き代数  $A$  と言えは有限生成連結次数付き  $k$  代数とする．ここで、次数付き代数  $A$  が連結であるとは  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$  であり  $A_0 = k$  を満たすことをさす．つまり  $A$  は自由代数（非可換多項式環） $k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  と  $k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  の両側斉次イデアル  $I$  を用いて

$$A = k\langle x_1, \dots, x_n \rangle / I \quad (\deg x_i \in \mathbb{N}^+, \forall i \in \{1, \dots, n\})$$

という形で表される．このとき  $A$  は唯一の斉次極大両側イデアル  $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i \geq 1} A_i$  を持ち、ここでは  $k$  と  $A/\mathfrak{m}$  を同一視する．これにより  $k$  は  $A$  加群構造を持つ．

$A$  を次数付き代数とする． $\text{GrMod } A$  で次数付き右  $A$  加群のなす圏を表し、 $\text{grmod } A$  で有限生成加群からなる  $\text{GrMod } A$  の充満部分圏を表す． $\text{GrMod } A$  における射は次数を保つ  $A$  準同型である．任意の  $M \in \text{GrMod } A$  と各  $n \in \mathbb{Z}$  について、 $M_{\geq n} := \bigoplus_{i \geq n} M_i \in \text{GrMod } A$  とし、 $M(n) \in \text{GrMod } A$  は  $M(n)_i = M_{n+i}$  となる次数付き右  $A$  加群を表す．さらに任意の  $M, N \in \text{GrMod } A$  に対し、

$$\text{Ext}_A^i(M, N) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\text{GrMod } A}^i(M, N(n))$$

とする．また、 $M$  の次数付き  $k$  ベクトル空間双対を  $M^* := \text{Hom}_k(M, k)$  で表すこととする．

$A$  を（右かつ左）ネーター次数付き代数とする． $\text{tors } A$  を有限次元加群からなる  $\text{grmod } A$  の充満部分圏とし、

$$\text{tails } A = \text{grmod } A / \text{tors } A$$

を商圏とする． $\text{tails } A$  の対象は  $\text{grmod } A$  の対象と同じである．区別するために  $M \in \text{grmod } A$  に対応する  $\text{tails } A$  の対象を  $\mathcal{M}$  で表す． $\text{tails } A$  における射の定義はしないが、二つの加群  $M, N \in \text{grmod } A$  に対して  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{N}$  が  $\text{tails } A$  で同型であるための必要十分条件は、ある  $n \in \mathbb{Z}$  が存在して  $M_{\geq n} \cong N_{\geq n}$  が  $\text{grmod } A$  で同型であることとなる． $\text{tails } A$  はアーベル圏である．

**Thm 2.1** (Serre's theorem).  $A$  を次数 1 の元で生成された次数付き可換代数、つまり  $A = k[x_1, \dots, x_n]/I, \deg x_i = 1$  とする．また  $X = \text{Proj } A$  とする．このとき

$$\text{tails } A \cong \text{coh } X.$$

ここで  $\text{coh } X$  は射影スキーム  $X$  上の接続層のなす圏を表す．この圏同値により  $\text{tails } A$  の対象  $\mathcal{A}$  は構造層  $\mathcal{O}_X$  に対応する．

Serre の定理によって、可換とは限らない場合にも  $\text{tails } A$  は（仮定の） $\text{Proj } A$  上の接続層の圏と考えられる．さらに上の定理の記号のもとで、組  $(\text{coh } X, \mathcal{O}_X)$  から  $X$  が復元されることに倣って、 $(\text{tails } A, \mathcal{A})$  の組を（ネーター）非可換射影スキームと定義する．非可換射影スキームを分類するとはつまりこの  $(\text{tails } A, \mathcal{A})$ （もしくは単に  $\text{tails } A$ ）を分類するということをさす．これ以上ここでは非可換射影スキームの説明はしないので、非可換射影スキームの詳細に興味のある人は Artin-Zhang [4] を見よ．

この圏  $\text{tails } A$  は非可換代数幾何学の重要な研究対象であるが一般には難しい．その打開策としては“次元の低いもの”や“性質の良いもの”を研究したり分類したりすることが効果的となる．例えば低次元の研究では、Artin-Stafford [2] による非可換射影曲線の分類がある．次に考えるべきは非可換射影曲面だが、一般に非可換射影曲面については分かっていないことが多い．しかし後に紹介する量子射影平面については分類が存在する．

### 3 AS-regular algebras

ここでは AS-regular algebra を紹介する．まず AS-Gorenstein algebra を定義する．

**定義 3.1.** 連結次数付きネーター代数  $A$  が次元  $d$ 、Gorenstein parameter  $\ell$  の AS-Gorenstein algebra であるとは次の条件を満たすこととする．

1.  $\text{injdim}_A A = \text{injdim}_{A^{\text{op}}} A = d < \infty$ ,
2.  $\text{Ext}_A^i(k, A) \cong \text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(k, A) \cong \begin{cases} k(\ell) & \text{if } i = d, \\ 0 & \text{if } i \neq d. \end{cases}$

$A$  が可換のとき上の条件 1 と 2 は同値であり、Gorenstein 環の同値条件となる．この代数がこの報告の主な研究対象である．

**定義 3.2.** 連結次数付きネーター代数  $A$  が AS-regular algebra であるとは次の条件を満たすこととする．

1.  $\text{gldim } A < \infty$ ,
2.  $A$  は AS-Gorenstein algebra.

定義より AS-regular algebra は AS-Gorenstein algebra であり、AS-regular  $A$  の次元  $d$  は大域次元  $\text{gldim } A$  と一致する．また AS-regular の Gorenstein parameter  $\ell$  は 0 以上の整数となる．もともとは Artin-Schelter [1] によって与えられた定義（AS は二人の頭文字）だが、都合上少しだけ修正してある．

$A$  を  $d$  次元 AS-regular algebra とする．ここでは話を簡単にするために次数 1 の元で生成されている代数のみを扱う． $A$  が可換であることと  $A$  が  $k[x_1, \dots, x_d]$  と同型であることは同値である．これは AS-regular algebra が多項式環の非可換類似であることを示しており，ゆえに  $d$  次元 AS-regular algebra の非可換射影スキームは  $(d-1)$  次元量子射影空間と呼ばれる．

0 次元 AS-regular algebra は  $k$  のみであり，1 次元 AS-regular algebra は  $k[x]$  と同型である．2 次元 AS-regular は同型を除いて

$$k\langle x, y \rangle / (xy - \alpha yx) (\alpha \neq 0) \quad \text{or} \quad k\langle x, y \rangle / (-x^2 + xy - yx)$$

と分類できる．3 次元 AS-regular algebra は Artin-Tate-Van den Bergh [3] によって代数幾何を用いて分類された．3 次元の AS-regular には想像以上に色々な代数が現れる．

**例 3.3.** 3 次元 AS-regular algebra の例 ([1], [3]) :

1.  $A$  を

$$k\langle x, y, z \rangle / (\alpha yz + \beta zy + \gamma x^2, \alpha zx + \beta xz + \gamma y^2, \alpha xy + \beta yx + \gamma z^2)$$

とする．但し  $\deg x = \deg y = \deg z = 1$  とし  $\alpha, \beta, \gamma \in k \setminus \{0\}$  とする．このときいくつかの例外な  $\alpha, \beta, \gamma$  を除いて  $A$  は “ $\mathbb{P}^2$  内の楕円曲線が付随する” 3 次元 AS-regular algebra となる．この  $A$  は 3 次元 Sklyanin algebra と呼ばれ，とてもよく研究されている．

2.  $A$  を

$$k\langle x, y \rangle / (xy^2 + y^2x + x^3, yx^2 - x^2y)$$

とする．但し  $\deg x = \deg y = 1$ ．これも次元が 3 の AS-regular algebra である．

4 次元の AS-regular algebra (つまり量子  $\mathbb{P}^3$ ) の分類は完成していない．

## 4 AS-Gorenstein 孤立特異点

ここでは題目にある非可換 Gorenstein 孤立特異点，正確には AS-Gorenstein 孤立特異点を考察していく．AS-Gorenstein algebra の定義は前節ですでに述べたので，非可換次数付き孤立特異点の定義をすることから始める．まず商圏  $\text{tails } A$  の大域次元を

$$\text{gldim}(\text{tails } A) := \sup\{i \mid \text{Ext}_{\text{tails } A}^i(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \neq 0 \text{ for some } \mathcal{M}, \mathcal{N} \in \text{tails } A\}$$

で定義する.  $\text{tails } A$  における Ext 群は  $\mathcal{N}$  の injective resolution によって定められる (そのため厳密にはもっと大きい圏の中で考える必要がある).

**定義 4.1.**  $A$  をネーター次数付き代数とする. このとき  $A$  が次数付き孤立特異点であるとは  $\text{gldim}(\text{tails } A) < \infty$  を満たすこととする.

上の次数付き孤立特異点の定義は  $\text{tails } A$  という圏を使ったもので, 一見孤立特異点とは関係ないように見えるが, とても自然な概念であり, 実際次のことが得られる.

**命題 4.2.**  $A$  を次数 1 で生成された多項式環の次数付き剰余環  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  とする. このとき  $\text{gldim}(\text{tails } A) < \infty$  であることの必要十分条件は任意の斉次素イデアル  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$  について, 次数付きの局所化を  $A_{(\mathfrak{p})}$  としたとき,  $\text{gldim } A_{(\mathfrak{p})} < \infty$  が成立することである.

$A$  が AS-regular algebra ならば, 代数そのものの大域次元が有限なので,  $\text{tails } A$  の大域次元が有限であるということが分かる. AS-regular algebra は AS-Gorenstein algebra の例でもあったので, つまり AS-Gorenstein 孤立特異点になっている. これは自明な例であるが, 非自明な AS-Gorenstein 孤立特異点の例は主結果の後に見ることにする.

主結果を述べるために, 次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群を定義しておく. 可換環論や整環と呼ばれる非可換環の表現論において極大 Cohen-Macaulay 加群は重要な役割を担っている.

次数付き加群  $M \in \text{grmod } A$  について局所コホモロジー群を

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) = \varinjlim_n \underline{\text{Ext}}_A^i(A/A_{\geq n}, M)$$

で定義する.

**定義 4.3.**  $A$  を  $d$  次元 AS-Gorenstein algebra とする. このとき任意の  $i \neq d$  について  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$  となる  $M \in \text{grmod } A$  を次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群という. また極大 Cohen-Macaulay 加群からなる  $\text{grmod } A$  の充満部分圏を  $\text{CM}^{\text{gr}}(A)$  で表す.

例えば AS-regular algebra 上次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群は自由加群 ( $A$  の次数シフトの有限直和) になる.

$A$  を次元  $d$ , Gorenstein parameter  $\ell$  の AS-Gorenstein algebra とする. このとき

$$H_{\mathfrak{m}}^i(A) = 0 \quad (i \neq d)$$

となっている. つまり  $A$  は自身を右  $A$  加群とみなしたときに次数付き極大 Cohen-

Macaulay 加群である．さらに

$$H_m^d(A)^* \cong A_\nu(-\ell)$$

という次数付き  $A$ - $A$  両側加群としての同型がある．但し  $(-)^* := \text{Hom}_k(-, k)$  は次数付き  $k$  双対を表し,  $A_\nu$  は次数付きベクトル空間としての  $A$  に代数自己同型  $\nu \in \text{GrAut } A$  を用いた新しい両側作用  $b \circ m \circ a = bm\nu(a)$  を定めた次数付き  $A$ - $A$  両側加群とする．この  $\nu \in \text{GrAut } A$  は (一般化された) 中山自己同型と呼ばれ, また加群  $\omega_A = A_\nu(-\ell)$  は標準加群と呼ばれる． $- \otimes_A \omega_A$  は  $\text{grmod } A$  の自己同値関手となる．

$A$  を AS-Gorenstein algebra,  $M \in \text{CM}^{\text{gr}}(A)$  とする．このとき完全列

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} F_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} F_{-2} \rightarrow \cdots$$

但し, 任意の  $i$  で  $F_i$  は自由加群であり  $\text{Im } d_0 = M$  となるものが存在する (complete resolution)．このとき  $M$  の  $i$  番目のシジジー加群  $\Omega^i M$  を  $\text{Im } d_i$  で定義する． $\Omega^i M$  はまた次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群になる．

次に  $\text{CM}^{\text{gr}}(A)$  の安定圏を定義する．

**定義 4.4.**  $A$  を AS-Gorenstein algebra とする． $\text{CM}^{\text{gr}}(A)$  の安定圏  $\underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)$  を次のように定義する．

- $\underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)$  の対象は  $\text{CM}^{\text{gr}}(A)$  の対象と同じ．
- $\text{Hom}_{\underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)}(M, N) = \text{Hom}_{\text{CM}^{\text{gr}}(A)}(M, N)/P(M, N)$ ．但し  $P(M, N)$  は射影加群を経由する次数を保つ準同型全体のなす部分群．

AS-Gorenstein algebra 上の次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群圏は Frobenius 圏と呼ばれるものになっており, その安定圏には三角圏の構造を入れることができる ([5] 等)． $\underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)$  におけるシフト関手  $[1] : \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A) \rightarrow \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)$  は  $M[1] = \Omega^{-1}M$  で与えられる．また  $- \otimes_A \omega_A$  という  $\text{grmod } A$  の自己同値関手は  $\underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)$  の自己同値関手

$$- \otimes_A \omega_A : \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A) \rightarrow \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(A)$$

を導く．

**定義 4.5.**  $\mathcal{C}$  を  $k$  線形な圏とし, 任意の  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{C}$  について  $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < \infty$  であるとする．このとき  $\mathcal{C}$  が Serre 関手  $S \in \text{Aut}_k \mathcal{C}$  を持つ (または  $S \in \text{Aut}_k \mathcal{C}$  による Serre 双対性を満たす) とは任意の  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{C}$  について次の関手的同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, S(\mathcal{M}))^*$$

が存在することをさす．

Serre 関手 (Serre 双対性) は代数幾何学や表現論など様々なところに現れる非常に重要な関手である。これがこの報告の主結果である。

**Thm 4.6.** [8]  $A$  を次元  $d \geq 2$  の AS-Gorenstein algebra とする。このとき以下は同値。

1.  $A$  は次数付き孤立特異点である。
2.  $\underline{\mathbf{CM}}^{\text{gr}}(A)$  は Serre 関手  $-\otimes_A \omega_A[d-1]$  を持つ。

$R$  を可換ネーター次数付き局所環とする。このときもし  $R$  が Gorenstein 孤立特異点ならば,  $\underline{\mathbf{CM}}^{\text{gr}}(R)$  が Serre 関手をもつことが知られている ([6] 等参照)。上の結果はその非可換類似を与えている。

さてここで一つ非自明な AS-Gorenstein 孤立特異点の構成法を一つ紹介する。 $A$  を次数 1 の元で生成された, 次元が  $d$ , Gorenstein parameter が  $\ell$  の AS-regular algebra とする。このとき  $A^{(\ell)}$  という代数を次のように構成する。

$$A^{(\ell)}_i = \begin{cases} A_i & \text{for } \ell \mid i, \\ 0 & \text{for } \ell \nmid i. \end{cases}$$

つまり次数が  $\ell$  の倍数になっているところだけ残して他は 0 にしている。 $A^{(\ell)}$  は  $A$  の次数付き部分代数である (Veronese 部分代数)。例えば, 次数 1 の元で生成された 2 変数多項式環  $k[x, y]$  は Gorenstein parameter 2 であり,

$$A^{(2)} \cong k[x^2, xy, y^2] \cong k[X, Y, Z]/(XZ - Y^2)$$

となる。但し  $\deg X = \deg Y = \deg Z = 2$ 。この AS-regular algebra  $A$  からつくった次数付き代数  $A^{(\ell)}$  は AS-Gorenstein 孤立特異点となる (これは [4, Proposition 5.10 (3) and Remarks (1)] と [7, Theorem 3.6] により分かる)。

**例 4.7.** 例 3.3 の 2 の代数  $A$  は次元 3, Gorenstein parameter 4 の AS-regular algebra である。これより  $A^{(4)}$  は AS-Gorenstein 孤立特異点である。従って主結果より  $A^{(4)}$  上次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏  $\underline{\mathbf{CM}}^{\text{gr}}(A^{(4)})$  は Serre 関手をもつことが分かる。

ここでは述べないが [8] では, この Serre 関手を応用して,  $n$ -cluster tilting 加群 (対象) の存在性についての結果も得られている。

## 参考文献

- [1] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* **66** (1987), 171–216.
- [2] M. Artin and J. T. Stafford, Noncommutative graded domains with quadratic growth, *Invent. Math.* **122** (1995), 231–276.
- [3] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, “*Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*” in The Grothendieck Festschrift, Vol. **1**, Progr. Math. **86**, Birkhauser, Boston 1990, 33–85.
- [4] M. Artin and J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* **109** (1994), 228–287.
- [5] R.-O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology over Gorenstein rings, unpublished manuscript (1985).
- [6] O. Iyama and R. Takahashi, Tilting and cluster tilting for quotient singularities, *Math. Ann.*, to appear.
- [7] P. Jørgensen and J. J. Zhang, Gourmet’s guide to Gorensteinness, *Adv. Math.* **151** (2000), 313–345.
- [8] K. Ueyama, Graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative graded Gorenstein isolated singularities, preprint.

## 消散型波動方程式の解の拡散現象

若杉 勇太

(大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士2年)

### 1. 消散型波動方程式とは？

1.1. **波動方程式の導出.** 波動方程式とは、波の伝わり方を記述する微分方程式で、空間1次元では

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

で与えられます。ここで、 $t, x \in \mathbf{R}$  は時間変数と空間変数と呼ばれ、 $u = u(t, x)$  は実数値の未知関数です（複素数値でも良いのですが、本稿では、実数値の未知関数のみ考えます）。 $c$  は正定数で、伝播速度と呼ばれます。

さて、いきなりこの方程式が波動現象を記述すると言われてもピンとこない方も多いと思うので、そのもってもらしさをみるために、方程式の導出過程を簡単に見てみることにしましょう。以下の導出は、多くの本で解説されています（例えば、[31]にもっと詳しい解説があります）。

ギターやバイオリンなどの弦が振動する状況を考えます。弦は  $x$  軸方向に張られていて、 $x$  軸と垂直な方向に振動しているとします。 $t$  は時刻とし、 $u = u(t, x)$  を時刻  $t$ 、位置  $x$  における変位とします。 $\rho$  を弦の線密度、 $T$  を張力とし、簡単のためこれらは一定であるとします。いま、弦の微小部分  $[x, x + \Delta x]$  の運動を考え、これが、例えば下の図のような状況になっていたとしましょう。

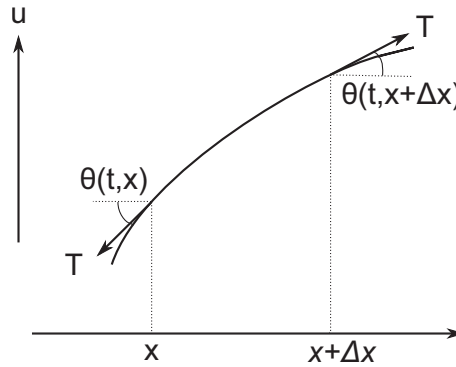


FIGURE 1. 弦の微小部分  $[x, x + \Delta x]$

このとき、

右端における張力の垂直成分  $= T \sin \theta(t, x + \Delta x)$ ,

左端における張力の垂直成分  $= -T \sin \theta(t, x)$

となっています。ここで、弦の振幅は弦長に比べて非常に小さい、すなわち、 $\theta$  が十分小さいと仮定します。すると、

$$\sin \theta \doteq \theta \doteq \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

とみなせます。従って、この微小部分にかかる力の垂直成分の合計は、ほぼ

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - T \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$$

となります。よって、Newton の運動方程式から、

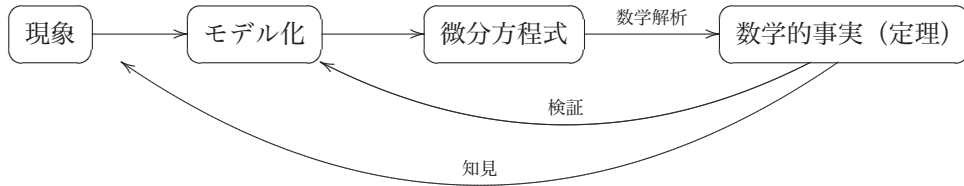
$$(1.2) \quad \underbrace{\rho \Delta x}_{\text{重さ}} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)}_{\text{加速度}} = \underbrace{T \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - T \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}_{\text{力}}$$

という式が得られます。この両辺を  $\Delta x$  で割って  $\Delta x \rightarrow 0$  とし、さらに  $c = \sqrt{T/\rho}$  とおくと、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

となって、方程式 (1.1) が得られました。

上の議論のように、現象から微分方程式を導くことを、モデル化といいます。数学の役割は、このモデル化によって導かれた方程式を数学的に解析して、もとの現象に対する知見を得ることです。これにより、このモデル化の妥当性も検証されることになります。つまり、このモデルを解析して、現実の現象と良く合致した結果が得られれば、このモデル化は妥当だと言うことができます。よって、このモデルを元に数値計算などを行えば、現象の予測ができると期待できます。逆に、現実の現象と明らかに合致しない結果が出て来た場合は、モデル化の過程に何か問題があると考えられます。この場合は、モデル化を再度見直して、より合理的なモデルを作ることになります。この関係を図にすると下のようになります。



さらに、この数学解析から得られた結果から、新たな現象を予想することもできます。例えば、Einstein 方程式の解からブラックホールの存在が予想されているのは有名な話です。

**1.2. 消散型波動方程式の導出.** ここで、上述の波動方程式 (1.1) の導出において、摩擦などの抵抗がある場合を考えてみましょう。速度に比例した抵抗（比例定数  $k > 0$ ）が加わっているとすると、(1.2) は

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - T \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - k \rho \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$$

と書き換えられます。よって、これから消散型波動方程式

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = 0$$

が得られます。  $k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$  は摩擦項と呼ばれます。つまり、消散型波動方程式は抵抗を持つ波動現象を記述するモデルと考えられます。

**1.3. もう一つの導出と拡散現象.** 次に、熱伝導を表す方程式である熱方程式（拡散方程式）から、消散型波動方程式が導出されることを見てみましょう。この導出から、本稿のテーマである、消散型波動方程式の解の**拡散現象**が示唆されることになります。以下の議論は Li [12] に従ったものです。

空間 1 次元的に無限に伸びる針金を考えます。時刻  $t$ , 点  $x$  における針金の温度を  $v(t, x)$  とし、熱流（右向きが正）を  $q(t, x)$  とします。任意の区間  $[a, b]$  における熱エネルギー変化  $\frac{d}{dt} \int_a^b v(t, x) dx$  は、 $x = a, b$  における熱の出入り  $q(t, a) - q(t, b) = - \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) dx$  に等しくなるので、

$$\frac{d}{dt} \int_a^b v(t, x) dx = - \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) dx$$

となります。

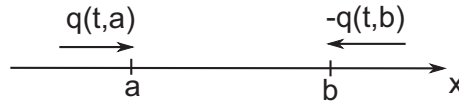


FIGURE 2. 針金の熱伝導

さらに、 $[a, b]$  は任意の区間なので、

$$(1.4) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) = 0$$

が成り立ちます。また、Fourier の法則により、熱流  $q(t, x)$  は温度変化に比例するので、

$$(1.5) \quad q(t, x) = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$$

と表せます（ $\kappa > 0$  は熱伝導係数）。これを (1.4) に代入すると、空間 1 次元の熱方程式

$$(1.6) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

が得られます。ここで、(1.5) の代わりに、時間遅れの Fourier の法則

$$q(t + \tau, x) = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \quad (0 < \tau < 1)$$

を仮定します。  $q(t + \tau, x)$  を時刻  $t$  で Taylor 展開し、 $\tau$  の 2 次以降の項を捨てると、

$$q(t, x) + \tau \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$$

となります。これを  $x$  で微分し、(1.3) に代入すると、空間 1 次元の消散型波動方程式

$$(1.7) \quad \tau \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) + \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

が導かれます。ここで、時間遅れのパラメータ  $\tau$  を 0 に近づけると、形式的に熱方程式 (1.6) が得られます。つまり、消散型波動方程式は、時間遅れの Fourier の法則に従う熱伝導の方程式と見ることができます。上の考察から、方程式 (1.7) の解  $v^{(\tau)}(t, x)$  は、 $\tau \rightarrow +0$  としたとき、熱方程式 (1.6) のある解に近づくのではないかと予想することができます。つまり、

**予想 1.** 消散型波動方程式 (1.7) の解は、 $\tau \rightarrow +0$  としたとき、熱方程式 (1.6) の解に近づく。

ところで、方程式 (1.7) は、パラメータ  $\tau$  を持つ消散型波動方程式であり、1.2 節で導いた消散型波動方程式 (1.3) とは少し違うもののように見えます。しかし、(1.3) において、

$$u(t, x) = \phi(\tau t, \tau^{1/2} x), \quad \tau t = s, \quad \tau^{1/2} x = y$$

と変数変換（スケール変換）を行うと、 $\phi(s, y)$  は上の (1.7) を満たすことが分かります。よって (1.3) は、上の変換を経由することによりいつでも、パラメータ  $\tau$  の入った消散型波動方程式と見なすことができます。 $s$  を止めたとき、 $\tau \rightarrow 0$  とすることは、 $t \rightarrow +\infty$  とすることと同じなので、予想 1 を次のように言い換えることができます。

**予想 2.** 消散型波動方程式 (1.3) の解は、 $t \rightarrow +\infty$  のとき、熱方程式 (1.6) の解に近づく。

この予想 2 が、消散型波動方程式の解の**拡散現象**と呼ばれる現象です。もともと摩擦を伴った波動方程式のモデルとして導入された消散型波動方程式が、時間無限大においては、全く違う現象であるはずの熱伝導の方程式と近いというのは、非常に興味深い現象です。拡散現象の物理的な解釈の一つとして、多孔媒質中の圧縮性流体の方程式系における、Darcy の法則との対応があります（詳細は省略します。[6] を参照して下さい）。この予想 2 は、いろいろな設定の下で正しいことが証明されています。次節以降では、この拡散現象に関して、現在までに知られている結果と、最近の研究の進展を紹介したいと思います。

## 2. 線形消散型波動方程式

前節では空間 1 次元、つまり  $x \in \mathbf{R}$  の場合の方程式のみ考えましたが、以降は、空間  $n$  次元、つまり  $x \in \mathbf{R}^n$  の場合の方程式を扱っていきます。次の消散型波動方程式の初期値問題を考えます。

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

ここで、 $u = u(t, x)$  は実数値の未知関数で、簡単のため、偏微分を  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$  と表しています。 $u_0(x), u_1(x)$  は初期データと呼ばれ、時刻  $t = 0$  に

おける関数  $u$  および  $u_t$  の値を指定するものです。本稿では簡単のため、初期データは全て  $C^\infty$  級で、有界な領域の外では値が 0 (台がコンパクト) であるものだけ考えます。合わせて、空間  $n$  次元の熱方程式の初期値問題

$$(2.2) \quad \begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

および、空間  $n$  次元波動方程式

$$(2.3) \quad \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ w(0, x) = w_0(x), \quad w_t(0, x) = w_1(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

を考えます。

まずこれらの方程式に解があるのか、ということが問題になりますが、実は解の公式が知られています。つまり、例えば (2.1) に対しては、与えられた初期データ  $u_0(x), u_1(x)$  に対して、(2.1) を満たすような関数  $u(t, x)$  が具体的に構成できます。(2.2), (2.3) についても同様です。紙数の都合上で詳細は省きますが、これらは多くの本で解説されています (例えば, [1, 18, 30, 32])。

さて、消散型波動方程式の拡散現象についてですが、例として次の結果を挙げておくことにしましょう。これは Yang-Milani [28] によるものですが、他にも Lebesgue 空間  $L^p$  での漸近や、導関数の漸近も含めたものなど様々な結果があります ([8, 11, 15, 17, 19] を参照)。

**定理 1** (Yang-Milani [28]).  $u$  を (2.1) の解,  $v$  を初期データ  $v_0 = u_0 + u_1$  を持つ (2.2) の解とすると,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |u(t, x) - v(t, x)| = O(t^{-n/2-1}), \quad t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

**注意 2.** 一般には  $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |v(t, x)| = O(t^{-n/2})$  しか言えないという事実があるので、上の定理は、 $\sup$  ノルムの意味で  $u$  は  $v$  に  $t \rightarrow \infty$  のとき漸近することを示しています。

### 3. 非線形消散型波動方程式

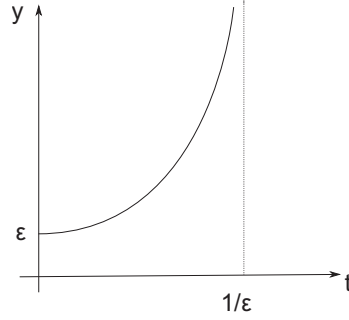
この節では非線形の微分方程式について考察します。非線形の微分方程式とは、例えば、

$$(3.1) \quad \frac{dy(t)}{dt} = y(t)^2,$$

のような、未知関数  $y(t)$  について線形でない項 (対応  $y \mapsto y^2$  は線形ではない) を含むものをいいます。先ほどの線形微分方程式と大きく異なる点は、もはや (時間大域的な) 解の存在が一般には成り立たないことです。例えば、 $y(0) = \varepsilon > 0$  として、この方程式を解くと、

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon t}$$

が解となることが分かります。このグラフは、下の図のような形をしています。



これから明らかなように,  $\lim_{t \rightarrow 1/\varepsilon} y(t) = +\infty$  となつてしまい ( $y(t)$  は時刻  $t = 1/\varepsilon$  で**爆発** (blow-up) すると言います), 解  $y(t)$  は全ての  $t \in [0, \infty)$  で定義できないことが分かります.

今度は非線形項を少し変えて,  $y'(t) = -y(t)^3$  という方程式を考えてみます.  $y(0) = \varepsilon$  とおくと, 解は,

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon^2 t + 1}}$$

となり, この場合は先ほどのような爆発は起こらず, 解は全ての  $t \in [0, \infty)$  で定義されます. このような解を**時間大域解**と呼びます. このように, 非線形微分方程式に対しては, 解の存在自体が問題となります. そこで非線形項の構造や, 初期値の選び方に関連して, 時間大域解が存在するのか, また解が爆発するのか, といったことが盛んに研究されています.

さて, 次の非線形消散型波動方程式

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = f(u), & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = \varepsilon u_0(x), \quad u_t(0, x) = \varepsilon u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

と, 対応する非線形熱方程式

$$(3.3) \quad \begin{cases} v_t - \Delta v = f(v), & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ v(0, x) = \varepsilon v_0(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

を考えます. 以下, 初期データは大きさが小さいもの考えるので, 小さいパラメータ  $\varepsilon > 0$  を入れておきます. ここで,  $f(u)$  は非線形項で, 典型的なものとして,  $f(u) = \pm|u|^p, \pm|u|^{p-1}u$  の形のものがよく考察されていますが, ここでは紙数の都合上,  $f(u) = |u|^p$  の場合のみを考えます. また  $p$  は  $1 < p < \infty$  なる範囲を動くものとします. 拡散現象の観点から, (3.2) の解は (3.3) の解と近い挙動をすることが予想され, 様々な場合に検証されています. ここでは, 例として**臨界指数**を取り上げ, その対応を見てみることにしましょう. 臨界指数とは, 次のような, 時間大域解の存在・非存在の分かれ目となるような, 非線形項の指数  $p_c$  のことをいいます:

$p > p_c \Rightarrow \varepsilon$  が十分小さければ, 時間大域解が存在する.

$p \leq p_c \Rightarrow \varepsilon$  に依らず, 適当なデータ  $(u_0, u_1)$  に対し, 解は爆発する.

対応する熱方程式 (3.3) に対しては, 藤田 [4] の先駆的な研究により, 臨界指数が  $p_c = 1 + 2/n$  で与えられることが示されました. Todorova-Yordanov [21] と Zhang

[29] は, (3.2) に対しても, 臨界指数は同じ  $p_c = 1 + 2/n$  で与えられることを示しています ([5, 17, 19] 等も参照).

また,  $p \leq 1 + 2/n$  のときに, 解の最大存在時間  $T_\varepsilon$  の評価が得られるか, という問題がよく研究されています. 例えば, 常微分方程式 (3.1) については, 既に見たように, 解は  $t = 1/\varepsilon$  で爆発するため, 解の最大存在時間は  $T_\varepsilon = 1/\varepsilon$  となります. 消散型波動方程式 (3.2) については,  $n = 1, 2, 3$  では Li-Zhou [13], 西原 [20] の結果がありました,  $n \geq 4$  では長い間未解決でした. これについて, 最近以下の結果を得ました (大阪大学の池田正弘氏との共同研究):

**定理 3** (Ikeda-W. [7]).  $n \geq 1$ ,  $1 < p < 1 + 2/n$  かつ  $\int_{\mathbf{R}^n} (u_0 + u_1)(x) dx > 0$  とすると, ある定数  $C > 0$  があって,

$$T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{-1/\kappa}$$

と評価される. ただし  $\kappa = 1/(p-1) - n/2$ .

上の指数  $-1/\kappa$  は, 熱方程式で既に知られている指数と一致するので, 消散型波動方程式 (3.2) に対しては, 臨界指数だけでなく, 解の最大存在時間の評価まで, 熱方程式 (3.3) のものに対応していることが分かります. しかし, ちょうど  $p = 1 + 2/n$  の場合における解の存在時間の評価は, 未解決として残されています.

#### 4. 変数係数の場合

最後に, 変数係数の摩擦項を持つ場合の, 非線形消散型波動方程式について少し述べておきます.

$$u_{tt} - \Delta u + c(t, x)u_t = f(u)$$

の形の方程式を考えます. まず線形, つまり  $f(u) = 0$  の場合ですが, 望月 [16] により,  $c(t, x)$  が空間遠方で十分速く減衰していれば, より正確には  $c(t, x) \leq C(1 + |x|)^{-1-\delta}$  ( $\delta > 0$ ) ならば, 解は波動方程式 (2.3) のある解に漸近することが示されています. つまり, この場合には拡散現象が起きないことが分かっています. そこで,  $c(t, x)$  がどのような条件を満たせば, 拡散現象が起きるのか, というような問題が近年よく研究されています.  $c(t, x)$  が時間変数  $t$  にのみ依存する場合には, Fourier 解析を用いた Wirth [25, 26, 27] による一連の結果があります.  $c(t, x)$  が空間変数  $x$  にも依存する場合には, Todorova-Yordanov [21, 22], 池畠-Todorova-Yordanov [10] による重み付きエネルギー法が有効で, 非線形問題 ( $f(u) = |u|^p$  の場合) への応用も行われています ([2, 3, 9, 14, 23, 24]).

#### REFERENCES

- [1] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics II*, Wiley, New York, 1989.
- [2] M. D'ABBICCO, *Semilinear scale-invariant wave equations with time-dependent speed and damping*, arXiv:1211.0731v1.
- [3] M. D'ABBICCO, S. LUCENTE, M. REISSIG, *Semi-Linear wave equations with effective damping*, Chin. Ann. Math., Ser. B (to appear).
- [4] H. FUJITA, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, **13** (1966), 109-124.

- [5] N. HAYASHI, E. I. KAIKINA, P. I. NAUMKIN, *Damped wave equation with super critical nonlinearities*, Differential Integral Equations, **17** (2004), 637-652.
- [6] L. HSIAO, T.-P. LIU, *Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping*, Comm. Math. Phys., **143** (1992), 599-605.
- [7] M. IKEDA, Y. WAKASUGI, *A note on the lifespan of solutions to the semilinear damped wave equation in subcritical cases*, arXiv:1212.1772v2.
- [8] R. IKEHATA, *Diffusion phenomenon for linear dissipative wave equations in an exterior domain*, J. Differential Equations, **186** (2002), 633-651.
- [9] R. IKEHATA, G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Critical exponent for semilinear wave equations with space-dependent potential*, Funkcialaj Ekvacioj, **52** (2009) 411-435.
- [10] R. IKEHATA, G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Optimal decay rate of the energy for wave equations with critical potential*, J. Math. Soc. Japan (in press).
- [11] R. KARCH, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations*, Studia Math. **143** (2000), 175-197.
- [12] T.-T. LI, *Nonlinear heat conduction with finite speed of propagation*, Proceedings of the China-Japan Symposium on Reaction-Diffusion Equations and their Applications and Computational Aspects, Fudan Univ., Shanghai, 1994, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, pp. 81-91.
- [13] T. T. LI, Y. ZHOU, *Breakdown of solutions to  $\square u + u_t = |u|^{1+\alpha}$* , Discrete Cont. Dynam. Syst. **1** (1995), 503-520.
- [14] J. LIN, K. NISHIHARA, J. ZHAI, *Critical exponent for the semilinear wave equation with time-dependent damping*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **32** (2012), 4307-4320.
- [15] P. MARCATI, K. NISHIHARA, *The  $L^p$ - $L^q$  estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to the compressible flow through porous media*, J. Differential Equations, **191** (2003), 445-469.
- [16] K. MOCHIZUKI, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1976/77), 383-390.
- [17] T. NARAZAKI,  *$L^p$ - $L^q$  estimates for damped wave equations and their applications to semilinear problem*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 585-626.
- [18] K. NISHIHARA, *Diffusion phenomena of solutions to the Cauchy problems for a damped wave equation (Japanese)*, Sūgaku **62** (2010), no. 2, 164-181.
- [19] K. NISHIHARA,  *$L^p - L^q$  estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z., **244** (2003), 631-649.
- [20] K. NISHIHARA,  *$L^p$ - $L^q$  estimates for the 3-D damped wave equation and their application to the semilinear problem*, Seminar Notes of Math. Sci., **6**, Ibaraki Univ., 2003, 69-83.
- [21] G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations, **174** (2001), 464-489.
- [22] G. TODOROVA, B. YORDANOV, *Weighted  $L^2$ -estimates of dissipative wave equations with variable coefficients*, J. Differential Equations, **246** (2009), 4497-4518.
- [23] Y. WAKASUGI, *Small data global existence for the semilinear wave equation with space-time dependent damping*, J. Math. Anal. Appl., **393** (2012), 66-79.
- [24] Y. WAKASUGI, *Critical exponent for the semilinear wave equation with scale invariant damping*, arXiv:1121.2900v1.
- [25] J. WIRTH, *Solution representations for a wave equation with weak dissipation*, Math. Meth. Appl. Sci., **27** (2004), 101-124.
- [26] J. WIRTH, *Wave equations with time-dependent dissipation. I. Non-effective dissipation*, J. Differential Equations, **222** (2006), 487-514.
- [27] J. WIRTH, *Wave equations with time-dependent dissipation. II. Effective dissipation*, J. Differential Equations **232** (2007), 74-103.
- [28] H. YANG, A. MILANI, *On the diffusion phenomenon of quasilinear hyperbolic waves*, Bull. Sci. Math. **124** (2000), no. 5, 415-433.
- [29] QI S. ZHANG, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333** (2001), 109-114.
- [30] 井川満『双曲型偏微分方程式と波動現象』, 岩波書店, 2006.
- [31] 金子晃『偏微分方程式入門』, 東京大学出版会, 1998.
- [32] 熊ノ郷準『偏微分方程式』, 共立出版, 1978.

E-mail address: y-wakasugi@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

# パラレルセッション 幾何学



# 双曲体積と関連する空間グラフの不変量

水澤篤彦 (早稲田大学大学院基幹理工学研究科)

## 1. 概要

Francisco Costantino 氏と村上順氏により量子群  $U_q(sl_2)$  の  $q$  を 1 の冪根とした整ではない表現を通して、向き付けられた (枠付きの) 空間 3 価グラフの不変量 (CM 不変量, [1]) が定義された. 今回, 横田不変量 [2] の定義の手法を用いて, この不変量を各頂点が 3 価以上の向き付けられた空間グラフの不変量に拡張した. CM 不変量の四面体の辺の形のグラフを評価した値は, ある極限操作のもと, 双曲四面体の体積に収束する. この性質の拡張として, 今回の横田型の不変量で凸多面体の辺の形のグラフを評価した値は, ある極限操作のもとで対応する凸多面体の体積に収束することが期待される.

## 2. 準備

各種の用語の定義を行う.

### 2.1. 空間グラフ

集合  $V$ ,  $E$  と写像  $\phi: E \rightarrow V \times V$  の三つ組をグラフと呼ぶ. 集合  $V$  の元を頂点,  $E$  の元を辺と呼ぶ. グラフを自然な位相空間と見て, 3 次元球面  $S^3$  (または  $\mathbb{R}^3$ ) に埋め込んだ物を 空間グラフ という. 空間グラフにおいて, 頂点から伸びている辺の本数を 価数 という. また, 一つの 1 次元球面  $S^1$  の埋め込みを 結び目 という. 今回は,  $S^1$  の埋め込みも空間グラフの特別な場合として扱う (ただし頂点, 辺は持たないとする). 2 つの空間グラフが, 埋め込まれた空間  $S^3$  または  $\mathbb{R}^3$  のイソトピー変形で移り合う時, 2 つを同じものと見なす. また, 今回は辺に向きの付いた空間グラフを扱う.

通常, 空間グラフを 2 次元平面に射影し取り扱う ( $\pi: S^3 \rightarrow S^2$  または,  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). このとき, 射影図が交点として有限個の横断的な 2 重点のみを持つ場合, 正則な射影図という. 以後, 正則な射影図のみを扱う. また, 交点に, 交差する 2 本の線の上下の情報を与えておく (図 1). このことにより, 射影図から, もとの空間グラフを再現することが出来る. また, 次のことが知られている. 2 つの射影図が同じ空間グラフを表しているとき両者は有限回の ライデマイスター変形 (図 1) で互いに移り合う. また逆もいえる. 射影図から計算される量で, ライデマイスター変形で不変なものは空間グラフの不変量となっている.  $RI$  と  $RIV$  の変形は, 辺自身や頂点回りのひねりの解消操作とその逆である. 空間グラフ (結び目) で, それ以外の  $RII$ ,  $RIII$ ,  $RV$  の操作のみで移り合うクラスを 枠付き の空間グラフ (結び目) という. つまり, 頂点を円板, 辺を帯とみて埋め込んだ空間グラフ (または, 円環面の埋め込みと見た結び目) である (ただし向き付けは入る).

### 2.2. 双曲四面体

3 次元双曲空間のポアンカレ モデル ( $B^3$ ) 内の四面体を考える. 一般に双曲四面体の形は, 各辺で 2 面が成す 6 つの面角から定まる. 4 頂点を無限遠 ( $\partial B^3$ ) に持つ四面体を 理想四面体 と呼ぶ.

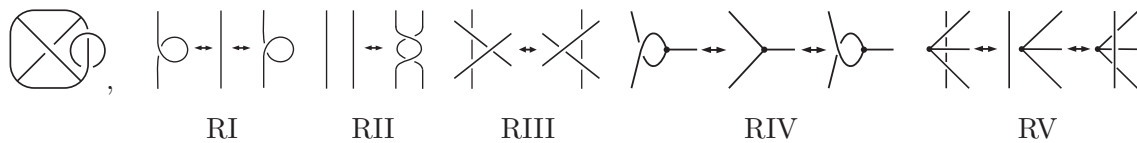


図 1: 空間グラフの射影図の例とライデマイスター変形

理想四面体の互いに向き合う辺の面角は等しくなることが知られており、3つの面角から形が決まる。また、頂点が無限遠の外側にある四面体を考えることが出来る。この頂点は、ポアンカレモデルでは見る事が出来ないが、双曲空間の射影モデル( $B^3$ )で見ると四面体の面を $B^3$ の外側に伸ばしていき交わる点として見る事が出来る(図2)。この場合、頂点は双曲空間内にはないが、頂点に集まる3つの面とそれぞれ垂直に交わる測地面が1つとれ、それでカットしたコンパクトな多面体を考えることが出来る。4つの頂点それぞれでこのような操作を行い得られた多面体を 切頂四面体 と呼ぶ。

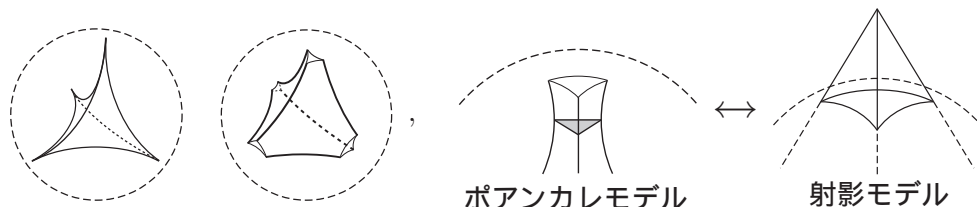


図 2: 理想四面体と切頂四面体, 切頂四面体の頂点の様子

### 3. 量子不変量

Lie 環からは、その普遍包絡環を通じて、量子群と呼ばれる代数が作り出される。Lie 環  $sl_2$  に対応する量子群  $U_q(sl_2)$  の表現からは、結び目、空間グラフの不変量が導かれている。これらを総称して 量子不変量 と呼ぶ。本節では、結び目に対する不変量、colored Jones 多項式とその「体積予想」と呼ばれる性質を紹介する。また、空間グラフの Costantino-Murakami (CM) 不変量を導入し「体積予想」と同様の性質を持つことを紹介する。

#### 3.1. Colored Jones 多項式 ([3] 等参照)

結び目に対し、 $U_q(sl_2)$  の 2 次元表現を通して定義されるのが、よく知られた Jones 多項式と呼ばれる不変量である。この表現の次元を 3 以上に一般化して定義される結び目の不変量を colored Jones 多項式と呼ぶ。 $n$  次の colored Jones 多項式に 1 の原始  $n$  乗根  $e^{\frac{2\pi i}{n}}$  を代入した値の  $n$  を大きくしていった時の極限と  $S^3$  内の結び目の補空間の双曲体積の関係を述べた予想がある。

**Conjecture 3.1.** (体積予想)  $K$  を結び目、 $J_n[K](t)$  を  $K$  に対する、 $N$  次の colored Jones 多項式とする。このとき、

$$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |J_n[K](e^{\frac{2\pi i}{n}})|}{n} = \text{Vol}(S^3 \setminus K),$$

が成り立つと予想される。ここで、 $\text{Vol}(\cdot)$  は双曲体積を表す。また、補空間全体には、双曲構造が入らない場合でも、単体体積と呼ばれる量に置き換えることで上記の予想がなされている。

「体積予想」は、まだ証明されていないが、状況証拠がそろっておりおおむね正しそうである。量子不変量は、表現を通して組み合わせ論的に定義されているため、幾何的な意味がはっきりしていないが、「体積予想」により双曲体積との対応が示される。

#### 3.2. Costantino-Murakami 不変量

自然数  $n \in \mathbb{N}$  を固定し、1 の原始  $2n$  乗根を  $\xi_n = \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{n})$  と取る。 $a \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  と  $b - c \in \mathbb{N}$  となる  $b, c \in \mathbb{C}$  に対し、

$$\{a\} = \xi_n^a - \xi_n^{-a}, \quad \{k\}! = \prod_{j=1}^k \{j\}, \quad \left[ \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \right] = \prod_{j=0}^{b-c-1} \frac{\{b-j\}}{\{b-c-j\}}$$

とおく。Costantino-Murakami 不変量は、向き付けられた枠付き空間 3 価グラフに対する不変量で、量子群  $U_{\xi_n}(sl_2)$  の整ではない表現を通して定義される。この表現は、半整数でない複素

数  $a \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  をパラメータとして持ち,  $a$  ごとに  $n$  次元ベクトル空間  $V^a$  の表現  $\rho_a : U_{\xi_n}(sl_2) \rightarrow \text{End}(V^a)$  が定まる. グラフの各辺  $e_i$  に, 表現に対応する半整数ではない複素数  $Col(e_i) \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  を付け, 表現空間  $V^{Col(e_i)}$  を対応させる. この複素数を カラー と呼ぶ. なお, 表現空間とその双対空間の合同条件より, カラー  $a$  がついた辺と, 向きを逆してカラー  $n-1-a$  を付けた辺は同じ物と見なせる.  $\bar{a} = n-1-a$  とおく. (図3左)

**Definition 3.2.** (Admissible Coloring) 向き付けられた空間3価グラフの各辺に付けたカラーが, 各頂点に集まる3つの辺で,

$$Col(e_i) + Col(e_j) + Col(e_k) \in \{n-1, n, \dots, 2n-2\}$$

を満たすとき, このカラー付けを *admissible* なカラー付けと呼ぶ. なお, このとき辺の向き付けはすべて頂点に向かっていくとする (図3右). *admissible* なカラー付けに対しては, 頂点でうまく表現が入ることが知られている.

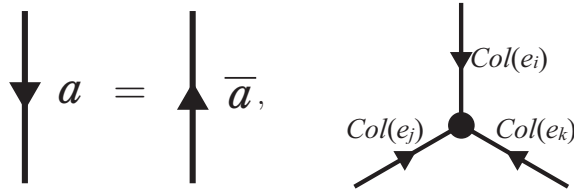


図 3: (左) 辺の向き付けとカラーの対応 (右) 3 価頂点での様子

Costantino-Murakami 不変量  $\langle \cdot \rangle_{CM}$  は, 次のように計算される. *admissible* にカラー付けられた向き付けられた枠付き空間 3 価グラフ  $\Gamma$  を 1 つの任意の辺  $e$  で切り開く. 領域  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  を考え, 1 つの端点を  $\mathbb{R} \times \{1\}$ , もう一方を  $\mathbb{R} \times \{0\}$  に持っていき (ただし, 端点は射影図の上を通っていくとする), 残りの部分が  $\mathbb{R} \times (0, 1)$  に入るように射影図を動かす. これを  $(1, 1)$ -タングルと呼ぶ. このタングル  $T$  を, 特異点 (極大, 極小, 頂点, 交点) が丁度一つ入る帯に分割する.  $\mathcal{U}_{\xi_n}(sl_2)$  の表現によりそれぞれの帯を, 帯の下境界の点が表す表現空間から上の境界の点が表す表現空間への準同型と見なす. すべての帯の写像を合成し,  $Col(e)$  に対応する表現空間からそれ自身への自己準同型が得られる. 表現論で知られている, Schur の補題よりこの自己準同型は恒等写像の定数倍となる. この定数を  $\lambda(T)$  とおく. このとき, 次の値が不変量となる.

$$\langle \Gamma \rangle_{CM} = \lambda(T) \left[ \frac{2Col(e) + n}{2Col(e) + 1} \right]^{-1}.$$

Costantino-Murakami 不変量は, 四面体の辺の形のグラフに対して, 次の性質を持つ.

**Theorem 3.3.**  $S$  を双曲四面体,  $\Gamma$  を図のようにカラーと向きが付いた四面体の辺の形のグラフとする. また, このグラフの  $CM$  不変量の値を右図のようにおく.  $S$  の面角  $\theta_a, \dots, \theta_f$  に対し,

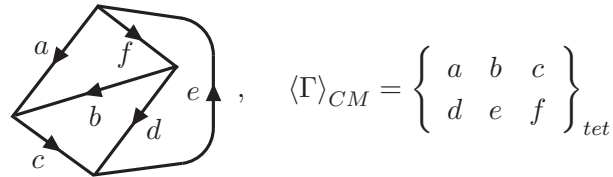


図 4: 四面体の辺のグラフ  $\Gamma$  とその  $CM$  不変量の値

カラーの列  $a_n, \dots, f_n$  をそれぞれ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi a_n}{n} = \pi - \theta_a, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi f_n}{n} = \pi - \theta_f$  を満たす

ようにとる.  $S$  が理想四面体のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \left( (-1)^{n-1} \left\{ \begin{matrix} a_n & b_n & c_n \\ a_n & b_n & c_n \end{matrix} \right\}_{tet} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \left( (-1)^{n-1} \left\{ \begin{matrix} \overline{a_n} & \overline{b_n} & \overline{c_n} \\ \overline{a_n} & \overline{b_n} & \overline{c_n} \end{matrix} \right\}_{tet} \right) = \text{Vol}(S)$$

となる. また,  $S$  が切頂四面体のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \log \left( \left\{ \begin{matrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \end{matrix} \right\}_{tet} \left\{ \begin{matrix} \overline{a_n} & \overline{b_n} & \overline{c_n} \\ \overline{d_n} & \overline{e_n} & \overline{f_n} \end{matrix} \right\}_{tet} \right) = \text{Vol}(S). \quad (1)$$

**Remark 3.4.** Theorem 3.3 で, カラーは整数値で取っている. [1] で,  $\{\cdot\}_{tet}$  の式は整数カラーでも, well-defined であることが示されている.

## 4. 横田型不変量

### 4.1. 定義

$\langle \cdot \rangle_{CM}$  を Costantino-Murakami 不変量とする.  $\Gamma$  を admissible なカラーを付けた向き付けられた空間3価グラフ,  $D$  を  $\Gamma$  の射影図とする. 横田不変量の定義の手法を用いて,  $D$  に対し次の値  $\langle \cdot \rangle_{Y'}$  を定義する.

$$\langle D \rangle_{Y'} = \langle D \rangle_{CM} \langle \overline{D}^r \rangle_{CM},$$

ここで,  $\overline{\cdot}$  は鏡像をとった射影図,  $\cdot^r$  は辺の向き付けを逆にした射影図を表す. また, 4 価以上の頂点を持つグラフに対して, 次の関係式により定義を拡張する.

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle_{Y'} = \sum_i \begin{bmatrix} 2i+n \\ 2i+1 \end{bmatrix}^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle_{Y'},$$

ここで, 右辺の和は, カラー  $i$  が周りの辺に対して admissible である範囲でとるとする. 周りの辺のカラーと向き付けは省略しているが両辺で一致しているとする. また右辺真ん中の辺の向き付けは任意である.

**Theorem 4.1.**  $D$  を admissible なカラーが付いた各頂点が 3 価以上の向き付けられた空間グラフの射影図とする.  $\langle D \rangle_{Y'}$  の値は,  $D$  の  $RI - RV$  の変形に対し不変であり,  $D$  の表す空間グラフ  $\Gamma$  の不変量となっている.

Theorem 3.3 の式 (1) の ( ) の中身は,  $\langle \cdot \rangle_{Y'}$  で四面体の辺の形のグラフを評価した値でもある. この部分を  $\langle \cdot \rangle_{Y'}$  に取り替えることにより, 次の Theorem 3.3 の凸多面体への一般化が期待される.

**Conjecture 4.2.**  $S$  と双曲凸多面体,  $\Gamma$  を  $S$  の辺の形をしたグラフとする. Theorem 3.3 のように  $S$  の各面角に対応するカラーの列を  $\Gamma$  に付ける. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \log (\langle \Gamma \rangle_{Y'}) = \text{Vol}(S).$$

ただし, この場合もカラーの列は整数値であり,  $\langle \Gamma \rangle_{Y'}$  の整数カラーでの well-definedness が問題となる. 講演では, カラーを整数値から少しずらして行つた, 四角錐の辺のグラフの数値計算の結果を紹介し, この場合でも well-definedness や conjecture が成り立ちそうなことを示す.

## 参考文献

- [1] F. Costantino and J. Murakami, *On  $SL(2, \mathbb{C})$  quantum  $6j$ -symbol and its relation to the hyperbolic volume*, preprint arXiv:1005.4277
- [2] Y. Yokota, *Topological invariants of graphs in 3-space*, Topology **35** (1996), 77-87
- [3] H. Murakami, *An introduction to the volume conjecture*, in “Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory”, 1-40, Contemp. Math. **541** Amer. Math. Soc., Providence, RI (2011)

## タイヒミュラー空間の双正則自己同型について

(宮地秀樹氏(大阪大学)との共同研究)

大阪大学大学院理学研究科 D2 嶺山良介

この講演の目標は解析的に有限な Riemann 面を底空間とする Teichmüller 空間の双正則自己同型を特徴づける, H. Royden, C. Earle, I. Kra, and V. Markovic による次の定理の別証明を彼らとは異なるアプローチで与えることである. (cf.[2],[3],[11])

**定理 1** (Royden, Earle, Kra, Markovic).  $T_{g,n}$  を解析的に有限なタイプ  $(g,n)$  の Riemann 面の Teichmüller 空間とする.  $3g - 3 + n > 2$  かつ  $(g,n) \neq (1,2)$  の場合,  $T_{g,n}$  の任意の双正則自己同型はタイプ  $(g,n)$  の曲面の向きを保つ位相同型から誘導される. 加えて, もし  $(g,n) \neq (2,0)$  ならば  $T_{g,n}$  の正則自己同型群はタイプ  $(g,n)$  の曲面の写像類群と同型である.

### • 用語の定義

Riemann 面  $X$  に対する Teichmüller 空間  $T(X)$  は標識つき Riemann 面  $(Y, f)$  の Teichmüller 同値類の空間として定義される. ここで標識付き Riemann 面とは Riemann 面  $Y$  と写像  $f$  の組である. ただし  $Y$  は  $X$  と位相同型な Riemann 面であって標識  $f$  は  $X$  から  $Y$  への擬等角写像  $f: X \rightarrow Y$  と呼ばれる特別な位相同型写像である. これは写像の「歪め方」を表す数(最大歪曲度)が有限であるようなものとして定義される. 2つの標識付き Riemann 面  $(Y_1, f_1), (Y_2, f_2)$  が Teichmüller 同値であるとは, ある等角写像  $h: Y_1 \rightarrow Y_2$  があって, これが  $f_2 \circ f_1^{-1}$  とホモトピックであるときをいう.  $T(X)$  の底曲面とは  $X$  のことを指すことを注意しておく.

Teichmüller 空間  $T(X)$  は等角構造の差を測る自明な距離を備えており, Teichmüller 距離  $d_T$  と呼ばれている. これは

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \inf \{ K(h) \mid h \text{ は擬等角で } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ とホモトピック} \}$$

で定義される. ただしここで  $y_i = (Y_i, f_i)$  ( $i = 1, 2$ ) であり,  $K(h)$  は  $h$  の最大歪曲度である. 擬等角写像の逆写像, 合成もまた擬等角写像である.

Teichmüller 空間は自然な複素構造を備えていて複素多様体であることが知られている. Teichmüller 距離はこの複素構造から定まる距離である Kobayashi 距離と一致する. 従って, Teichmüller 空間上任意の双正則自己同型は Teichmüller 距離に関する等長変換になる.

Riemann 面の写像類群は Riemann 面上の向きを保つ自己位相同型のアイソトピー類のなす群である. 向きを保つ位相同型の作用は Teichmüller 空間の正則写像を誘導することが知られている. 従ってこの逆を示せば定理を得ることができる.

● これまでのアプローチ

1. 双正則自己同型の特徴付け

定理 1 は H.Royden[11] によって初めて  $g \geq 2$  かつ  $n = 0$  の場合に, 「二つのマーク付き Riemann 面が  $T_{g,n}$  のある双正則自己同型の像として互いに関係づけられているとき, それぞれの底曲面どうしは等角同値である」ことを示すことにより得られた. 実際, 彼はすべての Riemann 面を, 二次微分のなす ( $L^1$  ノルムでの) Banach 空間の間の  $\mathbb{C}$ -等長変換で像が不変になるように正則二次微分の空間の射影空間上に実現した. Teichmüller 計量は Kobayashi 無限小計量と一致するので余接写像 (写像の微分による押し出し, すなわち  $f^*: T_{f(x)}^* N \rightarrow T_x^* M, (f^*\theta)(v) = (\theta)(f_*v)$ ) は  $T_{g,0}$  上の双正則自己同型で移り合う二点 (つまり二つの Riemann 面と擬等角写像) の底曲面どうしの等角同相を誘導する ([5]). 後に C.Earle と I.Kra[2] は Royden の議論を残りの  $(g,n)$  の組, すなわち  $2g - 2 + n > 0$  を充たすもの, に拡張した.

Royden の定理は任意のタイプに対して主張されている. [1] において C.Earle と F.Gardiner は, 二つの Teichmüller 空間におけるそれぞれの基点の接空間を結ぶ任意の  $\mathbb{C}$ -等長写像がそれぞれ対応する Riemann 面の正則二次微分の空間の  $\mathbb{C}$  等長写像を誘導する, という “adjointness theorem” を示した. その後, V.Markovic は Royden の定理を底空間が無限解析的な場合まで拡張した. 彼は Rudin による, 同程度可測性定理; 「任意の正則二次微分の空間の間の  $L^1$  ノルムに関する  $\mathbb{C}$  同型は, 対応する (無限次元) 複素射影空間における二次微分の基底を通して Riemann 面の像を保つ」を適用して示している. [3] において, Earle と Markovic は [9] で採用された方法を用いて有限解析的な Riemann 面の Teichmüller 空間の自己同型を特徴づけている. これらの方法については [4] に解説がある.

2. 等長写像の特徴付け

[2] で, Earle と Kra は Royden[11] の議論を一般化することで,  $(T_{g,n}, d_T)$  の等長写像が (いくつかの  $(g,n)$  を除いて) 底空間の位相同型を誘導することを示した. 実際, 任意の Teichmüller 距離に関する同型は Lipschitz 写像であるので, Rademacher-Stepanov の定理により, 与えられた等長写像はほとんど全ての標識つき Riemann 面の組に対する正則二次微分の空間の  $\mathbb{R}$  等長写像を誘導することがわかる. 彼らはこの  $\mathbb{R}$  等長写像を解析して, 結果を得た.

一方 [6] において, N.Ivanov は  $(T_{g,n}, d_T)$  に関する等長写像の特徴付けを上記とは異なる, Thurston 理論を用いる方法で得た. 彼はまず  $g \geq 2$  の場合に関して曲線複体の自己同型を特徴付けたのち, Teichmüller 空間上の任意の等長写像が曲線複体の同型を誘導することを示した. Ivanov

の残した  $(g, n)$  についても, M.Korkmaz[7] と F.Luo[8] が曲線複体の特徴付けを行っている. 等長写像から曲線複体の同型を得るため, Ivanov は projective measured lamination の空間  $\mathcal{PMF}$  を接空間上の単位球面と見做した. これはすなわち, Teichmüller 測地的半直線の発する方向のなす空間である. そして彼は指数写像による共役をとることによって measured lamination の空間の自己写像を構成し, 誘導された写像が  $\mathcal{PMF}$  上の単純閉曲線の集合を曲線どうしの非交性まで含めて保つということを結論づけたのである.

[10] において Miyachi は等長写像を Teichmüller 空間の極值的長さの幾何学を用いて特徴づけた. そこでの証明法は Ivanov のものをいくらか変更したものになっている. しかしながら, 議論は等長写像よりもかなり粗い (連続性をも仮定しない) 写像についてのものであり, この写像の作用が Gardiner-Masure 境界へ連続に拡張することを定式化して特徴付けが得られる.

### 3. もう一つのアプローチ

初めに述べたように, Teichmüller 空間の双正則自己同型について今までとは異なるアプローチで特徴付けを行う. これは極值的長さの幾何学を通して得られる. ここでの証明は等長写像の無限遠での振る舞いを観察することによるものであり, 先人たちの方法が無限小の振る舞いを研究するものであったことと比較してかなり異なることを注意しておく.

上記で議論したように,  $(g, n) \neq (1, 2)$  の場合は既に与えられた等長写像から, 位相同型を構成している. 従って示すべきことは, 与えられた等長写像が正則写像ならそれから誘導される位相同型が向きを保つ, という事である.

Miyachi の仕事 [10] により, 等長変換の Gardiner-Masur 境界への作用は単純閉曲線の集合を保ち, 誘導された位相同型の曲線複体への作用と一致することが知られている. 一方曲面の位相同型が曲線複体上の曲線の順序つきのある三つ組みを保つとき, 向きを保つ写像であることも同様に知られている. Gardiner-Masur コンパクト化における Teichmüller 測地的半直線の極限を綿密に調べることにより, 等長変換が正則ならばそこから誘導された位相同型は先の順序つきの曲線の三つ組みを保つことがわかる. これを結論づけるため, 我々は Teichmüller 空間の Maskit 埋め込みにおける Teichmüller 測地的半直線の漸近的振る舞いを調べることになる. これは Shiga-Tanigawa[12] の類似の議論によって得られる.

上で述べたように Markovic は一般的な Riemann 面に対する Teichmüller 空間の双正則自己同型を特徴付けた. これは我々の方法のように一般的な Teichmüller 空間における双正則自己同型の無限遠での作用という観点か

ら “位相的な方法” となることが期待されていたものである.

## 参考文献

- [1] C. EARLE AND F. GARDINER, Geometric isomorphisms between infinite dimensional Teichmüller spaces *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 1163–1190.
- [2] C. EARLE AND I. KRA, On isometries between Teichmüller spaces, *Duke Math. J.* **41** (1974), 583–591.
- [3] C. EARLE AND V. MARKOVIC, Isometries between the spaces of  $L^1$  holomorphic quadratic differentials on Riemann surfaces of finite type, *Duke Math. J.* **120** (2003), no. 2, 433–440.
- [4] A. FLETCHER AND V. MARKOVIC, *Quasiconformal Maps and Teichmüller Theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics (2006).
- [5] F. GARDINER, *Teichmüller theory and Quadratic differentials*, (Wiley-Interscience, 1987).
- [6] N. IVANOV, Isometries of Teichmüller spaces from the point of view of Mostow rigidity, Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry (eds. Turaev, V., Vershik, A.), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol **202**, (American Mathematical Society, 2001), 131–149.
- [7] M. KORKMAZ, Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and punctured tori, *Topology and its Applications* **95** (1999), 85–111.
- [8] F. LUO, Automorphisms of the complexes and curves, *Topology* **39** (2000), 283–298.
- [9] V. MARKOVIC, Biholomorphic maps between Teichmüller spaces, *Duke Math. J.* **120** (2003), 405–431.
- [10] H. MIYACHI, *Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number*, submitted.
- [11] H. ROYDEN, Automorphisms and isometries of Teichmüller space, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies **66**, (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971), pp. 369–383.
- [12] H. SHIGA AND H. TANIGAWA, On the Maskit coordinates of Teichmüller spaces and modular transformations, *Kodai Math. J.* **12** (1989), 437–443.
- [13] K. MATSUZAKI AND M. TANIGUCHI, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. (The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998).

# $S^2$ 上の2つの $S^2$ 束に定まる Riemann 計量について

大鳥羽 暢彦 (慶應義塾大学後期博士課程一年)\*

このテクニカルレポートの構成は次の通りである. まず, Riemann 計量とその曲率について, 丸い球面を例にとって簡単に述べる (§1). 次の §2 では, 自明束  $S^2 \times S^2$  上の自然な直積計量の性質 (命題 2.1) と特徴付け (命題 2.2) に触れた後, 非自明束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上に講演者が構成した計量の性質 (定理 2.1) と特徴付け (定理 2.2) について述べて, これら2種類の計量が互いの対応物であることを見る. 最後の §3 では, 山辺の問題の解の一意性とこれらの計量の関係を紹介する.

## 1. Riemann 計量とその曲率

Riemann 多様体とは, 3次元 Euclid 空間に埋め込まれた曲面の高次元への一般化である. 例えば, 半径  $R$  の  $n$  次元球面  $S^n(R)$  は最も基本的な閉 Riemann 多様体である. 形式的には, Riemann 多様体とは滑らかな多様体  $M$  とその上の Riemann 計量  $g$  の2つ組であり, 標語的に

$$\text{Riemann 多様体 } (M, g) = \text{多様体 } M + \text{Riemann 計量 } g$$

と書ける. 一般の  $n$  次元実多様体  $M$  の各点  $p$  には接空間  $T_p M$  が定まっており,  $T_p M$  は  $n$  次元実ベクトル空間であるが, そこには (標準的な) 内積は定まっていない; 多様体  $M$  上の Riemann 計量  $g$  とは, 各接空間  $T_p M$  上の Euclid 内積  $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  の集まり  $g = \{g_p\}_{p \in M}$  のことである. 例えば球面  $S^n(R) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = R\}$  の場合は, 各接空間に  $\mathbb{R}^{n+1}$  の標準的な内積から誘導される内積を与えることで, Riemann 多様体と考える. そのようにして定まる  $S^n$  の Riemann 計量を  $\overset{\circ}{g}_R$  と書く: また, Riemann 多様体  $(S^n, \overset{\circ}{g}_R)$  を半径  $R$  の丸い球面と呼び, これを簡単に  $S^n(R)$  と書くことにする.

Riemann 多様体の内在的な曲がり方を測る量として, 断面曲率, Ricci 曲率, そしてスカラー曲率の3つが基本的である. 断面曲率は Ricci 曲率より, そして Ricci 曲率はスカラー曲率より, Riemann 多様体の曲がり方に関する情報を多く持っている. これら3つの中で, スカラー曲率は多様体  $M$  上の滑らかな関数であり, 小さな測地球の体積を制御する量という幾何学的意味を持つ. 各種の曲率が一定であるような Riemann 計量は多様体上の“良い”計量と考えられ, 次のように呼ばれる:

$$\begin{aligned} g \text{ の断面曲率が一定である. } & \quad \left( \overset{\text{def}}{\iff} g \text{ は定曲率計量である. } \right) \\ \implies g \text{ の Ricci 曲率が一定である. } & \quad \left( \overset{\text{def}}{\iff} g \text{ は Einstein 計量である. } \right) \\ \implies g \text{ のスカラー曲率が一定である. } & \quad \left( \overset{\text{def}}{\iff} g \text{ は csc 計量である. } \right) \end{aligned}$$

例えば丸い球面  $S^n(R)$  は断面曲率が一定で  $1/R^2$  に等しいが, 一般の滑らかな多様体には定曲率計量や Einstein 計量が定まるとは限らない<sup>1</sup>. 一方, どのような閉 Riemann 多様体も角度を保つ変形を適当に施すとスカラー曲率を一定にできることが知られている (§3 参照).

\*e-mail: otoba@math.keio.ac.jp

<sup>1</sup> 定曲率の閉 Riemann 多様体は, 単連結ならば  $S^n(R)$  に限ることが知られている. また, 4次元多様体  $M$  が Einstein 計量を許容するためには, Euler 数  $\chi(M)$  と符号  $\tau(M)$  に関する Hitchin-Thorpe 不等式  $2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$  の成立が必要である.

## 2. $S^2$ 上の2つの $S^2$ 束に定まる自然な Riemann 計量

### 2.1. 自明束 $S^2 \times S^2$ の場合

2つの2次元球面の直積  $S^2 \times S^2$  を考える. この4次元閉多様体は  $S^2$  上の自明な  $S^2$  束の構造を持つ. すなわち,  $\pi_1: S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$  を第1成分への射影とすると,  $(\pi_1$  の像の)  $S^2$  の各点  $p$  の逆像  $\pi_1^{-1}(p) = \{p\} \times S^2$  を  $S^2$  と自然に同一視することによって,  $S^2 \times S^2$  は (第1成分の)  $S^2$  の各点に (第2成分の)  $S^2$  が “くっついて” できていると捉えることができる. 以下では, 第1成分の  $S^2$  を底空間の  $S^2$ , 第2成分の  $S^2$  をファイバーの  $S^2$  と呼ぶ. なお, 同様のことを第2成分への射影  $\pi_2$  で考えることもできるが, それはこのファイバー束の自明性に由来する.

この自明束に入る1つの自然な Riemann 計量は, 2つの  $\overset{\circ}{g}_1$  (半径1の丸い球面  $S^2(1)$  の計量) の直和  $\overset{\circ}{g}_1 \oplus \overset{\circ}{g}_1$  である. その計量を定めた  $S^2 \times S^2$  は, 半径1の丸い球面  $S^2(1)$  の各点に  $S^2(1)$  が “くっついて” できた Riemann 多様体であると考えられる. また,  $\overset{\circ}{g}_1 \oplus \overset{\circ}{g}_1$  は定曲率計量ではない Einstein 計量である. この Riemann 多様体  $(S^2 \times S^2, \overset{\circ}{g}_1 \oplus \overset{\circ}{g}_1)$  を簡単に  $S^2(1) \times S^2(1)$  と書くことにする.

同じことを  $S^2$  の半径を変えて行くと Riemann 多様体  $S^2(r_1) \times S^2(r_2)$  を得るが, 計量の定数倍を除いて  $r \geq 1$  に対して  $S^2(1) \times S^2(r)$  だけを考慮して, 対応する計量を  $g_r := \overset{\circ}{g}_1 \oplus \overset{\circ}{g}_r$  と書く.  $g_r$  は  $r = 1$  の時は Einstein 計量であったが,  $r > 1$  の時は Einstein 計量ではないスカラー曲率一定計量である.  $g_r$  の基本的な性質が次の命題にまとめられている.

**命題 2.1** ( $g_r$  の性質). 自明束  $S^2 \times S^2$  上の Riemann 計量  $g_r$  は次の性質を持つ ( $r \geq 1$ ):

- (a) 体積は  $\text{Area}(S^2(1)) \cdot \text{Area}(S^2(r)) = 16\pi^2 r^2$  に等しい. 2つの直交変換群の直和  $O(3) \oplus O(3)$  が等長的に作用する.
- (b) 底空間の  $S^2$  には計量  $\overset{\circ}{g}_1$  が, 各ファイバーの  $S^2$  には計量  $\overset{\circ}{g}_r$  が定まっている.
- (c) スカラー曲率は  $S^2 \times S^2$  上一定であり,  $2 + \frac{2}{r^2}$  と書ける<sup>2</sup>.  $r = 1$  の時は Einstein 計量であるが,  $r > 1$  ならば Einstein 計量ではない. ■

一般に, 直積計量のスカラー曲率  $\mu$  は底空間のスカラー曲率  $\mu_B$  とファイバーのスカラー曲率  $\mu_F$  の和である. 従って, (底空間のスカラー曲率  $\mu_B$  が一定であるような) 直積計量のスカラー曲率  $\mu$  が一定ならば, ファイバーのスカラー曲率  $\mu_F = \mu - \mu_B$  も一定である必要がある. ゆえに,  $S^2$  上の計量に対してスカラー曲率が一定であることと丸い球面であることが同値であることに注意すると, 次が観察される.

**命題 2.2** ( $g_r$  の特徴付け). 自明束  $S^2 \times S^2$  上の Riemann 計量が次の3つの性質を持つならば, 直積計量  $g_r$  に定数倍を除いて等長的である:

- (A) 直積計量である.
- (B) 底空間に定曲率計量が定まっている (すなわち, ある半径の丸い球面である).
- (C) スカラー曲率が一定である.

また,  $g_r$  と  $g_s$  が定数倍を除いて等長的ならば,  $r = s$  である. ■

<sup>2</sup>特に,  $r$  が動くとき  $g_r$  のスカラー曲率は正の値しか取りえない.

## 2.2. 非自明束 $S^2 \tilde{\times} S^2$ の場合

次に, Hopf 束  $S^3 \rightarrow S^2$  に付随する非自明な  $S^2$  束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  を考え, ファイバー束の射影を  $\pi : S^2 \tilde{\times} S^2 \rightarrow S^2$  と書く.  $S^2 \tilde{\times} S^2$  は底空間の  $S^2 = \pi(S^2 \tilde{\times} S^2)$  の各点  $p$  にファイバーの  $S^2 \cong \pi^{-1}(p)$  が“くっついて”できていると捉えられる. ただし, 底空間の  $S^2$  は  $S^2 \tilde{\times} S^2$  に埋め込まれておらず, 自明束の場合の第2成分への射影  $\pi_2$  に対応するものは存在しない. なお,  $S^2$  上の  $S^2$  束であって向き付け可能なものは, 微分同相を除くと自明束  $S^2 \times S^2$  と非自明束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  に限ることが知られている.

この非自明束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上に次の性質を満たす Riemann 計量を構成した<sup>3</sup>.

**定理 2.1** ( $\tilde{g}_\rho$  の性質 [O]).  $2\sqrt{2}\pi^3\rho^4 > 1$  を満たす各実数  $\rho$  に対し, 非自明束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上の Riemann 計量  $\tilde{g}_\rho$  であって次の性質を満たすものが存在する:

- (i) 体積は 1 に等しい. 特殊ユニタリ群  $SU(2)$  が等長的に作用する.
- (ii)  $S^2$  束の射影  $\pi : S^2 \tilde{\times} S^2 \rightarrow S^2$  は半径  $\rho/2$  の定曲率球面への Riemann 沈め込みであり, 各ファイバーの  $S^2$  は  $S^2 \tilde{\times} S^2$  に全測地的に埋め込まれている.
- (iii) スカラー曲率は  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上一定であり,  $\frac{2\sqrt{2}}{\rho^2} \cot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2\rho^4}\right) + \frac{8}{\rho^2}$  と書ける<sup>4</sup>.  $\tilde{g}_\rho$  は Einstein 計量ではない. ■

Riemann 多様体  $(S^2 \tilde{\times} S^2, \tilde{g}_\rho)$  は, 半径  $\rho/2$  の丸い球面  $S^2(\rho/2)$  の各点に回転対称な (しかし丸くない) 球面が“くっついて”できていると考えられる. 実際, 性質 (ii) から各ファイバーの  $S^2$  は互いに等長的であることが従う; さらに, 各ファイバーの  $S^2$  には常微分方程式  $\rho^4 f'' = -f^3 - 2\rho^2 \cot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2\rho^4}\right)f$  の (適切な) 境界値問題の解  $f$  が定義する回転対称計量  $f d\theta^2 + dt^2$  が定まっている.  $f$  は超越関数であり, それらの回転対称計量は定曲率ではない.

計量の構成方法と Vilms の議論 [Vil, Theorem 3.5] から次を得る.

**定理 2.2** ( $\tilde{g}_\rho$  の特徴付け [O]). 非自明束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上の Riemann 計量が次の 3 つの性質を持つならば, 定理 2.1 の計量  $\tilde{g}_\rho$  に定数倍を除いて等長的である:

- (I) 付随する主束の自然な (Ehresmann) 接続から誘導される接続を持つ.
- (II) ファイバー束の射影が定曲率球面  $S^2$  への Riemann 沈め込みであり, かつ各ファイバーは互いに等長的である.
- (III) スカラー曲率が一定である.

また,  $\tilde{g}_\rho$  と  $\tilde{g}_\sigma$  が定数倍を除いて等長的ならば,  $\rho = \sigma$  である. ■

自明束  $S^2 \times S^2$  においては, 定理 2.2 の条件 (I), (II) は命題 2.2 の条件 (A), (B) と同値である. 従って, (I), (II), (III) は計量  $\tilde{g}_\rho$  と直積計量  $g_r$  に共通する特徴付けを与える. その意味において, 非自明束  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上の計量  $\tilde{g}_\rho$  は自明束  $S^2 \times S^2$  上の自然な直積計量  $g_r$  の対応物であると言える.

<sup>3</sup>  $S^2 \tilde{\times} S^2$  には Don Page によって Einstein 計量が 1 つ構成されている [Sen]. その計量は  $\tilde{g}_\rho$  と同じく  $SU(2)$  の対称性を持つが,  $\tilde{g}_\rho$  とは異なりファイバー束の構造と適合した性質は持っていない.

<sup>4</sup> 特に,  $\rho$  が動くとき  $\tilde{g}_\rho$  のスカラー曲率は任意の実数値を取りうる.

### 3. 山辺の問題とスカラー曲率一定計量の一意性

“与えられた閉 Riemann 多様体を適当に共形変形することでスカラー曲率を一定にすることができるだろうか” という問いに端を発する山辺の問題は、山辺英彦により変分構造を持つ偏微分方程式の解の存在問題として定式化され(1960年), Richard Schoen らによって正質量定理を用いて肯定的に解決された(1984年頃). その後自然に興味の対象となったことの一つは共形類内のスカラー曲率一定計量(csc計量)全体がなす空間であり、数年前に Khuri, Marques, Schoen によってこの空間のコンパクト性に関する大きな結果が得られた [KMS]. 小磯の定理(1979)を用いた Böhm, Wang, Ziller の議論 [BWZ, Theorem 5.1] から、コンパクト性定理の系として、共形類内の csc 計量の定数倍を除いた一意性に関して次のことが観察される.

**定理 3.1** ([BWZ, KMS]).  $M$  を 3 次元以上 24 次元以下の閉多様体とする.  $M$  上の Riemann 計量  $h_0$  はその共形類において定数倍を除いて一意な csc 計量であるとし,  $h_0$  の強い安定性を仮定する. このとき, 共形類  $[h_0]$  に  $C^\infty$  位相で十分近い共形類  $[h]$  においても, csc 計量の定数倍を除いた一意性が成り立つ. ■

次の二つの場合には, 共形類における csc 計量の定数倍を除いた一意性および強い安定性が成り立つということが知られている:

♣ 共形類が  $S^n(R)$  と共形同値でない Einstein 計量を含む場合,

♠ 共形類に非正のスカラー曲率一定計量がある場合.

前者は Lichnerowicz の不等式と小島 の定理の帰結であり, 後者の場合の一意性は最大値の原理から従う.

直積計量  $g_r$  は  $r = 1$  ならば Einstein 計量であったので(命題 2.1(c)), ♣ から  $h_0 = g_1$  として定理 3.1 を適用できることが分かる. 一方, 定理 2.1(iii) を見ると計量  $\tilde{g}_\rho$  のスカラー曲率が 0 になる  $\rho = \rho_0$  が(一意に)存在することが分かるので<sup>5</sup>, ♠ から  $h_0 = \tilde{g}_{\rho_0}$  としても定理 3.1 を適用できることが分かる. 従って, 次を得る:  $S^2 \times S^2$  上の計量  $g_r$  と  $S^2 \tilde{\times} S^2$  上の計量  $\tilde{g}_\rho$  は, 助変数  $r$  および  $\rho$  がそれぞれ 1 と  $\rho_0$  に十分近いならば, 各共形類  $[g_r]$  および  $[\tilde{g}_\rho]$  において定数倍を除いて唯一のスカラー曲率一定計量である. 一方,  $S^2 \times S^2$  と  $S^2 \tilde{\times} S^2$  のいずれの場合も, 計量の助変数  $r$  や  $\rho$  が大きすぎると, 安定性とスカラー曲率一定計量の一意性が崩れることが確かめられる.

### 参考文献

- [BWZ] Böhm, C.; Wang, M.; Ziller, W. A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds. *Geom. Funct. Anal.* 14 (2004), no. 4, 681–733.
- [KMS] Khuri, M. A.; Marques, F. C.; Schoen, R. M. A compactness theorem for the Yamabe problem. *J. Differential Geom.* 81 (2009), no. 1, 143–196.
- [O] Otoba, Nobuhiko. Some natural Riemannian metrics on the nontrivial two-sphere bundle over the two-sphere. (In preparation)
- [Sen] Sentenac, Pierrette. Construction d’une métrique d’Einstein sur la somme connexe de deux projectifs complexes de dimension 2. *Géométrie riemannienne en dimension 4* (Paris, 1978/1979), 292–307, *Textes Math.*, 3, CEDIC, Paris, 1981.
- [Vil] Vilms, Jaak. Totally geodesic maps. *J. Differential Geom.* 4 (1970), 73–79.

<sup>5</sup>  $\rho_0^{-4} = 2\sqrt{2}\pi^2 \operatorname{Arcsin}(1/3)$  と明示的に書ける.

# ホモロジー 3 球面の 1 次の有限型不変量とその correspondence に対する拡張について

清水 達郎 (東京大学 数理科学研究科)\*

## 1. 背景

G. Kuperberg と D. Thurston は M. Kontsevich のアイデアを元に、ホモロジー 3 球面の普遍有限型不変量  $Z^{KKT}$  (KKT 不変量) [1] を定義した。1 次の有限型不変量は定数倍を除いて Casson-Walker 不変量であることが知られており、 $Z^{KKT}$  の 1 次部分である  $Z_1^{KKT}$  は Casson-Walker 不変量の別構成と捉えることが出来る。

また、この不変量に関連して、森山哲裕は 3 次元多様体の 6 次元多様体への埋め込みに対する不変量 [3] を構成した。この不変量は Haefliger 不変量や Milnor の triple linking number を含む拡張になっている。また、ある状況下では KKT 不変量の 1 次の部分に一致する。したがって、Casson-Walker 不変量の拡張と捉えることが出来る。

不変量  $Z^{KKT}$  の主要項は積分をもちいて構成できる [2]。そのため、 $Z^{KKT}$  は多様体の手術に対する振る舞いを調べるのに適している。実際、Kuperberg-Thurston は手術公式を具体的に記述することで KKT 不変量が有限型であることを証明した。また、有理ホモロジー 3 球面に対する同様の性質を示すために C. Lescop がいくつかの手術公式を得ている。なお、積分される微分形式を構成するのに、3 次元多様体の framing が重要な役割を果たす。

他方、森山の不変量の定義には cobordism と符号数を利用する。森山は [4] において、Casson 不変量のあるスピン 4 次元多様体の符号数として実現することで、Casson 不変量が Rokhlin 不変量の integral lift であることのトポロジカルな理解を与えた。

## 2. ホモロジー 3 球面

### 2.1. ホモロジー 3 球面

ホモロジー 3 球面とは、ホモロジー群の情報では球面と区別がつかない向き付けられた閉多様体である。

定義 1 (ホモロジー 3 球面). 向き付けられたコンパクト 3 次元多様体  $M$  が整 (*resp.* 有理) ホモロジー 3 球面であるとは、任意の整数  $i$  に対し以下の条件を満たすときをいう。

$$H_i(M; \mathbb{Z}(\text{resp. } \mathbb{Q})) \cong H_i(S^3; \mathbb{Z}(\text{resp. } \mathbb{Q})).$$

整ホモロジー 3 球面は単にホモロジー 3 球面ということが多い。

例 1 (ホモロジー 3 球面の例). •  $I \subset SO(3)$  を正 12 面体群、 $\tilde{I} \subset Spin(3) \cong S^3$  をその 2 重被覆とする。  $\tilde{I}$  は完全群 (*i.e.* 可換化が 0) であることが知られている。よって  $S^3/\tilde{I}$  はホモロジー 3 球面である。  $S^3/\tilde{I}$  は Poincaré 3 球面と呼ばれる。

- $k$  を  $S^3$  内の任意の結び目とする。  $k$  に沿った  $\pm 1$ -Dehn 手術によって得られる 3 次元多様体はホモロジー 3 球面である。また、 $k$  に沿った 0 手術を除く Dehn 手術によって得られる 3 次元多様体は有理ホモロジー 3 球面である。

---

\* e-mail: shimizu@ms.u-tokyo.ac.jp

## 2.2. Rokhlin 不変量

整ホモロジー 3 球面の不変量として, Rokhlin 不変量が古くから知られている. Rokhlin 不変量  $\mu$  は  $\mathbb{Z}/2$ -値不変量である. 任意の整ホモロジー 3 球面  $M$  はただ 1 つスピン構造<sup>1</sup> をもつことが知られている. 向き付けられた 4 次元多様体  $W$  に対し  $Sign(W)$  を  $W$  の符号数とする.

命題 1.  $W_1, W_2, W$  を 4 次元多様体で,  $\partial W_1 = \partial W_2$  であるものとする.  $-W$  を  $W$  の向きを逆にした 4 次元多様体とする.

- (Novikov 加法性)  $Sign(W_1 \cup W_2) = Sign(W_1) + Sign(W_2)$ .
- $Sign(-W) = -Sign(W)$ .
- 任意の閉スピン 3 次元多様体  $M$  に対し,  $\partial W = M$  となるスピンコンパクト 4 次元多様体が存在する.
- 任意のスピンコンパクト 4 次元多様体  $W$  に対し,  $8|Sign(W)$ .
- (Rokhlin1954) 任意の閉スピン 4 次元多様体  $W$  に対し,  $16|Sign(W)$ .

ホモロジー球面  $M$  に対し, 許容する唯一のスピン構造をこめて  $M$  を境界にもつ 4 次元スピン多様体をつとり  $W$  とする. このとき, 上の命題から  $\mu(M) := Sign(W)/8 \in \mathbb{Z}/2$  は  $W$  によらず well-defined である.

定義 2 (Rokhlin 不変量).

$$\mu(M) := Sign(W)/8 \in \mathbb{Z}/2$$

を  $M$  の Rokhlin 不変量という.

このように, Rokhlin 不変量は, 符号数と (スピンという) 構造つきのコボルディズムを援用した不変量である.

## 2.3. Casson 不変量

Casson 不変量  $\lambda$  は, 1985 年に Casson により定義されたホモロジー球面の整数値不変量である. 以下のような性質を持つ.

- $\lambda(M)/8 \equiv \mu(M) \pmod{2}$ .

Casson 不変量は基本群の  $SU(2)$  表現を用いて定義される. 定義から直接 Rokhlin 不変量の持ち上げであることを確かめることは難しい<sup>2</sup>. 現在ではホモロジー球面の不変量は他にも "数多く" 知られている. 特に, 次の章で述べる Moriyama の不変量は Casson 不変量のトポロジカルな解釈を与える. すると Casson 不変量が Rokhlin 不変量の持ち上げであることが直接確かめられる.

## 3. KKT 不変量と Moriyama の不変量

Moriyama の不変量の背景には Kuperberg-Thurston 不変量の 1 次部分  $Z_1^{KKT}$  があるので, まずは  $Z_1^{KKT}$  の C. Lescop による記述 [2] を概観する.

<sup>1</sup>  $TM$  に同伴する  $Spin(3)$  主束をスピン構造という.

<sup>2</sup> 手術公式を比較することにより確かめられる.

### 3.1. Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の 1 次部分

$M$  を基点  $\infty$  付き有理ホモロジー 3 球面とする． $\tau$  を  $T(M \setminus \infty)$  の framing であって  $\infty$  付近である条件<sup>3</sup>をみたすものとする． $\tilde{\Delta} := M \times \infty \cup \infty \times M \cup \Delta \subset M \times M$  の  $M \times M$  における補空間上に  $\tau$  をもちいて propagator と呼ばれる 2-form  $\omega(\tau)$  が構成でき，完全形式を法として一意に定まる．<sup>4</sup> 他方， $\tau$  に不足符号数を援用することで整数  $\delta(\tau)$  が定まる．

定義 3 (KKT 不変量の 1 次部分).

$$Z_1^{KKT}(M) := \frac{1}{12} \int_{M \times M \setminus \tilde{\Delta}} \omega(\tau)^3 - \frac{1}{48} \delta(\tau).$$

### 3.2. Moriyama の不変量

Moriyama の不変量は  $e$ -manifold と呼ばれる対象の有理数値不変量である．コンパクト 6 次元多様体  $W$  に proper に埋め込まれたコンパクト 3 次元多様体  $M$  と，補空間  $W \setminus M$  の有理係数 2 次元コホモロジー  $e$  の組で， $M$  の近くである有理コホモロジカルな条件を満たすものを  $e$ -manifold と呼ぶ．<sup>5</sup> Moriyama は， $e$ -manifold の cobordism 群が torsion を除いて自明であることを示した．したがって，3 次元多様体  $M$  を適当な数 ( $k$  個) コピーした多様体を境界とするようなコンパクト 4 次元多様体  $X$  が  $e$ -manifold の情報の一部として取れる．このとき， $\sigma(W, M, e) := \text{Sign}(X)/k$  が well-defined となる (Moriyama の不変量)．

$M \times M \supset \tilde{\Delta}$  は部分多様体ではない．しかし  $(\infty, \infty)$  におけるある種の blow-up によって， $\tilde{\Delta}$  を構成する 3 つの多様体 (いずれも  $M$  と微分同相) を互いに交わらないようにすることができる．こうして得られた多様体対を  $((M \times M)', \tilde{\Delta}')$  と書く．

命題 2 (Moriyama [3]). 唯一つのコホモロジー類  $e_M$  が存在し， $((M \times M)', \tilde{\Delta}', e_M)$  は  $e$ -manifold になる．このとき， $\sigma((M \times M)', \tilde{\Delta}', e_M) = 16Z_1^{KKT}(M)$  が成り立つ．

森山はさらにこの  $X$  として spin 多様体が取れることを示し，Rokhlin 不変量との関係を明確にした． ([4])

## 4. correspondence への拡張

$(M_1, \infty_1), (M_2, \infty_2), (M_3, \infty_3)$  をそれぞれ基点付き有理ホモロジー 3 球面とする．

定義 4. 以下を満たす 3 つ組  $(M_1, M_2; M_3)$  を *admissible correspondence* という．

- $(M_3, \infty_3) \subset (M_1 \times M_2, (\infty_1, \infty_2))$  は部分多様体であり， $M_3 \setminus \infty_3 \subset (M_1 \setminus \infty_1) \times (M_2 \setminus \infty_2)$ .

<sup>3</sup>  $M$  と  $\mathbb{R}^3$  の  $\infty \in M, 0 \in \mathbb{R}^3$  における連結和と  $M \setminus \infty$  を同一視しておく． $\mathbb{R}^3$  上には自然な framing が存在する． $\tau$  はこの framing の拡張とする．

<sup>4</sup> 正確には以下のように構成する． $C_2(M)$  を  $M \times M \setminus \tilde{\Delta}$  のコンパクト化 (Fulton-MacPherson コンパクト化) とする． $\tau$  を用いて  $p(\tau) : \partial C_2(M) \rightarrow S^2$  を構成する． $\partial C_2(M)$  は  $(\infty, \infty)$  における blow-up と， $(M \setminus \infty) \times ST_\infty M, ST_\infty M \times (M \setminus \infty)$  そして  $S\nu_{\Delta \setminus (\infty, \infty)}$  からなる．ただし， $\nu$  は法束， $S$  は sphere バンドルである．自然に  $\nu_{\Delta \setminus (\infty, \infty)} \cong T(M \setminus \infty)$  であるから， $\tau$  によって自明化が与えられ，したがって  $S^2$  に写像ができる．

こうして構成された写像  $p(\tau) : \partial C_2(M) \rightarrow S^2$  を用いて  $S^2$  上の volume form  $\omega_{S^2}$  を pull-back し，それを  $C_2(M)$  に拡張したものが  $\omega(\tau)$  である．

<sup>5</sup> もし  $W, M$  が閉多様体であり，さらに  $M$  が  $W$  の中で Seifert 膜をもつならば，その Seifert 膜の Poincare dual が  $e$  の一つの候補である．

- $T_{\infty_3}M_3 \hookrightarrow T_{\infty_1}M_1 \times T_{\infty_2}M_2$  は *diagonal* .

$\tilde{M}_3 := M_1 \times \infty_2 \cup \infty_1 \times M_2 \cup M_3$  とおく . admissible correspondence  $(M_1, M_2; M_3)$  に対して Moriyama の不変量が定義できる . 実際  $(M_1 \times M_2, \tilde{M}_3)$  を  $\infty_3$  で "blow-up" することで  $e$ -manifold  $((M_1 \times M_2)', \tilde{M}_3', e_{M_3})$  が得られる .

応用のため , この不変量の  $Z_1^{KKT}$  に近い別構成を与える . そのためにまず補助的に  $T(M_i \setminus \infty_i)$  の framing  $\tau_i (i = 1, 2, 3)$  と法束  $\nu_{M_3 \setminus \infty_3}$  の framing  $\sigma$  を用意する . これらは関係式  $\tau_1 \oplus \tau_2 \simeq_{\text{rel } \infty} \tau_3 \oplus \sigma : T(M_1 \times M_2)|_{M_3 \setminus \infty_3} \cong \mathbb{R}^6$  を満たすようにとりたい . ただし  $\pi_3(V_{6,3}) \neq 0$  に起因する障害があり , この関係式を満たす framing は取れないことがある . この障害を消すため , いわば "framing  $\otimes \mathbb{Q}$ " にあたる概念の幾何学的な実現として fractional framing という新たな概念を導入する . ここで定義は述べないが , たとえばこの fractional framing のホモトピー集合は  $H^3(M_3; \mathbb{Q})$  と同型となる .<sup>6</sup>

$\sigma$  を用いて  $M_1 \times M_2 \setminus \tilde{M}_3$  上の閉 2 形式  $\omega(\sigma)$  が完全形式を法として一意に得られる .

命題 3.  $Z_1(M_1, M_2; M_3) := \int_{M_1 \times M_2 \setminus \tilde{M}_3} \omega(\sigma)^3 - \frac{1}{4}(\delta(\tau_1) + \delta(\tau_2) - \delta(\tau_3))$  は *well-defined* であり ,  $Z_1(M_1, M_2; M_3) = \frac{1}{16}\sigma((M_1 \times M_2)', \tilde{M}_3', e_{M_3})$  が成立する .

最後にこの不変量の応用を 1 つ述べる .

命題 4.  $Z_1(M_1, M_2; M_3) - Z_1^{KKT}(M_2) \in \mathbb{Z}$  は  $(M_1, M_2; M_3)$  がある写像  $f : M_1 \rightarrow M_2$  のグラフとアイソトピックになるための 1 つの障害である .

## 参考文献

- [1] G. Kuperberg and D. P. Thurston. Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology. *ArXiv Mathematics e-prints*, December 1999, arXiv:math/9912167.
- [2] C. Lescop. On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2004, arXiv:math/0411088.
- [3] Tetsuhiro Moriyama. An invariant of embeddings of 3-manifolds in 6-manifolds and Milnor's triple linking number. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 18(2):193–237, 2011.
- [4] Tetsuhiro Moriyama. On the vanishing of the Rokhlin invariant. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 18(2):239–268, 2011.

<sup>6</sup>  $M$  上通常の framing の homotopy 集合は  $H^1(M_3; \mathbb{Z}/2) \times H^3(M_3; \mathbb{Z})$  と対応する .

# Morse 理論の一般形の研究と多様体の幾何学への新たな応用

東京工業大学理工学研究科数学専攻  
北澤直樹

Morse 理論とは, 多様体をその上の良い関数 (Morse 関数) をもとに調べる手法である. 特異点と多様体のホモロジーホモトピー等が関係していることが良く知られている. Morse 理論は現在に至るまで数学 (幾何学) において重要な役割を担っている.

Morse 理論では関数を用いるが, 関数の代わりに一般のユークリッド空間や多様体への良い写像 (但し値域の次元が定義域の次元より高くないものとする) を用いる Morse 理論の一般形が, 1950 年代の Whitney ([17]) や Thom ([16]) の研究に始まり今に至るまで研究され続けている. そして Morse 理論では分からないような事実も多く分かってきた.

本講演予稿では, Morse 理論の一般形について, 背景などからはじめ, Morse 関数の最も単純な一般化である折り目写像を中心に, 例えば関連する著者の研究として, 「折り目写像のクラスの導入と写像の構造・定義域多様体の性質の研究」について解説する. 本稿は [7] の一部の紹介となっている.

今後  $m, n \in \mathbb{N}$  で,  $M (M^m)$  を  $m$  次元閉  $C^\infty$  多様体,  $N (N^n)$  を  $n$  次元境界なし  $C^\infty$  多様体,  $f: M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  写像,  $S(f)$  を  $f$  の特異点集合つまり  $f$  の微分の階数が  $n$  より低いような  $M$  の点全体の集合とする. また  $D^k$  で  $k$  次元単位球体,  $S^k$  で  $k$  次元単位球面を表す ( $k \in \mathbb{N}$ ).

## 1 折り目写像 (fold map), Reeb space

Morse 関数の最も単純な一般化である折り目写像を導入する. ([5] や [11] 等も参照. 尚 Morse 理論については [10] 等参照.)

**定義 1.**  $f: M^m \rightarrow N^n$  を  $C^\infty$  写像とし  $m \geq n \geq 1$  とする. ある  $p$  の局所座標  $(U, \phi)$  ( $\phi = (x_1, \dots, x_m)$ ) とある  $f(p)$  の局所座標  $(V, \psi)$  ( $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ ) があって  $\phi(p) = 0$ ,  $\psi(f(p)) = 0$  を満たしさらに  $0 \leq i \leq m$  をみたす整数  $i$  があって

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) &:= \psi \circ f|_U \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) \\ &= (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=0}^{m-n-i} x_{n+k}^2 - \sum_{k=m-n-i+1}^{m-n} x_{n+k}^2) \end{aligned}$$

を満たすようにできるとき,  $p \in S(f)$  は折り目特異点 (fold point) であるという.  $f$  の各特異点が折り目特異点であるとき,  $f$  は折り目写像 (fold map) であるという. ( $n = 1$ ,  $N^1 := \mathbb{R}$  であるときに Morse 関数である.)

**命題 1.**  $f: M^m \rightarrow N^n$  を  $C^\infty$  写像とし  $m \geq n \geq 1$  とする.

1.  $p \in M$  を  $f$  の折り目特異点とする. このとき定義 1 における  $\min\{i, m - n + 1 - i\}$  は  $(U, \phi), (V, \psi)$  によらずに定まる (これを  $p$  の **指数** と呼ぶ).
2.  $f: M \rightarrow N$  を折り目写像とする. このとき特異点集合  $S(f)$  そして指数  $i$  の特異点全体の集合  $F_i(f)$  は  $M$  の  $n - 1$  次元  $C^\infty$  部分多様体である. さらに  $f|_{F_i(f)}$  は  $C^\infty$  はめ込み. (折り目写像  $f$  について  $f|_{S(f)}$  が正規交叉をもつはめ込みであるとき,  $f$  は**良い折り目写像**であるということにする.)

例えば各特異点で値の異なる Morse 関数は良い折り目写像である. (各特異点で値の異なる) Morse 関数は  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  において稠密に存在するのに対し, 折り目写像はそうとは限らず, 中には存在しない場合もある. 例えば値域  $\mathbb{R}^2$  の場合定義域の多様体の Euler 数が偶数であることが存在の必要十分条件であることが知られている. ([17] や [16] 参照) Eliashberg 等に始まる折り目写像の存在問題も重要問題である. ([2], [3] 等) さらに本稿の内容含め Morse 理論の一般形の研究で重要な Reeb space を導入する. ([1], [4] 等参照)

**定義 2.**  $m \geq n \geq 1, f: M^m \rightarrow N^n$  で  $M$  上の同値関係を以下のように定義する.

$$p_1 \sim_f p_2 \Leftrightarrow p_1 \text{ と } p_2 \text{ は同じ点における } f \text{ の逆像の同じ連結成分にある.}$$

同値関係  $\sim_f$  から得られる商空間  $W_f := M/\sim_f$  を  $f$  の **Reeb space** という. (商写像を  $q_f: M \rightarrow W_f$  とする.)

$f$  が良い折り目写像の時 Reeb space には自然に多面体の構造が入る (例えば, 良い Morse 関数の場合 Reeb space はグラフになる.) ことが知られている. より広く **安定写像** という実特異点論で重要なクラス ([5] 等参照) でも Reeb space はグラフになることが知られている. ([9] 等参照.)

## 2 折り目写像のクラス

本稿では「折り目写像の中でも特別なものを考え調べる」という研究を紹介する.

例えば特異点集合が指数 0 の折り目特異点のみからなる折り目写像を **special generic 写像** とよぶ. special generic 写像は特異点を丁度 2 個もつ, 球面上の Morse 関数の一般化であるといえる. [1] で導入されその後 [4] さらに [14] 他 [12] 等の研究がある. 例えば [12] では, 球面上の special generic 写像の存在非存在が, 球面の微分構造の違いと関わっていること等が明らかにされている. 同論文では他に値域が  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  である special generic 写像を許容する定義域多様体を (完全にあるいは部分的に) 決定している. 特別な写像を考えると, 定義域多様体のホモトピー・位相型・微分同相型等に関するより詳しい情報を取り出せるのである.

その他 special generic 写像を特殊なものとして含むクラスとして, 特異点集合  $S(f)$  に制限したとき商写像  $q_f$  が単射になっている写像として定義される **simple** な折り目写像に関する研究 ([14] 他 [11] 等) がある. 他にも Reeb space や逆像に関して扱いやすいような平面への安定写像 ([9]) に関する研究や, 最近では正則値の逆像が球面の非交和であるような安定写像 ([13]) 等の研究もある.

一連の研究状況を踏まえ, 著者は, 折り目写像に新たなクラスを導入し, そのクラスの写像の性質や, そのクラスの写像を許容する定義域多様体を調べるとい

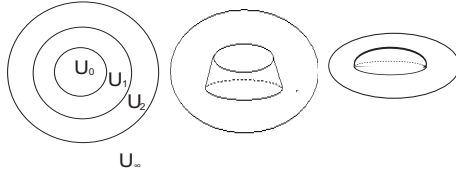


Figure 1: 平面を値域とする同心円形折り目写像の (特異点集合の) 像, 例 1 の Kobayashi-Saeki([9]), Saeki-Suzuoka([13]) の例 (Reeb space)

うことを行ってきた. 例えば次で定義する**同心円折り目写像**の性質や同心円折り目写像を許容する定義域多様体の性質を調べてきた.

**定義 3** (同心円形折り目写像, [6]).  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  を折り目写像で,  $n \geq 2$ , 特異点集合  $S(f)$  が標準的球面の非交和で  $f|_{S(f)}$  が  $C^\infty$  埋め込みであるとする. さらに  $\mathbb{R}^n - f(S(f))$  の連結成分全体の集合  $\{U_0\} \sqcup \{U_\infty\} \sqcup \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ( $\Lambda$  は有限集合) について閉包  $\overline{U_0}$ ,  $\overline{U_\infty}$ ,  $\overline{U_\lambda}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) がそれぞれ  $D^n$ ,  $S^{n-1} \times [0, +\infty)$ ,  $S^{n-1} \times [0, 1]$  と  $C^\infty$  微分同相であるとする. このとき  $f$  は**同心円形折り目写像 (round fold map)** であるという. そして一番内側の領域  $U_0$  を  $f$  の**核 (core)** と呼ぶ.

- 例 1.**
1.  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) 次元  $C^\infty$  homotopy 球面  $M$  上の special generic 写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n \geq 2$ ) で, 特異点集合  $S(f)$  が  $S^{n-1}$  と  $C^\infty$  微分同相であり,  $f|_{S(f)}$  が  $C^\infty$  埋め込みであるようなもの. ([12] 等も参照.)
  2. [9], [13] に登場する例. 同心円形折り目写像 (の Reeb space) と見なせるが, special generic 写像ではない; simple な折り目写像ではある. それぞれ定義域は 4 次元以上の  $C^\infty$  ホモトピー球面,  $S^2$  上の  $C^\infty$   $S^2$  束で, 値域は平面.

他, Kobayashi が, 著者と独立に, [8] 等で多様体の安定写像による像の研究を行い, 同心円形折り目写像の定義をみたくものを登場させている.

著者は同心円形折り目写像の一般的な性質特に多様体のホモロジーホモトピーの情報 ([6] 他 [7]) 他, さらに細かく同相型微分同相型について調べた. 分かったことの一部として本稿では次を紹介する.

- 定理 1** ([7]).
1.  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n \geq 2$  とする.  $S^n$  上の  $m - n$  次元 almost-sphere  $\Sigma$  をファイバーとする  $C^\infty$  束の構造を有する閉  $C^\infty$  多様体  $M^m$  上に, 同心円形折り目写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  で核の各点の逆像が 2 個の  $\Sigma$  の非交和となるものが存在する.
  2.  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2n$  とする.  $M_1, M_2$  を向きづけられた  $m$  次元単連結閉  $C^\infty$  多様体とする.  $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  を各特異点の指数が 0 か 1 で, 正則値の逆像が標準的球面の非交和であるものとする. すると連結和  $M := M_1 \sharp M_2$  にも各特異点の指数が 0 か 1 で, 正則値の逆像が標準的球面の非交和である同心円形折り目写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在する. 特に  $S^n$  上の有向  $C^\infty$   $S^{m-n}$ -束の構造を有するものの連結和  $M$  上には条件を満たす同心円形折り目写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在する.

## References

- [1] O.Burlet G.de Rham, *Sur certaines applications generiques d'une variete close a 3 dimensions dans le plan*, Enseign.Math., 20 (1974). 275–292.
- [2] Y.Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.
- [3] Y.Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.
- [4] Y.K.S.Furuya, P.Porto, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. 35 (1990), 41–52.
- [5] M.Golubitsky V.Guillmmmin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texaats in Mathematics(14), Springer-Verlag(1974).
- [6] N.Kitazawa, *Fold maps with round discriminants*, preprint.
- [7] N.Kitazawa, *Numerical invariants we can define from singularities of generic fold maps (Japanese)*, preprint.
- [8] M.Kobayashi, *Uses of bubbling surgeries for manifold understandings by means of stable maps*, preprint.
- [9] M.Kobayashi, O.Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans.Amer.Math.Soc.348 (1996), 2607–2636.
- [10] J.Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematic Studies AM-51, Princeton University Press; 1st Edition (1963.5.1).
- [11] O.Saeki, *Notes on the topology of folds*, J.Math.Soc.Japan Volume 44, Number 3(1992), 551–566.
- [12] O.Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl.49(1993), 265–293.
- [13] O.Saeki, K.Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers* J. Math.Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
- [14] K.Sakuma, *On special generic maps of simply connected  $2n$ -manifolds into  $\mathbb{R}^3$* , Topology Appl., 50 (1993), 249–261.
- [15] K.Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. of Math. Volume 17, Number 1 (1994), 21–32.
- [16] R.Thom, *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-56), 43–87.
- [17] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math., 62 (1955), 374–410.

# $C^*$ 完全群

松村真義

04 Mar 2013

## 1 導入

$G$  を群とする． $G$  の ( $\mathbb{C}$  上の) 線形表現とは  $\mathbb{C}$  線形空間  $V$  と群準同型  $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  の組のことを言うが、それは  $G$  の (複素) 群環  $\mathbb{C}(G)$  上の加群と一対一に対応する．ここで群環とは  $G$  上の有限な台を持つ複素数値関数全体の成す  $\mathbb{C}$  線形空間に接合積  $((f * g)(s) = \sum_{tu=s} f(t)g(u))$  によって積構造を入れた環のことを言う．群環を考えることの最も重要な意味は、それ自体が自分自身への左掛け算によって  $\mathbb{C}(G)$  加群となり、従って  $G$  の表現を定めることにある．その表現を (左) 正則表現と言い、ここでは  $\lambda_G$  と書くことにする．(群の) 表現論においては既約表現、つまり非自明な  $G$  不変部分空間を持たない表現、を基本的な単位とし、それを同型を除いて全て分類することは出来るか、という問題は根本的なものである．有限群に対してはその問題に対する一般的な枠組みが存在し、多くの群で実際に分類が完成しているが、ここで興味があるのはそのような状況と全く対極的な性質を示す群である．それを有限群の場合から始めて以下順番に説明していく．

## 2 有限群と従順群

$G$  が有限群のとき、正則表現  $\lambda_G$  は既約表現の直和に分解され、その成分は  $G$  の既約表現の同型類を全て尽くすことが知られている．さらに言えば、 $G$  がより一般にコンパクト (Hausdorff) 位相群である場合でも正則表現空間を  $G$  上の Haar 測度に関する  $L^2$  可積分関数全体のなす Hilbert 空間  $L^2(G)$  に取り替え、単なる線形表現をユニタリ表現に取り替えることにより全く同様の主張が成り立つことが知られている．さて、ここで興味があるのは  $G$  が無限群、例えば無限巡回群  $\mathbb{Z}$ 、階数 2 の自由群  $F_2$  あるいは整数係数一般線形群  $GL(n, \mathbb{Z})$  など (Lie 群や  $p$  進群などの表現論についてはここでは触れない) であるが、これらは有限群のように、正則表現が既約表現の直和に分解しそれらは既約表現の同型類を全て尽くす、ということは全く成り立たない．例えば単位表現  $1_G$ 、つまり 1 次元  $\mathbb{C}$  線形空間  $\mathbb{C}$  上に  $G$  の元が全て恒等写像として作用する表現、は既約表現であるが、それが正則表現の部分表現であるならば  $G$  は有限群でなければならないことが次のようにしてわかる： $1_G$  が  $\lambda_G$  の部分表現であるということは、ある  $L^2(G)$  の 0 でない元  $f$  が存在し、 $f$  の生成する部分空間は  $G$  の作用で不変でありさらにそこに  $G$  が恒等写像として作用するという意味であるが、そのとき特に  $f$  は  $G$  の作用で不変であり、正則表現の定義より  $f$  は定数関数でなければならない．今  $f$  の  $L^2$  ノルムは有限なので、結局  $G$  が有限でなければならないことがわかった．このように、無限群では正則表現の部分表現を考えるだけでは十分ではないことを見たが、さらに言えば、有限群のように  $G$  の表現が群環上の加群と一対一に対応する、という主張をユニタリ表現に対して得るためには表現空間だけでなく群環の完備化も考えなければならない．その完備化された群環  $C^*(G)$  を群  $C^*$  環と言い、その上の加群とはこの場合  $C^*(G)$  から Hilbert 空間  $H$  上の連続線

形作用素全体の成す環  $B(H)$  への単位元を保つ  $*$ -準同型となる．ここで  $*$  準同型とは  $*$  作用素を保つ環準同型のことで、 $*$  作用素とは  $\mathbb{C}(G)$  の元に対しては  $f(s) \mapsto \bar{f}(s^{-1})$  で定められ、 $C^*(G)$  上にはそれを連続に拡張したものとし、 $B(H)$  の元に対しては (基底を取り行列表示をしてから) 共役転置作用素として定義される．これは対応する群準同型の像の各元が単なる可逆作用素でなくユニタリ作用素となることを保証するための構造である．無限群に対してはこの区別は本質的になる．さて、このように表現と加群の対応がユニタリ表現に対しても拡張されたので、正則表現に対応する  $*$  準同型  $C^*(G) \rightarrow B(L^2(G))$  が存在することになる．この準同型の像は実は一様ノルム位相で閉じていて  $\mathbb{C}(G)$  を部分環として含む、従って  $C^*$  完備化になっており、それは被約群  $C^*$  環と呼ばれ  $C_\lambda^*(G)$  と書かれる．さて、 $G$  が無限群の場合は正則表現に含まれない既約表現が存在することを上で見たが、含まれるという条件を弱い意味で含まれると変えた場合はその性質を満たす無限群が沢山存在することが知られている．ここでユニタリ表現  $\pi$  が別のユニタリ表現  $\rho$  に弱い意味で含まれる (weakly contained) とは、 $\pi$  の各行列係数が  $\rho$  のその線形結合で  $G$  上各点で近似出来ることを言う．そして、群  $G$  が従順 (amenable) とは任意のユニタリ表現が正則表現に弱い意味で含まれることを言う．上の例では  $\mathbb{Z}$  が従順群であり、他の 2 つはそうでない．他には例えば可解群などが従順であり、もちろん有限群も従順である．従順性は上で得られた自然な写像  $C^*(G) \rightarrow C_\lambda^*(G)$  が同型であることとも同値で、さらにこれは  $C^*$  環論的にも特徴付けされ  $C_\lambda^*(G)$  が核型 (nuclear) であることとも同値である．核型性は  $C^*$  環のテンソル積を使って定義され、本講演の主題でもある完全性とも深く関わる．それらについて以下で説明する．

### 3 完全群

$C^*$  環のテンソル積の説明をする前に、先延ばしにしていた  $C^*$  環の定義についてまず説明する． $C^*$  環には 2 つの同値な定義が存在し、一つは Hilbert 空間の連続線形作用素全体の成す環の部分環で  $*$  作用素で閉じていて、さらに有界集合上の一様収束位相 (一様ノルム位相) で閉じたもの、というもので、一方は  $*$  作用素を持った Banach 環で  $C^*$  等式 (任意の元  $a$  に対して  $a^*a$  のノルムは  $a^*$  のノルムと  $a$  のノルムの積に等しい) を満たすもの、というものである．前者は後者の公理を見たし、後者の公理を満たす環はノルムも含めてある  $B(H)$  の部分環に canonical に同型になる、という意味で両者は同値である． $C^*(G)$  は後者の方法で構成され、 $C_\lambda^*(G)$  は前者の方法で構成されている．さて、 $C^*$  環は  $\mathbb{C}$  代数なので  $\mathbb{C}$  上のテンソル積には自然な環構造が入り、 $*$  作用素も自然に伸びる．しかし、その  $*$  代数の完備化は一意に決まらず、テンソル積の普遍性を  $C^*$  環の圏で満たすものとして定義される極大テンソル積  $\otimes_{max}$  と Hilbert 空間上の忠実な表現を一つ選び、Hilbert 空間のテンソル積から誘導されるものとして定義される極小テンソル積  $\otimes_{min}$  の少なくとも 2 種類が存在し、それらは一般に同じ  $C^*$  完備化を与えない． $C^*$  環  $A$  が核型であるとは、任意の他の  $C^*$  環  $B$  に対して  $A \otimes_{max} B = A \otimes_{min} B$  であることを意味する．これは  $A \otimes_{\mathbb{C}} B$  が唯一つの  $C^*$  完備化を持つこととも同値である．さてここで、 $\otimes_{min}$  について考える．これは  $\mathbb{C}$  上のテンソル積と異なり、 $A$  と極小テンソル積を取るという、操作が一般には完全系列を保たない (さらに言えば完全性が崩れるのは短完全列の左側ではなく中央の  $\text{Ker} \subset \text{Im}$  の部分である)．そこで、上の操作が常に完全系列を保つときを  $A$  が完全 (exact) であるといい、被約群  $C^*$  環が完全である群を ( $C^*$ ) 完全群という．例えば上の例で挙げた群は全て完全であるが、 $C^*(F_2), C^*(GL(n, \mathbb{Z}))$  ( $n \geq 2$  のとき) は完全  $C^*$  環ではないことが知られている．核型  $C^*$  環は  $\otimes_{max}$  が普遍性を満たすことから完全であることが分かるので、従順群は完全群である．他には Gromov の語双曲群 [A]、線形群 (つまり体上の一般線形群の部分群) [GHW] などが完全群であることが知られている．

## 4 完全群の応用と非完全群

完全群にはコンパクト空間への従順作用, Yu の性質 (A)(これらは完全性と適切な条件の元同値である) を経由することにより Baum-Connes 予想 [BCH] を部分的に満たす, という応用がある. 一方, Baum-Connes 予想は様々な応用を持つが, 特に幾何学的なものとして Novikov 予想, Gromov-Lawson-Rosenberg 予想がある. 完全性と Baum-Connes 予想の関連については [HG] が詳しい. また, Higson のサイトには概説や文献表などがある (<http://www.math.psu.edu/higson/GFA/bc/>). 非完全群の例については Gromov, Guentner-Kaminker, Ozawa らの一連の結果により構成されているもの ([HG] を参照) が唯一の例で, それにはエキスパンダー族という有限グラフの列の構成, 疎 (coarse) 幾何が鍵となる. エキスパンダー族の概念は計算機科学に於いて発見された (壊れにくく安価なネットワーク, の数学的な一つの表現) もので, Lie 群の表現論が Margulis によって応用され具体的に構成されるまでは確率論的な存在証明しか知られていなかったという歴史的事実がある. その構成に必要な表現論的性質とは Kazhdan の性質 (T) と呼ばれるもので, 例えば上の 3 つの例では  $GL(n, \mathbb{Z})$  ( $n \geq 3$ ) のみがこれを満たす. この性質 (T)(正確にはそれを強めたもの) がこれまで知られている Baum-Connes 予想の証明の障害 (定理の障害ではない) になっていて, さらに非完全群が係数付き Baum-Connes 予想という Baum-Connes 予想のある種の一般化の反例を与えるという関係性は示唆的である. Baum-Connes 予想自体にはまだ証明される目途も反例が見つかる目途も立っていない. 純粋数学よりのエキスパンダー族の概説については [L] を, 計算機科学よりのそれについては [HLW] を見ると良い. 最後に,  $C^*$  環の一般論及びそれと表現論との関係については [D] が, 従順性,  $C^*$  環のテンソル積, 核型性, 完全性などの概念については [BO] が詳しい.

## 参考文献

- [A] S. Adams, *Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups*, Topology 33 (1994), 765-783.
- [BCH] Paul Frank Baum, Alain Connes and Nigel Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group  $C^*$ -algebras*, Contemp. Math. 167 (1997), 171-176.
- [BO] Nathaniel P. Brown and Narutaka Ozawa,  *$C^*$ -algebras and finite-dimensional approximations*, AMS, 2008.
- [D] Jacques Dixmier,  *$C^*$ -algebras*, North Holland, Amsterdam, 1970.
- [GHW] Erik Guentner, Nigel Higson and Shmuel Weinberger, *The Novikov conjecture for linear groups*, Publ. Math. IHÉS 101(1) (2005), 243-268.
- [HG] Nigel Higson and Erik Guentner, *Group  $C^*$ -algebras and K-theory*, Noncommutative geometry, 137-251, Springer, Berlin, 2004.
- [HLW] Shlomo Hoory, Nathan Linial and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 43(4) (2006), 439-561.
- [L] Alex Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.



# 反ド・ジッター空間内における空間的超曲面の 縮閉超曲面について

佐藤 孝美 (北大理)

ここ最近、S.Izumiya 等によってユークリッド空間内のガウス写像に対応するローレンツ空間内の光錐への写像を考え、その特異点について研究する光的幾何学がラグランジュ・ルジャンドル特異点論の応用として展開されている。指数2の擬ユークリッド空間内の反ド・ジッター空間は負の曲率をもち、ミンコフスキー空間やド・ジッター空間とは全く異なる因果性を持つローレンツ空間形である。たとえば、空間的超曲面に対応するコーシー地平線の存在等がその違いを表す性質として挙げられる。そこで、今回は反ド・ジッター空間の空間的超曲面にラグランジュ・ルジャンドル特異点論を応用する事によりユークリッド空間内の超曲面のガウス写像に対応するものと、更にそれとともに考えられる縮閉超曲面の特異点の持つ幾何学的意味について得られた結果を紹介する。

指数2の  $(n+2)$  次元擬ユークリッド空間とは、 $\mathbb{R}^{n+2}$  のベクトル  $\mathbf{x} = (x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_n)$  に対して、擬内積  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_{-1}y_{-1} - x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  を入れた空間のことを言い、 $\mathbb{R}_2^{n+2}$  と書く。そこで、0でないベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_2^{n+2}$  に対して、 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$  の時、それぞれ空間的、光的または時間的と呼び、ノルムを  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$  で定める。 $(n+1)$  次元反ド・ジッター空間は  $AdS^{n+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_2^{n+2} | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$  で定義される。 $\mathbf{X} : U \rightarrow AdS^{n+1}$  を開集合  $U \subset \mathbb{R}^n$  からの空間的埋め込みとし、 $M = \mathbf{X}(U)$  と書く。空間的埋め込みとは、任意の  $p = \mathbf{X}(u)$  に対して、 $T_p M$  がすべて空間的なベクトルからなるときをいう。ここで  $\mathbf{E}(u)$  を  $M$  の  $p = \mathbf{X}(u)$  における単位法線ベクトルとし、反ド・ジッターガウス写像  $\mathbb{A}\mathbb{G} : U \rightarrow AdS^{n+1}$  を、

$$\mathbb{A}\mathbb{G}(u) = \mathbf{E}(u)$$

で定義する。また反ド・ジッター型作用素  $AS_p : T_p M \rightarrow T_p M$  を、 $AS_p(u) = -d\mathbb{A}\mathbb{G}(u)$  で定義できる。ここで臍点の特徴づけとなる次の主張がある。

**命題 1**  $M$  を全臍的とし (つまり  $AS_p = -\kappa 1_{T_p M}$ )、更に  $\kappa \neq 0$  だとする。この時  $M$  は

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} (\kappa \mathbf{X}(u) + \mathbf{E}(u)) \in AdS^{n+1}, \quad c = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} \in \mathbb{R}$$

で定まる  $AH(\mathbf{n}, c) = HP(\mathbf{n}, c) \cap AdS^{n+1}$  の部分集合となる。ただし、 $HP(\mathbf{n}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_2^{n+2} | \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = c\}$  である。

ここで、 $\kappa_1(u), \dots, \kappa_n(u)$  を点  $p$  における  $M$  の反ド・ジッター主曲率とすると、 $M$  の全縮閉超曲面

$$\mathbb{A}\mathbb{E}_M = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\kappa_i^2(u) + 1}} (\kappa_i(u) \mathbf{X}(u) + \mathbf{E}(u)), \quad (i = 1, \dots, n) \right\}$$

が定義できる。更に反ド・ジッター主曲率を一つ固定した時、それを  $\kappa$  とすると、反ド・ジッター縮閉超曲面  $\mathbb{A}\mathbb{E}_\kappa : U \longrightarrow AdS^{n+1}$  を

$$\mathbb{A}\mathbb{E}_\kappa(u) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(u) + 1}} (\kappa(u)\mathbf{X}(u) + \mathbf{E}(u))$$

で定義できる。また、高さ関数  $H : U \times AdS^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  を  $H(u, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{X}(u), \mathbf{v} \rangle$  で定めると次を得る。

**命題 2**  $H(u, \mathbf{v}) = \partial H / \partial u_i(u, \mathbf{v}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$  の必要十分条件は  $\mathbf{v} = \pm \mathbf{E}(u)$  である。

ここで、 $AdS^{n+1} \times AdS^{n+1} \supset \Delta_6 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) | \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$  上の自然な接触構造  $K_6$  を持つ接触多様体  $(\Delta_6, K_6)$  を考える。 $\Delta_6$  から  $AdS^{n+1}$  への射影を  $\pi_{61}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$ ,  $\pi_{62}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$  とし、 $\theta_{61} = \langle d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle | \Delta_6$ ,  $\theta_{62} = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle | \Delta_6$  とする。この時、 $\theta_{61}^{-1}(0)$  と  $\theta_{62}^{-1}(0)$  は  $\Delta_6$  上の同じ超曲面  $K_6$  を定め、 $(\Delta_6, K_6)$  は  $\pi_{61}$  と  $\pi_{62}$  の両方をルジャンドルフファイバー束としてもつ接触多様体となる。ここで、 $\mathcal{L}_6 : U \longrightarrow \Delta_6$  を

$$\mathcal{L}_6(u) = (\mathbf{X}(u), \mathbb{A}\mathbb{G}(u))$$

で定めると、 $\mathcal{L}_6$  はルジャンドル埋め込みとなり、 $AdS^{n+1}$  のある局所座標  $U$  上で  $H$  はモース超曲面族となり、対応するルジャンドル部分多様体  $\mathcal{L}_6(U)$  の  $\pi_{62}$  に関する母関数族となる。この時、 $\mathcal{L}_6(U)$  の波面集合は、 $\mathbb{A}\mathbb{G}(U)$  に一致する。

次に、 $\mathcal{H} : AdS^{n+1} \times AdS^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  で定義し、任意の  $\mathbf{v}_0 \in AdS^{n+1}$  に対して  $\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}(\mathbf{u}) = \mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$  と書く。この時、 $\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^{-1}(0) = AdS^{n+1} \cap HP(\mathbf{v}_0, 0) = AH(\mathbf{v}_0, 0)$  となる。任意の  $u_0 \in U$  に対してまた  $\mathbf{v}_0 = \mathbb{E}(u)$  とすると、命題 2 より、

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0} \circ \mathbf{X}(u_0) = \mathcal{H} \circ (\mathbf{X} \times id_{AdS^{n+1}})(u_0, \mathbf{v}_0) = H(u_0, \mathbb{E}(u_0)) = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0} \circ \mathbf{X}}{\partial u_i}(u_0) = \frac{\partial H}{\partial u_i}(u_0, \mathbb{E}(u_0)) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

より、 $AH(\mathbf{v}_0, 0)$  は点  $p = \mathbf{X}(u)$  において  $M$  に接していることがわかり、この時、特に  $AH(\mathbf{v}_0, 0)$  を  $TAH(\mathbf{v}_0, 0)$  と書くことにする。ここで Montaldi による 2 つの多様体間のある点での接触型についての定理がある。 $X_i, Y_i \quad (i = 1, 2)$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分多様体とし、 $\dim X_1 = \dim X_2$ ,  $\dim Y_1 = \dim Y_2$  とする。ここで  $X_1$  と  $Y_1$  の点  $y_1$  における接触型と、 $X_2$  と  $Y_2$  の点  $y_2$  部における接触型が等しいとは、微分同相写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$  で  $\Phi(X_1) = X_2$  かつ  $\Phi(Y_1) = Y_2$  を満たすものが存在するときに言う。この時、 $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$  と書く。

**定理 3**  $X_i \quad (i = 1, 2)$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分多様体で  $\dim X_1 = \dim X_2$  とする。 $g_i : (X_i, x_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$  をはめ込み芽、 $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  を  $(Y_i, y_i) = (f_i^{-1}(0), y_i)$  となる沈め込み芽とする。この時  $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$  の必要十分条件は  $f_1 \circ g_1$  と  $f_2 \circ g_2$  が  $\mathcal{K}$ -同値となることである。( $\mathcal{K}$ -同値については [10] を参照。)

この定理 2 とルジャンドル特異点の定理を応用すると、次の主定理の一つが得られる。

**定理 4**  $\mathbf{X}_i : (U, u_i) \longrightarrow (AdS^{n+1}, p_i) \quad (i = 1, 2)$  を空間的超曲面芽として、対応するルジャンドル埋め込み芽  $\mathcal{L}_{6\ i} : (U, u_i) \longrightarrow (\Delta_6, z_i)$  がルジャンドル安定であるとする。この時、以下は同値である：

- (1)  $(\mathbb{E}_1(U), \mathbf{v}_1)$  は  $(\mathbb{E}_2(U), \mathbf{v}_2)$  は微分同相。
- (2)  $\mathcal{L}_{61}$  と  $\mathcal{L}_{62}$  はルジャンドル同値。
- (3)  $H_1$  と  $H_2$  は  $P$ - $\mathcal{K}$ -同値。
- (4)  $h_{1,v_1}$  と  $h_{2,v_2}$  は  $\mathcal{K}$ -同値。
- (5)  $K(\mathbf{X}_1(U), TAH(\mathbf{X}_1, u_1), p_1) = K(\mathbf{X}_2(U), TAH(\mathbf{X}_2, u_2), p_2)$ 。

次に、 $\tilde{\Delta} := \Delta_6 \times \mathbb{R}_{>0}$ 、 $\tilde{\pi}_1 : \tilde{\Delta} \ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda) \mapsto \mathbf{v} \in AdS^{n+1}$ 、 $\tilde{\pi}_2 : \tilde{\Delta} \ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda) \mapsto \mathbf{w} \in AdS^{n+1}$ 、また、 $\tilde{\theta}_i := d(\lambda\theta_{6i})$  とすることで、 $\tilde{\pi}_1$  と  $\tilde{\pi}_2$  がラグランジュファイバー束となる  $(\Delta_6, K_6)$  のシンプレクティック化  $(\tilde{\Delta}, \tilde{\theta}_i)$  を得る。また、 $\tilde{\mathcal{L}} : U \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \tilde{\Delta}$  を

$$\tilde{\mathcal{L}}(u, \lambda) = (-\sin \lambda \mathbf{X}(u) + \cos \lambda \mathbb{E}(u), \cos \lambda \mathbf{X}(u) + \sin \lambda \mathbb{E}(u), \lambda)$$

で定めると、これはラグランジュはめ込みになる。そして、

$$\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\mathcal{L}} = \cos \lambda \mathbf{X}(u) + \sin \lambda \mathbb{E}(u)$$

の特異値集合は  $\mathbb{A}\mathbb{E}_M$  に一致し、 $M$  の縮閉超曲面はラグランジュ部分多様体  $\tilde{\mathcal{L}}$  のラグランジュファイバー束  $\tilde{\pi}_2$  に関する焦面となっていることがわかる。また、高さ関数  $H$  は局所座標  $U$  においてモース関数族になっていて、特に  $\lambda \in (0, \pi/2)$  の時に、 $(u, \mathbf{v}) = (u, \cos \lambda \mathbf{X}(u) + \sin \lambda \mathbb{E}(u))$  において、 $\tilde{\mathcal{L}}$  の母関数族になっていることがわかる。ここで、 $\lambda = \pi/2$  の時は、 $H$  が母関数族になることが言えない。しかし  $\lambda = \pi/2$  の時、主曲率  $\kappa(u) = 0$  であっても、縮閉超曲面  $\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\mathcal{L}} = \mathbb{A}\mathbb{E}_\kappa(u) = \mathbb{E}(u)$  が存在する。これはミンコフスキー空間やド・ジッター空間の場合との一つの重要な違いである。そのような点を調べるために、 $\mathbf{E}$  方向への  $\mathbf{X}$  の平行超曲面

$$\mathbf{X}_\varepsilon = \cos \varepsilon \mathbf{X}(u) + \sin \varepsilon \mathbf{E}(u)$$

を考える。ここで  $M_\varepsilon = \mathbf{X}_\varepsilon(U)$  と書く。この時、次の主定理の一つが得られる。

**定理 5** 十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して、 $M$  の縮閉超曲面と  $M_\varepsilon$  の縮閉超曲面は一致する。

主曲率  $\kappa$  が  $\mathbf{X}(u)$  で 0 のときでも、 $\kappa_\varepsilon \neq 0$  であり、 $\mathbb{A}\mathbb{E}_\kappa(u) = \mathbb{A}\mathbb{E}_{\kappa_\varepsilon}(u)$  が得られた。よって、 $\lambda = \pi/2$  の点においては、 $\tilde{\mathcal{L}}$  や  $H$  を  $\mathbf{X}_\varepsilon$  に対応してパラメータ変換して得られた  $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ 、や  $H_\varepsilon$  を考えることで、 $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$  の焦面である  $\mathbf{X}_\varepsilon$  の縮閉超曲面は、 $\mathbf{X}$  の縮閉超曲面に一致していて、更に  $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$  は  $H_\varepsilon$  を母関数族として持つものが得られた。

最後に多様体と葉層構造との接触を考える。 $\mathfrak{H} : AdS^{n+1} \times (AdS^{n+1} \setminus M) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathfrak{H}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$  で定義し、任意の  $\mathbf{v}_0 \in (AdS^{n+1} \setminus M)$  に対して、 $\mathfrak{h}_{v_0} = \mathfrak{H}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0)$  と書く。この時

$$(\mathfrak{h}_{v_0})^{-1}(\lambda) = HP(\mathbf{v}_0, \lambda) \cap AdS^{n+1} = AH(\mathbf{v}_0, \lambda)$$

であり、任意の  $u_0 \in U$  に対して  $\mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{X}(u_0) + \mu \mathbb{E}(u_0)$ 、 $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  とすると、

$$\mathfrak{h}_{v_0} \circ \mathbf{X}(u_0) = \mathfrak{H} \circ (\mathbf{X} \times id_{AdS^{n+1}})(u_0, \mathbf{v}_0) = -\lambda,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{v_0} \circ \mathbf{X}}{\partial u_i}(u_0) = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_i}(u_0, \mathbf{v}_0) = 0$$

より、 $AH(\mathbf{v}_0, \lambda)$  は  $M$  に点  $p = \mathbf{X}(u_0)$  接していることがわかる。この時、 $AH(\mathbf{v}_0, \lambda)$  の中心となる  $\mathbf{v}_0$  は反ド・ジッター縮閉超曲面の点であり、特に  $AH(\mathbf{v}_0, \lambda)$  を接触  $n$  次元双曲空間と呼ぶ。ここで、 $AH(\mathbf{v}_0, \lambda)$  は  $\lambda$  を動かすことで葉層構造  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_v)$  となる。この時、次の主定理の一つが得られる。

定理 6  $\mathbf{X}_i : (U, u_i) \rightarrow (AdS^{n+1}, p_i)$  ( $i = 1, 2$ ) を空間的超曲面芽として、対応するラグランジュはめ込み芽  $\tilde{\mathcal{L}}_i : (U \times \mathbb{R}_{>0}, (u_i, \lambda_i)) \rightarrow (\tilde{\Delta}, z_i)$  がラグランジュ安定であるとする。ここで、 $v_i$  は  $\mathbf{X}_i$  の接触  $n$  次元双曲空間の中心である。この時、以下は同値である：

- (1)  $K(X_1(U), \mathcal{F}(\mathfrak{h}_{v_1}); \mathbf{X}(u_1)) = K(X_2(U), \mathcal{F}(\mathfrak{h}_{v_2}); \mathbf{X}(u_2))$
- (2)  $h_{1,v_1}$  と  $h_{2,v_2}$  は  $\mathcal{R}^+$ -同値。
- (3)  $H_1$  と  $H_2$  は  $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -同値。
- (4)  $\tilde{\mathcal{L}}_1$  と  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  はラグランジュ同値。
- (5) (a)  $\mathcal{H}(h_{v_1})$  と  $\mathcal{H}(h_{v_2})$  のヘッシアのランクと符号が一致。  
(b) 同型写像  $\gamma : \mathcal{R}_2(h_{1,v_1}) \rightarrow \mathcal{R}_2(h_{2,v_2})$  があって  $\gamma(h_{1,v_1}^-) = h_{2,v_2}^-$  となる。

以上の定理で表れる用語は、講演で解説する。

## 参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*, Birkhäuser (1986).
- [2] L. Chen and S. Izumiya, *A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in semi-Euclidean space*, Proc. Japan. Acad., Ser. A **85** (2009) 49–54.
- [3] L. Chen, *Singularities of timelike Anti de Sitter Gauss images*, Hokkaido Mathematical Journal. Vol.38, 2009, 701–720.
- [4] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Contact equivalence for Lagrangian manifolds*, Adv. Math. **15** (1975), 375–387.
- [5] S. Izumiya, D-H. Pei and T. Sano, *Singularities of hyperbolic Gauss maps*, Proc. London. Math. Soc. (3) **86** (2003), 485–512.
- [6] S. Izumiya, D-H. Pei, T. Sano and E. Torii, *Evoutes of Hyperbolic Plane Curves*. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **20**, No. 3, 543–550, (2004)
- [7] S. Izumiya and M. Takahashi, *Spacelike parallels and evolutes in Minkowski pseudo-spheres*, *J. Geometry and Physics*. **57** (2007), 1569–1600.
- [8] S. Izumiya, *Timelike hypersurfaces in de Sitter space and Legendrian singularities*, Journal of Mathematical Sciences. **144**, No.1, (2007), 3789–3803.
- [9] S. Izumiya and M. C. Romero Fuster, *The lightlike flat geometry on spacelike submanifolds of codimension two in Minkowski space*, Selecta Mathematica (NS) **13** (2007), 23–55.
- [10] J. Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps*, London Math. Soc. Lecture Note Series. Cambridge Univ. Press. **58** (1982).
- [11] J. A. Montaldi, *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J. **33** (1986), 81–85.
- [12] Takayuki Nagai, *The Gauss map of a hypersurface in Euclidean sphere and the spherical Legendrian duality*, Top. and its Appl.. **159** (2012), 545–554.
- [13] L. Randall and R. Sundrum, *An alternative to Compactification*, Physical Review Letters, **83** (1999), 4690–4693.
- [14] V. M. Zakalyukin, *Lagrangian and Legendrian singularities*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 23–31.

## HAAGERUP PROPERTY について

東京大学大学院 数理科学研究科  
修士二年 鈴木 悠平

### 1. はじめに

本講演では, Haagerup property と呼ばれる, 離散群のひとつの性質について解説をする. 性質の名前に冠されている Haagerup とは, この性質をはじめて導入した, デンマークの数学者 Uffe Haagerup の名であり, 彼は作用素環論を中心とする, 数々の卓越した研究で知られている.

この性質は Haagerup の後, Gromov によっても, (今日では同値であることが知られている別の定式化で) 独立に導入されている. (このため, Haagerup property は Gromov の a-T-menability と呼ばれることも多い.) Haagerup property は, 離散群の Hilbert 空間への粗い埋め込み可能性などと非常に強い関係があり, 幾何学的にも重要な概念として研究されている. Haagerup property は, 従順性と呼ばれる, 非常により離散群の性質を緩めたもののひとつである. 従順性自体一般的に知られている概念ではないだろうから, まずは従順性についてすこし見てみよう.

### 2. 従順性

群の従順性は, 1929 年, Banach-Tarski のパラドックスに関する研究の中で, von Neumann により導入された. 従順性の定式は, 今日では様々な同値なものが知られているが, ここではもっとも標準的な定義を見ることにする.

**定義 2.1.** 可算離散群  $\Gamma$  は, 以下のような条件を満たすとき, 従順であるという.  $\Gamma$  上, 左  $\Gamma$ -不変な有限加法的測度  $\mu$  が存在する. つまり,  $\Gamma$  の部分集合全体  $\mathfrak{P}(\Gamma)$  上の関数

$$\mu: \mathfrak{P}(\Gamma) \rightarrow [0, 1]$$

であって, 次の条件を満たすものが存在する.

- (1)  $\mu(\Gamma) = 1$
- (2) 任意の二つの互いに素な部分集合  $E, F$  に対して,  $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$  が成り立つ.
- (3) 任意の部分集合  $E$  と  $x \in \Gamma$  に対して,  $\mu(xE) = \mu(E)$  が成り立つ.

従順群とは, 一言で言えば, “平均が取れる群” である. 左不変であるという条件が, ちょうど  $\mu$  による  $\Gamma$  上の関数の積分が,  $\Gamma$  の上で満遍なく和を取れていることを表している. このような平均は, 離散群の解析学的研究の手がかりを豊富に与えてくれる. 例えば, 従順群の群 von Neumann 環論, 測度論的群論といった観点からの分類は, Connes (1976), Connes-Feldman-Weiss (1981) により, それぞれ完全な決着がついている.

ここで従順群の例をいくつか見てみよう. まず, 有限群は自明に従順である. また, Markov-角谷の不動点定理より, 可換群はすべて従順であることがわかる. また, 組み合わせの議論から, 劣指数増大成長群 (つまり, 有限生成群であって, 有限生成集合  $E$  にたいし,  $E^n$  の元の数の増大度が劣指数であ

る群) が従順群であることもわかる. そして, 従順性の大きな特徴の一つとして, それが既存の群から新しい群を構成する, 様々な操作で閉じていることをあげる事ができる. 従順性は, 部分群, 直和, 商, 拡大, 帰納極限など, 多くの構成法によって保たれる. これより, 例えば可解群はいつでも従順性をもつ. 以上のことから, 従順群全体のクラスは, ある程度大きなものであることがわかる.

### 3. HAAGERUP PROPERTY

前章で見たように, 従順性は離散群を解析学的な立場から研究する際, 非常に有益なものであった. しかし一方で, 従順性を持たない離散群にも, 非常に重要な離散群はたくさんある. 例えば, (2 階以上の) 自由群はその典型例である. (自由群が非従順群であることが, Banach-Tarski のパラドックスの病的分解構成の本質的な部分の一つである.) そのほかにも, 線形群, Coxeter 群, 位相空間の基本群などは, 多くの場合に従順でなく, 解析的なアプローチは困難である.

しかし, 非従順群の間にも, “従順らしさ” の度合いは, いろいろな違いとなって現れる. 一つの極端な例として, Kazhdan の性質 (T) を持つ離散群 (例えば,  $SL_3(\mathbb{Z})$ ) をあげる事ができる. これらの離散群は, 従順群とは対極的な振る舞いをし, 従順群の研究の延長という立場からの研究は非常に困難である. このように非常に従順性の悪いものもある中で, 少しでも従順に近い振る舞いをし, 扱えるような離散群の性質を見つけようという考えのもとで見つけられたものの一つが, Haagerup property である. はじめに Haagerup property の正確な定義を述べておく.

**定義 3.1.** 可算離散群  $\Gamma$  が, 次の条件を満たすとき, Haagerup property を持つという. 「 $\Gamma$  の正定値関数の列  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  であり, それぞれの  $\phi_n$  は無限遠でゼロになり, 列  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は定数関数 1 に各点収束する.」ここで, 離散群  $\Gamma$  上の複素数値関数  $\phi$  が正定値であるとは, 任意の  $\Gamma$  の有限列  $g_1, g_2, \dots, g_n$  に対して, 行列  $[\phi(g_i g_j^{-1})]_{1 \leq i, j \leq n}$  が (半) 正定値であることをいう.

我々が前章で用いた従順性の定義からは明らかではないが, Haagerup property は, 従順性を弱めた条件になっている. 実際, 上記の定義の関数列の「無限遠でゼロになる」という条件を「有限台を持つ」に取り替えたとき, 得られる条件は従順性に同値であることが知られている. このように, 従順性を, ある観点から見たとき, Haagerup property は自然な従順性の弱い版となる. (このような従順性の弱い版として, ほかに完全性 (exactness), weak amenability, approximation property などが研究されているが, 本稿では触れない.)

Haagerup property を持つ離散群のクラスは, このように従順群を完全に含むものであり, それだけでもある程度大きなものであることがわかる. それだけではなく, 典型的な非従順群である自由群をはじめ, Coxeter 群や, 次元 2 以下の線形空間の線型群, 種数 2 以上の向き付け可能な閉曲面の基本群など, 多くの非従順群も含んでいる.

それでは, Haagerup property を持たないような離散群はあるのだろうか? (もちろんすべての群が持ってしまえば, それは意味のある性質だとはいえない.) 答えは yes であり, Haagerup property はこの章の始めに述べたように, 従順群と対極的な振る舞いをする, Kazhdan の性質 (T) (およびその相対版) を完全に除外する. そのため, (相対的) 性質 (T) を非自明に持つ群は, Haagerup property を持たず, 逆に, Haagerup property を持つことが保障されている離散群に対しては, 少なくとも極端に性質の悪い振る舞いをするということ

は起こらないであろうと考えられる．実際，Haagerup property を持つ離散群に対しては，すでに解析的性質としてよいものがいくつも知られている．例えば，Haagerup property を持つ離散群に対して，Baum-Connes 予想が成り立つことが知られている．Baum-Connes 予想は，離散群の解析的情報と幾何学的情報の間に強い結びつきがあることを主張する，重要未解決問題の一つである．Baum-Connes 予想から，多くの重要な予想（Kaplansky 予想，Novikov 予想など．）が従うため，特にこれらの予想は，Haagerup property を持つ離散群に対して成立する．

#### 4. HAAGERUP PROPERTY の応用

Haagerup property は，作用素環論，力学系，調和解析，幾何学的群論，表現論など，幅の広い様々な分野に応用がある．この章では，Haagerup property の作用素環論への応用を解説する．Haagerup property のよい性質の一つは，(相対的) 性質 (T) を完全に除外することにある．(一般的に離散群が性質 (T) を持つかどうかを調べるのは非常に困難である．)

離散群  $\Gamma$  からは，標準的に二つの作用素環を構成することができる．一つは群 von Neumann 環  $L(\Gamma)$  で，もう一つは被約群  $C^*$ -環  $C_r^*(\Gamma)$  である．いずれも複素数体上の群環  $\mathbb{C}[\Gamma]$  を適切な位相のもとで完備化したものである．

作用素環論は一般に具体例を構成するのが難しい．しかし上記の離散群からの構成法は，数多くの有用な作用素環の例を与える．このように離散群から構成した作用素環の構造を，(離散群の性質を用いて) 解析することは，離散群論への応用という観点と，作用素環論の知見の深化という，二つの立場から大きな意義がある．今回は，講演の主題である Haagerup property と，その対極にある (相対的) 性質 (T) を，作用素環の立場からみてみたい．これら両性質は，それぞれの群環が持つ性質を元にして，現在 (群環とは限らない) 一般の von Neumann 環， $C^*$ -環の両者に導入され，現在に至るまで研究が続けられている．

von Neumann 環論では，Haagerup property は長田 (1980)，性質 (T) は Connes-Jones (1985) により，導入された．その後 Robertson や Jollissaint 等の研究を経て，2006 年，一つの頂点といえる偉大な成果が Popa により得られている．Popa の大論文 [5] の前半部では，von Neumann 環の文脈での，Haagerup property と性質 (T) との相互排除，例えば，(相対的) 性質 (T) を持つ von Neumann 環は，自明な反例を除いて Haagerup property を持つ von Neumann 環に埋め込むことができない，ということが調べられている．

一方  $C^*$ -環論では，これらの性質の導入はごく最近行われたもので，性質 (T) は 2006 年に Bekka，Haagerup property は 2011 年に Dong により導入されたばかりである． $C^*$ -環の文脈では，性質 (T) と Haagerup property の相互排除がどのようにされるのかという研究はまったくされておらず，従順性と性質 (T) の相互排除のみが，Bekka，Brown により研究されていた．

私は，Bekka の導入した定義よりも (形式的に) 強い，Leung-Ng の導入した強性質 (T) という性質に着目し，強性質 (T) と，Haagerup property の相互排除を， $C^*$ -環論の枠組みの中で研究した．(Bekka の導入した性質 (T) を持つ重要な例の殆どが強性質 (T) を同時に持つ．この二者が同値であるかどうかすら現在まで知られておらず，応用上こちらの定義で十分である．以下こちらの定義のみ用いるので，単に性質 (T) と呼ぶ．) その結果，Popa の定理 [5] を応用することで，性質 (T) を持つ  $C^*$ -環から，Haagerup property を持つ  $C^*$ -環への準同型は，行列環の直積への準同型と，擬同値になるということを示した．より詳しく述べると，「そのような準同型の像が，residually finite

dimensional<sup>\*1</sup>」, つまり像が有限次元表現の直和で忠実に表現できるということを示した<sup>\*2</sup>. 私は同時に研究の中で, Haagerup property を持つ  $C^*$ -環の新しい例を数多く与えた. これらの結果として, 性質 (T) を持つ  $C^*$ -環には, 広大なクラスの  $C^*$ -環を対象とする, すべての準同型に対し, 非常に強い制約が課されているということを明らかにした.

しかし, 相対的性質 (T) を持つような  $C^*$ -環の場合, 準同型の制約は, 相対部分の像にのみ課され, 結果として, まったく準同型に制約が掛からないことが多々起こる. 私は研究の中で, 実際に相対的性質 (T) を持つ, いくつかの離散群 (例えば,  $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  など) の被約群  $C^*$ -環が, Haagerup property を持つ  $C^*$ -環に埋め込めてしまうことを証明した. このような現象は von Neumann 環の場合には起こらないことである.

一方で, 性質 (T) を持つ非自明<sup>\*3</sup>な部分環をまったく持たない場合であっても, Haagerup property を持つ  $C^*$ -環への埋め込みが, 存在しないような  $C^*$ -環も存在する. 私は有限体の代数拡大となる体を除く任意の体に対して, その体上のアファイン平面のアファイン群の被約群  $C^*$ -環は, Haagerup property をもつ  $C^*$ -環に埋め込めないことと, この  $C^*$ -環のすべての  $C^*$ -部分環が, 非自明な性質 (T) を持たないということを証明した. (ここで除外されている, 有限体の代数拡大である体に対しては, アファイン群が従順群になるため, 自明にこのような性質を持たない.)

## 参考文献について

本稿の主題である, Haagerup property に関しては, 著書 [3], その対極的な性質である, (相対的) 性質 (T) に関しては, 著書 [1] が優れた文献である. また, 離散群 (より一般に, 局所コンパクト群) の従順性に関しては, 著書 [4], 作用素環論と離散群論のつながりに関しては, 著書 [2] がよい文献となるだろう. 最後に述べた私の結果は, すべて論文 [6] に含まれている. 興味をもたれた方はこれらの文献を参照して頂きたい.

## REFERENCES

- [1] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan's property (T)*. *New Mathematical Monographs*, **11**. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xiv+472 pp.
- [2] N.P. Brown, N. Ozawa,  *$C^*$ -algebras and finite-dimensional approximations*. *Graduate Studies in Mathematics*, **88**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. xvi+509 pp.
- [3] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, A. Valette, *Groups with the Haagerup property. Gromov's  $a$ -T-menability*. *Progress in Mathematics*, **197**. Birkhauser Verlag, Basel, 2001. viii+126 pp
- [4] A.T. Paterson, *Amenability*. *Math. Surveys Monographs*, vol.**29** American Mathematical Society, Providence, RI (1988)
- [5] S. Popa, *On a class of type  $\mathrm{II}_1$  factors with Betti numbers invariants*. *Ann. of Math.* (2) **163** (2006), no. 3, 809–899.
- [6] Y. Suzuki, *Haagerup property for  $C^*$ -algebras and rigidity of  $C^*$ -algebras with property (T)*, preprint, arXiv:1212.5030

<sup>\*1</sup>residually finite dimensional であることは, 非常に強い条件である. 例えば任意の非従順離散群の被約群  $C^*$ -環は, 有限次元表現を一つも持たない.

<sup>\*2</sup>Haagerup property を持つ  $C^*$ -環を考えると, これは最良の制約条件であることを示した.  $C^*$ -環が従順であるときには, 有限次元になるというより強い制約が, Brown により示されている.

<sup>\*3</sup>ここでは, residually finite dimensional でないことを, 非自明であるといっている. residually finite dimensional である場合, 性質 (T) を持っていない, 制約は生じない.

# 平面閉曲線と LR 語

高岡 邦行

早稲田大学大学院教育学研究科

## 1 序文

結び目ダイアグラムの交点に着目する際, 交点の over/under crossing, left/right crossing, positive/negative crossing の 3 通りの着目の仕方がある. 佐藤-比嘉-中西-山本は, 結び目ダイアグラムの over/under crossing の情報のみに着目して OU 文字列を定義し, trefoil のダイアグラムの OU 文字列がどのような文字列になるか, 加えて OU 文字列の応用について研究した [1]. 本稿では交点の left/right crossing のみに着目し, その情報から得られる文字列について考える. その性質上, 交点の上下は関係ないので, 結び目ダイアグラムではなく, 平面閉曲線を考える.

## 2 準備

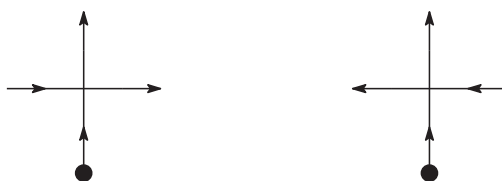
まず用語を定義する.

**Definition 2.1.** 文字 L と文字 R を同数個並べて出来る *cyclic* な文字列を LR 語という.

**Definition 2.2.**  $w = L^{\alpha_1} R^{\alpha_2} \dots L^{\alpha_{2n-1}} R^{\alpha_{2n}}$  を LR 語とする.  $n$  を  $w$  の LR 数といい,  $lr(w)$  と表す.

さて, LR 語を次のように平面閉曲線と対応させる.

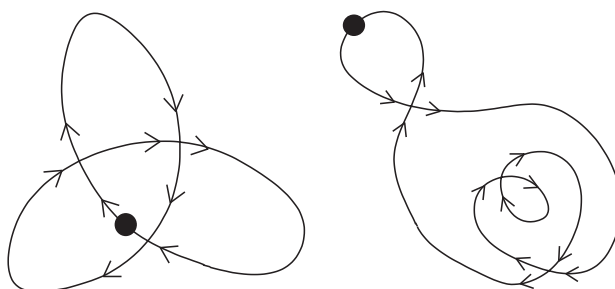
**Definition 2.3.**  $P$  を, 横断的な 2 重点のみを持つ,  $S^2$  上の向き付けられた閉曲線とする.  $P$  の各 2 重点は, その通過の仕方から, 以下の 2 つの場合が考えられる.



左の2重点の場合を文字L, 右の2重点の場合をRに対応させる.  $P$ 上に基点をとり, 基点から向きに沿って  $P$  を一周すると, 各2重点の情報からLR語が得られる. これを  $P$  のLR語といい,  $w_P$  と表す.

以下, 横断的な2重点のみを持つ,  $S^2$  上の向き付けられた閉曲線のことを, 単に, 平面閉曲線と呼ぶことにする.

**Example 2.4.** 左の平面閉曲線のLR語は基点から読むとLRLRLRであり, 右の平面閉曲線のLR語は基点から読むと  $R^3L^3$  である.



任意の平面閉曲線  $P$  に対して, *cyclic* なものを除いて,  $P$  のLR語が一意に定まる. では, LR語が与えられたとき, 平面閉曲線のLR語がそれと一致するような平面閉曲線は存在するかという問題が考えられるが, 次が成り立つ.

**Proposition 2.5.** 任意のLR語  $w$  に対して,  $w_P = w$  となる平面閉曲線  $P$  が存在する.

Proposition 2.5 で構成される平面閉曲線は, 2重点が1つしかない場合を除き, prime な平面閉曲線ではない. では, LR語が与えられたとき, 平面閉曲線のLR語がそれと一致するような prime な平面閉曲線は存在するだろうか?

本研究では, LR数が2までの prime な平面閉曲線の特徴付けを行い, 同時に平面閉曲線の分類も行った.

### 3 結果

$P$  を平面閉曲線とし,  $w_P$  を  $P$  のLR語,  $L_i$  と  $R_j$  を  $w_P$  の  $i, j$  番目にある文字L, 文字Rとする.  $L_i, R_j$  が  $P$  の同じ2重点に対応するとき,  $L_i$  と  $R_j$  を  $P$  のペア, と呼ぶことにする. 平面閉曲線のペアに関して, 次が成り立つ. 特に Lemma 3.2 はコード図から prime な平面閉曲線を構成する際に有用である.

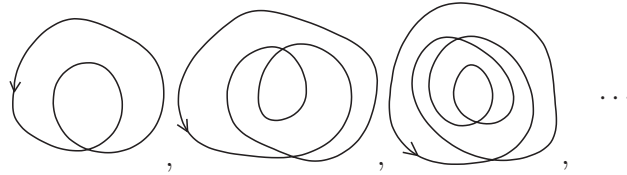
**Lemma 3.1.**  $P$  を平面閉曲線とし,  $w_P$  を  $P$  の LR 語とする. このとき  $L_i$  と  $R_j$  が  $P$  のペアならば,  $L_i$  と  $R_j$  に挟まれている  $w_P$  の部分文字列の,  $L$  と  $R$  の個数は等しい.

**Lemma 3.2.**  $P$  を平面閉曲線とし,  $w_P$  を  $P$  の LR 語とする. また  $L_i$  と  $R_j$  をそれぞれ  $w_P$  の  $i$  番目,  $j$  番目の文字  $L$  と文字  $R$  とする. このとき,  $L_i$  と  $R_j$  が  $P$  のペア, かつ,  $L_{i+1}$  と  $R_{j-1}$  も  $P$  のペアならば,  $P$  は *prime* でない.

Lemma 3.1 より, 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 1 となる平面閉曲線の分類が出来る.

**Theorem 3.3.**  $P$  を平面閉曲線とし,  $w_P$  を  $P$  の LR 語とする. このとき, 次は同値である.

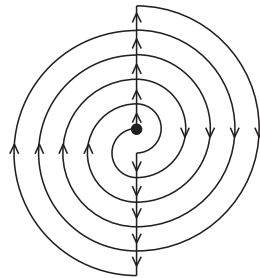
- (1)  $lr(w_P) = 1$
- (2)  $P$  は以下の平面閉曲線のどれか.



また,  $lr(w_P) = 1$  となる *prime* なものは一番左の平面閉曲線のみ.

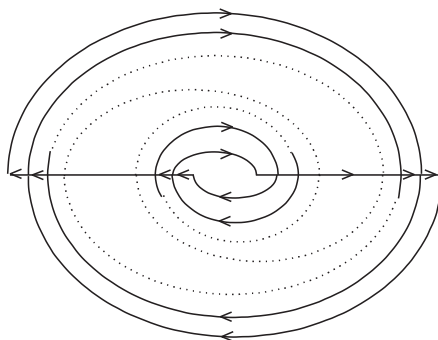
さて, 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 2 となる平面閉曲線として以下の例がある.

**Example 3.4.** 平面閉曲線の LR 語が  $L^4R^4L^4R^4$  となる平面閉曲線.



Example 3.4 から, 平面閉曲線の LR 語が  $L^\alpha R^\alpha L^\alpha R^\alpha$  ( $\alpha$  は偶数) となる平面閉曲線が構成できるが, 実は次が言える. 証明は Lemma 3.2 を用いる.

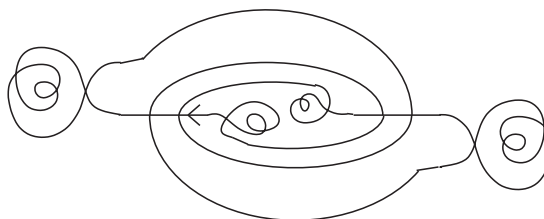
**Theorem 3.5.** 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 2 となる *prime* な平面閉曲線は次の平面閉曲線のみ.



LR 数が 2 の LR 語は, 部分語として LR 数が 1 である LR 語を含むことに注意すると, LR 数が 2 となる場合の平面閉曲線の分類が出来て, 次が成り立つ.

**Theorem 3.6.**  $P$  を平面閉曲線とし,  $w_P$  を  $P$  の LR 語とする. このとき, 次は同値である.

- (1)  $lr(w_P) = 2$
- (2)  $P$  は, 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 1 の平面閉曲線と 2 の平面閉曲線を下図のように合成して得られる平面閉曲線.



## 参考文献

- [1] R.Higa, Y.Nakanishi, S.Satoh, T.Yamamoto, *Crossing information and warping polynomials about the trefoil knot*, Proceedings of Knots in Gumma, HNSY, 2012.

# Weierstrass representation for semi-discrete minimal surfaces

神戸大学大学院理学研究科

安本 真士\*

## 概要

Wayne Rossman 氏との共同研究によって得られた、半離散曲面（曲面のパラメータのうち一方を離散化したもの）に対する Weierstrass の表現公式について紹介する。その応用として、3つのケースの懸垂面を比較する。

## 1 Previous work

Bobenko と Pinkall は [1] において可積分系のアプローチを用いて離散 isothermic 曲面および離散極小曲面の定義を与え、離散極小曲面に対して Weierstrass の表現公式を与えました。まずは両氏の先行研究の結果を紹介させていただきます。

**定理 1.**  $\mathbb{R}^3$  内の離散極小曲面  $F$  は、離散正則関数  $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  を用いることで得られる公式

$$\begin{aligned} F_{m+1,n} - F_{m,n} &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{m+1,n} - g_{m,n}} (1 - g_{m+1,n} g_{m,n}, i(1 + g_{m+1,n} g_{m,n}), g_{m+1,n} + g_{m,n}), \\ F_{m,n+1} - F_{m,n} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{m,n+1} - g_{m,n}} (1 - g_{m,n+1} g_{m,n}, i(1 + g_{m,n+1} g_{m,n}), g_{m,n+1} + g_{m,n}) \end{aligned} \quad (1)$$

を解くことによって得られる。これを離散 Weierstrass の表現公式という。

ここで、 $g$  が離散正則関数であるとは、任意の  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  に対して、

$$\frac{g_{m+1,n} - g_{m,n}}{g_{m+1,n+1} - g_{m+1,n}} \frac{g_{m,n+1} - g_{m+1,n+1}}{g_{m,n} - g_{m,n+1}} = -1$$

を満たすものである。

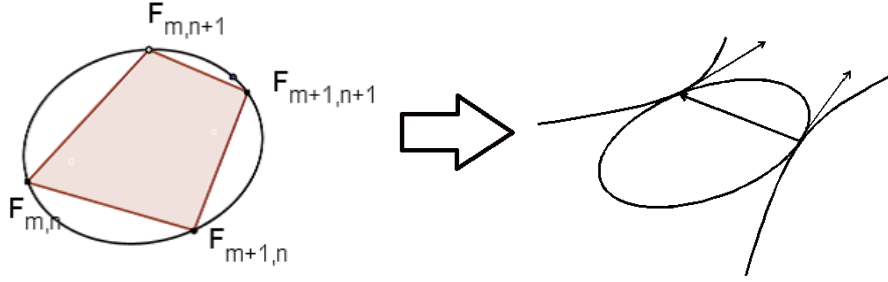
**注意** 上記の離散正則関数は狭義の意味での離散的な正則関数です。より一般の定義は [2] 参照。  $\square$

---

\*myasu@math.kobe-u.ac.jp

## 2 What is semi-discrete surface?

概要で述べた通り、半離散曲面とは曲面のパラメータのうち一方を離散化した曲面のことを指します。初めに、4点が同一円周上にあるような四角形を張り合わせた図形（離散曲面）を用意し、そのうち的一方の変数を滑らかなものに変更します。（下図）



特に、半離散曲面の中で、我々は半離散 isothermic と呼ばれる曲面のクラスに注目しています。半離散 isothermic 曲面の定義はここではしませんが、簡単に申し上げると、上図のような状況が実現可能な曲面であるとき、この曲面は半離散 isothermic であると呼ばれています。（[3], [4] 参照）

## 3 Weierstrass representation for semi-discrete minimal surfaces

**定義 1.**  $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が半離散正則関数であるとは、 $g$  が以下の性質を満たすことを言う。

$$\frac{\|\Delta g\|^2}{\|g'\| \|g'_1\|} = \frac{\sigma}{\tau}$$

ここで、 $\tau$  と  $\sigma$  は  $\partial\sigma = \Delta\tau = 0$  を満たす関数である。

我々が得た主結果は以下のものです。

**定理 2** (Weierstrass の表現公式). 半離散極小曲面は、任意の半離散正則関数  $g$  を用いて与えられる以下の微分方程式と差分方程式の組

$$\partial x = -\frac{\tau}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\frac{1-g^2}{g'}}{\frac{i(1+g^2)}{g'}} \right), \quad \Delta x = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\frac{1-gg_1}{\Delta g}}{\frac{i(1+gg_1)}{\Delta g}} \right) \quad (2)$$

を解くことで得られる。ここで、 $\tau$  と  $\sigma$  は定義 1 で定められた  $g$  の関数である。逆に、任意の半離散極小曲面は、ある半離散正則関数  $g$  を用いることで構成される。

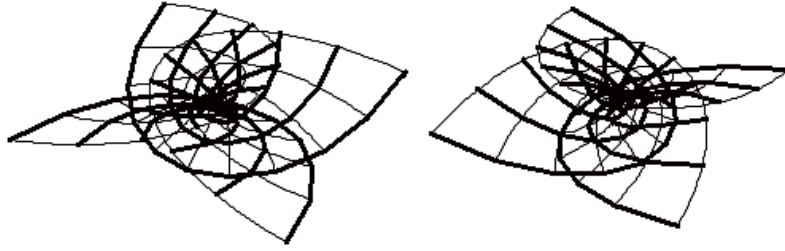


図 1: 2 種類の半離散 Enneper 曲面

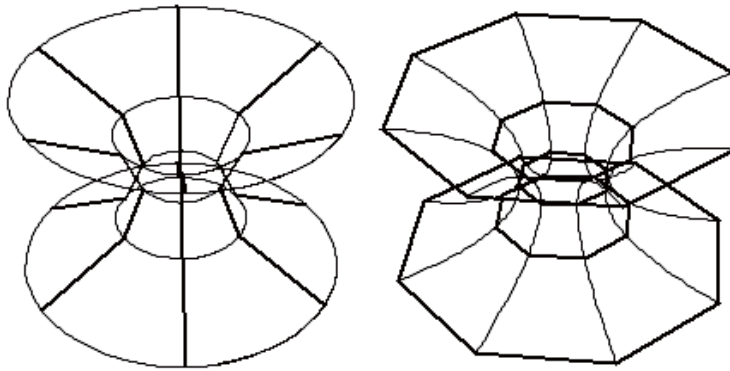


図 2: 2 種類の半離散懸垂面

例 半離散 Enneper 曲面は定理 2 において、半離散正則関数  $g$  を

$$g(k, t) = c(k + it) \quad (\text{resp. } g(k, t) = c(t + ik))$$

とすることで得られます。ここで、 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とします。図 1 はこのようにして得られる半離散 Enneper 曲面です。

例 半離散懸垂面は定理 2 において、半離散正則関数  $g$  を

$$g(k, t) = ce^{\alpha k + i\beta t} \quad (\text{resp. } g(k, t) = ce^{\alpha t + i\beta k})$$

とすることで得られます。ここで、 $c, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とします。図 2 はこのようにして得られる半離散懸垂面です。

## 4 応用

半離散曲面の構成法は前述のものだけではありません。今回紹介したアイデアは可積分系のアプローチを用いた半離散極小曲面の構成法であり、他にも変分のアプローチを

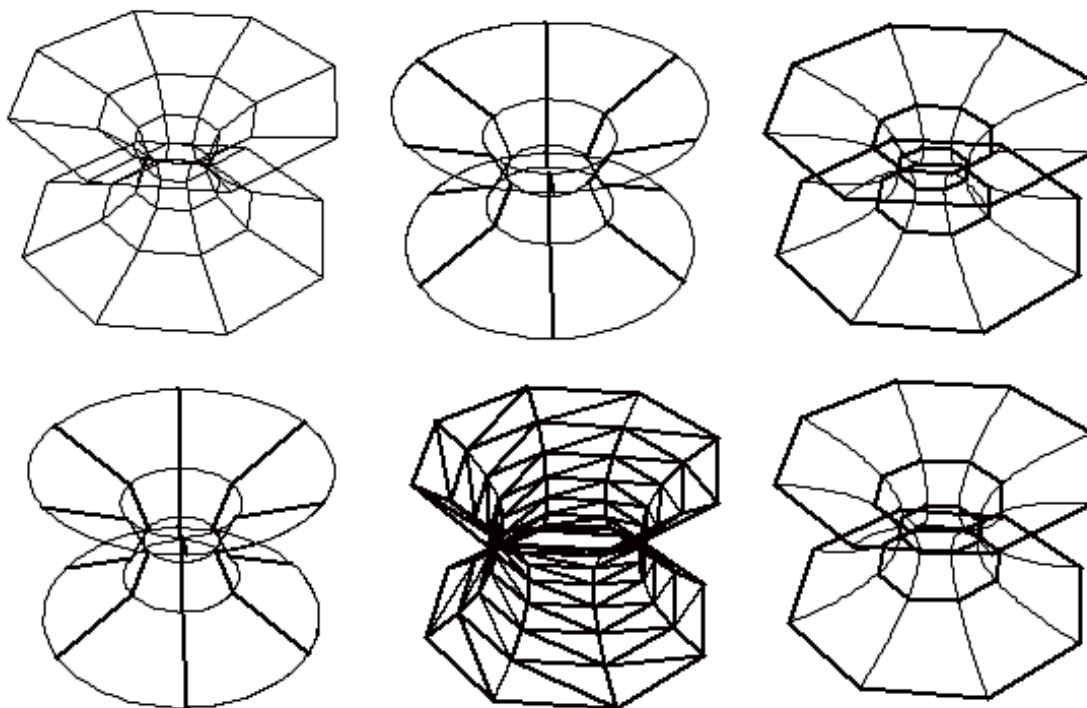


図 3: 六つの懸垂面（同じように見えるものもあるが、若干異なる）

用いた半離散懸垂面もあります。我々は [4] において、考える全ての滑らかな懸垂面、離散懸垂面、半離散懸垂面の比較を行いました。図 3 は、実際に比較を行った懸垂面の図です。

## 参考文献

- [1] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, J. Reine Angew. Math., 475 (1996), 187-208.
- [2] T. Hoffmann, Discrete differential geometry of curves and surfaces, MI Lecture Note 18, 2009.
- [3] C. Mueller and J. Wallner, Semi-discrete isothermic surfaces. To appear in Results Math.
- [4] W. Rossman and M. Yasumoto, Weierstrass representation for semi-discrete minimal surfaces, and comparison of various discretized catenoids, J. Math-for-Ind. 4B (2012) 109-118.

# 新しいリーマン多様体上の共役勾配法および その収束性について

佐藤 寛之\*

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

## 1 序論

ユークリッド空間において、目的関数と呼ばれる実数値関数の最小点を、与えられた制約条件の下で求める問題を最適化問題といい、様々な解法アルゴリズムが研究されている [4]。しかし、もちろんリーマン多様体上でも同様の最適化問題を考えることができる。特に、リーマン多様体上の制約条件なしの最適化問題に対する解法アルゴリズムは、ユークリッド空間におけるアルゴリズムの拡張という形で研究がなされている。詳細は [1, 2] を参照されたい。本稿では、最適化アルゴリズムの一つである共役勾配法について扱う。共役勾配法はユークリッド空間ではよく研究されているが、リーマン多様体上での収束性については研究があまりなされていない。

## 2 リーマン多様体上の最適化問題と共役勾配法

$m, n$  を整数とし、 $m \geq n$  とする。 $m \times n$  行列  $A$  は

$$A = U_0 \Sigma_0 V_0^T, \quad U_0 \in O(m), V_0 \in O(n), \Sigma_0 = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

と分解される。ここで、 $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ 、 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  である。この分解 (2.1) を  $A$  の特異値分解といい、 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  を  $A$  の特異値という [3]。 $u_1, \dots, u_m$  と  $v_1, \dots, v_n$  をそれぞれ  $U_0$  と  $V_0$  の列ベクトルとする。つまり、 $U_0 = (u_1, \dots, u_m)$ 、 $V_0 = (v_1, \dots, v_n)$  である。これら  $u_i$ 、 $v_i$  をそれぞれ  $A$  の左特異ベクトル、右特異ベクトルという。

まず、リーマン多様体上の共役勾配法を考える動機付けのために、上に説明した特異値分解と密接な関係にある次の問題を考える。 $p, n, m$  を、 $p \leq n \leq m$  を満たす整数とし、 $N = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ 、 $\mu_1 > \dots > \mu_p > 0$  とする。次の  $\text{St}(p, m) \times \text{St}(p, n)$  上の最適化問題の解を  $(U_*, V_*)$  とすると、 $U_*$ 、 $V_*$  の列ベクトルはそれぞれ、 $m \times n$  行列  $A$  の大きい方から  $p$  個の特異値に属する左特異ベクトル、右特異ベクトルからなる [1, 5]。

問題 2.1.

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && G(U, V) := \text{tr}(U^T A V N), \\ & \text{subject to} && (U, V) \in \text{St}(p, m) \times \text{St}(p, n). \end{aligned}$$

\* hsato@amp.i.kyoto-u.ac.jp

最も基本的な反復アルゴリズムである最急降下法をこの問題に適用すると、反復によって得られる  $\text{St}(p, m) \times \text{St}(p, n)$  上の点列  $(U_k, V_k)$  は、理論的には最適解に収束することが証明される。しかし、実際に数値計算実験をしてみるとその収束は非常に遅く、実用には向かない。一方、ニュートン法は非常に速い収束性を持つが、1 階微分のみを必要とし大域的収束性を持つ最急降下法とは異なり、2 階微分を必要とし大域的収束性を持たない。これらの性質はユークリッド空間ではよく知られていたが、リーマン多様体上に拡張した場合も同様に成り立つことが知られている [1]。本稿で取り扱う共役勾配法は、ユークリッド空間においては最急降下法と同様 1 階微分しか必要とせず大域的収束性を持ち、しかも最急降下法より速い収束性を持つ。そこで、問題 2.1 に共役勾配法を用いることで、速い収束性を持つ点列が得られると期待される。そして実際にその予想は数値的に正しいことが検証されるのだが、この問題に対する最急降下法の遅さや、実際に共役勾配法を用いた効率的な解法等の詳細については、[5] を参照されたい。

実は、リーマン多様体上の共役勾配法については、その収束性がほとんど研究されていない。しかし、ユークリッド空間の場合と同様の収束性を持つと期待されるのだが、それは必ずしも正しくない。そこで講演では、リーマン多様体上の共役勾配法がいかなる場合に大域的収束性を持つのか、また、大域的収束性を持たない場合にアルゴリズムをどう改良すれば良いのかを見ていきたい。その準備として、次節ではユークリッド空間における共役勾配法とそのリーマン多様体上への拡張について概観する。

### 3 ユークリッド空間における共役勾配法とそのリーマン多様体上への拡張

まずユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  における（非線形）共役勾配法を簡単に復習しておく。 $\mathbb{R}^n$  上の目的関数  $f$  を最小化する問題を考える。共役勾配法は反復アルゴリズムの一種であり、初期点  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  から始めて更新式

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \eta_k \quad (3.1)$$

によって  $\mathbb{R}^n$  上の点列  $\{x_k\}$  を構成する。ここで、 $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_k \in \mathbb{R}^n$  はそれぞれ  $x_k \in \mathbb{R}^n$  におけるステップサイズ、探索方向と呼ばれる。共役勾配法では探索方向  $\eta_k$  は

$$\eta_k = -\text{grad } f(x_k) + \beta_k \eta_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (3.2)$$

として選ぶ。ただし、 $\eta_0 = -\text{grad } f(x_0)$  とする。ここで、 $\beta_k \in \mathbb{R}$  の選び方は多数提案されているが、本稿では Fletcher-Reeves による

$$\beta_k = \frac{\text{grad } f(x_k)^T \text{grad } f(x_k)}{\text{grad } f(x_{k-1})^T \text{grad } f(x_{k-1})} \quad (3.3)$$

を採用する。また、ステップサイズ  $\alpha_k$  はウルフの条件と呼ばれるものを満たすように定める [4]。こうして次のアルゴリズムを得る。

---

#### Algorithm 1 $\mathbb{R}^N$ 上の共役勾配法

---

- 1: 初期点  $x_0 \in M$  を選ぶ.
  - 2:  $\eta_0 := -\text{grad } f(x_0)$  を計算する.
  - 3: **while**  $\text{grad } f(x_k) \neq 0$  **do**
  - 4:     $\alpha_k$  をウルフの条件を満たすように計算し,  $x_{k+1} := x_k + \alpha_k \eta_k$  とする.
  - 5:     $\beta_{k+1} := \text{grad } f(x_k)^T \text{grad } f(x_k) / \text{grad } f(x_{k-1})^T \text{grad } f(x_{k-1})$  を計算し,  
        $\eta_{k+1} := -\text{grad } f(x_{k+1}) + \beta_{k+1} \eta_k$  とする.
  - 6:     $k := k + 1$ .
  - 7: **end while**
-

この反復アルゴリズムをそのままリーマン多様体  $(M, g)$  上の問題に適用することはできない．拡張の際に問題となる部分がある．まず，探索方向  $\eta_k$  は  $x_k$  における  $M$  の接ベクトルとして選ぶことにする．次に，更新式 (3.1) の右辺の和は  $M$  上では一般には定義されない．そこで， $M$  上のレトラクションと呼ばれる写像  $R: TM \rightarrow M$  によって  $x_k \in M$  から探索方向  $\eta_k \in T_{x_k}M$  の方向に伸びる曲線  $R_{x_k}(t\eta_k)$  を考え，その  $t = \alpha_k$  における値を次の点とする：

$$x_{k+1} = R_{x_k}(\alpha_k \eta_k). \quad (3.4)$$

なお，曲線  $R_{x_k}(t\eta_k)$  が初期点  $x_k$ ，初速度  $\eta_k$  を持つように， $R$  の  $x \in M$  への制限  $R_x$  に

$$R_x(0_x) = x, \quad (3.5)$$

$$DR_x(0_x) = \text{id}_{T_x M} \quad (3.6)$$

という2つの条件を課す．ここで， $0_x$  は  $T_x M$  の零ベクトルである．たとえば  $R = \text{Exp}$ （指数写像）とすれば，これはレトラクションである．しかし，指数写像を数値計算に用いるのは実用的でない．レトラクションという概念は，数値計算を見据えた指数写像の一般化である．

次に，(3.2) の右辺において，リーマン多様体  $M$  上では  $\text{grad } f(x_k) \in T_{x_k} M$ ， $\eta_{k-1} \in T_{x_{k-1}} M$  となるから， $-\text{grad } f(x_k) + \beta_k \eta_{k-1}$  は定義されない．そこで，Smith [6] は平行移動を用いてこの問題点を解決することを提案した．ところが，平行移動は必ずしも計算できるとは限らないし，計算できたとしてもさほど効率的ではない．そこで，Absil [1] は vector transport という概念を導入した．

**Definition 3.1.** 写像

$$\mathcal{T}: TM \oplus TM \rightarrow TM: (\eta_x, \xi_x) \mapsto \mathcal{T}_{\eta_x}(\xi_x) \in TM \quad (3.7)$$

が  $M$  上の vector transport であるとは，任意の  $x \in M$  に対して次の条件が満たされることをいう．

1. レトラクション  $R$  が存在して，

$$\pi(\mathcal{T}_{\eta_x}(\xi_x)) = R(\eta_x) \quad (3.8)$$

が成り立つ．ここで， $\pi(\mathcal{T}_{\eta_x}(\xi_x))$  は接ベクトル  $\mathcal{T}_{\eta_x}(\xi_x)$  の足を表す．

2. 任意の  $\xi_x \in T_x M$  に対して  $\mathcal{T}_{0_x}(\xi_x) = \xi_x$  が成り立つ．

3.  $\mathcal{T}_{\eta_x}(a\xi_x + b\zeta_x) = a\mathcal{T}_{\eta_x}(\xi_x) + b\mathcal{T}_{\eta_x}(\zeta_x)$  が成り立つ．

この vector transport を用いて，リーマン多様体  $M$  上の共役勾配法の探索方向を

$$\eta_{k+1} = -\text{grad } f(x_{k+1}) + \beta_{k+1} \mathcal{T}_{\alpha_k \eta_k}(\eta_k) \quad (3.9)$$

のように決める．vector transport と平行移動の関係は，レトラクションと指数写像の関係に似ている．

また， $\beta_k$  は

$$\beta_k = \frac{\langle \text{grad } f(x_k), \text{grad } f(x_k) \rangle_{x_k}}{\langle \text{grad } f(x_{k-1}), \text{grad } f(x_{k-1}) \rangle_{x_{k-1}}} \quad (3.10)$$

とする．

さらに，ステップサイズ  $\alpha_k$  はウルフの条件を満たすように定める．先に述べたように，こちらでも通常はユークリッド空間で議論されるものだが，リーマン多様体上に拡張しておく [5]．すなわち， $\alpha_k$  がウルフの条件を満たすとは， $0 < c_1 < c_2 < 1/2$  に対して

$$f(R_{x_k}(\alpha_k \eta_k)) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \langle \text{grad } f(x_k), \eta_k \rangle_{x_k}, \quad (3.11)$$

$$|\langle \text{grad } f(R_{x_k}(\alpha_k \eta_k)), \eta_k \rangle_{R_{x_k}(\alpha_k \eta_k)}| \leq c_2 |\langle \text{grad } f(x_k), \eta_k \rangle_{x_k}| \quad (3.12)$$

が成り立つことをいう．

こうしてリーマン多様体上の共役勾配法を次のように記述することができる．

---

**Algorithm 2** リーマン多様体  $M$  上の共役勾配法 (Fletcher-Reeves)

---

- 1: 初期点  $x_0 \in M$  を選ぶ.
  - 2:  $\eta_0 := -\text{grad } f(x_0)$  を計算する.
  - 3: **while**  $\text{grad } f(x_k) \neq 0$  **do**
  - 4:    $\alpha_k$  をウルフの条件を満たすように計算し,  $x_{k+1} := R_{x_k}(\alpha_k \eta_k)$  とする.
  - 5:    $\beta_{k+1} := \langle \text{grad } f(x_{k+1}), \text{grad } f(x_{k+1}) \rangle_{x_{k+1}} / \langle \text{grad } f(x_k), \text{grad } f(x_k) \rangle_{x_k}$  を計算し,  
 $\eta_{k+1} := -\text{grad } f(x_{k+1}) + \beta_{k+1} \mathcal{T}_{\alpha_k \eta_k}(\eta_k)$  とする .
  - 6:    $k := k + 1$ .
  - 7: **end while**
- 

$M$  がユークリッド空間の場合には, このアルゴリズムによる点列が大域的収束性を持つことが証明される [4]. その際,

$$\|\mathcal{T}_{\alpha_{k-1}\eta_{k-1}}(\eta_{k-1})\|_{x_k} \leq \|\eta_{k-1}\|_{x_{k-1}} \quad (3.13)$$

が成り立つことが本質的である．ユークリッド空間の場合には, 通常  $T_{x_{k-1}}\mathbb{R}^n$  と  $T_{x_k}\mathbb{R}^n$  を同一視した上で  $\mathcal{T}$  を恒等写像と見なすから, (3.13) は等号で成立する．しかし, 一般のリーマン多様体の場合には (3.13) は必ずしも成立しない．

そこで, アルゴリズムに改良を施し, (3.13) が各反復で成り立つようにしたい．講演では, その工夫について詳しく説明するとともに, 収束性の証明の概要を紹介する．また, 改良を施さないアルゴリズムにおいて (3.13) が成り立たない問題例を取り上げ, 改良前のアルゴリズムがその問題を解けないこと, および改良後のアルゴリズムならば確かに解けることを, 数値計算によって実証する．

## 参考文献

- [1] P.-A. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre, *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [2] A. Edelman, T. A. Arias, and S. T. Smith, The geometry of algorithms with orthogonality constraints, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **20**(2):303-353, 1998.
- [3] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, Third ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [4] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [5] H. Sato and T. Iwai, A Riemannian optimization approach to the matrix singular value decomposition, *SIAM J. Optim.*, to appear.
- [6] S. T. SMITH, *Optimization techniques on Riemannian manifolds*, in Hamiltonian and gradient flows, algorithms and control, Fields Inst. Commun., **3**. Amerl Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 113–136.

# finite category のオイラー標数とゼータ関数

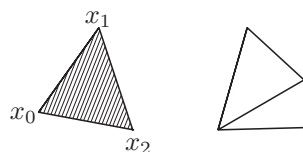
野口 和範\*(信州大学理学部アソシエイト研究員)

## 1 オイラー標数

オイラー標数とは多面体、または単体複体等に対して定義されるホモトピー不変量であり、

$$V - E + F$$

で定義される。ここで  $V$  は頂点の数、 $E$  は辺の数、 $F$  は面の数である。例えば、以下の2つの図形に対し、



左の三角形では  $V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1$  で、右の図形に対しては  $V - E + F = 4 - 5 + 0 = -1$  である。

オイラー標数の不思議なところは、空間を構成するパーツの数しか見ていないにもかかわらず、ホモトピー不変量になっていることである。オイラー標数とはつまり

$$\chi = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n \text{ 次元のパーツの数})$$

で与えられるが、各パーツがどういう組み合わせで空間を構成しているかについては何も考えていない。空間は(部品)+(それらの組み方)でできているが、組み方は当然その空間にとって大変重要な情報である。オイラー標数はそこに全く注目しないにも関わらず、ホモトピー不変量になっているのである。これは大変不思議である。

## 2 finite category のオイラー標数

オイラー標数は上記の単体複体に対するものだけでなく、finite category(object, morphism の数が有限)に対しても定義される。この finite category に対するオイラー標数は単体複体のオイラー標数の一般化になっている。単体複体  $\Delta$  から face poset  $F(\Delta)$  と呼ばれる順序集合 (poset) を作ることができ、 $F(\Delta)$  は  $\Delta$  の面の集合である。順序は包含関係によって定められる。例えば、上の左の三角形を  $\Delta$  とすれば、

$$F(\Delta) = \{(x_0), (x_1), (x_2), (x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_0, x_1, x_2)\}$$

\*E-mail : noguchi@math.shinshu-u.ac.jp

で、順序の付いている元は例えば  $(x_0) < (x_0, x_1)$  や  $(x_1, x_2) < (x_0, x_1, x_2)$  である。これは点  $(x_0)$  が線  $(x_0, x_1)$  に含まれることを表しており、さらに線  $(x_1, x_2)$  が面  $(x_0, x_1, x_2)$  に含まれることを表している。順序の付いていない元の例は  $(x_0) \not\leq (x_1, x_2)$  であるが、実際、点  $(x_0)$  は線  $(x_1, x_2)$  には含まれていない。finite poset に対して、G. C. Rota がオイラー標数  $\chi_{\text{Rota}}$  を定義したが、

$$\chi(\Delta) = \chi_{\text{Rota}}(F(\Delta))$$

という等式が成立する。つまり下の図式の右の四角形を可換にする。

$$\begin{array}{ccccc} \text{finite-categories} & \xleftarrow{\quad} & \text{Finite posets} & \xleftarrow{\text{face poset}} & \text{Finite simplicial complexes} \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi_{\text{Rota}} & & \downarrow \chi \\ \mathbb{Q} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z} \end{array}$$

そして、poset  $P$  は object の集合を  $P$ 、morphism の集合を  $\{(x, y) \in P \times P \mid x \leq y\}$  として category と見なすことができるが、それにより左の四角形も可換になる。よって、この図式により、単体複体のオイラー標数は finite category のオイラー標数に一般化になっているのである。

## 2.1 Leinster による定義

finite category に対するオイラー標数は Leinster(2008) による仕事が最初のものである。これによりグラフのオイラー標数や単体複体のオイラー標数など、様々な種類のオイラー標数を統一的に扱うことが可能になった。

$I$  を finite category とし、object の集合を

$$\text{Ob}(I) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

とする。この時、 $N \times N$ -行列  $A_I$  を  $(i, j)$ -成分が  $x_i$  から  $x_j$  への morphism の数である行列と定義する。

**Definition 2.1.** Let  $\mathbf{w}, \mathbf{c}$  be row vectors of  $\mathbb{Q}^N$ . Then, we say  $\mathbf{w}$  is a *weighting* on  $I$  if

$$A_I^t \mathbf{w} = A_I \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We say  $\mathbf{c}$  is a *coweighting* on  $I$  if

$$\mathbf{c} A_I = (c_1, c_2, \dots, c_N) A_I = (1, \dots, 1).$$

**Definition 2.2.** Define the *Euler characteristic*  $\chi_L(I)$  of  $I$  by

$$\chi_L(I) = \sum_{i=1}^N w_i$$

if  $I$  has both a weighting  $\mathbf{w}$  and a coweighting  $\mathbf{c}$ .

以下に  $\chi_L$  の特徴を挙げる。

1. category の equivalence で不変である。
2.  $A$  を finite acyclic category とした時、その分類空間  $BA$  の空間としてのオイラー標数と  $A$  の category としてのオイラー標数は等しい。つまり  $\chi_L(A) = \chi(BA)$ 。

まず 1 についてであるが、category の equivalence というのは位相空間におけるホモトピー同値に対応するような概念である。一般に small category  $J$  (small は object, morphism の全体が集合になるの意味) に対して分類空間  $BJ$  という位相空間 (さらに言うなら CW-complex) が構成でき、二つの small category  $J_1, J_2$  が equivalence の時、 $BJ_1, BJ_2$  はホモトピー同値であるという定理がある。であるので  $\chi_L$  は category の世界におけるホモトピー同値による分類をするための道具だと言える。

2 については書いてある通りであるが、ここで acyclic category の定義を与えておく。

**Definition 2.3.** A small category  $A$  is an *acyclic category* if all the endomorphisms are only identity morphisms and if there exists an arrow  $f : X \rightarrow Y$  such that  $X \neq Y$ , then there does not exist an arrow  $g : Y \rightarrow X$ .

## 2.2 The series Euler characteristic

その後 Berger-Leinster(2008) による series Euler characteristic  $\chi_\Sigma$  という finite category に対する新しいオイラー標数が定義された [BL08]。定義やその性質については講演の中で発表する。前述の  $\chi_L$  とは  $A_I$  が逆行列をもつときに両者の値は一致するが、基本的には別の不変量である。

## 3 finite category のゼータ関数

以下で紹介する finite category のゼータは黒川信重氏の category のゼータとは異なるもので [Kur96]、その定義は以下の通りである [Nog]。

**Definition 3.1.** Let  $I$  be a finite category. Then, we define the zeta function  $\zeta_I(z)$  of  $I$  by

$$\zeta_I(z) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#N_m(I)}{m} z^m \right)$$

where  $N_m(I) = \{ (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} x_m) \text{ in } I \}$ .

ゼータとオイラー標数は数多くの種類の数学的対象に対して定義されるが、ある対象  $X$  に対して、 $X$  のゼータ関数は  $X$  のオイラー標数の情報を持っていることが多く見受けられる。例えば、グラフのゼータや、代数多様体のゼータ、単体複体のゼータなどがその例である。そして finite category も同様に、finite category  $I$  のゼータは  $I$  のオイラー標数の情報を持っており、これを主定理として、今回の講演を行う。

**Theorem 3.2.** Suppose  $I$  is a finite category which has  $N$ -objects and it has series Euler characteristic and

$$\deg(|E - A_I z|) = N - r$$

and

$$\deg(\text{sum}(\text{adj}(E - A_I z))) = N - 1 - s$$

and the polynomial  $|E - A_I z|$  is factored to the following form

$$\begin{aligned} |E - A_I z| &= d_0 + d_1 z + \cdots + d_{N-r} z^{N-r} \\ &= d_{N-r} (z - \theta_1)^{e_1} \cdots (z - \theta_n)^{e_n} \end{aligned}$$

where  $e_i \geq 1$  for any  $i$  and  $\theta_i \neq \theta_j$  if  $i \neq j$ . Suppose the rational function

$$\frac{\text{sum}(\text{adj}(E - A_I z)A_I)}{|E - A_I z|}$$

has a partial fraction decomposition to the following form

$$\frac{\text{sum}(\text{adj}(E - A_I z)A_I)}{|E - A_I z|} = \frac{1}{d_{N-r}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{e_k} \frac{A_{k,j}}{(z - \theta_k)^j}$$

for some complex numbers  $A_{k,j}$ . Then, we obtain

1. the zeta function of  $I$  is

$$\zeta_I(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 - \alpha_k z)^{\beta_{k,0}}} \exp \left( \sum_{j=1}^{e_k-1} \frac{\beta_{k,j} z^j}{j(1 - \alpha_k z)^j} \right)$$

where  $\alpha_k = \frac{1}{\theta_k}$ ,  $\beta_{k,0} = -\frac{A_{k,1}}{d_{N-r}}$  and

$$\beta_{k,j} = \frac{1}{d_{N-r}} \sum_{i=j}^{e_k-1} \binom{i-1}{j-1} (-1)^{i-1} \left( \frac{1}{\theta_k} \right)^{i+j} A_{k,i+1}$$

for  $j \geq 1$

2. The sum of all of the indexes  $\beta_{k,0}$  is the number of objects of  $I$ , that is,

$$\sum_{k=1}^n \beta_{k,0} = N$$

3. Each  $\alpha_k$  is an eigen value of  $A_I$ . In particular,  $\alpha_k$  is an algebraic integer.

- 4.

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{e_k-1} (-1)^j \frac{\beta_{k,j}}{\alpha_k^{j+1}} = \chi_{\Sigma}(I) \in \mathbb{Q}.$$

## References

- [BL08] C. Berger and T. Leinster. The Euler characteristic of a category as the sum of a divergent series. *Homology, Homotopy Appl.*, 10(1):41-51, 2008.
- [Kur96] N. Kurokawa. Zeta functions of categories. *Proc. Japan Acad. Ser.10*: 221-222, vol. 72, 1996.
- [Lei08] T. Leinster. The Euler characteristic of a category. *Doc. Math.*, 13:21-49, 2008.
- [Nog] K. Noguchi. The zeta function of a finite category. preprint.

# On the Blow-analytic Equivalence of Tribranched Plane Curves

Cristina Valle

**Definition.** A function  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is *blow-analytic* if there exist a composition of simple blow-ups  $\beta = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_n : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  such that the composition  $g \circ \beta$  is analytic.

A homeomorphism  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is *blow-analytic* if  $h$  and its inverse  $h^{-1}$  both have blow-analytic components.

In this article, we study the classification of germs of plane real curves up to blow-analytic homeomorphism. In particular, we say that two germs of curves  $C, D$  in  $\mathbb{R}^2$  with an isolated singularity at the origin are *blow-analytically equivalent* if there exist a blow-analytic homeomorphism  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  that carries  $C$  to  $D$ .

It follows from the definition that two analytically equivalent curves are also blow-analytically equivalent. On the other hand, it is easy to find examples of plane curves which are not even  $\mathcal{C}^0$ -equivalent (for example a line and a cusp), but belong to the same blow-analytic class, as we will see. In this sense, the classification of singular curves up to blow-analytic isomorphism offers a more refined approach than the topological one and more flexible than the analytic one.

Let  $(C, 0)$  be the germ of a singular curve and let  $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a simple good resolution of  $C$  at the origin, i.e. a resolution such that  $\beta$  is a composition of simple blow-ups  $\beta_i$  centered over the origin (*simple*) and  $\beta^{-1}(C)$  is a union of smooth curves where any two components intersect transversally (*good*).

We construct the weighted dual graph  $\Gamma$  associated to  $X$  in the following way: draw a vertex for any exceptional curve, two vertices are joined by an edge if and only if the corresponding exceptional curves intersect.

Associate weights to the vertices according to the topological type of the tubular neighbourhood of the exceptional curves. Namely, assign weight 0 if the neighbourhood is homeomorphic to an annulus and weight 1 if it is homeomorphic to a Moebius strip. This is nothing but the usual (complex)

self-intersection number of each exceptional curve modulo 2.

Since we are considering a good resolution of  $(C, 0)$ , the dual graph  $\Gamma$  is a tree, so we have a simple graphic representation of the singularity. As for the weights, we draw odd curves as white vertices and even curves as black vertices.

Let  $A = (a_{ij})$  be the intersection matrix associated to  $\Gamma$ , i.e. the matrix where

- $a_{ii}$  is weight of the  $i$ -th vertex,
- $a_{ij} = 1$  if the curves  $E_i$  and  $E_j$  intersect and  $a_{ij} = 0$  otherwise.

Let  $\mu$  denote the corank of  $A$ .

**Lemma.** *A weighted tree  $\Gamma$  is the dual graph of a resolution of some plane curve  $(C, 0)$  if and only if  $\mu = 0$ .*

Define  $\Gamma^*$  to be the extension of  $\Gamma$  obtained by adding a vertex for each irreducible component of  $C$  and edges where the irreducible component intersects an exceptional curve. The extended graph  $\Gamma^*$  is also a tree. Graphically, we represent the irreducible components with a cross ( $\times$ ).

Finally, consider the minimal connected subtree in  $\Gamma^*$  containing all of the irreducible components and call  $\Gamma'$  the (possibly disconnected) graph obtained by removing such subtree. As it turns out, this graph and, in particular, its corank play an important role in the blow-analytic classification of curves.

**Lemma.** *Let  $\mu'$  be the corank of  $\Gamma'$ . Then  $\mu'$  is a blow-analytic invariant.*

We approach the problem of the classification of curves by providing a classification of all the possible dual graphs of resolutions. Namely, given a graph  $\Gamma$ , we perform blow-ups and blow-downs to simplify  $\Gamma$  and reduce it to a standard form, without changing the blow-analytic equivalence class of the corresponding curve  $C$ .

Here is a list of basic procedures which reduce the size or the complexity of a graph  $\Gamma$  and which do not affect the blow-analytic type of the corresponding curve. (*Notation:* in what follows, we denote  $P_k$  the paths of length  $k$ , for  $k = 1, 2, 3$ , whose vertices are all odd.)

1. It is always possible to make all vertices in  $\Gamma$  odd by performing a finite number of simple blow-ups and blow-downs, so we can assume that all vertices of the initial graph  $\Gamma$  are white.

2. Cancel all occurrences of  $P_3$  without changing the parity of adjacent vertices.
3. Cancel pairs of  $P_1$  attached to the same vertex.
4. Cancel pairs of one  $P_1$  and one  $P_2$  attached to the same vertex.
5. Perform simple blow-downs wherever possible (i.e. on all remaining odd vertices with valency 1 or 2), starting from the extremal vertices of the tree.

By applying the above steps to any resolution graph  $\Gamma$ , we prove the following general theorem.

**Theorem 1.** *The number of blow-analytic equivalence classes of plane  $n$ -branched curves with a fixed  $\mu'$  is finite, for any  $n, \mu'$  in  $\mathbb{N}$ .*

It can be interesting, especially for low values of  $n$  and  $\mu'$ , to explicitly compute the number equivalence classes. In addition, by blowing down all vertices in the dual graphs, we can find an explicit curve representative of each blow-analytic class.

In the unibranched and bibranched cases the classification is known completely.

**Theorem 2.** *[Kobayashi-Kuo] All unibranched curves are blow-analytically equivalent to a line.*

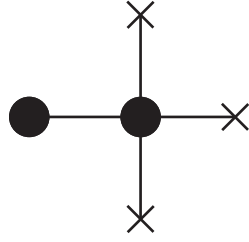
**Theorem 3.** *[Kobayashi] Bibranched curves in  $\mathbb{R}^2$  are blow-analytically equivalent in the level of the graph if and only if they have the same  $\mu'$ .*

In the tribranched case so far there is only a partial classification for  $\mu' = 0, 1, 2$ .

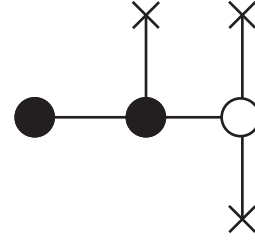
**Theorem 4.** *[Kobayashi] A germ of a tribranched curve in  $\mathbb{R}^2$  with  $\mu' = 0$  is blow-analytically equivalent to one of the following*



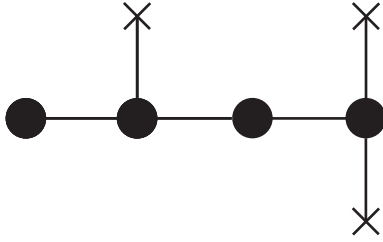
**Theorem 5.** *A germ of a tribranched curve with  $\mu' = 1$  is blow-analytically equivalent to one of the following four classes:*



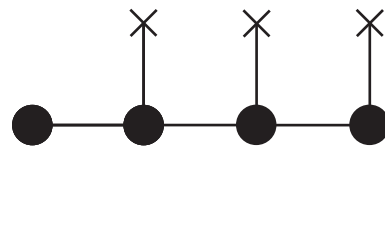
(a)  $(\{y(y - x^2)(y + x^2) = 0\}, 0)$



(b)  $(\{x(y - x)(y^2 - x^3) = 0\}, 0)$



(c)  $(\{y(y - x^2)(x^2 + y^3) = 0\}, 0)$



(d)  $(\{y(y - x^2)(y^2 - x^5) = 0\}, 0)$

**Theorem 6.** *In the level of the graph, there are 11 equivalence classes for tribranched curves with  $\mu' = 2$ .*

Note that the number of equivalence classes increases rapidly with the value of  $\mu'$ . However, due to the very peculiar properties of the resolution graphs, this number is always finite, as stated in Theorem 1.

## References

- [1] V.I. Arnold, *Singularity Theory*, Cambridge University Press, LMS Lecture Note Series 53 (1981)
- [2] M. Kobayashi, T-C. Kuo, *On Blow-analytic Equivalence of Embedded Curve Singularities*. Proc. Jpn. Acad. **73**, 97-99 (1997)
- [3] L. Paunescu, *Invariants Associated with Blow-analytic Homeomorphisms*. Proc. Jpn. Acad. **78**, Ser.A, 194-198 (2002)

## 代数的 $K$ 理論を用いた球面の安定ホモトピー群の幾何的応用

加藤 諒 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D2)

### 1. 背景

ある多様体  $M$  が与えられたとき、その上での自己同型射全体  $\text{Homeo}(M)$  の構造を知りたいというのは、位相幾何学における素朴かつ中心的な問題である。この集合は、 $C^\infty$  位相を入れることで位相空間として見ることができるが、その構造は一般的に非常に複雑であり、決定はほぼ不可能と言っても過言ではない。このように、ある空間の位相構造の把握が困難な場合、まずホモトピー型を把握しようというのは自然な流れである。よって、そのホモトピー群  $\pi_*(\text{Homeo}(M))$  の構造決定は重要な問題となり得る。では、具体的にこの構造を調べる為にどのような方針が有るだろうか？以下の結果は、この問題への 1 つの答えとなり得る。

**Theorem 1** (Weiss-Williams [19], Igusa [11]).

*Let  $M$  be a closed smooth manifold such that  $\dim(M) = m \geq 5$ . Then, if  $q \leq \min\{\frac{m-4}{3}, \frac{m-7}{2}\}$ , then there is an exact sequence as follow.*

$$\cdots \rightarrow \mathbb{H}_{q+2}(C_2, \tau_{\geq 2}\text{Wh}^{\text{Top}}(M)) \rightarrow \pi_q(\text{Homeo}(M)) \rightarrow \pi_q(\widetilde{\text{Homeo}}(M)) \rightarrow \cdots$$

ここで、 $\widetilde{\text{Homeo}}(M)$  は  $M$  の block 同相射と呼ばれるものの集合であり、 $\text{Wh}^{\text{Top}}(M)$  は  $M$  の位相空間の圏上の Whitehead スペクトラム (see [17])、 $\tau_{\geq 2}\text{Wh}^{\text{Top}}(M)$  はその 2-connected cover を表す。 $C_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  であり、 $\mathbb{H}_*(C_2, \tau_{\geq 2}\text{Wh}^{\text{Top}}(M))$  は群ホモロジースペクトラム  $\mathbb{H}_*(C_2, \tau_{\geq 2}\text{Wh}^{\text{Top}}(M))$  のホモトピー群を意味する。

多様体  $M$  が、 $\dim(M) \geq 5$  という条件に加えて、負の断面曲率を持つリーマン計量を持つとする。多様体  $M$  上の自己ホモトピー同値写像とは、 $M$  上の自己射でその恒等写像と homotopic である射のことであり、それらのホモトピー類全体は  $\text{HoAut}(M)$  と表される。Farrell-Jones の topological rigidity theorem[4] により、上の完全列に現れる  $\pi_q(\widetilde{\text{Homeo}}(M))$  と  $\text{Wh}^{\text{Top}}(M)$  について

$$\begin{aligned} \pi_q(\widetilde{\text{Homeo}}(M)) &\cong \pi_q(\text{HoAut}(M)), \\ \text{Wh}_q^{\text{Top}}(M) &= \pi_q(\text{Wh}^{\text{Top}}(M)) \cong \bigoplus_{C(M)} \text{Wh}_q^{\text{Top}}(S^1) \end{aligned}$$

となることが分かる。ここで、

$$C(M) := \{M \text{ の基本群の極大巡回部分群の共役類全体} \}$$

である。 $\text{Wh}_*^{\text{Top}}(M)$  は、 $M$  の Whitehead 群と呼ばれる。上述した事実により、 $\text{Wh}_*^{\text{Top}}(M)$  は  $\pi_*(\text{Homeo}(M))$  の情報を豊富に持つことが示唆され、 $M$  が十分な条件を満たす場合、それは 1 次元球面  $S^1$  の Whitehead 群を調べることに帰着する。本講演では、特にこの 2 成分を調べることに注目していく。

## 2. TR 群と HESSELHOLT の手法

以後、 $\mathrm{Wh}_*^{\mathrm{Top}}(S^1)$  は  $S^1$  の Whitehead 群の 2 成分とする。以下がこれまでに構造が決定されている  $\mathrm{Wh}_q^{\mathrm{Top}}(S^1)$  である。

$$\begin{aligned} q = 0, 1 & \quad \text{Anderson-Hsiang [1],} \\ q = 2 & \quad \text{Igusa [10],} \\ q = 3 & \quad \text{Hesselholt [7].} \end{aligned}$$

本講演では、特に Hesselholt による [7] のアイデアについて注目する。この section では、それを簡単にフォローする。

$X_+$  を  $X$  に基点を加えた空間とし、 $\Gamma$  を  $x$  を生成元とする自由群とする。このとき、対称環スペクトラム  $A$  (see [9]) の Laurent polynomial extension  $A[x^{\pm 1}]$  とは、 $A$  と  $\Gamma_+$  のスマッシュ積として定義される, i.e.  $A[x^{\pm 1}] := A \wedge \Gamma_+$ .

スペクトラム  $X$  に対し、その代数的  $K$  理論  $K(X)$  (see [3]) が定義される。 $\mathbb{S}$  を球面スペクトラムとすると、Waldhausen により、以下のコファイバー列の存在が知られている [18]。

$$\Sigma_+^1 \wedge K(\mathbb{S}) \rightarrow K(\mathbb{S}[x^{\pm 1}]) \rightarrow \mathrm{Wh}^{\mathrm{Top}}(S^1) \xrightarrow{\partial} \Sigma S_+^1 \wedge K(\mathbb{S})$$

$\Sigma(-)$  はスペクトラムの圏における懸垂自己同型関手である。

ここで、TR スペクトラムの概念を導入する (詳細は [8] を参照)。対称環スペクトラム  $A$  が与えられたとき、その位相的 Hochschild スペクトラム  $\mathrm{THH}(A)$  が定義される。 $C_r$  を位数  $r$  の有限巡回群としたとき、 $\mathrm{THH}(A)$  は、その構成から任意の  $r \geq 1$  に対し  $C_r$ -作用を持つことが分かる。以上の事実の下、素数  $p$  における  $A$  のレベル  $n$  の TR スペクトラムは

$$\mathrm{TR}^n(A; p) := \mathrm{THH}(A)^{C_{p^{n-1}}}$$

と定義され、そのホモトピー群は  $A$  のレベル  $n$  の TR 群と呼ばれ  $\mathrm{TR}_*^n(A; p)$  と書かれる, i.e.  $\mathrm{TR}_*^n(A; p) := \pi_*(\mathrm{TR}^n(A; p))$ . 任意の  $n$  に対し、Frobenius 射、制限射と呼ばれるレベルを 1 つ下げる射  $F, R : \mathrm{TR}^n(A; p) \rightarrow \mathrm{TR}^{n-1}(A; p)$  が定義され、この  $R$  により

$$\mathrm{TR}(A; p) := \lim_R \mathrm{TR}^n(A; p)$$

が与えられる。よって、 $\mathrm{TR}(A; p)$  上にも  $F$  が (誘導されたものとして) 与えられ、 $A$  の位相的巡回ホモロジー  $\mathrm{TC}(A; p)$  はコファイバー列

$$\mathrm{TC}(A; p) \rightarrow \mathrm{TR}(A; p) \xrightarrow{F-\mathrm{id}} \mathrm{TR}(A; p) \rightarrow \Sigma \mathrm{TC}(A; p)$$

により定義される。 $\mathrm{TC}(A; p)$  は、Bökstedt-Hsiang-Madsen により [2] において導入された cyclotomic trace map

$$\mathrm{tr} : \pi_*(K(A)) \rightarrow \pi_*(\mathrm{TC}(A; p))$$

を介して  $K(A)$  の情報を与える。よって、特に今は  $K(\mathbb{S})$  と  $K(\mathbb{S}[x^{\pm 1}])$  の情報を得たい為、 $\mathrm{TR}^n(\mathbb{S}; p)$  を調べることに帰着する。では、どうすれば  $\mathbb{S}$  の素数  $p$  における TR 群の構造解析が行えるであろうか? その 1 つの解答として、コファイバー列

$$\mathbb{H}_\bullet(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S})) \rightarrow \mathrm{TR}^{n+1}(\mathbb{S}; p) \xrightarrow{R} \mathrm{TR}^n(\mathbb{S}; p)$$

を用いることが挙げられる。ここで、 $\mathbb{H}_\bullet(C_{p^{n-1}}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  は群ホモロジースペクトラムである。 $\mathrm{TR}^{n+1}(\mathbb{S}; p) \xrightarrow{R} \mathrm{TR}^n(\mathbb{S}; p)$  は、上述した TR スペクトラム上の制限射であり、これが  $\pi_*(-)$  により誘導する射は section を持つ (Segal-tom Dieck splitting)。よって、任意の  $q$  に対し、以下の分裂する短完全列が得られる。

$$0 \rightarrow \mathbb{H}_q(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S})) \rightarrow \mathrm{TR}_q^{n+1}(\mathbb{S}; p) \xrightarrow{R} \mathrm{TR}_q^n(\mathbb{S}; p) \rightarrow 0$$

ここで、 $\mathbb{H}_q(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S})) = \pi_q \mathbb{H}_\bullet(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  である。よって、 $\mathrm{TR}_q^1(\mathbb{S}; p)$  と  $\mathbb{H}_q(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  が計算できれば、全ての  $\mathrm{TR}_q^n(\mathbb{S}; p)$  の構造が決定できる。

$\pi_k^S$  を球面の  $k$  次元安定ホモトピー群 (の  $p$  成分) とする。スペクトラムとして  $\mathrm{THH}(\mathbb{S}) \simeq \mathbb{S}$  であることが分かっている為、 $\mathrm{TR}_q^1(\mathbb{S}; p) = \pi_* \mathrm{THH}(\mathbb{S}) \cong \pi_*^S$  ということが分かる。 $\pi_*^S$  は安定ホモトピー論における最重要研究対象であり、Toda による [16] の仕事を始めとして現在においても盛んに研究されている。参考図書の 1 つとして、Ravenel の [15] を挙げておく。2012 年 12 月現在において、 $\pi_k^S$  は、[12] において Kochman により  $k \leq 64$  まで完全に決定されている為、 $\mathrm{TR}_q^1(\mathbb{S}; p)$  は本講演における動機に対しては十分に分かっていると言える。

$\mathbb{H}_q(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  については、 $\mathbb{H}_\bullet(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  の skeleton フィルトレーションにより次の形のスペクトル系列が得られる。

$$E_{s,t}^2 = H_s(C_{p^n}, \mathrm{TR}_t^1(\mathbb{S})) \implies \mathbb{H}_{s+t}(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$$

位相的 Hochschild ホモロジーの  $C_r$ -作用は、Bökstedt により与えられた  $S^1$ -スペクトラム構造を  $C_r$  に制限することにより得られることが分かっている。 $S^1$  は path connected であることより、この  $C_r$ -作用はホモトピーレベルで自明に作用し、よって上のスペクトル系列の  $E_2$  項は

$$E_{s,t}^2 = E_{s,t}^2(C_{p^n}, \mathrm{TR}_t^1(\mathbb{S})) = H_s(C_{p^n}, \mathrm{TR}_t^1(\mathbb{S})) = \begin{cases} \pi_t^S & s = 0, \\ \pi_t^S / p^n \pi_t^S & s \text{ is odd } > 0, \\ \pi_t^S[p^n] & s \text{ is even } > 0 \end{cases}$$

となる。ここで、 $\pi_t^S[p^n]$  は  $\pi_t^S$  の  $p^n$ -torsion 部分群  $= \mathrm{Ker}(\pi_t^S \xrightarrow{p^n} \pi_t^S)$  である。

### 3. COMPUTATION

以下、 $p = 2$  とする。このとき、上のスペクトル系列において  $d^2$  は [6]、 $d^4$  は [14] において、それぞれ Hesselholt と Mosher により与えられている為、 $E^3 = E^4$  であれば  $E^5$  項までは計算が可能である。また、Greenlees-May による [5] の仕事により、 $\mathbb{H}_q(C_{2^{n-1}}, \mathrm{THH}(\mathbb{S})) \cong \pi_q^S(BC_{2^{n-1}})_+ \cong \pi_q^S \oplus \pi_q^S(BC_{2^{n-1}})$  となることが分かる。ここで、 $BC_{2^{n-1}}$  は  $C_{2^{n-1}}$  の分類空間であり、 $\pi_q^S(BC_{2^{n-1}})$  はその  $q$  次元安定ホモトピー群である。よって、特に  $n = 2$  のとき、 $BC_2$  は無限次元実射影空間  $\mathbb{R}P^\infty$  であるから  $\mathbb{H}_q(C_2, \mathrm{THH}(\mathbb{S})) \cong \pi_q^S \oplus \pi_q^S(\mathbb{R}P^\infty)$  である。 $\pi_q^S(\mathbb{R}P^\infty)$  は Liulevicius により  $q \leq 9$  まで決定されている [13]。この結果と比較することにより、 $n = 2$  の場合を具体的に計算すると

$$s + t \leq 9 \implies E_{s,t}^3(C_{2^n}, \mathrm{TR}_t^1(\mathbb{S})) = E_{s,t}^\infty$$

となることが導ける。よって、この範囲での  $n = 2$  のときの  $d^r$  は全て決定可能であり、これを元にするので一般の  $n$  に関しても微分を与えることができる。以上の手法のもと、以下の結果が得られる。

**Theorem 2.** *The spectral sequence  $E_{s,t}^2 = H_s(C_{p^n}, \mathrm{TR}_t^1(\mathbb{S})) \implies \mathbb{H}_{s+t}(C_{p^n}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  satisfies the followings.*

- (1) *If  $n = 2$  and  $s + t \leq 9$ , then this collapses at  $E^3$ -terms.*
- (2) *If  $n = 3, 4$  and  $s + t \leq 9$ , then this collapses at  $E^5$ -terms.*
- (3) *If  $n \geq 5$  and  $s + t \leq 9$ , then we can determine  $E^8$ -terms, and all differentials between  $E^8$  and  $E^\infty$  are trivial except  $d^8 : E_{9,0}^8 \rightarrow E_{1,7}^8$ .*

上の結果の (1)、(2) における  $E^\infty$  項と (3) における  $E^8$  項は完全に決定できる。それらを用いることで、Hesselholt による決定されている  $q \leq 5$  における  $\mathrm{TR}_q^n(\mathbb{S}; 2)$  の構造に加え、以下の事実が得られた。

**Theorem 3.** Let  $V : \mathrm{TR}_*^{n-1}(\mathbb{S}; 2) \rightarrow \mathrm{TR}_*^n(\mathbb{S}; 2)$  be the Verschiebung map. Then

$$\mathrm{TR}_6^n(\mathbb{S}; 2) = \bigoplus_{0 \leq s < n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot V^s(\nu^2) \oplus \bigoplus_{1 \leq s < n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot \nu \xi_{3,s}$$

where  $\nu$  is Toda's element in  $\pi_3^S$  given in [16] and  $\xi_{3,s}$  is Hesselholt's element in  $\mathbb{H}_3(C_{2^s}, \mathrm{THH}(\mathbb{S}))$  defined by [7].

さらに、位数のみならば以下の結果まで得られる。

**Theorem 4.**

- (1) For any  $n \geq 1$ ,  $|\mathrm{TR}_7^n(\mathbb{S}; 2)| = 2^{n+8} - 496$ .
- (2) If  $1 \leq n \leq 4$ , then  $|\mathrm{TR}_8^n(\mathbb{S}; 2)| = 2^{n+4} - 28$ .
- (3) If  $1 \leq n \leq 4$ , then  $|\mathrm{TR}_9^n(\mathbb{S}; 2)| = 128 \times \frac{4^{n-1}-1}{3} + 8$ .

本講演においては、これらの計算の詳細、および  $n$  が大きい部分で起きる問題の本質的な原因について述べる。

#### REFERENCES

- [1] Anderson, Douglas R.; Hsiang, W. C. The functors  $K_i$  and pseudo-isotopies of polyhedra. Ann. of Math. (2) 105 (1977), no. 2, 201-223.
- [2] Bokstedt, M.; Hsiang, W. C.; Madsen, I. The cyclotomic trace and algebraic  $K$ -theory of spaces. Invent. Math. 111 (1993), no. 3, 465-539.
- [3] Elmendorf, A. D.; Kriz, I.; Mandell, M. A.; May, J. P. Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory. With an appendix by M. Cole. Mathematical Surveys and Monographs, 47.
- [4] Farrell, F. Thomas; Jones, Lowell E. Rigidity in geometry and topology. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 653-663.
- [5] Greenlees, J. P. C.; May, J. P. Generalized Tate cohomology. Mem. Amer. Math. Soc. 113 (1995), no. 543.
- [6] Hesselholt, L. On the  $p$ -typical curves in Quillen's  $K$ -theory. Acta Math. 177 (1996), no. 1, 1-53.
- [7] Hesselholt, L. On the Whitehead spectrum of the circle. (English summary) Algebraic topology, 131-184, Abel Symp., 4, Springer, Berlin, 2009.
- [8] Hesselholt, Lars; Madsen, Ib On the  $K$ -theory of local fields. Ann. of Math. (2) 158 (2003), no. 1, 1-113.
- [9] Hovey, M.; Shipley, B.; Smith, J. Symmetric spectra. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 1, 149-208.
- [10] Igusa, K. On the algebraic  $K$ -theory of  $A_\infty$ -ring spaces. Algebraic  $K$ -theory, Part II (Oberwolfach, 1980), pp. 146-194, Lecture Notes in Math., 967, Springer, Berlin, 1982.
- [11] Igusa, K. The stability theorem for smooth pseudoisotopies.  $K$ -Theory 2 (1988), no. 1-2.
- [12] Kochman, Stanley O. Stable homotopy groups of spheres. A computer-assisted approach. Lecture Notes in Mathematics, 1423. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [13] Liulevicius, A. A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 109 1963 540-552.
- [14] Mosher, Robert E. Some stable homotopy of complex projective space. Topology 7 1968 179-193.
- [15] Ravenel, Douglas C. Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres. Pure and Applied Mathematics, 121. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
- [16] Toda, H. Composition methods in homotopy groups of spheres. Annals of Mathematics Studies, No. 49 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1962.
- [17] Waldhausen, F. An outline of how manifolds relate to algebraic  $K$ -theory. Homotopy theory (Durham, 1985), 239-247.
- [18] Waldhausen, F. Algebraic  $K$ -theory of spaces. Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983), 318-419, Lecture Notes in Math., 1126, Springer, Berlin, 1985.
- [19] Weiss, Michael; Williams, Bruce Automorphisms of manifolds and algebraic  $K$ -theory. I.  $K$ -Theory 1 (1988), no. 6, 575-626.

# KÄHLER-RICCI FLOW のある種の変形とその自己相似解

高橋 良輔 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ABSTRACT. Kähler-Ricci soliton は, Kähler-Ricci flow の自己相似解という観点から見た, Kähler-Einstein 計量の一般化である. Kähler-Ricci soliton は 4 階の偏微分方程式の解であるが, 局所的な考察により, Complex Monge-Ampère 方程式と呼ばれる 2 階の偏微分方程式に帰着できることが知られている [Yau78]. 今までに, この手法による Kähler-Ricci soliton の研究は活発に行われ, 存在や一意性などの重要な結果がいくつか得られている ([Zhu00], [TZ00], [TZ02], etc.). 本研究では, この強力な手法を一般の偏極多様体上の cscK 計量に対して拡張する問題を考えたのだが, それに関していくつか結果を得たので紹介したいと思う.

## 1. INTRODUCTION

$M$  を  $n$  次元 Fano 多様体,  $\eta(M)$  を  $M$  上の正則ベクトル場全体の成す Lie 代数とする. また,  $\text{Aut}(M)$  を  $M$  の正則自己同型群,  $\text{Aut}^\circ(M)$  をその単位元連結成分とする. このとき [FM95] によると,  $\text{Aut}^\circ(M)$  の半直積への分解

$$(1.1) \quad \text{Aut}^\circ(M) = \text{Aut}_r(M) \ltimes \text{Aut}_u(M)$$

がある. ここで  $\text{Aut}_r(M)$ ,  $\text{Aut}_u(M)$  はそれぞれ分解の reductive part, unipotent part を表す.  $\text{Aut}_r(M)$  は  $\text{Aut}^\circ(M)$  のある極大コンパクト部分群  $K$  の複素化である. また, (1.1) に応じて Lie 代数のレベルでの分解

$$(1.2) \quad \eta(M) = \eta_r(M) + \eta_u(M)$$

を得る.

それでは早速, Kähler-Ricci soliton を定義しよう.

**Definition 1.1.**  $M$  上の Kähler 計量  $g_{KS}$  と  $X \in \eta(M)$  の対  $(g_{KS}, X)$  が Kähler-Ricci soliton であるとは, 関係式

$$(1.3) \quad \text{Ric}(\omega_{g_{KS}}) - \omega_{g_{KS}} = L_X \omega_{g_{KS}}$$

を満たすことである. ただし,  $\omega_{g_{KS}}$  は計量  $g_{KS}$  から定まる Kähler 形式を表す.

**Remark 1.2.**  $X \equiv 0$  のとき (1.3) は Kähler-Einstein 計量 (以下, KE 計量と略す) であるから, Kähler-Ricci soliton (以下, KS と略す) は KE 計量の一般化を与える.

我々が KS を研究する motivation について, 2 つの観点から説明しよう. 1 つ目は KS の一意性に関する問題である.  $\omega_g \in c_1(M)$  を Kähler 計量とする. このとき  $\text{Ric}(\omega_g)$ ,  $\omega_g$  は共に  $c_1(M)$  の代表元であるから, ある real-valued smooth function  $h_g$  で

$$(1.4) \quad \text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h_g$$

を満たすものが定数差を除いてただ 1 つ存在する. また  $c_1(M) > 0$  より  $H^1(M, \mathbb{C}) = 0$  であるから, 任意の  $V \in \eta(M)$  に対して, ある complex-valued smooth function

$\theta_V = \theta_V(g)$  で

$$(1.5) \quad \begin{cases} i_V \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \theta_V \\ \int_M e^{\theta_V} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n \end{cases}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．これらの関数を用いて  $X \in \eta(M)$  に対し,  $\eta(M)$  上の関数  $F_X$  を

$$(1.6) \quad F_X(V) = \int_M V(h_g - \theta_X) e^{\theta_X} \omega_g^n, \quad V \in \eta(M)$$

と定める．このとき, (1.6) は KS (1.3) が存在するための障害を与える．

**Lemma 1.3** ([TZ02]). (1)  $F_X$  は正則不変量である．すなわち,  $\omega_g \in c_1(M)$  のとり方によらない．

(2)  $M$  がもし  $X$  に関する KS (1.3) をもてば,  $F_X \equiv 0$  である．

**Remark 1.4.**  $X \equiv 0$  のとき,  $F_X$  は二木不変量 [Fut83] である．

また,  $F_X^1$  は  $\eta_r(M)$  上に制限したとき, 凸関数の Frechet 微分としての幾何学的解釈があり, それを用いることで次の性質が証明できる．

**Lemma 1.5** ([TZ02]).  $X \in \eta_r(M)$ ,  $\text{Im}(X) \in \kappa(M)$  で

$$F_X(V) = 0, \quad \forall V \in \eta_r(M)$$

となるものがただ 1 つ存在する．ここで  $\kappa(M)$  は極大コンパクト部分群  $K$  に対応する Lie 代数である．

Lemma 1.3 と Lemma 1.5 より,  $X \in \eta_r(M)$  を仮定すれば, KS (1.3) を構成する正則ベクトル場  $X$  の候補はただ 1 つしかないと分かる．特に, もし  $M$  上に non-trivial な  $X$  に関する KS (1.3) が存在すれば,  $M$  は KE 計量をもたないと言えるので, KS の存在そのものが KE 計量が存在するための障害を与えていると言える．non-trivial な  $X$  に関する KS については, 小磯の例 [Koi90] がよく知られている．しかしその一方で, Lemma 1.5 の condition を満たすような  $X \in \eta_r(M)$  に対して,  $F_X$  が  $\eta(M)$  上で消えない例は未だに構成されておらず, (1.6) が trivial な障害である可能性は拭い去れない．

我々は Lemma 1.5 より従うベクトル場  $X \in \eta_r(M)$  の一意性を用いることで, KS の一意性が証明できる．

**Theorem 1.6** ([TZ02]).  $(g, X)$  および  $(g', X')$  を  $M$  上の KS とする．このときある  $\sigma \in \text{Aut}^\circ(M)$  が存在して,

$$\omega_g = \sigma^* \omega_{g'} \quad \text{かつ} \quad X = (\sigma^{-1})_* X'$$

となる．

2 つ目の motivation は, KS (1.3) は, Kähler-Ricci flow と呼ばれる  $M$  上の Kähler 計量の族  $g_t$  に関する時間発展方程式

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = -\text{Ric}(g_t) + g_t \\ \omega_{g_0} \in c_1(M) \end{cases}$$

の自己相似解の 1 つであることである．一般に Kähler-Ricci flow は時間大域解をもつ [Cao85] のだが, この収束性については Tian と Zhu による非常に興味深い結果がある．

<sup>1</sup>正確には  $F_X$  の類似物である [TZ02] ．

**Theorem 1.7** ([TZ07]).  $M$  は KS  $(g_{KS}, X)$  を許容する Fano 多様体であるとする．もし，初期計量  $\omega_{g_0}$  が  $K_X$ -不変であれば，任意の Kähler-Ricci flow 解は  $g_{KS}$  に Cheeger-Gromov 収束する．ただし， $K_X$  は  $\text{Im}(X)$  の生成する 1-パラメーター部分群を表す．

## 2. RESEARCH ABSTRACTS

§1 で述べた結果を念頭に置いて，著者は Fano 多様体に関するそれらの結果を，一般の偏極多様体に対して拡張する問題を考えた． $(M, \kappa)$  を  $H^1(M, \mathbb{C}) = 0$  であるような任意の  $n$  次元偏極多様体とする．ただし  $\kappa \in H^{1,1}(M, \mathbb{R})$  は Kähler 類を表す．また，その他の記号に関しては，§1 で定めたものをそのまま使用する．著者は，次のように方程式 (1.7) を初期計量  $\omega_{g_0} \in \kappa$  の cohomology 類が保たれるような方程式に拡張した．

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\text{Ric}(\omega_t) + \text{Ric}(\Omega(\omega_t)) \\ \text{Ric}(\Omega(\omega_t)) \wedge \omega_t^{n-1} = \Lambda_0 \omega_t^n \\ \omega_0 = \omega_{g_0} \in \kappa \end{cases}$$

上の方程式の記号について順番に説明しよう．まず  $\Omega(\omega_t)$  は  $M$  上の体積形式であり，上方程式の第 2 式より，定数倍を除いて一意的に定まる．したがって，実 (1,1) 型の形式  $\text{Ric}(\Omega(\omega_t)) = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \Omega(\omega_t)$  は  $\omega_t$  から一意的に定まる．また， $\Lambda_0 = \frac{c_1(M) \cdot \kappa^{n-1}}{\kappa^n}$  は  $M$  と  $\kappa$  のみに依存する定数であり，以下の議論において  $\Lambda_0 \neq 0$  と仮定する．著者は (2.1) を “Hamiltonian Kähler-Ricci flow” と命名した．

次に (2.1) の自己相似解について述べよう．§1 で既に言及したように，KS は (1.7) の自己相似解を与えていた．よって，KS を安直に拡張した方程式

$$(2.2) \quad \text{Ric}(\omega_{g_{HKS}}) - \text{Ric}(\Omega(\omega_{g_{HKS}})) = L_X \omega_{g_{HKS}}$$

は，(2.1) の自己相似解を与えていると考えるのが自然であり，実際，これは正しい．著者は方程式 (2.2) の解を “Hamiltonian Kähler-Ricci soliton” (以下，HKS と略す) と名付けた．

**Remark 2.1.**  $X \equiv 0$  のとき，計量  $g_{HKS}$  に関して (2.2) の両辺の trace をとれば， $R(g_{HKS}) = n\Lambda_0$  を得る．ここで， $R(g_{HKS})$  は計量  $g_{HKS}$  に関するスカラー曲率である．したがって，HKS は cscK 計量の一般化を与える．

今回，著者は，KS の場合に成り立つ一連の結果を HKS に対して拡張する問題を考えた．得られた結果については次節で述べる．

## 3. MAIN RESULTS

$(M, \kappa)$  を  $H^1(M, \mathbb{C}) = 0$  を満たす  $n$  次元偏極多様体とする．また， $\omega_g \in \kappa$  を Kähler 計量， $V \in \eta(M)$  とし，関数  $h_g$  および  $\theta_V$  をそれぞれ

$$(3.1) \quad \text{Ric}(\omega_g) - \text{Ric}(\Omega(\omega_g)) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h_g,$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} i_V \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \theta_V \\ \int_M e^{\theta_V} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n \end{cases}$$

で定める．さらに，これらの関数を用いて， $\eta(M)$  上の関数  $F_X^\kappa$  を

$$(3.3) \quad F_X^\kappa(V) = \int_M V(h_g - \theta_X) e^{\theta_X} \omega_g^n, \quad V \in \eta(M)$$

で定義する．(3.3) は見かけ上は (1.6) と全く同じ式であるが，拡張を与えている．

**Theorem 3.1.** (1)  $F_X^\kappa$  は正則不変量である．すなわち， $\omega_g \in c_1(M)$  のとり方によらない．

(2)  $M$  がもし  $X$  に関する HKS (2.2) をもてば， $F_X^\kappa \equiv 0$  である．

よって， $F_X^\kappa$  は HKS (2.2) が存在するための障害を与えている．

**Lemma 3.2.**  $X \in \eta_r(M)$ ， $\text{Im}(X) \in \kappa(M)$  で

$$F_X^\kappa(V) = 0, \quad \forall V \in \eta_r(M)$$

となるものがただ 1 つ存在する．

Lemma 3.2 は，HKS に関しても KS の場合と同様の意味での一意性，すなわち，自己同型群の作用を除いた意味での一意性が成り立つということを示唆している．

さらに著者は，Hamiltonian Kähler-Ricci flow の behavior に関する次の結果を得た．

**Theorem 3.3.** 任意の初期計量  $\omega_{g_0} \in \kappa$  に対する Hamiltonian Kähler-Ricci flow (2.1) は時間大域解をもつ．

#### REFERENCES

- [Cao85] H. D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds*, Invent. Math. **81** (1985), 359–372.
  - [FM95] A. Futaki and T. Mabuchi, *Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes*, Math. Ann. **301** (1995), 199–210.
  - [Fut83] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Kähler Einstein metrics*, Invent. math. **73** (1983), 437–443.
  - [Koi90] N. Koiso, *On rationally symmetric Hamilton’s equations for Kähler-Einstein metrics*, Algebraic Geometry, Adv. Studies in Pure Math. **18-1**, Sendai, 1990, 327–337.
  - [TZ00] G. Tian and X. H. Zhu, *Uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Acta Math. **184** (2000), 271–305.
  - [TZ02] G. Tian and X. H. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Comm. Math. Helv. **77** (2002), 297–325.
  - [TZ07] G. Tian and X. H. Zhu, *Convergence of Kähler-Ricci flow*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), 675–699.
  - [Yau78] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339–411.
  - [Zhu00] X. H. Zhu, *Kähler-Ricci soliton typed equations on compact complex manifolds with  $c_1(M) > 0$* , J. Geom. Anal. **10** (2000), 759–774.
- E-mail address:* m11036a@math.nagoya-u.ac.jp

# ケーラー計量の空間の測地線に対応する Homogeneous Complex Monge-Ampère 方程式の解について

十鳥 健太\*

東北大学大学院理学研究科数学専攻

## 1 Introduction

Kähler 幾何における重要な対象として Kähler-Einstein 計量、より一般にスカラー曲率一定 Kähler 計量がある。Kähler 計量の空間の測地線とはスカラー曲率一定 Kähler 計量などの特殊な計量の存在性や一意性を調べる上で重要だと考えられているものである。実際、Chen-Tian は [1] で測地線を使ってスカラー曲率一定 Kähler 計量の一意性を証明している。

Kähler 計量の空間の測地線は満洲によって [3] で定義された。本稿では測地線の定義をいきなり与えているが、満洲は Kähler 計量の空間という無限次元空間上の Riemann 計量を定義しており、今回扱う測地線はこの Riemann 計量に対応した測地線であることをここで注意しておく。詳しくは例えば [3] を参照して頂きたい。

この測地線は Homogeneous Complex Monge-Ampère 方程式と呼ばれる偏微分方程式の解に対応しており、その方程式の解が存在するための必要十分条件を与えるのが本講演の主定理である。

## 2 Preliminaries

$M$  を  $m$  次元コンパクト複素多様体とする。そして  $\omega$  を  $M$  上の Kähler 形式とする。ここで  $\omega$  が Kähler 形式であるとは、 $\omega$  が閉実 2-形式であり、局所座標  $(z^1, \dots, z^m)$  を使って

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^m g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

と表せて、かつ  $(g_{\alpha\bar{\beta}})$  が正定値 Hermite 行列であるときを言う。

**補題 1 ( $\partial\bar{\partial}$ -Lemma)**  $M$  をコンパクト Kähler 多様体、 $\alpha$  を  $M$  上の完全実  $(p, p)$ -形式とする。このときある実  $(p-1, p-1)$ -形式  $\beta$  が存在して

$$\alpha = \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\beta.$$

---

\* E-mail address: sb0m25@math.tohoku.ac.jp

と表せる。

以下、Kähler 形式  $\omega$  を一つ固定しておく。補題 1 より  $\omega$  が定める De Rham コホモロジー類  $[\omega]$  に属する任意の Kähler 形式  $\omega'$  に対し、ある  $M$  上の滑らかな実関数  $\varphi$  が存在して

$$\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$$

と書ける。

注意 2 滑らかな実関数  $\varphi_1, \varphi_2$  が  $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1 = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2$  を満たすなら、ある実数  $c$  が存在して  $\varphi_2 = \varphi_1 + c$  となる。

関数  $\varphi$  に対し汎関数  $I$  を

$$I(\varphi) = \frac{1}{\text{vol}M} \sum_{p=0}^m \frac{1}{(p+1)!(m-p)!} \int_M \varphi \omega^{m-p} (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^p$$

で定義する。ここで  $\text{vol}M = \int_M \omega^m / m!$  である。定数  $c$  に対し  $I(\varphi + c) = I(\varphi) + c$  となる。

Kähler 計量の空間  $\mathcal{H}_0$  を

$$\mathcal{H}_0 = \{\varphi \in C^\infty(M) \mid I(\varphi) = 0, \omega_\varphi = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ は Kähler 形式} \}$$

で定める。

定義 3 (Kähler 計量の空間の測地線)  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x) \in C^\infty([0, 1] \times M)$  が  $\varphi_t \in \mathcal{H}_0$  を満たすとする。 $\varphi_t$  が  $\mathcal{H}_0$  上の測地線であるとは

$$\varphi_t'' - |\partial\varphi_t'|_{\varphi_t}^2 = 0 \quad (1)$$

を満たすときを言う。ここで  $'$  は  $t$  に関する微分を表す。また  $\omega_{\varphi_t} = \sqrt{-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^m g_{\varphi_t, \alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ 、

$(g_{\varphi_t}^{\alpha\bar{\beta}})$  を  $(g_{\varphi_t, \alpha\bar{\beta}})$  の逆行列とすると  $|\partial\varphi_t'|_{\varphi_t}^2$  は

$$|\partial\varphi_t'|_{\varphi_t}^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^m g_{\varphi_t}^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial\varphi_t'}{\partial z^\alpha} \frac{\partial\varphi_t'}{\partial \bar{z}^\beta}$$

で与えられる。

### 3 Monge-Ampère equation

測地線の方程式 (1) はこのままだとよくわからないので、Monge-Ampère 方程式と呼ばれる方程式に書き換える。 $\Sigma = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re} \tau \leq 1\}$  を帯状領域とする。 $\varphi_t$  を  $\mathcal{H}_0$  上の曲線とする。 $\varphi_t$  に対し  $\Sigma \times M$  上の関数  $\Phi$  を

$$\Phi(\tau, x) = \varphi_{\text{Re} \tau}(x) \quad (\tau, x) \in \Sigma \times M$$

で定義する。このとき次が成り立つ。

命題 4

$$\varphi_t \text{ が測地線である} \iff (p^*\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Phi)^{m+1} = 0 \quad \text{on } \Sigma \times M,$$

ここで  $p: \Sigma \times M \rightarrow M$  は自然な射影である。

命題 4 の右辺に現れる方程式が Homogeneous Complex Monge-Ampère 方程式 (HCMA 方程式) と呼ばれるものである。HCMA 方程式とは簡単に言うと複素 Hesse 行列の行列式が 0 という方程式である。(この講演で扱う HCMA 方程式は特に Hesse 行列の退化次数が 1 の場合に当たる。)

本講演では次の様な方程式を扱う。

問題 5 滑らかな関数  $F_k: \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 0, 1$ ) で、任意の  $s \in \mathbb{R}$  に対し  $F_k(s, \cdot) \in \mathcal{H}_0$  を満たすものが与えられたとする。このとき滑らかな関数  $\Phi: \Sigma \times M \rightarrow \mathbb{R}$  で

$$\begin{aligned} (p^*\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Phi)^{m+1} &= 0 \quad \text{on } \Sigma \times M \\ \Phi(\sqrt{-1}s, \cdot) &= F_0(s, \cdot) \\ \Phi(1 + \sqrt{-1}s, \cdot) &= F_1(s, \cdot) \\ \Phi(\tau, \cdot) &\in \mathcal{H}_0 \quad \forall \tau \in \Sigma \end{aligned}$$

を満たすものを見つけよ。

特に  $\varphi_t$  が  $\varphi_0$  から  $\varphi_1$  への測地線であれば、先ほどの  $\varphi_t$  から定まる  $\Sigma \times M$  上の関数  $\Phi$  は命題 4 より境界条件  $F_0, F_1$  が  $F_0 \equiv \varphi_0, F_1 \equiv \varphi_1$  の場合の解である。

注意 6 Donaldson は [2] で  $\Sigma \times M$  ではなく  $D \times M$  上の同様の方程式について議論している。ここで  $D$  は単位円盤  $D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$  を表す。後で述べる主定理は [2] の Donaldson の結果のある種の一般化と言える。

## 4 Complexification of $(M, \omega)$

主定理を述べるために Kähler 多様体  $(M, \omega)$  の複素化について簡単に説明しておく。

$\pi: T^{1,0*}M \rightarrow M$  を  $M$  上の正則余接束とする。Kähler 形式  $\omega$  に対し  $T^{1,0*}M$  上の複素構造  $\tilde{J}$  と非退化な閉正則 2-形式  $\Theta = \Theta_1 + \sqrt{-1}\Theta_2$  で次を満たすものが存在する。

- $i_0$  をゼロ切断とすると  $i_0(M) \subset T^{1,0*}M$  は総実な部分多様体
- $\varphi \in \mathcal{H}_0$  から定まる切断  $s_\varphi = \partial\varphi: M \rightarrow T^{1,0*}M$  に対し、

$$s_\varphi^*(\Theta_1) = 0, \quad s_\varphi^*(\Theta_2) = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$$

ここで  $L = i_0(M)$  が総実とは  $TL \cap \tilde{J}TL = 0$  を満たすという意味である。

$\mathcal{W}_\omega$  を  $T^{1,0*}M$  に複素構造  $\tilde{J}$  を入れた複素多様体とする。 $(\mathcal{W}_\omega, \Theta)$  は Kähler 多様体  $(M, \omega)$  の複素化と呼ばれる。複素構造  $\tilde{J}$  や 2-形式  $\Theta$  の詳しい構成については例えば Semmes の論文 [4] などがある。

## 5 Main theorem

主定理に出てくる  $\Sigma$  上の関数  $H$  をまず定義する。 $M$  の点  $x$  でパラメトライズされた滑らかな写像の族  $g_x : \Sigma \rightarrow \mathcal{W}_\omega$  に対し、 $\gamma_\tau : M \rightarrow \mathcal{W}_\omega$  を  $\gamma_\tau(x) = g_x(\tau)$  で定義する。 $\Sigma$  上の関数  $H$  を

$$H(\tau) = \int_M |\gamma_\tau^*(\Theta_1)|^2 \omega^m$$

で定義する。ここでノルム  $||$  は Kähler 形式  $\omega$  から定まるノルムである。

以下が本講演での主定理である。

**定理 7**  $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$  とする。問題 5 の解  $\Phi$  が存在することと、 $M$  の点  $x$  でパラメトライズされた正則写像の族  $g_x : \Sigma \rightarrow \mathcal{W}_\omega$  で以下の条件を満たすものが存在することは同値である。

1.  $\pi(g_x(0)) = x$
2. 各  $x \in M$  に対し
$$g_x(\tau) \in \begin{cases} \Lambda_{F_0(s, \cdot)} & \tau = \sqrt{-1}s \\ \Lambda_{F_1(s, \cdot)} & \tau = 1 + \sqrt{-1}s \end{cases}$$
3. 各  $\tau \in \Sigma$  に対し、写像  $x \mapsto \pi(g_x(\tau))$  は  $M$  から  $M$  自身への微分同相写像
4. ある定数  $C > 0$  及び  $R > 0$  があって
  - $\text{Im } \tau > R$  となる任意の  $\tau \in \Sigma$  に対し  $e^{\pi \text{Im } \tau} H(\tau) < C$
  - $\text{Im } \tau < -R$  となる任意の  $\tau \in \Sigma$  に対し  $e^{-\pi \text{Im } \tau} H(\tau) < C$

ここで  $\Lambda_{F_k(s, \cdot)}$ , ( $k = 0, 1$ ) は  $s_{F_k(s, \cdot)} : M \rightarrow \mathcal{W}_\omega$  の像である。

## References

- [1] X-X. Chen and G. Tian, *Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs*, Publications Mathématiques de L'IHÉS., vol 107, 1-107, (2008).
- [2] S. K. Donaldson, *Holomorphic discs and the complex Monge-Ampère equation*, J. Sympl. Geom., 1 171-196, (2002)
- [3] T. Mabuchi, *Some symplectic geometry on compact kähler manifold*, Osaka, J. Math., 24, 227-252, (1987).
- [4] S. Semmes, *Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds*, Amer. J. Math., 114, 495-550, (1992).

# レビ平坦3次元多様体の射影埋め込み問題

足立真訓 (名大・多元数理)\*

## 概 要

リーマン面による葉層構造を持つコンパクト3次元多様体(本稿ではレビ平坦面と略す)上の函数論を研究する. 葉方向に正則な函数(CR 函数)を考察の対象にするが, その存在の程度は, 葉層構造の複雑さと, 函数の横断方向のなめらかさに敏感に依存し得る. 我々は, 大沢・シボニー [7] の先行研究を踏まえ, 小平の埋め込み定理のアナログを考察することで, この種の現象を観察した. 主結果は, 横断方向に無限階可微分という条件下でアナログが成立しなくなる具体例の構成である. (この報告は [1] のアナウンスである.)

## 1. 閉リーマン面上の函数論瞥見

この報告では, レビ平坦面上の函数を論じます. その背景として, 閉リーマン面上の函数論を駆け足で振り返りましょう. (cf. [4], [2], [3])

### 1.1. 閉リーマン面

リーマン面とは, 1次元連結複素多様体のことです. **閉リーマン面**は, コンパクトなリーマン面を指します. 閉リーマン面は, 向き付け可能な閉曲面と同相で, そのトポロジーは種数  $g$  で区別されます.

種数0の閉リーマン面は, リーマン球面(複素射影直線)  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  です.

種数1の閉リーマン面は, 1次元複素トーラス(楕円曲線)で, たとえば,  $T := \mathbb{C}/z \sim z + m + ni$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) です. トポロジカルには, 正方形の対辺を同一視して得られるトーラスです.

種数2以上の閉リーマン面は, 単位円板  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  を一次分数変換による離散群作用  $\Gamma$  で, 基本領域が  $4g$  角形となるよう割る  $(\mathbb{D}/\Gamma)$  ことで記述できます.

### 1.2. 正則函数と有理型函数

リーマン面上の**正則函数**とは, 複素数値函数で, 局所座標で見たときに複素可微分な函数です. 正則函数は, しばしば硬いと形容されます. パラコンパクトな微分可能多様体上には, その全体で定義された可微分函数は十分にたくさん存在します. (ホイットニーの埋め込み定理を思い起こしてください.) しかしながら, 最大値の原理から, 閉リーマン面全体で定義された正則函数は定数に限られてしまうことが分かります. (したがって, 特に  $\mathbb{C}^N$  に正則に埋め込むことはできません.)

そこで, 極を許して函数を論じます. 正則函数の孤立特異点  $p$  が**極**であるとは, 正則函数が点  $p$  の除外近傍で定義され, 点  $p$  で有限次のオーダーで発散していることをいいます. 極を許した正則函数を**有理型函数**と呼びます.

許す極を増やせば増やすほど, その特異性が許される範囲に収まる有理型函数は増えていくであろうことが推測されます. きわめて素朴な推測ですが, このように, 函数の存在性を, 特異性の指定や空間の性質によって問うことは, 函数論における基本的な問題です.

\* e-mail: m08002z@math.nagoya-u.ac.jp

web: <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~m08002z/>

### 1.3. 射影埋め込みの問題

閉リーマン面上の有理型函数の存在性については、リーマン・ロッホの定理という定量的な結果が知られていますが、本稿では、より定性的な射影埋め込みの問題に注目しましょう。

射影埋め込みの問題とは、閉リーマン面  $\Sigma$  上で「どの程度の極を許せば、その範囲の特異性を持つ有理型函数  $f_0, \dots, f_N$  を用いて、複素射影空間  $\mathbb{CP}^N$  への埋め込み写像  $\Sigma \ni z \mapsto (f_0(z) : \dots : f_N(z)) \in \mathbb{CP}^N$  が作れるだろうか？」という問題です。 ( $\mathbb{CP}^N$  は  $N+1$  個の複素数の連比の空間です。発散している成分があっても、割り算により、well-defined に点が定まります。  $\mathbb{C}^N$  に無限遠  $\mathbb{CP}^{N-1}$  を付加したものともいえます。)

たとえば、種数0の場合だと、 $\hat{\mathbb{C}} \ni z \mapsto (1 : z) \in \mathbb{CP}^1$  が埋め込み(同型)を与えます。  $z$  は  $\infty$  に1位の極を持つ有理型函数です。種数1の場合だと、 $T \ni z \mapsto (1 : \wp(z) : \wp'(z)) \in \mathbb{CP}^2$  が埋め込みを与えます。ここで  $\wp(z)$  は  $T$  上のワイヤシュトラウスの  $\wp$  函数です。  $\wp(z)$  は2位の極を1つ、  $\wp'(z)$  は3位の極を1つ持つ有理型函数です。一般に、種数  $g$  の場合には、重複度込みで高々  $(2g+1)$  個の極を許せば、その特異性を持つ有理型函数を組み合わせて、射影埋め込みが作れることが知られています。

## 2. 複素多様体論と多変数函数論

### 2.1. コンパクト複素多様体

閉リーマン面の場合、射影埋め込みの問題は、種数  $g$  という閉リーマン面をトポロジカルに特徴づける量により、定量的な解答が与えられました。このはっきりした結果の一般化を求めることは自然ですが、高次元化、すなわち、コンパクト複素多様体に関して、次の定性的な定理が知られています。

**定理 (小平の埋め込み定理).**  $X$  をコンパクト複素多様体とする。  $X$  上の正曲率を持つ正則直線束  $L$  を考える。このとき、ある  $n \gg 1$  が存在し、  $L^{\otimes n}$  の正則切断の連比により  $X$  は複素射影空間に埋め込める。

本稿で未定義の用語を使っていますが、有理型函数は正則直線束の切断に対応しています。有理型函数への極の許し方は、直線束の曲率の正值性により表されています。(曲率と特異点の関係については、チャーン類の概念、たとえば、ガウス・ボンネの定理、ポアンカレ・ホップの定理を思い起こしてください。)直線束  $L$  のテンソル積  $L^{\otimes n}$  をとるとは、  $L$  の曲率分布として記述された極の、重複度を倍々に増やすことと解釈できます。

### 2.2. レビ平坦面の研究

本稿では、閉リーマン面の射影埋め込みの問題の、異なる方向への一般化として、レビ平坦面の射影埋め込みの問題を議論します。議論を始める前に、なぜレビ平坦面を題材に選ぶのか、その動機を手短に紹介します。

次節でレビ平坦面の多様体としての定義を与えますが、元来は、複素多様体内で「両側レビ擬凸」という微分幾何学的な条件を満たす実超曲面(レビ平坦実超曲面)として発見された概念です。多変数函数論では、複素多様体内の領域上の正則函数の存在性を、その領域の持つポテンシャルや、領域を囲む実超曲面の微分幾何学的な性質によって問うことが基本的な問題です。レビ平坦面は、それらの問題の中で、しばしば特異な反例として現れます。

特異な反例として現れるものの、散発的な例が知られているのみで、統御する理論はまだありません。特に、20年来の未解決問題は、「複素射影平面  $\mathbb{CP}^2$  内には、なめらかな

レビ平坦実超曲面が存在しないであろう」というものです。高次元のケースでは、「複素射影空間  $\mathbb{CP}^N$  ( $N \geq 3$ ) 内にはなめらかなレビ平坦実超曲面が存在しない」ことが知られていることも興味深い一因です。この未踏峰に、レビ平坦面上の函数論を整備することで挑むというのが、一つのアプローチなのです。

### 3. レビ平坦面上の CR 函数: Toy Examples

この報告の主題であるレビ平坦面に議論を移し、レビ平坦面全体で定義された CR 函数の振る舞いを、具体例で観察します。

#### 3.1. 定義

**レビ平坦面** (コンパクトレビ平坦3次元 CR 多様体)  $M$  とは、リーマン面による非特異葉層構造 (foliation) が定められたコンパクト3次元多様体  $M$  を指します。正確な定義は割愛しますが、リーマン面  $\Sigma_\alpha$  の単射なはめこみ  $\iota_\alpha: \Sigma_\alpha \hookrightarrow M$  による直和分割  $M = \bigsqcup_\alpha \iota_\alpha(\Sigma_\alpha)$  であって、ある種の条件を満たすものとして定義されます。各  $\Sigma_\alpha$  を葉 (leaf) と呼びます。  $\Sigma_\alpha$  は一般にはコンパクトとは限らないことに注意してください。もっとも単純なレビ平坦面は、閉リーマン面  $\Sigma$  と単位円周  $S^1$  の直積  $\Sigma \times S^1 = \bigsqcup_{t \in S^1} \Sigma \times \{t\}$  です。

我々はレビ平坦面上の **CR 函数** を論じます。すなわち、 $M$  上の複素数値函数  $f$  であって、各  $\alpha$  に対し、 $f \circ \iota_\alpha$  が正則となるものです。  $f$  の葉と横断方向への regularity はあらかじめ仮定しません。レビ平坦面上でも  $f$  に極を許し「CR 有理型函数」を考察しますが、小平の埋め込み定理の場合と同様に、 $M$  上の CR 直線束の CR 切断として定式化します。 **CR 直線束** とは、 $M$  上の階数1のなめらかな  $\mathbb{C}$  ベクトル束で、変換函数系がなめらかな CR 函数に選べるものです。

#### 3.2. Toy Example 1

ある種の Kronecker 葉層  $M_{\alpha,\beta} := \mathbb{C} \times S^1 / \sim$  を考えましょう。  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  がパラメータで、同値関係は  $(z, \zeta) \sim (z+1, \zeta \exp 2\pi i \alpha) \sim (z+i, \zeta \exp 2\pi i \beta)$  で生成されます。葉は、直積葉層  $\mathbb{C} \times S^1 = \bigsqcup_{t \in S^1} \mathbb{C} \times \{t\}$  から誘導されています。

もっとも単純な場合は、 $M_{0,0} \simeq T \times S^1$  です。全ての葉が、1次元複素トーラス  $T$  と同型になります。閉リーマン面上の正則函数が定数に限られることを踏まえると、 $M_{0,0}$  上の CR 函数は  $S^1$  上の函数に帰着することが分かります。つまり、単純に閉リーマン面の族を考察しただけの状況となっており、新しい現象は見当たりません。この状況は、 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  でも変わりません。

#### 3.3. Toy Example 2

しかし、 $\alpha$  or  $\beta \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  とすると、状況が変わります。この時、葉は閉ではないリーマン面となり、葉上定数という制約が外れ、 $M_{\alpha,\beta}$  上にはより多くの CR 函数が存在します。ここで CR 函数に連続性の制約を課します。すると、葉が  $M_{\alpha,\beta}$  を稠密に埋め尽くしていることから、稲葉の定理 [5] により、 $M_{\alpha,\beta}$  全体で定義された連続 CR 函数は定数に限られてしまうことが分かります。

### 4. 主問題と主結果

2つめの toy example では、葉層構造の複雑さ (葉の稠密性) と、函数の葉と横断方向への regularity (連続性) をコントロールすることで、レビ平坦面上の CR 函数について、閉リーマン面上の正則函数と類似した結論を得ることができました。これを出発点に、

レビ平坦面上の射影埋め込みの問題を考えます.

「レビ平坦面上で, コンパクト複素多様体と同様に小平型の埋め込み定理が成り立つか?」が研究課題となります. 先行結果として, 以下が知られています.

**定理** (大沢・シボニーの埋め込み定理 [7], cf. [6]).  $M$  をレビ平坦面とする.  $M$  上の葉方向に正曲率を持つ<sup>1</sup>CR 直線束  $L$  を考える. このとき, 任意の  $\kappa \in \mathbb{N}$  に対し, ある  $n = n(\kappa) \gg 1$  が存在し,  $L^{\otimes n}$  の  $C^\kappa$  級 CR 切断の連比により  $M$  は複素射影空間に埋め込める.

この主張には, 葉層構造の複雑さへの制限はありません. そして,  $\kappa$  として任意の自然数を指定できる大変一般的な主張です. しかしながら,  $\kappa$  を大きくするためには,  $n(\kappa)$  を大きく取らねばならず, 有限の  $n$  で  $\kappa = \infty$  とできるかは不明瞭でした.

今回の主結果は, この問いに反例を与えるものです.

**主定理** ([1]).  $\Sigma$  を閉リーマン面,  $\mathcal{D} \rightarrow \Sigma$  を単位円板  $\mathbb{D}$  をファイバーとする正則ファイバー束とし, 非正則かつ非反正則な調和切断を持つことを仮定する.  $\mathcal{D}$  は自然に  $\hat{\mathbb{C}}$  束  $\pi: X \rightarrow \Sigma$  に埋め込まれ,  $X$  内で  $\mathcal{D}$  の境界をとることにより, レビ平坦面  $M$  を得る.  $L$  を  $\Sigma$  上の正曲率を持つ直線束とせよ. このとき, 引き戻し CR 直線束  $\pi^*L|M$  は葉方向に正曲率を持つが, いかに自然数  $n$  を大きく取っても  $(\pi^*L|M)^{\otimes n}$  の  $C^\infty$  級 CR 切断の連比では, 複素射影空間への埋め込みは作れない.

多変数関数論の観点を経由すると, 「 $\mathcal{D}$  が非正則かつ非反正則な調和切断を持つ」という条件は, 「葉層構造が十分に複雑である」という状況を間接的に表現していると解釈できます. この葉層構造の複雑性と, CR 切断が  $C^\infty$  級であるという2条件を組み合わせると, 実は,  $\pi^*L|M$  の  $C^\infty$  級 CR 切断についての議論が,  $\pi^*L|X$  の正則切断についての議論に帰着してしまう, という部分が証明の核心です.

なお, 仮定の状況は, たとえば以下の構成で実現します:  $\Sigma$  の種数を2以上とし,  $\Sigma = \mathbb{D}/\Gamma$  と表す. 一方で,  $\Sigma$  と同じ種数だが同型ではない閉リーマン面  $\Sigma' = \mathbb{D}/\Gamma'$  をとる.  $\Sigma, \Sigma'$  は同相なので, 群同型  $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  がある.  $\mathcal{D} := \mathbb{D} \times \mathbb{D}/(z, \zeta) \sim (\gamma z, \rho(\gamma)\zeta)$  for  $\gamma \in \Gamma$  とせよ.

## 参考文献

- [1] M. Adachi, *On the ampleness of positive CR line bundles over Levi-flat manifolds*, submitted.
- [2] L.-V. Ahlfors, *Complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill Book Co., 1978. (和訳)『複素解析』, 笠原乾吉 (訳), 現代数学社, 1982.
- [3] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer-Verlag, 1981.
- [4] 今吉洋一, 谷口雅彦, 『タイヒミュラー空間論』, 新版, 日本評論社, 2004.
- [5] T. Inaba, *On the nonexistence of CR functions on Levi-flat CR manifolds*, Collect. Math. **43** (1992), no. 1, 83–87.
- [6] T. Ohsawa, *On projectively embeddable complex-foliated structures*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012) no.3, 735–747.
- [7] T. Ohsawa and N. Sibony, *Kähler identity on Levi flat manifolds and application to the embedding*, Nagoya Math J. **158** (2000), 87–93.

<sup>1</sup>あるなめらかなエルミート計量  $h$  が存在して, 各葉  $\Sigma_\alpha$  上に  $(L, h)$  を引き戻したとき, そのチャーン曲率形式が正.

# パラレルセッション 数理学



# コインの分配におけるフラクタルパターン

中央大学理工学部 山本 健

## 1 フラクタルについて

フラクタルとは、直感的に言えば“一部分が全体と相似となっている”という自己相似性をもった図形のことである。フラクタルの概念は自然の造形物の形状を記述するためにマンデルブロによって考案され [1]、現在では物理学・生物学・地形学・経済学などの様々な分野で活用されている [2]。

数学的には、フラクタルは縮小写像の不動点として定式化される [3]。例えば、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  の同一直線状にない 3 点  $p_1, p_2, p_3$  に対して縮小写像  $f_i(x) = (x + p_i)/2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) をとる。 $\mathbb{R}^d$  の空でないコンパクト集合の全体  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$  は適切な距離を入れることでコンパクト距離空間となり、 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$  上の写像  $F: K \mapsto f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K)$  は縮小写像となる。不動点定理により  $F$  の不動点  $\Delta \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$  がただ 1 つ存在し、任意のコンパクト集合  $K$  に対して  $\Delta = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(K)$  を満たす (この性質から、不動点はアトラクタとも呼ばれる)。この  $\Delta$  がシェルピンスキー・ガスケットと呼ばれるフラクタルである。縮小写像の組  $\{f_1, f_2, f_3\}$  を反復関数系と呼ぶ。

## 2 コインの分配とフラクタル

与えられたコインの集合を  $A, B, C$  の 3 人で分け合うという状況を考える。額面  $v_1$  のコインが  $c_1$  枚、額面  $v_2$  のコインが  $c_2$  枚、... であるとき、このコインの集合を

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \\ c_1 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

のように表記することにする ( $v_1, \dots, v_m$  は小さい順に並べておく)。コインの分配の仕方は 3 人が得た金額を組にして  $(n_A, n_B, n_C)$  と表せる。本稿で考えるのは、 $(n_A, n_B, n_C)$  を 3 次元空間の点の座標とみなしたとき、可能な全ての分配に対応する点の集合はどんな形になるか? という問題である。ただし、全てのコインは 3 人のうちの誰かに分配されることとし、またコインが全く分配されない人がいてもよいものとする。

まず、最も単純な場合として、2 進的なコイン

$$S_{2,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

の分配を考えてみる。正規直交基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  をとり、 $(n_A, n_B, n_C) = n_A e_1 + n_B e_2 + n_C e_3$  とする。

全ての分配に対応する点集合を  $\Delta_m (\subset \mathbb{R}^3)$  で表す (コインの種類  $m$  を明示している)。  $m = 1$  のとき、額面 1 のコイン 1 枚を  $A, B, C$  のいずれかに分配するだけなので、全ての分配の仕方は

$$\Delta_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

となり、3 点は正三角形をなす [図 1 (a)]。

$m = 2$  では、額面 2 のコインの行方を考慮に入れる。 $A$  がこのコインを受け取る場合、分配の仕方は  $\{(3, 0, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\} = \Delta_1 + 2e_1$  となる。 $B$  または  $C$  が額面 2 のコインを受け取る場合にも同様の関係が成立するので、解  $\Delta_2$  は

$$\Delta_2 = (\Delta_1 + 2e_1) \cup (\Delta_1 + 2e_2) \cup (\Delta_1 + 2e_3)$$

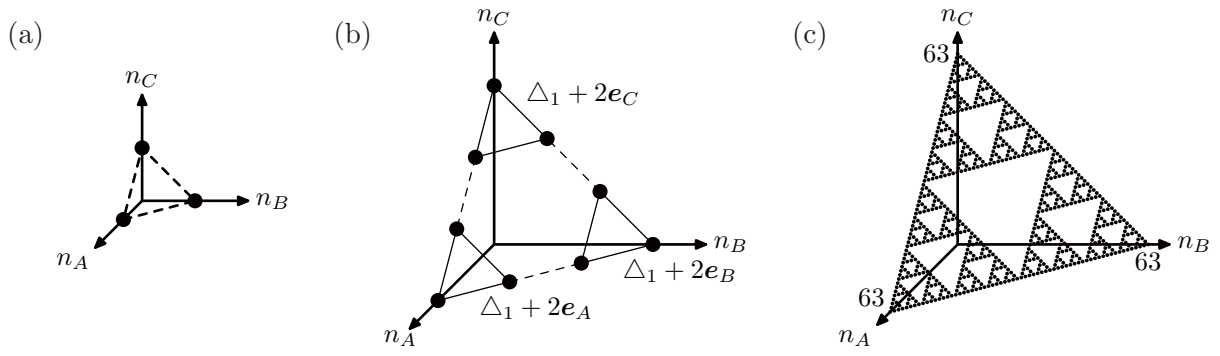


図 1 (a)  $\Delta_1$  は基底ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  に対応する 3 点からなる。(b)  $\Delta_2$  は  $\Delta_1$  を 3 頂点に配置した三角形になる。(c)  $\Delta_6$  ともなると、ほとんどフラクタルのようにみえる。

と表される。 $\Delta_2$  は正三角形の各頂点に  $\Delta_1$  が配置された形となる [図 1 (b)]。全く同様に、 $\Delta_m$  は帰納的に

$$\Delta_m = (\Delta_{m-1} + 2^{m-1}e_1) \cup (\Delta_{m-1} + 2^{m-1}e_2) \cup (\Delta_{m-1} + 2^{m-1}e_3) \quad (1)$$

で与えられる。すなわち、 $\Delta_m$  は  $\Delta_{m-1}$  が正三角形の頂点に配置された構造になっている。 $\Delta_0 = \{(0, 0, 0)\}$  であるので、この関係は  $m = 1$  でも成り立っている。

コインの種類  $m$  を増やしていくと、 $\Delta_m$  は“三角形の入れ子構造”に関する自己相似な図形に近づいていくことが予想される。実際、図 1 (c) に示した  $\Delta_6$  はシェルピンスキー・ガスケットとほとんど見分けがつかない。

$m \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta_m$  がシェルピンスキー・ガスケットに近づいていくことを反復関数系を用いて厳密に表現しよう。3 つの縮小写像  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{e}_i}{2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

で与える—反復関数系  $\{f_1, f_2, f_3\}$  から得られる  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$  上の縮小写像  $F$  のアトラクタ  $\Delta$  がシェルピンスキー・ガスケットであった。帰納的な関係式 (1) の両辺を  $2^{-m}$  倍すると、

$$\begin{aligned} 2^{-m}\Delta_m &= \left( \frac{2^{-(m-1)}\Delta_{m-1} + \mathbf{e}_1}{2} \right) \cup \left( \frac{2^{-(m-1)}\Delta_{m-1} + \mathbf{e}_2}{2} \right) \cup \left( \frac{2^{-(m-1)}\Delta_{m-1} + \mathbf{e}_3}{2} \right) \\ &= f_1(2^{-(m-1)}\Delta_{m-1}) \cup f_2(2^{-(m-1)}\Delta_{m-1}) \cup f_3(2^{-(m-1)}\Delta_{m-1}) \\ &= F(2^{-(m-1)}\Delta_{m-1}) \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、コインの種類を 1 つ増やすことが  $F$  を 1 回作用させることに対応している。したがって、 $2^{-m}\Delta_m = F^m(\Delta_0)$  である。 $\Delta_0$  は  $\mathbb{R}^3$  のコンパクト集合であるから、不動点定理より

$$\Delta = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(\Delta_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{-m}\Delta_m.$$

以上より、コイン分配の集合  $\Delta_m$  を  $2^{-m}$  倍したものがコインを増やす極限  $m \rightarrow \infty$  でシェルピンスキー・ガスケット  $\Delta$  に近づくことが示された。

### 3 いろいろな一般化

本節では、コインの種類および分配する人数を変えた場合の結果を手短に述べる。  
分配するコインを

$$S_{r,m} = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r^{m-1} \\ r-1 & r-1 & \cdots & r-1 \end{pmatrix}$$

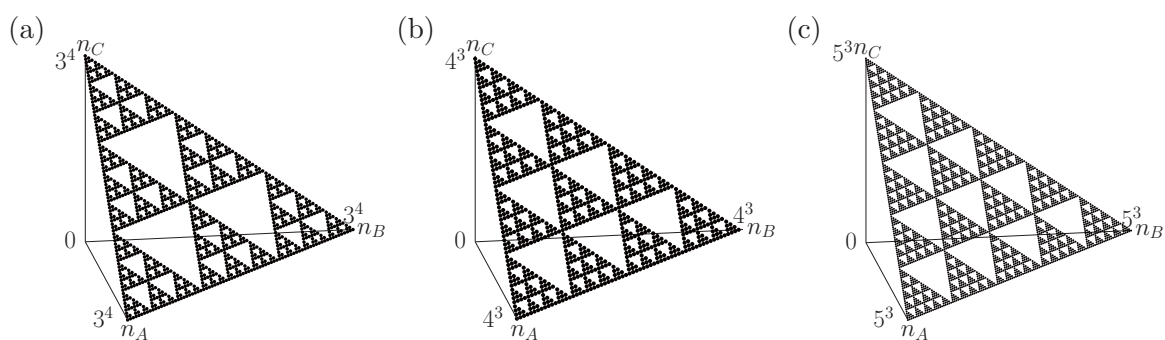


図 2 コインの額面の比が  $r$  である場合の結果: (a)  $r = 3$ , (b)  $r = 4$ , (c)  $r = 5$ .  $r$  の値が三角形の段の数となっている。

とした場合を考える。(つまり、コインの額面が  $r$  倍ずつ増大し、各額面のコインが  $(r-1)$  枚ずつある。)いくつかの  $r$  について、全ての分配を表す点の集合を示したのが図 2 である。 $r = 2$  の場合と同様に、コインの種類  $m$  を増やしていくと三角形が入れ子状になったフラクタル図形をなすことが示される。ただし、いまの場合は三角形の段の数が硬貨の額面比  $r$  と一致する。フラクタルの相似次元は

$$D = \frac{\ln \frac{r(r+1)}{2}}{\ln r}$$

となることが分かる。 $r \geq 2$  のとき  $r < r(r+1)/2 < r^2$  なので、 $1 < D < 2$  である。

また、コインを分配する人数を増やしていくと、分配を表す点の空間次元は高くなり、点の集合は高次元のシェルピンスキー・ガスケットとなる。例えば、コイン  $S_{2,m}$  を 4 人で分けるとき、シェルピンスキー・ガスケットの 3 次元版 (シェルピンスキー四面体) となる (図 3)。3 人でコインを分ける場合と同様に、高次元の場合も反復関数系を用いてフラクタルへの漸近を証明することができる。

## 4 コインの不完全性とカントール集合

前節のコインの集合  $S_{r,m}$  は次の意味で完全性を備えている:  $S_{r,m}$  のコインを組み合わせることで、1 から  $r^m - 1$  までの全ての金額をつくることができる。本節ではこの性質を満たさないコインの集合の例として、

$$S_{CS,m} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 18 & \cdots & 2 \cdot 3^{m-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。 $S_{SC,m}$  が完全でないことは、含まれるコインを使って  $1, 3, 4, 5, 7, \dots$  といった金額をつくることはできないことから明らかである。

これらのコインを  $A, B$  の 2 人で分けるとする。つまり、分配の仕方  $(n_A, n_B)$  は平面上の点として表される。 $m = 4$  の場合の分配のパターンを図 4 に示す。カントール集合 (線分の中央の  $1/3$  部分を取り

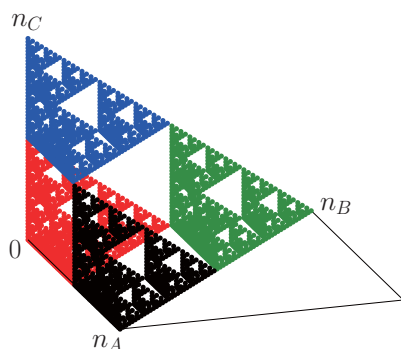


図 3 4 人のコイン分配ではシェルピンスキー四面体の構造が現れる (四面体が入れ子状に配置されている)。分配の状態  $(n_A, n_B, n_C, n_D)$  は 4 次的に分布するが、図では  $(n_A, n_B, n_C)$  を描いている。

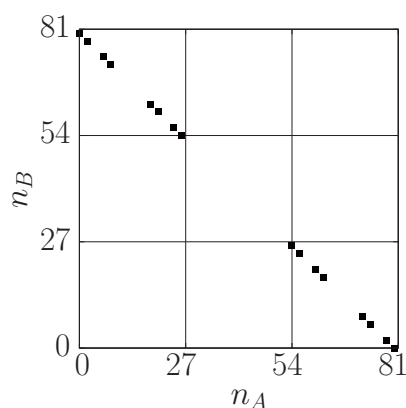


図 4  $S_{CS,m}$  のコインを 2 人で分けるとき、点  $(n_A, n_B)$  はカントール集合上に並ぶ。

除いていってできるフラクタル図形) のような構造となっている。  $m \rightarrow \infty$  のときカントール集合となることは、 §2 と同様に示すことができる。  $C_m$  を  $S_{CS,m}$  の全ての分配のなす点集合とすると、  $3^{-m}C_m$  が  $m \rightarrow \infty$  のとき反復関数系

$$g_1(x) = \frac{x + 2e_1}{3}, \quad g_2(x) = \frac{x + 2e_2}{3}$$

のアトラクタに収束し、それがカントール集合であることを示すことができる。

カントール集合の性質として、区間  $[0, 1]$  内の実数を 3 進小数表示したとき、各桁が 0 または 2 である数のなす集合がカントール集合となることが知られている [4]。一方、コイン  $S_{CS,m}$  の分配において、  $A$  の受け取る金額  $n_A$  は  $n_A = \sum_{k=0}^{m-1} 3^k \chi_k$  ( $\chi_k$  は 0 または 2) という形で表される。つまり、  $n_A$  を 3 進整数で表すと各桁が 0 または 2 となる ( $n_B$  についても同様である)。このことから  $S_{CS,m}$  の分配に対応する点の集合がカントール集合の有限近似となっていることが分かる。

## 参考文献

- [1] B. B. Mandelbrot, Fractal Geometry of Nature, WH Freeman, San Francisco, 1982.
- [2] 松下貢, フラクタルの物理 I, II, 裳華房, 2002 (I), 2004 (II).
- [3] M. F. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, New York, 1993.
- [4] H. -O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer, New York, 2004.

# Orbital instability of the regeneration cycle in minimal Couette turbulence

ミニマルクエット乱流に見られる再生成サイクルの軌道不安定性について

○犬伏正信\*, 竹広真一†, 山田道夫‡

京都大学 数理解析研究所

## 1 はじめに

乱流は時間空間的に乱れた運動でありながら普遍的な統計的性質を示す流体現象である。特にコルモゴロフの  $-5/3$  則やプラントルの対数則などは観測や室内実験、数値実験によって確認されているが、それらを体系的に説明する理論は確立されていない [1]。乱流を理解するアプローチの一つとして、力学系理論の概念や道具を用いて乱流現象を特徴付ける研究がなされている。ここでは、乱流をカオス力学系として捉え、カオスの代表的性質の一つである軌道不安定性（初期条件に対する鋭敏な依存性）を調べることで乱流を特徴付ける。特に、近年 Ginelli *et al.* (2007) によって開発された共変リャプノフ解析 [2] を用いてカオスの軌道不安定性を調べる。この解析法を用いることにより、リャプノフ指数を与える摂動ベクトルであるリャプノフベクトルを計算することが可能になった。リャプノフベクトルは系がもつ‘固有な’安定/不安定方向を指し示すものであり、乱流の物理的理解に役立つ可能性がある。

上述のプラントルの対数則は壁乱流（円管内や平行平板間における乱流）において普遍的に観測される統計則である。この統計則は工学的にも重要であり、多くの研究者によって調べられている。また ‘coherent structure’ と呼ばれる流れの構造は壁乱流を理解する重要な足がかりであると考えられている。壁乱流を生成する物理機構を理解するために、Hamilton *et al.* (1995) は壁乱流の典型例であるクエット乱流 (Fig.1 参照) が観測される最小の周期箱サイズ（ミニマルクエット乱流）を 3 次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式の直接数値計算を用いて調べた [3]。その結果彼らは、ミニマルクエット乱流において‘ストリーク’などの coherent structure の崩壊・形成を繰り返す再帰的な現象（regeneration cycle）を見出した。ストリークとは、流れ方向速度の低速/高速領域が筋状に並んだ構造をいう。さらに Hamilton *et al.* (1995) は regeneration cycle を説明するために ‘self-sustaining process (SSP)’ と呼ばれる物理機構を提案した。この物理機構は多くの研究者によって調べられているが、モデル化による説明や現象論的な説明が主であり、ナビエ-ストークス方程式に立脚した説明はほとんどなされていない。本研究ではナビエ-ストークス方程式の解の軌道不安定性を調べることで、ミニマルクエット乱流における regeneration cycle の物理機構を共変リャプノフ解析を用いて特徴付ける。

---

\* E-mail : minubush@kurims.kyoto-u.ac.jp

† E-mail : takepiro@gfd-dennou.org

‡ E-mail : yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

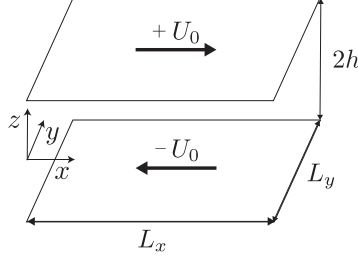


Fig.1 Illustration of the plane Couette flow system.  $x, y, z$ -directions are referred to as streamwise, spanwise, wall-normal directions, respectively.

## 2 問題設定及び数値計算法

クエット乱流は3次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

によって記述される平行平板間の乱流である。ここで  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ,  $p$  はそれぞれ  $(x, y, z) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \times [-1, 1]$  で定義された無次元化された速度場, 圧力場である。長さの無次元化には平行平板間距離の半分  $h$ , 速度には平行平板の速度差の半分  $U_0$ , 圧力には  $U_0^2 \rho$  を用いた ( $\rho$  は流体の密度)。境界条件は壁面上で non-slip, 水平方向 ( $x$ - $y$ ) は周期境界条件とした。また, 流れ ( $x$ -) 方向のフラックスおよびスパン ( $y$ -) 方向の平均圧力勾配はそれぞれゼロとした。流れ場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルに分解し, その時間発展を数値的に計算した。計算領域はミニマルサイズである  $L_x = 1.755\pi, L_y = 1.2\pi$  であり, レイノルズ数は  $Re = 400$  とした。ポテンシャルを水平方向にはフーリエ展開し, 壁垂直方向にはチェビシェフ展開した:  $\psi(x, y, z) = \sum_{k=-KM}^{KM} \sum_{l=-LM}^{LM} \sum_{m=0}^{MM} \hat{\psi}_{(k,l,m)} e^{i(\alpha k x + \beta l y)} T_m(z)$ 。ここで  $\alpha = 2\pi/L_x$ ,  $\beta = 2\pi/L_y$  は流れ方向とスパン方向の基本波数である。切断波数は  $KM = 8, LM = 8, MM = 32$  とした。力学系の次元  $N$  は  $N = 19074$  である。

力学系  $\mathbf{f}^t: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) を考え, 状態点  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$  の発展を  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}^t \mathbf{x}(0)$  と書く。軌道上の点  $\mathbf{x}(t)$  に加えられた無限小摂動ベクトル  $\mathbf{u}^{(j)}(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) の発展は線形化方程式  $\mathbf{u}^{(j)}(t) = D\mathbf{f}^t \mathbf{u}^{(j)}(0)$  に従う。ここで  $D\mathbf{f}^t$  は  $N \times N$  のヤコビ行列である。 $j$  番目のリャプノフ指数  $\lambda_j$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ) は

$$\lambda_j = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|D\mathbf{f}^T \mathbf{u}^{(j)}(0)\|, \quad (3)$$

と定義され,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  はリャプノフスペクトルと呼ばれる。また, 摂動ベクトル  $\mathbf{u}^{(j)}(t)$  は状態点  $\mathbf{x}(t)$  における ( $\lambda_j$  に対応する) リャプノフベクトルと呼ばれる。本研究の数値計算では長時間平均として平均時間  $T = 23000$  を用い, 得られた結果は平均時間によらないことを確認した。

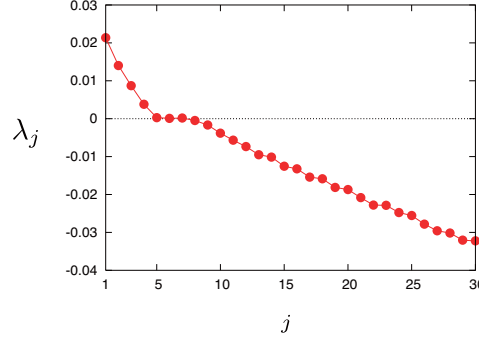


Fig.2 Lyapunov spectrum  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, 30$ ) of the minimal Couette turbulence. There are four positive Lyapunov exponents and three zero Lyapunov exponents. The maximum Lyapunov exponent is  $\lambda_1 = 0.021$ . The Lyapunov dimension is  $D_L = 14.8$  and the Kolmogorov-Sinai entropy is  $h_{KS} = 0.048$ .

### 3 Regeneration cycle とその軌道不安定性

前節の設定でミニマルクエット乱流の数値計算を行った結果、先行研究で報告されている regeneration cycle (ストリークの崩壊と再形成) が観察された。ストリークが崩壊する際に、流れ方向渦度  $\omega_x$  が壁の中間付近 ( $z \sim 0$ ) に強く局在する。このことを定量的に示すために Fig.3 の下段に渦度の  $z = 0$  における RMS:  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の典型的な時系列 ( $2730 \leq t \leq 3030$ ) を示した。ここで平均は水平方向平均である:  $\langle \cdot \rangle_H = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \cdot dx dy$ 。この時系列においてストリークの崩壊・再形成は 3 回見られ、先行研究で報告されている regeneration cycle の“周期” $T$  が  $T \sim 100$  であることと整合的である。このストリークの崩壊・再形成に対応して流れ方向渦の強い局在も 3 回見られ、Fig.3 の下段の時系列の  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の 3 つのピークに対応する。ここでは  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  が増大している期間と減衰している期間の 2 つに regeneration cycle を分け、それぞれ Phase (i) と Phase (ii) と呼ぶことにする。最初の 1 サイクルに関しては Phase (i) は  $2730 \lesssim t \lesssim 2760$ 、Phase (ii) は  $2760 \lesssim t \lesssim 2830$  である。

次にミニマルクエット乱流に対して共変リャプノフ解析を行った結果を示す。まず得られたリャプノフスペクトルを Fig.2 に示す。ミニマルクエット乱流は 4 つの正のリャプノフ指数、3 つのゼロリャプノフ指数をもつことがわかった。3 つのゼロリャプノフ指数はそれぞれ水平方向の空間並進対称性と時間方向の並進対称性を反映していると考えられる。最大リャプノフ指数は  $\lambda_1 = 0.021$  であり、乱流の統計量を良く再現する不安定周期軌道のフロケ乗数  $\mu = 0.019$  (Kawahara (2009) [4]) に近い。また、リャプノフスペクトルによって定義されるアトラクタ次元 (リャプノフ次元) は  $D_L = 14.8$  であり、コルモゴロフ-シナイエントロピーは  $h_{KS} = 0.048$  である。

Regeneration cycle を特徴付けるため局所リャプノフ指数を Fig.3 の上段に示した。局所リャプノフ指数の定義は  $\tilde{\lambda}_j(\mathbf{x}_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \|D\mathbf{f}^\tau \mathbf{u}^{(j)}(0)\| / \|\mathbf{u}^{(j)}(0)\|$  である。 $\tau$  は局所的な平均時間であり、ここでは  $\tau = 1$  とした。Fig.3 の上段に示したのは、正のリャプノフ指数に対応する局所リャプノフ指数  $\tilde{\lambda}_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) の  $2730 \leq t \leq 3030$  における時系列である (実線;  $j = 1$ , 点線;  $j = 2$ , 一点鎖線;  $j = 3$ , 二点鎖線;  $j = 4$ )。Fig.3 の下段に示した流れ方向渦度の RMS  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の時系列に対応して、Phase (i) では局所リャプノフ指数

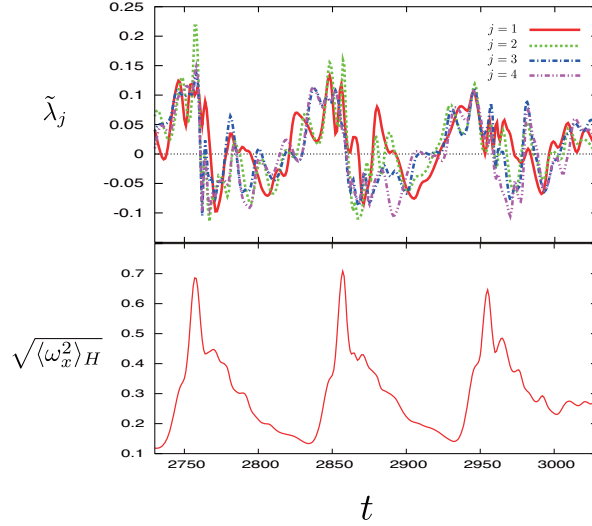


Fig.3 [Upper panel] Time series of the local Lyapunov exponents  $\tilde{\lambda}_j$  for  $j = 1$  (red solid line), 2 (green dotted line), 3 (blue dashed dotted line) and 4 (pink dashed double-dotted line). [Lower panel] The ‘horizontal’ RMS of streamwise vorticity  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  at the mid-plane ( $z = 0$ ).

はおおむね正 ( $\tilde{\lambda}_j > 0$ ), Phase (ii) では局所リャプノフ指数はおおむねゼロか負 ( $\tilde{\lambda}_j \lesssim 0$ ) であることがわかる。さらに Phase (i) から Phase (ii) へ切り替わるとき、局所リャプノフ指数は急激に正から負へ減少することがわかる。つまり、流れが不安定であるのは乱流中の流れ方向渦が成長している期間のみで、流れ方向渦が成長し終わり減衰する期間は流れに不安定性はないことが明らかになった。

本稿では、モデル化や現象論的な議論で従来説明されてきた regeneration cycle を、ナビエ-ストークス方程式の軌道不安定性 (局所リャプノフ指数) で特徴付けた。講演では局所リャプノフ指数に対応するリャプノフベクトルの特徴に触れたのち、Phase (ii) におけるエネルギー収支解析を行い、regeneration cycle の定性的解釈を議論する。

## 参考文献

- [1] Uriel Frisch, “Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov”, Cambridge University Press, (1995).
- [2] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi, and A. Politi, “Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors”, Phys. Rev. Lett. 99, 130601(4), (2007).
- [3] J. M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe, “Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures”, J. Fluid Mech., vol. 287, pp. 317–348 (1995).
- [4] G. Kawahara, “Theoretical interpretation of coherent structures in near-wall turbulence”, Fluid Dyn. Res. 41, 064001 (2009).

# Self-adjointness of the Generalized Spin Boson Hamiltonians

寺面 功哲

## 1 始めに

ここでは、非相対論的な粒子が場と相互作用する系の Hamiltonian を Hilbert 空間上の作用素として表現したときに自己共役作用素となっているかについて解説する．量子論の公理の一つとして、物理量はある Hilbert 空間上の自己共役作用素として表わされるというものがある．(この辺の量子力学、場の量子論の公理について詳しくは [vN, EA, BLOT] 等を参照して戴きたい．) Hamiltonian は物理系を記述する重要な物理量であるので、適当な空間上で表現された Hamiltonian が自己共役作用素であることを示す事が問題となる．さて、ここで自己共役性の定義を確認しておこう．(有界とは限らない) 線形作用素  $T$  が自己共役であるとは定義域も含めて  $T$  とその共役作用素  $T^*$  が一致することである．また、線形作用素  $T$  が対称作用素であるとは、任意の  $\phi \in D(T)$  に対して  $T^*\phi = T\phi$  となることとする．有限次元の場合線形作用素は定義域が全体の有界作用素に拡張できるので、定義域は常に全体であるとする、自己共役性、対称性は行列のヘルミート性と等しい．また、自己共役作用素は定義から明らかに対称作用素であるが逆は成立しない．無限次元では全ての作用素が行列のように定義域が全体の線形作用素とはできない．その為多くの場合、作用素の自己共役性を示すことは難しい．

非相対論的な粒子と場が相互作用するモデルの話に移ろう．このようなモデルには Nelson, Pauli-Fierz, GSB, Dirac-Maxwell 型といった重要なモデルがいくつかある．今回は、[AH] により導入された一般化されたスピノソモデル (GSB モデル) の自己共役性について考える (他のモデルの詳細について知りたい方は [Hir] 及びそこにあがっている文献等を参照のこと) ．

## 2 準備

まず、いくつかの用語を定義しておく．ここではあまり詳細に立ち入らず定義を確認するだけにとどめておく．詳しくは [Ara00a, Ara00b, RS] 等を見て戴きたい．

定義 2.1. 複素 Hilbert 空間  $\mathcal{K}$  に対して、ボソソフォック空間  $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  を次により定める．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_b(\mathcal{K}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{K} \\ &= \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \mid \psi^{(n)} \in \otimes_s^n \mathcal{K}, \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}\end{aligned}$$

( $\otimes_s$  は対称テンソル積である)． $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  上の閉作用素として次の性質を持つ生成作用素  $a(f)^*$  存

在する.

$$\begin{aligned}(a(f)^*\psi)^{(0)} &= 0, \\ (a(f)^*\psi)^{(n)} &= \sqrt{n}S_n(f \otimes \psi^{(n-1)}), \quad (n \geq 1).\end{aligned}$$

また, 消滅作用素  $a(f)$  を  $a(f) := (a(f)^*)^*$  により定める. この時, Segal の場の作用素と呼ばれる自己共役作用素  $\phi(f)$  が

$$\phi(f) := \frac{a(f) + a(f)^*}{\sqrt{2}}$$

により定まる. ここで,  $\overline{A}$  は作用素  $A$  の閉包を表す.

注 2.2. 生成・消滅作用素は次の正準交換関係を満たす.

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f, g \rangle, \quad [a(f), a(g)] = 0, \quad [a(f)^*, a(g)^*] = 0$$

又, Segal の場の作用素は次の Weyl 関係を満たす.

$$e^{i\phi(f)}e^{i\phi(g)} = e^{i\operatorname{Im}\langle f, g \rangle}e^{i\phi(g)}e^{i\phi(f)}, \quad f, g \in \mathcal{K},$$

定義 2.3.  $\mathcal{K}$  上の作用素  $S$  に対して, フォック空間  $\mathcal{F}_b$  上の第 2 量子化作用素  $d\Gamma(S)$  を以下により定める.

$$d\Gamma(S) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^{(n)},$$

但し,  $S^{(n)}$  は

$$\begin{aligned}S^{(0)} &:= 0, \\ S^{(n)} &:= \overline{\sum_{j=1}^n I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underset{(j\text{th})}{S} \otimes I \otimes \cdots \otimes I} \Big|_{\bigotimes_{\text{alg}}^n D(T)}, \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

である.

注 2.4.  $S$  が自己共役または非負の作用素である時, 第 2 量子化作用素  $d\Gamma(S)$  も自己共役または非負の作用素となる.

### 3 GSB モデルと自己共役性

量子場と相互作用する量子系を表現する Hilbert 空間として次のものを考える.

$$\mathcal{F} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K}). \quad (1)$$

$A$  を  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素,  $B_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素で  $\bigcap_{j=1}^n D(B_j)$  が  $\mathcal{H}$  で稠密,  $W$  を  $\mathcal{K}$  上の単射, 非負な自己共役作用素とする. 又  $g_j \in \mathcal{K}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  とする. この時,  $\mathcal{F}$  上の作用素として GSB モデルのハミルトニアン  $H(\lambda)$  を次により定める.

$$H(\lambda) := A \otimes I + I \otimes d\Gamma(W) + \lambda \sum_{j=1}^n B_j \otimes \phi(g_j). \quad (2)$$

GSB モデルのハミルトニアンが上により定義できた．之の作用素が対称作用素である事は直に分るが，自己共役作用素であるかは自明ではない． $H(\lambda)$  が自己共役になるための条件は（著者の知る限り）2 つある．1 つ目は  $\lambda$  が十分小さければ  $H(\lambda)$  は自己共役になるというものである．これは  $A + d\Gamma(W)$  が自己共役作用素であるので  $\sum B_j \otimes \phi(g_j)$  の部分を摂動しているとして Kato-Rellich の定理を用いることにより分る．

もう一つも大雑把に言うと， $A = A_0 + A_1$  と分解して  $\{A_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$  が互いに強可換な自己共役作用素とする．作用素

$$A(\lambda) := A - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j,l=1}^J \left\langle W^{-1/2} g_j, W^{-1/2} g_l \right\rangle B_j B_l$$

に対して次の集合

$$\mathfrak{D} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid A(\lambda) \text{ は自己共役且つ下に有界.} \right\}$$

が空集合でなければ，任意の  $\lambda \in \mathfrak{D}$  に対して  $H(\lambda)$  は自己共役作用素となる．これはうまいユニタリ作用素を用いて  $H(\lambda)$  を変形することにより  $A(\lambda) + d\Gamma(W) + \text{“その他”}$  という形になるのでその他の部分をうまく評価して Kato-Rellich を用いることにより示せる．

こちらはかなり広い範囲の  $\lambda$  に対して  $H(\lambda)$  が自己共役になることを示しているが仮定が大変強い．特に， $\mathfrak{D}$  の条件にある  $A(\lambda)$  の自己共役性により  $\mathfrak{D}$  がどのような分布を持つかが一般に分らない．そこで，次の様な改良に至った．

**定理 3.1.** 次の (i)-(iv) を満たすとする．

- (i)  $g_j \in D(W^{-1/2}) \cap D(W^2)$
- (ii)  $A = A_0 + A_1$  と分解できる．ここで， $A_0$  は非負の自己共役作用素で， $A_1$  は有界な自己共役作用素であるとする．
- (iii)  $\{B_j\}$  は  $A_0^{1/2}$ -有界な対称作用素の族．
- (iv)  $A_0$  の芯  $D_1 \subset \bigcap_j (D(A_0 B_j) \cap D(A_0^{1/2} B_j A_0^{1/2}) \cap D(A_0^2))$  で  $D_1$  上での交換子  $[A_0, B_j]$  の閉包が有界となるものが存在する．

この時，任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して  $H(\lambda)$  は本質的に自己共役である．更に，次の条件

- (v)  $H(\lambda)$  は下に有界

を満たすとする．この時，任意の  $\eta < |\lambda|$  に対して  $H(\eta)$  は自己共役となる．

## 参考文献

- [AH] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2. 455–503.
- [AK] A. Arai and H. Kawano. Enhanced binding in a general class of quantum field models. Rev. Math. Phys. **15** (2003), no. 4. 387–423.
- [Ara00a] 新井朝雄，フォック空間と量子場 上，共立出版，2000.

- [Ara00b] 新井朝雄, フォック空間と量子場 下, 共立出版, 2000.
- [BLOT] N. N. Bogolubov, A. A. Lognov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990.
- [EA] 江沢洋・新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 朝倉書店, 1988.
- [Hir] F. Hiroshima. Perturbation problems of embedded eigenvalues in field theories. *Sūgaku* **57** (2005), no. 1. 70–92.
- [RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1975.
- [vN] J. von Neumann, 量子力学の数学的基礎, みすず書房 (井上 健・広重 徹・恒藤敏彦 共訳), 1957.

# シグナル伝達に關与するたんぱく質 PDZ の 分子動力学に対する時系列解析

岸田 直子

奈良女子大学大学院

人間文化研究科 物理科学専攻

## abstract

たんぱく質の機能は一般的にその構造と深い関係があると言われている。しかしわれわれはたんぱく質のダイナミクスと機能の関係を記述する解析方法を見つけることを目指している。今回の発表ではシグナル伝達に關与していると考えられている PDZ というたんぱく質の動きをウェーブレット変換と正準相関解析を用いて、分子内でシグナルが伝わる過程について行った解析結果を解説する。

## 1 target

**1.1 protein** 人間のたんぱく質は  $\alpha$  アミノ酸によって構成されている。 $\alpha$  アミノ酸とは同じ炭素に  $\text{NH}_2$  基と  $\text{COOH}$  基がついたアミノ酸でこの炭素のことを  $\alpha$  炭素という。アミノ酸は  $\alpha$  炭素に結合している原子団によって 20 種類に分けられ、そのアミノ酸の一次元配列 (一次構造) は重要である。この一次元配列が部分的に特殊な配列をとると螺旋状の  $\alpha$  ヘリックスや、蛇腹状の  $\beta$  シートといった二次構造を形成する。この二次構造はたんぱく質の運動に深い関係があると考えられている。

**1.2 PDZ domain** 本研究で用いたたんぱく質は PDZ ドメインというたんぱく質である。ドメインとは、いくつかのたんぱく質がペプチド結合して大きなたんぱく質を作るとき、その 4 次構造を構成しているたんぱく質を指す。PDZ は哺乳類の場合、脳内の神経細胞の接続点であるシナプスに多く存在する。とりわけシナプス後細胞というシグナルを受け取る細胞に多く存在し、その中で多くのたんぱく質と相互作用していることが分かっている。そのため PDZ はシグナル伝達に關与すると考えられている。その中でもシナプス後細胞の中心部において、骨格を成すように集結しているたんぱく質に PSD-95 がある。このたんぱく質は 3 つの PDZ と他の 2 種類のたんぱく質から構成されている。今回の研究ではこの PSD-95 を構成している PDZ (PDB コード: 1BE9) を用いている。

**1.3 data** 今回の解析で用いたデータは Amber という計算ソフトで得られた 3 次元座標データである。水素原子を除く 899 個の原子の 3 次元空間座標が 12000 ステップ得られる。そのうち  $\alpha$  炭素のみを用いて解析を行った。

## 2 analysis

**2.1 wavelet transform** 様々な周波数により構成された信号の周波数ごとの強さを求める処理をスペクトル解析という。フーリエ変換やウェーブレット変換がそれにあたる。フーリエ変換とウェーブレット変換の大きな違いは、ウェーブレット変換は時間によって変化するスペクトルを求めることができるという点である。以下でそのウェーブレット変換の原理を説明する。

時間に依存する周波数を求めるには、信号の一部を窓関数により切り取り、その窓関数をずらしながら少しずつ解析する。その窓関数はマザーウェーブレットを伸縮、拡大したものを用いる。マザーウェーブレットは次式ようになる。

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{t^2}{\sigma^2} + it\right)}$$

$\sigma$ :標準偏差

これを時間方向に拡大・縮小・シフトした窓関数は次のようになる。

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

パラメータ  $a$  はマザーウェーブレットの倍率を、パラメータ  $b$  はシフト量に相当する。 $a$  が小さいとき、つまり窓関数が高周波の場合は時間軸の詳細な情報を検出できる。この関数を用いて信号  $f(t)$  をウェーブレット変換する式を次のように定義する。

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt$$

$\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) : \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  の複素共役

**2.2 canonical correlation analysis** 複数の変数群があるとき、各群で合成指標を作り、その相関が高くなるようにして群間の相関構造を探る手法を正準相関解析という。例としてデータ次元  $n$  のデータ群  $u'_i (i = 1, 2, \dots, n)$  とデータ次元  $m$  のデータ群  $v'_j (j = 1, 2, \dots, m)$  の2群の相関を考える。各変数の平均を0、分散が1になるように規格化しておく。つまり、

$$u_i = \frac{u'_i - \bar{u}_i}{\sqrt{s_{u_i}^2}}, \quad v_j = \frac{v'_j - \bar{v}_j}{\sqrt{s_{v_j}^2}}$$

$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$

$\bar{u}_i: u_i$  のサンプル平均     $\bar{v}_j: v_j$  のサンプル平均

次に新しい座標系でこれらのデータを表すことを考える。

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = (a_1 a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$z = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_m v_m = (b_1 b_2 \dots b_m) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

このような合成指標を第一正準相関変数という。この  $y$  と  $z$  の相関 (第一相関係数) が最大になるような  $a, b$  を求めることが目的である。そのためにまず合成指標の分散を求める。前式により正

準変数の平均も 0 であることを考慮する。 $u'_i$  のサンプル数を  $N$ 、 $v'_j$  のサンプル数を  $M$  として

$$\begin{aligned}
s_y^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{N-1} (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n)^2 \\
&= a_1 (a_1 s_{11} + a_2 s_{12} + \dots + a_n s_{1n}) + \\
&\quad a_2 (a_1 s_{21} + a_2 s_{22} + \dots + a_n s_{2n}) + \dots + \\
&\quad a_n (a_1 s_{n1} + a_1 s_{n2} + \dots + a_n s_{nn}) \\
&= (a_1 \quad a_2 \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} + \dots + a_n s_{1n} \\ a_1 s_{21} + a_2 s_{22} + \dots + a_n s_{2n} \\ \vdots \\ a_1 s_{n1} + a_1 s_{n2} + \dots + a_n s_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (a_1 \quad a_2 \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} 1 & \dots & r_{u_1 u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{u_n u_1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{R}_u \mathbf{a}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
s_z^2 &= (b_1 b_2 \dots b_m) \begin{pmatrix} 1 & \dots & r_{v_1 v_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{v_m v_1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}^T \mathbf{R}_v \mathbf{b} \\
s_{yz} &= (a_1 a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} r_{u_1 v_1} & \dots & r_{u_1 v_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{u_n v_1} & \dots & r_{u_n v_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{R}_{uv} \mathbf{b}
\end{aligned}$$

ここで

$$\mathbf{R}_u \equiv \begin{pmatrix} 1 & \dots & r_{u_1 u_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{u_i u_1} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_v \equiv \begin{pmatrix} 1 & \dots & r_{v_1 v_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{v_i v_1} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_{uv} \equiv \begin{pmatrix} r_{u_1 v_1} & \dots & r_{u_1 v_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{u_i v_1} & \dots & r_{u_i v_i} \end{pmatrix}$$

と定義しておく。そして

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_u \mathbf{a} = 1, \mathbf{b}^T \mathbf{R}_v \mathbf{b} = 1$$

という制約条件のもと

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_{uv} \mathbf{b}$$

を最大にするような  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  をラグランジュの未定乗数法により求める問題に帰着する。ところで、分散や共分散は相関係数であるから、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_u & \mathbf{R}_{uv} \\ \mathbf{R}_{uv}^T & \mathbf{R}_v \end{pmatrix}$$

を計算するところにより  $u, v$  の相関を知ることができる。ただし、自分との相関  $\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_v$  は 1 とする。

#### 参考文献

- [1] Protein Data Bank(<http://www.rcsb.org/pdb/home.do>)
- [2] N.Ota and D.A.Agard(2005). Intramolecular signaling pathways revealed by modeling anisotropic thermal diffusion. *J.Mol.Bio.***351**,345
- [3] A.Dyle,A.Lee,J.Lewis,M.Sheng and R.MacKinnon(1996). Crystal structure of a complexed and peptide-free membrane protein-binding domain: molecular basis of peptide recognition by PDZ.*Cell*, **85**, 1067
- [4] E.Kim and M.Sheng (2004). PDZ domain proteins of synapse. *Nature review neuroscience*, **5**, 771
- [5] F.Jelen,A.Oleksy,K.Smientana and J.Otlewski(2003). PDZ domain - common players in the cell signaling. *Acta biochemica polonica*,**50**,985
- [6] Lockless and Ranganathan (1999). Evolutionarily conserved pathways of energetic connectivity in protein families. *Science*,**286**,295
- [7] 短時間フーリエ変換と連続ウェーブレット変換  
(<http://laputa.cs.shinshu-u.ac.jp/~yizawa/InfSys1/basic/chap11/index.htm>)
- [8] 多次元データ解析 中村永友 著
- [9] たんぱく質の立体構造入門 藤博幸 著
- [10] 分子動力学  
([http://www.photon.t.u-tokyo.ac.jp/~maruyama/papers/05/NTS\\_MD.pdf](http://www.photon.t.u-tokyo.ac.jp/~maruyama/papers/05/NTS_MD.pdf))
- [11] 圧力の計算  
([http://polymer.apphy.u-fukui.ac.jp/~koishi/lecture/md\\_program8/index.php](http://polymer.apphy.u-fukui.ac.jp/~koishi/lecture/md_program8/index.php))
- [12] コンピュータ・シミュレーションの基礎  
(<http://www.sccj.net/CSSJ/jcs/vn1/a1/document.pdf>)

# 栃木県那須地域の気象データを用いた 統計モデルとデータ解析

宮加谷祥子\*(自由学園最高学部), 矢野真知子\*(自由学園最高学部),  
島津秀康†(School of Biology, University of St Andrews), 遠藤敏喜†(自由学園最高学部)

## はじめに

実データから数学的モデルを構築して探索的に解析するアプローチは、統計学において古来から活発に行われ、実際に活用されている手法である。一方、現実的な問題に対して、適切な近似モデルを構築し、その結果について適切に解釈することは、必ずしも容易なことではない。何故ならば、現象に関するデータは一般的には完全ではなく、また対象に関する私たちの知識も完全ではないからである。もちろん、データあるいは知見が蓄積されるほどその不完全さは減少する。そして、近似の精度を高めるという意味では、モデルへのデータのあてはめ、その評価のプロセスの繰り返しが重要である。

本研究では、自由学園那須農場の農場員が57年間に亘って観測し蓄積してきた気象データを用いて、上記のことを踏まえつつ、統計モデルの構築とデータ解析を行う。本集会では、口頭発表とポスター発表の2件の発表を行うが、この口頭発表では(1)風速と(2)搾乳量・乳脂率についての事例を紹介する。

## 1 無風増加傾向を組み込んだ 風速データのモデリング

風は気圧の高い場所から低い場所へと吹き込む。季節に応じて気圧は変化するため、風も季節ごとで異なる傾向となる。そこで那須地域における年間を通しての風速の季節変動を記述する。ところが樹木による風の妨害などといった要因により、風速0 m/sなるデータが年の経過と共に著しく増加傾向にあるため、風速のみを表すモデルでは風速のばらつきを適切に捉えきれない。そこで風速のモデルを0の出現確率で混合する混合分布モデルを構築した[2]。また、先行研究では風速の分布はワイブル分布を仮定しているものが多いが[1]、本研究ではワイブル分布より1つパラメータの少ない指数分布を

仮定した。指数分布はワイブル分布と同じガンマ分布の族である。

### 1.1 データとモデル

調査対象である風速データは、農場員が風杯型風速計を用いて毎朝9時の時点での風速を観測したものである。1949年から1998年まで、のべ18,262日分のデータを解析に使用した。扱う風速データに見られる特徴として、図1.1のように1984年頃から風速0 m/sの無風の観測日数が顕著に増加する傾向がある。これは必ずしも那須地域において無風状態が増えているというわけではなく、成長した樹木が風を防いでいることや、風速計の劣化による風速観測への障害など様々な要因が重なったことで起こった現象ではないかと推測している。

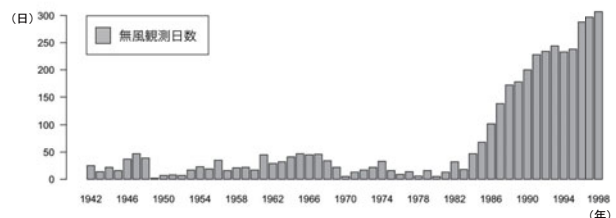


図 1.1：無風観測日数の増加

時点  $t$  での風速  $y_t$  をゼロと非ゼロの場合に分け、非ゼロの発生確率  $P_t$  を風速データに混合した形で記述する。確率密度関数を次式で定める。

$$f(y_t; P_t, \lambda_t) = \begin{cases} P_t & (y_t = 0) \\ (1 - P_t)\lambda_t e^{-\lambda_t y_t} & (y_t > 0) \end{cases}$$

ただし、 $P_t$ 、 $\lambda_t$  はパラメータである。すなわち、 $y_t > 0$  の時の風速は指数分布に従うと仮定する。この混合分布モデルの期待値  $E[Y_t]$  と分

\*登壇者

†E-mail: hs50@st-andrews.ac.uk または end@prf.jiyu.ac.jp

散  $\text{Var}[Y_t]$  は以下の通りである．

$$E[Y_t] = (1 - P_t) \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[Y_t] = \frac{1 - P_t^2}{\lambda^2}$$

通常，指数分布の期待値は  $1/\lambda$ ，分散は  $1/\lambda^2$  となるが，本モデルでは  $0 \text{ m/s}$  データと風速の混合モデルであるため，風速  $0 \text{ m/s}$  の発生確率  $P_t$  で割り引かれたものとなる．

## 1.2 考察

モデル当てはめの結果は図 1.2 のとおりである．上図は風速  $0 \text{ m/s}$  データの発生確率  $P_t$  であり，図 1.1 で見られるような 1980 年代後半からのゼロデータの増加を予測値でも捉えることができている．下図の風速期待値には季節変動を示す細かい波形が見られる．風速が年の経過と共に低下傾向となっているのはゼロデータの増加により，サンプルの風速データ数が減少している影響である．

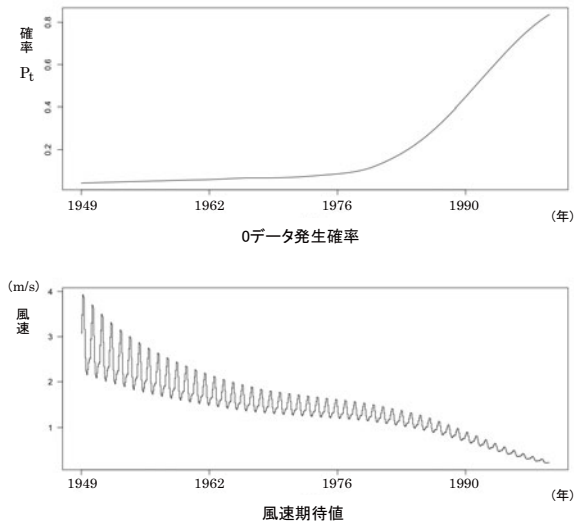


図 1.2：モデルの当てはめ結果

また，ゼロデータの傾向を除いた風速の期待値を月毎にまとめた箱ひげ図を図 1.3 に示す．3 月にピークを迎え，8 月最も風速が低くなるという季節変動が明らかとなった．風速は夏季に低く，冬季に高くなる傾向にあると一般的に言われているが，那須地域においては春季に最も高くなるという結果となった．

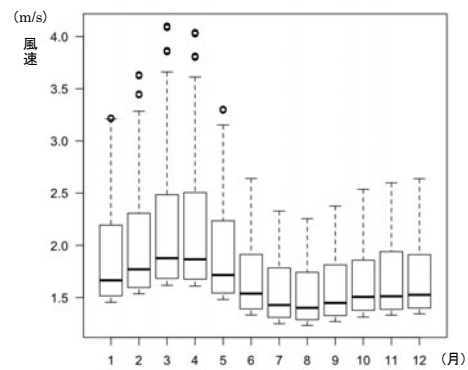


図 1.3：期待値の年間変動

同農場では風速と共に風向の観測も行われており，16 方位のデータで記録が残されている．風向データと解析結果を照合すると，北よりの風は比較的風速が高く，南よりの風は風速が低めの傾向となった．風速のピークである春季は比較的強い北よりの風が度々吹くことから風速が高くなり，南の風が卓越する夏季は風速が低くなっていたことが考察できる [6]．

## 2 牛個体別にみる

### 気温が乳量・乳脂量に与える影響

一般的に牛は暑さに弱いとされており，搾乳量と乳成分率は夏低冬高となるといわれている．これまで国内外で牛舎環境や気象条件が与える乳量への影響について研究がなされてきたが，それらによると，乳量・乳成分率には気象条件よりも，年齢や分娩後日数などの牛個体の条件が大きく影響していること，遺伝により牛個体間に生産能力の差があることが指摘されている [3, 4]．また，乳生産の体系を理解するため，将来計画や一定間隔で収集される検定データの補間のために，分娩後日数における乳量・乳成分率の増減を表す泌乳曲線モデルが構築されてきた [5, 7]．しかし，このモデルに関する議論は 1920 年代から現在まで 90 年近くも続いており，モデルを分娩後日数のみの関数として定義することへの限界が伺われる．

今回私たちは，気温，複数の牛個体条件の影響，そして個体差を考慮した非線形モデルを構築し，乳量・乳脂量への影響を検討した．牛個体の条件に対する乳量・乳脂量の非線形な反応を確認し，気温が乳生産に与える影響の個体差とその特徴を明らかにした．

## 2.1 データとモデル

気温のデータは農場員によって観測された最高気温のデータのうち1989年から1998年の10年間分を使用した。牛個体の条件のデータは同期間に（社）家畜改良事業団により検定・発行された牛群検定成績表から、乳量・乳脂率・産次・分娩後日数・分娩月・濃厚飼料給与量の6項目を用いた。検定は月に1度行われ、計120回の検定結果には牛151頭（述べ4,574頭）のデータが含まれていた。

モデルは、乳量と乳脂量を目的変数とし、最高気温と牛個体の条件を説明変数とする非線形回帰モデルを構築した。得られたモデルは次の通りである。 $y_{i,t}$ を個体 $i$ の $t$ 時点での乳量、 $z_{i,t}$ を個体 $i$ の $t$ 時点での乳肪量、 $x_{j,t}$ を $t$ 時点での $j$ 番目の牛個体の条件、 $w_t$ を $t$ 時点での最高気温とすると、

$$\log(y_{i,t}) = \exp \left\{ \sum_j \alpha_j s(x_{j,t}) + (\alpha_i + a_i w_t) + \varepsilon_{i,t} \right\},$$

$$\log(z_{i,t}) = \exp \left\{ \sum_j \beta_j s(x_{j,t}) + (\beta_i + b_i w_t) + \xi_{i,t} \right\}.$$

各 $\alpha_i, a_i, \beta_i, b_i$ は個体ごとの違いを調整する。乳脂率は $z'_{i,t} = z_{i,t}/y_{i,t}$ であるので

$$\log(z'_{i,t}) = \exp \left\{ \sum_j \gamma_j s(x_{j,t}) + \gamma_i + r_i w_t + \eta_{i,t} \right\}$$

を得る。ただし $s$ は平滑化関数、 $\varepsilon_{i,t}, \xi_{i,t}, \eta_{i,t}$ は残差で、 $\gamma_j = \beta_j - \alpha_j, \gamma_i = \beta_i - \alpha_i, r_i = b_i - a_i$ である。

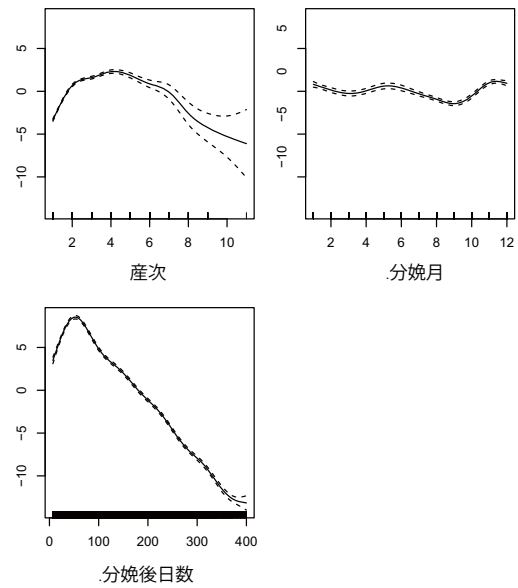


図 2.1：乳量の反応曲線

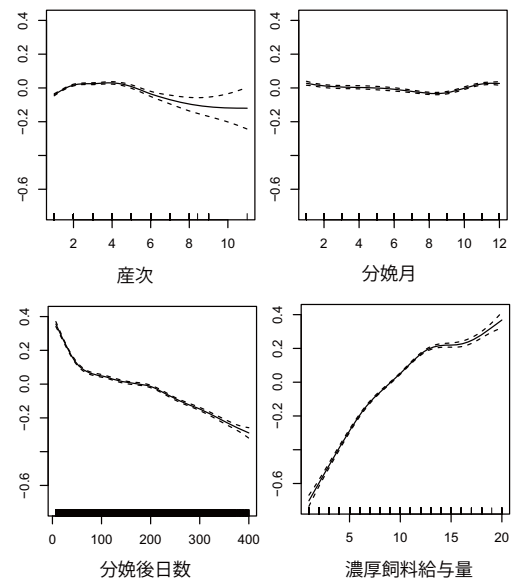


図 2.2：乳脂量の反応曲線

## 2.2 考察

各牛個体の条件に対する乳量・乳脂量の反応曲線を図 2.1 と図 2.2 に示す。各変数に対する乳量・乳脂量の変化がみてとれる。なお、濃厚飼料給与量は乳量に応じて決められているため、乳量の説明変数に含めていない。

乳量・乳脂量のモデルの気温の影響を表す項の係数とモデルの切片である $a_i$ と $\alpha_i$ 、 $b_i$ と $\beta_i$ の散布図を図 2.3 に示す。この図からは、乳量・乳脂量の多い個体ほど、気温の上昇による乳量・乳脂量の減少量が大きいことが分かる。

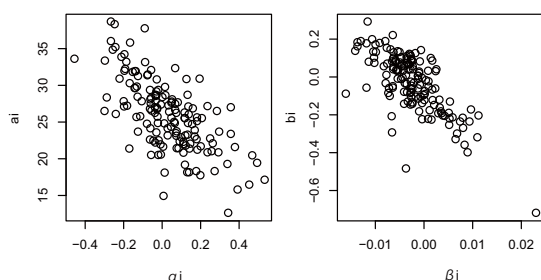


図 2.3 :  $a_i$  と  $\alpha_i$ ,  $b_i$  と  $\beta_i$

また両モデルの気温の影響を表す項の係数である  $b_i$  と  $a_i$  の散布図を図 2.4 に示す．この図からは，乳量と乳脂量の増減の関係をみることができる．第 1 象限には気温の上昇により乳量・乳脂量共に増加する個体，第 2 象限には乳量は増加し乳脂量が減少する個体，第 3 象限には乳量・乳脂量共に減少する個体，第 4 象限には乳量は減少し乳脂量が増加する個体がプロットされている．各象限にプロットされている牛個体の数は，順に 37 頭，2 頭，69 頭，43 頭であった．また，図中の破線 ( $a_i = b_i$ ) よりも左方にプロットされるのは，乳脂率が減少する個体，右方にプロットされているのは，乳脂率が増加する個体である．このように，乳量の増減 / 乳脂量の増減から乳脂率の増減についてもみることができる．

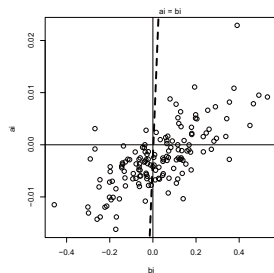


図 2.4 :  $a_i$  と  $b_i$

## 参考文献

- [1] 天野貴文・明田修・鈴木威, 台風シミュレーション・システム開発と風向別最大風速の評価, Theory and applications of GIS 14 (2006), 145–155.
- [2] J. M. チェンバース・T. J. ヘイスティ編集, 柴田里程訳, 『S と統計モデル—データ科学の新しい波』, 共立出版, 1994.
- [3] B. J. Hayes, M. Carrick, P. Bowman and M. E. Goddard, Genotype×Environment Interaction for Milk Production of Daughters of Australian Dairy Sires from Test-Day Records, J. Dairy Sci. 86 (2003), 3736–3744.
- [4] 林孝・長嶺慶隆・佐藤博, 熱損失モデルを含む複合モデルによる気象条件の乳量に及ぼす効果の評価, 日本畜産学会報 59 号 (1988), 628–636.
- [5] F. E. Madalena, M. L. Martinez and A. F. Freitas Lactation Curves of Holstein-friesian and Holstein-friesiantimesGir Cows, Anim. Prod, 29 (1979), 101–107.
- [6] 栃木県生活環境部環境局環境政策課, 栃木県環境基本計画 (改訂版), 栃木県, 2006.
- [7] P. D. P. Wood, Algebraic models of the lactation curves for milk, fat and protein production, with estimates of seasonal variation, Anim. Prod, 22 (1976), 35–40.

# Spontaneous Motion of a Deformed Camphor Disk

飯田 溪太,<sup>a</sup> 北畑 裕之,<sup>b,c</sup> 長山 雅晴<sup>d,e</sup>

<sup>a</sup> 金沢大学大学院自然科学研究科, <sup>b</sup> 千葉大学大学院理学研究科, <sup>c</sup> JST PRESTO

<sup>d</sup> 北海道大学電子科学研究科, <sup>e</sup> JST CREST

## 1 はじめに

Self-propelled motion という身近な物理現象に興味を持っている。これは、生き物や物質が環境中を外力に頼らず走るような現象を指す。例として、本稿では水面に於ける界面活性剤の自発運動を紹介する。19 世紀, Tomlinson, Rayleigh 等は樟脳と呼ばれる界面活性剤の粒が水面を動き回る様子について報告した [1, 2]。樟脳の粒がクルクル回転したり移動したりする様子は “Camphor Dance” などと呼ばれ、関連した研究が現在も盛んに行われている。特に、2004 年に報告された樟脳-水系の空間 1 次元数理モデルとその分岐解析は、自発運動の機構を数学的に説明した点に於いて重要な結果と言える [3]。例えば、界面活性粒子または界面活性液滴は自身の周りに表面張力差を発生させることや、その対称性の破れが駆動力となることなどが明らかにされた。この 1 次元数理モデル及びその拡張は種々の類似の実験系に適用されている。

空間 2 次元の問題についてはどうだろうか。我々の知る限り、数理モデルを基本とした空間 2 次元以上の具体的な問題提起はなされていない。そこで我々は 1996 年、97 年の実験報告 [4, 5] を思い出し、界面活性液滴および界面活性粒子の運動について再考察を行なった。一般に、液滴系では変形を伴った運動が、粒子系では粒子の形状に依存した並進/回転運動が観察されている。本研究では理論的側面から変形と運動の関係、あるいは形状と運動の関係を明らかにし、運動方向や回転の有無など、これまで未解明だった問題についても議論を行ないたい。ここでは最初の段階として、粒子の形状が運動に与える影響を 2 次元数理モデルを用いて調べる。粒子の形状としては、先ず半径  $r_0$  の円を用意し、次のような微小変形を考える：

$$r(\theta) = r_0 \left[ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \right]. \quad (1)$$

ここで、 $(r, \theta)$  は 2 次元極座標、 $a_k, b_k$  は微小パラメータである。以下、2 モードの変形、即ち楕円への変形を考え、このときの界面活性粒子の運動について調べた結果を報告する。従って、(1) に於いて  $a_k = b_k = 0, k \neq 2$ , とする。

## 2 数理モデル

水面における樟脳運動の数理モデルは 2005 年に紹介されたものを基に構成する [6]。モデル方程式については無次元化したものを紹介するが、各項の説明には関連する物理量の名称を用いる。水面を 2 次元平面の領域  $\Omega (= \mathbb{R}^2)$  とし、樟脳粒の内部を  $\Omega_c$  とする。樟脳粒の重心位置および回転角度をそれぞれ  $\mathbf{x}_c(t), \theta_c(t)$  とし、樟脳粒から水面に展開する樟脳分子膜濃度を  $u(t, \mathbf{x})$  とする (図 1 を参照)。但し、今回は回転運動を無視した条件下で議論を行なう。

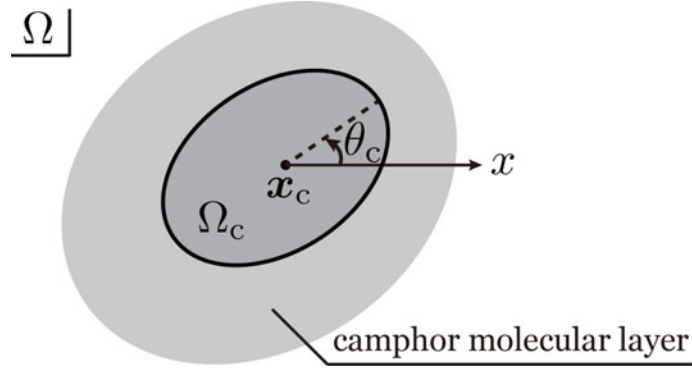


図 1 モデルの模式図. 樟脳粒の重心位置, 回転角度をそれぞれ  $\mathbf{x}_c$ ,  $\theta_c$  とし, これらの時間変化をそれぞれ並進運動, 回転運動と定義する.

樟脳粒の並進運動および樟脳分子膜濃度のダイナミクスは以下の式で記述される:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}_c}{dt^2} = -\eta_t \frac{d\mathbf{x}_c}{dt} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_c). \quad (3)$$

ここで, 推進力  $\mathbf{F}$  および濃度供給  $f$  は

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_c} \gamma(u(t, \mathbf{x}_c + \mathbf{p}(\ell))) \mathbf{n}(\ell) d\ell, \quad (4)$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_c) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_c, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_c \end{cases} \quad (5)$$

とする. (4) において,  $\mathbf{x}_c + \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{n}$  はそれぞれ樟脳粒の境界上の位置ベクトル及び外向き単位法線ベクトルで,  $\gamma$  は  $u$  に依存した水の表面張力を表す:

$$\gamma(u) = \frac{\beta^n \gamma_0}{\beta^n + u^n} + \gamma_1. \quad (6)$$

初期条件, 境界条件はそれぞれ

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_c(0), \frac{d\mathbf{x}_c}{dt}(0)) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0), \\ u(0, \mathbf{x}) \equiv 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (8)$$

また, 解  $u(t, \mathbf{x})$  の存在一意性を保障するための正則条件

$$u(t, \mathbf{x}) \in C^1, \quad \text{for any fixed } t \geq 0, \quad (9)$$

を課す. 先行研究 [3] に倣い, 水の粘性係数  $\eta_t$  をコントロールパラメータとする.

### 3 円形樟脳粒に対する解析

ここでは楕円形樟脳粒に対する解析の準備として円形樟脳粒について考える.  $\Omega_c$  を次で定義する:

$$\Omega_c = \{(x, y) \in \Omega \mid (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < r_0^2\}. \quad (10)$$

### 3.1 仮定

いま、円形樟脳粒が速さ  $v$  で  $x$  軸上を等速直線運動していると仮定する。但し、 $|v| \ll 1$  とする。このとき、(2), (3) を速度  $v\mathbf{e}_x$  の動座標系

$$\mathbf{z} = (x - vt, y), \quad \mathbf{z}_c = (x_c - vt, y_c), \quad U(\mathbf{z}) = u(t, \mathbf{x}) \quad (11)$$

で書き換え、さらに (3) を 2 次元極座標で書き直すと次の解析可能な定常問題が得られる：

$$0 = -\eta_t v + \mathbf{e}_z \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \gamma(U(r_0, \theta)) \mathbf{n}(\theta) r_0 \cos \theta d\theta \right], \quad (12)$$

$$-v \left( \cos \theta \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - U + f(r, \theta). \quad (13)$$

ここで、

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{0}) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (14)$$

但し、 $\mathbf{z}_c \equiv \mathbf{0}$  としているが、これは一般性を損なわない。境界条件、正則条件は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r, \theta) = 0, \quad (15)$$

$$U \in C^1 \quad (16)$$

となる。

### 3.2 摂動展開

(13) から  $U(r, \theta, v)$  を求めることが出来れば、これを (12) に代入することで  $v$  の情報が独立に求まるのであるが、残念ながらその方法は知られていない。そこで、次のような方法をとる： $U$  を

$$U(r, \theta; v) = U_0(r, \theta) + U_1(r, \theta)v + U_2(r, \theta)v^2 + U_3(r, \theta)v^3 + \cdots \quad (17)$$

のように展開し、これを (13) に代入する。すると、 $n = 0$  に対して、

$$0 = \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} - U_n, \quad (18)$$

$n \geq 1$  に対して、

$$-\left( \cos \theta \frac{\partial U_{n-1}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} - U_n \quad (19)$$

なる漸化式が得られる。また、(15), (16) から次の条件が課される：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_n(r, \theta) = 0, \quad (20)$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} U_n(r, \theta) < \infty, \quad (21)$$

$$\nabla U^{(i)}(r_0, \theta) = U^{(o)}(r_0, \theta), \quad \nabla U^{(i)} \Big|_{r=r_0} = \nabla U^{(o)} \Big|_{r=r_0}. \quad (22)$$

但し、 $U_n^{(i)}, U_n^{(o)}$  はそれぞれ  $\Omega_c$  の内側と外側の関数である。以上により、 $U_0, U_1, U_2, U_3, \cdots$  を逐次的に求めることが出来る。今回、我々は  $U_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) まで計算した。

### 3.3 分岐点の計算

(18)–(22) より求めた  $U(r, \theta; v)$  を (12) の  $U$  に代入すると,

$$\eta_t v = \mathbf{e}_z \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \gamma(U(r_0, \theta; v)) \mathbf{n}(\theta) r_0 \cos \theta d\theta \right], \quad (23)$$

$$= k_1 v + k_3 v^3 + O(v^5) \quad (v \text{ についての Taylor 展開}) \quad (24)$$

なる pitch-fork 分岐の標準形が得られる. ここで, モデルのパラメータを含んだ定数  $k_1, k_3$  の具体形は余白の都合上省略する. (24) より, 或るパラメータセットに対して分岐図を描くと図 2 のようになった.

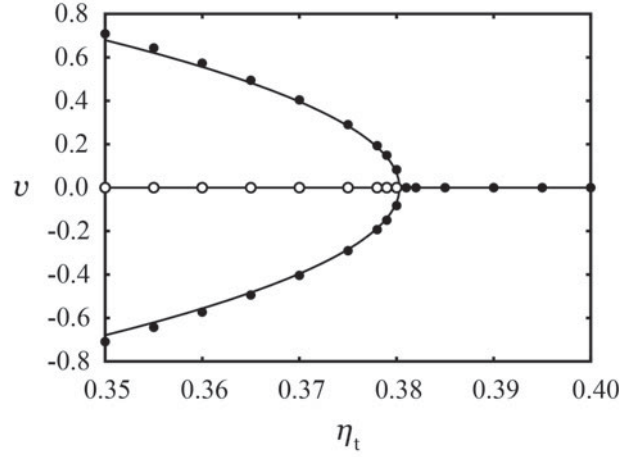


図 2 定常解から等速進行解への分岐図. 横軸にパラメータ  $\eta_t$ , 縦軸に速度  $v$  を表示している. 実線は (24) により求めたもので, 黒丸と白丸はモデル方程式を直接数値計算して求めた漸近解. 黒丸は安定解, 白丸は不安定解を意味する.

## 4 楕円形樟脳粒に対する解析

楕円へと変形した樟脳粒の運動についても前節と同様の手続きで解析出来る. これにより, 楕円形の樟脳粒が長軸と短軸のどちら方向へ動きやすいかが分かる. 結論は講演で述べようと思う.

## 参考文献

- [1] C. Tomlinson, *Proc. R. Soc. London* **11**, 575 (1860).
- [2] L. Rayleigh, *Proc. R. Soc. London* **47**, 364 (1890).
- [3] M. Nagayama, S. Nakata, Y. Doi and Y. Hayashima, *Physica D* **194**, 151–165 (2004).
- [4] N. Magome and K. Yoshikawa, *J. Phys. Chem.* **100**, 19102–19105 (1996).
- [5] S. Nakata, Y. Iguchi, S. Ose, M. Kuboyama, T. Ishii and K. Yoshikawa, *Langmuir* **13**, 4454–4458 (1997).
- [6] H. Kitahata and K. Yoshikawa, *Physica D* **205**, 283–291 (2005).

**はじめに** 本講演では、化学反応の可否を決める相空間構造の抽出に関して述べる。本要旨では、テクニカル・レポートの趣旨に沿い、ハミルトン系の基礎的な事項について主に触れ、我々が扱っている問題については講演中にて解説することとする。本稿で触れる基礎的な事項は、物理学部生が1, 2年の間に学ぶ内容で、講演において触れられないのが通常である。他方、力学系や幾何の研究をしている方々と接する折、基礎的な点について確認しなければ話が噛み合わない事がしばしばある。本稿はそうした点について主に触れている。筆者の力不足のためいくらか誤りがあるかもしれないがご了承ください。

**諸注意** 物理学で扱う数式には、一見して数学的に不要な係数や変数が登場する。その理由は、物理量は実数の元であっても単なる実数と扱われないことが多く、 $m$ (メートル),  $kg$ (キログラム),  $s$ (秒),  $A$ (アンペア) 等の物理量の「次元」を意識して扱われるためである(この4つの単位で表現する場合 MKSA 単位系と呼ぶ)。こうした次元を意識することで、観測できる量と出来ない量、事前に与えられている量を区別可能となるのに加え、実際の測定結果を定量的に考察可能となる。以下は物理的対象に関する考察であり、その考察で得られた結果を「解釈」しやすくするため、そうした数学的に冗長な表現残す。尚、以下数式を表現する場合、斜体(*Italic*)と通常の書体を以下の意味で区別する。

*Italic*: 定数、変数、関数    *Roman*: 単位、変数以外の添字  
簡単のため、関数 $f$ の1階、2 階の時間微分をそれぞれ $\dot{f}$ ,  $\ddot{f}$   
関数 $f$ が時間以外の1変数に依存する場合、その変数による1階、2 階の微分をそれぞれ $f'$ ,  $f''$ 。多変数の場合、 $\partial_q f = \partial f / \partial q$ ,  $\nabla_q \cdot f := \sum_j \partial_{q_j} f$ ,  $\nabla_q f := (\partial_{q_1} f, \partial_{q_2} f, \dots)$ とする。

次元と次元の積と商、次元と変数の積を  $\cdot$ 。次元と変数の商を  $/$  で表す。 $m \cdot s^{-1}$ の次元をもつ物理量 $\dot{q}$ の数値を明示的に表現する際は例えば  $\dot{q}/(m \cdot s^{-1}) = 12$ もしくは  $\dot{q} = 12 \cdot m \cdot s^{-1}$  と記す。この物理量 $\dot{q}$ を実数として定義する場合  $\dot{q} \in \mathbb{R} \cdot m \cdot s^{-1}$  とし、便宜上  $\mathbb{R} \cdot m \cdot s^{-1}$ を $\mathbb{R}_{m \cdot s^{-1}}$ と略記する。特に物理量の次元に制約がない場合明記せず $\dot{q} \in \mathbb{R}$ 、無次元量である場合 $\dot{q} \in \mathbb{R}_0$ と記す。 $C^\infty$ 級の $X$ から $Y$ への写像を $C(X, Y) := C^\infty(X, Y)$ と書くこととする。

### 3 次元ユークリッド空間上の質点が従うニュートンの運動方程式

$N$ 質点系のニュートンの運動方程式は直交座標系

$q = {}^t(q_1, q_2, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}_m)^{3N}$  を用いて、次の様を書く。

$$m\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) \quad \dots (1)$$

ここで、質量  $m = {}^t(m_1, m_1, m_1, m_2, \dots, m_n) \in (\mathbb{R}_{kg})^{3N}$ , 力  $F \in C(\Omega \times (\mathbb{R}_s), (\mathbb{R}_{m \cdot kg \cdot s^{-2}})^{3N})$  とする。

ただし $\Omega \subset (\mathbb{R}_m)^{3N} \times (\mathbb{R}_{m \cdot s^{-1}})^{3N}$ を開部分集合とする。以下では、簡単のため力 $F$ は孤立系( $V$ が時間 $t$ に依存しない)かつ静電相互作用のみ( $V$ が速度 $\dot{q}$ に依存しない)で記述されたポテンシャル(エネルギー)関数

$V \in C((\mathbb{R}_m)^{3N}, \mathbb{R}_{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}})$ で記述される( $F = \nabla_q V$ )とする。この時、運動方程式は運動の第一積分または全エネルギー  $E \in \mathbb{R}_{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$ と呼ばれる積分が存在し、次のように書ける。

$$E = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 + V(q)$$

ポテンシャル関数が時間に依存しない限り、この積分は存在する。従って、以下では上式で与えられる等エネルギー面上での微分方程式の解のみを考察する。

運動方程式(1)は、より数学的に扱いやすいハミルトン方程式に書き直すことが出来る。ニュートンの運動方程式(1)に対するハミルトンの運動方程式は、速度 $\dot{q}_j$ の代わりに運動量  $p_j := m_j \dot{q}_j$ を用いて

$$\dot{q}_j = \partial_{p_j} H, \quad \dot{p}_j = -\partial_{q_j} H \quad \dots (2)$$

と記述される。ただし  $H \in C(\Omega', \mathbb{R}_{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}})$ 、開部分集合  $\Omega' \subset (\mathbb{R}_m)^{3N} \times (\mathbb{R}_{m \cdot kg \cdot s^{-1}})^{3N}$  とする。

$H$ を Hamiltonian、座標 $q_j$ と共役な運動量 $p_j$ の組みを( $j$ 番目の)自由度と呼ぶ。ニュートンの運動方程式(1)に対する Hamiltonian は例えば次のように書ける

$$H(p, q) := \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2m_j} + V(q). \quad \dots (3)$$

Hamiltonian  $H \in C(\Omega', \mathbb{R}_{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}})$ に対する変数変換

$z := (p, q) \rightarrow \zeta \equiv (\eta, \xi)$ について考える。変換 $\phi: z = \phi(\zeta)$ のヤコビ行列 $D\zeta(z)$ が $D\zeta(z) \in \text{Sp}(n)$ (シンプレティック行列)ならば、 $K(\zeta) = H(\phi(\zeta))$ を Hamiltonian  $\eta, \xi \in \mathbb{R}^{3N}$ をそれぞれ、一般化運動量、一般化座標とするハミルトン系に変換される。詳細については割愛するので適当な成書[1]を参照していただきたい。

任意のハミルトンの運動方程式は次の様に、書き直せる。

$$\dot{z} = -L_H z \cdots (4)$$

ただし  $z = {}^t(p, q) \in \mathbb{R}^{6N}$  (変数の次元は問わない)

$$, L_H z = \{H, z\}$$

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{j=1}^n (\partial_{q_j} f \partial_{p_j} g - \partial_{q_j} g \partial_{p_j} f) \\ &= \sum_{j=1}^n (\partial_{\xi_j} f \partial_{\eta_j} g - \partial_{\xi_j} g \partial_{\eta_j} f) \end{aligned}$$

は関数  $f, g$  に対する Poisson 括弧と呼び一階の微分演算子  $L_H$  を Lie 微分と呼ぶ。以下では式(4)の標準型理論を用いた線形化について述べる。(4)の形式解(解の存在すると仮定した時に得られる解)は

$$z(t) = T_H(t)z(0) \cdots (5)$$

ただし、 $T_H(t) = \exp[-tL_H]$  とする。 $T_H(t)$  を時間発展演算子または、正準変換演算子と呼ぶ。この  $T_H(t)$  は 1 パラメータ変換群となっている。「時間発展  $z(0) \rightarrow T_H(t)z(0)$  が正準変換となる」の証明は割愛するので適当な成書[1]を参照していただきたい。

**基準座標系** 質量重座標(mass weighted coordinate)系

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \left( \frac{p}{\sqrt{m}}, \sqrt{m}q \right) \in \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}, s^{-1}} \right)^{3N} \times \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}} \right)^{3N}$$

は平衡点でテーラー展開した際に Hamiltonian の低次の項が簡素に書けることからよく用いられる。数学的には基準座標系を導入する意義はそれほどないが、物理的には座標軸を質量の2乗根でリスケールするだけで、物理的な解釈のしやすく、数式としても扱いやすくなるという大きな長所がある。質量重座標系でのポテンシャル関数、Hamiltonian をそれぞれ

$$U(\bar{q}) \in \mathcal{C} \left( \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}} \right)^{3N}, \mathbb{R}_{m^2 \cdot \text{kg} \cdot s^{-2}} \right) = V(q)$$

$$\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}) \in \mathcal{C}(\Omega_{\bar{p}, \bar{q}}, \mathbb{R}_{m^2 \cdot \text{kg} \cdot s^{-2}}) = H(p, q),$$

$$\text{開部分集合 } \Omega_{\bar{p}, \bar{q}} \subset \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}, s^{-1}} \right)^{3N} \times \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}} \right)^{3N}$$

とする。Hamiltonian は次の様に書ける

$$\bar{H}(p, q) := \sum_{j=1}^{3N} \bar{p}_j^2 / 2 + U(\bar{q}) \cdots (6).$$

ある  $\bar{q}_s \in \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}} \right)^{3N}$  に対して  $U(\bar{q}_s) = E$  かつ  $\nabla_{\bar{q}} U(\bar{q}_s) = 0$  ならば  $\bar{p}_j^2 > 0$  より  $\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}) = E$  の等エネルギー面上に運動方程式

$$\dot{\bar{z}} = -L_{\bar{H}} \bar{z} \cdots (7)$$

は固定点  $\bar{z}_s = (0, \bar{q}_s)$  をもつ。この  $\bar{q}_s$  を全エネルギー  $E$  に関係なくポテンシャルエネルギー面上の平衡点と呼ぶ。運動方

程式を  $\bar{z}_s$  で多項式展開すると固定点のごく近傍での運動方程式を得る

$$\dot{\bar{z}} = -[\nabla_{\bar{z}}(L_{\bar{H}} \bar{z})]_{\bar{z}_s} (\bar{z} - \bar{z}_s) + O(\bar{z}^3) \cdots (8).$$

簡単のため  $\bar{z}_s$  を原点とする。この時  $\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{\bar{q}_s}$  を対角化した後

の Hamiltonian は  $\bar{H}, \tilde{H}_{\text{nm}} \in \mathcal{C}(\Omega_{\bar{p}, \bar{q}}, \mathbb{R}_{m^2 \cdot \text{kg} \cdot s^{-2}})$

$$\Omega_{\bar{p}, \bar{q}} \subset \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}, s^{-1}} \right)^{3N} \times \left( \mathbb{R}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}} \right)^{3N}$$

とすると  $\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}) = \tilde{H}(\bar{p}, \bar{q}) = \tilde{H}_{\text{nm}}(\bar{p}, \bar{q}) + O(\bar{q}^3)$  とかける。

ここで normal mode Hamiltonian  $\tilde{H}_{\text{nm}}$  はポテンシャルエネルギー面の曲率  $k_j \in \mathbb{R}_{s^{-2}}$  を用いて次のように書きなおされる。

$$\tilde{H}_{\text{nm}} = \sum_{j=1}^{3N} (\bar{p}_j^2 + k_j \bar{q}_j^2) / 2 \cdots (9).$$

この normal mode Hamiltonian から固定点のごく近傍での運動方程式は  $\eta_j \in \mathbb{C}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}, s^{-1}}, \xi_j \in \mathbb{C}_{m \cdot \text{kg}^{1/2}}, I_j \in \mathbb{C}_{m^2 \cdot \text{kg} \cdot s^{-1}},$

$\Theta_j \in \mathbb{R}$  を用いて次の様に簡単な形で書き直せる。

$$\dot{\zeta}_j = -\lambda_j L_{I_j} \zeta_j \cdots (10)$$

または

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta_j \\ \xi_j \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} -\eta_j \\ \xi_j \end{pmatrix}$$

ここで、 $\lambda_j = \sqrt{-k_j}$

$$\begin{pmatrix} \eta_j \\ \xi_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_j \\ 1/\lambda_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_j \\ \bar{q}_j \end{pmatrix} \cdots (11)$$

$$\zeta_j = (\eta_j, \xi_j)$$

$$I_j = \eta_j \xi_j, \Theta_j = \ln[\lambda_j \xi_j / \eta_j] / 2 \cdots (12)$$

であり、変数変換  $\phi: z = \phi(I, \Theta)$  は正準変換となる。

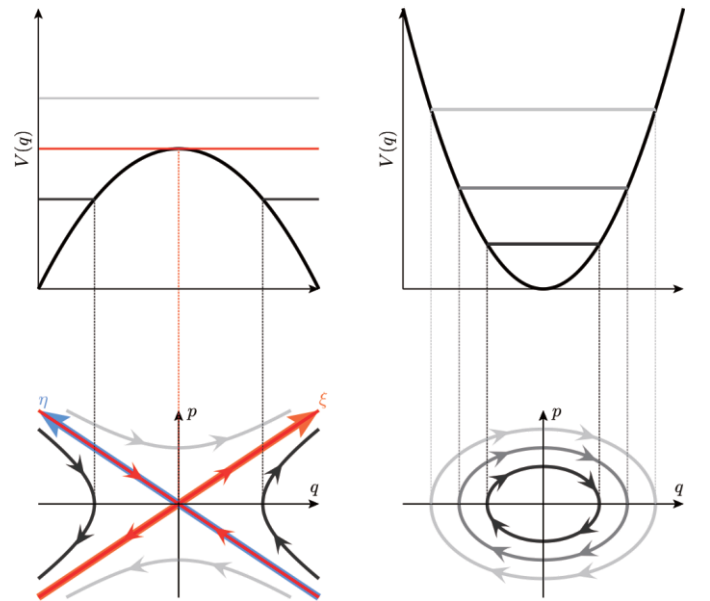


図 1 基準座標系と固定点(normal node)  
平衡点での双曲型自由度(左)と楕円型自由度(右)  
のポテンシャル関数(上)と解の流れ(下)

特に $k_j > 0$  の時に $I, \Theta$  を作用、角変数とそれぞれ呼ぶ。

とくに $\tilde{H}_{nm} = \tilde{H}_{nm}(\tilde{p}(I), \tilde{q}(I))$ となることから、

$I = \text{const.}, \theta = t(\nabla_I \tilde{H}_{nm}) + \theta_0$ が解となる。

固定点ごく近傍の軌跡(解の流れ)は楕円型自由度( $k_j > 0$ )と双曲型自由度( $k_j < 0$ )の二種類に区別される(図1)。

固定点ごく近傍において $m$ 個の自由度が $k_j < 0$ で残りの自由度が $k_j > 0$ である場合、 $m$ 次のサドル(saddle with  $m$  degree)、rank- $m$  saddle、index- $m$  saddleと呼ばれる。

**標準型理論** 標準型理論は、ある力学系において固定点近傍の常微分方程式を解くために変数変換を用いて線形化することである。ハミルトン系での標準型理論はHamiltonian $H(I, \Theta) \rightarrow \tilde{H}(\tilde{I})$ とすることに対応する。この様な変数変換 $\phi(\tilde{I}) = {}^t(I, \Theta)$ とHamiltonian  $\tilde{H} = H \circ \phi$ は一般に存在しない。解析的な解 $\tilde{I}$ が存在しない条件を共鳴(条件)と呼ぶ。ただし、有限の $m$ に対して $\phi \in C^m(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ なら求めることが出来る場合がある。ここでは実装・計算のしやすさ、表現の簡便さからLie正準変換についてのみ述べる。

Lie正準変換では時間発展演算子同様に1パラメータ変換群によって正準変換する。時間に対応するパラメータ $\tau$ , 正準変換演算子 $T_W(\tau) = \exp[-\tau L_W]$ を用いて

$$H(I, \Theta) = T_W^{-1} T_W H(I, \Theta) = T_W^{-1} H(T_W I, T_W \Theta) = \tilde{H}(\tilde{I})$$

となる正準変換するためのHamiltonian  $W \in C^3(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ を見つければよい。もしそのような $W$ が存在するなら運動方程式は式(10)と同様に

$$\dot{\tilde{z}}_j = -L_{\tilde{H}} \tilde{z}_j = -\tilde{\lambda}_j(\tilde{I}) L_{\tilde{I}_j} \tilde{z}_j$$

と線形化される。ただし $\tilde{\lambda}_j(\tilde{I}) = \partial \tilde{H}(\tilde{I}) / \partial \tilde{I}_j$ とする。この摂動理論を用いたLie変換はLie正準変換摂動理論と呼ばれ、堀-Deprit[2]または、Dragt-Finn[3]等のアルゴリズムが存在するが詳細は割愛する。

**力学的反応理論** 化学反応の文脈では1次のサドル点が反応速度定数を決定づけていると考えられてきた。例えば図1において、 $\eta = 0$ の不変集合が、 $\tilde{q} > 0$ から来た軌跡と $\tilde{q} > 0$ から来た軌跡をえり分けている、軌跡の起源を分ける不変集合と言える。また、 $\xi = 0$ の不変集合が、 $\tilde{q} > 0$ へ向かう軌跡と $\tilde{q} > 0$ へ向かう軌跡をえり分けている、軌跡の行先を分ける不変集合と言える。力学的反応理論という理論[4]では、標準型理論を用い、ポテンシャル関数の高次の項まで運動方程式を線形化することによって、この十年程、軌道の起源と行先それぞれを分ける不変集合が抽出されてきた。他方、2次以上サドル点は最小エネルギー経路(minimum energy path: MEP)が通ることがない為、多くの反応理論において軽視されてきた。しかし、この考察はあくまでポテンシ

ルエネルギー面のプロファイリングのみに基づいているので、力学的に妥当性があるかどうかかわからない。我々は、2次以上のサドル点が果たす役割を解明するため、力学的反応理論の拡張を試みた所、幾つかの問題が生じた。そこで我々は軌跡の行先・起源を分ける軌道の集合(反応性境界)についてより一般的な定式化を試みた。

**例1** 真の反応性境界と標準型理論で抽出した反応性境界が合わない例(2自由度系の2次のサドル)

$$H^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} (p_j^2 - \lambda_j^2 q_j^2) + \varepsilon q_1^2 q_2^2 \exp[2 - q_1^2 - q_2^2]$$

$$\varepsilon = 0.1, \lambda_1 = 1/\sqrt{2}, \lambda_1: \lambda_2 = 1: (1 + \sqrt{5})/2$$

この系は $|q_j| \gg 1$ のとき $H^{(1)} = \tilde{H}_{nm}^{(1)}$ なので $|q_j| \gg 1$ での軌跡は基準座標系の解に従って流れる。従って、 $|q_j| \gg 1$ で初期条件を用意し、時間正発展(負発展)でサドル近傍で観測するとサドル点での軌跡の起源(行先)が判別できる。こうして得られた反応性境界を $\{q_1 = 0, p_1 > 0\}, \{q_2 = 0, p_2 > 0\}$ でそれぞれセクションを取ったのが図2である。

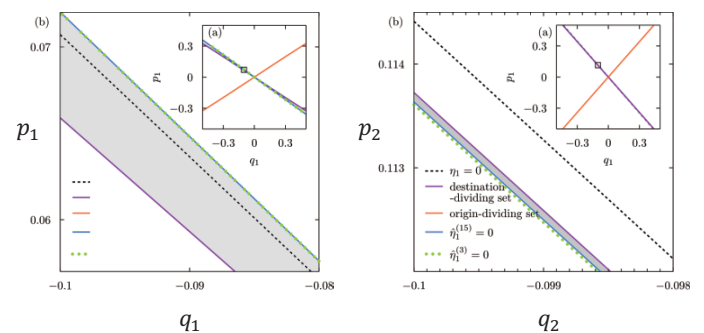


図2 標準型理論で反応性境界を誤って抽出する例

右図 $\{q_2 = 0, p_2 > 0\}$ 、左図 $\{q_1 = 0, p_1 > 0\}$ 点線、点線と実線が混じったものの、実線はそれぞれ基準座標系近似、標準型理論、系の性質を利用して抽出した反応性境界平衡点での双曲型自由度(左)と楕円型自由度(右)のポテンシャル関数(上)と解の流れ(下)

この図から、標準型理論を用いて抽出した反応性境界が、基準座標系近似より悪い近似を $\{q_2 = 0, p_2 > 0\}$ で与えている事がわかる。他方、 $\{q_1 = 0, p_1 > 0\}$ では両者は大きく異なっていない。こうした結果から我々は、 $\lambda_1, \lambda_2$ の大きさの違いが、標準型理論を用いた反応性の予測に大きく関わっているのではないかと解釈している。

**反応性境界** この結果を踏まえて、標準型理論に基づかない反応性境界の定義付けを以下に行なった。

相空間上に隣接するが共通集合を持たない有限個の適当な領域を状態とする。状態 $S_1, S_2, \dots$ が与えられ、各領域に初期条件をもつ軌跡には、行先または起源がいずれの状態にも属さない集合が測度ゼロで存在するとする。この時、次の2つの反応性境界を定義する。

## 行先を分ける反応性境界

起源は適当な状態に属しているが、行先はどの状態にも属していない軌跡の集合

## 起源を分ける反応性境界

行先は適当な状態に属しているが、起源はどの状態にも属していない軌跡の集合

この定義は、標準型理論で抽出した反応性境界の一般化となっている。模式的には図3のようになる。

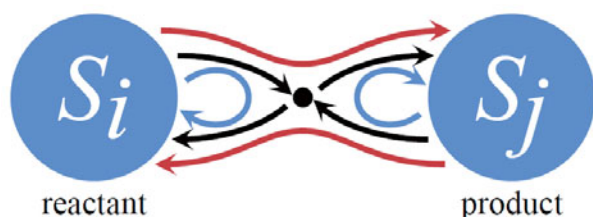


図3 反応性境界

**例2** 具体的な分子系における複数のサドルを介した反応の反応性境界:  $\text{H}_5^+$  のプロトン移動反応  $\text{H}_3^+ + \text{H}_2 \rightleftharpoons \text{H}_2 + \text{H}_3^+$  での断熱ポテンシャル面<sup>1</sup>  $V(\varphi, R, z)$  を例に

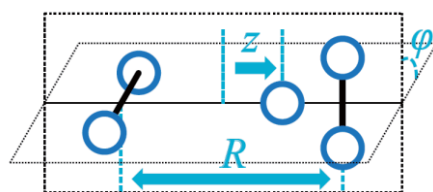


図4  $\text{H}_5^+$  のプロトン移動反応

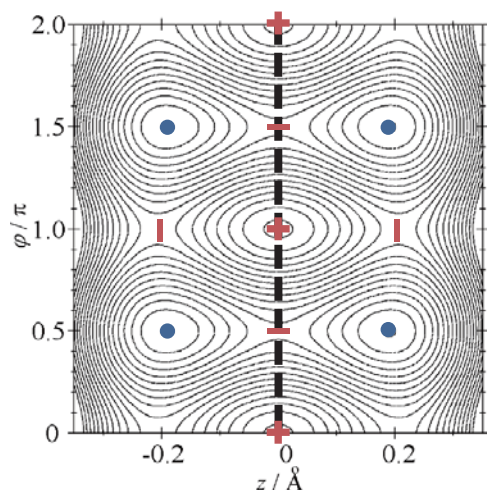


図5  $\text{H}_5^+$  のプロトン移動反応のポテンシャルエネルギー面

<sup>1</sup>断熱ポテンシャルとは、Born-Oppenheimer 近似を分子の Schrödinger 方程式に適用することで出てくる核の運動を決めるポテンシャルエネルギー面のことである。Born-Oppenheimer 近似とは、電子が時間非依存の Schrödinger 方程式に従っていると仮定し、近似的に核の座標のみで記述される Schrödinger 方程式を得る事に対応する。この際、Hamiltonian 演算子のポテンシャル関数が電子がつくる場による影響を含んだ形になっているため、元のポテンシャル関数とは異なる。本稿ではそのようなポテンシャル関数に従う分子のダイナミクスが古典近似  $\hbar \rightarrow 0$  に従うと仮定している。

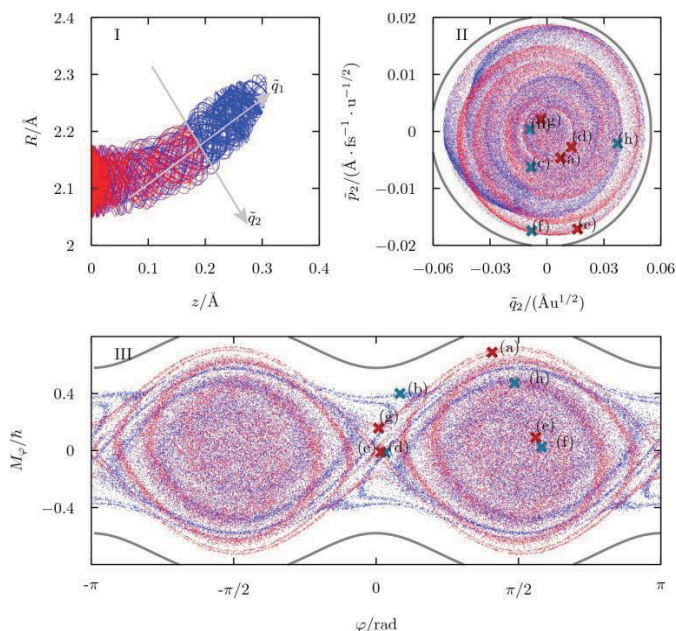


図6 抽出した反応性境界

$$H^{(2)} = M_\phi^2/I_\phi + p_R^2/(2\mu_R) + p_z^2/(2\mu_z) + V(\varphi, R, z)$$

本講演では、反応性境界の一般化と  $\text{H}_5^+$  系の反応性境界について詳細に述べる。この系の反応性境界は複数のポテンシャル面上のサドル点を含む不安定な周期的軌道  $z = 0, p_z = 0$  で構成することが出来る。詳細については紙面の都合上講演中に述べる。

## 参考文献

- [1] 常微分方程式と解析力学 著 伊藤秀一 共立出版
  - [2] G. Hori, *Publications of the Astronomical Society of Japan* **18**, 287-296 (1966).  
A. Deprit, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **1**, 12-30 (1969).
  - [3] A. J. Dragt and J. M. Finn, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 2215-2227.
  - [4] T. Komatsuzaki and R. S. Berry, in *Adv. Chem. Phys.*, edited by I. Prigogine and S. A. Rice (John Wiley & Sons, Inc., New York, 2003), pp. 79-152.
- S. Kawai, H. Teramoto, C.-B. Li, T. Komatsuzaki, and M. Toda, in *Advancing Theory for Kinetics and Dynamics of Complex, Many-Dimensional Systems: Clusters and Proteins*, edited by T. Komatsuzaki, R. S. Berry, and D. J. Leitner (John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011), pp. 123-169.

# パラレルセッション 代数学



# Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数の 2 乗平均

小野塚友一

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ABSTRACT. リーマンゼータ関数の 2 乗平均については既に結果が知られている. 松本耕二氏と津村博文氏はこの結果を応用し Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の 2 乗平均についての結果をだした. 今回は更に Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数に適用して得られた結果について話す. 本研究は立命館大学の岡本卓也氏との共同研究である.

## 1 Introduction

3 つの複素変数  $s_1, s_2, s_3$  に対して, Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数は次のように定義される:

$$\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s_3) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}. \quad (1.1)$$

この級数は  $\Re s_1 + \Re s_3 > 1$ ,  $\Re s_2 + \Re s_3 > 1$ ,  $\Re s_1 + \Re s_2 + \Re s_3 > 2$  において絶対収束する. 級数 (1.1) は Tornheim[5] によって初めて導入され  $s_1, s_2, s_3$  を整数としたときの値について調べられた. 一方 Mordell[4] は Tornheim とは独立に  $s_1 = s_2 = s_3$  とした和を考え, 次のような多重和の値について調べた:

$$\sum_{m_1, \dots, m_r=1}^{\infty} m_1^{-1} \cdots m_r^{-1} (m_1 + \cdots + m_r + a)^{-1} \quad (a > -r).$$

関数 (1.1) はこれらの研究をおこなった 2 人の名前をとって Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数と呼ばれている.

主結果を述べるために (1.1) とは別の次のような 2 重ゼータ関数を導入する:

$$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; s_3) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1} (k-m)^{s_2}} \right|^2 \frac{1}{k^{s_3}}. \quad (1.2)$$

この級数は  $2\Re s_1 + \Re s_3 > 1$ ,  $2\Re s_2 + \Re s_3 > 1$ ,  $2\Re s_1 + 2\Re s_2 + \Re s_3 > 3$  において絶対収束する.

今回の講演内容は Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数 (1.1) の 2 乗平均についてのものである。リーマンゼータ関数の 2 乗平均については次のようなよく知られた結果がある:

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \sim \zeta(2\sigma)T \quad (\sigma > \frac{1}{2}), \quad (1.3)$$

$$\int_2^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^2 dt \sim T \log T, \quad (1.4)$$

([6] Theorem 7.2, 7.3). これらの 2 乗平均 (1.3) と (1.4) は Lindelöf 予想の解決を目的として考えられた。Lindelöf 予想とは

$$\zeta(\sigma + it) = O(t^\varepsilon) \quad (\frac{1}{2} \leq \sigma < 1)$$

が任意の  $\varepsilon > 0$  に対して成り立つであろうという予想である。Riemann 予想が成り立つならば Lindelöf 予想も成り立つことが知られているが, Lindelöf 予想は未だに解決されていない。リーマンゼータ関数の 2 乗平均の類似として, 松本と津村 [3] は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の 2 乗平均を考えた。Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数とは次のように定義される関数である:

$$\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}.$$

この級数は  $\Re s_2 > 1$ ,  $\Re s_1 + \Re s_2 > 2$  ([1] Theorem 3) で絶対収束し,  $\mathbb{C}^2$  空間に有理型に接続されることが知られている ([2] Theorem 1). [3] の中で, 松本と津村は次の 2 乗平均に関する結果を証明した:

$$\int_2^T |\zeta_{EZ,2}(s_1, \sigma + it)|^2 dt \sim \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma)T,$$

ただし  $s_1$  と  $\sigma$  はある定められた領域上にあるものとし, さらに  $\zeta_2^{[2]}$  は次のように定められるものとする:

$$\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1}} \right|^2 \frac{1}{k^{s_2}}.$$

今回紹介する主結果の 2 乗平均は次のようなものである:

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; \sigma + it)|^2 dt \sim \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T,$$

ただし  $s_1, s_2$  と  $\sigma$  はある定められた領域上にあるものとする。Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数に  $s_2 = 0$  を代入すると Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数になる:

$$\zeta_{MT,2}(s_1, 0; \sigma + it) = \zeta_{EZ,2}(s_1, \sigma + it).$$

さらに  $\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; s_3)$  に  $s_2 = 0$  を代入すると  $\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2)$  になる:

$$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, 0; 2\sigma) = \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma).$$

よって今回紹介する主結果に  $s_2 = 0$  を代入すると [3] の結果と一致し, したがって今回紹介する結果は [3] の一般化となっていることがわかる.

## 2 主結果

主結果は  $\zeta_{MT,2}(s_1, s_2, s)$  の 2 乗平均に関するものであるが,  $s_1, s_2, s$  の領域ごとに 3 つの部分に別れる. ここからは  $s_1 = \sigma_1 + it_1, s_2 = \sigma_2 + it_2, s = \sigma + it$  とする. まずはじめは絶対収束領域における結果である.

**Theorem 2.1.**  $s_1, s_2, s \in \mathbb{C}$  が条件  $\sigma_1 + \sigma > 1, \sigma_2 + \sigma > 1, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma > 2$  かつ  $t \geq 2$  を満たすとする. このとき次式が成り立つ:

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s)|^2 dt = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T + O(1) \quad (T \rightarrow \infty).$$

次の結果は絶対収束しない領域での結果である.

**Theorem 2.2.**  $s_1, s_2, s \in \mathbb{C}$  が条件  $1/2 < \sigma_2 + \sigma \leq 1, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma > 2, \sigma_1 > 1, \sigma_2 \geq 0, \sigma > 0, t \geq 2$  を満たしかつ,  $t$  が 2 から  $T$  までを動くとき  $(s_1, s_2, s)$  は超平面  $s_2 + s = 1$  を通らないものとする. このとき次式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s)|^2 dt &= \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T + O(T^{1/2}) \\ &\quad + O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma} \log T) \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

最後の結果は前定理と同じく絶対収束しない領域での結果であるが, 前定理より更に深い領域まで調べている.

**Theorem 2.3.**  $s_1, s_2, s \in \mathbb{C}$  が条件  $\sigma_1 + \sigma > 1, 1/2 < \sigma_2 + \sigma \leq 1, 3/2 < \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma \leq 2, 1/2 < \sigma_1 < 3/2, \sigma_2 \geq 0, \sigma > 0, t \geq 2$  を満たしかつ,  $t$  が 2 から  $T$  までを動くとき,  $(s_1, s_2, s)$  は 2 つの超平面  $s_2 + s = 1$  と

$s_1 + s_2 + s = 2$  のどちらも通らないものとする. このとき次式が成り立つ:

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s)|^2 dt = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T + O(T^{5/2-\sigma_1-\sigma_2-\sigma+\varepsilon})$$

$$+ \begin{cases} O(T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2-2\sigma} \log T) & (1/2 < \sigma_1 < 1, 1/2 < \sigma_2 + \sigma < 1) \\ O(T^{2-2\sigma_1} (\log T)^2) & (1/2 < \sigma_1 < 1, \sigma_2 + \sigma = 1) \\ O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma} (\log T)^3) & (\sigma_1 = 1, 1/2 < \sigma_2 + \sigma < 1) \\ O((\log T)^4) & (\sigma_1 = 1, \sigma_2 + \sigma = 1) \\ O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma} \log T) & (1 < \sigma_1 < 3/2, 1/2 < \sigma_2 + \sigma < 1) \end{cases}$$

$(T \rightarrow \infty).$

ただし  $\varepsilon > 0$  は任意.

## 参考文献

- [1] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millennium, II (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.
- [2] K. Matsumoto, *The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I*, J. Number Theory, 101 (2003), 223–243.
- [3] K. Matsumoto and T. Tsumura, *Mean value theorems for double zeta-functions I*, preprint.
- [4] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 368–371.
- [5] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math., **72** (1950), 303–314.
- [6] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann zeta – function, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath – Brown*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

# The product over all norms of primes on a graph

齋藤正顕<sup>1</sup> 長谷川武博<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 工学院大学 kt13204@ns.kogakuin.ac.jp

<sup>2</sup> 立命館大学

## 1 正規化積と超正規化積

非減少な正数の数列  $\lambda = (\lambda_n)$  ( $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ) に対し, 領域  $\operatorname{Re}(s) > s_0$  ( $s_0 > 0$  はある実数) で絶対収束する Dirichlet 級数

$$\zeta_\lambda(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s},$$

(数列  $\lambda$  に付随するゼータ関数とよぶ) が  $s = 0$  を含む領域まで有理型関数として解析接続され,  $s = 0$  で正則なとき,  $\lambda$  の (ゼータ) 正規化積 (regularized product) は, 次式で与えられる:

$$\widehat{\prod}_n \lambda_n := \exp(-\zeta'_\lambda(0)).$$

有限数列  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  の場合に正規化積は通常積  $\widehat{\prod}_n \lambda_n = \lambda_1 \cdots \lambda_m$  と一致することから, 正規化積は数列  $\lambda_n$  の “積” とみなせる. 特に全ての自然数の正規化積 (つまり全ての自然数の “積”)

$$\widehat{\prod}_n n = \sqrt{2\pi}$$

は Lerch の公式として良く知られている. しかし, 全ての素数の正規化積 (つまり全ての素数の “積”) は定義されない. その理由は,  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で  $P(s) := \sum_p p^{-s}$  (和は全ての正の素数をわたる) によって定義される関数 (prime zeta function と呼ぶ [1]) が虚軸を自然境界として持つ (Landau and Walfisz [4]) ために,  $P'(0)$  が定義できないからである. E. M. Garcia と R. P. Marco は [2] において,  $P(s)$  のような 0 で正則でない Dirichlet 級数  $\zeta_\lambda(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}$  を持つような数列  $\lambda = \{\lambda_n\}$  に対し, 正規化積を拡張して超正規化積 (super-regularized product) を定義した. それは, 具体的に次に述べる手順と条件の下で定義される:  $\zeta_\lambda(s)$  に対し, 2 変数 Dirichlet 級数

$$\zeta_\lambda(s, t) := \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \lambda_n^{-s} \mu_m^{-t}, \quad (\operatorname{Re}(s) > s_0, \operatorname{Re}(t) > t_0 \text{ で絶対収束})$$

( $s_0$  及び  $t_0 < 0$  はある実数, 数列  $\mu$  は  $\lambda$  に対して次に述べる操作がうまくいくように適切にとる) に拡張する.

1.  $\zeta_\lambda(s, 0) = \zeta_\lambda(s)$ .
2.  $\operatorname{Re}(t) > t_1$  なる各  $t$  に対し,  $s$  の関数  $\frac{\partial}{\partial s} \zeta_\lambda(s, t)$  が領域  $\operatorname{Re}(s) > s_1$  ( $s_1 < 0$  はある実数) に有理型関数として解析接続されるような  $t_1 \geq t_0$  が存在する. この拡張 (meromorphic extension) を  $\operatorname{ext}_s \frac{\partial}{\partial s} \zeta_\lambda(s, t)$  とかく.
3. 領域  $\operatorname{Re}(t) > t_1$  で定義される関数  $\operatorname{ext}_s \frac{\partial}{\partial s} \zeta_\lambda(0, t)$  が  $t = 0$  のある近傍  $U$  で恒等的に  $\infty$  とならないとき, これを  $U$  まで有理型関数として解析接続する. この拡張を

$\text{ext}_t \left( \lim_{s \rightarrow 0} \text{ext}_s \frac{\partial}{\partial s} \zeta_\lambda(s, t) \right)$  とかく. この有理型関数が  $t = 0$  で正則のとき, 超正規化積は次で定義される:

$$\widehat{\prod}_n \lambda_n := \exp \left( - \lim_{t \rightarrow 0} \left( \text{ext}_t \left( \lim_{s \rightarrow 0} \text{ext}_s \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial s}(s, t) \right) \right) \right).$$

超正規化積の値は上の 1, 2, 3 における  $\zeta_\lambda(s)$  の拡張  $\zeta_\lambda(s, t)$  の取り方に依らず決まる. また, 超正規化積は, 正規化積を与えることができる数列に関しては, その正規化積と一致する. Garcia と Marco は [2] において “すべての素数の積” である素数列の超正規化積を次のように与えた:

$$\widehat{\prod}_p p = 4\pi^2.$$

本研究では, このグラフ版のアナロジーを考えたい.

## 2 素サイクルのノルムの超正規化積

本研究を通じて, グラフは有限連結で, 各頂点の次数は 2 以上とする. グラフ  $X = (V, E)$  に対し,  $|V| = \nu$ ,  $|E| = \epsilon$  とおく.  $X$  の辺には任意の向きが与えてあるとする. 有向辺の集合  $\vec{E}$  を  $\vec{E} = \{e, e^{-1} \mid e \in E\}$  ( $e^{-1}$  は  $e$  の逆向きの辺とする) とおく.  $X$  の有向辺の列  $P = a_1 \cdots a_s$  が  $X$  の path であるとは,  $1 \leq i \leq s-1$  のとき,  $a_i$  の終点と  $a_{i+1}$  の始点と同じときをいう. その長さは  $\ell(P) = s$  で定義される. path  $P = a_1 \cdots a_s$  は  $a_s$  の終点と  $a_1$  の始点一致するとき, closed path といわれる. closed path  $P$  が素サイクル (prime closed path) とは, 次の 2 条件を満たすとき:

- (1)  $P$  には後戻り (backtrack) がない. つまり,  $a_j \neq a_{j+1}^{-1}$  for all  $j = 1, \dots, s-1$ .
- (2)  $P$  には尻尾 (tail) がない. つまり,  $a_s \neq a_1^{-1}$ ,
- (3) 2 以上の整数  $m$  に対し,  $P = C^m$  ( $m$  周) となる closed path  $C$  がない.

closed path  $P = a_1 \cdots a_s$  に対し, 有向辺の並びを巡回させて得られるものを同一視し, その同値類を  $[P] := \{a_1 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \dots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}$  とする.  $P$  が素サイクルのとき,  $[P]$  は  $X$  の prime と呼ばれる (詳しくは [6] を参照).

$|x|$  十分小のとき, Ihara zeta function  $Z_X(x)$  は次の Euler 積で定義される ([3], [6]):

$$Z_X(x) = \prod_{[P]} (1 - x^{\ell(P)})^{-1}$$

$Z_X(x)$  の収束半径を  $R_X$  とかく.  $u = 1/x > 1$  とおく.  $X$  の prime  $[P]$  に対し,  $u^{\ell(P)}$  を  $P$  のノルムと呼ぶ.

**Problem.** グラフのすべての prime のノルムの積 “ $\prod_{[P]} u^{\ell(P)}$ ” は?

$$\pi(n) := (\ell(P) = n \text{ である } X \text{ の prime } [P] \text{ の個数})$$

とおく.  $\pi(n)$  の母関数を

$$P_X(x) := \sum_{[P]} x^{\ell(P)} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n) x^n$$

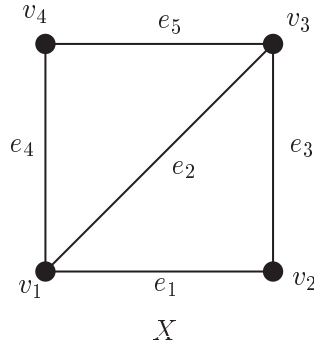
とおく. ここで和は  $X$  のすべての prime  $[P]$  をわたる. 数列  $(u^{\ell(P)})$  に付随するゼータ関数は,

$$\mathcal{P}_X(s) := P_X(u^{-s}) = \sum_{[P]} u^{-s\ell(P)}$$

である.  $X$  が cycle graph でなければ  $R_X < 1$  で,  $\mathcal{P}_X(s)$  は  $\operatorname{Re}(s) > -\log R_X / \log u (> 0)$  で絶対収束する. 本稿では,  $P_X(x)$  と  $\mathcal{P}_X(s)$  を Ihara prime zeta function と呼ぶことにする.

**Example 1.**  $X = K_4 - e$  (下図参照) のとき,

$$\begin{aligned} Z_X(x) &= \frac{1}{1 - 4x^3 - 2x^4 + 4x^6 + 4x^7 + x^8 - 4x^{10}} \\ &= 1 + 4x^3 + 2x^4 + 12x^6 + 12x^7 + 3x^8 + 32x^9 + 52x^{10} + 24x^{11} \\ &\quad + 84x^{12} + 192x^{13} + 136x^{14} + 232x^{15} + 645x^{16} + 640x^{17} \\ &\quad + 728x^{18} + 2044x^{19} + 2662x^{20} + \cdots, \\ P_X(x) &= 4x^3 + 2x^4 + 2x^6 + 4x^7 + 4x^9 + 12x^{10} + 4x^{11} + 6x^{12} + 32x^{13} \\ &\quad + 18x^{14} + 16x^{15} + 80x^{16} + 80x^{17} + 46x^{18} + 196x^{19} + 274x^{20} \\ &\quad + \cdots. \end{aligned}$$



**Theorem 1 (主結果 1).**  $X$  は有限連結グラフで各頂点の次数が 2 以上とする.  $X$  が cycle graph でないとき,  $\mathcal{P}_X(s)$  は  $\operatorname{Re}(s) > 0$  へ次式で解析接続される:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log Z_X(u^{-ns}) \\ &= (\epsilon - \nu)u^{-2s} + u^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log g_X(u^{-ns}), \end{aligned} \tag{1}$$

ここに,  $g_X$  は多項式  $g_X(x) = Z_X(x)/(1-x^2)^{\epsilon-\nu}(1-x)$  である.  $\mathcal{P}_X(s)$  は  $Z_X(u^{-ns})$  の極を特異点としてもつ. さらに,  $\operatorname{Re}(s) = 0$  は  $\mathcal{P}_X(s)$  の自然境界となる.

Theorem 1 より,  $\mathcal{P}'_X(0)$  は定義されないので, グラフのすべての prime のノルムの “積” を考える場合, 超正規化積を考える必要がある.

式 (1) を次の 2 変数関数に拡張する:

$$\mathcal{P}_X(s, t) := (\epsilon - \nu)u^{-2s} + u^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{1+t}} \log g_X(u^{-ns}).$$

$\mathcal{P}_X(s, t)$  は  $\{\operatorname{Re}(s) > -\log R_X / \log u\} \times \{t \in \mathbb{C}\}$  で絶対収束する.  $\mathcal{P}_X(s, 0) = \mathcal{P}_X(s)$  で,  $\mathcal{P}_X(s, t)$  は超正規化積を与える 2 変数関数の条件 1 ~ 3 をすべてみたしている.

**Theorem 2** (主結果 2).  $X$  は有限連結グラフで各頂点の次数が 2 以上とする.  $X$  が cycle graph でないとき,  $X$  のすべての prime  $[P]$  のノルム  $u^{\ell(P)}$  ( $u > 1$ ) の超正規化積は次で与えられる:

$$\widehat{\prod_{[P]} u^{\ell(P)}} = u^{2(\epsilon-\nu)+1-\frac{g'_X(1)}{(\epsilon-\nu)\kappa}},$$

ここに,  $\kappa$  は  $X$  の complexity とする.

*Proof.* (証明のスケッチ)  $\operatorname{Re}(t) > 1$  なる各  $t$  に対し,  $s$  の関数  $\frac{\partial \mathcal{P}_X}{\partial s}(s, t)$  は,  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  へ有理型関数として解析接続される:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_X}{\partial s}(s, t) = -(\log u) \left\{ 2(\epsilon - \nu)u^{-2s} + u^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^t} \frac{g'_X(u^{-ns})}{g_X(u^{-ns})} u^{-ns} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_X}{\partial s}(0, t) &= -(\log u) \left\{ 2(\epsilon - \nu) + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^t} \frac{g'_X(1)}{g_X(1)} \right\} \\ &= -(\log u) \left\{ 2(\epsilon - \nu) + 1 + \frac{g'_X(1)}{2(\epsilon - \nu)\kappa} \cdot \frac{1}{\zeta(t)} \right\}, \end{aligned}$$

ここで,  $g'(1) = -2(\epsilon - \nu)\kappa$  を用いた ([5] 参照). 最後の式により,  $\frac{\partial \mathcal{P}_X}{\partial s}(0, t)$  は  $t = 0$  へ正則関数として解析接続される.  $1/\zeta(0) = -2$  より,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{P}_X}{\partial s}(0, t) &= -(\log u) \left\{ 2(\epsilon - \nu) + 1 - \frac{g'_X(1)}{(\epsilon - \nu)\kappa} \right\}, \\ \widehat{\prod_{[P]} u^{\ell(P)}} &= \exp \left( -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{P}_X}{\partial s}(0, t) \right) = u^{2(\epsilon-\nu)+1-\frac{g'_X(1)}{(\epsilon-\nu)\kappa}}. \end{aligned}$$

□

## 参考文献

- [1] C.-E. Fröberg, On the prime zeta function. BIT **8**, 187-202 (1968).
- [2] E. M. Garcia and R. P. Marco, The product over all primes is  $4\pi^2$ , Commun. Math. Phys. **277**, 69-81 (2008).
- [3] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two by two projective linear group over  $p$ -adic fields, J. Math. Soc. Japan, **18**, 219-235 (1966).
- [4] E. Landau and A. Walfisz, Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen, Rend. Circ. Math. Palermo **44**, 82-86 (1920).
- [5] S. Northshield, A note on the zeta function of a graph, J. Combin. Theory Ser. B, **74** no.2, 408-410 (1998).
- [6] A. A. Terras, *Zeta Functions of Graphs: A Stroll through the Garden*, Cambridge U. Press, 2011.

# 多重ベルヌーイ数の 2-order と 3-order について

坂田 実加\* (近畿大学総合理工)

## 1 Introduction

ベルヌーイ数は, Jakob Bernoulli や関孝和らによって発見された数であり, べき乗和の公式やリーマン・ゼータ関数などに関わるものである. ベルヌーイ数は以下のように定義される.

**Definition 1.1** (ベルヌーイ数). ベルヌーイ数  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を逐次

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定める。

ベルヌーイ数の分母は, 以下の定理から完全に決定することができる. なお, ベルヌーイ数の 3 以上の奇数番目は 0 となることが知られている.

**Theorem 1.2** (クラウゼン・フォンシュタウトの定理).  $n = 1$  および 2 以上の各偶数  $n$  に対し,  $B_n$  は

$$B_n = - \sum_{\substack{p: \text{素数} \\ p-1|n}} \frac{1}{p} + C_n \quad (C_n \in \mathbb{Z})$$

の形に書ける。

## 2 多重ベルヌーイ数

多重ベルヌーイ数は, 1997 年に金子昌信先生によって定義されたベルヌーイ数の一般化の 1 つである.

---

\*e-mail:mika@math.kindai.ac.jp

**Definition 2.1** (多重ベルヌーイ数).  $k$  重ベルヌーイ数  $\mathbb{B}_n^{(k)} \in \mathbb{Q}$  ( $n \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ ) を、母関数により

$$\frac{Li_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{B}_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

で定義する。ここで、整数  $k$  に対し  $Li_k(t)$  は形式的べき級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^k}$  を表す。

この定義は、古典的ベルヌーイ数の一般化になっており、 $k$  が 1 のとき古典的ベルヌーイ数の母関数表示

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

と一致する。つまり、古典的ベルヌーイ数の母関数表示の分子を多重対数級数に置き換えることで古典的ベルヌーイ数を拡張されたのが金子昌信先生である。

多重ベルヌーイ数は、[1] で荒川恒男先生と金子昌信先生によって定義されたゼータ関数  $\xi_k(s)$  の負の整数点での値だということがわかっている。また、正の整数点での値は多重ゼータ値である。

次に、2 重ベルヌーイ数の分母の決定に関する定理を紹介する。

**Theorem 2.2** (M. Kaneko[4]). 素数  $p$  に対して、次が成り立つ。

(1)  $n$  が奇数のとき  $\mathbb{B}_n^{(2)} = -\frac{(n-2)}{4} B_{n-1}$ .

(2)  $n$  を偶数 ( $\geq 2$ ) のとき,

(2-1)  $p > n + 1$  ならば  $\text{ord}_p(\mathbb{B}_n^{(2)}) \geq 0$ .

(2-2)  $5 \leq p \leq n + 1$  なる  $p$  について,

(a)  $p - 1 \mid n$  ならば  $\text{ord}_p(\mathbb{B}_n^{(2)}) = -2$ .

(b)  $p - 1 \nmid n$  のとき,

(b-1)  $p \mid \frac{B_n}{n}$  であるか、または  $1 < n' < p - 1$  なる  $n'$  があって

$n \equiv n' \pmod{p(p-1)}$  のとき、 $\text{ord}_p(\mathbb{B}_n^{(2)}) \geq 0$ .

(b-2) その他のとき、 $\text{ord}_p(\mathbb{B}_n^{(2)}) = -1$ .

(2-3)  $n > 2$  かつ  $n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき、 $\text{ord}_3(\mathbb{B}_n^{(2)}) \geq 0$ ,

その他のとき、 $\text{ord}_3(\mathbb{B}_n^{(2)}) = -2$ .

(2-4)  $n > 2$  かつ  $n \equiv 2 \pmod{4}$  のとき、 $\text{ord}_2(\mathbb{B}_n^{(2)}) \geq 0$ ,

$n \equiv 0 \pmod{4}$  のとき、 $\text{ord}_2(\mathbb{B}_n^{(2)}) = -1$ ,

$n = 2$  のとき、 $\text{ord}_2(\mathbb{B}_2^{(2)}) = -2$ .

### 3 Main Theorems

Theorem 2.2(2-4) の精密化として, 2 重ベルヌーイ数の 2-order について, 以下の結果が得られた.

**Theorem 3.1.** 2 以上の自然数  $m$  に対して,

$$\text{ord}_2 \left( \mathbb{B}_{2m}^{(2)} \right) \geq \text{ord}_2 (m+1) - 1$$

が成り立つ.

**Theorem 3.2.**  $n$  を 2 より大きい偶数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{8} \text{ のとき, } \text{ord}_2 \left( \mathbb{B}_n^{(2)} \right) \geq 1, \\ n \equiv 2 \pmod{8} \text{ のとき, } \text{ord}_2 \left( \mathbb{B}_n^{(2)} \right) = 0, \\ n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき, } \text{ord}_2 \left( \mathbb{B}_n^{(2)} \right) = -1. \end{cases}$$

また, Theorem 2.2(2-3) の精密化として, 2 重ベルヌーイ数の 3-order について, 以下の結果が得られた.

**Theorem 3.3.**  $n$  を 2 より大きい偶数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} n \equiv 2, 14 \pmod{18} \text{ のとき, } \text{ord}_3 \left( \mathbb{B}_n^{(2)} \right) \geq 1, \\ n \equiv 8 \pmod{18} \text{ のとき, } \text{ord}_3 \left( \mathbb{B}_n^{(2)} \right) = 0, \\ \text{その他のとき, } \text{ord}_3 \left( \mathbb{B}_n^{(2)} \right) = -2. \end{cases}$$

### 参考文献

- [1] T. Arakawa, M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions. Nagoya Math. J., **153** (1999) 189-209.
- [2] T. Arakawa, M. Kaneko, On poly-Bernoulli numbers, Comment. Math. Univ. Sanct. Pauli, **48** (1999) 159-167
- [3] C. Brewbaker, A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues, *Integers*, **8** (2008) A02.
- [4] M. Kaneko, Poly-Bernoulli numbers, *Jour. Th. Nombre Bordeaux*, **9** (1997) 199-206.



# 一般の位置にある $n + 4$ 点集合の極小自由分解に関する考察

～ $\deg X = \operatorname{codim} X + i (i = 1, 2, 3)$  となる射影多様体について～

矢城 信吾

2013年3月4日～3月7日

## 1 歴史的背景

この研究は、次のような古典的な命題から出てきた。

**Proposition 1.1.**  $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$  を非退化射影多様体とすると、 $\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1$  が成立する。

この命題から次のような問題が出てくる。

$$\deg X = \operatorname{codim} X + i (i = 1, 2, 3, \dots)$$

となるような射影多様体の分類である。この問題に対して、次のようなアプローチが考えられてきた。 $\Delta := \deg X - \operatorname{codim} X - 1$  として、 $\Delta$  の値のついて考察していく方法（雑にいうと幾何学的なアプローチ）と  $\deg X, \operatorname{codim} X$  など、次数付き環の言葉に翻訳する方法である。尚、この命題は  $X$  を射影代数的集合としても、議論ができる。（ $\deg X = \operatorname{codim} X + i (i = 1, 2)$  についての分類結果は後述）そこで、本稿では、点集合の場合（ $\operatorname{codim} X = n$  の場合）をいくつか取り上げて、結果を述べていきたいと思う。

## 2 準備

以下、 $k$  を代数的閉体とし、 $S = k[x_0, \dots, x_n]$  を多項式環とし、次数付き環として考える。 $M$  を有限生成次数付き  $S$  加群とする。このとき、次のような分解が存在する。各  $F_i = \bigoplus S^{\beta_{i,j}}(-j)$  としたとき

$$0 \rightarrow F_r \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M.$$

この分解において、すべての  $i$  に対して、 $\operatorname{Im} \varphi_i \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$  が成立するとき、 $M$  の（ $S$  加群としての）Minimal Free Resolution（以下、MFR）という。この  $\beta_{i,j}$  を Betti number といい、次のような表（Betti diagram）で表す。

|         | 0               | 1               | $\dots$ | $r$               |
|---------|-----------------|-----------------|---------|-------------------|
| $i$     | $\beta_{0,i}$   | $\beta_{1,i+1}$ | $\dots$ | $\beta_{r,i+r}$   |
| $i+1$   | $\beta_{0,i+1}$ | $\beta_{1,i+2}$ | $\dots$ | $\beta_{r,i+r+1}$ |
| $\dots$ | $\dots$         | $\dots$         | $\dots$ | $\dots$           |
| $j$     | $\beta_{0,j}$   | $\beta_{1,j+1}$ | $\dots$ | $\beta_{r,j+r}$   |

また、有限生成次数付き  $S$  加群  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  の第  $d$  次成分  $[M]_d$  は、有限次元  $k$  ベクトル空間であるから、 $M$  の Hilbert 関数  $H_M$  が次で定義される。

$$H_M(d) := \dim_k [M]_d.$$

この Hilbert 関数と Betti number の関係は次のようになる。

**Proposition 2.1.**  $\{\beta_{i,j}\}$  を有限生成次数付き  $S$  加群  $M$  の Betti number とする。  $B_j := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \beta_{i,j}$  とすると、次のような関係が成立する。

$$H_M(d) = \sum_{j \geq 0} B_j \binom{n+d-j}{n}.$$

また、 $B_j$  は次のように書き換えられる。

$$B_j = H_M(j) - \sum_{k < j} B_k \binom{n+j-k}{n} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k H_M(j-k) \binom{n+1}{k}.$$

**Proposition 2.2.**  $\{\beta_{i,j}\}$  を有限生成次数付き  $S$  加群の Betti number とする。ある  $i$  に対して、 $d \in \mathbb{N}$  がとれて、 $\beta_{i,j} = 0 (\forall j < d)$  が成り立つとき、 $\beta_{i+1,j+1} = 0 (\forall j < d)$  が成立する。

以下に、minimal degree, almost minimal degree の場合の諸結果を述べておく。

**Theorem 2.3.**  $X \subset \mathbb{P}^n$  を minimal degree となる射影多様体とする。このとき、 $X$  は次のいずれかである。

1. 2次超曲面
2. Veronese 曲面  $\subset \mathbb{P}^5$  およびその錐
3. rational normal scroll およびその錐

このとき、 $S_X$  は Cohen-Macaulay 環である。また  $X$  が点集合のときは、 $\mathbb{P}^n$  内の general position となる  $n+1$  点である。さらに MFR は、Eagon-Northcott complex となる。

**Theorem 2.4.**  $X \subset \mathbb{P}^n$  を almost minimal degree となる射影多様体とする。このとき、 $X$  は normal な maximally Del Pezzo variety か minimal degree な射影多様体  $X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$  を点  $p \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus X'$  から射影  $\pi_p: X' \rightarrow X$  したものである。

**Theorem 2.5.**  $X \subset \mathbb{P}^n$  を almost minimal degree な射影多様体とし、 $\dim X \geq 1$  とする。このとき、 $S_X$  の MFR は次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow S^{\beta_p}(-p-2) \rightarrow S^{\beta_{p-1}}(-p-1) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow S^{\beta_{c+1}}(-c-3) \rightarrow S^{\beta_c}(-c-2) \oplus S^{\alpha_c}(-c-1) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow S^{\beta_1}(-3) \oplus S^{\alpha}(-2) \rightarrow S. \\ \alpha_1 &= \binom{c+1}{2} - (p+1-c), \\ \beta_i &= \binom{p+1}{i+1} \quad (c \leq i \leq p), \\ \beta_i &\leq \binom{p+1}{i+1} \quad (1 \leq i \leq c-1), \\ \alpha_i - \beta_{i-1} &= (c+1) \binom{c}{i} - \binom{c}{i+1} - \binom{p+1}{i} \quad (2 \leq i \leq c). \end{aligned}$$

以下、 $\mathbb{P}_k^n$  内の general position にある  $n+1, n+2$  点の MFR の計算例である。

**Example 2.6.**  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  を  $\mathbb{P}_k^n$  内で general position にある  $n+1$  点集合とすると、MFR は次のようになる。

|   | 0 | 1                | 2                 | $\cdots$ | $n$               |
|---|---|------------------|-------------------|----------|-------------------|
| 0 | 1 | —                | —                 | $\cdots$ | —                 |
| 1 | — | $\binom{n+1}{2}$ | $2\binom{n+1}{3}$ | $\cdots$ | $n\binom{n+1}{n}$ |

また、 $S_X$  は Cohen-Macaulay である。

**Example 2.7.**  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  を  $\mathbb{P}_k^n$  内で general position にある  $n+2$  点集合とすると、MFR は次のようになる。

(1)  $n \geq 2$  のとき

|   | 0 | 1                                    | 2                                    | $\cdots$ | $n-1$                                  |
|---|---|--------------------------------------|--------------------------------------|----------|----------------------------------------|
| 0 | 1 | —                                    | —                                    | $\cdots$ | —                                      |
| 1 | — | $(n+2)\binom{n}{1} - \binom{n+2}{2}$ | $(n+2)\binom{n}{2} - \binom{n+2}{3}$ | $\cdots$ | $(n+2)\binom{n}{n-1} - \binom{n+2}{n}$ |

(2)  $n = 1$  のとき、 $\beta_{0,0} = \beta_{1,3} = 1, \beta_{i,j} = 0$  ( $(i,j) \neq (0,0), (1,3)$ )。

また、 $S_X$  は Gorenstein である。

以下、幾何的には古典的な結果である。

**Theorem 2.8.**  $\mathbb{P}^n$  内の  $n+3$  点が general position にあるとき、 $n+3$  点を通る rational normal curve が一意的に定まる。

また、rational normal curve の MFR は Eagon-Northcott complex になることが知られている ([?])。これを用いることによって、次のように書き直すことができる。

**Theorem 2.9.**  $\mathbb{P}^n$  内の次数  $n$  の rational normal curve  $X$  の MFR は次のように決定される。

|   | 0 | 1              | 2               | $\cdots$ | $n-1$               |
|---|---|----------------|-----------------|----------|---------------------|
| 0 | 1 | —              | —               | $\cdots$ | —                   |
| 1 | — | $\binom{n}{2}$ | $2\binom{n}{3}$ | $\cdots$ | $(n-1)\binom{n}{n}$ |

### 3 主定理の概略

主定理を紹介する。その前に、1 つ命題を述べておく。これは、 $n$  と点集合の定義イデアルの生成元の次数に関して、考えられることである。

**Proposition 3.1.**  $\mathbb{P}^n$  内の general position にある  $n+4$  点集合の定義イデアルの生成元は、 $n = 1$  のときは、quintic、 $n = 2, 3$  のとき、quadrics と cubics であり、 $n \geq 4$  のとき、quadrics となる。

**Theorem 3.2.**  $^*1X \subset \mathbb{P}^n$  を general position にある  $n+4$  点集合とする。このとき、 $S_X$  の MFR は次のようになる。

<sup>\*1</sup> 掲載時にミスがあったので、省略している。発表時までに修正版を提出する。

特に,  $\mathbb{P}^3$  内の 7 点集合については, 次のことがいえる.

**Corollary 3.3.**  $X \subset \mathbb{P}^3$  を general position にある 7 点集合とする. このとき,  $S_X$  の MFR は次の 2 通りで与えられる.

|   | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | — | — | — |
| 1 | — | 3 | — | — |
| 2 | — | 1 | 6 | 3 |

|   | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | — | — | — |
| 1 | — | 3 | 2 | — |
| 2 | — | 3 | 6 | 3 |

この証明の概略は次のようになる.  $X$  の  $n+3$  点によって, 一意的に rational normal curve が決定される. この rational normal curve は quadrics によって生成される (MFR). この rational normal curve 上に  $n+4$  点目がのっているかそうでないかによって, 分けられる. その際, 準備で使った定理・命題が必要となる.

## 4 まとめ

今回, general position の場合については考察できた. しかしながら, 点集合がそれより弱い場合 (uniform, semi uniform position) やそれ以外の場合の考察が得られていない. (点集合が何か, MFR のわかっている曲線上にあるのは, 計算しやすいと思われるが...) 今後の課題である.

## 謝辞

第 9 回数学総合若手研究集会に参加させて頂き, ありがとうございます. この場を借りまして, 運営委員の皆様, 感謝の意を表します.

## 参考文献

- [B-P.1] M.Brodmann, P.Schenzel : Arithmetic properties of projective varieties of almost minimal degree. J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 2, 347-400.
- [Ei1] D.Eisenbud : The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 229. Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+243 pp. ISBN: 0-387-22215-4
- [E-H.1] D.Eisenbud, J.Harris : On varieties of minimal degree (a centennial account). Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 3-13, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Fu1] T.Fujita : Classification theories of polarized varieties. London Mathematical Society Lecture Note Series, 155. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xiv+205 pp. ISBN: 0-521-39202-0 .
- [H-S-V.1] L.T.Hoa, J.Stuckrad, W.Vogel : Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. J. Pure Appl. Algebra 71 (1991), no. 2-3, 203-231.
- [Ho] L.T.Hoa: On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. J. Pure Appl. Algebra 87 (1993), no. 3, 241-250.

# A congruence property of Igusa's cuspform of weight 35

兒玉 浩尚 (近畿大学総合理工)\*

## 概 要

井草のウエイト 35 のカスプ形式がある合同関係を満たすことを報告する．証明には奇数ウエイトの場合の Sturm 型定理と数値計算を用いる．

## 1. 緒言

井草は 2 次 Siegel モジュラー形式の次数付き環の生成元  $\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}$  を与えた ([5])．ここで  $\varphi_k$  は  $\Gamma_2$  に対する正規化された Eisenstein 級数を表し， $\chi_k$  はウエイト  $k$  のカスプ形式を表す．これらの生成元の中で  $\chi_{35}$  のみが奇数ウエイトである．この講演では， $\chi_{35}$  を適当に正規化して得られる奇数ウエイトのカスプ形式  $X_{35}$  が満たす不思議な合同関係を報告する．

## 2. 主結果

主定理  $a(T; X_{35})$  で  $X_{35}$  の  $T$  における Fourier 係数を表すものとする． $\det(T) \not\equiv 0 \pmod{23}$  ならば

$$a(T; X_{35}) \equiv 0 \pmod{23}$$

である．すなわち

$$\Theta(X_{35}) \equiv 0 \pmod{23}$$

である．

## 3. 記号と定義

$n$  次 Siegel 上半空間  $\mathbb{H}_n$  を

$$\mathbb{H}_n := \{Z \in \text{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid Z = X + iY, Y > 0\}$$

とする．ここで  $Y > 0$  は  $Y$  が正定値であることを意味する．

$n$  次シンプレクティック群  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  を

$$\text{Sp}_n(\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t M J_n M = J_n, J_n = \begin{pmatrix} O_n & -E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix} \right\}$$

とする．ここで  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$  であり， $O_n$  は  $n$  次零行列， $E_n$  は  $n$  次単位行列を表す．

群  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  の  $\mathbb{H}_n$  への (左からの) 作用

$\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}_n \ni (M, Z) \mapsto M \langle Z \rangle \in \mathbb{H}_n$  を

$$M \langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \left( M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \right)$$

で定める．

---

\* e-mail: kodama@math.kindai.ac.jp

また  $\Gamma_n = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$  を  $n$  次フル Siegel モジューラー群とする .

$F : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$  が以下の条件を満たすとき ,

$F$  を  $n$  次 Siegel モジューラー形式と呼ぶ .

- (1)  $F$  は  $\mathbb{H}_n$  上正則
- (2)  $f(M\langle Z \rangle) = \det(CZ + D)^k f(Z)$

任意の  $n$  次 Siegel モジューラー形式  $F(Z)$  は

$$F(Z) = \sum_{T \in L_n} a(T; F) q^T, \quad q^T := e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}, \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

という形の Fourier 展開をもつ . ここで

$L_n := \{0 \leq T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ii}, 2t_{ij} \in \mathbb{Z}, \}$  である .

さらに  $n$  次 Siegel モジューラー形式  $F(Z)$  が

- (3)  $T > 0$  でなければ  $a(T; F) = 0$

を満たすとき ,  $F(Z)$  はカスプ形式であるという .

$M_k(\Gamma_n)$  で  $\Gamma_n$  に対するウエイト  $k$  の Siegel モジューラー形式全体のなす  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間を表し ,  $S_k(\Gamma_n)$  でカスプ形式全体のなす部分空間を表す .

以下では  $T = (m, n, r)$  で  $T = \begin{pmatrix} m & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & n \end{pmatrix} \in L_2$  を表す .

#### 4. 井草の生成元

$$M(\Gamma_2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma_2)$$

を 2 次 Siegel モジューラー群の次数付き環とする . 井草は環  $M(\Gamma_2)$  の 5 つの生成元

$$\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35},$$

を与えた ([5]) . ここで  $\varphi_k$  は  $\Gamma_2$  に対する正規化された Eisenstein 級数を表し ,  $\chi_k$  はウエイト  $k$  のカスプ形式を表す .

さらに偶数ウエイトの生成元  $\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}$  は代数的独立であることも示した ([5]) . 井草は後にこの結果を有理整数係数の場合に拡張した ([6]) . すなわち環

$$M(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$$

の  $\mathbb{Z}$  上の生成元を与えた . この 15 個の生成元に

$$X_4 := \varphi_4, \quad X_6 := \varphi_6, \quad X_{10} := -2^{-2}\chi_{10}, \quad X_{12} := 2^2 \cdot 3\chi_{12}, \quad X_{35} := 2^2 i\chi_{35}$$

が含まれる .

もちろんこれらは以下の正規化の下で有理整数の Fourier 係数を持つ .

$$\begin{aligned} a((0, 0, 0); X_4) &= a((0, 0, 0); X_6) = 1 \\ a((1, 1, 1); X_{10}) &= a((1, 1, 1); X_{12}) = 1 \\ a((2, 3, -1); X_{35}) &= 1 \end{aligned}$$

## 5. 辞書式順序と $p$ -極小行列

二つの異なる正定値行列  $T = (m, n, r)$  ,  $T' = (m', n', r') \in L_2$  に対する辞書式順序 “ $\succ$ ” を

$$\begin{aligned} T \succ T' \iff & (1) \operatorname{tr}(T) > \operatorname{tr}(T') \text{ or } (2) \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(T'), m > m' \text{ or} \\ & (3) \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(T'), m = m', r > r'. \end{aligned}$$

で定める .

$p$  を素数とし ,  $\mathbb{Z}_{(p)}$  を  $p$ -整有理数全体からなる局所環とする .  $F \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  に対して ,  $F$  の  $p$ -極小行列  $m_p(F)$  を

$$m_p(F) := \min\{T \in L_2 \mid a(T; F) \not\equiv 0 \pmod{p}\},$$

とする . ここでの “min” は辞書式順序の意味で定める .

$F \equiv 0 \pmod{p}$  のときは  $m_p(F) = (\infty)$  と定める .

## 6. テータ作用素

Serre は  $p$ -進モジュラー形式の理論を発展させるために楕円モジュラー形式のテータ作用素  $\theta$  を用いた ([7]):

$$\theta = q \frac{d}{dq} : f = \sum a(T; F) q^T \longmapsto \theta(f) := \sum t \cdot a(t; f) q^t.$$

後に Siegel モジュラー形式の場合に一般化された:

$$\Theta : F = \sum a(T; F) q^T \longmapsto \Theta(F) := \sum \det(T) \cdot a(T; F) q^T$$

(e.g. [3]) . さらに以下の事実が示されている .

定理 (Böcherer-Nagaoka [3])  $p$  を  $n + 3$  以上の素数とする .

このとき任意の Siegel モジュラー形式  $F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  に対して , ある Siegel カスプ形式  $G \in S_{k+p+1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  が存在して

$$\Theta(F) \equiv G \pmod{p}$$

となる .

## 7. 奇数ウエイトの Sturm 型定理

2 次 Siegel モジュラー形式に対する Sturm 型定理は [4] で示されている．主結果を証明するためには奇数ウエイトの場合の Sturm 型定理が必要となる．

奇数ウエイトの場合の Sturm 型定理  $p$  を 5 以上の素数とし， $k$  を正の奇数とする． $F \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  が  $([\frac{k-35}{10}], [\frac{k-35}{10}], r_0) \in L_2$  を満たす最大値  $r_0 \in \mathbb{Z}$  に対して  $m_p(F) \succ ([\frac{k-35}{10}] + 2, [\frac{k-35}{10}] + 3, r_0 - 1)$  を満たすならば， $m_p(F) = (\infty)$ ，すなわち  $F \equiv 0 \pmod{p}$  である．

注意  $F \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  が奇数ウエイトのとき， $X_{35}M_{k-35}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  は偶数ウエイトである．従って

“ $0 \leq m, n \leq \frac{k+35}{10}$  及び  $4mn - r^2 \geq 0$  を満たす任意の  $m, n, r$  に対して  $a((m, n, r); F) \equiv 0 \pmod{p}$  となるとき  $F \equiv 0 \pmod{p}$ ”

である．しかしながら，我々の目的にはこの評価よりも奇数ウエイトの場合の Sturm 型定理のほうが良い評価である．

以上の定理を  $X_{35}$  に対応する重さ 59 のカスプ形式に適用すれば， $X_{35}$  の Fourier 係数でトレースが 9 以下の  $T$  に対し，主定理を確かめればよいことがわかる．この範囲の  $T$  に関する Fourier 係数を具体的に計算することにより主定理は証明される．

注意 (1) 主定理の逆の主張は一般的に成り立たない．実際

$$a((1, 6, 1); X_{35}) = 0 \quad \text{かつ} \quad \det((1, 6, 1)) = 23/4 \equiv 0 \pmod{23}$$

である．

(2) 2 次の Siegel モジュラー形式に関するもう 1 つの “modulo 23” 合同関係が知られている． $\Delta(z)$  をウエイト 12 の楕円カスプ形式 (Ramanujan のデルタ) とし， $\Delta$  に対応する Klingen 型 Eisenstein 級数を  $[\Delta]$  とする．このとき  $[\Delta] \in M_{12}(\Gamma_2)$  であり， $\det(T) \not\equiv 0 \pmod{23}$  ならば

$$a(T; [\Delta]) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成り立つことが示されている．我々の事実との関連は解明されていない．

## 参考文献

- [1] H. Aoki, T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products, Int. J. Math. **16**, 249-279(2005)
- [2] S. Böcherer, Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades, Math. Ann. **261**, 23-41(1982)
- [3] S. Böcherer, S. Nagaoka, On mod  $p$  properties of Siegel modular forms, Math. Ann. **338**, 421-433(2007)
- [4] D. Choi, Y. Choie, T. Kikuta, Sturm type theorem for Siegel modular forms of genus 2 modulo  $p$ , to appear in Acta Arith.
- [5] J.-I. Igusa, On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math. **84**, 175-200(1962), II, ibid. **86**, 392-412(1964)
- [6] J.-I. Igusa, On the ring of modular forms of degree two over  $\mathbb{Z}$ , Amer. J. Math. **101**, 149-183(1979)
- [7] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta  $p$ -adiques, Modular Functions of One Variable III(Antwerp, 1972), Lecture Notes in Math. Vol. 350, 191-268

# 至る所 good reduction をもつ 3 次体上の楕円曲線について

筒石 奈央 (Nao Takeshi)\*<sup>1</sup>

津田塾大学大学院理学研究科 博士課程 1 年

至る所 good reduction をもつ楕円曲線については、例えば有理数体上の非存在が知られている。有理数体を他の代数体に取り換えるとどうなるか、という問題に対して、2 次体を中心に多くの結果がある。しかし、3 次以上の体については 2 次体ほど多くの結果は知られていない。そこで、3 次体の場合を考察し、まず、至る所 good reduction をもつ楕円曲線が存在しないための条件を与える。証明の鍵となるのは、ある至る所 good reduction をもつ楕円曲線を 1 次方程式の単数解へと帰着させることである。次に、その方程式の単数解を使って、至る所 good reduction をもつ楕円曲線と 3 次定義体の無限族を構成する。

本稿の構成は以下とした。節 1 で至る所 good reduction をもつ代数体の楕円曲線の定義を復習する。節 2 では、至る所 good reduction をもつ楕円曲線の非存在を示す際に有効な一つの手法を紹介する。そして、3 節で主結果を紹介する。

## 1 定義

**定義**  $K$  を代数体とし、

$$E: y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (a_i \in K) \quad (1)$$

で定義される非特異射影曲線  $E$  を  $K$  上の楕円曲線<sup>\*2</sup>といい、この形の方程式を  $E$  の Weierstrass 方程式と呼ぶ。

**事実** ([Silverman, □.1, Proposition 1.4.])  $E$  が非特異曲線であることは、係数  $a_i$  で定まる「判別式」 $\Delta$  が 0 でないことと同値である。したがって、楕円曲線とは、判別式が  $\Delta \neq 0$  となる Weierstrass 方程式で定義される曲線のことである。

さて、 $K$  の楕円曲線  $E$  の係数が  $K$  の整数環の元であれば、 $K$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して、係数を  $\text{mod } \mathfrak{p}$  することで、剰余体上の曲線を考えることができるが、その曲線が剰余体上の楕円曲線になるとは限らない。例えば、 $y^2 = x^3 + 5$  は  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線だが、係数を  $\text{mod } 5$  して得られる剰余体  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  上の曲線  $y^2 = x^3$  は特異点  $(x, y) = (0, 0)$  をもつので、剰余体  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  上の楕円曲線ではない。係数を  $\text{mod } \mathfrak{p}$  して得られる曲線が剰余体上でも楕円曲線となると、 $\mathfrak{p}$  で good reduction をもつという。正確には、次のように素イデアルごとにとれる  $E$  の「minimal model」で考える必要がある。

---

\*<sup>1</sup> e-mail: m10ntake@gm. tsuda. ac. jp

\*<sup>2</sup>  $E$  は無限遠に  $K$  有理点を唯一つもち、 $K$  有理点全体に無限遠点を単位元にもつ Abel 群の構造が入ることはよく知られている。

**定義** 楕円曲線  $E$  に対して,  $\tilde{E}_{\mathfrak{p}}$  を,  $K$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  における  $E$  の「minimal model<sup>\*3</sup>」を  $\mathfrak{p}$  で reduction した曲線とする.  $\tilde{E}_{\mathfrak{p}}$  が非特異曲線であるとき,  $E$  は  $\mathfrak{p}$  で good reduction をもつという.

一般に, minimal model は素イデアルごとに決まるが, すべての素数で同時に minimal となる model がとれることがあり, そのような model のことを global minimal model という. 例えば, 上で挙げた有理数体上の楕円曲線  $y^2 = x^3 + 5$  はこれ自身が global minimal model であり, その判別式は  $-10800 = -2^4 3^3 5^2$  である. したがってこの場合, good reduction を持たないのは,  $2, 3, 5$  である. global minimal model について, 以下のことが知られている.

**事実** ([Setzer, Corollary]) 代数体  $K$  の類数が  $6$  と素とし,  $K$  上の楕円曲線  $E$  は, 至る所 good reduction をもつとする. このとき,  $E$  は global minimal model をもつ. つまり,  $E$  は判別式が単数となる model がとれる.

## 2 至る所 good reduction をもつ楕円曲線の非存在を示すこと

本節は [Kida] を参考にした. [Kida] には, 至る所 good reduction をもつ楕円曲線を見つけるいくつかの手法が簡潔にまとめられている.

$E$  を至る所 good reduction をもつ代数体  $K$  上の楕円曲線,  $\Delta$  をその判別式,  $E[2]$  を  $E$  の  $2$  倍写像の核とする. このとき,  $K(E[2])$  は次の性質をもつ.

**事実** ([Silverman, Proposition VII.4.1.])  $K(E[2])/K$  は  $2$  の上の素イデアルと無限素点の外不分岐なガロア拡大.

これによって,  $3$  次拡大  $K(E[2])/K(\sqrt{\Delta})$  に強い制限がかかり, 次が成り立つ.  $L$  は  $K(\sqrt{\Delta})$  になりうるものの候補で, それらは具体的に求めることができる.

**系**  $L$  を  $K$  上の  $2$  の外不分岐な  $2$  次以下の拡大とすると,  $K$  の ray class number modulo  $2$  が  $3$  で割れなければ,  $E$  は位数  $2$  の  $K$  有理点を持つ.

また,  $E$  が位数  $2$  の  $K$  有理点をもつとすれば, その点を  $(0, 0)$  に移動することによって,

$$Y^2 = X^3 + AX^2 + BX, \quad \Delta = 2^4 B^2 (A^2 - 4B)$$

---

<sup>\*3</sup> 係数が  $\mathfrak{p}$  の付値整数環の元である  $E$  の model で, その判別式の  $\mathfrak{p}$  指数  $v_{\mathfrak{p}}(\Delta)$  が, 最小正整数となるもののこと.

が得られる.

**事実** 特に,  $E$  が global minimal model をもつ場合は,

$$2^4 B^2 (A^2 - 4B) = 2^{12} \Delta_0 \quad (\Delta_0 \text{ は global minimal model の判別式, したがって単数}).$$

この時,  $B$  は 2 の冪を割り切る. これが, この不定方程式を解くヒントになり, 位数 2 の点をもつものについては, ある程度分かるということになる. したがって,  $K(E[2])$  の性質からくる事実と合わせれば, 非存在の判定ができる.

### 3 主結果

次の定理は, 至る所 good reduction をもつ楕円曲線の非存在のための条件を与える. これは  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  上の非存在を述べた [Bertolini-Canuto] の一般化にあたる.

**定理 A**  $K$  を次の条件をみたす 3 次体とする.

- (1) 2 は  $K/\mathbb{Q}$  で不分解
- (2)  $K$  の狭義類数は 6 と素
- (3) すべての  $K$  の単数  $u$  について,  $K(\sqrt{u})$  の類数は 3 と素

このとき, 至る所 good reduction をもつ  $K$  上の楕円曲線は存在しない.

証明は次のように行う.

- (I) 仮定 (1), (2), (3) の下, 至る所 good reduction をもつ楕円曲線は, 位数 2 の  $K$  有理点をもつ.
- (II) 仮定 (1), (2) の下, 至る所 good reduction をもち, 位数 2 の  $K$  有理点をもつ楕円曲線が存在するならば,  $x + 16y = 1$  などの 1 次方程式に単数解がある.
- (III) (1), (2) の下, (II) の 1 次方程式に単数解はない.

(I) は 2 節で述べた事実から示される. (II) の証明では, 位数 2 の  $K$  有理点をもつ楕円曲線の事実を使う. そして, (III) については  $x + 16y = 1$  の単数解をもつ 3 次体を特徴づけ, 単数解がないことを示す.

定理 A の証明に登場した, (II) 至る所 good reduction をもつ楕円曲線と 1 次方程式の単数解との対応づけは, 至る所 good reduction をもつ楕円曲線の存在についての次の結果もたらす.

**主定理 B**  $K$  を次の式で定まる 3 次体とし,

$$f_b(X) = X^3 - 16(b - 16)X^2 + bX - 1 \quad (b \in \mathbb{Z})$$

$\epsilon \in K$  を  $f_b(X)$  の根とする.  $K$  上の楕円曲線

$$Y^2 + XY = X^3 - 8\epsilon X^2 - \epsilon(1 - 16\epsilon)X \quad (2)$$

は至る所 good reduction をもつ. また,  $b \in \mathbb{Z}$  を動かせば無限に多くの 3 次体  $K(= K_b)$  が得られる.

$(\epsilon, 1 - 16\epsilon)$  は, 定理 A の証明で登場した方程式  $x + 16y = 1$  の単数解で, 楕円曲線 (2) は  $\epsilon$  によって構成される.

### Acknowledgement.

第 9 回数学総合若手研究集会に参加させて頂いた上, 講演の機会を下さり, 運営委員の方々に厚く御礼申し上げます.

## 参考文献

- [Bertolini-Canuto] M. Bertolini and G. Canuto: Good reduction of elliptic curves defined over  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ , Arch. Math. (Basel) 50 (1988), no. 1, 42–50.
- [Kida] M. Kida: 楕円曲線の reduction について –二次体における計算例を中心に, 第 43 回代数学シンポジウム報告集 pp.132–143 (1998)
- [Setzer] B. Setzer: Elliptic curves over complex quadratic fields, Pacific journal of mathematics, Vol. 74, No. 1 (1978)
- [Silverman] J. H. Silverman: The Arithmetic of Elliptic Curves (2nd edition), Graduate Texts in Math. 106, Springer Dordelberg London New York, 2009

# 量子群の categorification

穂坂 秀昭\*

2012 年 12 月 27 日

## 概要

近年, (代数的) categorification という手法が話題になっている. これは一言で言うと代数を「圏に持ち上げる」という操作である. より正確に言うと, ある代数に対し,  $K$  群を取るとその代数になるような圏を構成することを指す. 今回の講演では, 量子群が Khovanov–Lauda–Rouquier 代数と呼ばれる代数の加群の圏で categorify されるという事実について, 大まかなストーリーを紹介したい.

なお 2011 年 12 月に東大数理で柏原正樹氏による量子群の categorification についての講義が行われた. 現在その講義のレクチャーノート執筆している最中であり, 当研究集会の前後に東大数理の刊行物 Lecture Notes in Mathematical Sciences の 1 冊として刊行される予定である. 本稿はレクチャーノートの proper subset であり, レクチャーノートは <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/index-j.html> 内の「刊行物」のページから無料でダウンロードできるようになる. 興味を持たれた方は, 是非こちらをご覧ください.

## 1 categorification とは

### 1.1 有理整数環 $\mathbb{Z}$ の categorification

まず最初に, 最も簡単な例である有理整数環  $\mathbb{Z}$  の categorification を紹介する. 厳密なことは一切後回しにして, ここでは categorification の雰囲気を感じ取っていただきたい.

よく知られている通り  $\mathbb{Z}$  は環である.  $\mathbb{Z}$  には加法  $+$  と乗法  $\times$  が定義されていて, これらの演算が結合法則や分配法則といったいくつかの性質を満たしている. categorification とは, これらの性質を圏に「持ち上げる」ことをいう.

そのために用いるのが有限次元線型空間のなす圏である<sup>\*1</sup>.  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  で有限次元複素線型空間全体のなす圏を表す.  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  には直和とテンソル積が定義されている. これらの操作と線型空間の次元との関係は

$$\dim V \oplus W = \dim V + \dim W, \quad \dim V \otimes W = \dim V \times \dim W$$

で与えられる. さらに直和とテンソル積は結合則と分配則を満たす. したがって  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  で直和  $\oplus$  とテンソル積  $\otimes$  を考えると, 「次元を取る」という操作によって  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  から整数が復元され, 直和とテンソル積がそれぞれ加法と乗法に落ちてくるように見える.

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}_{\mathbb{C}} & \oplus & \otimes \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{Z} & + & \times \end{array}$$

この事実をもって「 $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  は  $\mathbb{Z}$  を categorify する」と言うのである.

\* 東京大学大学院数理科学研究科 博士 2 年, [hosaka@ms.u-tokyo.ac.jp](mailto:hosaka@ms.u-tokyo.ac.jp)

<sup>\*1</sup> 係数体は何でも良い. 以下では係数体を複素数体  $\mathbb{C}$  として話を進める.

## 1.2 $K$ 群の定義と例

さて, 今の categorification を厳密に述べるには  $K$  群の概念が必要である. その定義は次の通りである.

**Definition 1.1.**  $\mathcal{C}$  を Abel 圏とする<sup>\*2</sup>.  $\mathcal{C}$  の  $K$  群とは, 以下の生成元と関係式で定義される  $\mathbb{Z}$  加群である.

- 生成元:  $\mathcal{C}$  の各対象  $M$  に対応する記号  $[M]$
- 関係式:  $\mathcal{C}$  における完全列  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  があるとき,  $[M_2] = [M_1] + [M_3]$

先の例  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  の場合に,  $K$  群  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  を調べてみよう.

1.  $V, W \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}$  が同型なとき, 同型射  $V \rightarrow W$  によって完全列  $0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0 \rightarrow 0$  が得られる. よって  $[V] = [W]$  となる.
2.  $V, W \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}$  に対し, 自然な埋め込みと射影によって完全列  $0 \rightarrow V \rightarrow V \oplus W \rightarrow W \rightarrow 0$  が得られる. よって  $[V \oplus W] = [V] + [W]$  である.

任意の線型空間  $V$  に対して, 基底を取る操作で同型  $V \simeq \mathbb{C}^{\dim V}$  が得られる. これと上の考察より,  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  で  $[V] = [\mathbb{C}^{\dim V}] = [\mathbb{C}^{\oplus \dim V}] = \dim V \cdot [\mathbb{C}]$  が成り立つ. よって  $\mathbb{Z}$  加群  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  は 1 つの元  $[\mathbb{C}]$  だけで生成されることが分かる. 単因子論から,  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  は  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  ( $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) のいずれかに同型である.

実際には  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  は  $\mathbb{Z}$  と同型である. これを示すには次元を取る写像  $\dim: K(\text{Vect}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , つまり  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  の生成元  $[V]$  に対し  $\dim V$  を対応させる写像を考える.  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow 0$  が完全列であるとき,  $\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3$  が成り立つ. よって  $\dim$  は  $K$  群の関係式を保つので, well-defined な写像になる. すると  $\dim[\mathbb{C}^n] = n$  が任意の正整数  $n$  について成り立つので,  $\dim$  は全射である.  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  ( $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) から  $\mathbb{Z}$  への全射準同型は存在しないから,  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}$  でないといけない.

この  $[\mathbb{C}] \in K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  と  $1 \in \mathbb{Z}$  を対応させる同型のもと,  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  での直和とテンソル積の振る舞いを見してみる. 直和については既に  $[V \oplus W] = [V] + [W]$  であることを見た. また圏  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  の場合, 完全列の各項で線型空間のテンソル積を取ると再び完全列になる. テンソル積が完全列を保つので  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}})$  で積  $[V][W] := [V \otimes W]$  が well-defined になる. これを  $\mathbb{Z}$  の側で見ると, 普通の乗法  $\times$  に他ならない.

こうして  $K$  群を取るという操作によって,  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  から有理整数環  $\mathbb{Z}$  を得ることができ,  $\oplus, \otimes$  がそれぞれ  $+, \times$  になった. これが代数的 categorification と呼ばれる操作の正確な定式化である.

## 1.3 1 つの動機

ここで categorification を考える動機として LLT 予想<sup>\*3</sup>を紹介したい. LLT 予想に登場するのは Hecke 代数と  $A_{r-1}^{(1)}$  型量子群という, 2 つの代数である. 定義は略すが, Hecke 代数  $H_n(\zeta)$  は 1 つのパラメータ  $\zeta$  を持つ  $\mathbb{C}$  上の代数で, 各  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ごとに 1 つの代数が決まる. 以下  $\zeta$  は 1 の原始  $r$  乗根とする. Hecke 代数には標準加群と呼ばれる  $\mathbb{C}$  上有限次元な加群があり, その全体を  $\{S(\lambda)\}_{\mathcal{P}_n}$  と書く<sup>\*4</sup>.  $H_n(\zeta)$  の既約加群全体を  $\{D(\mu)\}_{\mu \in \mathcal{P}'_n}$  と書く<sup>\*5</sup>. 各  $S(\lambda)$  ( $\lambda \in \mathcal{P}_n$ ) は有限次元だから組成列を持つので, 組成列に現れる

<sup>\*2</sup> 一言で言うと「核と余核がある圏」である. 任意の環  $R$  に対し,  $R$  加群のなす圏は Abel 圏である. 以下の議論では加群の圏しか用いないので, 加群の圏だと思って何ら差し支えない.

<sup>\*3</sup> Lascoux–Leclerc–Thibon の頭文字である.

<sup>\*4</sup>  $\mathcal{P}_n$  は大きさ  $n$  の Young 図形全体の集合と一致するが, 今は単なる添字集合と思って差し支えない.

<sup>\*5</sup>  $\mathcal{P}'_n$  は  $\mathcal{P}_n$  の特別な部分集合であるが, これも今は添字集合とだけ思って構わない.

$D(\mu)$  ( $\mu \in \mathcal{P}'_n$ ) の個数を考えることができる. これを  $d_{\lambda\mu}$  と表し, 分解係数という.  $d_{\lambda\mu}$  は対称群のモジュラー表現論とも深い関係があり, この値を求めることは表現論における 1 つの重要な問題であった.

一方,  $A_{r-1}^{(1)}$  型量子群  $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_r)$  は 1 つのパラメータ  $q$  を持つ代数である.  $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_r)$  の表現の一つに Fock 空間  $\mathcal{F}$  というものがあり,  $\mathcal{F}$  は標準基底と呼ばれる基底  $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$  がある. また  $M(\Lambda_0)$  という  $\mathcal{F}$  のある部分加群があり, こちらは大域基底と呼ばれる基底  $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}'_n}$  を持つ. これら基底がそれぞれ  $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}'_n$  で添字付けられていることに注意してほしい.  $b_\mu$  を  $s_\lambda$  で展開した係数を  $\tilde{d}_{\lambda\mu}(q)$  と書く. 量子群がパラメータ  $q$  を持つから, 展開係数も  $q$  に依存する.

LLT 予想は  $q$  に 1 を代入したとき  $\tilde{d}_{\lambda\mu}(1) = d_{\lambda\mu}$  が成り立つという予想である. この予想は有木進氏によって証明されたが, その時に用いられた手法が categorification であった. より具体的には,

1.  $K(H_n(\zeta)\text{-mod})$  は  $\{[S(\lambda)]\}_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$  を基底とする自由  $\mathbb{Z}$  加群である. これの双対基底を  $\{[S(\lambda)]^*\}_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$  とする.  $[D(\mu)]$  を基底  $[S(\lambda)]$  で展開し, 各  $[S(\lambda)]$  を  $[S(\lambda)]^*$  に置き換えて得られる  $K(H_n\text{-mod})^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(H_n\text{-mod}), \mathbb{Z})$  の元を  $[D(\mu)]$  と書く.
2.  $\mathbb{Z}$  加群  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_n(\zeta)\text{-mod})^*$  に  $U(\hat{\mathfrak{sl}}_r) := U_1(\hat{\mathfrak{sl}}_r)$  加群の構造が定まり, この加群は Fock 空間  $\mathcal{F}$  の部分加群  $M(\Lambda_0)$  と同型になる.
3. この対応のもと,  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_n(\zeta)\text{-mod})^*$  の元  $[S(\lambda)]^*, [D(\mu)]^*$  は, それぞれ Fock 空間の標準基底  $b_\lambda$  と大域基底  $s_\lambda$  で  $q \rightarrow 1$  としたものに対応する.

という 3 つの命題を順に示した. 量子群の Fock 空間が Hecke 代数の加群の圏で categorify されているから, Hecke 代数の加群の分解係数が Fock 空間の基底の展開係数と対応した, というわけである.

## 2 量子群の categorification

いよいよ本題である量子群の categorification の話に入る. 表現論的には大変深い結果であるが, 残念ながら, ここでは天下一に述べることはできない. 何となく雰囲気を感じていただければと思う.

### 2.1 量子群

量子群は生成元と関係式で定義される上の代数で, その元となるのは Lie 代数である. Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が与えられたとき, それを含む<sup>\*6</sup>包絡代数と呼ばれる代数  $U(\mathfrak{g})$  が定まる.  $U_q(\mathfrak{g})$  は  $U(\mathfrak{g})$  に 1 パラメータ  $q$  を導入して変形したものであり,  $q \rightarrow 1$  とすると  $U_q(\mathfrak{g})$  が  $U(\mathfrak{g})$  になるという性質を持つ. こう書くと変形が恣意的に見えるが,  $U(\mathfrak{g})$  の表現論の諸結果が  $U_q(\mathfrak{g})$  にも拡張されるという点で, この変形は表現論的に自然である.

特に我々が興味を持つのは, 量子群の元となる Lie 代数が対称化可能 Kac-Moody Lie 代数と呼ばれるクラスに属するときである. このクラスの Lie 代数は, 対称化可能 Cartan 行列と呼ばれるある種の行列から構成される. その行列を  $A$  とすると,  $A$  からはルート格子と呼ばれる格子  $Q$ , それから単純ルートと呼ばれる  $Q$  の元  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  が定まる. そしてルート格子上の各点  $\beta \in Q$  ごとにルート空間と呼ばれる  $U_q(\mathfrak{g})$  の部分空間  $U_q(\mathfrak{g})_\beta$  が定まり

$$U_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\beta \in Q} U_q(\mathfrak{g})_\beta$$

という分解ができる. この分解に基づき,  $Q_\pm := \sum_{i=1}^l \mathbb{Z}_{\geq 0}(\pm \alpha_i)$ ,  $U_q^\pm(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{\beta \in Q_\pm} U_q(\mathfrak{g})_\beta$  と定める.

<sup>\*6</sup> 自然な単射  $\mathfrak{g} \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$  が存在し,  $\mathfrak{g}$  を自然に  $U(\mathfrak{g})$  の部分集合だと思える.

通常は量子群のパラメータ  $q$  を不定元と見なし,  $U_q(\mathfrak{g})$  を  $\mathbb{Q}(q)$  上の代数として扱う. すると  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}] \subset \mathbb{Q}(q)$  だから,  $U_q(\mathfrak{g})$  は  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  代数でもある.  $U_q(\mathfrak{g})$  には,  $\mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]} U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \simeq U_q(\mathfrak{g})$  を満たす特別な  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  部分代数  $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$  がある.

## 2.2 Khovanov–Lauda–Rouquier 代数

$U_q^-(\mathfrak{g})$  を categorify するのに用いるのが Khovanov–Lauda–Rouquier 代数 (以下, KLR 代数と略す) である. KLR 代数も生成元と関係式によって定義される代数で<sup>\*7</sup>, 以下の性質を満たす.

1. 対称化可能 Cartan 行列  $A$  から KLR 代数を作る標準的な方法があり, その方法で作られた KLR 代数は下に有界な次数付き代数になる.
2.  $A$  から作られるルート格子  $Q$  を考えると, 各  $\beta \in Q_+$  に対し KLR 代数  $R_n$  の部分代数  $R(\beta)$  が定まる.

そこで各  $\beta \in Q_+$  に対して,  $R(\beta)$ -mod で有限次元次数付き  $R(\beta)$  加群の圏を表す. ここで次数付き加群を考えたおかげで, 次数をずらすという  $R(\beta)$ -mod から自分自身への関手が考えられる. 特に  $q: R(\beta)$ -mod  $\rightarrow R(\beta)$ -mod を次数を  $-1$  する関手だとすると,  $q$  は加群としての構造を変えないから完全関手になる. また次数を  $+1$  する写像が  $q^{-1}$  である. よって  $K(R(\beta)$ -mod) 上に  $q, q^{-1}$  倍が定義され,  $K(R(\beta)$ -mod) は単なる加群でなく  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  加群になる. そして次のように categorification ができるのである.

**Theorem 2.1.**  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  代数としての同型

$$\bigoplus_{\beta \in Q_+} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]}(K(R(\beta)\text{-mod}), \mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ. ここで, 左辺には表現論から積構造が定めることができ, その積は右辺の積と一致する.

前章で  $K(\text{Vect}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}$  を調べた際, テンソル積の完全性を使って積構造を誘導した. 今の場合も同様に,  $\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-mod})$  に積を入れるには, 加群の圏レベルで完全関手を作り,  $K$  群に写像を誘導すれば良い. また  $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{sl}}_n$  の場合, KLR 代数は affine Hecke 代数と呼ばれ, LLT–有木の定理の状況になっている.

この定理を証明するには, 以下のステップが必要である.

1. ルート系から KLR 代数を与える方法を構成する.
2. ルート系から作った  $R(\beta)$  に次数構造を入れる.
3. 次数付き代数  $A$  の表現に関する一般論を展開し, 有限次元次数付き  $A$  加群のなす圏  $A\text{-mod}$  の  $K$  群  $K(A\text{-mod})$  の構造を調べる.
4. 量子群の構造を調べる.
5.  $\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-mod})$  に積構造を入れ, それが  $U_q^-(\mathfrak{g})$  と同型になることを示す.

以上に挙げた各ステップはどれを取っても議論にはそれなりの準備を要し, この紙面にはとても収めることが出来ない. 詳しいことは概要に書いた通り, 東大数理から刊行されるレクチャーノート<sup>8</sup>を参照してください. またレクチャーノートへのアクセスが容易なので, リファレンスについてもレクチャーノートを参考にさせていただくことにし, ここでは省略します.

<sup>\*7</sup> KLR 代数は「絵」を描いて定義することもできる. 今回の第9回数学総合若手研究会では, 小西正秀さんによる KLR 代数自体の概説があるので, 合わせて参考にされると良いと思います.

# DUAL F-SIGNATURE

AKIYOSHI SANNAI

**ABSTRACT.** We define the dual F-signature of modules, which is equivalent to the F-signature if the module is the base ring. By using this invariant, We give characterizations of regular, F-regular, F-rational, and Gorenstein singularities.

Let  $R$  be complete  $d$ -dimensional reduced Noetherian local ring with prime characteristic  $p > 0$  and perfect residue field  $k = k^p$ . There is the Frobenius map  $F : R \rightarrow R$  sending  $r$  to  $r^p$ . For  $e \in \mathbb{N}$  the inclusion  $R \subseteq R^{1/p^e}$  into the corresponding ring of  $p^e$ -th roots of elements of  $R$  is naturally identified with the  $e$ -th iterate of the Frobenius endomorphism. The  $R$ -module  $R^{1/p^e}$  has important information about the singularity of  $R$ . Write  $R^{1/p^e} = R^{\oplus a_e} \oplus M_e$  as  $R$ -modules where  $M_e$  has no free direct summands. The number  $a_e$  is called the  $e$ -th Frobenius splitting number of  $R$ . Kunz showed that  $a_e = p^{ed}$  holds for some  $e$  if and only if  $R$  is regular [Kun69]. This result also tells us that the ratio of the rank of the free direct summand  $a_e$  to the rank of  $R^{1/p^e} = p^{ed}$  reflects the distance to the regularity. We define the  $F$ -signature by the asymptotic behavior of the sequence  $\{a_e/p^{de}\}$ , namely,  $s(R) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{a_e}{p^{ed}}$ . The  $F$ -signature first appeared implicitly in the work of K. Smith and M. Van den Bergh [SVdB97]. And its formal study was started from [HL02]. Though the existence of the limit had been open for several years, K. Tucker showed the existence in enough general case [Tuc].

C. Huneke and G. J. Leuschke showed that  $s(R) \leq 1$  and the equality holds if and only if  $R$  is regular [HL02]. I. Aberbach and G. J. Leuschke showed  $s(R) > 0$  if and only if  $R$  is strongly  $F$ -regular.

**Definition 0.1.** Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a  $F$ -finite local ring of characteristic  $p > 0$  and  $M$  be a finitely generated  $R$ -module. We define the  $R$ -module  $F_*^e M$  by

- (1)  $F_*^e M$  is  $M$  as abelian group.

---

*Date:* December 27, 2012.

*2010 Mathematics Subject Classification.* Primary 14J45; Secondary 13A35, 14B05, 14E30.

*Key words and phrases.*  $F$ -signature,  $F$ -regular,  $F$ -rational.

(2) The  $R$ -module structure of  $F_*^e M$  is defined by  $r \cdot m = r^{p^e} m$ .

We say  $R$  is  $F$ -finite if  $F_* R$  is finite  $R$ -module.

**Definition 0.2.** Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a  $F$ -finite local ring of characteristic  $p > 0$ .  $R$  is  $F$ -pure if the  $R$ -module homomorphism  $R \rightarrow F_* R$  splits.  $R$  is  $F$ -regular if for every  $c \in R$  which is not in any minimal prime of  $R$ , there exists  $q = p^e$  such that the  $R$ -module homomorphism  $R \rightarrow F_*^e R$  splits.

It is natural to try to extend this invariant to modules.

**Definition 0.3.** Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a reduced  $F$ -finite local ring of characteristic  $p > 0$  and  $M$  be an  $R$ -module. For each natural number  $e$ , Put  $q = p^e$ ,  $\alpha = \log_p[k : k^p]$ , and  $b_q = \max\{n \mid \exists F_*^e M \twoheadrightarrow M^n\}$  and define

$$s(M) = \limsup_{e \rightarrow \infty} \frac{b_q}{q^{\dim R + \alpha}}$$

We call  $b_q$   $F$ -surjective number of  $M$  and call  $s(M)$  the dual  $F$ -signature of  $M$ .

The point is that though the  $F$ -signature depend only on the  $R$ -module structure of  $F_*^e R$ , the dual  $F$ -signature depend not on the  $R$ -module structure of  $F_*^e M$  but on the relative structure of  $F_*^e M$  and  $M$ . It is easy to see the dual  $F$ -signature of  $R$  is equivalent to  $F$ -signature. By using dual  $F$ -signature, we have the characterization of the singularities of  $R$ .

We can see the range of the value of the dual  $F$ -signature by the following Proposition.

**Proposition 0.4.** Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a reduced  $F$ -finite local ring and  $M$  be a finitely generated  $R$ -module.  $0 \leq s(M) \leq 1$ .

To state the main result, we define tight closure and  $F$ -rational singularities.

**Definition 0.5.** Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a reduced  $F$ -finite local ring of characteristic  $p > 0$  and  $I$  be an ideal. We define the tight closure of  $I$  by

$$I^* = \{r \in R \mid \exists c \forall e \exists r^{p^e} \in I^{[p^e]}\}$$

where  $I^{[p^e]}$  is the ideal the generated by the  $q$ -th power of the elements in  $I$ .

**Definition 0.6.** Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a reduced  $F$ -finite local ring of characteristic  $p > 0$ .  $R$  is  $F$ -regular if for every ideal  $I$ ,  $I$  is tightly closed, namely  $I^* = I$  holds.  $R$  is  $F$ -rational if for every parameter ideal  $I$ ,  $I$  is tightly closed.

For more information about tight closure theory, see [Hun96]. The main result is the following.

**Theorem 0.7.** *Let  $(R, \mathfrak{m}, k)$  be a reduced  $F$ -finite Cohen-Macaulay local ring of characteristic  $p > 0$  and  $\omega_R$  be the canonical module, then the following hold:*

- (1) *The following are equivalent.*
  - (a)  *$R$  is regular.*
  - (b)  *$s(R) = 1$*
  - (c)  *$s(\omega_R) = 1$*
- (2)  *$R$  is strongly  $F$ -regular if and only if  $s(R) > 0$*
- (3) *Assume  $k$  is infinite, then  $R$  is  $F$ -rational if and only if  $s(\omega_R) > 0$*
- (4)  *$s(\omega_R) \geq s(R)$*
- (5) *Futhermore, assume  $s(\omega_R) > 0$ , then  $R$  is Gorenstein if and only if  $s(\omega_R) = s(R)$*

**Remark 0.8.**  $F$ -finiteness of  $R$  implies the existence of the dualizing complex by Gabber [G04]. Therefore, There always exists the canonical module under the assumption in the theorem above.

**Remark 0.9.** Though the theorem is only for absolute version, we can also generalize  $F$ -signature of pair,  $F$ -splitting ratio, and  $s$ -dimension in the dual situation by using the theory of Cartier algebra.

**Example 0.10.** Let  $R = k[[x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n]]$ , the  $n$ -th Veronese subring of  $k[[x, y]]$ , where  $k$  is a perfect field of positive characteristic  $p$ . Assume that  $n \geq 2$  and  $p \nmid n$ . Then  $R$  has finite CM type. The indecomposable nonfree MCM  $R$ -modules are the fractional ideals  $I_1 = (x, y)$ ,  $I_2 = (x^2, xy, y^2)$ ,  $\dots$ ,  $I_{n-1} = (x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, y^{n-1})$ . Denote  $R$  also by  $I_0$ . Then  $s(I_l) = \frac{1}{n} + \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{l+2}{2n}$ . In paticular,  $s(R) = s(I_0) = 1/n$ ,  $s(\omega_R) = s(I_{n-2}) = 1/2$ .  $R$  is Gorenstein if and only if  $n = 2$  by Theorem 0.7(5).

## REFERENCES

- [AL03] I. M. ABERBACH AND G. J. LEUSCHKE: *The  $F$ -signature and strong  $F$ -regularity*, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 1, 51–56. MR1960123 (2004b:13003)
- [G04] O. GABBER: *Notes on some  $t$ -structures*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 711–734.
- [HH89] M. HOCHSTER AND C. HUNEKE: *Tight closure and strong  $F$ -regularity*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) (1989), no. 38, 119–133, Colloque en l’honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987). MR1044348 (91i:13025)
- [1] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

- [Hun96] C. HUNEKE: *Tight closure and its applications*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 88, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1996, With an appendix by Melvin Hochster. MR1377268 (96m:13001)
- [HL02] C. HUNEKE AND G. J. LEUSCHKE: *Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules*, Math. Ann. **324** (2002), no. 2, 391–404. MR1933863 (2003j:13011)
- [Kun69] E. KUNZ: *Characterizations of regular local rings for characteristic  $p$* , Amer. J. Math. **91** (1969), 772–784. MR0252389 (40 #5609)
- [Kun76] E. KUNZ: *On Noetherian rings of characteristic  $p$* , Amer. J. Math. **98** (1976), no. 4, 999–1013. MR0432625 (55 #5612)
- [SVdB97] K. E. SMITH AND M. VAN DEN BERGH: *Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), no. 1, 32–62. MR1444312 (98d:16039)
- [Tuc] K. TUCKER:  *$F$ -signature exists*, Inventiones Mathematicae, 1–23, 10.1007/s00222-012-0389-0.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY CHIKUSA-KU, NAGOYA 464—8602 JAPAN.

*E-mail address*: x12004h@nagoya-u.math.ac.jp

# $\mathbb{P}^n$ 内の非正規 3 次超曲面の代数的自己同型群

三池 将隆

九州大学大学院数理学府

## 概要

$\mathbb{P}^3$  内の 3 次曲面の分類や自己同型群の研究は多くの研究者によって行われ、非特異な場合と特異点を持つような場合でも正規な 3 次曲面の場合には、特異点の様子に応じてその自己同型群が知られている。ここではさらに特殊な  $\mathbb{P}^3$  内の非正規な 3 次曲面の自己同型群について考察する。また、 $\mathbb{P}^n$  内の錐でない非正規 3 次超曲面の自己同型群についても同様に議論できるので、それも合わせて紹介することにする。

## 1 準備

代数多様体  $X$  が点  $P$  で正規であるとは、 $P$  における局所環  $\mathcal{O}_P$  が整閉整域となることである。すべての点で  $X$  が正規となると、 $X$  は正規であるという。本稿で対象とする射影空間内の超曲面などについては、正規であることと余次元 1 で正則であることは同値であることが知られている。すなわち、 $\mathbb{P}^n$  内の非正規 3 次超曲面  $X$  とは、 $n+1$  個の変数  $X_0, \dots, X_n$  に関する 3 次の斉次多項式  $F_X$  の零点として定義される  $n-1$  次元代数多様体で、特異点を  $n-2$  次元分持つようなもののことである。

例 1.1  $\mathbb{P}^2$  内の 3 次曲線は特異点を高々尖点か結節点 1 点しか持たないことが知られている。特異点を持つ平面 3 次曲線は非正規である。

一般の代数多様体に対して、次のようにしてその正規化が定義される。

定義 1.2 代数多様体  $X$  に対して、次を満たす  $\mu: \tilde{X} \rightarrow X$  が存在する。これを  $X$  の正規化という。

(1)  $\tilde{X}$  は正規代数多様体

(2)  $\mu$  は双有理かつ有限射

同じ条件を満たす  $(\tilde{X}', \mu')$  があれば、同型  $\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  が存在して、 $\mu = \mu' \circ \sigma$  を満たす。

注意 1.3  $\text{Aut}(X) \hookrightarrow \text{Aut}(\tilde{X})$  となること、すなわち  $\sigma \in \text{Aut}(X)$  を取ると、正規化と可換になるような  $\tilde{\sigma} \in \text{Aut}(\tilde{X})$  が一意に定まることに注意しておく。このことと、自己同型写像は交点数を保つことに注意して、 $\text{Aut}(X)$  を計算する。

$\mathbb{P}^3$  内の非正規 3 次曲面の正規化として現れる重要な曲面の定義を与える。

定義 1.4 次のようにして定義される  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  内の曲面  $\mathbb{F}_n$  を  $n$  次 Hirzebruch 曲面という。

$$\mathbb{F}_n := \{((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_2 y_0^n = x_1 y_1^n\}$$

Hirzebruch 曲面の自己同型群について、次のことが知られている。

事実 1.5  $n \geq 1$  に対して、 $G$  を Hirzebruch 曲面  $\mathbb{F}_n$  の自己同型群とする。このとき、次のような群の完全列が存在する。

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow PGL(1) \rightarrow 1$$

ここで、 $T$  は  $\mathbb{C}^\times$  と  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$  の半直積で、 $\mathbb{C}^\times$  はスカラー倍で作用する。

これより特に  $\mathbb{F}_1$  について、 $P = (1 : 0 : 0)$  に対して  $\Gamma_P = \{\sigma \in PGL(2) \mid \sigma(P) = P\}$  とすると、自然に  $\text{Aut}(\mathbb{F}_1) \cong \Gamma_P$  が成り立つことがわかる。 $\Gamma_P \ni \sigma = (a_{ij})$  とおくと  $a_{21} = a_{31} = 0$  であるが、この自然な同型の下での  $\mathbb{F}_1$  への作用は、

$$\begin{aligned} &((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) \\ &\longmapsto ((a_{11}x_0 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 : a_{22}x_1 + a_{23}x_2 : a_{32}x_1 + a_{33}x_2), (a_{22}y_1 + a_{23}y_2 : a_{32}y_1 + a_{33}y_2)) \end{aligned}$$

である。

また、 $\mathbb{F}_1$  は  $\mathbb{P}^2$  を 1 点  $P = (1 : 0 : 0)$  でブローアップしたものである。その例外曲線を  $E$  とし、 $\mathbb{P}^2$  内の直線  $x_0 = 0 \subset \mathbb{P}^2$  の固有変換を  $E_0$  とおくと、

$$\begin{aligned} E &= \{((1 : 0 : 0), (y_0 : y_1)) \mid (y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1\} \\ E_0 &= \{((0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_2y_0 = x_1y_1\} \end{aligned}$$

である。

構造射  $\pi : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $\mathbb{P}^1$ -束で、 $\pi$  におけるファイバーを  $F$  とかくことにする。このとき、 $E_0 \sim E + F$  である。

## 2 標準形と正規化

$X$  を  $\mathbb{P}^n$  内の非正規 3 次超曲面とし、 $\text{Sing}(X)$  をその特異点集合とすると、次が成り立つ。

補題 2.1  $\text{Sing}(X)$  は  $\mathbb{P}^n$  の既約な  $n - 2$  次元線型部分多様体となる。

これより、 $S : X_0 = X_1 = 0 \subset \mathbb{P}^n$  を  $X$  の特異点集合としてよい。すると次が成り立つことがわかる。

命題 2.2  $\mathbb{P}^n$  内の適当な射影変換によって、 $X$  は以下の斉次多項式  $F_i$  で定義される非正規 3 次超曲面のいずれかと写りあう。

$$\begin{aligned} F_1 &= X_0^2X_2 - X_1^3 \\ F_2 &= X_0^2X_2 - X_1^3 - X_1^2X_2 \\ F_3 &= X_0^2X_2 - X_1^2X_3 \\ F_4 &= X_0^2X_2 - X_1^3 - X_0X_1X_3 \\ F_5 &= X_0^2X_2 - X_1^2X_3 - X_0X_1X_4 \end{aligned}$$

以下では  $F_i$  によって定義される  $\mathbb{P}^n$  の非正規 3 次超曲面のうち、錐でないものを考えることにする。注意 1.3 で述べたように、本稿では正規化を経由して  $X$  の自己同型群を決定するので、ここで  $X$  の正規化を与える。

命題 2.3  $\mu: \tilde{X} \rightarrow X$  を  $X$  の正規化として,  $\tilde{S} := \mu^{-1}(S)$ ,  $\mathcal{L} := \mu^* \mathcal{O}_X(1)$  とすると,  $\tilde{X}, \tilde{S}, h^0(\tilde{X}, \mathcal{L})$  は次のようになる.

| $F_X$ | $\tilde{X}$                        | $\tilde{S}$                | $h^0(\tilde{X}, \mathcal{L})$ |
|-------|------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| $F_1$ | $\mathbb{P}^1$                     | $\tilde{P}$                | 4                             |
| $F_2$ | $\mathbb{P}^1$                     | $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ | 4                             |
| $F_3$ | $\mathbb{F}_1$                     | $E_0$                      | 5                             |
| $F_4$ | $\mathbb{F}_1$                     | $E \cup F$                 | 5                             |
| $F_5$ | $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ | $H$                        | 6                             |

ここで,  $\tilde{P}, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2$  は  $\mathbb{P}^1$  の点,  $H$  は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  と同型な  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$  の曲面である. さらに, いずれの場合も  $\mathcal{L}$  は非常に豊富で, 対応する射影空間への射を  $\psi$  とすると  $\mu = \pi_Q \circ \psi$  とかける. ただし,  $Q$  は  $\mathbb{P}^n \setminus \psi(\tilde{X})$  の点で,  $\pi_Q$  は  $Q$  からの射影である.

### 3 主結果

定理 3.1  $X$  を  $\mathbb{P}^n$  における非正規 3 次超曲面とし,  $F_X$  を  $X$  の定義多項式とする. このとき  $n \geq 5$  ならば,  $X$  は錐となる.  $n \leq 4$  のとき, 錐でない  $X$  は射影変換によって 5 個の標準型のいずれかと写りあい, それらの自己同型群  $\text{Aut}(X)$  は次のようになる.

| $n$ | $F_X$                                 | $\text{Aut}(X)$                                        |
|-----|---------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 2   | $X_0^2 X_2 - X_1^3$                   | $\mathbb{C}^\times \rtimes \mathbb{C}^\times$          |
| 2   | $X_0^2 X_2 - X_1^3 - X_1^2 X_2$       | $G_1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$                   |
| 3   | $X_0^2 X_2 - X_1^2 X_3$               | $(\mathbb{C}^\times)^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ |
| 3   | $X_0^2 X_2 - X_1^3 - X_0 X_1 X_3$     | $\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^\times$               |
| 4   | $X_0^2 X_2 - X_1^2 X_3 - X_0 X_1 X_4$ | $\mathbb{C}^2 \rtimes G_2$                             |

ここで  $G_1$  は  $X \setminus \text{Sing}(X)$  と一対一対応にある群,  $G_2 = GL(2)$  である.

主定理の証明方針は, 正規化として得られる代数多様体の自己同型群は既知であるから, 正規化写像を具体的に求めて直接計算によるものである.

### 参考文献

- [1] M. Abe, On non-normal del Pezzo surfaces, Math. Nachr. 260 (2003) 3-13.
- [2] A. Beauville, Complex Algebraic Surfaces, Cambridge University Press, 1983.
- [3] R. Hartshorne, Algebraic Geometry Springer-Verlag, Berlin/New York, 1977.
- [4] W. Lee, E. Park, P. Schenzel, On the classification of non-normal cubic hypersurfaces, Journal of Pure and Applied Algebra 215 (2011) 2034-2042.
- [5] 飯高茂, 平面曲線の幾何, 共立出版, 2001.



# 双楯円曲面と安定性条件

山野井隆晃

北海道大学大学院理学院

## 1 はじめに

滑らかな射影多様体  $X$  が与えられたとき、 $X$  上の接続層のなす Abel 圏の導来圏  $D^b(X)$  を調べることは、代数幾何における重要な問題のひとつである。2002 年、Bridgeland [2] は  $D^b(X)$  の上の安定性条件と呼ばれる概念を導入し、特定の条件をみたす安定性条件の集合  $\text{Stab}(D^b(X))$  が、(空でなければ) 自然に複素多様体の構造をもつことを示した (これを安定性多様体と呼ぶ)。

一般に、 $\text{Stab}(D^b(X))$  が空か否かを判定する (すなわち、安定性条件を構成する) のは難しい。1 次元、すなわち曲線の場合は、その構造は完全に決定されている。2 次元の場合、安定性条件の構成はされているが、安定性多様体の位相的性質 (連結性、単連結性など) はまだほとんどわかっていない。3 次元以上の多様体に関しては、安定性条件を構成する一般的な方法は知られていない。

また、互いに関係した 2 つの滑らかな射影多様体  $X$  と  $Y$  の安定多様体の間に、何らかの関係性を見出すことさえ一般には困難である。より正確に言えば、 $D^b(X)$  から  $D^b(Y)$  への完全関手が、 $\text{Stab}(D^b(X))$  と  $\text{Stab}(D^b(Y))$  の間に写像を誘導することは期待できない。しかしながら、ある良い条件をみたす完全関手に対しては、閉埋め込みを誘導することが知られている。特に、Macri, Mehrotra and Stellari [5] の手法を用いて次を示すことができる。

**定理 1.1.**  $Y$  を双楯円曲面、 $\pi : X \rightarrow Y$  を  $Y$  の標準被覆とする。 $\text{Stab}^+(D^b(X))$  を、Bridgeland [3] の構成した  $\text{Stab}(D^b(X))$  の連結成分とする。このとき、 $\text{Stab}(D^b(Y))$  の連結成分  $\text{Stab}^+(D^b(Y))$  と、自然な閉埋め込み  $\text{Stab}^+(D^b(Y)) \rightarrow \text{Stab}^+(D^b(X))$  が存在する。さらに、 $\rho(X) = 2$  ならば、この閉埋め込みは上への同型を与える。

本講演では、安定性条件の紹介を交えながら、上定理を概説することを目標とする。

## 2 安定性条件と群作用

ここでは、導来圏上の安定性条件について復習する。詳しくは Bridgeland [2] や Huybrechts [4] などを参照されたい。

$X$  を  $\mathbb{C}$  上定義された滑らかな射影多様体とする。

**定義 2.1** (安定性条件). 導来圏  $D^b(X)$  上の安定性条件とは、準同型  $Z : \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathbb{C}$  と実数  $\phi$  でパラ

メータづけられた  $D^b(X)$  の部分加法圏  $\mathcal{P}(\phi)$  の族  $\mathcal{P}$  との組  $\sigma = (Z, \mathcal{P})$  であって、以下の条件をみたすものである。

- (a)  $\mathcal{P}(\phi)$  の零でない任意の対象  $E$  に対して、 $Z(E) = m(E) \exp(\sqrt{-1}\pi\phi)$  が成り立つ。ここで、 $m(E)$  は正の実数である。
- (b) 任意の  $\phi \in \mathbb{R}$  に対して、 $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$  が成り立つ。
- (c) 任意の  $A_1 \in \mathcal{P}(\phi_1)$  と  $A_2 \in \mathcal{P}(\phi_2)$  に対して、 $\phi_1 > \phi_2$  ならば  $\text{Hom}_{D^b(X)}(A_1, A_2) = 0$  である。
- (d) 零でない  $D^b(X)$  の対象  $E$  は Harder-Narasimhan フィルターづけをもつ。すなわち、 $E_0 = 0$  かつ  $E_n = E$  となる有限個の特三角  $E_{j-1} \rightarrow E_j \rightarrow A_j$  の列が存在して、各  $A_j$  は  $\mathcal{P}(\phi_j)$  の零でない対象でかつ  $\phi_1 > \dots > \phi_n$  となる。

ここで、 $\mathcal{N}(X) := K(X)/K(X)^\perp$  は  $X$  の数値的 Grothendieck 群である。 $K(X)^\perp$  は Euler-Poincaré 形式  $\chi(E, F) := \sum_i \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{D^b(X)}(E, F[i])$  に関してとる。

**定理 2.2** (Bridgeland [2]).  $D^b(X)$  上の局所有限な安定性条件の集合  $\text{Stab}(D^b(X))$  は自然に距離空間の構造をもつ。さらに、 $\text{Stab}(D^b(X))$  の各連結成分  $\Sigma$  に対し、ある線形部分空間  $V(\Sigma) \subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}(X), \mathbb{C})$  が存在して、 $Z(Z, \mathcal{P}) = Z$  で定義される自然な写像  $Z : \Sigma \rightarrow V(\Sigma)$  は局所同相となる。特に、 $\Sigma$  は複素多様体の構造をもつ。

次に、有限群  $G$  が  $X$  へ自由に作用しているとする。このとき、 $Y = X/G$  は滑らかな射影多様体となり、 $D^b(Y)$  は  $D_G^b(X)$  と自然に同一視される。ここで、 $D_G^b(X)$  は  $G$  線形化された  $D^b(X)$  の対象のなす三角圏である。 $G$  線形化を忘れるという関手  $\text{Forg}_G : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$  および、自然な  $G$  線形化を付加するという関手  $\text{Inf}_G : D(X) \rightarrow D^b(Y)$  が自然に定まる（ここで同一視  $D^b(Y) \simeq D_G^b(X)$  を用いている）。

$G$  の元  $g$  は自己同値  $g^* \in \text{Aut}(D^b(X))$  を誘導するので、 $G$  は  $\text{Stab}(D^b(X))$  へ自然に作用する。この作用に関する  $G$  固定部分を  $\Gamma_X$  とする。

**命題 2.3** (Macrì, Mehrotra and Stellari [5]).  $\Gamma_X$  は  $\text{Stab}(D^b(X))$  の閉部分多様体であり、関手  $\text{Forg}_G$  は閉埋め込み  $\iota : \Gamma_X \rightarrow \text{Stab}(D^b(Y))$  を自然に誘導する。

### 3 双楕円曲面と標準被覆

はじめに、用語をいくつか準備する。

**定義 3.1.** 双楕円曲面 (bielliptic surface) とは、小平次元がゼロの滑らかな射影極小曲面  $Y$  であって  $h^0(Y, \omega_Y) = 0$  かつ  $h^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$  となるものである。

双楕円曲面  $Y$  の標準層  $\omega_Y$  は自明ではないが、つねにねじれ元となる。すなわち、 $\omega_Y^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_Y$  となる正の整数  $n$  が存在する。

**定義 3.2.**  $Y$  を双楕円曲面とし、 $n$  を  $\omega_Y$  の位数とする。位数  $n$  の有限群  $G$  と Abel 曲面  $X$  が存在

し、 $X/G \simeq Y$  となるとき、自然な射  $\pi : X \rightarrow Y$  を  $Y$  の標準被覆と呼ぶ。標準被覆は常に存在する。

以下では、双楕円曲面  $Y$  とその標準被覆  $\pi : X \rightarrow Y$  を固定する。 $X$  は Abel 曲面であるので、Bridgeland [3] により構成された  $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(X))$  の連結成分を  $\text{Stab}^+(\mathcal{D}^b(X))$  とする。 $\text{Stab}^+(\mathcal{D}^b(X))$  は単連結で、自然な写像  $\mathcal{Z} : \text{Stab}^+(\mathcal{D}^b(X)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}(X), \mathbb{C})$  は像の上への普遍被覆をなす。 $i : \Gamma(X) \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{D}^b(Y))$  を命題 2.3 で与えられた閉埋め込みとする。

**命題 3.3** (Cf. Macrì, Mehrotra and Stellari [5, Section 3]).  $\Sigma(Y) := \iota(\Gamma_X \cap \text{Stab}^+(\mathcal{D}^b(X)))$  は  $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(Y))$  の開かつ閉な部分集合であり、関手  $\text{Inf}_G$  は閉埋め込み  $\iota' : \Sigma(Y) \rightarrow \text{Stab}^+(\mathcal{D}^b(X))$  を誘導する。さらに、 $(\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C})^G = \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$  ならば  $\iota'$  は同型である。ここで、 $(\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C})^G$  は  $G$  不変元のなす部分空間である。

定理 1.1 の証明を完成するには、 $X$  の Picard 数  $\rho(X)$  が 2 のときに  $(\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C})^G = \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$  であることをいえばよい。しかし、双楕円曲面の標準被覆は、2 つの楕円曲線の積を特定の有限群作用で割った商として、きわめて具体的に書くことができるので [1]、直接計算によりこれを示すことができる。すなわち、

**補題 3.4.**  $\rho(X) = 2$  ならば、 $(\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C})^G = \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$  である。

“ほとんどすべての” 双楕円曲面の標準被覆  $X$  は Picard 数 2 をもつので、定理 1.1 の後半はすなわち、“ほとんどすべての” 双楕円曲面の安定性多様体の主要部分が、その被覆の安定性多様体と等価であることを主張している。

## 参考文献

- [1] W. Barth, K. Hulek, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, Berlin (2004).
- [2] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. **166** (2007), 317–346.
- [3] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke. Math. J. **141** (2008), 241–291.
- [4] D. Huybrechts, *Introduction to stability conditions*, arXiv:1111.1745.
- [5] E. Macrì, S. Mehrotra and P. Stellari, *Inducing Stability Conditions*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), 605–649.



# 約数関数に関する $q$ -方程式

安東雅訓

(稚内北星学園大学)

## 1 はじめに

$q$ -級数の式があったとき、それを母関数として見ることができる。恒等式であれば読むことで組合せ論的な結果が得られるし、逆に組合せ論的な話として証明することもできる。例えばオイラーの5角数定理であれば、 $q$ -級数の恒等式としてヤコビの3重積に代入して証明することもできるし、組合せ論的に成分の相異なる分割の間に写像を作って証明することもできる。約数関数と関係する  $q$ -恒等式 [2] があり、色々な一般化が作られている。この式についての組合せ論的 (ヤング図形的) な意味付けと精密化を行う。

## 2 ヤング図形

**定義 2.1.** 整数の減少列  $\lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_\ell)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$  を分割と呼ぶ。  $\lambda$  の成分の個数  $\ell$  を  $\lambda$  の長さと呼び  $\ell(\lambda)$  で表す。  $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$  を  $\lambda$  の大きさと呼び  $|\lambda|$  で表す。  $|\lambda| = n$  であるとき  $\lambda$  は  $n$  の分割であるという。分割全体の集合を  $\mathcal{P}$ ,  $n$  の分割全体の集合を  $\mathcal{P}(n)$  で表す。また、成分が相異なる分割全体の集合を  $\mathcal{SP}$  で表す。  $n$  を決めたときの  $\mathcal{P}(n)$ ,  $\mathcal{SP}(n)$  の位数をそれぞれ  $p(n)$ ,  $sp(n)$  で表し、  $n$  の分割数, 相異分割数と呼ぶ。

**定義 2.2.** 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  に対してヤング図形  $Y(\lambda)$  を次で定義する。

$$Y(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

**定義 2.3.**  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ ,  $(i, j) \in Y(\lambda)$  について、  $(i, j)$ -ホッケ  $H_{ij}(\lambda)$  を次で定義する。

$$H_{ij}(\lambda) := \{(i', j') \in Y(\lambda) \mid i' = i, j' \geq j \text{ or } j' = j, i' \geq i\}$$

$h_{ij}(\lambda) := \#H_{ij}(\lambda)$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -ホッケ長という。また、

$$a_{ij}(\lambda) := \#\{(i', j') \in h_{ij}(\lambda) \mid i' = i, j' \geq j\} = \lambda_i - j + 1$$

$a_{ij}(\lambda)$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -ホッケ腕長という。

注意：一般的な arm length の定義とは 1 だけ差（胴を含むかどうかの差）がある。

### 3 母関数と 5 角数定理

分割の話には母関数がつきものだ。分割数の母関数といったときには次を指す。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n)q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|}.$$

ここで  $q$  は文字である。等比級数の和公式  $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  より、

$$\frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^k} \cdots = \sum_{n_1=0}^{\infty} q^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} q^{2n_2} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} q^{kn_k} \cdots.$$

右辺の  $q^{kn_k}$  が成分  $k$  の  $n_k$  個分と対応すると思えば、各  $\sum$  から項を一つ選んできて積をとることと分割を一つ決定する操作が対応する。すなわち、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n)q^n = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^k} \cdots$$

が成り立つ。同様の考え方で

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{SP}(n)q^n = (1+q)(1+q^2) \cdots (1+q^k) \cdots$$

も分かるだろう。  $(a; b)_n = \prod_{k=1}^n (1 - ab^{k-1})$  の記号を用いれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_{\infty}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{SP}(n)q^n = (-q; q)_{\infty}$$

と表される。

定理 3.1 (オイラーの 5 角数定理)。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} (-1)^{\ell(\lambda)} = \begin{cases} (-1)^k & (n = \frac{k(3k \pm 1)}{2}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

自然数  $n$  の偶数個の相異なる成分への分割の個数と奇数個の相異なる成分への分割の個数が近いという式だ. 5 角数定理の結果を母関数で表せば,

$$(q; q)_{\infty} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2}}$$

となる. このような母関数的な式が与えられたときにそれを組合せ論の言葉に翻訳して遊べる結果を出すことが目的だ.

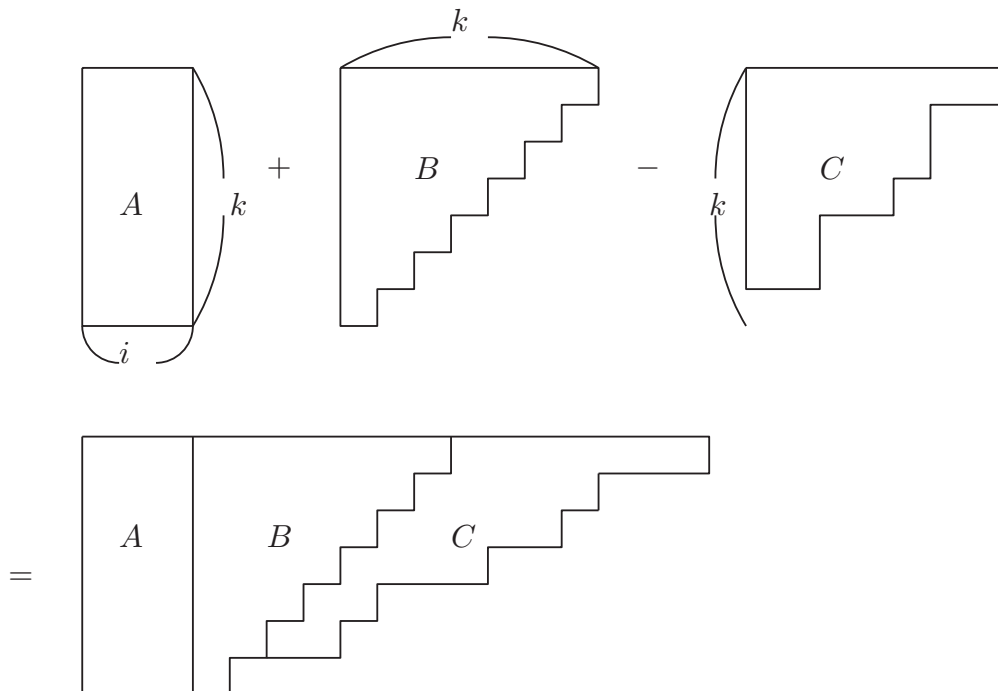
## 4 約数関数の $q$ - 恒等式

定理 4.1 (Problem 6407).

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q; q)_k (1 - q^k)} = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

この式をヤング図形の話に直して組合せ論的に証明する.

図.



図の分割が左辺の各項と対応する. 分割を固定してそれを作る  $A, B, C$  の組を数えよう. 真ん中の階段を動かせば左右の分割は決まる. そして階段の動ける範囲は  $\lambda_k$ ,  $k = \ell(\lambda)$  であることが分かる. 階段を動かしても  $\ell(\lambda)$  は変わらないので, 符号の同じ  $\lambda$  が  $\lambda_{\ell(\lambda)}$  コで

てくる. よって式を書き直せば,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \lambda_{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 1} \sigma_0(n) q^n \quad (1)$$

となることが分かる. ここで  $\sigma_i(n) = \sum_{m|n} m^i$  である. 今  $i = 0$  なので右辺は約数の個数の母関数となっている. この等式を眺めて何か違和感はないだろうか? 左辺は成分の相異なる分割の式である. 一方右辺は約数の個数の式だが, 約数の個数を分割を使って数えようとすれば一番自然なのは長方形を数えることだ. 長方形と相異分割この二つが等式で結ばれている...

定理 4.2 (A.). 任意の自然数  $n, k$  に対して

$$\begin{aligned} & \sharp\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ & - \sharp\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ & = \begin{cases} 1 & (k \mid n) \\ 0 & (k \nmid n) \end{cases} \end{aligned}$$

$a_{1,i}(\lambda) (i \leq \lambda_\ell)$  の値が  $k$  となる  $\lambda \in \mathcal{SP}(n)$  を符号付きで数えているとすることができる.

例.  $n = 5$  であれば

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & & & \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & \\ \hline & & \end{array}$$

$$= 5, 1$$

となり, 5 の約数のみが残る. (数字を記号だと思って引き算している.)

証明.  $k$  を法として 0 と合同な元の足し引き

□

## 参考文献

- [1] Ando M.: A combinatorial proof of an identity for the divisor generating function. arXiv:1201.4216
- [2] Uchimura, K.: An identity for the divisor generating function arising from sorting theory. J. Comb. Theory, Ser. A 31, 131-135 (1981)

# Khovanov-Lauda-Rouquier 代数

小西 正秀\*

名古屋大学多元数理研究科 博士後期課程一年

## 概要

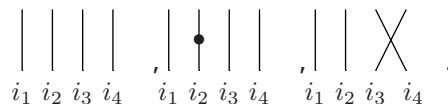
Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 (以下 KLR 代数) とは 2008 年に Khovanov-Lauda により、またそれと独立に Rouquier により定義された、新たな代数です。今回の発表では、最近じわじわ広まりつつある KLR 代数がどのようなものであるかを、具体例を見ることにより知ってもらうことを目的としました。

## 1 KLR 代数の定義

知っている人のための注意：ここでいう代数とは、結合律を満たし、単位元を持つものを指します。

代数とは手っ取り早く言ってしまうと「うまい積<sup>1</sup>が入ったベクトル空間」のことです。「ベクトル空間とみなせる環」とも言えますが、今回は前者として捉えます。なので、具体的に代数を作るときには、まずベクトル空間としての基底を取り、基底同士のうまい積を定めるという方法が良く用いられます。

さて今回、基底として用いるのは、例えば次のようなものです：



見て分かる通り、図です。何本かの系を使いますが、本数は最初に固定されます。また、各系の下に添えられてある  $i_n$  はその系の色を表します。どの色を何度使うかも最初に固定されます。系には黒玉が配置できます。系同士の交点以外の場所になら、何処にでも何個でも（ただし有限個）置けます。また、系同士が交差する際、上下は気にしません。その他、三本以上の系が一点で交わることはない等、細かい規則がありますが、今回は単純に上記のような図を組み合わせただけのもので構いません。

先述の通り、これらの図の間にうまい積を定めなければなりませんが、図  $x$  と図  $y$  に対し積として図  $xy$  を定める方法は至って簡単です。図  $x$  を上に、図  $y$  を下に置いて引っ付けてしまえば終わりです。ただし、今は系に色がつけられているので、 $x$  の下端と、 $y$  の上端の色の並びが一致する場合のみ引っ付けます。そうでなければ 0 ということにする<sup>2</sup>と、うまい積となります。

このとき、先程の三つの図のように、色の付いた平行線、平行線のどれかに黒玉を置いたもの、平行線の隣り合う二本を交差させたもの、が積に関する生成元となっています。即ち、任意の図は先程の三つの図に「分解」することができます。二つ目と三つ目の図で形を定め、一つ目の図で系の色を定める<sup>3</sup>と考えるのが手っ取り早いと思います。

また、図の間には関係が定まります。どのような関係を定めるかは範  $\Gamma$  によって定まりますが、後に述べる通り、今回は  $\Gamma$  として特別なもののみ考えるので、定まる関係も制限されます。

\*m10021t@math.nagoya-u.ac.jp

<sup>1</sup>線形であるとかそういった類のものです。

<sup>2</sup>代数の積はこんな感じで荒っぽく定めることがよくあります。

<sup>3</sup>系に色の付いたもののみを図として扱います。

## 2 今回の設定と説明

一般に，KLR 代数は簀  $\Gamma$  と，その頂点に対する非負整数による重み付け  $\alpha = \sum_{\Gamma \text{ の頂点 } i} a_i \alpha_i (a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$  に  
よって定まります． $\Gamma$  は関係の場合分けを定めます． $\alpha$  は色が  $i$  である糸を  $a_i$  本，合計  $\sum_{\Gamma \text{ の頂点 } i} a_i$  本の糸を  
用いて図を作ることを指します．

また，もう一つ  $\Gamma$  の頂点に対する非負整数による重み付け  $\Lambda = \sum_{\Gamma \text{ の頂点 } i} b_i \Lambda_i (b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$  がイデアルを定め，  
それによる商をとったものを巡回 KLR 代数と呼びます．具体的なことは後で述べます．

今回は，簀  $\Gamma$  を「 $n$  点からなる輪」とします．即ち，頂点が  $\{1, 2, \dots, n\}$  で， $k$  から  $k+1$  ( $k=n$  なら  $n$  から  $1$ ) へ矢が引かれている簀です．以下で述べる命題は  $n=2$  の場合も含めて成り立ちますが，考えるべき  
関係式が増えるため割愛します．

また， $\alpha = \sum_{\Gamma \text{ の頂点 } i} \alpha_i$ ， $\Lambda = \Lambda_0$  とします．即ち，各色の糸が 1 本ずつ，合計  $n$  本の糸を用いた図を今回は  
取り扱います．

さて，糸の色を指定するために次の記号を導入します．

$$\text{Seq}(\alpha) = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in I^\alpha \mid \text{各 } i \in I \text{ が } a_i \text{ 回表れる}\}$$

これは一般的な定義であり，今回の場合は  $\text{Seq}(\alpha)$  の元は  $n$  文字の順列となります．

定義 2.1. KLR 代数とは，次の生成元と，その間の関係で与えられる代数である．

- 生成元： $\{e(i) \mid i \in \text{Seq}(\alpha)\} \cup \{y_1 e(i), \dots, y_n e(i)\} \cup \{\psi_1 e(i), \dots, \psi_{n-1} e(i)\}$

- 関係：

$$\begin{aligned} e(i)e(j) &= \delta_{i,j} e(i), \\ \sum_{i \in \text{Seq}(\alpha)} e(i) &= 1, \\ y_k e(i) &= e(i) y_k, \\ \psi_k e(i) &= e(s_k \cdot i) \psi_k, \\ (s_k \cdot i \text{ は } i \text{ において } i_k \text{ と } i_{k+1} \text{ を入れ換えたもの}), \\ y_k y_l e(i) &= y_l y_k e(i), \\ \psi_k y_l e(i) &= y_l \psi_k e(i) \quad (l \neq k, k+1), \\ \psi_k \psi_l e(i) &= \psi_l \psi_k e(i) \quad (|k-l| > 1), \\ \psi_k y_{k+1} e(i) &= y_k \psi_k e(i), \\ y_{k+1} \psi_k e(i) &= \psi_k y_k e(i), \\ \psi_k^2 e(i) &= \begin{cases} e(i) & (i_k \text{ と } i_{k+1} \text{ の間に矢がない}) \\ (y_{k+1} - y_k) e(i) & (i_k \rightarrow i_{k+1}) \\ (y_k - y_{k+1}) e(i) & (i_k \leftarrow i_{k+1}) \end{cases}, \\ \psi_k \psi_{k+1} \psi_k e(i) &= \psi_{k+1} \psi_k \psi_{k+1} e(i). \end{aligned}$$

さっきまで図ばかりだったのに，急に記号だらけになったと思われたかもしれませんが， $e(i)$  が左から順  
に  $i_k$  で色付けされた平行な  $n$  本の糸， $y_k$  が  $k$  番目に黒玉がついた平行な  $n$  本の糸， $\psi_k$  は平行な  $n$  本の糸  
の  $k$  番目と  $k+1$  番目を交差させたものと対応しています．

また，色の情報  $e(i)$  は積の中に一度だけ現れれば良いものなので，関係式中においては適宜省略されてい  
ます．

さて,  $\Lambda = \Lambda_0$  に対するイデアルを定義しましょう. 一般的には,  $\{y_1^d \mathbf{e}(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in \text{Seq}(\alpha), d = b_{i_1}\}$  で生成されます. なので今回の場合は,  $y_1 \mathbf{e}(\mathbf{i})(i_1 = 1)$  と  $\mathbf{e}(\mathbf{i})(i_1 \neq 1)$  で生成されます. このイデアルで先程定めた KLR 代数の商を取ったものが巡回 KLR 代数であり, 今回はそれを  $H_n$  で表します.

図によるおさらいですが, 今回図式に対して成り立つ関係は以下の通りです.

● イデアルによるもの.

$$y_1 \mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0 \ (i_1 = 0), \mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0 \ (i_1 \neq 1).$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 1 \end{array} \cdots \begin{array}{c} | \\ i_n \end{array} = 0, \quad \begin{array}{c} | \\ i_1 \end{array} \cdots \begin{array}{c} | \\ i_n \end{array} = 0.$$

● 関係によるもの

$$\psi_k y_{k+1} \mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_k \psi_k \mathbf{e}(\mathbf{i}), y_{k+1} \psi_k \mathbf{e}(\mathbf{i}) = \psi_k y_k \mathbf{e}(\mathbf{i}).$$

$$\begin{array}{c} | \cdots \diagup \bullet \diagdown \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} | \cdots \diagdown \bullet \diagup \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array}, \quad \begin{array}{c} | \cdots \diagup \bullet \diagdown \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} | \cdots \diagdown \bullet \diagup \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array}$$

$$\psi_k^2 \mathbf{e}(\mathbf{i}) = \mathbf{e}(\mathbf{i}), \psi_k^2 \mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_{k+1} \mathbf{e}(\mathbf{i}) - y_k \mathbf{e}(\mathbf{i}), \psi_k^2 \mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_k \mathbf{e}(\mathbf{i}) - y_{k+1} \mathbf{e}(\mathbf{i}).$$

$$\begin{array}{c} | \cdots \square \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} | \cdots | \quad | \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array},$$

$$\begin{array}{c} | \cdots \square \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} | \cdots | \quad \bullet \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} - \begin{array}{c} | \cdots \bullet \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array},$$

$$\begin{array}{c} | \cdots \square \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} | \cdots \bullet \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array} - \begin{array}{c} | \cdots | \quad \bullet \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_n \end{array}.$$

$$\psi_k \psi_{k+1} \psi_k \mathbf{e}(\mathbf{i}) = \psi_{k+1} \psi_k \psi_{k+1} \mathbf{e}(\mathbf{i}).$$

$$\begin{array}{c} | \cdots \text{X} \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_{k+2} \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} | \cdots \text{X} \cdots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_{k+2} \quad i_n \end{array}.$$

イデアルによる関係から分かる通り, 今回の設定では  $\mathbf{e}(\mathbf{i})$  の大半は消えてしまいます. 具体的には, 全部で  $n!$  個ある  $\mathbf{i}$  のうち,  $(n-1)!$  個を除いて  $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$  となります. 更に, 他にも関係があるため,  $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$  となる  $\mathbf{i}$  がまだありそうに思えます. 一体どのような  $\mathbf{i}$  に対し  $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$  となるのかを決定するのが命題 3.1 です.

また,  $y_k$ , 即ち黒玉についても同様に, 何個か付けると 0 になってしまいそうなので, 果たして何個が限度なのかを決定するのが命題 3.2 です.

それらから,  $H_n$  の構造が  $n$  に関して規則的な変化を示すということが予想されます. そのことを具体的に求めたものが定理 3.3 です.

特に命題 3.1 において  $\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$  なる  $\mathbf{i} \in \text{Seq}(\alpha)$  が高々  $2^{n-2}$  個であることと, 命題 3.2 の (a) と (b) については, 図による説明のみで証明が済んでしまうので, 手を動かして理解したい方は是非練習問題として解いてみて下さい. 残りの部分については感覚的には成り立つだろうと思えるものですが, 示すには表現論の世界で対応しているものから情報を抜き出す必要があります.

### 3 命題集

命題 3.1.  $H_n$  において,  $\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$  なる  $\mathbf{i} \in \text{Seq}(\alpha)$  は  $2^{n-2}$  個存在する. 更にそれらは全て原始冪等元となる.

命題 3.2.  $H_n$  において,  $\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$  とする. このとき次が成り立つ.

$$(a) \ y_k \mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0 \ (1 \leq k < n),$$

$$(b) \ y_n^2 \mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0,$$

$$(c) \ y_n \mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0.$$

以上の命題から, 冪等元が倍々に増えていくこと, そして  $n$  に依らず黒玉は右端の糸以外には一つもつけられないことから,  $n$  に対し  $H_n$  の構造が規則的に変化していくと予想され, それをある種の埋め込みによって表したものが次の定理です.

定理 3.3.  $H_n$  の冪等元  $\mathbf{e}$  を次のように定める.

$$\mathbf{e} = \sum_{\mathbf{i}: i_2=2} \mathbf{e}(\mathbf{i})$$

このとき, 代数の同型

$$H_{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{e}H_n\mathbf{e}$$

が以下のようにして得られる.

$$\mathbf{e}(\mathbf{i}) \mapsto \mathbf{e}(\hat{\mathbf{i}}), \ y_{n-1}\mathbf{e}(\mathbf{i}) \mapsto y_n\mathbf{e}(\hat{\mathbf{i}}), \ \psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) \mapsto \psi_{k+1}\mathbf{e}(\hat{\mathbf{i}}).$$

ただし,  $\mathbf{i} = (1, i_2, i_3, \dots, i_n)$  に対し,  $\hat{\mathbf{i}} = (1, 2, i_2 + 1, i_3 + 1, \dots, i_n + 1)$  と定める.

### 参考文献

- [BK] J. Brundan, A. Kleshchev, Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras, arXiv:0808.2032.
- [KL] M. Khovanov, A. D. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, arXiv:0803.4121.

# 有限鏡映群の標準不変式系

辻栄周平，中島規博  
(北海道大学大学院理学院数学専攻)

$V$  を  $n$  次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^n$  とし， $\alpha$  を  $V$  の  $0$  でないベクトルとする． $H_\alpha$  を  $\mathbb{R}\alpha$  の直交補空間とし， $V$  上の線形変換  $s_\alpha$  を以下で定める．

$$s_\alpha(v) = \begin{cases} -v, & v \in \mathbb{R}\alpha, \\ v, & v \in H_\alpha. \end{cases}$$

線形変換  $s_\alpha$  を  $\alpha$  に関する鏡映といい， $H_\alpha$  を  $s_\alpha$  の鏡映面という．鏡映は  $V$  の直交変換であり，いくつかの鏡映で生成された有限群  $W \subset O(V)$  を有限鏡映群という．例えば， $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  は  $V$  の正規直交基底の入れ替えにより，有限鏡映群とみなせる．

$W$  は  $V$  の双対空間  $V^*$  に  $w \cdot f = f \circ w^{-1}$  ( $w \in W, f \in V^*$ ) として自然に作用する．この作用は  $V$  の内積から誘導された  $V^*$  の内積を不変にする． $x = (x_1, \dots, x_n)$  を  $V^*$  の正規直交基底とすると， $W$  は  $S := \mathbb{R}[x]$  にも自然に作用する． $S$  は  $V$  上の多項式関数のなす環である．Chevalley の定理により不変式環  $S^W$  は  $n$  個の  $\mathbb{R}$  上代数的独立な斉次不変式  $f_1, \dots, f_n$  により生成される． $f_1, \dots, f_n$  を基本不変式系という．基本不変式は一意的ではないが，その次数は鏡映群  $W$  に対して一意的に決まる．慣例に従い， $\deg f_1 \leq \dots \leq \deg f_n$  とする．偏微分作用素  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$  を用いて， $S$  上の双線形写像を以下のように定める．

$$(f, g) := f(\partial)g, \quad (f, g \in S).$$

ただし， $\partial := (\partial_1, \dots, \partial_n)$  とした．双線形写像  $(,)$  は  $V^*$  の内積の  $S$  への Leibniz 則と合成による拡張になっている．従って， $W$  の作用で不変である．

定義 1. 基本不変式系  $f_1, \dots, f_n$  が標準不変式系であるとは，

$$(f_i, f_j) = 0, \quad (i \neq j)$$

を満たすときにいう．

標準不変式系は多面体に関する平均値の性質を調べる際に Flatto と Wiener [1][2] により考案され，任意の鏡映群に対する存在性と，線形変換を除いた一意性，計算するためのアルゴリズムが知られている．後に，Iwasaki[4] により，多面体に関する平均値の性質の更なる一般化（多面体の調和関数）の下，対称群が鏡映群となるような多面体の調和関数に対しては，標準不変式系が一定の役割を果たすことが知られている．

Flatto の標準不変式系を計算するためのアルゴリズムについて例を挙げる．3 次対称群  $\mathfrak{S}_3$  を 3 変数の多項式環  $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$  に変数の入れ替えで作用させる．よく知られているように冪乗和多項式  $g_i := x_1^i + x_2^i + x_3^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は基本不変式系である． $f_1, f_2, f_3$  を標準不変式系とすると，定数  $a, b, c \in \mathbb{R}$  が存在して，

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_2 &= g_2 + ag_1^2, \\ f_3 &= g_3 + bg_1g_2 + cg_1^3 \end{aligned}$$

となっている．標準不変式系の条件  $(f_i, f_j) = 0$  ( $i \neq j$ ) により  $a, b, c$  を順次決定すればよい． $a = -\frac{1}{3}, b = -1, c = \frac{2}{9}$  となる．

任意の鏡映群に対し，このアルゴリズムで標準不変式系を決定することは原理的には可能だが，実際にやってみると位数の大きな有限鏡映群に対しては計算機が動かないことがある．そこで標準不変式系が具体的にはどのような式となっているかが問題となる．

標準不変式系は既約な有限鏡映群に対して決定できれば，任意の有限鏡映群についても分かったことになるのだが，既約有限鏡映群は Coxeter-Dynkin 図により分類されている．Iwasaki [3] により，既約有限鏡映群の無限系列 ( $A_n, B_n, D_n, I_2(m)$  型) に関しては構成され，Iwasaki, Kenma, Matsumoto [5] により  $F_4, H_3, H_4$  型も Flatto のアルゴリズムを用いて具体的に計算されている．残る  $E_6, E_7, E_8$  型については，具体的な公式は知られていなかった．

本講演では，既約有限鏡映群の型によらない標準不変式系の構成方法について述べる．

**定義 2.**  $W$  に含まれるすべての鏡映の鏡映面の定義多項式の積  $\Delta$  を  $W$  の基本交代式という．例えば， $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の基本交代式は  $x_1, \dots, x_n$  の差積である．また， $\mathbb{R}[\partial]\Delta := \{f(\partial)\Delta \mid f \in S\}$  とする．

以下の Steinberg の定理が本質的である．

**定理 3.** (Steinberg [6])  $I$  を定数でない不変式の張る  $S$  のイデアルとする．このとき，

$$\begin{aligned} S &= I \oplus \mathbb{R}[\partial]\Delta, \\ \mathbb{R}[\partial]\Delta &= \{f \in S \mid (g, f) = 0 \quad (\forall g \in I)\}, \\ I &= \{f \in S \mid (f, \Delta) = 0\}. \end{aligned}$$

標準不変式系を決定するために，それらの張るベクトル空間について考察する．

**補題 4.**  $W$  を既約有限鏡映群とし， $V$  への作用は既約であるとする． $f_1, \dots, f_n$  を標準不変式系とする．このとき，写像

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{R}f_i \rightarrow (\mathbb{R}[\partial]\Delta \otimes_{\mathbb{R}} V^*)^W$$

$$f_i \mapsto \sum_{j=1}^n \partial_j f_i \otimes x_j$$

は同型である．

証明. Steinberg の定理より,  $\partial_j f_i \in \mathbb{R}[\partial]\Delta$ . また,  $\mathbb{R}[\partial]\Delta$  は  $W$  の正則表現と同型であることが知られているので,  $\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}[\partial]\Delta \otimes_{\mathbb{R}} V^*)^W = n$ . これらのことから分かる.  $\square$

従って, 標準不変式系を得るためには  $\mathbb{R}[\partial]\Delta$  の構造を調べればよい. 特に,  $V^*$  と  $\mathbb{R}[W]$ -加群として同型な斉次多項式からなる空間が重要であるが, それらは

$$(V^*, f_i) := \{(g, f) \in S \mid g \in V^*\}$$

で与えられている. 補題 4 は同型

$$\mathbb{R}f_i \cong ((V^*, f_i) \otimes_{\mathbb{R}} V^*)^W$$

を誘導している.

定義 5.  $\mathbb{R}[W]$ -準同型  $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}[\partial]\Delta$  を

$$\phi(f) := ((f, \Delta), \Delta)$$

と定める.

本講演の主結果は以下の定理 6, 7 である.  $D_{2l}$  型以外の既約有限鏡映群に対しては,

$$\deg f_1 < \cdots < \deg f_n$$

となり,  $D_{2l}$  型の既約有限鏡映群に対しては,

$$\deg f_1 < \cdots < \deg f_l = \deg f_{l+1} < \cdots < \deg f_n$$

となるので, 扱いが多少異なる.

定理 6.  $W$  を  $D_{2l}$  型以外の既約有限鏡映群とし,  $V$  への作用は既約であるとする.  $h_1, \dots, h_n$  を任意の基本不変式系とする. このとき, 写像  $\phi$  は  $\mathbb{R}[W]$ -同型

$$(V^*, h_i) \xrightarrow{\phi} (V^*, f_i), \quad (i = 1, \dots, n)$$

を誘導する. 特に,  $W$  の標準不変式系は以下で与えられる.

$$f_i = \sum_{j=1}^n x_j \phi(\partial_j h_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

定理 7.  $W$  を  $D_{2l}$  型の既約有限鏡映群 ( $n = 2l$ ) とし,  $V$  への作用は既約であるとする.  $h_1, \dots, h_n$  を任意の基本不変式系とし,  $f_{l+1} := x_1 \cdots x_n$  とする.

$$a := \frac{(f_{l+1}, h_l)}{(f_{l+1}, f_{l+1})}, \quad b := \frac{(f_{l+1}, h_{l+1})}{(f_{l+1}, f_{l+1})}$$

とすると, 写像  $\phi$  は  $\mathbb{R}[W]$ -同型

$$\begin{aligned} (V^*, h_i) &\xrightarrow{\phi} (V^*, f_i), \quad (i \neq l, l+1), \\ (V^*, ah_l - bh_{l+1}) &\xrightarrow{\phi} (V^*, f_l) \end{aligned}$$

を誘導する. 特に,  $W$  の標準不変式系は以下で与えられる.

$$\sum_{j=1}^n x_j \phi(\partial_j h_1), \dots, \sum_{j=1}^n x_j \phi(\partial_j (ah_l - bh_{l+1})), f_{l+1}, \dots, \sum_{j=1}^n x_j \phi(\partial_j h_n).$$

## 参考文献

- [1] L. Flatto and M. M. Wiener, *Invariants of finite reflection groups and mean value problems*, Amer. J. Math. 91 (1969), 591-598.
- [2] L. Flatto, *Invariants of finite reflection groups and mean value problems. II*, Amer. J. Math. 92 (1970), 552-561.
- [3] K. Iwasaki, *Basic invariants of finite reflection groups*, J. Alg, 195 (1997), 538-547.
- [4] K. Iwasaki, K., *Invariants of finite reflection groups and the mean value problem for polytopes*, Bull. London Math. Soc. 31 (1999), 477-483.
- [5] K. Iwasaki, A. Kenma and K. Matsumoto, *Polynomial invariants and harmonic functions related to exceptional regular polytopes*, Experiment. math. 11, no. 2 (2002), 313-319.
- [6] R. Steinberg, *Differential equations invariant under finite reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 392-400.

# バイグラスマニアン置換の数え上げ公式

小林 雅人 (kobayashi@math.titech.ac.jp)

埼玉大学理学部

2013年3月

第9回数学総合若手研究集会（北海道大学）

## 概要

タイトルの公式の、ブリュア順序と分配束を用いた解釈を与える。また、関連する未解決問題を提示する。

$w$  を  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  の置換、 $i, j$  を自然数とする。ペア  $(i, j)$  が  $w$  の**転倒**であるとは  $i < j$  と  $w^{-1}(i) > w^{-1}(j)$  が成り立つことをいう。 $w$  の転倒の個数を**コクセター長さ**と呼び、記号  $\ell(w)$  で表す。強調して次のように書いてみよう:

$$\ell(w) = \sum_{\substack{i < j \\ w^{-1}(i) > w^{-1}(j)}} 1.$$

ここで、1 のかわりに転倒の差  $j - i$  の和をとるとどうなるだろうか？実は、これもきちんと意味のある量になる。

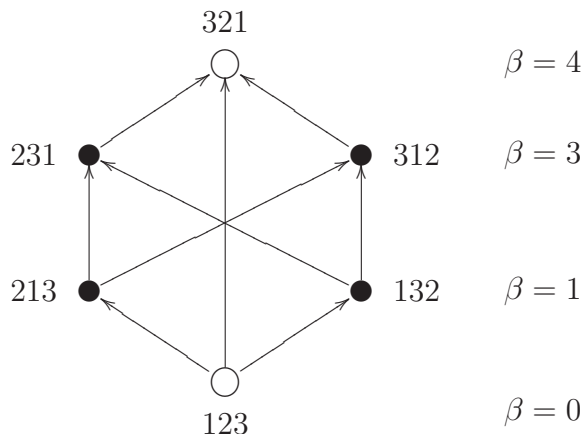
**定理** (Kobayashi, 2011, [1]).  $w \in S_n$  に対して、 $\beta(w)$  をブリュア順序で  $w$  より ( $w$  自身を含めて) 下にあるバイグラスマニアン置換の個数とする。すると

$$\beta(w) = \sum_{\substack{i < j \\ w^{-1}(i) > w^{-1}(j)}} (j - i) \quad \text{が成り立つ。}$$

右辺の計算は非常に易しい。例えば、 $w = 312$  としよう ( $w(1) = 3, w(2) = 1, w(3) = 2$  という意味)。定理によれば、 $(3 - 1) + (3 - 2) = 3$  がちょうど量  $\beta(w)$  に等しい。

では、定理に登場する「バイグラスマニアン置換」と「ブリュア順序」の詳細を説明しよう。

図 1:  $S_3$  のブリュア順序と  $\beta$  (●はバイグラスマニアンを表す)



**定義.**  $w$  がバイグラスマニアンとは、

$$|\{i \in [n-1] \mid w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1)\}| = 1 = |\{i \in [n-1] \mid w(i) > w(i+1)\}|$$

が成り立つことをいう。

次にブリュア順序の説明をする。記号  $t_{ij}$  で  $i$  と  $j$  の互換を表す。

**定義.** 対称群  $S_n$  上の二項関係  $u \rightarrow v$  を  $v = t_{ij}u$  かつ  $(i, j)$  が  $v$  の転倒のときに定める。**ブリュア順序**  $u < w$  はある  $v_1, \dots, v_k \in S_n$  が存在して、

$$u \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow w \quad \text{が成り立つこととする。}$$

さらに、 $B(w) = \{v \in S_n \mid v \leq w \text{ かつ } v \text{ はバイグラスマニアン}\}$ ,  $\beta(w) = |B(w)|$  とおき、 $\beta$  を**バイグラスマニアン統計**と呼ぶ。

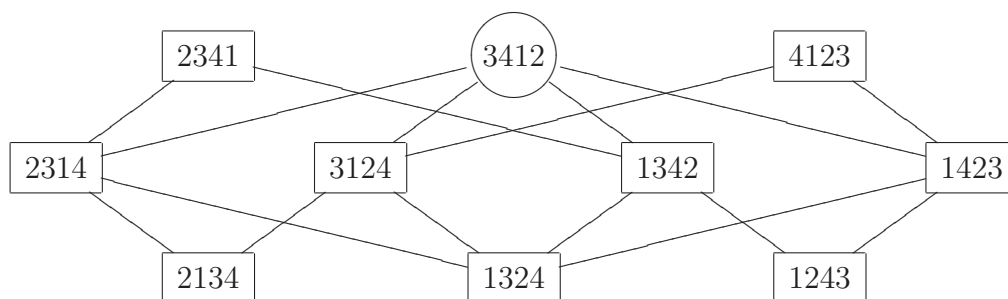
例えば、図 1 から  $B(312) = \{312, 213, 132\}$ 、よって  $\beta(312) = 3$  が確認できる。

**事実** (Lascoux-Schützenberger, Reading).

バイグラスマニアン  $\iff$  ジョイン既約。

ここで半順序集合  $P$  の元  $w$  が**ジョイン既約**とは、 $w = x \vee y$  ( $P$  内のジョイン) ならば  $w = x$  または  $w = y$  が成り立つことをいう。

図 2:  $S_4$  のバイグラスマニアン



**事実.**  $S_n$  を含む最小の束  $L_n$  は、単調三角形の Ehresmann 順序と同型。さらに、この  $L_n$  は有限分配束なので、ランク関数  $j(w) := |\{v \in L_n \mid v \leq w \text{ かつ } v \text{ はジョイン既約}\}|$  で階級半順序集合になる。したがって、上の同値性から  $S_n$  上の  $\beta$  は  $L_n$  内の  $j$  と同一視してよい。詳細は、Reading [2] を参照。

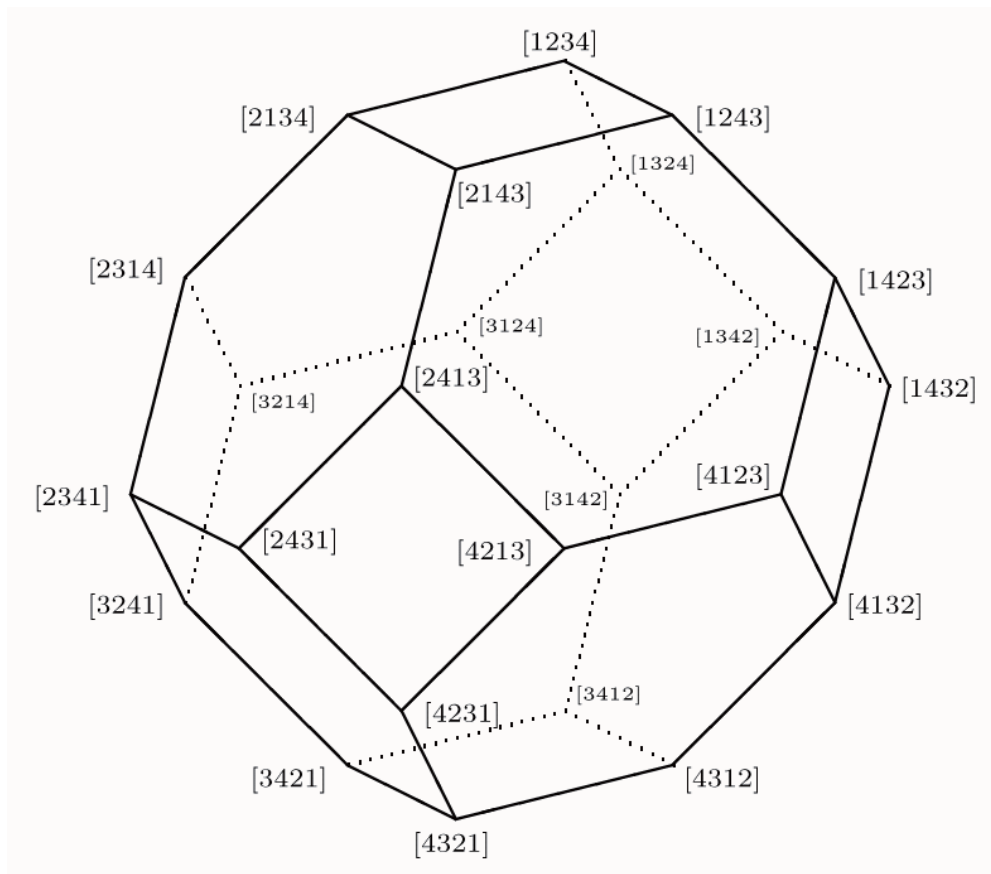
#### 結論

ある有限分配束のランク関数が、実はコクセター系の文脈で簡単に計算できる。

#### 未解決問題

- Reading (2002) : **バイグラスマニアン多項式**  $\sum_{w \in S_n} q^{\beta(w)}$  を計算せよ。
- バイグラスマニアン  $w$  が**非正則 (異常)** とは、ある  $i_1, i_2, i_3, i_4 \in [n]$  が存在して、 $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$  かつ  $w(i_3) < w(i_4) < w(i_1) < w(i_2)$  が成り立つことをいう。例えば、 $S_4$  では 3412 のみが非正則である (図 2)。  
定理の類似で、非正則バイグラスマニアンのみを数え上げる公式を発見せよ。
- 定理と類似の結果が他のタイプのワイル群 (コクセター群) でも成り立つだろうか? 特に、タイプ BC, D,  $\tilde{A}$  のとき、符号つきあるいはアフィン置換の転倒の和は何を意味するか?
- 著者は [1] で  $\beta(w)$  が  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (w(i) - i)^2$  にも等しいことを証明した。これは  $\mathbb{R}^n$  の置換多面体の頂点  $e = (e(i))$  と  $w = (w(i))$  のユークリッド距離の半分と理解できる (置換多面体の幾何学は Ziegler[4] が詳しい)。この方向で議論が発展すれば非常に面白い。

图 3: 置换多面体



## 参考文献

- [1] M. Kobayashi: Enumeration of bigrassmannian permutations below a permutation in Bruhat order, *Order* **28** (2011), no. 1, 131-137.
- [2] N. Reading: Order dimension, strong Bruhat order and lattice properties for posets, *Order* **19** (2002), no. 1, 73-100.
- [3] A. Lascoux, M.P. Schützenberger: Treillis et bases des groupes de Coxeter (French), *Electr. J. Comb.*, **3** (1996), #R27, 35pp.
- [4] G. Ziegler: Lectures on Polytopes, 7th edition, Graduate Texts in Mathematics vol. 152, Springer-Verlag New York, 2007.

# ある道代数における傾簇の post-projective 部分について

大阪大学情報科学研究科 加瀬遼一

## 1 導入と設定

有限次元代数の表現論における重要な理論のひとつに Brenner-Butler によって導入された傾理論とよばれるものがある. この理論は傾加群と呼ばれる加群の研究に端を発するもので, 現在も発展を続けている. その傾理論におけるひとつ研究対象が傾簇である. 傾簇は基本的傾加群 (の同型類) 上のある半順序に関する Hasse-簇として Happel-Unger により定義された簇である.

今回はある道代数における傾簇の post-projective 部分, つまり post-projective な傾加群のなす部分簇の構造を, 組み合わせ論的に考察し得られた結果を述べる.

以下  $k$  は代数閉体とし  $k$  上の有限次元代数  $A$  について  $\text{mod-}A$  で有限次元右  $A$  加群のなす圏,  $\text{ind-}A$  で直既約  $A$  加群からなる部分圏とする. この時, 次の定理は基本的である.

定理 1.1. (Krull – Schmidt). 任意の  $M \in \text{mod-}A$  は直規約分解

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots M_r$$

を持つ. さらにこの分解は一意的である.

## 2 準備

この章では準備として本レポートに関する用語の説明をする, 詳しくは [1],[4],[7] 等を参照してください.

有限次元代数において  $\tau, \tau^{-1}$  という加群から加群への対応が与えられる ( $\tau$  は Auslander-Reiten translation と呼ばれるものである, cf.[1]). これらは次の性質を満たす.

命題 2.1. (1)  $\tau X = 0 \Leftrightarrow X$  は射影加群,

(1)'  $\tau^{-1} X = 0 \Leftrightarrow X$  は入射加群,

(2)  $X$  が射影加群を直既約因子に持たないとすれば,  $\tau^{-1}\tau X \simeq X$ ,

(2)'  $X$  が入射加群を直既約因子に持たないとすれば,  $\tau\tau^{-1}X \simeq X$ ,

定義 2.2.  $X \in \text{mod-}A$  が *post-projective* であるとは, ある射影加群  $P$  及び  $r \geq 0$  が存在して  $X \simeq \tau^{-r}P$  となる時を言う.

以下  $Q$  を非輪状な連結有限簇とし  $Q_0, Q_1$  でそれぞれ頂点集合, 辺集合を表すことにする. また辺  $\alpha: x \rightarrow y$  に対して  $s(\alpha) := x, t(\alpha) := y$  とし. この時  $w = (\alpha_1 | \alpha_2 | \cdots \alpha_r)$  ( $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}) \forall i$ ) を長さ  $r$  の道 (path) と呼ぶ. また頂点を長さ 0 の道とする.

定義 2.3.  $Q$  の道代数  $kQ$  が以下で定まる.

(a):  $k$ -ベクトル空間としての基底は  $Q$  上の道,

(b):  $w = (\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \alpha_r), w' = (\beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \beta_{r'})$  に対して積

$$w \cdot w' := \begin{cases} (\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \alpha_r \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \beta_{r'}) & t(\alpha_r) = s(\beta_1), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

注意 2.4.  $Q$  の各頂点に対し, 対応する既約加群, 直既約射影加群, 直既約入射加群が定まる.

注意 2.5. 以下本レポートでは, 考える代数は有限次元道代数  $kQ$  に限り, 後で  $Q$  に条件を付け加える.

定義 2.6.  $T \in \text{mod-}kQ$  が傾加群であるとは, 以下の条件 (1), (2) を満たすときに言う.

(1)  $\text{Ext}_{kQ}^1(T, T) = 0$ ,

(2)  $T$  の直既約因子の個数は同型を除いて  $n = \#Q_0$  個.

注意 2.7. 上の条件 (1) を満たす加群を *partial-tilting module* と呼ぶ.

基本的な傾加群全体には半順序が次で定まる事が知られている (cf.[4])

$$T \leq T' \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Ext}(T', T) = 0.$$

特に  $kQ$  はこの順序に関する最大元である.

今  $\mathcal{T}(Q), \mathcal{T}_{p,p}(Q)$  でそれぞれ基本的傾加群全体及び post-projective な基本的傾加群全体を表す. また partial-tilting module  $M$  に対し  $\text{lk}(M), \text{lk}_{p,p}(M)$  でそれぞれ  $M$  を因子にもつ  $\mathcal{T}(Q), \mathcal{T}_{p,p}(Q)$  の元全体を表す.

定義 2.8. 半順序集合  $(\mathcal{T}(Q), \leq)$  の *Hasse-図* を  $\vec{\mathcal{K}}(Q)$  と書き, これを  $kQ$  における傾籓と呼ぶ.

以下  $\mathcal{T}_{p,p}(Q), \text{lk}(M), \text{lk}_{p,p}(M)$  がなす  $\vec{\mathcal{K}}(Q)$  の部分籓をそれぞれ,  $\vec{\mathcal{K}}_{p,p}(Q), \vec{\text{lk}}(M), \vec{\text{lk}}_{p,p}(M)$  と表す.

### 3 主結果

以下, 有限次元道代数  $A = kQ$  に関して次の条件を常に仮定する;

(条件): 任意の頂点  $x \in Q_0$  に対して,  $s(x) + t(x) \geq 2$ .

この時,  $\text{Ext}_A^1$  の次元に関する次の不等号が成り立つ.

補題 3.1.  $(\gamma : x \rightarrow y) \in Q_1$  とする. この時,

$$\dim \text{Ext}_A^1(\tau^{-r}P(y), \tau^{-s}P(z)) \leq \dim \text{Ext}_A^1(\tau^{-r}P(x), \tau^{-s}P(z)) \leq \dim \text{Ext}_A^1(\tau^{-r-1}P(y), \tau^{-s}P(z)),$$

が任意の  $s \geq 0$  及び任意の  $z \in Q_0$  に関して成り立つ.

籓  $Q$  に対して, 逆向きの矢を全て付け加えて出来る籓を  $\tilde{Q}$  とする. つまり,  $\tilde{Q}_0 = Q_0, \tilde{Q}_1 = Q_1 \amalg -Q_1$ , ここで矢  $\alpha : x \rightarrow y$  に対して  $-\alpha : y \rightarrow x$  である. 今  $\tilde{Q}$  内の道

$$w : x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_r} x_r$$

に対して  $c^+(w) := \#\{i \mid \alpha_i \in Q_1\}$  と置き,  $l_Q(x, y) := \min\{c^+(w) \mid w : \text{path from } x \text{ to } y\}$  と定める. この時上の補題から次が従う.

命題 3.2.  $\text{Ext}_{kQ}^1(\tau^{-r}P(i), \tau^{-s}P(j)) = 0 \iff r \leq s + l_Q(j, i)$

今  $L_Q := \{(r_i)_{i \in Q_0} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{Q_0} \mid r_i \leq r_j + l_Q(j, i) \ \forall i, j\} \subset \mathbf{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$  と置く.

系 3.3. 写像  $(r_i)_{i \in Q_0} \mapsto \bigoplus_{i \in Q_0} \tau^{-r_i} P(i)$  は半順序集合としての同型,

$$(L(Q), \leq^{op}) \simeq (\mathcal{T}_{p,p}(Q), \leq)$$

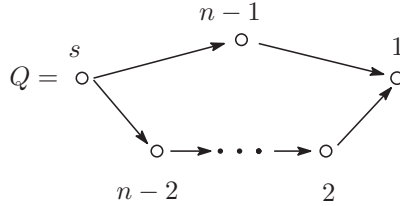
を誘導する. ここで  $(r_i) \leq^{op} (s_i) \stackrel{\text{def}}{\iff} r_i \geq s_i \ \forall i$  である.

上の系により, 半順序集合  $(\mathcal{T}_{p,p}(Q), \leq)$  の組み合わせ論的記述が得られた. これを用いて  $\vec{\mathcal{K}}_{p,p}(Q)$  の構造に関する次の結果が得られる.

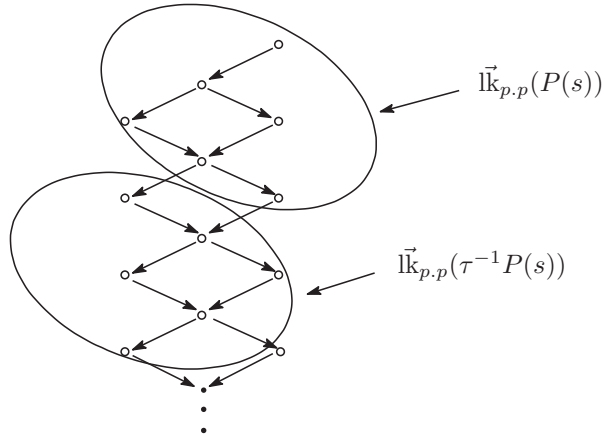
定理 3.4.  $Q$  が唯一の source  $s \in Q_0$  を持つとする. この時, 次が成り立つ.

- (1)  $\mathcal{T}_{p,p}(Q) = \coprod_{r \geq 0} \text{lk}_{p,p}(\tau^{-r} P(s))$ ,
- (2)  $\tau^{-r} : \vec{\text{lk}}_{p,p}(P(s)) \simeq \vec{\text{lk}}_{p,p}(\tau^{-r} P(s))$ ,
- (3)  $\#\text{lk}_{p,p}(P(s)) \leq 2^{n-1}$ ,
- (4)  $\vec{\text{lk}}_{p,p}(P(s))$  は連結
- (5)  $\text{lk}_{p,p}(\tau^{-r} P(s))$  から  $\text{lk}_{p,p}(\tau^{-r-t} P(s))$  への矢が存在すれば,  $t = 0$  または 1,
- (6)  $\vec{\mathcal{K}}_{p,p}(Q)$  は連結.

例 3.5.  $Q$  として次の籐を考える.



この時  $\vec{\mathcal{K}}_{p,p}(Q)$  は  $\mathbf{Z}A_{n-1}$  と同型である. 特に  $n = 4$  の場合を次に図示する.



#### 4 $l(Q) = 1$ の場合

この章では以下の設定の場合に  $\vec{\mathcal{K}}_{p,p}(Q)$  の構造を見る.

- (1)  $Q$  が唯一の source  $s(Q) \in Q_0$  を持つ.

$$(2)l(Q) := \max\{l_Q(x, y) \mid x, y \in Q_0\} = 1$$

また (1),(2)(及び前章で仮定した条件) を満たす簾全体を  $\mathcal{Q}$  と置くことにする.

定義 4.1. 簾  $\Gamma, \Gamma'$  に対し簾  $\Gamma \vec{\Pi} \Gamma'$  を以下で定める;

$$(\Gamma \vec{\Pi} \Gamma')_0 = \Gamma_0 \amalg \Gamma'_0, (\Gamma \vec{\Pi} \Gamma')_1 = \Gamma_1 \amalg \Gamma'_1 \amalg \{e \rightarrow s' \mid e : \text{sink of } \Gamma, s' : \text{source of } \Gamma'\}.$$

今  $C_n$  で半順序集合  $(\{0, 1\}, \leq^{op})$  の Hasse-簾を表す事にする. この時補題 3.3 より  $n$  個の頂点を持つ簾  $Q \in \mathcal{Q}$  に対して,  $\vec{\text{lk}}_{p,p}(Q)$  が  $C_{n-1}$  の部分簾であることがわかる. そこで  $C_n$  の部分簾  $K$  に関する次の条件  $(a)_n, (b)_n$  を考える;

$$(a)_n : (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \in K_0$$

$$(b)_n : T = (r_i), T' = (r'_i) \in K_0 \text{ に対し, } \langle T, T' \rangle_{\pm} \in K_0, \text{ ここで } \langle T, T' \rangle_+ \text{ の } i\text{-成分は } \min\{r_i, r'_i\} \text{ で } \langle T, T' \rangle_- \text{ の } i\text{-成分は } \max\{r_i, r'_i\} \text{ である.}$$

今  $(a)_n, (b)_n$  を満たす簾全体を  $\mathcal{K}_n$  とし  $\mathcal{K} := \amalg \mathcal{K}_n$  と置けば次が得られる.

命題 4.2. (1)  $Q \in \mathcal{Q}$  とすれば  $\vec{\text{lk}}_{p,p}(P(s(Q))) \in \mathcal{K}$ ,

(2)  $K \in \mathcal{K}$  とすればある  $Q \in \mathcal{Q}$  が存在して  $K = \vec{\text{lk}}_{p,p}(P(s(Q)))$ .

補題 3.3, 定理 3.4 及び上の命題を用いて次がわかる.

定理 4.3.  $\{\vec{\mathcal{K}}_{p,p}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}\} = \{\vec{\Pi} K \mid K \in \mathcal{K}\}$ .

## 参考文献

- [1] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation theory of artin algebras, Cambridge University Press, 1995.
- [2] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras Vol. **1**, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge University Press, 2006.
- [3] D. Happel and C. M. Ringel, Tilted algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), no.2, 399-443.
- [4] D. Happel and L. Unger, On a partial order of tilting modules, Algebr. Represent. Theory **8** (2005), no.2, 147-156.
- [5] D. Happel and L. Unger, On the quiver of tilting modules, J. Algebra **284** (2005), no.2, 857-868.
- [6] D. Happel and L. Unger, Reconstruction of path algebras from their posets of tilting modules, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no.7, 3633-3660.
- [7] D. Happel and L. Unger, Links of faithful partial tilting modules, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), no.6, 637-652.
- [8] C. Riedtmann and A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules, Comment. Math. Helv **66** (1991), no.1, 70-78.
- [9] L. Unger, Combinatorial aspects of the set of tilting modules, Handbook of tilting theory, L. Angeleri Hügel, D. Happel, H. Krause, eds., London Mathematical Society Lecture Note Series **332**, Cambridge University Press, 2007.

# パラレルセッション 解析学



# Semi-classical Asymptotics in an Abstract Bose Field Model

Yuta Aihara

Department of Mathematics, Hokkaido University

## I. INTRODUCTION

In quantum mechanics, in which a physical constant  $\hbar := h/2\pi$  ( $h$  : the Planck constant) plays an important role, the limit  $\hbar \rightarrow 0$  for various quantities (if it exists) is called the classical limit. Trace formulas in the abstract boson Fock space and the classical limit for the trace  $Z(\beta\hbar)$  of the heat semigroup of a perturbed second quantization operator were derived by Arai [1]. Generally speaking, the classical limit is regarded as the zero-th order approximation in  $\hbar$ . From this point of view, it is interesting to derive higher order asymptotics of various quantities in  $\hbar$ . Such asymptotics are called semi-classical asymptotics. The purpose of this paper is to derive an asymptotic formula for  $Z(\beta\hbar)$ .

## II. A CLASSICAL LIMIT IN THE ABSTRACT BOSON FOCK SPACE

In this section we review a classical limit for the trace of a perturbed second quantization operator and some fundamental facts related to it.

Let  $\mathcal{H}$  be a real separable Hilbert space, and  $A$  be a strictly positive self-adjoint operator acting in  $\mathcal{H}$ . We denote by  $\{\mathcal{H}_s(A)\}_{s \in \mathbb{R}}$  the Hilbert scale associated with  $A$  [1]. For all  $s \in \mathbb{R}$ , the dual space of  $\mathcal{H}_s(A)$  can be naturally identified with  $\mathcal{H}_{-s}(A)$ .

For all  $s \geq 0$ , the continuous bilinear form  $(\phi, f) \mapsto \phi(f)$  on  $\mathcal{H}_{-s}(A) \times \mathcal{H}_s(A)$  extends to the continuous bilinear form on  $\mathcal{H}_{-s}(A) \times \mathcal{H}$ , by the density of  $\mathcal{H}_s(A)$  in  $\mathcal{H}$ .

We denote by  $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$  the ideal of the trace class operators on  $\mathcal{H}$ . Let  $\gamma > 0$  be fixed. Throughout this paper, we assume the following.

*Assumption I.*  $A^{9-\gamma} \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ .

Under Assumption I, the embedding mapping of  $\mathcal{H}$  into

$$E := \mathcal{H}_{-\gamma}(A)$$

is Hilbert-Schmidt. Hence, by Minlos' theorem, there exists a unique probability measure  $\mu$  on  $(E, \mathcal{B})$  such that the Borel field  $\mathcal{B}$  is generated by  $\{\phi(f) | f \in \mathcal{H}\}$  and

$$\int_E e^{i\phi(f)} d\mu(\phi) = e^{-\|f\|_{\mathcal{H}}^2/2}, \quad f \in \mathcal{H},$$

where  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  denotes the norm of  $\mathcal{H}$ .

The complex Hilbert space  $L^2(E, d\mu)$  is canonically isomorphic to the boson Fock space over  $\mathcal{H}$ , which is called the  $Q$ -space representation of it. We denote by  $d\Gamma(A)$  the second quantization of  $A$  and set

$$H_0 = d\Gamma(A).$$

Then for all  $\beta > 0$ ,  $e^{-\beta H_0} \in \mathcal{I}_1(L^2(E, d\mu))$ .

**DEFINITION 2.1.** *A mapping  $V$  of a Banach space  $X$  into a Banach space  $Y$  is said to be polynomially continuous if there exists a polynomial  $P$  of two real variables with positive coefficients such that*

$$\|V(\phi) - V(\psi)\| \leq P(\|\phi\|, \|\psi\|)\|\phi - \psi\|, \quad \phi, \psi \in X.$$

Let  $V$  be a real valued function on  $E$ . Throughout this paper, we assume the following.

*Assumption II.* *The function  $V$  is bounded from below, 3-times Fréchet differentiable, and  $V, V', V'', V'''$  are polynomially continuous.*

For  $\hbar > 0$ , we define  $V_{\hbar}$  by

$$V_{\hbar}(\phi) := V(\sqrt{\hbar} \phi), \quad \phi \in E.$$

and set

$$H_{\hbar} := H_0 \dot{+} \frac{1}{\hbar} V_{\hbar},$$

where  $\dot{+}$  denotes the quadratic form sum.

Under Assumption I, II, for all  $\beta > 0$ ,  $e^{-\beta H_{\hbar}} \in \mathcal{I}_1(L^2(E, d\mu))$  [ 1 ]. For all  $s \in \mathbb{R}$ ,  $A^{s/2}$  is a continuous linear operator from  $\mathcal{H}_s(A)$  to  $E$  and it extends to a continuous linear operator from  $\mathcal{H}_{-\gamma+s}(A)$  to  $E$ .

**THEOREM 2.2.** [ 1 ]. *Let  $\beta > 0$ . Then*

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\text{Tr } e^{-\beta \hbar H_{\hbar}}}{\text{Tr } e^{-\beta \hbar H_0}} = \int_E \exp \left( -\beta V \left( \sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2} \phi \right) \right) d\mu(\phi).$$

We set

$$\Omega = E^3, \quad \nu = \mu \otimes \mu \otimes \mu.$$

Then  $\nu$  is a probability measure on  $\Omega$ .

Let  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  be the eigenvalues of  $A$ , and  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  be the complete orthonormal system (CONS) of  $\mathcal{H}$  with  $Ae_n = \lambda_n e_n$ , and

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n^{\gamma-9}} < \infty \quad (2.1)$$

Let  $\varphi$  be a bijection from  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  to  $\mathbb{N}$ . For all  $n, m \in \mathbb{N}$ , we set  $f_{n,m} = e_{\varphi(n,m)}$ . Then  $\{f_{n,m}\}_{n,m=1}^\infty$  is a CONS of  $\mathcal{H}$ . For all  $\phi \in E$ , we define

$$\phi_n := \phi(e_n), \quad \phi_{n,m} := \phi(f_{n,m}).$$

Then  $\{\phi_n\}_n$  and  $\{\phi_{n,m}\}_{n,m}$  are families of independent Gaussian random variables such that for all  $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_E \phi_n d\mu(\phi) = 0, \quad \int_E \phi_n \phi_m d\mu(\phi) = \delta_{nm} \quad (2.2)$$

$$\int_E \phi_{n,m} \phi_{n',m'} d\mu(\phi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (2.3)$$

For all  $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ , we have

$$\sup_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}} \int_E |\phi_{n_1}|^{m_1} \dots |\phi_{n_p}|^{m_p} d\mu(\phi) < \infty. \quad (2.4)$$

For all  $N, M \in \mathbb{N}$ , we set

$$\begin{aligned} F_{N,M}(\varepsilon, \omega, s) &= \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n}{\sqrt{\lambda_n}} e_n + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sqrt{\frac{4\varepsilon^2 \lambda_n}{\beta(\varepsilon^2 \lambda_n^2 + (2\pi m)^2)}} (\psi_{n,m} \cos(2\pi m s) \\ &+ \theta_{n,m} \sin(2\pi m s)) e_n, \quad \varepsilon \geq 0, \omega = (\phi, \psi, \theta) \in \Omega, 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Then we have

$$\frac{\text{Tre}^{-\beta \hbar H_\hbar}}{\text{Tre}^{-\beta \hbar H_0}} = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_\Omega \exp \left( -\beta \int_0^1 V(F_{N,M}(\varepsilon, \omega, s)) ds \right) d\nu(\omega), \quad (2.6)$$

where  $\varepsilon = \beta \hbar$  (See [1], Lemma 5.2, Lemma 5.3. ).

### III. AN ASYMPTOTIC FORMULA

We can prove the following theorem.

THEOREM 3.1. For all  $\beta > 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{Tre}^{-\beta \hbar H_\hbar}}{\text{Tre}^{-\beta \hbar H_0}} \\
&= \int_E \exp \left( -\beta V \left( \sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2} \phi \right) \right) d\mu(\phi) \\
&\quad - \frac{\beta^3 \hbar^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E^2} d\mu(\phi) d\mu(\psi) \exp \left( -\beta V \left( \sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2} \phi \right) \right) \\
&\quad \times V'' \left( \sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2} \phi \right) \left( A^{1/2} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta \pi m}} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n,m} e_n \right), A^{1/2} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta \pi m}} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n,m} e_n \right) \right) \\
&\quad + o(\hbar^2)
\end{aligned}$$

as  $\hbar \rightarrow 0$ .

## REFERENCES

- [1] A. Arai, Trace formulas, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 510-546.
- [2] A. Arai, Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold, *J. Funct. Anal.* **82** (1989), 330-369.
- [3] A. Arai, A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of there index, *J. Funct. Anal.* **105** (1992), 342-408.
- [4] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I. Functional Analysis," Academic Press, New York, 1972.
- [5] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness," Academic Press, New York, 1975.
- [6] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. IV. Analysis of Operators," Academic Press, New York, 1978.
- [7] B. Simon, "Trace Ideals and Quantum Physics," Academic Press, New York, 1979.

# 一般化された量子電磁力学モデルの基底状態とエネルギーギャップについて

船川 大樹

電子と光子が相互作用モデルの解析はこれまで多くのことが知られてきた. 例えば, 最低エネルギーの状態を描く基底状態の存在性やそのモデルの持つエネルギーにはギャップがないなどである.(例えば [3] を参照) では, このモデルを少し一般化させるとどうなるのか. 本紙ではこれについて解説していく.

量子電磁力学 (QED) のハミルトニアンとして, 以下のものがある.

$$H_{QED} = H_{el} + H_{ph} + \alpha \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha^j \psi(\mathbf{x}) A_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \alpha^2 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{\psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (1)$$

ここで  $\alpha \in \mathbf{R}$  は結合定数,  $\psi$  はディラック場,  $A_j$  は量子輻射場,  $\alpha^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は  $4 \times 4$  行列で正準反交換関係を満たすもの. また  $H_{el}$  と  $H_{ph}$  はそれぞれディラック場とフォトン場での運動項を表現している.

さて, これを数学として意味を持たせ少し一般化した次のハミルトニアンを考える.

$$H = H_0 + \kappa_1 H'_1 + \kappa_2 H'_2 + \kappa_3 H'_3 \quad (2)$$

ただし  $H'_1, H'_2, H'_3$  は以下のように定義する.

$$H_0 := B \otimes I + H_{ph} \quad (3)$$

$$H'_1 := \sum_{j=1}^J \int_{\mathbf{R}^\nu} \chi_1(\mathbf{x}) P_{1,j}(\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x})) \otimes A_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

$$H'_2 := \int_{\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}^\nu} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) P_2(\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}), \psi^*(\mathbf{y})) \otimes Id\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (5)$$

$$H'_3 := \sum_{j=1}^J \int_{\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}^\nu} \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) P_{3,j}(\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}), \psi^*(\mathbf{y})) \otimes (A_j(\mathbf{x}) + A_j(\mathbf{y})) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (6)$$

ここでそれぞれの記号は以下で定義する.

## 1 粒子やディラック場の一般化

$H$  をヒルベルト空間とする. 一般の線形作用素  $T$  に対し, その定義域を  $D(T)$  と書き, スペクトルを  $\sigma(T)$  と書くことにする. もし, この  $T$  が下に有界ならば,  $\inf \sigma(T) > -\infty$  を考えることができる. この値を  $E_0(T) := \inf \sigma(T)$  と書くことにする. さて  $H$  上の線形作用素  $B$  を導入する. この  $B$  には次の仮定を設ける.

(A.1)  $B$  は下に有界な自己共役作用素である. このとき  $\tilde{B} := B - E_0(B)$  とする.

また, 各点  $\mathbf{x}$  に対して  $\psi_l(\mathbf{x})$  を  $H$  上有界線形作用素とする. ( $l = 1, \dots, N$ ) これを並べてベクトルとした作用素を  $\psi(\mathbf{x})$  と書くことにする.

$$\psi(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

また, 相互作用に入っている  $P$  とは多項式のことと特に次を満たしているものである.

$P_{1,j}(\psi(x), \psi^*(x))$  と  $P_{3,j}(\psi(x), \psi^*(x), \psi(y), \psi^*(y))$  はそれぞれ  $H$  上の有界線形作用素となっており, 特にその作用素ノルムは  $x$  と  $y$  に依存しない定数  $C_{1,j}, C_{3,j}$  で上から押さえられる.

$$\|P_{1,j}(\psi(x), \psi^*(x))\| \leq C_{1,j}, \quad \|P_{3,j}(\psi(x), \psi^*(x), \psi(y), \psi^*(y))\| \leq C_{3,j} \quad (8)$$

また  $P_2(\psi(x), \psi^*(x), \psi(y), \psi^*(y))$  は  $B$  に対して相対有界である. つまり

$D(\tilde{B}^{1/2}) \subset \cap_{x,y \in \mathbf{R}^\nu} D(P_2(\psi(x), \psi^*(x), \psi(y), \psi^*(y)))$  となっている. 更に各  $x, y \in \mathbf{R}^\nu$  に対して次を満たす正の定数  $a((x, y)), b((x, y)) \geq 0$  が存在し,  $u \in D(\tilde{B}^{1/2})$  となる全ての  $u$  に対して次の式が成立する.

$$\|(P_2(\psi(x), \psi^*(x), \psi(y), \psi^*(y))u)\| \leq a((x, y)) \|\tilde{B}^{1/2}u\| + b((x, y)) \|u\| \quad (9)$$

## 2 ボソンフォック空間

まず,  $K$  をヒルベルト空間としたとき,  $\otimes_s^n K$  を  $K$  の  $n$  重対称テンソル積とする. このとき,  $K$  上のボソンフォック空間を  $\mathcal{F}_b(K) := \oplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_s^n K)$  と定義する.

$\mathcal{F}_b(K)$  は  $(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)})_{\otimes_s^n K}$  を内積として, ヒルベルト空間となっている. ただし, 本紙では内積空間  $K$  上の内積  $(f, g)_K$  は  $f$  に対して線形で  $g$  に対して反線形としている.

さて  $S_n : \otimes^n K \rightarrow \otimes_s^n K$  を正射影作用素とする. 任意の  $f \in K$  に対して,  $\mathcal{F}_b(K)$  上の生成作用素  $A^*(f)$  を次のように定義する.

$$(A^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}), \quad n \geq 1$$

また,  $(A^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$  とする. 更に消滅作用素  $A(f)$  は生成作用素  $A^*(f)$  の共役作用素として定義する.  $\Omega_b := \{1, 0, \dots\} \in \mathcal{F}_b(K)$  をボソンフォック真空と呼び,  $M \subset K$  上のボソン有限粒子部分空間を

$$\mathcal{F}_b^{fin}(M) := \mathcal{L}\{A^*(f_1) \cdots A^*(f_n) \Omega_b, \Omega_b \mid f_j \in M, j = 1, \dots, n, n \in \mathbf{N}\}$$

と定義する. 本紙ではこの空間を有限粒子部分空間と呼ぶことにする.  $A^*(f)$  の定義域は次で与えられる.

$$D(A^*(f)) := \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_b(K) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \|(A^*(f)\Psi)^{(n)}\|_{\otimes_s^n K}^2 < \infty\}$$

$A^*(f)$  と  $A(g)$  の定義域は有限粒子部分空間を含んでおり, また不変にしている. 更に, 有限粒子部分空間上で正準交換関係を満たしている.

$$[A(f), A^*(g)] = (f, g)_K \quad [A(f), A(g)] = [A^*(f), A^*(g)] = 0$$

ここで  $[A, B] = AB - BA$  である.  $T$  を  $K$  上の作用素とする. その  $\mathcal{F}_b(K)$  上の第 2 量子化作用素  $d\Gamma_b(T)$  を

$$d\Gamma_b(T) := \overline{\left( \oplus_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n (I \otimes \cdots \otimes I \otimes T \otimes I \otimes \cdots \otimes I) \mid \hat{\otimes}^n D(T) \right) \right)}_{\mathcal{F}_b(K)} \quad (10)$$

と定義する. ただし, 式中の  $T$  は  $j$  番目にあり, 最後の  $\mathcal{F}_b(K)$  は簡約の意味である.

## 3 輻射場

まず, 輻射場が作用する空間を次のように定義する.

$$\mathcal{F}_{ph} := \mathcal{F}_b(L^2(\mathbf{R}^\nu; \mathbf{C}^2)) \quad (11)$$

また  $e_r(\mathbf{k}) = (e_r^j(\mathbf{k}))_{j=1}^\nu, r = 1, \dots, \nu - 1$  は以下を満たすベクトルで, 特に偏光ベクトルと呼ぶ.

$$e_r(\mathbf{k}) \cdot e_{r'}(\mathbf{k}) = \delta_{r,r'}, \quad \mathbf{k} \cdot e_r(\mathbf{k}) = 0 \quad a.e. \mathbf{k} \in \mathbf{R}^\nu \quad (12)$$

$f \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$  に対して  $a_1^*(f) = A^*((f, 0)), a_2^*(f) = A^*((0, f))$  とする. このとき,  $a_r(f)$  と  $a_r^*(g)$  は有限粒子部分空間上で正準交換関係を満たしている.

$$[a_r(f), a_{r'}(g)] = \delta_{r,r'}(f, g), \quad [a_r(f), a_{r'}(g)] = [a_r^*(f), a_{r'}^*(g)] = 0$$

次に運動量  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^\nu$  でのフォトンのエネルギーを表すものをボレル可測関数で  $0 < \omega(\mathbf{k}) < \infty \quad a.e. \mathbf{k} \in \mathbf{R}^\nu$  となる  $\omega$  を使い,  $\omega(\mathbf{k})$  で書くことにする. これを  $L^2(\mathbf{R}^\nu; \mathbb{C}^2)$  上の掛け算作用素と思い, フォトン場での自由なハミルトニアンを次のように定義する.

$$H_{ph} = I \otimes d\Gamma_b(\omega) \quad (13)$$

また, 量子輻射場については以下のように定義する. まず,

$$f_{r,x}^j(\mathbf{k}) = \frac{\chi_{ph}(\mathbf{k}) e_{r,x}^j(\mathbf{k})}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega(\mathbf{k})}} \quad (14)$$

ただし  $e_{r,x}^j(\mathbf{k}) = e_r^j(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  である. この関数を使って量子輻射場を次で定義する.

$$A_j(\mathbf{x}) = \sum_{r=1,2} (a_r(f_{r,x}^j) + a_r^*(f_{r,x}^j)) \quad (15)$$

ここで以下の仮定を設ける.

(A.2)

$$\frac{\chi_{ph}}{\sqrt{\omega^{k/2}}} \in L^2(\mathbf{R}^\nu), \quad k = 1, 2 \quad (16)$$

このとき  $A_j(x)$  は  $H_{ph}^{1/2}$  に相対有界であることが分かる.

## 4 全ハミルトニアン

まず, 全ヒルベルト空間を次のように定義する.

$$\mathcal{F} := H \otimes \mathcal{F}_{ph} \quad (17)$$

更に相互作用部分の積分が収束するように以下の仮定をつける.

(A.3)

$$\chi_1 \in L^1(\mathbf{R}^\nu), \quad a\chi_2, \quad b\chi_2, \quad \chi_3 \in L^1(\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}^\nu) \quad (\text{ただし, } a, b \text{ は (9) での関数}). \quad (18)$$

このようにして, 全体のハミルトニアン  $H$  は  $\mathcal{F}$  上の線形作用素となる. このとき, さらに以下の事実が分かる. 定理 1 (A.1)-(A.3) を仮定する. このとき,  $H$  は  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  に寄らず自己共役作用素であり, また下に有界な作用素である. さらに  $H_0$  の全ての芯上で本質的自己共役である.

## 5 基底状態

作用素  $T$  が下に有界であるとき  $E_0(T) = \inf \sigma(T)$  を考えることが出来る. このとき,  $E_0(T)$  を  $T$  の最低エネルギーと呼ぶ. また  $E_0(T)$  が  $T$  の固有値となっていたときの状態, すなわち固有ベクトルのことを  $T$  の基底状態と呼ぶ. 更にその固有空間すなわち  $\dim \text{Ker}(T - E_0(T))$  を縮態度と呼ぶ. 特に縮態度が 1 となると基

底状態は一意的であるという. 数理物理の観点からではこの基底状態の存在性と一意性は一つの大きな問題となっている. この基底状態について考察するため, 以下の仮定を設ける.

$$(A.4) \quad \chi_{ph} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^\nu)$$

$$(A.5)$$

$$\int_{\mathbf{R}^\nu} |x\chi_1(x)| dx < \infty, \int_{\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}^\nu} |x\chi_3((x, y))| dxdy < \infty, \int_{\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}^\nu} |y\chi_3((x, y))| dxdy < \infty \quad (19)$$

$$(A.6) \quad \chi_{ph} e_r^j / \sqrt{\omega(\mathbf{k})^3} \in L^2(\mathbf{R}^\nu), \quad r = 1, \dots, \nu - 1, \quad j = 1, \dots, \nu$$

$$(A.7) \quad E_0(B) < \inf \sigma_{ess}(B)$$

$$(A.8) \quad \omega \text{ は連続で } \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \omega(\mathbf{k}) = \infty \text{ 更に, 正の定数 } C, \gamma > 0 \text{ が存在して, 全ての } \mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbf{R}^\nu \text{ に対して } |\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}')| \leq C |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^\gamma [a + \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}')] \text{ が成立する.}$$

この仮定の下で以下の事実が成立する.

定理 2 (A.1)-(A.8) を仮定する. このとき十分小さな  $|\kappa_1|, |\kappa_2|, |\kappa_3|$  に対して,  $H$  は基底状態を持つ.

この証明については, [1]Section3, [3]Section2 をなぞるものである. 縮態度については以下の仮定を新たに加え, [4]Theorem3.6 を使う.

$$(A.9) \quad \omega \text{ について, 次を仮定する. ルベグ測度が 0 で, 次の性質を満たす } \mathbf{R}^\nu \text{ の部分集合 } K \text{ が存在する.}$$

$$\omega \in C^3(\mathbf{R}^\nu \setminus K), \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_n}(\mathbf{k}) \neq 0, \quad n = 1, \dots, \nu, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\nu) \in \mathbf{R}^\nu \setminus K$$

$$(A.10) \quad \dim \text{Ker}(B - E_0(B)) = 1$$

$$\text{定理 3 (A.1)-(A.10) を仮定する. このとき十分小さな } |\kappa_1|, |\kappa_2|, |\kappa_3| \text{ に対して, } \dim \text{Ker}(H - E_0(H)) = 1$$

## 6 エネルギーギャップ

ある条件の下で  $H$  のエネルギーギャップは無いことが分かる. ここではこれについて述べる. この考察には [2].Theorem1.3 を使う.

$$(A.11) \quad \text{ess.Ran}(\omega) = [0, \infty)$$

このとき, 次の事実が分かる.

$$\text{定理 4 (A.1)-(A.3), (A.11) を仮定する. このとき, } \sigma(H) = [E_0(H), \infty) \text{ が成立する.}$$

これにより, ある仮定の下で  $H$  にはエネルギーギャップが無いことが分かる.

## 7 参考文献

- [1]Arai, Asao; Hirokawa, Masao ; On the spin-boson model. Quantum stochastic analysis and related fields (Japanese) (Kyoto, 1995). Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku No. 957 (1996), 16-35.
- [2]Arai, Asao; Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians. J. Math. Anal. Appl. 246 (2000), no. 1, 189-216.
- [3]Takaesu, Toshimitsu; On the spectral analysis of quantum electrodynamics with spatial cutoffs. I. J. Math. Phys. 50 (2009), no. 6, 062302, 28 pp.
- [4]Hiroshima, Fumio; Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields. J. Funct. Anal. 224 (2005), no. 2, 431-470.

# 場の量子論に対する散乱理論の数学的構成について

二口 伸一郎 (北海道大学)

## 概要

このテクニカルレポートでは、場の量子論に対する散乱理論の基本的なことからを解説したいと思います。主な道具は、作用素論およびスペクトル理論です。

## 1 はじめに

散乱理論とは、粒子どうしが相互作用（衝突）して飛んでいく様子を調べる分野です。量子力学で扱うような粒子は非常に小さく、その相互作用にかかる時間はとても短いので、実際の観測にかかる時間は、粒子たちにとってはとても長い時間になっています。したがって散乱理論においては、時刻  $t$  に対する状態の漸近挙動 ( $t \rightarrow \pm\infty$  のときに状態がどのような振る舞いをするか) を調べるのが重要になってきます。

いま、自由ハミルトニアンを  $H_0$ 、全ハミルトニアンを  $H$  とします<sup>1</sup>。これらはしばしば、Hilbert 空間上の自己共役作用素として表されます。量子力学における散乱理論では、波動作用素

$$W_{\pm} := \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

を解析することが基本的です。

しかし、極めて残念なことに、場の量子論においてはこの波動作用素が存在しそうにありません。したがって、波動作用素の定義を修正するか、散乱理論の構成のしかたを変える必要があります。

このテクニカルレポートでは、そのような構成方法を簡単に紹介するとともに、場の量子論の数理に必要な基本的なことからを解説したいと思います。この後の小節でフォック空間と、そこに住む重要な作用素を導入したのち、第二節では場の量子論において厳密に構成されるモデルをいくつか紹介します。第三節では散乱理論の構成方法を紹介し、そこで問われる典型的な問題を紹介します。

### 1.1 フォック空間

$\mathcal{H}$  を複素 Hilbert 空間とし、その内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 、ノルムを  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  で表します。 $\mathcal{H}$  の  $n$  重テンソル積を  $\otimes^n \mathcal{H}$ 、対称テンソル積を  $\otimes_s^n \mathcal{H}$ 、反対称テンソル積を  $\otimes_a^n \mathcal{H}$  で表します。このとき、 $\mathcal{H}$  上の全フォック空間  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 、ボソンフォック空間  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$ 、フェルミオンフォック空間  $\mathcal{F}_f(\mathcal{H})$  はそれぞれ、無限直和；

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes^n \mathcal{H}) = \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \mid \psi^{(n)} \in \otimes^n \mathcal{H}, \|\psi\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|_{\otimes^n \mathcal{H}}^2 < \infty \right\},$$
$$\mathcal{F}_b(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_s^n \mathcal{H}), \quad \mathcal{F}_f(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_a^n \mathcal{H})$$

で定義されます。場の量子論においては、これらはしばしば状態の空間として用いられます。この場合、 $\mathcal{H}$  は 1 つの粒子の状態空間を表し、各  $n$  に対して、 $\otimes^n \mathcal{H}$  は  $n$  個の粒子の状態空間を表します。ある  $n_0 \in$

<sup>1</sup>ハミルトニアンとは、エネルギーを司る対象であり、粒子の状態の時間発展の生成子 (generator) としての役割も持ちます。自由ハミルトニアンは粒子単体でのエネルギーを表し、全ハミルトニアンは粒子たちの相互作用も含めた場合のエネルギーを表します。

$\mathbb{N}$  が存在して、第  $n_0$  成分以降の全ての成分がゼロであるようなベクトルの全体は有限粒子空間と呼ばれ、 $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{F}_{b,0}(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{F}_{f,0}(\mathcal{H})$  で表されます。また、無限直和の第 0 成分だけがゼロでないようなベクトル  $\Omega_{\mathcal{H}} := \{1, 0, 0, \dots\}$  は、粒子が存在しないような状態とみなされ、(フォック) 真空と呼ばれます<sup>2</sup>。

## 1.2 第 2 量子化作用素

Hilbert 空間上の線形作用素  $T$  に対して、その定義域を  $D(T)$  で表します。  $T$  が稠密に定義されている場合、その共役作用素は  $T^*$  で表します。  $\mathcal{H}$  上の稠密に定義された閉作用素  $A$  に対して、 $n$  重テンソル積空間  $\otimes^n \mathcal{H}$  上の作用素  $A^{(n)}$  を

$$A^{(n)} := \sum_{j=1}^n \overline{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{j\text{-th}}{A} \otimes I \otimes \cdots \otimes I} \Big| \otimes_{\text{alg}}^n D(A)$$

のように定めます。ただし、 $I$  は上の恒等作用素を表し、 $\otimes_{\text{alg}}^n D(A)$  は代数的テンソル積空間を表します。このとき、 $A$  の第 2 量子化作用素  $d\Gamma(A)$  は、全フォック空間上で次のように定義されます；

$$d\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{(n)}, \quad A^{(0)} := 0.$$

また、第 2 量子化作用素は、 $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  と  $\mathcal{F}_f(\mathcal{H})$  のそれぞれで簡約部分 (reduced part) をもち、それぞれ  $d\Gamma_b(A)$ ,  $d\Gamma_f(A)$  で表されます。

## 1.3 生成 (消滅) 作用素

ボソンフォック空間  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上で、各  $f \in \mathcal{H}$  に対して次の (i)-(iii) を満たすような、稠密に定義された閉作用素  $a(f)$  を、(ボソン) 消滅作用素、その共役作用素  $a(f)^*$  を (ボソン) 生成作用素と呼びます。

- (i) 全ての  $f \in \mathcal{H}$  に対して、 $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$  は  $a(f)$  の芯 (core) である。
- (ii)  $a(\alpha f + \beta g)\psi = \{\alpha^* a(f) + \beta^* a(g)\}\psi$ , ( $f, g \in \mathcal{H}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\psi \in \mathcal{F}_{b,0}(\mathcal{H})$ ).
- (iii) 全ての  $f \in \mathcal{H}$  と  $\psi \in \mathcal{F}_{b,0}(\mathcal{H})$  に対して、

$$\begin{aligned} (a(f)^* \psi)^{(0)} &= 0, \\ (a(f)^* \psi)^{(n)} &= \sqrt{n} S_n(f \otimes \psi^{(n-1)}), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

生成 (消滅) 作用素を特徴づける性質は (iii) で、これは、ボソン生成作用素  $a(f)^*$  が状態  $f$  のボース粒子をひとつ生成していることを意味しています<sup>3</sup>。真空  $\Omega_{\mathcal{H}}$  は消滅作用素によってゼロに飛ばされ； $a(f)\Omega_{\mathcal{H}} = 0$ , ( $f \in \mathcal{H}$ )、これは真空のひとつの特徴づけになっています。このことは、あとで散乱理論の構成に関わってきます。また、真空に生成作用素を次々作用素させてできる空間；

$$\mathcal{L}\{\Omega_{\mathcal{H}}, a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* \Omega_{\mathcal{H}} \mid n \in \mathbb{N}, f_j \in \mathcal{H}\}$$

が、全空間  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  の中で稠密 (dense) であることも重要です。

## 2 厳密なモデル

これまでに研究されてきたモデルの一部を紹介します<sup>4</sup>。

<sup>2</sup>量子力学および場の量子論においては、複素数倍のベクトルは全て同一の状態を表しますので、真空ベクトル  $\Omega_{\mathcal{H}}$  の複素数倍はすべて真空です。ここではベクトルが規格化 ( $\|\Omega_{\mathcal{H}}\| = 1$ ) されているとなにかと便利です。第 0 成分を 1 にとっています。

<sup>3</sup>フェルミオンフォック空間  $\mathcal{F}_f(\mathcal{H})$  上でも、同様の生成 (消滅) 作用素が存在します。

<sup>4</sup>ここに挙げるモデル以外にも Nelson モデル、スピン-ボソンモデル、Derezinski-Gerard モデルなど、重要なものがいくつも存在します。

## 2.1 van Hove モデル

これは、核力<sup>5</sup>の場の量子化を記述するモデルです。このモデルのハミルトニアン的一般形は

$$H_T(g) = d\Gamma_b(T) + \phi(g) \quad \text{on } \mathcal{F}_b(\mathcal{H})$$

で与えられます。ただし、 $T$  は  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素であり、 $\phi(g) := \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{a(g) + a(g)^*}$  は Segal 場の作用素と呼ばれる自己共役作用素です。

van Hove モデルは様々な意味で良い性質を持っており、ハミルトニアンの特値が特定できたり、固有ベクトルを書き下すことができるなど、数学的に最も解析しやすいモデルです。しかし、このような極めて簡素なモデルでさえ波動作用素が存在しません。

## 2.2 非相対論的 QED — Pauli-Fierz モデル

これは、非相対論的荷電粒子と量子輻射場の相互作用を記述するモデルです。ハミルトニアンは

$$H_{\text{PF}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_n - q\mathbf{A}(\mathbf{x}; g))^2 + V + d\Gamma_b(\omega) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathcal{F}_b(\bigoplus^2 L^2(\mathbb{R}^d))$$

で与えられます。(個々の作用素の定義は省略します。)

QED とは量子電磁力学<sup>6</sup>(Quantum Electrodynamics) のことであり、本来の QED は相対論的で非常に難しい対象です。この Pauli-Fierz モデルは、本来の QED の手前に位置し、精力的に研究されています。

## 2.3 相対論的 QED

これは本来の QED であり、Coulomb ゲージの下では、ハミルトニアンは次のように与えられます；

$$d\Gamma_f(E_M) + d\Gamma_b(\omega) + e \int_{\mathbb{R}^3} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha^j \psi(\mathbf{x}) \otimes A_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{e^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

$$\text{on } \mathcal{F}_f(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)) \otimes \mathcal{F}_b(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)).$$

このままの形で数学的な実現を得るののかも不明であり、困難の多い対象です。

## 3 場の量子論に対する散乱理論

現在のところ、場の量子論に対して散乱理論を構築するためのアプローチは2つあります。一つは、修正を加えた波動作用素に対して Dyson 級数

$$W_\pm := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} e^{\pm itH} e^{-itH_0} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{n=0}^\infty \int_{\infty > t_n > \dots > t_1 > 0} i^n e^{-\varepsilon t_n} V(t_n) \dots V(t_1) dt_n \dots dt_1$$

を用いる方法。ここで、 $V(t) := e^{itH_0} V e^{-itH_0}$  であり、 $V$  はハミルトニアンの相互作用項を表します。この級数を数学的に正当化するのは困難であるように見えます。

もう一つは、通常と全く異なる方法で波動作用素を定義する LSZ 構成法<sup>7</sup>です。

<sup>5</sup>核子 (原子核の構成要素) の間に働く引力のこと。

<sup>6</sup>場の量子論の中でも最も基本的なものです。

<sup>7</sup>LSZ は、Lehman-Symanzik-Zimmermann の頭文字です。

### 3.1 LSZ 構成法

この構成法は、まず漸近生成 (消滅) 作用素；

$$a^\pm(f) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} a(f) e^{itH_0} e^{-itH},$$

$$a^\pm(f)^* := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} a(f)^* e^{itH_0} e^{-itH},$$

の存在を示すところから始まります。(フェルミ場がモデルに含まれる場合は、フェルミオン生成 (消滅) 作用素に対しても漸近極限を考えます。) これは、漸近的な世界において粒子の生成 (消滅) を司る作用素であると考えられます。このとき、漸近消滅作用素  $a^\pm(f)$  は全ハミルトニアン  $H$  の固有ベクトルをゼロに飛ばすことがわかります；

$$H\Omega = \lambda\Omega \quad \implies \quad a^\pm(f)\Omega = 0$$

これは、全ハミルトニアン  $H$  の固有ベクトルが漸近的な世界で真空の役割を担っていることを示唆します。そこで、漸近空間を

$$\mathcal{F}^\pm := \overline{\mathcal{L}}\{\Omega_{\mathcal{H}}, a^\pm(f_1)^* \cdots a^\pm(f_n)^* \Omega \mid n \in \mathbb{N}, f_j \in \mathcal{H}\}$$

のように定義し、漸近的な世界と現在を結ぶ作用素  $W_\pm$  を、

$$W_\pm a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* \Omega_{\mathcal{H}} = a^\pm(f_1)^* \cdots a^\pm(f_n)^* \Omega, \quad f_j \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$$

のように定め、あらためてこれを波動作用素と呼びます。ここで紹介した流れは形式的なものですが、いくつかの厳密なモデルにおいては、数学的な議論にすることが可能です。この辺りの詳しい議論は講演でお話したいと思います。

### 3.2 問題

(1) 漸近生成 (消滅) 作用素の存在を示すこと。

これは、Cook の方法<sup>8</sup>と同様の手法を用いることにより解決されます。

(2) 漸近的完全性

上の構成では、漸近的な世界での真空と全ハミルトニアンの基底状態を同一視していましたが、これは自明なことではありません。これらが一致することを漸近的完全性と呼びます。これはすなわち、(全体空間を  $\mathcal{F}$  と書くことにすると、) 漸近真空；

$$\mathcal{V}^\pm := \overline{\mathcal{L}}\{\psi \in \mathcal{F} \mid a^\pm(f)\psi = 0, f \in \mathcal{H}\}$$

が固有空間  $\mathcal{H}_p(H)$  に等しいことです。この一致を厳密なモデルで証明することは困難を極めます。

(3) 散乱公式の導出

物理学においては驚くべき精度の予言が散乱理論を用いて導出されていますが、これらの数学的な導出は未だ得られていないように見えます。これは非常に難解な、今後の課題です。

---

<sup>8</sup>M. Reed and B. Simon: "Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory," Academic Press, New York, 1975, Theorem XI.4.

# 不定符号の係数をもつ非線形 Neumann 境界値問題 の無限個解の存在について

内免大輔\* (大阪市立大学大学院理学研究科)

はじめに

これまで、べき型の非線形項をもつ半線形楕円型偏微分方程式の境界値問題の解の存在と多重性に関する研究が多く為されてきた．特に Dirichlet 境界条件をもつ問題に対して多くの結果が得られている．そんな中 2004 年 J.Garcia-Azorero, I.Peral and J.D.Rossi[1] によって非線形 Neumann 境界条件をもつ問題の解の存在と多重性に関するいくつかの結果が得られた．我々は彼らの結果を基礎とし，不定符号の係数をもつ非線形 Neumann 境界値問題を扱う．本講演では特にその無限個解の存在について考える．

## 1 主定理

我々は以下の非線形 Neumann 境界値問題について考察する：

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(x)|u|^{p-2}u & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda b(x)|u|^{q-2}u & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{P})$$

ここで， $\Omega$  は滑らかな境界をもつ  $\mathbb{R}^N$  上の有界領域で， $N \geq 3$  とする．さらに， $\frac{\partial}{\partial \nu}$  は外向き法線方向微分とする．また  $1 < q < 2 < p \leq 2^* = 2N/(N-2)$  とし， $a$  と  $b$  は  $\overline{\Omega}$  上の連続関数とする．本講演では (P) の無限個の弱解の存在について議論をする：

定義 1 (弱解).  $u \in H^1(\Omega)$  が，任意の  $h \in H^1(\Omega)$  に対して

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla h + uh) dx - \int_{\Omega} a(x)|u|^{p-2}uh dx - \int_{\partial\Omega} b(x)|u|^{q-2}uh d\sigma = 0$$

を満たすとき  $u$  は (P) の弱解であるという．

---

\* E-mail: d12sax0J51@ex.media.osaka-cu.ac.jp

本講演では (P) の弱解を指して (P) の解という．我々の主定理は次のものである：

**定理 1.**  $1 < q < 2 < p \leq 2^*$ ,  $a, b$  は  $\overline{\Omega}$  上の連続関数とする．さらにある点  $x_0 \in \partial\Omega$  が存在して  $b(x_0) > 0$  とする．このとき，ある  $\Lambda > 0$  が存在して (P) は各  $0 < \lambda < \Lambda$  に対して解を無限個もつ．

ここで， $a$  と  $b$  の符号は不定であることを強調しておく．

## 2 動機と問題点

我々の研究の動機は J.Garcia-Azorero, I.Peral and J.D.Rossi[1] の結果にある．彼らは [1] の中で  $a \equiv 1$ ,  $b \equiv 1$  の場合の (P) を扱っており，その解の存在と多重性に関していくつかの結果を得ている．特にその中の Theorem 1.1 では， $1 < q < 2 < p < 2^*$  のとき，十分小さな  $\lambda > 0$  に対して (P) が解を無限個もつことを示している．これを受けて我々の考える問題は次の 2 つである：

- (Q1)  $p < 2^*$ ，さらに  $a$  と  $b$  を不定符号の連続関数としたとき， $a$  と  $b$  へのいかなる付加条件のもと (P) は十分小さな  $\lambda > 0$  に対して解を無限個もつか．
- (Q2)  $p = 2^*$  の場合はどうか．

問題点を明らかにするために，[1] の中で行われている Theorem 1.1 の証明を簡単にまとめる．J.Garcia-Azorero et al. は証明のために変分法，特に Krasnoselski genus によって記述される min-max 法 [2] を適用している．つまり，(P) に対応する  $H^1(\Omega)$  上で定義された  $C^1$  級汎関数：

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} a(x)|u|^p dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} b(x)|u|^q d\sigma \quad (\text{F})$$

の臨界点が十分小さな  $\lambda > 0$  に対して無限個存在することを示している：

**定義 2 (臨界点).**  $u \in H^1(\Omega)$  が (F) で定義される汎関数  $\mathcal{F}$  の臨界点であるとは， $u$  における  $\mathcal{F}$  の 1 階 Fréchet 微分が 0 になることである．つまり，任意の  $h \in H^1(\Omega)$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}'(u), h \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla h + uh) dx - \int_{\Omega} a(x)|u|^{p-2}uh dx - \int_{\partial\Omega} b(x)|u|^{q-2}uh d\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

ここで  $(H^1(\Omega))^*$  を  $H^1(\Omega)$  の双対空間とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $(H^1(\Omega))^*$  と  $H^1(\Omega)$  の対を表す。

[1] によれば  $a \equiv 1$ ,  $b \equiv 1$ , さらに  $\lambda > 0$  を十分小さくとったとき、汎関数  $\mathcal{F}$  は次の5つの条件：

(C1)  $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(-u)$  ( $u \in H^1(\Omega)$ ).

(C2)  $\mathcal{F}(0) = 0$ .

(C3)  $\mathcal{F}$  : 下に有界.

(C4) ある  $n$  次元部分空間  $E_n \subset H^1(\Omega)$  と  $\rho > 0$  と  $\varepsilon > 0$  が存在して、任意の  $u \in E_n$ ,  
 $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \rho$  に対して  $\mathcal{F}(u) < -\varepsilon$ .

(C5)  $\mathcal{F}$  : 任意の  $c < 0$  に対して  $(PS)_c$  条件を満たす.

を満たす. その結果 Deformation Theorem[2] を使った議論により, genus によって定義される  $\mathcal{F}$  の  $\inf \sup$  値が  $\mathcal{F}$  の臨界値であり, さらに  $\mathcal{F}$  の臨界点が無限個存在することがいえる (実際には (C3) の  $\mathcal{F}$  の下有界性は保証されないため,  $\mathcal{F}$  のかわりに適当な truncation を施した汎関数  $\tilde{\mathcal{F}}$  を考えることになる). ここで, (C5) の  $(PS)_c$  条件について定義しておく.  $\mathcal{F}$  は (F) で定義されたもの, また  $c \in \mathbb{R}$  とする:

**定義3** ( $(PS)_c$  列).  $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$  が  $\mathcal{F}(u_j) \rightarrow c$  かつ  $\mathcal{F}'(u_j) \rightarrow 0$  in  $(H^1(\Omega))^*$  を満たすとき,  $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  は  $\mathcal{F}$  の  $(PS)_c$  列であるという.

**定義4** ( $(PS)_c$  条件).  $\mathcal{F}$  の任意の  $(PS)_c$  列が  $H^1(\Omega)$  で強収束する部分列を含むとき  $\mathcal{F}$  は  $(PS)_c$  条件を満たすという.

我々の問題に戻る. (Q1), (Q2) のように  $a, b$  を一般の不定符号の連続関数としたとき, まず (C4) の証明の際に困難が生じる. 特に  $b$  の符号の不定性によって, [1] で扱われていた  $n$  次元部分空間  $E_n$  を改めて取り直す必要があることが分かる. さらに (Q2) の  $p = 2^*$  の場合, Sobolev 空間の埋め込み:  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  の compact 性の欠如によって, 汎関数  $\mathcal{F}$  が  $(PS)_c$  条件を満たすことを示す際に困難が生じる. これまで (Q2) の場合のように非線形項が Sobolev の臨界指数の増大度をもつ半線形楕円型偏微分方程式を扱い, 特に非線形項が連続関数係数をもつ問題の解の存在について論じたものとして例えば [3][4] がある. 特に [4] では我々と同様に非線形 Neumann 境界値問題を扱っており, 問題の解の存在が, 連続関数係数の最大点における領域の形状, さらに連続関数係数の最大点近傍での振る舞い等に影響を受けるという興味深い結果が得られている. 本講演では, 不定符

号の連続関数係数の影響に着目しながら (Q1), (Q2) への答えとなる定理 1 の証明を与えたい.

### 3 鍵となる補題

最後に, 定理 1 の証明の鍵となる補題を挙げておく. まず, 定理 1 中にある  $b$  への付加条件を仮定することによって, [1] の場合も包括する適当な  $n$  次元部分空間  $E_n$  を取り直すことができる.

補題 1. ある  $x_0 \in \partial\Omega$  が存在して  $b(x_0) > 0$  とする. このときある  $n$  次元部分空間  $E_n \subset H^1(\Omega)$  と  $\rho > 0$  と  $\varepsilon > 0$  が存在して, 任意の  $u \in E_n$ ,  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \rho$  に対して  $\mathcal{F}(u) < -\varepsilon$ .

また, Lions の concentration compactness lemma[5] を用いた議論によって十分小さな  $\lambda > 0$  に対して  $\mathcal{F}$  が (C5) を満たすことも確かめることができる:

補題 2.  $c < 0$  とする. このとき, ある  $\Lambda_1 > 0$  が存在して各  $0 < \lambda < \Lambda_1$  に対して  $\mathcal{F}$  は  $(PS)_c$  条件を満たす.

### 参考文献

- [1] J.Garcia-Azorero, I.Peral and J.D.Rossi, A convex-concave problem with a non-linear boundary condition, J. Differential Equations 198 (2004) 91-128
- [2] P.H.Rabinowitz, Minmax methods in critical point theory with applications to differential equations, in: CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 65, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986
- [3] D.G.de Figueiredo, J.-P.Gossez, P.Ubilla, Multiplicity results for a family of semi-linear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity, j. Eur. Math. Soc 8 (2006) 269-286
- [4] J.Chabrowski, On the nonlinear Neumann problem involving the critical Sobolev exponent on the boundary, J. Math. Anal. Appl. 290 (2004) 605-619
- [5] P.L.Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1, Rev. Mat. Iberoamericana. 1 (1) (1985) 145-201

# 移流項付き平均曲率流の弱解の存在について

北海道大学 大学院 理学院 数学専攻 博士3年 高棹 圭介  
takasao@math.sci.hokudai.ac.jp

## 1 導入

本研究では以下の移流項付き平均曲率流について考える.  $\mathbb{R}^n$  内の超曲面の族  $\{\Gamma(t)\}_{0 \leq t < \infty}$  が移流項付き平均曲率流であるとは, その超曲面  $\Gamma(t)$  の速度  $V_\Gamma$  が以下で表されることである.

$$V_\Gamma = (u \cdot \nu)\nu + H \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

ここで  $u : \mathbb{R}^n \times [0, t) \rightarrow \mathbb{R}^n$  は与えられたベクトル値関数,  $\nu = (\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n)$  は単位法線ベクトル,  $H$  は  $\Gamma(t)$  の平均曲率ベクトルである.

まず平均曲率流について既存の結果について一部を紹介する. グラフ表示できないような一般的な平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{0 < t < \infty}$  について, Brakke は幾何学的測度論を用いて弱解 (Brakke の不等式を満たすバリフォールド) の存在を示した [1]. また Evans-Spruck は平均曲率流の粘性解の存在を示した [3]. 同時期に Chen-Giga-Goto は平均曲率流を含む放物型方程式の粘性解の存在を示した [2].

本研究の目的は, Liu-Sato-Tonegawa [6] の結果の拡張, 即ち任意の空間次元  $n \geq 2$  での弱解の存在の証明である (弱解の定義については後述). 彼らは空間次元  $n = 2, 3$ ,  $u \in L^p_{loc}([0, \infty); (W^{1,p}(\Omega))^n)$  かつ  $p > \frac{n+2}{2}$  での移流項付き平均曲率流の弱解の存在を幾何学的測度論とフェイズフィールド法によって示している.

## 2 Brakke の平均曲率流の定義

平均曲率流の弱解の定義にはいくつか方法があるが (レベルセット法等), 本研究では Brakke による平均曲率流の弱解の定義を採用する. 定義には幾何学的測度論の知識が必要なため, ここで紹介する.

平均曲率流の弱解の定義に入る前に, そのモチベーションを理解するために曲面が滑らかな場合について考える.  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は滑らかかつ (1) を満たすと仮定. このとき任意の  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$  に対し以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} \phi d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Gamma(t)} (-H\phi + \nabla\phi) \cdot \{H + (u \cdot \nu)\nu\} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

これより, 任意の  $t_1, t_2$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ ) と任意の  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$  に対し

$$\int_{\Gamma(t)} \phi d\mathcal{H}^{n-1} \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma(t)} (-H\phi + \nabla\phi) \cdot \{H + (u \cdot \nu)\nu\} d\mathcal{H}^{n-1} dt \quad (2)$$

が成り立つ.

**注意 2.1.**  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が滑らかであれば実は (1) と (2) は同値となる. (2) は *Brakke* の不等式とよばれ, この不等式を一般化した形で弱解を定義する.

**定義 2.2.** 1.  $M \subset \mathbb{R}^n$  が *countably  $k$ -rectifiable set* であるとは, ある  $C^1$  級  $k$  次元多様体の列  $\{M_i\}_{i=1}^\infty$  が存在して  $\mathcal{H}^k(M \setminus \cup_{i=1}^\infty M_i) = 0$  となるとき.  
2. *Countably  $(n-1)$ -rectifiable set*  $M$  に対して  $H$  が *generalized mean curvature vector (GMCV)* であるとは,

$$\int_M \operatorname{div}_M g d\mathcal{H}^{n-1} = - \int_M H \cdot g d\mathcal{H}^{n-1}$$

が任意の  $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  について成り立つとき. ここで  $\operatorname{div}_M g = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} g_j (\delta_{ij} - \nu_i \nu_j)$  ( $g = (g_1, \dots, g_n)$ ),  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  は  $M$  の単位法線ベクトル.

**定義 2.3** (弱解の定義).  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  に対し以下が成り立つとき  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を *Brakke* の移流項付き平均曲率流という: *a.e.*  $t$  に対し,

1.  $\Gamma(t)$  が *countably  $(n-1)$ -rectifiable set* かつ GMCV  $H$  を持ち,
2. ある Radon 測度  $\mu_t$  と関数  $\theta_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$  が存在して  $\mu_t = \theta_t \mathcal{H}^{n-1}|_{\Gamma(t)}$  かつ

$$\int_{\Gamma(t)} \phi d\mu_t \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{B}(\mu_t, u(\cdot, t), \phi) dt$$

が *a.e.*  $t_1, t_2$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ ) と任意の  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$  に対して成り立つ (*Brakke* の不等式). ここで,  $\mathcal{B}$  は  $H \in L^2(\mu_t)$  かつ  $\sup_{x \in \Omega, 0 < r < \frac{1}{2}} \frac{\mu_t(B_r(x))}{\omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty$  のとき

$$\mathcal{B}(\mu_t, u(\cdot, t), \phi) = \int_{\Gamma(t)} (-H\phi + \nabla\phi) \cdot \{H + (u \cdot \nu)\nu\} d\mu_t$$

と定義し、それ以外の場合は  $\mathcal{B}(\mu_t, u(\cdot, t), \phi) = -\infty$  と定める.

**注意 2.4.**  $\theta_t$  は多重度と呼ばれ、曲面の多重度を表す関数である.

### 3 主結果

移流項付き平均曲率流の弱解の存在について得られた結果を述べる. この結果は [6] の拡張である.

**定理 3.1.**  $n \geq 2$ ,  $p \geq 2$ ,  $q > 2$ ,  $p > \frac{n}{2} \cdot \frac{q}{q-1}$ ,  $\Omega = \mathbb{T}^n$  とする.

$$u \in L^q_{loc}([0, \infty); (W^{1,p}(\Omega))^n)$$

とし,  $\Omega^+(0) \subset \Omega$  は  $C^1$  級の境界  $\Gamma(0)$  を持つと仮定する. このとき Radon 測度の族  $\{\mu_t\}_{t \in [0, \infty)}$  と  $\varphi \in BV_{loc}(\Omega \times [0, \infty)) \cap L^\infty_{loc}([0, \infty); BV(\Omega)) \cap C^{\frac{1}{2}}_{loc}([0, \infty); L^1(\Omega))$  が存在して以下が成り立つ:

- (a) Brakke の移流項付き平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  が存在する. さらに  $\mathcal{B}(\mu_t, u(\cdot, t), \phi) \in L^1_{loc}([0, \infty))$  と  $\mu_0 = \mathcal{H}^{n-1}|_{\Gamma(0)}$  が成り立つ.
- (b) 関数  $\varphi$  は以下を満たす.
  - (1)  $\varphi(\cdot, t) = \pm 1$  a.e. on  $\Omega$  がすべての  $t \in [0, \infty)$  に対して成り立ち,
  - (2)  $\varphi(\cdot, 0) = \chi_{\Omega^+(0)} - \chi_{\Omega \setminus \Omega^+(0)}$  a.e. on  $\Omega$ ,
  - (3)  $\text{spt} |\nabla \chi_{\{\varphi(\cdot, t)=1\}}| \subset \text{spt} \mu_t$  がすべての  $t \in [0, \infty)$  に対して成り立つ.
- (c) ある時刻  $T_1 = T_1(\|u\|_{L^q([0,1]; (W^{1,p}(\Omega))^n), \Omega^+(0), n, p, q) \leq 1$  が存在して  $\mu_t$  は a.e.  $t \in [0, T_1]$  で unit density を持つ. 即ち  $\theta_t \equiv 1$  a.e.  $t \in [0, T_1]$ . さらに,  $|\nabla \chi_{\{\varphi(\cdot, t)=1\}}| = \mu_t$  が a.e.  $t \in [0, T_1]$  について成り立つ.

**注意 3.2.** 解の構成方法には Allen-Cahn 方程式の解の特異極限を用いる ( フェイズフィールド法 ). 定理 3.1 の  $\varphi$  がその極限に対応する. (c) は, ラフにいうと “初期時刻から少しの間は曲面同士が重ならない” ということを表している.

**定理 3.3.** 定理 3.1 の  $\{\mu_t\}_{t \in [0, \infty)}$  は以下を満たす:

1. 任意の  $t_1, t_2$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ ) と任意の  $\phi \in C^3(\Omega \times [0, \infty); \mathbb{R}^+)$  に対して

$$\mu_{t_2}(\phi) - \mu_{t_1}(\phi) \leq \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\cdot, t) d\mu_t \right) + \mathcal{B}(\mu_t, u(\cdot, t), \phi(\cdot, t)) dt \quad (3)$$

が成り立つ.

2. すべての  $T > 0$  に対して

$$\sup_{t \in [0, T], x \in \Omega, 0 < r < \frac{1}{2}} \frac{\mu_t(B_r(x))}{\omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty$$

が成り立つ. ここで  $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ ,  $\omega_{n-1}$  は  $n$  次元単位球の体積である.

**注意 3.4.** 弱解の正則性については, *Kasai-Tonegawa* の結果がある [5]. これは, ラフに言うとも “殆ど至る所の点  $x \in \Gamma(t)$  についてその近傍で  $\Gamma(t)$  が  $C^{1,\alpha}$  級曲面” となる結果である.

## 参考文献

- [1] Brakke, K. A., *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1978).
- [2] Chen, Y.-G., Giga, Y. and Goto, S., *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geom. **33** (1991), no.3, 749–786.
- [3] Evans, L. C. and Spruck, J., *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 3, 635–681.
- [4] Huisken, G., *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom., **31** (1990), no.1, 285–299.
- [5] Kasai, K. and Tonegawa, Y., *A general regularity theory for weak mean curvature flow*, Preprint, arXiv:1111.0824.
- [6] Liu, C., Sato, N. and Tonegawa, Y., *On the existence of mean curvature flow with transport term*, Interfaces Free Bound., **12** (2010), no.2, 251–277.

## 2 次の非線形項を持つ 非線形シュレディンガー方程式系の差分近似

佐々木多希子 (埼玉大学理工学研究科)

3 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = c|u(t, x)|^2 u(t, x) & t \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

を考える。ただし  $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  であるとする。(1) は以下のような保存量を持つ。

$$\begin{cases} (\text{電荷}) & Q(u) = \|u(t)\|_{L^2}^2 \\ (\text{エネルギー}) & E(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{c}{4} \|u(t)\|_{L^4}^4 \end{cases} \quad (2)$$

(1) に対する時間のみ離散化した半離散差分近似について考える。また、(1) の解が何らかの保存量を持っている場合、近似解でもその保存量 (の離散版) を持っている安定した数値計算がなされることが知られており、(1) の解が持つ保存量を近似解も持つことには価値がある。そのような (1) に対する差分近似の一つが Crank-Nicolson 法:

$$\begin{cases} i \frac{u^{n+1} - u^n}{h} + \Delta \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = \frac{c}{4} (|u^{n+1}|^2 + |u^n|^2)(u^{n+1} + u^n) & (n = 0, 1, \dots) \\ u^0(x) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

である。ただし  $h$  は時間の刻み幅とする。(3) は以下のような保存量を持つ。

$$\begin{cases} (\text{電荷}) & Q^*(u^n) = \|u^n\|_{L^2}^2 \\ (\text{エネルギー}) & E^*(u^n) = \frac{1}{2} \|\nabla u^n\|_{L^2}^2 + \frac{c}{4} \|u^n\|_{L^4}^4 \end{cases} \quad (4)$$

(4) より、(1) の解の持つ性質である (2) を (3) でも再現しているといえる。

だが、この数値解法には問題がある。それは (3) が非線形な数値解法であるので莫大な計算量を要するという点である。この問題の解決策の一つが、この数値解法の持つ保存性を緩めて、線形な数値解法を得ることである。(4) に対するそのような数値解法の一つが Besse による relaxation 法である。relaxation 法について紹介する。(1) を以下のように書き直す。

$$\begin{cases} \phi(t, x) = |u(t, x)|^2 & t \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}^d \\ i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = c\phi(t, x)u(t, x) & t \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \quad (5)$$

(5) を以下のように離散化した差分近似が relaxation 法である。

$$\begin{cases} \frac{\phi^{n+\frac{1}{2}} + \phi^{n-\frac{1}{2}}}{2} = |u^n|^2 \\ i \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \Delta \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = c\phi^{n+\frac{1}{2}} \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \\ u^0 = u_0, \quad \phi^{-\frac{1}{2}} = |u_0|^2 \end{cases} \quad (6)$$

(6) は以下のような保存量を持つ。

$$\begin{cases} \text{(電荷)} & Q^{**}(u^n) = \|u^n\|_{L^2}^2 \\ \text{(エネルギー)} & E^{**}(u^n, \phi^{n-\frac{1}{2}}) = \int_{\mathbf{R}^d} \left( |\nabla u^n|^2 + c|u^n|^2 \phi^{n-\frac{1}{2}} - c \frac{(\phi^{n-\frac{1}{2}})^2}{2} \right) dx \end{cases} \quad (7)$$

(7) より、(1) の解の持つ性質を (6) でも再現していると言えるだろう。だが、Crank-Nicolson 法、relaxation 法はより一般的な非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式に対しても構築することができるが、Crank-Nicolson 法は電荷、エネルギー両方を保存するのに対し、relaxation 法は電荷のみを保存する。

relaxation 法の収束証明は Besse[1] が与えたが、それには問題があることに気が付いた。この問題を修正し、改めて relaxation 法の収束証明について考察すること、また、relaxation 法の収束証明の難点を回避した、新しい陰的線形な数値解法を 非線形シュレディンガー方程式系に対して、構築し relaxation 法の誤差評価よりもよい誤差評価を与えることが本講演の目的である。

Besse は relaxation 法の安定性 (爆発しないこと)、収束性に対し、以下のような結果を述べた。 $s$  を、 $s > d/2$  を満たす整数であるとする。

$u_h$ 、 $\phi_h$  を以下のように定義する。また計算時間  $T$  を  $N$  分割する。つまり、 $h = T/N$  とする。

$$u_h(t, x) = \sum_{n=0}^{N-1} u^n(x) I_{[t_n, t_{n+1}[}, \quad \phi_h(t, x) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi^{n+\frac{1}{2}}(x) I_{[t_n, t_{n+1}[}$$

ただし、

$$I_{[t_n, t_{n+1}[} = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [t_n, t_{n+1}[ \\ 0 & \text{if } t \in [0, T] \setminus [t_n, t_{n+1}[ \end{cases}$$

**定理 1 (Besse)**  $u^0 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^d)$  であると、ある正定数  $h_0$  が存在して、 $0 < h < h_0$  に対してある正定数  $T_h$  が存在して以下  $(u_h, v_h) \in L^\infty([0, T_h]; (H^s(\mathbf{R}^d))^2)$  を満たす (3) の解  $(u_h, v_h)$  が一意的に存在する。

**定理 2 (Besse)** ある定数  $T$  が存在して、 $u(t) \in \bigcap_{m=0}^2 C^m([0, T]; H^{s+4-2m}(\mathbf{R}^d))$  を満たす (5) の解  $u(t)$  が存在することを仮定する。このとき、次の条件を満たす定数  $h_1$  が存在する。 $0 < h < h_1$  に対して  $T \leq T_h$  であり、

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|u(t) - u_h(t)\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} + \|\phi(t) - \phi_h(t)\|_{H^s(\mathbf{R}^d)}) \leq o(1)$$

● 安定性の証明の問題： Besse は定理 1 の証明に不動点定理を用いている。 $u^n$ 、 $\phi^{n-\frac{1}{2}}$  をそれぞれ Duhamel formula のような和分で書き表してそれらを

適当なノルムで計るわけだが、 $\phi^{n-\frac{1}{2}}$  を和分のかたちに書き表すのに問題がある。それは  $\phi^{n-\frac{1}{2}}$  の関係式は  $\phi = |u|^2$  という、もともと  $\phi$  が時間発展していないものを離散化したのであるから、 $\phi^{n-\frac{1}{2}}$  も時間発展した関係式では書かれていない。だが Duhamel formula のかたちで書くにはどうしても時間発展したかたちのものが必要なので、 $\phi^{n-\frac{1}{2}}$  を時間発展したかたちで書いたときにまた別の近似解、具体的にいうと  $v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1}-u^n}{h}$  が必要になる。この  $v^{n+\frac{1}{2}}$  の評価をうまく行い、不動点定理を繰り返し使うという操作を行うには、(6) のように初期値をとってはいけない。初期値の取り方をもっと工夫する必要がある。Besse はこのように初期値をとっていないので、まず、これが Besse の問題の一つである。

● 収束性の証明の問題：(6) の解が (5) の解に収束することをいうためにはさらに  $\psi^n = \frac{\phi^{n+\frac{1}{2}}-\phi^{n-\frac{1}{2}}}{h}$ ,  $w^n = \frac{v^{n+\frac{1}{2}}-v^{n-\frac{1}{2}}}{h}$  の安定性が必要になる。(Besse の論文には、 $w^n$  の漸化式そのものに間違いがある。) だが、 $u^n$ ,  $\phi^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $v^{n-\frac{1}{2}}$  が安定になるような初期値をとると、 $\psi^n$ ,  $w^n$  まで安定であることを示すには、(5) の解の初期値にかなり強い条件を課す必要がある。((5) の解を滑らかにとるというだけでは不十分である。) よって、我々は  $u^n$ ,  $\phi^{n-\frac{1}{2}}$  の初期値を工夫することを諦め、不動点定理を用いて relaxation 法の安定性を示し、さらに収束性まで示すには計算時間は十分に短く取らなければならないという条件を付けた。

だが、 $u^n$ ,  $\phi^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $v^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $\psi^n$ ,  $w^n$  の安定性が示せる計算時間では、Crank-Nicolson 法の誤差評価の求め方と Besse の安定性の評価の方法を組み合わせることで、(6) の解の誤差評価は  $O(h)$  まで改良できることが分かった。

以上の困難は数値解法を線形化するために導入した  $\phi = |u|^2$  が時間発展した式ではないということである。この問題は一部のシステムに対して、回避できる。その例の一つとして、Glassey(1992) は空間次元が 1 次元の Zakharov 方程式系に対して近似解が保存量を持つような陰的線形な差分近似を構築した。我々はこのアイディアを非線形シュレディンガー方程式系に応用した。

2 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式系:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2m} \Delta u(t, x) = \lambda \overline{u(t, x)} v(t, x) & t \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}^d \\ i\partial_t v(t, x) + \frac{1}{2M} \Delta v(t, x) = \mu (u(t, x))^2 & t \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \quad (8)$$

を考える。ただし  $m, M$  は正定数であるとし、 $\lambda, \mu$  は複素数の定数であるとする。我々は (8) を以下のように離散化した。計算時間  $T$  を  $N$  分割する。

つまり  $h = T/N$  である。

$$\begin{cases} i \frac{v^{n+1} - v^n}{h} + \frac{1}{2M} \Delta \frac{v^{n+1} + v^n}{2} = \mu (u^{n+1})^2 \\ i \frac{u^{n+\frac{3}{2}} - u^{n-\frac{1}{2}}}{h} + \frac{1}{2m} \Delta t \frac{u^{n+\frac{3}{2}} + u^{n+\frac{1}{2}}}{2} = \lambda \left( \frac{u^{n+\frac{3}{2}} + u^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) v^{n+1} \\ v^0 = v_0, \quad u^{\frac{1}{2}} = u_0 + i \frac{\delta t}{2} (\alpha \Delta u_0 - \overline{u_0} v_0) \end{cases} \quad (9)$$

(9) に対して以下のような結果を得た。

**定理 3((9) の安定性) :**  $u^0 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^d)$  を仮定する。すると以下を満たす定数  $h_2$  が存在する:  $0 < h < h_2$  に対しある定数  $T_h$  が存在して、 $(u_h, v_h) \in L^\infty([0, T_h]; (H^s(\mathbf{R}^d))^2)$  を満たす (9) の解  $(u_h, v_h)$  が存在する。

**定理 4((9) の収束性)** ある定数  $T'$  が存在して、次の条件を満たす (8) の解  $(u(t), v(t))$  が存在することを仮定する。

$$(u(t), v(t)) \in \bigcap_{m=0}^3 C^m([0, T]; (H^{6-2m+s}(\mathbf{R}^d))^2)$$

$T \leq T'$  を仮定すると、このとき以下を満たす  $h_3$  が存在する。

$h$  に無関係な定数  $C$  が存在して、 $0 < h < h_3$  に対し、 $T' \leq T_h$  であり、

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \left( \|u(t_{n+\frac{1}{2}}) - u^{n+\frac{1}{2}}\|_{H^s} + \|v(t_n) - v^n\|_{H^s} \right) \leq Ch^2$$

● 2 次収束する線形な差分近似を得ることができたが、この差分近似は保存量は持たない。

## 参考文献

- [1] C. Besse : *A relaxation scheme for the nonlinear Schrödinger equation* SIAM J. Numer. Anal. **42** (2004), no. 3 934-952.
- [2] G. T. Akrivis, V. A. Dougalis, and O.A.Karakashian : *On fully discrete Galerkin methods of second-order temporal accuracy for the nonlinear Schrödinger equations*, Numer. Math. **59** (1991), no.1, 31-53.
- [3] R. T. Glassey : *Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equations in one space dimension* Math. Comp. **58** (1992), no.197, 83-102
- [4] N. Hayashi, C. Li, and T. Ozawa : *Small data scattering for a system of nonlinear Schrödinger equations*. Differ. Equ. Appl. **3** (2011), no.3, 415-426

# ウェーブレット理論を用いた微分方程式の数値解法について

福田 尚広

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻\*

## 1 はじめに

ウェーブレット理論は信号，画像処理をはじめとする様々な分野へ応用されている．本講演では，補間スケーリング関数を用いたガレルキン法について紹介し，高速処理を実現するための工夫や，誤差解析結果について述べる．

ガレルキン法とは，微分方程式を弱形式としての離散問題に帰着し，その近似解を得る方法の一つである．例として，境界値問題

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u + u = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

を考える．この問題に対する弱形式は  $\langle u, v \rangle_{L^2(0,1)} + \langle \frac{d}{dx}u, \frac{d}{dx}v \rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, v \rangle_{L^2(0,1)}$  で与えられる． $v$  をテスト関数という．

$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k)$  とおく．基底関数  $\varphi$  を用いて，近似解  $u_j = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_{j,k}$  を構成するには，テスト関数として  $\varphi_{j,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) を用いて連立方程式をつくり，そこから係数  $u_k$  を求めれば良い．ここで， $N$  は  $\varphi$  に依存して決まる自然数である．具体的には，

$$MU = F$$

を解く．ここで，係数行列  $M$  の  $(k, \ell)$  成分は  $\langle \varphi'_{j,k}, \varphi'_{j,\ell} \rangle_{L^2(0,1)} + \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,\ell} \rangle_{L^2(0,1)}$  で与えられる．また， $F = {}^t \{ \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2(0,1)} \}_k$  は  $f$  とテスト関数の内積から決まる列ベクトルであり， $U = {}^t \{ u_k \}_k$  が未知のベクトルである．基底，テスト関数として区分的多項式を用いるガレルキン法を有限要素法という．

いま，基底関数  $\varphi$  を次のようにとる：

$$\varphi(x) = \mathcal{E} * \Phi(x). \quad (1)$$

ここで  $\Phi$  は正規直交スケーリング関数であり， $\mathcal{E}$  はエレベーターと呼ばれる関数である [7]．

注意 1. (1) による基底関数の構成の最も簡単な例は，エレベーター  $\mathcal{E}$  が 1 次の B スプライン  $N_1 = \chi_{[0,1]}$ ，かつ， $\Phi$  がハールのスケーリング関数である場合，すなわち  $\mathcal{E} = \Phi = N_1$  のときである．このとき，(1) より

$$\varphi(x) = N_1 * N_1(x) = N_2(x)$$

---

\* E-mail : naohiro-f@math.tsukuba.ac.jp

であり，これは標準的な有限要素法に用いられる基底関数である． $c_{k,\ell} = \langle N_2(\cdot - k), N_2(\cdot - \ell) \rangle_{L^2(0,1)}$ ， $a_{k,\ell} = -\langle \frac{d}{dx} N_2(\cdot - k), \frac{d}{dx} N_2(\cdot - \ell) \rangle_{L^2(0,1)}$  とするとき，

$$c_{k,\ell} = \begin{cases} 2/3 & \text{if } k = \ell, \\ 1/6 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

及び

$$a_{k,\ell} = \begin{cases} -2 & \text{if } k = \ell, \\ 1 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．このことから，係数行列  $M$  は 3 重対角行列になる． $N_1$  ではない，他のエレベーター，スケーリング関数を利用することにより，様々な基底関数を構成することができる．

## 2 正規直交スケーリング関数の利用

ガレルキン法の基底関数にはコンパクトサポートを持つ関数が用いられる．そのような基底関数で， $N_2$  より滑らかなものを構成するために， $\Phi$  として，コンパクトサポートを持つ Daubechies のスケーリング関数 [1] を用いる：

$$\varphi_p^D(x) = N_1 * \Phi_p^D(x). \quad (2)$$

ここで， $\Phi_p^D$  は  $p$  次の Daubechies スケーリング関数である． $\varphi_2^D$  について，次が成立する：

**定理 1.**  $c_{k,\ell} = \langle \varphi_2^D(\cdot - k), \varphi_2^D(\cdot - \ell) \rangle_{L^2(0,1)}$ ， $a_{k,\ell} = -\langle \frac{d}{dx} \varphi_2^D(\cdot - k), \frac{d}{dx} \varphi_2^D(\cdot - \ell) \rangle_{L^2(0,1)}$  とする．このとき，

$$c_{k,\ell} = \begin{cases} 131/180 & \text{if } k = \ell, \\ 37/240 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ -11/600 & \text{if } k = \ell \pm 2, \\ 1/3600 & \text{if } k = \ell \pm 3. \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

及び

$$a_{k,\ell} = \begin{cases} -2 & \text{if } k = \ell, \\ 1 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．

[2] は我々とは異なる方法で  $\varphi_p^D$  を構成している．また， $\{\varphi_p^D(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  がリース基底になっている [3] ．

## 3 双直交スケーリング関数の利用

ガレルキン法の基底関数とテスト関数は，同一の関数のシフトを用いるのが一般的であるが，異なる関数を基底関数，テスト関数に用いることで，双直交スケーリング関数  $\phi, \tilde{\phi}$  のガレルキン法への適用を考えることができる．ここでは，双直交 B スプラインスケーリング関数で，特に dual 関数  $\tilde{\phi}$  が  $N_1$  であるようなものを考える．このとき，

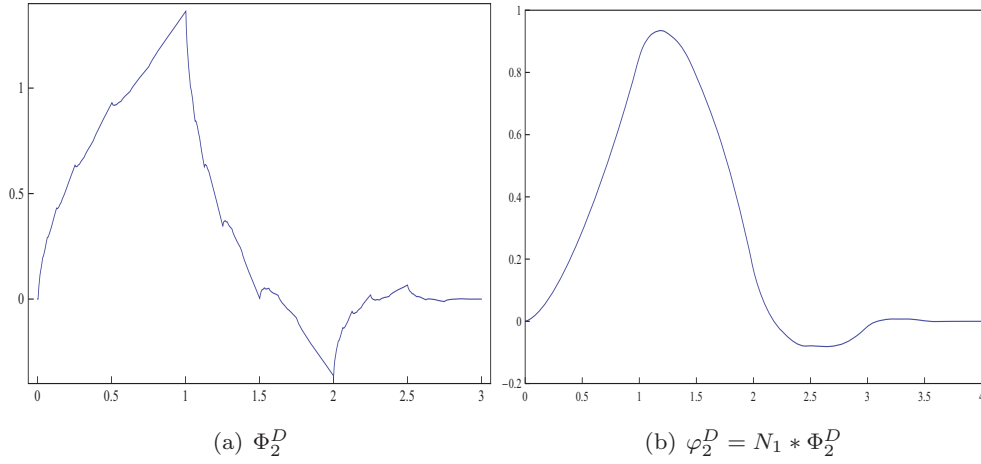


図1 Daubechies スケーリング関数  $\Phi_2^D$  とその  $N_1$  による elevation  $\varphi_2^D$

- primal 関数  $\phi$  は, average interpolation の fundamental 関数を  $\varphi^A$  と一致することが知られている .
- $\varphi^A$  の  $N_1$  による elevation は, Deslauriers–Dubuc interpolation の fundamental function  $\varphi^{DD}$  になる [4, 5, 6] . この  $\varphi^{DD}$  は, 補間スケーリング関数のひとつである .

以上のことから, 次が成り立つ :

定理 2.  $c_{k,\ell} = \langle \varphi_2^{DD}(\cdot - k), N_2(\cdot + 1 - \ell) \rangle_{L^2(0,1)}$ ,  $a_{k,\ell} = - \langle \frac{d}{dx} \varphi_2^{DD}(\cdot - k), \frac{d}{dx} N_2(\cdot + 1 - \ell) \rangle_{L^2(0,1)}$  とする . このとき ,

$$c_{k,\ell} = \begin{cases} 131/180 & \text{if } k = \ell, \\ 37/240 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ -11/600 & \text{if } k = \ell \pm 2, \\ 1/3600 & \text{if } k = \ell \pm 3. \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

及び

$$a_{k,\ell} = \begin{cases} -2 & \text{if } k = \ell, \\ 1 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ .

注意 2. 定理 2 において,  $c_{k,\ell}$  の値は, 定理 1 のそれに一致しているが, これは Deslauriers–Dubuc 関数と Daubechies スケーリング関数との間に

$$\varphi_N^{DD}(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_N^D(t) \Phi_N^D(t - x) dt$$

が成り立つことが知られており [8] , この関係式から両者が一致することが証明できる .

上記の補間法や fundamental 関数の定義等, 詳しくは [4, 5, 6] 及び [9] を参照されたい . 定理 1, 2 から, 基底関数とテスト関数として  $\varphi_N^D$  を用いた場合と,  $\varphi_N^{DD}$  を基底関数,  $N_2$  をテスト関数とした場合で, 係数行列は一致することが分かる . 更に, 後者の場合は,  $N_2$  をテスト関数に採用していることより列ベクトル  $F$  の計算が簡単になり, より高速での処理が実現できる .

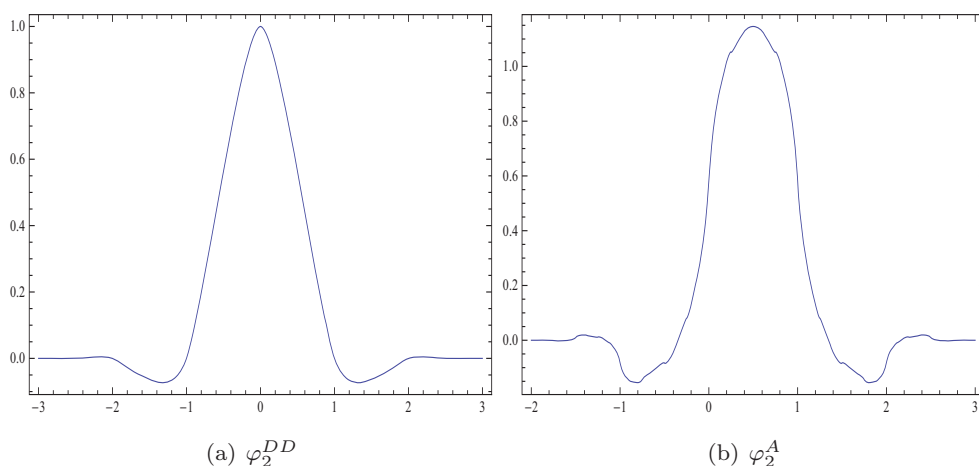


図 2 Deslauriers–Dubuc interpolation と average interpolation の fundamental function

## 4 おわりに

ここでは 2 階の方程式を例として扱ったが，より高階の微分方程式の境界値問題に対しても，DD fundamental 関数と B スプラインを用いたガレルキン法が適用できる．これらの詳しい内容と，構成した関数を用いた解析結果については，講演時に述べる．

## 参考文献

- [1] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [2] J. C. Xu and W. C. Shann, Galerkin-wavelet methods for two-point boundary value problems, Numer. Math., **63**, 123–144 (1992).
- [3] W. C. Shann, J. Tzeng and S. W. Chen, The leveraged wavelets and Galerkin-wavelets methods, preprint.
- [4] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes, Constructive approximation, 5 (1989), pp. 49–68.
- [5] S. Dubuc, Interpolation through an iterative scheme, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986), pp. 185–204.
- [6] D. L. Donoho, Smooth wavelet decomposition with blocky coefficient kernels, Recent Advances in Wavelet Analysis, (L. Schumaker and F. Ward, eds.), Academic Press, 1993.
- [7] N. Fukuda, T. Kinoshita, T. Kubo, On the Galerkin-wavelet method for higher order differential equations, to appear in The Korean Mathematical Society.
- [8] N. Saito and G. Beylkin, Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets, IEEE Trans. Signal Processing, Vol.41, pp. 3584–3590, 1993.
- [9] D. L. Donoho and Thomas P. Y. Yu, Deslauriers-Dubuc: ten years after, CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. 18, pp. 355–370, 1999.

# Poisson 積分の幾何学的評価と最大点挙動

坂田 繁洋 (首都大学東京理工学研究科)

## 1 序: Poisson 積分の性質と問題意識

上半空間  $\{(x, h) \mid x \in \mathbb{R}^m, h > 0\}$  における Laplace 方程式

$$\Delta u(x, h) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, h) + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}(x, h) = 0 \quad (1.1)$$

を考える。 $u(x, h) \geq 0$  かつ  $\Delta u(x, h) = 0$  が成り立つと仮定する。このとき、定数  $c \geq 0$  と Borel 測度  $\mu$  を用いて、

$$u(x, h) = ch + \frac{2h}{\sigma_m(S^m)} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(r^2 + h^2)^{(m+1)/2}} d\mu(\xi), \quad r := |x - \xi| \quad (1.2)$$

と表されることが古典的に知られている。ここで、 $\sigma_m(S^m)$  は  $m$  次元球面の面積である。式 (1.2) の右辺は上半空間における Poisson 積分とよばれる。本稿では、Poisson 積分の幾何学的性質について考察する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$  を body (有界な開集合の閉包) とする。式 (1.2) において、 $c = 0$  かつ  $d\mu(\xi) = \chi_\Omega(\xi) d\xi$  として、積分を  $\sigma_{m+1}(S^{m+1})/2$  倍する。 $h > 0$  を一つ固定して、Poisson 積分を  $\mathbb{R}^m$  上の関数とみたものを

$$A_\Omega^{(h)}(x) := \int_\Omega \frac{h}{(r^2 + h^2)^{(m+1)/2}} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^m, h > 0, r := |x - \xi| \quad (1.3)$$

とおく。直接計算することにより、 $A_\Omega^{(h)}(x)$  は、 $\Omega$  の点  $(x, h)$  における立体角に等しいことがわかる。すなわち、 $\Omega$  を高さ  $h$  の点  $(x, h)$  から眺めたときの視野が  $A_\Omega^{(h)}(x)$  である (図 1)。

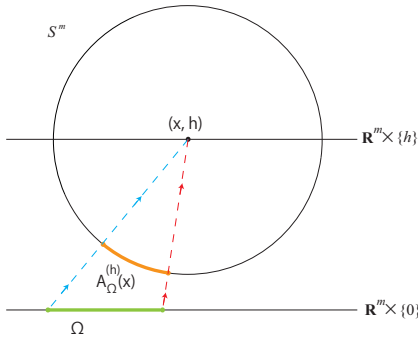


図 1: 関数  $A_\Omega^{(h)}(x)$  の幾何学的意味

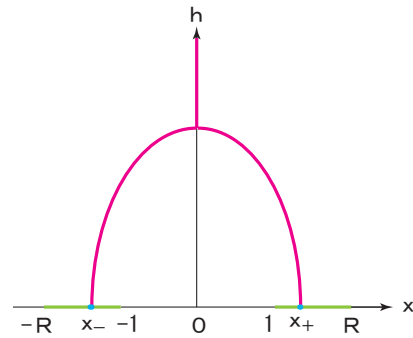


図 2: solid angle center の挙動の例

特に、 $A_\Omega^{(h)}$  の最大点、すなわち、最も見晴らしの良い点に注目する。 $A_\Omega^{(h)}(x)$  の被積分関数が  $r$  の狭義単調減少関数であることから、 $A_\Omega^{(h)}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  は、 $\Omega$  の凸包 ( $\Omega$  を含む最小の凸集合) 上で最大値をとることが従う。 $A_\Omega^{(h)}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  の最大点を  $\Omega$  の高さ  $h$  の solid angle center とよび、その全体を  $\mathcal{A}(h)$  とおく。すなわち、

$$\mathcal{A}(h) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid A_\Omega^{(h)}(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^m} A_\Omega^{(h)}(y) \right\} \quad (1.4)$$

とおく。ここで, solid angle center の一意性は一般には (任意の  $h$  に対して) 成り立たないことを注意しておく。実際, 1 次元の場合で,  $\Omega = [-R, -1] \cup [1, R]$  ( $R > 1$ ) とおくと, 高さ  $h$  に応じて solid angle center は図 2 のような軌跡を描く。直感的に説明すれば,  $h$  が十分小さければ,  $\Omega$  の一部が視界いっぱいに見えるので, 全体が見える必要はなく, 各区間の真ん中 (付近) の 2 点  $x_+$  と  $x_-$  が solid angle center になる。 $h$  が大きくなるにつれて,  $\Omega$  全体が視界の中心に寄れば見晴らしは良いとされて, ある一定の高さから solid angle center は一点 0 に定まる。

図 2 の一般的な考察として, 著者は [S1] で次のことを示した。

- $h \geq \sqrt{m+2} \operatorname{diam} \Omega$  ならば, solid angle center は一意に定まる。
- $h \rightarrow +\infty$  ならば, solid angle center は  $\Omega$  の重心に収束する。

すなわち,  $h$  が十分大きいときの  $A(h)$  の挙動を考察した。本稿では, [KP] のアイディアを修正することで,  $h$  が十分小さいときの  $A(h)$  の挙動に関して得られた結果 [S2] を述べる。

## 2 Poisson 積分の評価

高さ  $h$  が十分小さいときの solid angle center の挙動を調べるために, 十分小さい  $h$  に対して,  $\Omega$  のどの辺りで  $A_\Omega^{(h)}$  の値が大きくなるかを考察する。 $A_\Omega^{(h)}(x)$  が  $x$  の関数として大きくなることは,

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \int_\Omega \frac{1}{(r^2 + h^2)^{(m+1)/2}} d\xi \in \mathbb{R}, \quad r := |x - \xi| \quad (2.1)$$

が大きくなることに同値である。形式的に  $h = 0$  とおいてみるとこの関数は

$$x \mapsto \int_\Omega r^{-(m+1)} d\xi, \quad r := |x - \xi| \quad (2.2)$$

となるが, この積分は  $x \in \Omega$  で発散する。そこで, 次のポテンシャルを導入する。 $x \in \mathring{\Omega}$ ,  $\alpha < 0$  に対して,

$$V_\Omega^{(\alpha)}(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} r^{\alpha-m} d\xi - \frac{\sigma_{m-1}(S^{m-1})}{-\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{-\alpha}} \right) = - \int_{\Omega^c} r^{\alpha-m} d\xi, \quad r := |x - \xi| \quad (2.3)$$

とおく。このポテンシャルは, 繰りこまれた  $r^{\alpha-m}$ -ポテンシャルとよばれ, 今井淳氏 (首都大学東京) により [O] で定義された。その最大点の集合を  $\mathcal{V}(\alpha)$  とおく。十分小さい  $h$  に対して,  $A_\Omega^{(h)}$  の大小を評価するために, このポテンシャルを評価することから始める。

$X, Y$  を  $\mathbb{R}^m$  の body として,  $Y$  は outer cone condition をみたすとする。すなわち,

頂角  $\varepsilon$  で高さ  $\delta$  の錐  $C \subset \mathbb{R}^m$  が存在して, 任意の  $y \in \partial Y$  に対して,  $y$  を頂点とする  $C$  と合同な錐が  $Y$  の外部にとれる

と仮定する。 $x \in X$  に対して,  $R_X(x) = \operatorname{dist}(x, \partial X)$  などとかくことにする。 $0 < R_0 \leq \operatorname{diam} Y$  を定数とする。

**補題 2.1** 正の定数  $R$  に対して, 点  $(0, \dots, 0, R)$  を頂点として  $x_m$  軸を回転軸とする頂角  $\varepsilon$  で高さ  $\delta$  の錐を  $C(R)$  とおく。 $D_Y = \operatorname{diam} Y$  とおく。狭義単調減少連続関数

$$F_Y^{(\alpha)} : (0, +\infty) \ni R \mapsto \int_{C(R) \cap B_{D_Y}} |\eta|^{\alpha-m} d\eta - \int_{B_{R_0}^c} |\eta|^{\alpha-m} d\eta \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

は唯一の零点  $0 < R(\alpha, R_0) < R_0$  をもつ。

$X$  に内接する球,  $Y$  を覆う球,  $Y$  の外側にとれる錐,  $Y$  から決まる定数  $R(\alpha, R_0)$  により, 次のようにポテンシャルを評価できる.  $R_X(x) \geq R_0$  をみたす  $x \in \overset{\circ}{X}$  に対して,

$$V_X^{(\alpha)}(x) \leq V_{B_{R_0}}^{(\alpha)}(0) = - \int_{B_{R_0}^c} |\eta|^{\alpha-m} d\eta \quad (2.5)$$

が成り立つ. また,  $R_Y(y) \leq R(\alpha, R_0)$  をみたす  $y \in \overset{\circ}{Y}$  に対して,  $Y$  の outer cone condition より

$$V_Y^{(\alpha)}(y) \leq V_{B_{D_Y} \setminus C(R)}^{(\alpha)}(0) = - \int_{(B_{D_Y} \setminus C(R))^c} |\eta|^{\alpha-m} d\eta \quad (2.6)$$

が成り立つ. したがって,

$$V_X^{(\alpha)}(x) - V_Y^{(\alpha)}(y) \geq F_Y^{(\alpha)}(R_Y) + \int_{B_{D_Y}^c} |\eta|^{\alpha-m} d\eta > 0 \quad (2.7)$$

となる. よって, 次の定理を得る.

**定理 2.2** 任意の  $x \in \overset{\circ}{X}$ ,  $y \in \overset{\circ}{Y}$  に対して,  $R_0 \leq R_X(x)$  かつ  $R_Y(y) \leq R(\alpha, R_0)$  が成り立つならば,  $V_Y^{(\alpha)}(y) < V_X^{(\alpha)}(x)$  が成り立つ.

**系 2.3**  $\Omega$  は outer cone condition をみたすとする.  $R_\infty$  を  $\Omega$  に内接する最大の球の半径とする. このとき,  $V_\Omega^{(\alpha)}$  の最大点の集合は  $\mathcal{V}(\alpha)$ ,  $\Omega$  の  $R(\alpha, R_\infty)$ -inner parallel body に含まれる.

同様の方針で計算し,  $\alpha = -1$  の場合を補題として用いれば,  $R_0 \leq R_X(x)$  かつ  $R_Y(y) \leq R(\alpha, R_0)$  をみたす任意の  $x \in X$  と  $y \in Y$  に対して,  $A_X^{(h)}(x) - A_Y^{(h)}(y)$  が評価できる. また,  $y \in Y^c$  に対しては,  $\overline{Y^c}$  が cone condition をみたすとき, すなわち,

頂角  $\varepsilon$  で高さ  $\delta$  の錐  $C \subset \mathbb{R}^m$  が存在して, 任意の  $y \in \overline{Y^c}$  に対して,  $y$  を頂点とする  $C$  と合同な錐が  $Y$  の外部にとれる

とき, 次のように評価する.  $y \in Y^c$  を頂点とする  $C$  と合同な  $Y$  に含まれる錐を  $C_y$  とおく. このとき, 立体角の定義より

$$A_Y^{(h)}(y) \leq A_{C_y^c}^{(h)}(y) < \frac{4\pi - \varepsilon}{4\pi} \sigma_m(S^m) \quad (2.8)$$

が十分小さい任意の  $h$  に対して成り立つ. さらに,  $R_0 \leq R_X(x)$  をみたす任意の  $x \in X$  に対して,

$$A_X^{(h)}(x) \geq A_{B_{R_0}(x)}^{(h)}(x) > \frac{4\pi - \varepsilon}{4\pi} \sigma_m(S^m) \quad (2.9)$$

が十分小さい任意の  $h$  に対して成り立つ. よって, 次の定理を得る.

**定理 2.4** 十分小さい  $h_0 > 0$  が存在して, 任意の  $0 < h < h_0$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  に対して,  $R_0 \leq R_X(x)$  かつ  $R_Y \leq R(-1, R_0)$  が成り立つならば,  $A_Y^{(h)}(y) < A_X^{(h)}(x)$  が成り立つ.

**系 2.5**  $\overline{\Omega^c}$  は cone condition をみたすとする. このとき, 任意の  $0 < h < h_0$  に対して,  $A_\Omega^{(h)}$  の最大点の集合は,  $\Omega$  の  $R(-1, R_\infty)$ -inner parallel body に含まれる.

ここで, outer cone condition と cone condition という 2 つの条件をつけた. 前者は境界上の点に対しての主張, 後者は補集合の任意の点に対しての主張である. 一見すると, 後者の方が強い仮定のように思えるが, 非自明である. すなわち, 次の問題が考えられ, open であると思われる.

**問題 2.6**  $\Omega$  が outer cone condition をみたすならば,  $\overline{\Omega^c}$  は cone condition をみたすか?

### 3 応用: Poisson 積分の最大点挙動

この章では,  $\Omega$  は区分的に  $C^1$  級な境界をもつ body で,  $\overline{\Omega^c}$  は cone condition をみたすと仮定する。Stokes の定理より

$$\frac{\partial A_\Omega^{(h)}}{\partial x_j}(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{(m+1)/2}} e_j \cdot n(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V_\Omega^{(\alpha)}}{\partial x_j}(x) = - \int_{\partial\Omega} r^{\alpha-m} e_j \cdot n(y) d\sigma(y), \quad x \in \overset{\circ}{\Omega} \quad (3.2)$$

が成り立つ。定理 2.4 より  $\mathcal{A}(h)$  は任意の  $h$  に対して  $\partial\Omega$  と交わらないから,  $A_\Omega^{(h)}$  の微分が消えるとすれば,  $h \rightarrow +0$  の極限で

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{(r^2 + h^2)^{(m+1)/2}} e_j \cdot n(y) d\sigma(y) \rightarrow \int_{\partial\Omega} r^{-(m+1)} e_j \cdot n(y) d\sigma(y) \quad (3.3)$$

となる。よって, 次の定理を得る。

**定理 3.1** 任意の  $\{h_\ell\}$  と任意の  $c(h_\ell) \in \mathcal{A}(h_\ell)$  に対して,  $h_1 > h_2 > \cdots \rightarrow +0$  ( $\ell \rightarrow +\infty$ ) ならば,  $\text{dist}(c(h_\ell), \mathcal{V}(-1)) \rightarrow 0$  ( $\ell \rightarrow +\infty$ ) が成り立つ。

また,  $\Omega$  が凸のときを考える。高さ  $h$  を十分小さくとると,  $\Omega$  の  $R(-1, R_\infty)$ -inner parallel body 上で  $A_\Omega^{(h)}$  が上に凸であることがわかり, 次の定理を得る。

**定理 3.2**  $\Omega$  は凸とする。ある  $0 < h_1 \leq h_0$  が存在して, 任意の  $0 < h < h_1$  に対して,  $A_\Omega^{(h)}$  の最大点は一意に定まる。

$\Omega$  が凸のとき,  $V_\Omega^{(\alpha)}$  の最大点が一意に決まることが [O] で知られているから, 定理 3.1 とあわせて次を得る。

**系 3.3**  $\Omega$  が凸ならば,  $h \rightarrow +0$  とする極限で  $\mathcal{A}(h)$  は (Hausdorff 距離に関して)  $\mathcal{V}(-1)$  に収束する。

**注意 3.4** 以上の議論は, 非有界な  $\Omega$  でも多少の修正を加えて成り立つ。本稿では, 議論を簡単にするために body であることを仮定した。

### 参考文献

- [KP] L. Karp and N. Peyerimhoff, *Geometric heat comparison criteria for Riemannian manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31** (2007), 115-145.
- [O] J. O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. in Appl. Math. **48** (2012).
- [S1] S. Sakata, *Movement of centers with respect to various potentials*, submitted.
- [S2] S. Sakata, *Estimation of potentials near the boundary*, preprint.

# 非自励微分方程式と Lipschitz 発展作用素

富澤 佑季乃 (中央大学大学院)\*

## 概 要

実 Banach 空間における非自励微分方程式とその発展作用素の研究成果を紹介する. 目的は実 Banach 空間上の Lipschitz 発展作用素と無限小生成作用素の自然な特徴付けである. そのために, ある性質を満たす汎関数と一般化された消散条件を与えた. これにより非自励微分方程式の初期値問題に対して解の一意的存在を示せた. この結果は準線形波動方程式に応用できる. そして, 与えた汎関数の性質と一般化された消散条件は Lipschitz 発展作用素と無限小生成作用素が存在するための自然な条件である事が分かった.

## 1. 非自励微分方程式と解の存在

$(X, \|\cdot\|)$  を実 Banach 空間とする.  $-\infty < a < b \leq \infty$  とし,  $\Omega \subset [a, b) \times X$  を  $t \in [a, b)$  に対して  $\Omega(t) \neq \emptyset$  を満たす集合とする. ただし  $\Omega(t) := \{x \in X : (t, x) \in \Omega\}$  である.  $A : \Omega \rightarrow X$  を関数とする.  $(\tau, z) \in \Omega$  を与えて, 次の非自励微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t, u(t)), & \tau < t < b, \\ u(\tau) = z. \end{cases} \quad (\text{IVP}; \tau, z)$$

$X$ -値連続関数  $u : [\tau, c) \subset [a, b) \rightarrow X$  が  $[\tau, c)$  上で微分可能,  $u(\tau) = z, t \in [\tau, c)$  に対して  $(t, u(t)) \in \Omega$  かつ  $u'(t) = A(t, u(t))$  を満たすとき,  $u$  は  $(\text{IVP}; \tau, z)$  の  $[\tau, c)$  上の局所解と言う.  $(\text{IVP}; \tau, z)$  の  $[\tau, b)$  上の解は大域解と言う.

(Ω1) (連続性条件)  $A$  は  $\Omega$  の上から  $X$  への写像として連続である.

(Ω2) (閉性条件)  $n = 1, 2, \dots$  に対して  $(t_n, x_n) \in \Omega$  とする. もし  $n \rightarrow \infty$  のとき  $t_n \uparrow t \in [a, b)$  で  $x_n \rightarrow x \in X$  ならば,  $(t, x) \in \Omega$  となる.

(Ω3) (劣接線条件) 任意の  $(t, x) \in \Omega$  に対して  $\liminf_{h \downarrow 0} d(x + hA(t, x), \Omega(t+h))/h = 0$  となる. ただし  $d(x, S)$  は  $x \in X$  から  $S \subset X$  までの距離を表す.

(Ω4) (消散条件)  $[a, b)$  上で定義される実数値連続関数  $\omega$  が存在して, 任意の  $t \in [a, b)$  と  $x, y \in \Omega(t)$  に対して, 次が成り立つ.

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V(t+h, x+hA(t, x), y+hA(t, y)) - V(t, x, y))/h \leq \omega(t)V(t, x, y).$$

ただし  $V(t, \cdot, \cdot)$  は次の条件 (V1)–(V4) を満たし,  $t \in [a, b)$  をパラメーターとする  $X \times X$  上の汎関数の族である:

(V1)  $L > 0$  が存在して,  $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X, t \in [a, b)$  に対して次が成り立つ:

$$|V(t, x, y) - V(t, \hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|).$$

2010 Mathematics Subject Classification: 34A12, 47J35

キーワード: Nonautonomous differential equations, initial-value problems, metric-like functionals, evolution operators

\* 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院理工学研究科

e-mail: tomizawa@gug.math.chuo-u.ac.jp

(V2) すべての  $t \in [a, b)$ ,  $x \in \Omega(t)$  に対して  $V(t, x, x) = 0$ .

$n = 1, 2, \dots$  に対して  $t_n \in [a, b)$ ,  $(x_n, y_n) \in \Omega(t_n) \times \Omega(t_n)$  とする.

(V3) もし  $n \rightarrow \infty$  のとき  $t_n \rightarrow t \in [a, b)$  かつ  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \Omega(t) \times \Omega(t)$  ならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $V(t_n, x_n, y_n) \rightarrow V(t, x, y)$  となる.

(V4) もし  $n \rightarrow \infty$  のとき  $t_n \rightarrow t \in [a, b)$  かつ  $V(t_n, x_n, y_n) \rightarrow 0$  ならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$  となる.

このとき, 初期値問題の解の一意性は次で示される.

**定理 1 (解の一意性).**  $[\tau, c) \subset [a, b)$  かつ  $i = 1, 2$  に対して  $z_i \in \Omega(\tau)$  とする. 各  $i = 1, 2$  に対して  $u_i$  は  $(\text{IVP}; \tau, z_i)$  の  $[\tau, c)$  上の解とする. このとき  $t \in [\tau, c)$  に対して

$$V(t, u_1(t), u_2(t)) \leq \exp\left(\int_{\tau}^t \omega(s) ds\right) V(\tau, z_1, z_2).$$

局所解と大域解の存在はそれぞれ次で示される.

**定理 2 (局所解の存在).**  $(\tau, z) \in \Omega$  とする.  $R > 0$  と  $M > 0$  は正の数で  $\tau + R < b$  かつ  $|s - \tau| < R$  と  $\|y - z\| < R$  を満たす  $(s, y) \in \Omega$  に対して  $\|A(s, y)\| \leq M$  を満たすとする.  $T \in (0, R/(M+1))$  とする. このとき  $(\text{IVP}; \tau, z)$  の  $[\tau, \tau + T)$  上の一意解  $u$  が存在して,  $t, s \in [\tau, \tau + T)$  に対して  $\|u(t) - u(s)\| \leq M|t - s|$  を満たす.

**定理 3 (大域解の存在).**  $C$  を  $\Omega$  の連結成分とし,  $c := \sup\{t \in [a, b) : C(t) \neq \emptyset\}$  とする. このとき各  $(\tau, z) \in C$  に対して  $(\text{IVP}; \tau, z)$  の  $[\tau, c)$  上の一意解が存在して, 区間  $[\tau, c)$  は解が存在する最大区間である. 特に,  $\Omega$  が連結であるとき, 各  $(\tau, z) \in \Omega$  に対して  $(\text{IVP}; \tau, z)$  は一意な大域解をもつ.

図 1:  $\Omega$  の連結成分  $C$  と局所解

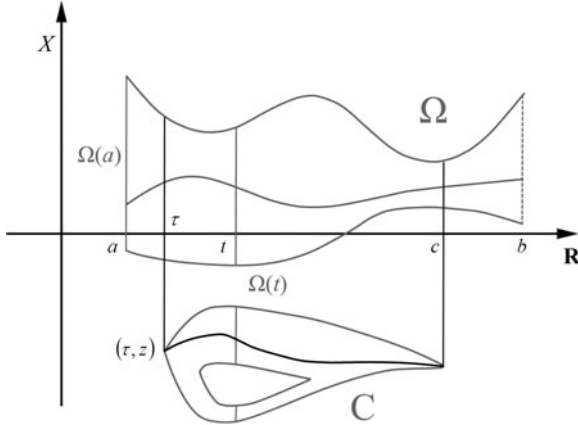
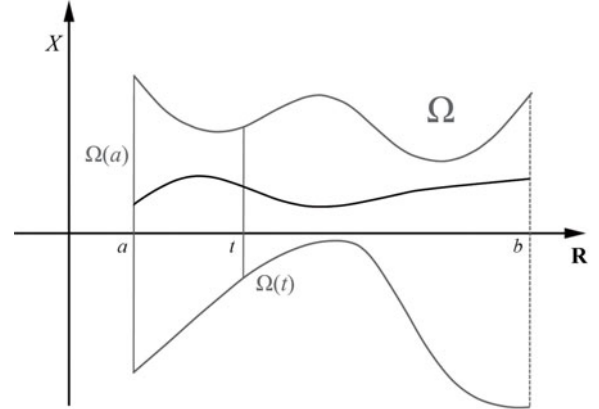


図 2: 自身が連結な  $\Omega$  と大域解



## 2. Lipschitz 発展作用素

$(X, \|\cdot\|)$  を実 Banach 空間,  $\Omega \subset [0, \infty) \times X$  を  $t \in [0, \infty)$  に対して  $\Omega(t) \neq \emptyset$  を満たす集合とする.  $\Delta := \{(t, \tau) : t \geq \tau \geq 0\}$  とおく.  $\{U(t, \tau) : (t, \tau) \in \Delta\}$  を  $(t, \tau) \in \Delta$  をパラメーターとする作用素  $U(t, \tau) : \Omega(\tau) \rightarrow \Omega(t)$  の族とする. 次の条件 (E1) と (E2) が満たされるとき,  $\{U(t, \tau) : (t, \tau) \in \Delta\}$  を  $\Omega$  上の発展作用素と言う. さらに, 次の条件 (E3) も満たされるとき,  $\{U(t, \tau) : (t, \tau) \in \Delta\}$  を  $\Omega$  上の Lipschitz 発展作用素と言う:

(E1)  $(s, t), (t, \tau) \in \Delta, z \in \Omega(\tau)$  のとき  $U(s, t)U(t, \tau)z = U(s, \tau)z$  と  $U(\tau, \tau)z = z$  が成り立つ.

(E2)  $(t_n, \tau_n), (t, \tau) \in \Delta, z_n \in \Omega(\tau_n), z \in \Omega(\tau)$  とする. もし  $n \rightarrow \infty$  のとき  $(t_n, \tau_n) \rightarrow (t, \tau)$  かつ  $z_n \rightarrow z$  ならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $U(t_n, \tau_n)z_n \rightarrow U(t, \tau)z$  となる.

(E3)  $M \geq 1$  と  $\omega \in C([0, \infty); [0, \infty))$  が存在して,  $(t, \tau) \in \Delta$  と  $x, y \in \Omega(\tau)$  に対して

$$\|U(t, \tau)x - U(t, \tau)y\| \leq M \exp\left(\int_{\tau}^t \omega(s)ds\right) \|x - y\|.$$

$\Omega$  上の Lipschitz 発展作用素  $\{U(t, \tau) : (t, \tau) \in \Delta\}$  に対して, 次で定まる写像  $A_0 : D(\subset \Omega) \rightarrow X$  を  $\{U(t, \tau) : (t, \tau) \in \Delta\}$  の無限小生成作用素という:

$$A_0(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} (U(t+h, t)x - x)/h, \quad (t, x) \in D;$$

$$D := \{(t, x) \in \Omega : \exists \lim_{h \downarrow 0} (U(t+h, t)x - x)/h \text{ in } X\}.$$

次の定理より, 性質 (V1)–(V4) と条件 (Ω1)–(Ω4) は Lipschitz 発展作用素の無限小生成作用素が存在する自然な条件であることが分かる.

定理 4.  $\Omega \subset [0, \infty) \times X$  を  $t \in [0, \infty)$  に対して  $\Omega(t) \neq \emptyset$  を満たす集合,  $A : \Omega \rightarrow X$  を関数とする. 条件 (Ω1) と (Ω2) を満たすと仮定する. このとき次は同値:

(i)  $A$  が  $\Omega$  上の Lipschitz 発展作用素  $\{U(t, \tau) : (t, \tau) \in \Delta\}$  の無限小生成作用素である.

(ii) 汎関数  $V : [0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$  が性質 (V1)–(V3) と (V4)' を満たし,  $A$  が条件 (Ω3) と (Ω4) を満たす. ただし,

(V4)'  $m > 0$  が存在して,  $x, y \in \Omega(t)$  と  $t \in [0, \infty)$  に対して  $m\|x - y\| \leq V(t, x, y)$ .

補題 1. 性質 (V4) と (V4)' は同値.

### 3. 準線形波動方程式

次の準線形波動方程式の初期値問題を考える:  $t \geq 0$  と  $x \in \mathbf{R}$  に対して

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x v, \\ \partial_t v = \partial_x \sigma(t, u) - \nu v, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \end{cases} \quad (\text{IVP}; 0, (u_0, v_0))$$

ただし  $\nu$  は正の定数,  $\sigma(\cdot, \cdot)$  は  $[0, \infty) \times \mathbf{R}$  上の滑らかな実数値関数で  $(t, r) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$  と正の定数  $\delta_0, L_0$  に対して次を満たす:

$$\begin{aligned} \sigma(t, 0) &= 0, \quad \sigma_r(t, r) \geq \delta_0, \\ |\sigma_r(t, r)|, |\sigma_{rr}(t, r)|, |\sigma_{rrr}(t, r)| &\leq L_0. \end{aligned}$$

汎関数  $V$  を次で定義する:  $(u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in L^2(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$  と  $t \in [0, \infty)$  に対して

$$V(t, (u, v), (\hat{u}, \hat{v})) := \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (v(x) - \hat{v}(x))^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\hat{u}(x)}^{u(x)} \sqrt{\sigma_r(t, r)} dr \right)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

これは性質 (V1)–(V4) を満たす.

$[0, \infty)$  上の非負で連続な可積分関数  $h(\cdot)$  が存在して,  $(t, r) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$  に対して  $|\sigma_{tr}(t, r)| \leq h(t)$  を満たすとする.  $(u, v) \in \Omega(t)$  と  $t \in [0, \infty)$  に対して

$$A(t, (u, v)) := (\partial_x v, \partial_x \sigma(t, u) - \nu v)$$

と定義する. ただし  $\Omega(t)$  は次を満たす  $(u, v) \in H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$  の集合とする: 適当な正の定数  $a_0$  と  $b_0$  に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^u \sigma(t, r) dr + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \sigma_u(t, u) ((\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\nu u + \partial_x v)^2 + (\nu \partial_x u + \partial_x^2 v)^2) \right) \right\} dx \leq a_0 \exp \left( b_0 \int_0^t h(s) ds \right).$$

このとき,  $\{\Omega(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  は  $H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$  で一様に有界である. 関数  $\sigma$  の仮定より, 正の定数  $r_0$  が存在して, 任意の  $t \in [0, \infty)$  に対して  $B_{r_0} \subset \Omega(t)$  を満たす. ただし

$$B_{r_0} := \{(u, v) \in H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R}) : \|(u, v)\|_{H^2 \times H^2} \leq r_0\}$$

である. また,  $\Omega \subset [0, \infty) \times L^2(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$  の連結成分  $C$  が存在して,  $[0, \infty) \times B_{r_0} \subset C \subset \Omega$  を満たす.

$\omega_0$  を正の定数として,  $t \in [0, \infty)$  に対して  $\omega(t) := \omega_0 \cdot (1 + h(t))$  とする.  $a_0, b_0$  と  $1/\omega_0$  を十分に小さく取るとき, 初期値問題 (IVP;  $0, (u_0, v_0)$ ) は条件  $(\Omega 1) - (\Omega 4)$  を満たす. 特に,  $A$  は  $\Omega$  上で Hölder 連続である.

以上から, 初期値問題 (IVP;  $0, (u_0, v_0)$ ) は一意な大域解を持つ.

**定理 5.** 正の定数  $r_0$  が存在して次を満たす: (IVP;  $0, (u_0, v_0)$ ) の一意な大域解  $(u, v)$  が存在して, もし  $\|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \leq r_0$  ならば,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $\|(u(t), v(t))\|_{H^2 \times H^2}$  は有界となる.

## 参考文献

- [1] T. Iwamiya, *Global existence of solutions to nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Hiroshima Math. J. **13** (1983) 65–81.
- [2] S. Kato, *On local and global existence theorems for a nonautonomous differential equation in a Banach space*, Funkcial. Ekvac. **19**, no. 3 (1976) 279–286.
- [3] S. Kato, *Some remarks on nonlinear ordinary differential equations in a Banach space*, Nonlinear Anal. **5**, no. 1 (1981) 81–93.
- [4] N. Kenmochi, T. Takahashi, *Nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **4**, no. 6 (1979) 1109–1121.
- [5] Y. Kobayashi, N. Tanaka, *Semigroups of Lipschitz operators*, Advances in Differential Equations **6**, no. 5 (2001) 613–640.
- [6] V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell, R. W. Mitchell, *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **220** (1976) 103–113.
- [7] R. H. Martin Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973) 399–414.
- [8] A. Matsumura, *Global existence and asymptotics of the solutions of the second-order quasilinear hyperbolic equations with the first-order dissipation*, Publ. RIMS. **13** (1977) 349–379.
- [9] H. Murakami, *On non-linear ordinary and evolution equations*, Funkcial. Ekvac. **9** (1966) 151–162.

# overlap する反復関数系の極限集合の次元

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻 下村健吾

反復関数系の極限集合はフラクタル集合となる場合が多い。今回は反復関数系の極限集合のうち、overlap しているものについての次元（Hausdorff 次元や Box 次元，Packing 次元）について話そうと思う。

## 1 反復関数系

**Definition 1.**

$d \in \mathbf{N}$  とし， $V \subset \mathbf{R}^d$  とする．写像  $f: V \rightarrow V$  が  $C^{1+\epsilon}$  級写像であるとは  $f$  が  $C^1$  級かつ，その導関数が  $\epsilon$ -ヘルダー関数であるときに言う．

**Definition 2.**

$V \subset \mathbf{R}^d$  を連結開集合とし， $X \subset V$  を  $\overline{\text{int}(X)} = X$  となるようなコンパクト凸連結集合とする． $V$  上の単射変換族  $S := \{f_i: V \rightarrow V \mid i \in I\}$  が等角反復関数系であるとは，任意の  $i \in I$  に対し， $f_i$  が  $V$  上で  $C^{1+\epsilon}$  級等角写像であり， $X$  上に制限したときに縮小変換になるときにいう．

今回は  $I$  が有限集合の時を考える． $n \in \mathbf{N}$  をとり， $I^n := \{\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \mid \omega_i \in I\}$  を長さが  $n$  のコードの集合とする．有限コード全体の集合を  $I^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$  とし，無限コードの集合を  $I^\infty$  とする．任意の  $\omega \in I^\infty$  に対し，始めから  $n$  番目までのコードを  $\omega|_n := \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$  と書くことにする．有限コード  $\tau \in I^*$  について  $f_\tau$  を次のように定義する．

$$f_\tau := f_{\tau_1} \circ f_{\tau_2} \circ \dots \circ f_{\tau_{|\tau|}}$$

ただし， $|\tau|$  は有限コード  $\tau$  の文字列の長さとする．

**Definition 3.**

等角反復関数系  $S := \{f_i: V \rightarrow V \mid i \in I\}$  の極限集合  $J$  を次で定義する．

$$J := \bigcup_{\omega \in I^\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\omega|_n}(X)$$

さらに，コードマップ  $\pi: I^\infty \rightarrow X$  を，次で定義する．

$$\pi(\omega) := \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\omega|_n}(X)$$

極限集合の次元については次の開集合条件が成立しているときがよく考えられている．

**Definition 4.**

等角反復関数系  $S := \{f_i : V \rightarrow V \mid i \in I\}$  が開集合条件を満たすとはある開集合  $U \subset X$  が存在し、互いに異なる任意の  $i, j \in I$  に対して  $f_i(U) \subset U$  かつ  $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$  が成り立つときに言う。

この開集合条件を満たさない等角反復関数系を overlap する等角反復関数系という。今回はこれに注目する。

## 2 極限集合の次元

### 2.1 Hausdorff 次元

**Definition 5.**

$A \subset \mathbf{R}^d, s \geq 0, \delta > 0$  とする。  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$  を次で定義。

$$\mathcal{H}_\delta^s := \inf \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} |B_\lambda|^s \mid A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda, |B_\lambda| < \delta \ (\forall \lambda \in \Lambda) \right\}$$

ただし、この下限は  $A$  の  $\delta$ -被覆全体でとる。  $A$  の  $s$  次元 Hausdorff 測度  $\mathcal{H}^s(A)$  を定義する。

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta} \{\mathcal{H}_\delta^s(A)\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

$A$  の Hausdorff 次元  $\dim_H(A)$  を  $\mathcal{H}^s(A)$  で定義する。

$$\dim_H(A) := \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

前述で紹介した開集合条件を満たす場合では次の定理がある。

**Theorem 6** (Mouldin and Urbanski, 2003).

開集合条件を満たす等角反復関数系  $S := \{f_i : V \rightarrow V \mid i \in I\}$  の極限集合  $J$  の Hausdorff 次元は Box 次元や Packing 次元と一致しており、その値  $\dim_H(J)$  は次の式で表される。

$$\dim_H(J) = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{|\omega|=n} \|f'_\omega\|^t < 0 \right\}$$

ただし、  $\|f'_\omega\| = \sup\{|f'_\omega(x)| \mid x \in X\}$ 。

overlap する反復関数系の極限集合の Hausdorff 次元については次の重複度関数が必要。

**Definition 7.**

$\forall n \in \mathbf{N}$  で 等角反復関数系  $S := \{f_i : V \rightarrow V \mid i \in I\}$  の重複度関数  $d_n : X \rightarrow \mathbf{N}$  を定義。

$$d_n(x) = \#\{\omega \in I^n \mid x \in f_\omega(\text{int}(X))\}$$

そして、集合  $A \subset X$  の重複度  $d_n(A)$  を、

$$d_n(A) = \inf\{d_n(x) \mid x \in A\}$$

で定義する。

**Theorem 8.**

等角反復関数系  $S := \{f_i : V \rightarrow V \mid i \in I\}$  の極限集合  $J$  の Hausdorff 次元は任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $t_n$  を,

$$t_n := \inf\{t > 0 \mid \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{m \in I^m} \frac{\|f'_\omega\|^t}{d_n(f_\omega(\text{int}(X)))} < \infty\}$$

とすると,  $\dim_H J \leq t_n$  を満たす.

overlap する等角反復関数系の極限集合の Hausdorff 次元を評価する際には重複度関数  $d_n$  が  $n$  を無限大に持っていくときにどのような振る舞いをするのかが重要となる.

### 3 overlap するシェルピンスキーガasket

シェルピンスキーガasket で overlap の例を考える.

$0 < a < 1$  とする.  $\mathbf{R}^2$  上の縮小変換  $f_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 (i \in \{1, 2, 3\})$  を以下のように定める.

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x-1)+1 \\ ay \end{pmatrix}, f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ a(y-1)+1 \end{pmatrix}$$

反復関数系  $\{f_1, f_2, f_3\}$  は  $a = \frac{1}{2}$  のときシェルピンスキーガasket と呼ばれる.  $\frac{1}{2} < a < 1$  のとき, overlap している. この  $a$  が特定の値の時にはその極限集合の Hausdorff 次元を計算することができる.

**Theorem 9** (Broomhead, Montaldi and Montaldi, 2004).

$\forall n \geq 2$  を自然数とし,  $a_n$  を  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$  の  $(\frac{1}{2}, 1)$  に含まれる根とする.  $b_n$  を  $3x^{n+1} - 3x + 1 = 0$  の根とすると,  $a = a_n$  とした  $\{f_1, f_2, f_3\}$  でできるシェルピンスキーガasket の Hausdorff 次元は Box 次元や Packing 次元と等しく,

$$\dim_H(J) = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

となることが分かる.

### 参考文献

- [1] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 2nd ed., Wiley, 2003.
- [2] D. Mauldin and M. Urbanski, *Graph directed Markov systems: Geometry and Dynamics of limit sets*, Cambridge Tracts in Mathematics 148, 2003.
- [3] E. Mihailescu and M. Urbanski, *Hausdorff dimension of the limit set of conformal iterated function systems with overlaps*, Proc. AMS. 139, 2011, 2767-2776.
- [4] D. Broomhead, J. Montaldi and N. Sidorov, *Golden Gaskets: Variations on the Sierpinski sieve*, Nonlinearity 17, 2004, 1455-1480.



# Connection problems on higher order linear $q$ -difference equations

Takeshi Morita<sup>a</sup>

a. Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University,  
1-1 Machikaneyama-machi, Toyonaka, 560-0043, Japan.

## Abstract.

We deal with the connection problem on the higher order linear  $q$ -difference equation between around the origin and around the infinity. In the fundamental system of solutions around the origin, divergent basic hypergeometric series appear. We use the  $q$ -Borel-Laplace transformations to obtain the asymptotic expansion of these divergent series. Our conclusion also give examples of the  $q$ -Stokes coefficients.

## 1 The higher order $q$ -confluent hypergeometric equation

In this talk, we deal with the following “degenerated” third order  $q$ -difference equation:

$$\begin{aligned} & \left[ (a_1 a_2 a_3 x - b_1/q^2) \sigma_q^3 - \{ (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)x - (b_1/q^2 + 1/q) \} \sigma_q^2 \right. \\ & \left. + \{ (a_1 + a_2 + a_3)x - 1/q \} \sigma_q - x \right] u(x) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

The equation (1) has the formal solution around the origin as follows:

$$u_1(x) = {}_3\varphi_1(a_1, a_2, a_3; b_1; q, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, a_3; q)_n}{(b_1; q)_n (q; q)_n} \left\{ (-1)q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{-1} x^n.$$

Here,  $\sigma_q$  is the  $q$ -shifted operator  $\sigma_q f(x) = f(qx)$ , the  $q$ -shifted factorial  $(a; q)_n$  is

$$(a; q)_n := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}), & n \geq 1, \end{cases}$$

moreover,  $(a; q)_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n$  and

$$(a_1, a_2, \dots, a_m; q)_\infty := (a_1; q)_\infty (a_2; q)_\infty \dots (a_m; q)_\infty.$$

The notation  ${}_r\varphi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x)$  is the basic hypergeometric series (see section two for more details). The equation (1) also has the fundamental system of solutions around the infinity as follow:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= x^{-\alpha_1} {}_3\varphi_2(a_1, a_1 q/b_1, 0; a_1 q/a_2, a_1 q/a_3; q, q b_1/a_1 a_2 a_3 x), \\ v_2(x) &= x^{-\alpha_2} {}_3\varphi_2(a_2, a_2 q/b_1, 0; a_2 q/a_1, a_2 q/a_3; q, q b_1/a_1 a_2 a_3 x), \\ v_3(x) &= x^{-\alpha_3} {}_3\varphi_2(a_3, a_3 q/b_1, 0; a_3 q/a_2, a_3 q/a_1; q, q b_1/a_1 a_2 a_3 x), \end{aligned}$$

where  $a_j = q^{\alpha_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . We study the relation between the solution around the origin  $u_1$  and solutions around the infinity  $v_1, v_2$  and  $v_3(x)$ .

## 2 Basic notations

In this section, we fix our notations. We assume that  $q \in \mathbb{C}^*$  satisfies  $0 < |q| < 1$ . For any fixed  $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus q^{\mathbb{Z}}$ , the set  $[\lambda; q]$ -spiral is  $[\lambda; q] := \lambda q^{\mathbb{Z}} = \{\lambda q^k; k \in \mathbb{Z}\}$ . The (generalized) basic hypergeometric series  ${}_r\varphi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x)$  is

$${}_r\varphi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left\{ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{1+s-r} x^n.$$

This series has radius of convergence  $\infty, 1$  or  $0$  according to whether  $r - s < 1, r - s = 1$  or  $r - s > 1$  [2]. In connection problems, the theta function of Jacobi is important. The theta function is  $\theta_q(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n, x \in \mathbb{C}^*$ . We denote  $\theta_q(\cdot)$  or more shortly  $\theta(\cdot)$ . The theta function has the following properties:

1. Jacobi's triple product identity:  $\theta_q(x) = (q, -x, -\frac{q}{x}; q)_{\infty}$ .
2. The theta function satisfies:  $\theta_q(q^k x) = q^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^{-k} \theta_q(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .
3. The inversion formula is:  $\theta_q(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \theta_q(x)$ .

We also remark that the function  $\theta(-\lambda x)/\theta(\lambda x), \lambda \in \mathbb{C}^*$  satisfies a  $q$ -difference equation  $u(qx) = -u(x)$  which is also satisfied by the function  $u(x) = e^{\pi i (\frac{\log x}{\log q})}$ .

## 3 The degeneration diagram for Heine's series

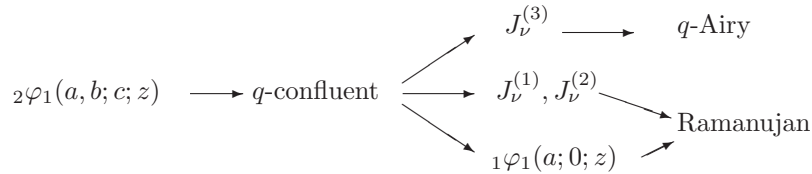
At first, we review connection problems on second order linear  $q$ -difference equations. We deal with the second order  $q$ -difference equation of the Laplace type:

$$\{(a_1 x + b_1 x) \sigma_q^2 + (a_2 x + b_2) \sigma_q + (a_3 x + b_3)\} \tilde{u}(x) = 0.$$

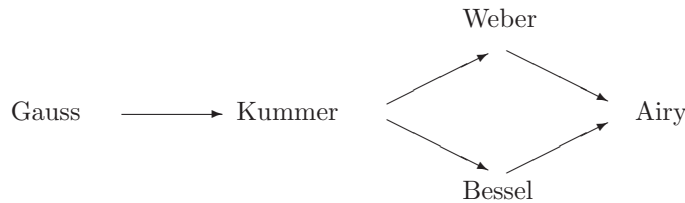
This equation can be reduced to the following "three-parameters  $q$ -difference equation"

$$[(c - abqx) \sigma_q^2 - \{c + q - (a + b)qx\} \sigma_q + q(1 - x)] u(x) = 0.$$

Three-parameters solution is given by Heine's series  ${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$ . Y. Ohyama[6] gives the following degeneration diagram for Heine's series.



This diagram can be considered as a  $q$ -analogue of the degeneration diagram for Gauss hypergeometric function  ${}_2F_1$ :



In this talk, we consider the higher order extension of the connection problem on the  $q$ -confluent type equation.

## 4 Connection problems on $q$ -difference equations

We study connection problems on linear  $q$ -difference equations between around the origin and around the infinity with irregular singular points. Connection problems on linear  $q$ -difference equations between the origin and the infinity are studied by G. D. Birkhoff [1]. Connection formulae of second order linear  $q$ -difference equations are linear relations in a matrix form:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}.$$

Here,  $u_1(x), u_2(x)$  are solutions around the origin,  $v_1(x)$ , and  $v_2(x)$  are solutions around infinity and  $C_{ij}(1 \leq i, j \leq 2)$  are  $q$ -elliptic functions such that

$$\sigma_q C_{ij}(x) = C_{ij}(x), \quad C_{ij}(e^{2\pi i} x) = C_{ij}(x).$$

### 4.1 Difference between the Stokes region and the $q$ -Stokes region

In ordinary differential equations, the Stokes region is given by some sectors. But in the  $q$ -difference case, the Stokes region is considered as the dense open set as follows:

$$U_\lambda^r := B_0(r) \setminus [-\lambda; q].$$

More generally, we remark that  $\mathbb{C}^*/q^\mathbb{Z} \approx \mathbb{T} \setminus \{\lambda\}$ , the Stokes region is  $\mathbb{T} \setminus \{\lambda\}$ , where  $\lambda$  is a fixed complex number. If  $\lambda$  changes  $\mu$ , the  $q$ -Stokes constant  $\theta(a\lambda/x)/\theta(\lambda/x)$  changes  $\theta(a\mu/x)/\theta(\mu/x)$  continuously. This point is essentially different from the case of differential equations. The first example of connection formula is given by G. N. Watson [7]. But other connection formulae have not known for a long time. Recently, C. Zhang gives connection formula of the first and second  $q$ -Bessel functions and the “confluent type” divergent series by  $q$ -Borel Laplace methods[8, 9]. We show connection formulae for the Ramanujan equation, the Hahn-Exton  $q$ -Bessel function,  $q$ -confluent basic hypergeometric function with using these methods [3, 4, 5]. We define these transformations.

### 4.2 The $q$ -Borel-Laplace resummation method

In this section, we define two different types of the  $q$ -Borel transformations and the  $q$ -Laplace transformations which are studied by C. Zhang[8, 9, 10].

**Definition 1** We assume that  $f(x)$  is a formal power series such that  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ,  $a_0 = 1$ .

1. The  $q$ -Borel transformation of the first kind is

$$(\mathcal{B}_q^+ f)(\xi) := \sum_{n \geq 0} a_n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \xi^n = \varphi(\xi).$$

2. The  $q$ -Laplace transformation of the first kind is

$$(\mathcal{L}_q^+ \varphi)(x) := \frac{1}{1-q} \int_0^{\lambda \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\theta\left(\frac{\xi}{x}\right)} \frac{d_q \xi}{\xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(\lambda q^n)}{\theta\left(\frac{\lambda q^n}{x}\right)}.$$

The  $q$ -Borel transformation can be considered as a formal inverse of the each  $q$ -Laplace transformation.

**Lemma 1** We assume that the  $q$ -Borel transform  $g(\xi)$  of  $f(x)$  is a meromorphic function around the origin. Then  $f(x)$  is also convergent around the origin and we have

$$\mathcal{L}_{q,\lambda}^+ \circ \mathcal{B}_q^+ f = f.$$

In this talk, we apply these transformations to the solution of the equation (1).

## 5 Main theorem

We give the following theorem with using the  $q$ -Borel-Laplace resummation method:

**Theorem.** For any  $x \in \mathbb{C}^* \setminus [-\lambda; q]$ , we have

$$\begin{aligned} {}_3\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, a_3; b_1; q, \lambda, x) &= \mathcal{L}_{q, \lambda}^+ \circ \mathcal{B}_q^+ {}_3\varphi_1(a_1, a_2, a_3; b_1; q, x) \\ &= \frac{(a_2, a_3, b_1/a_1; q)_\infty}{(b_1, a_2/a_1, a_3/a_1; q)_\infty} \frac{\theta(a_1 \lambda)}{\theta(\lambda)} \frac{\theta(a_1 q x / \lambda) \theta(x)}{\theta(q x / \lambda) \theta(a_1 x)} v_1(x) \\ &+ \frac{(a_1, a_3, b_1/a_2; q)_\infty}{(b_1, a_1/a_2, a_3/a_2; q)_\infty} \frac{\theta(a_2 \lambda)}{\theta(\lambda)} \frac{\theta(a_2 q x / \lambda) \theta(x)}{\theta(q x / \lambda) \theta(a_2 x)} v_2(x) \\ &+ \frac{(a_2, a_1, b_1/a_3; q)_\infty}{(b_1, a_2/a_3, a_1/a_3; q)_\infty} \frac{\theta(a_3 \lambda)}{\theta(\lambda)} \frac{\theta(a_3 q x / \lambda) \theta(x)}{\theta(q x / \lambda) \theta(a_3 x)} v_3(x). \end{aligned}$$

Here, the notation  ${}_3\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, a_3; b_1; q, \lambda, x)$  is the  $q$ -Borel-Laplace transform of the *divergent* solution  $u_1(x)$ . The new parameter  $\lambda$  appears in the connection coefficients. We remark that these coefficients are also new examples of the  $q$ -Stokes coefficients.

## References

- [1] G. D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and  $q$ -difference equations, Proc. Am. Acad. Arts and Sciences, **49** (1914), 521 – 568.
- [2] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge, 2004.
- [3] T. Morita, A connection formula between the Ramanujan function and the  $q$ -Airy function, [arXiv:1104.0755](#).
- [4] T. Morita, A connection formula of the Hahn-Exton  $q$ -Bessel Function, SIGMA, **7** (2011), 115, 11pp.
- [5] T. Morita, A connection formula of the  $q$ -confluent hypergeometric function, [arXiv:1105.5770](#).
- [6] Y. Ohyama, A unified approach to  $q$ -special functions of the Laplace type, [arXiv:1103.5232](#).
- [7] G. N. Watson, The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, Trans. Camb. Phil. Soc. **21** (1910), 281–299.
- [8] C. Zhang, Remarks on some basic hypergeometric series, in “Theory and Applications of Special Functions”, Springer (2005), 479–491.
- [9] C. Zhang, Sur les fonctions  $q$ -Bessel de Jackson, J. Approx. Theory, **122** (2003), 208–223.
- [10] C. Zhang, Une sommation discrète pour des équations aux  $q$ -différences linéaires et à coefficients, analytiques: théorie générale et exemples, in “Differential Equations and Stokes Phenomenon”, World Scientific (2002), 309–329.

# ポスターセッション



# 非軸対称核融合プラズマの 3 次元磁場分布逆解析 に要求される磁気センサー数の削減

北海道大学大学院工学院，核融合科学研究所\*

石丸謙造，渡邊翔太，板垣正文，渡邊清政\*

## 要旨

3 次元コーシー条件面法による非軸対称核融合プラズマの磁場分布逆解析において，440 個という非現実的な磁場センサー数を仮定してきた．一方，特異値分解における特異値を大きい順に並べると丁度半分のところに特異値の段差がある．それ以下の特異値を打ち切ると，未知数の数，センサー数によらず最も高精度な結果を得た．さらに磁場分布の種々の対称性も考慮すると，55 個程度の磁場センサー数でも精度よく逆解析が可能となった．

## 1. はじめに

3 次元コーシー条件面(CCS)法は外部磁気センサー信号に基づいて核融合装置の最外殻磁気面(LCMS)またはプラズマ境界を逆推定する．大型ヘリカル装置(LHD)に磁場センサー440 個，磁束ループ 126 個を配置した時，LCMS 外側の磁場分布を良好に逆解析でき，これに基づく磁力線追跡の結果，LCMS の形状がほぼ再現された[1,2]．しかし，上記のセンサー数はあまりに膨大である．少数個のセンサーで逆解析を可能とするには，(a) 必要な未知数の低減，(b) 磁場分布の対称性等の考慮，(c) センサーの存在しない点での信号の内挿等が挙げられる．本研究では未知数の低減を最大の狙いとし，特異値分解における特異値の傾向に着目し，少数個のセンサーによっても精度を落とさずに逆解析できることを示す．

## 2. コーシー条件面法

3 次元 CCS 法では，実在のプラズマ電流の代わりに未知の Dirichlet 条件(ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$ )と Neumann 条件(法線方向微分値  $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{n}$ )を課したコーシー条件面(CCS)をプラズマ領域内に設置し，真空磁場を仮定して解く．本研究では，LHD に対して Fig.1 のように CCS 断面が楕円状で真空容器断面形状のトロイダル方向の変化に追従させた「ひねり CCS」を採用した．LHD はトロイダル方向に 1/10 回転対称性を持つことから，36 度分の CCS を境界要素分割し要素上の節点について Dirichlet 条件と Neumann 条件を定める．これら節点に対する境界積分方程式のほかに多数の磁気センサー位置に対する境界積分方程式を連立させ，センサー信号を再現するように境界要素法を用いて解く．

境界積分方程式の組を離散化して得られる行列方程式を

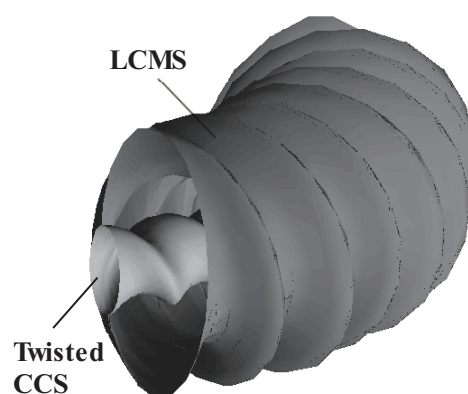


Fig.1 Image of a twisted CCS

$$Dp = g \quad (1)$$

の形式に変換する．解ベクトル  $p$  は CCS 上の  $A$  と  $\partial A / \partial n$  である．式(1)を打ち切り特異値分解(TSVD)法で解く．まず，行列  $D$  を  $D = U A V^T$  のように分解する．ここで， $U$  と  $V^T$  は直交行列， $A$  は，非負の特異値からなる対角行列である． $A$  から  $k+1$  番目以降の微小な特異値を割愛したものを  $A_k$  とかくとき，式(1)の解は  $p = V A_k U^T g$  で与えられる．いったん CCS 上の  $A = (A_x, A_y, A_z)$ ， $\partial A / \partial n$  が全て既知となれば，任意の点における磁場は

$$B_j - W_j^{(B)} = \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left( L_x^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_x}{\partial n} - A_x \left( L_x^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left( L_y^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_y}{\partial n} - A_y \left( L_y^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma \quad (2)$$

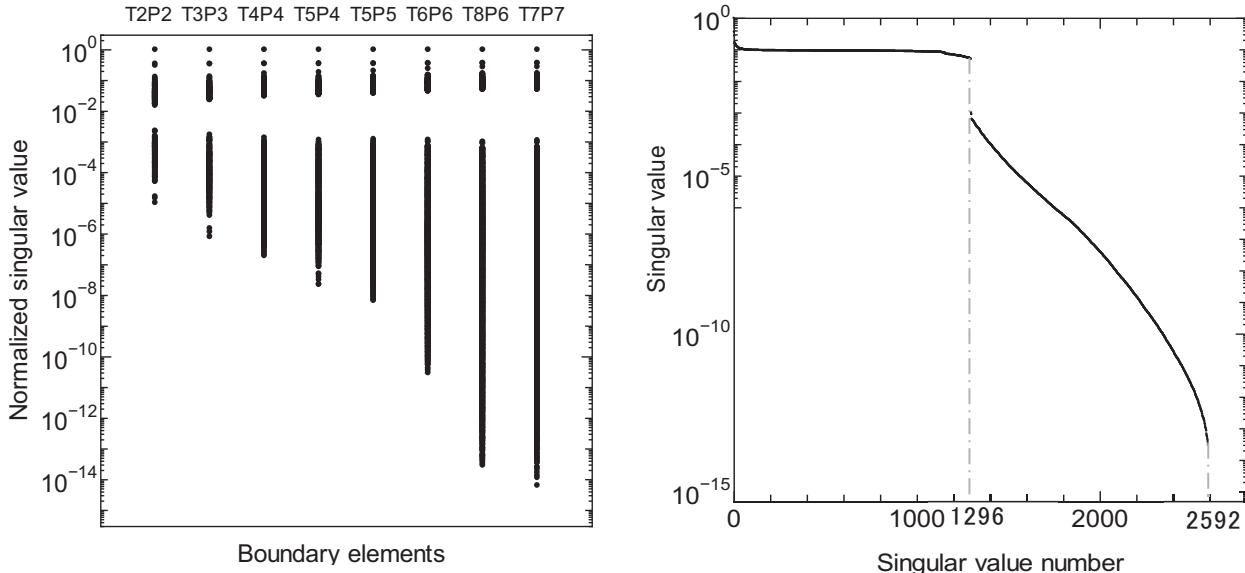
$$+ \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left( L_z^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_z}{\partial n} - A_z \left( L_z^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma \quad (j = r, \phi, z)$$

にしたがって計算できる．ここに  $\phi_i^*$  は 3 次元ラプラス方程式の基本解， $L_x^j$  などは磁場の成分などで決まる演算子， $W_j^{(B)}$  は外部コイル電流の寄与である．

### 3. 解析手法と結果

#### (1) 最適な打ち切り特異値分解の検討

440 個の磁場センサーと 126 個の磁束ループを用いた際の特異値分解で現れる特異値の傾向を Fig.2(a) に示す．トロイダル方向に  $n$  分割，ポロイダル方向に  $m$  分割した境界要素を  $TnPm$  と表す．縦軸は最大値を 1.0 に規格化した特異値を示す．打ち切る箇所の特異値の逆数が条件数となる．境界要素分割数によらず，特異値  $10^{-2}$  程度を境に段差が生じている．



(a) Singular value behavior as a function of the number of boundary elements

(b) Singular values for the T8P6 case

Fig.2 Behavior of singular values

Fig.2(b) は T8P6 の場合であるが，どの場合も段差の上下にある特異値の数は厳密に等し

いという興味深い結果を得た。さらに、この段差以下の特異値を打ち切って計算を行うと、以下のように最も精度良い計算結果を得ることがわかった。

逆解析の精度評価のため、3次元電磁流体平衡計算コード HINT2 [3] による計算結果を基準解とした。Fig.3(a)と Fig.3(b)は 48 境界要素と 20 境界要素において、種々の打ち切り値に対して最外殻磁気面近傍の絶対誤差の最大値と誤差 0.02 T 以上の箇所の割合を示す。いずれの場合も条件数  $10^2$ , すなわち、特異値段差の箇所で打ち切った時に最も高い精度を得た。

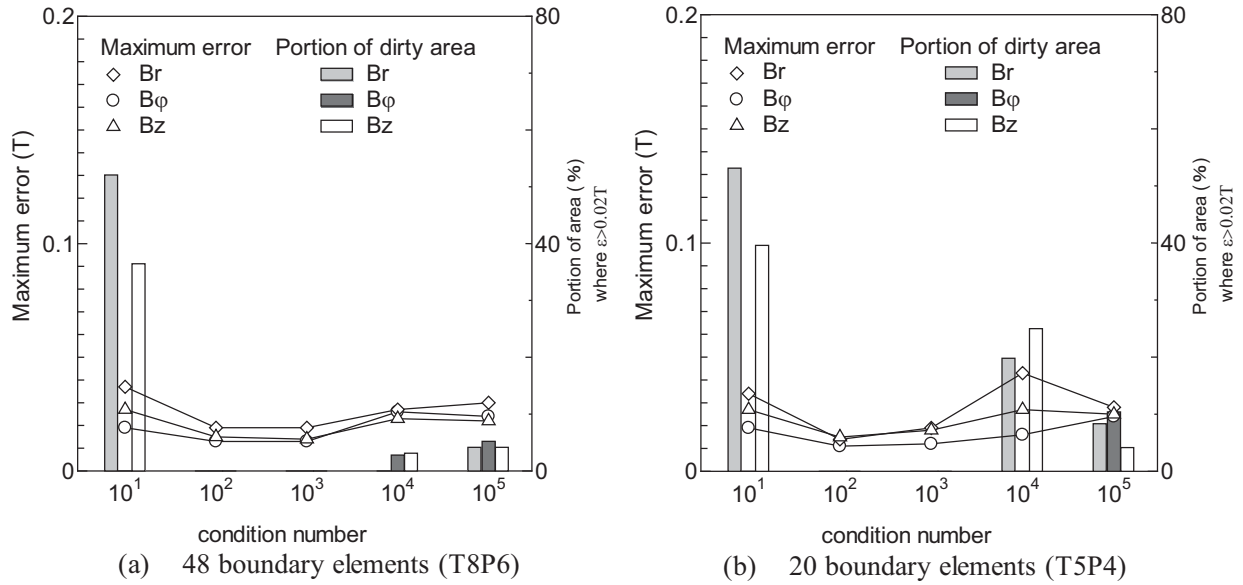


Fig.3 Error tendency of reconstructed field when assuming 440 field sensors and 126 flux loops

## (2) 境界要素数の削減

これまで境界要素数を 48 個としていたため未知数の数が大きく、センサー数を減らせなかった。ここでは、磁場センサー数 110 個で解析可能な 12 境界要素(T4P3)で逆解析した。

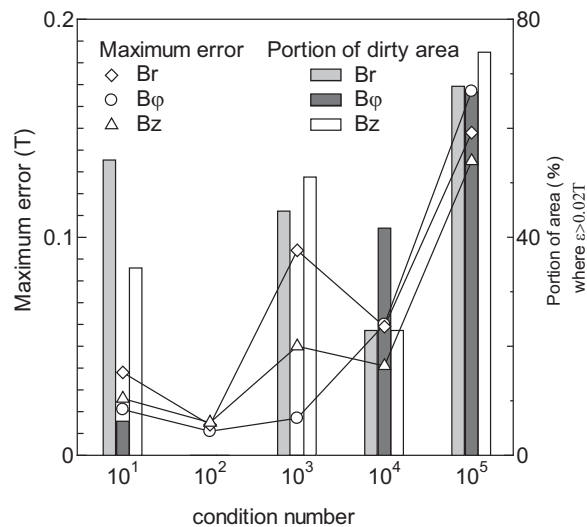


Fig.4 Error tendency for 12 boundary elements (T4P3)

Fig.4 より、この場合も特異値段差以下の微小な値を打ち切った条件数  $10^2$  で最も高精

度の解を得た. Table 1 は, (i) 磁場センサー数 110 個, 磁束ループ 25 個に対して 12 境界要素, (ii) センサー数 440 個, 磁束ループ 126 個に対して 48 境界要素, 条件数が  $10^5$  になるように特異値を打ち切った場合の誤差傾向を比較したものである. なお, 後者は文献[2]に示されているものである. 磁場センサー信号 110 個においても 440 個の場合に比べて精度が劣ることなく, 段差以下の特異値を打ち切ることでむしろ従来よりも誤差が小さいという結果が得られた.

Table 1 Comparison of the error tendencies

|                                                 | (i) 12 boundary elements<br>(110 field sensors<br>& 25 flux loops) |          |       | (ii) 48 boundary elements<br>(440 field sensors<br>& 126 flux loops) [2] |          |       |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------|-------|--------------------------------------------------------------------------|----------|-------|
|                                                 | $B_r$                                                              | $B_\phi$ | $B_z$ | $B_r$                                                                    | $B_\phi$ | $B_z$ |
| Maximum error(T)                                | 0.020                                                              | 0.013    | 0.017 | 0.030                                                                    | 0.024    | 0.022 |
| Portion of area where<br>$\varepsilon > 0.02$ T | 0.0%                                                               | 0.0%     | 0.0%  | 4.2%                                                                     | 5.2%     | 4.2%  |

The error tendencies were investigated for the region  $1.0 < \rho < 1.1$  in the minor radius ( $\rho$ ) space, i.e. very near the last closed magnetic surface.

#### 4. 幾何学的性質の利用

プラズマ横長断面をトロイダル方位角度  $\varphi$  の原点と置くと, LHD の磁場ベクトルには,  $B_r(r, z, -\varphi) = -B_r(r, z, \varphi)$ ,  $B_z(r, z, -\varphi) = B_z(r, z, \varphi)$ ,  $B_\phi(r, z, -\varphi) = B_\phi(r, z, \varphi)$  のヘリカル対称性があり, この関係を利用することにより, 110 個必要だった磁場センサー数を, 60 個にまで減らすことができる. さらに, 縦長断面および横長断面では

$$B_r(r, z, \varphi) = -B_r(r, -z, \varphi), B_z(r, z, \varphi) = B_z(r, -z, \varphi), B_\phi(r, z, \varphi) = B_\phi(r, -z, \varphi)$$

の Up-down 対称性が成立し, 上記で 60 個必要な磁場センサーを 55 個まで削減できる.

#### 5. 結論

LHD の 3 次元磁場分布逆解析において, 打ち切り特異値分解の打ち切り箇所を特異値の段差に置くことで, 磁場センサー 110 個, 磁束ループ 25 個の少数個のセンサー信号を用いた場合でも精度良い解を得ることができた. さらに, LHD プラズマの磁場配位に特有な種々の対称性も考慮すると 55 個の磁場センサーを用いて精度良い逆解析が可能である. この必要センサー数は LHD に実装されている磁場センサー数と同程度であり, 本研究により得られた結果は LHD の磁場分布逆解析の実機への適用を実現する可能性を示すものである.

#### 参考文献

- [1] Itagaki, M., et al. 2011 *Plasma Phys. Control. Fusion* **53** 105007.
- [2] Itagaki, M., et al. 2012 *Plasma Phys. Control. Fusion* **54**, 125003.
- [3] Suzuki, Y., et al. 2006 *Nucl. Fusion* **46** L19.

# 複素接触多様体とその構成法について

今田 充洋 (慶應義塾大学大学院 基礎理工学専攻)

## 1 序

実  $(2n+1)$  次元多様体上の接触構造とは, ある 1 形式  $\eta$  が存在して,  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  を満たすものであった. この概念を奇数次元の複素多様体へ拡張したものを考えたい. この拡張は Kobayashi の論文 [4] に始まり, それ以来 Ishihara-Konishi [3], Blair [2] らの研究により進展が見られている. 実接触幾何において, normality をもつ接触構造は佐々木構造と呼ばれ, 近年, 物理学からも注目される重要な存在となっている. 本講演では複素接触幾何における normality がどのようなものかを紹介する.

## 2 定義

**Definition 2.1.**  $M$  を  $(2n+1)$  次元の複素多様体,  $\{\mathcal{O}_\lambda\}$  をその開被覆とする.  $M$  が複素接触多様体であるとは, 以下の 1) と 2) を満たすものとする.

- 1) 各  $\mathcal{O}_\lambda$  において正則 1 形式  $\omega_\lambda$  がとれて,  $\mathcal{O}_\lambda$  の各点で,  $\omega_\lambda \wedge (d\omega_\lambda)^n \neq 0$ .
- 2)  $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \emptyset$  ならば, その上に 0 でない正則関数  $h_{\lambda\mu}$  が存在し,  $\omega_\lambda = h_{\lambda\mu}\omega_\mu$ .

各  $\mathcal{O}_\lambda$  において,  $\mathcal{H}_\lambda = \{X \in T\mathcal{O}_\lambda \mid \omega_\lambda(X) = 0\}$  と定義しておく.  $h_{\lambda\mu}$  たちは 0 でないので,  $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$  上で  $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu$  が成り立つ. よって  $\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}_\lambda$  は well-defined で,  $M$  上の正則かつ, 可積分でない subbundle である. これを horizontal subbundle と呼ぶ.

**Definition 2.2.**  $(M, J, g)$  を  $(4n+2)$  次元の Hermite 多様体 ( $J$  は複素構造,  $g$  は Hermite 計量),  $\{\mathcal{O}_\lambda\}$  をその開被覆とする.  $M$  が複素概接触計量多様体とは, 以下の 1) と 2) を満たすものとする.

- 1) 各  $\mathcal{O}_\lambda$  において, 1 形式  $u_\lambda$  と  $v_\lambda = u_\lambda J$ ,  $(1,1)$ -テンソル  $G_\lambda$  と  $H_\lambda = G_\lambda J$ , 単位ベクトル場  $U_\lambda$  と  $V_\lambda = -JU_\lambda$  が存在して, 以下を満たす.

$$(1) \quad \begin{aligned} H_\lambda^2 &= G_\lambda^2 = -id + u_\lambda \otimes U_\lambda + v_\lambda \otimes V_\lambda, & g(G_\lambda X, Y) &= -g(X, G_\lambda Y), \\ g(U_\lambda, X) &= u(X), & G_\lambda J_\lambda &= -J_\lambda G_\lambda, & G_\lambda U_\lambda &= 0, & u_\lambda(U_\lambda) &= 1. \end{aligned}$$

- 2)  $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \emptyset$  ならば,  $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$  上に  $a^2 + b^2 = 1$  なる関数  $a, b$  が存在して,

$$(2) \quad u_\mu = au_\lambda - bv_\lambda, \quad v_\mu = bu_\lambda + av_\lambda, \quad G_\mu = aG_\lambda - bH_\lambda, \quad H_\mu = bG_\lambda + aH_\lambda.$$

**Remark 2.3.** 複素接触多様体  $M$  に対して,  $\omega_\lambda = u_\lambda - iv_\lambda$  と 2 つの実形式に分解することで  $M$  上に複素概接触計量構造を構成出来る. これを複素接触計量構造と呼ぶ.

**Example 2.4.**  $\mathbb{C}^3$  上に (大域的な) 正則 1 形式  $\omega = (dz_3 - z_2 dz_1)/2$  が存在して,  $\mathbb{C}^3$  は複素接触多様体になる. さらに複素接触計量構造が Blair ら [1] により構成されている.

### 3 Normality

記号はこれまでの通りとする (添字は省略した). Ishihara-Konishi [3] は複素概接触計量構造の normality を, 以下に定義する 2 つのテンソル  $S, T$  が恒等的に 0 になることと定義した.

$$\begin{aligned} (3) \quad S(X, Y) &= [G, G](X, Y) + 2g(X, GY)U - 2g(X, HY)V + 2v(Y)HX \\ &\quad - 2v(X)HY + \sigma(GY)HX - \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX, \\ (4) \quad T(X, Y) &= [H, H](X, Y) - 2g(X, GY)U + 2g(X, HY)V + 2u(Y)GX \\ &\quad - 2u(X)GY + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX - \sigma(Y)GHX + \sigma(X)GHY. \end{aligned}$$

$[\cdot, \cdot]$  は Nijenhuis テンソルを表し,  $\sigma$  は  $g$  に対する Levi-Chivita 接続  $\nabla$  を用いて,  $\sigma(X) = g(\nabla_X U, V)$  と定義する. 同じく [3] にて, 複素概接触計量多様体がこの normality をもてば,  $(M, J, g)$  が Kähler 多様体になることが示されている. このような多様体の例として, Fubini-Study 計量をもった  $CP^{2n+1}$  が挙げられる. ここで, 私の結果を一つ紹介する.

**Proposition 3.1**  $M$  上の複素概接触計量構造が normality をもてば,

$$(5) \quad K(X, JX) + K(X, GX) + K(X, HX) = 6 \quad (X \in \mathcal{H})$$

が成り立つ. ここに,  $K(X, Y)$  は  $X, Y$  により生成される平面による断面曲率を表す.

Example 2.4 の  $CP^{2n+1}$  に関して断面曲率を計算すると,  $K(X, JX) = 4$ ,  $K(X, GX) = K(X, HX) = 1$  と求まる (実際, これは normality をもっている). しかしこれ以外に normality をもった複素 (概) 接触計量多様体はまだ見つかっていない. そこで, この多様体を構成する手段として, 超ケーラー多様体を用いたものを挙げる.

### 4 超ケーラー多様体からの reduction

まずは, 超ケーラー多様体の定義を復習する.

**Definition 4.1.**  $(M, J_1, J_2, J_3, g)$  が超ケーラー多様体であるとは,  $M$  上の複素構造  $J_1, J_2, J_3$  が, 関係式

$$(6) \quad J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = J_1 J_2 J_3 = -id$$

を満たし, かつ  $M$  上の計量  $g$  が  $J_1, J_2, J_3$  のいずれに関してもエルミートになる事とする.

この超ケーラー多様体を用いて, 以下の定理を得た.

**Theorem 4.2.**  $(\tilde{M}, J_1, J_2, J_3, \tilde{g})$  を超ケーラー多様体とする. いま  $C^*$  が  $\tilde{M}$  に自由に作用し, かつ  $J_1$  と可換であるとし, また射影  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M = \tilde{M}/C^*$  が, 計量  $\tilde{g}$  に関して沈め込みであるとする. すると  $\pi$  は  $\tilde{M}/C^*$  上に normal な複素接触計量構造を誘導する.

証明の概略.  $\{\tilde{O}_\lambda\}$  を  $\tilde{M}$  の開被覆とする. 局所的な切断を  $s_\lambda : \pi(\tilde{O}_\lambda) \rightarrow \tilde{O}_\lambda$  と書くことにする. ここで複素構造たち  $J_1, J_2, J_3$  を分解して,  $T(\tilde{M}/\mathbb{C}^*)$  上に  $(1, 1)$  型テンソル場  $J, G, H$  と, 1-形式  $u, v$  を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} (7) \quad J_1(s_\lambda)_*X &= (s_\lambda)_*JX, \\ (8) \quad J_2(s_\lambda)_*X &= (s_\lambda)_*GX + u(X)\nu + v(X)J_1\nu, \\ (9) \quad J_3(s_\lambda)_*X &= (s_\lambda)_*HX - v(X)\nu + u(X)J_1\nu, \end{aligned}$$

ここで  $\nu$  と  $J_1\nu$  は,  $\mathbb{C}^*$  による軌道を構成する単位接ベクトルとする.  $u$  と  $v$  は具体的に以下のように与えられる.

$$(10) \quad u(X) = \tilde{g}(J_2s_*X, \nu), \quad v(X) = \tilde{g}(J_2s_*X, J_1\nu) = -\tilde{g}(J_3s_*X, \nu).$$

最後に  $\tilde{M}/\mathbb{C}^*$  上のベクトル場  $U, V$  を

$$(11) \quad U = -J_2\nu, \quad V = J_3\nu.$$

と定義し, 得られた構造  $(u, v, U, V, G, H, J, g)$  ( $g$  は  $\tilde{g}$  の誘導計量) が複素接触多様体の定義を満たしていることが示される.

**Example 4.3.** 上の定理により, 奇数次元の複素射影空間  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  Fubini-Study 計量を入れたものが normal な複素接触計量構造になる (既知の事実). 以下その構造を,  $n = 1$  の場合に関して具体的に書き下してみる. まず  $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$  は超ケーラー構造  $(J_1, J_2, J_3, \langle, \rangle)$  を持つ. ここに  $\langle, \rangle$  は  $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$  上の標準的な計量で, 複素構造  $J_1, J_2, J_3$  は位置ベクトル  $p = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  に対し, 以下のように作用するものとする.

$$\begin{aligned} (12) \quad J_1p &= (iz_1, iz_2, iz_3, iz_4), \\ (13) \quad J_2p &= (\bar{z}_3, \bar{z}_4, -\bar{z}_1, -\bar{z}_2), \\ (14) \quad J_3p &= (i\bar{z}_3, i\bar{z}_4, -i\bar{z}_1, -i\bar{z}_2). \end{aligned}$$

また,  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  の計量に関するノルム  $\sqrt{\sum_{k=1}^4 z_k \bar{z}_k}$  を  $\|z\|$  と表す.

$\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$  への自然な作用  $\lambda \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3, \lambda z_4)$  は自由に作用し, かつ  $J_1$  と可換である. この作用による軌道空間は各点  $z$  において, 以下のベクトルによって張られる接空間を与える.

$$(15) \quad \nu = \frac{1}{2\|z\|} \sum_{j=1}^4 \left( z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right), \quad J_1\nu = \frac{i}{2\|z\|} \sum_{j=1}^4 \left( z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right).$$

(10) により  $\langle, \rangle$  を計算することで,  $u$  と  $v$  が以下のように得られる.

$$(16) \quad u = \frac{1}{2\|z\|} \sum_{j=1}^2 (-z_{2j-1} dz_{2j} - \bar{z}_{2j-1} d\bar{z}_{2j} + z_{2j} dz_{2j-1} + \bar{z}_{2j} d\bar{z}_{2j-1}),$$

$$(17) \quad v = \frac{-i}{2\|z\|} \sum_{j=1}^2 (z_{2j-1} dz_{2j} - \bar{z}_{2j-1} d\bar{z}_{2j} - z_{2j} dz_{2j-1} + \bar{z}_{2j} d\bar{z}_{2j-1}).$$

そして  $G$  と  $H$  は, (8), (9) によって

$$(18) \quad G = \frac{1}{\|z\|^2} \begin{pmatrix} O & A \\ \bar{A} & O \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{\|z\|^2} \begin{pmatrix} O & iA \\ -i\bar{A} & O \end{pmatrix}.$$

ここで  $A$  とは,

$$(19) \quad A = i \begin{pmatrix} z_2 \bar{z}_1 & -\|z\|^2 + z_2 \bar{z}_2 & z_2 \bar{z}_3 & z_2 \bar{z}_4 \\ \|z\|^2 - z_1 \bar{z}_1 & -z_1 \bar{z}_2 & -z_1 \bar{z}_3 & -z_1 \bar{z}_4 \\ z_4 \bar{z}_1 & z_4 \bar{z}_2 & z_4 \bar{z}_3 & -\|z\|^2 + z_4 \bar{z}_4 \\ -z_3 \bar{z}_1 & -z_3 \bar{z}_2 & \|z\|^2 - z_3 \bar{z}_3 & -z_3 \bar{z}_4 \end{pmatrix}$$

なる行列である. 最後にベクトル場  $U, V$  は (11), (15) により

$$(20) \quad U = \frac{1}{2\|z\|} \sum_{j=1}^2 (-\bar{z}_{2j-1} dz_{2j} - z_{2j-1} d\bar{z}_{2j} + \bar{z}_{2j} dz_{2j-1} + z_{2j} d\bar{z}_{2j-1}),$$

$$(21) \quad V = \frac{i}{2\|z\|} \sum_{j=1}^2 (\bar{z}_{2j-1} dz_{2j} - z_{2j-1} d\bar{z}_{2j} - \bar{z}_{2j} dz_{2j-1} + z_{2j} d\bar{z}_{2j-1})$$

となる. これら計算で求めたものと, 誘導計量  $g$  (すなわち Fubini-Study 計量) との組  $(u, v, U, V, G, H, J, g)$  が,  $\mathbb{C}P^3$  上の normal な複素接触計量構造になっている.

これとは別な,  $\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$  への作用を考えれば, normal 複素接触計量構造の入った多様体 ( $\mathbb{C}P^3$  と同相でない) をもう一例構成できることも分かった.

**Example 4.4.**  $\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$  への作用を以下のように定義する.

$$(22) \quad \lambda \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) := (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^{-1} z_3, \lambda^{-1} z_4) \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*).$$

この作用もまた自由であり,  $J_1$  (Example 4.3 と同じもの) と可換であることも分かる. ポスターにおいて、商空間  $M = (\mathbb{C}^4 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$  が複素多様体の構造を持つことを示し、そして normal な複素接触計量構造を書き下したものを掲載する.

## 参考文献

- [1] C. Baikoussis, D. Blair and F. Gouli-Andreou, *Holomorphic Legendre curves in the complex Heisenberg group*, Bull. inst math. Acad. Sinica, **26** (1998), 179-194.
- [2] D. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, second edition, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, 2010.
- [3] S. Ishihara and M. Konishi, *Complex almost contact manifolds*, Kodai Math. J., **3** (1980), 385-396.
- [4] S. Kobayashi, *Remarks on complex contact manifolds*, Proc. Amer. math. Soc., **10** (1959), 164-167.

# 栃木県那須地域の気象データを用いた統計モデルとデータ解析 (その2)

大森興太郎 (自由学園最高学部), 酒井優行 (自由学園最高学部),

高山大樹\* (自由学園最高学部), 高橋礼穂 (自由学園最高学部),

島津秀康† (School of Biology, University of St Andrews), 遠藤敏喜† (自由学園最高学部)

## はじめに

実データから数学的モデルを構築して探索的に解析するアプローチは、統計学において古来から活発に行われ、実際に活用されている手法である。一方、現実的な問題に対して、適切な近似モデルを構築し、その結果について適切に解釈することは、必ずしも容易なことではない。何故ならば、現象に関するデータは一般的には完全ではなく、また対象に関する私たちの知識も完全ではないからである。もちろん、データあるいは知見が蓄積されるほどその不完全さは減少する。そして、近似の精度を高めるという意味では、モデルへのデータのあてはめ、その評価のプロセスの繰り返しが重要である。

本研究では、自由学園那須農場の農場員が 57 年間に亘って観測し蓄積してきた気象データを用いて、上記のことを踏まえつつ、統計モデルの構築とデータ解析を行う。本集会では、口頭発表とポスター発表の 2 件の発表を行うが、このポスター発表では (1) 地下水の変動と蛇尾 (サビ) 川の出水について、(2) 視程の変動について、(3) 気温変動についての事例を紹介する。

## 1 蛇尾川の出水予測モデル

栃木県那須塩原市にある蛇尾 (サビ) 川は伏流水で、通常は水が地表を流れることのない水無川である。蛇尾川は大雨が降ると氾濫を起こすため、傍に位置する学校法人自由学園那須農場は開墾時から被害をもたらされてきた [6]。観測期間においては年間出水日数は増加傾向にあるものの (図 1.1) 現在までに護岸工事などの治水対策が進み洪水による農場への被害は軽減された。しかし、出水を予測して減災に役立てようとする試みはされてこなかった。本研究では後述する地下水位の変動を説明するモデルから非定常ボアソン点過程を用いて蛇尾川が出水するタイミングを予測する。

一方蛇尾川の出水は、那須野ヶ原扇状地の地形に

起因し、地下水位の変動と関係があるとされる [7]。観測データから地下水位の変動と出水のタイミングの関係が強固であることは明白であるが (図 1.2)、将来に渡る地下水位変動とそれに伴う出水を予測することは困難であることは容易に想像できる。そこで、本研究では地下水位の変動を予測するモデルも構築した。地下水位の変動に影響を与える要素として降水量、気圧、潮汐力の 3 つがよく知られていることから [1, 3]、本研究では那須野ヶ原地域における地下水位の変動をこの 3 変量により説明する状態空間モデルを構築し、蛇尾川出水との関係を議論する。

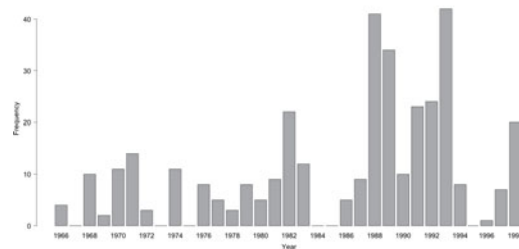


図 1.1 : 年間出水日数の推移

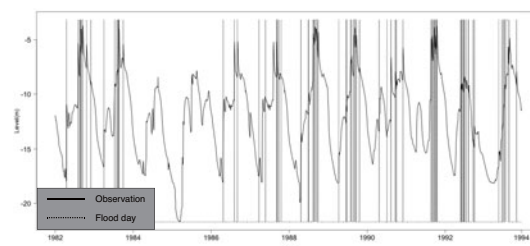


図 1.2 : 出水と地下水位の変動

### 1.1 データとモデル

地下水位と降水量のデータは農場員によって観測されたものを使用し、気圧と潮汐のデータはそれぞれ気象庁宇都宮気象観測所と日本海洋データセンターから入手した。期間は 1982 年から 1993 年の 11 年間で、1 日 1 回の観測値のべ 4,383 日分のデータを使用した。

\*代表者

†E-mail: hs50@st-andrews.ac.uk または end@prf.jiyu.ac.jp

ある  $t$  時点での観測地下水位を  $y(t)$  とすると、これが  $t$  時点の気圧  $x_1(t)$ 、潮汐力  $x_2(t)$  および  $i = 1, 2, \dots, s$  に対して  $t$  時点から過去  $i$  日さかのぼった時点の降水量  $x_3(t-i)$  により説明される回帰モデルを、トレンド項  $m(t)$  を含め、

$$y(t) = m(t) + \beta_0 + \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \sum_{i=0}^s \beta_{3,i} x_3(t-i) + \varepsilon(t)$$

$$m(t) = m(t-1) + \xi(t)$$

とモデル化する。ただし  $\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$  の残差で、トレンド項  $m(t)$  は  $\xi(t) \sim N(0, \eta^2)$  となるシステム誤差を持ち、3 変量では説明のできなかった変動を表すものと解釈する。モデルは状態空間モデル (State Space models)[2] の枠組みで尤度最大化によりモデルのパラメータを決定する、このモデルを地下水位変動予測モデルとする。

蛇尾川の出水と地下水位との関係は、微小  $dt$  時間内に発生する出水回数を  $N[t, t+dt)$  とすると、

$$\Pr(N[t, t+dt) = 1) = \lambda(t)dt$$

として強度関数  $\lambda(t)$  で一意に定められる非定常ポアソン過程によって関係づけられる。ここで、 $\lambda(t)$  は地下水位のモデルによって定められる関数である。これを出水タイミング予測モデルとする。また非定常ポアソン過程の尤度関数、

$$L(t_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u) du \right]$$

によってモデルのパラメータを決定する。

## 1.2 考察

図 1.3 が示すとおり、降雨量、気圧、潮汐力の 3 要素にもとづく地下水位の予測値の凸のピークと出水のタイミングがほとんどの場合一致している。凸のピークがありながら出水しない時点に関してトレンドの挙動を調べると、減少傾向にあることが明らかになった。これは 3 要素以外の要因が地下水位の変動に関係していることを如実に示すものであるが、その実態が明らかでない以上、具体的にモデルへ反映させるのは困難である。しかし今回は、それをトレンド項として柔軟な統計モデルで表現することにより、出水の原因が 3 要素、特に降雨量によるものと、それ以外のものとに分類できることが明らかになった (図 1.4)。

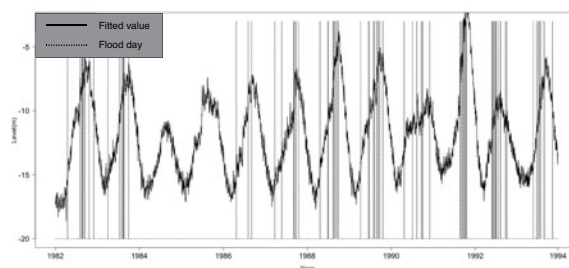


図 1.3：モデルによる地下水位の変動と出水 (トレンド項なし)

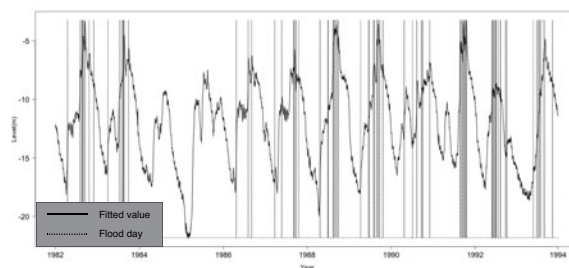


図 1.4：モデルによる地下水位の変動と出水 (トレンド項あり)

出水タイミング予測モデルにおける強度関数  $\lambda(t)$  の条件となりうる地下水位の挙動について、地下水位の閾値と変分 (平均変化率) の 2 つの観点から考察を行った。つまり、状態空間モデルが示すように、地下水位変動の主たる要因は降雨量であることから、これは降雨量の影響を見ていることに等しい。地下水位の閾値は図 1.5 が示すとおり、出水発生時の地下水位の約 80% が  $-10\text{m}$  を超えて出水していることが分かる。

また、地下水位の変分が正の値をとるとき、つまり地下水位が上昇傾向での出水と、変分が負の値をとるとき、水位が下降傾向での出水が確認することができる。分析期間では約 80% が上昇傾向での出水であった。

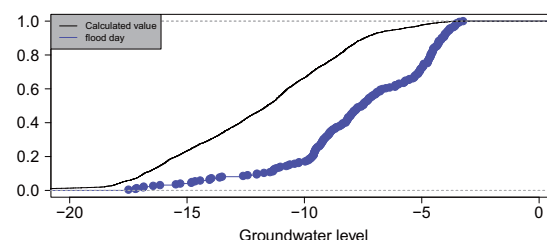


図 1.5：予測水位における経験累積分布

地下水位の閾値と変分の関係から、強度関数  $\lambda(t)$  について以下の式で表した、ここで  $\chi$  は定義関数である。

$$\lambda(t) = \alpha \chi(\hat{y} \geq \tilde{y}(t)) \times g\left(\frac{\Delta \hat{y}(t)}{\Delta t}\right)$$

$$0 \leq g(\cdot) \leq 1$$

## 2 視程変動確率モデル

視程とはものの見え具合のことで、航空などの交通関係で利用されている [4]。農場で観測された視程データから確率モデルを構築し、那須地域の良視程の特徴を記述する。

### 2.1 データとモデル

視程データは 1942 年から 1998 年までの 57 年間分、1 日 1 回の観測の延べ 20,819 日分を利用した。データは図 2.1 の視程階級表に沿って 10 段階で記録されている。地方における良視程は 40km 以上である [4] という条件から、今回は視程階級の 9 を良視程と定めた。

| 視程階級 | 階級の説明(目標を確認できる距離) |
|------|-------------------|
| 0    | 50m未満             |
| 1    | 50m以上200m未満       |
| 2    | 200m以上500m未満      |
| 3    | 500m以上1km未満       |
| 4    | 1km以上2km未満        |
| 5    | 2km以上4km未満        |
| 6    | 4km以上10km未満       |
| 7    | 10km以上20km未満      |
| 8    | 20km以上50km未満      |
| 9    | 50km以上            |

図 2.1：視程階級表

一般的に、視程の変動に影響を与える要因として、天候・湿度・大気汚染の 3 つが挙げられる [4]。これらに対応する那須農場の観測データとして、天候はそのまま、湿度はデータの欠損値が多いため季節性で考慮することにした。大気汚染は那須農場では観測されておらず、またデータの入手も困難であったため、前日の天候と風速を用いることとした。前日の天候によって良視程の観測割合に差があることと、風速年平均と良視程の年間観測数との間に正の相関が見られたため、2 つの要因が大気の洗浄効果を持つと期待し、大気汚染の影響に依らない条件となると判断した。そこで、天候(当日・前日)、季節、風速を説明変量とし、良視程が観測される確率  $P_t$  に対するモデルを

$$\text{logit}(P_t) = \beta_0 + W_{i(t)} + L_{j(t)} + N_{k(t)} + \beta_1 M_t$$

とした。ここで、 $W_{i(t)}, L_{j(t)}$  はそれぞれ当日、前日の天候、 $N_{k(t)}$  は月効果で、 $M_t$  は風速である。ただし、当日、前日の天候、月効果は離散型のデータのため、それぞれの添え字は  $t$  時点での各変量の水準番号を表す。したがって、それぞれの水準に対してパラメータが設定され、定数項  $\beta_0$  と風速(連続値)に対する係数  $\beta_1$  と併せて推定された。

### 2.2 考察

推定されたパラメータから、当日の天候が晴、前日の天候が雨、季節は秋から冬にかけて、風が吹けば吹くほど視程 9 が観測される確率が高くなることが明らかになった。視程の変動に影響を与える要因として大気汚染の面からのアプローチは一般的だが [4]、得られたモデルは、前日の天候と風速という、より身近な気象観測項目を用いても良視程が観測される確率を適切に算出できるという、これまであまり注目されていなかった新しいアプローチの可能性を示唆している。

## 3 気温変動

一般的に地球温暖化による気温の上昇は 1980 年以降から発生し、それ以前の 1945 年から 1975 年ころまでは地球の気温は停滞、寒冷化傾向であったと言われている [9]。そこで農場員の気象データ(1942 年から 1998 年まで)によって、那須地域の最高気温と最低気温のそれぞれの変化について同様の傾向がみられるかを調査したところ、同様の現象が確認された(図 3.1-3.2)。

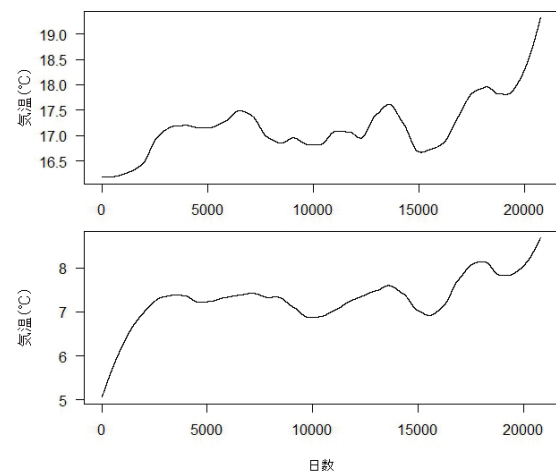


図 3.1：最高気温(上)と最低気温(下)

[8]によると、地球温暖化による気温の上昇傾向は春と冬に強くみられる。そこで、季節ごと、月ごとに計測結果を分割し、気温推移の傾向を探ること

にした．しかし季節ごとでの分割では，傾向にほとんど差がみられなかった．また月ごとでの分割では，気温の変動量に 0.5～1 度の差が確認された．これは一般的な気温変動の傾向とは異なるが，この原因は温室効果ガスの拡散などのような全国的な原因ではなく，那須地域の地形，地理状況に原因があるのではないかと推測している．

また，地球温暖化により，真夏日や猛暑日のような異常高気温の日数が増加しているといわれている [8]．そこで，30 度以上，32 度以上の気温の日数をそれぞれ“異常気温”と規定し，その日数を計測・グラフ化した．これによると 1970 年以降，すべての気温の日数に増加の傾向が見られた (図 3.3)．

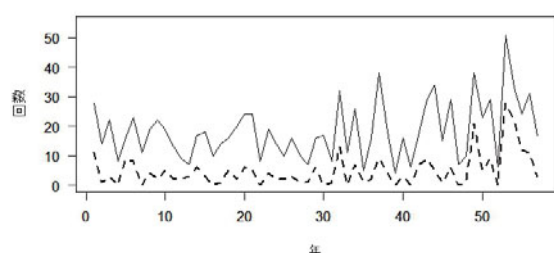


図 3.3：異常気温の推移

### 3.1 モデル

一般的に，気温と日射量には深い関係性がある．背後にある物理現象としては，日射により暖められた地表が地峡近くの空気を暖め，さらに対流によって上層部の気温が上昇するというようなエネルギー交換の法則に従っていると考えられる [9]．そこで日射率（1 日の中で太陽が直接照っている割合）に着目し，最高気温を推測する物理モデルを検討する．地表面から熱が大気中へ伝わる速度は微分方程式に

より地表温度と気温の差に比例する形で記述できることから，実際にこのモデルが観測されたデータにどの程度当てはまるのか，また那須地域の地域性を表すと思われるほかの観測項目（降雪における豪雪，雨における豪雨・少雨など）がどのように関係し得るのか，検討した結果を議論する．

### 参考文献

- [1] G. Kitagawa and N. Matsumoto, Detection of coseismic changes of underground water level, Journal of the American Statistical Association 91 (1996), 521–528.
- [2] J. J. F. Commandeur and S. J. Koopman, “An Introduction to State Space Time Series Analysis”, Oxford University Press, 2007.
- [3] 松本則夫・高橋誠緋・北川源四郎, 地震にともなう地下水位変動の定量的な検出法の開発-多変量線形回帰モデルの地下水位時系列への適用-, 地質調査所月報 40 (9999), 999–999.
- [4] 野本真一, 日本における視程の分布に関する統計的研究, 気象庁研究時報 25 (1973), 363–375.
- [5] 奥山巖, 1950～1970 年の関東地方における視程の経年変化, 気象庁研究時報 26 (1974), 243–255.
- [6] 大塚甫, 自由学園那須農場開拓史, 西那須野町郷土資料館紀要 7(1990), 21–48.
- [7] 山中勤・田中正・浅沼順・濱田洋平, 栃木県那須扇状地における地下水と河川水の交流, 筑波大学陸域環境研究センター報告 4 (2003), 51–59.
- [8] 吉野正敏, 日本の気候 1 - 最新データでメカニズムを考える -, 二宮書店, 2003.
- [9] S. R. Weart 原著, 増田耕一・熊井ひろ美訳, 温暖化の“発見”とは何か, みすず書房, 2005.

# ローレンツ空間の微分幾何学と特異点論

加世堂 公希 (北海道大学理学研究院)

## 1 序

本稿ではローレンツ空間内の微分幾何学と写像の特異点論を用いた研究について紹介する。 $M, N$  をそれぞれ  $m, n$  次元実可微分多様体とする。写像  $f: M \rightarrow N$  が点  $a \in M$  (または  $b \in N$ ) で特異点を持つとは、 $f$  の微分写像  $d_a f: T_a M \rightarrow T_b N$  が条件  $\text{rank } d_a f < \min(m, n)$  をみたす時を言う。写像の特異点は関数の臨界点の拡張になっている。写像の特異点は  $\mathcal{A}$ -同値などを用いて分類が行われる。 $m = n = 2$  の場合についてはホイットニーによる  $\mathcal{A}$ -同値による特異点のジェネリックな分類が知られている。

特異点に関する分類理論 (特異点論) は曲線論や曲面論にも応用されている。([2], [13] を参照) 3次元ユークリッド空間内の曲面  $M$  のガウス写像  $n: M \rightarrow S^1$  は曲面上の法線を向く写像として与えられる。ガウス写像の特異点との関係の研究はブレッカーとウィルソン [3] によって行われた。ガウス写像の特異点は曲面のガウス曲率 0 の点 (放物点) に対応し、ジェネリックに現れるガウス写像の特異点は折り目型とカスプ型しかないことが知られている。バンチョフら [2] はカスプ型特異点の局所的な幾何学的性質を調べた。

曲面の点と  $\mathbb{R}^3$  上の点の距離を与える関数  $D: M \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  は二乗距離関数と呼ばれる。二乗距離関数の特異点は曲面上の点  $0$  ではない主曲率を持つときに現れ、特異点の集合は曲面の縮閉面と対応することが知られている。この場合の特異点はガウス写像の場合よりも少し複雑で、ジェネリックな場合の特異点は  $A_k$  型 ( $k = 2, 3_+, 3_-, 4$ ) と  $D_4^\pm$  特異点が現れ、特に  $D_4^\pm$  型は曲面上の 2 つの主曲率が一致する点 (臍点) において現れる。[5] では曲面論においてラグランジュ、ルジャンドル特異点論のフレームワークを用いた議論が展開され、ガウス写像と高さ関数との間に対応があることを示されている。[5] はさらに曲面の縮閉面と二乗距離関数に対しても同様の対応があることも示している。

特異点論を応用できる幾何学的対象は正定値計量を持つユークリッド空間だけではない。指数  $s$  の非退化擬計量  $ds^2 = -dx_1^2 - \cdots - dx_s^2 + dx_{s+1}^2 + \cdots + dx_{s+n}^2$  が入った空間  $\mathbb{R}^{n+s}$  をローレンツ空間と呼び  $\mathbb{R}_s^{n+s}$  と書く。特に  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  をミンコフスキー空間と言う。擬球  $\{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = r\}$  は  $r = \pm 1, 0$  の場合にそれぞれ双曲空間、ド・ジッター空間、光錐と呼び、それぞれ  $H_+^n(-1), S_1^n, LC^*$  と書き表す。泉屋ら [6] は双曲空間内の超曲面に対し、位置ベクトルと時間的法方向の組み合わせによって光錐方向を対応させる光錐ガウス像の定義を与え、その特異点がもつ曲面の幾何学的性質を調べた。[5, 6] で用いられた方法はド・ジッター空間 [10]、光錐 [7]、反ドジッター空間 [4] における研究にも使われている。[11, 12] ではド・ジッター空間の余次元 2 以上の空間的部分多様体に対して、[5] で用いられたフレームワークを利用し、管状超曲面と空間的部分多様体との幾何学的な対応を調べることができた。

## 2 準備

点  $a \in \mathbb{R}^m$  について、 $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  の同値関係  $f \sim g$  は条件「 $a$  のある開近傍  $U$  が存在して  $f|_U = g|_U$ 」で定められる。この同値類  $\tilde{f}$  を  $f$  の写像芽 (map germ) と呼び、同値類の集合を  $\mathcal{E}_a(m, n)$  と表す。以降写像芽の表記  $\tilde{f}$  を  $f$  と区別せず単に  $f : (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$  と書く。関数芽 (function germ) の集合  $\mathcal{E}_a(m, 1)$  は  $\mathbb{R}$ -多元環で唯一の極大イデアルは  $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{E}_a(m, 1) \mid f(a) = 0\}$  と表される。関数芽  $f_i \in \mathcal{E}_{a_i}(m, n)$  ( $i = 1, 2$ ) が  $\mathcal{A}$ -同値 ( $\mathcal{A}$ -equivalent) であるとは、微分同相写像芽  $\Phi, \phi$  が存在して  $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \Phi$  が成立するときである。 $f_i \in \mathcal{E}_{a_i}(m, 1)$  で  $f_i(a_i) = 0$  を満たす写像芽 ( $i = 1, 2$ ) が  $\mathcal{K}$ -同値 ( $\mathcal{K}$ -equivalent) であるとは、微分同相写像芽  $\Phi$  と定義域上で 0 の値をとらない関数  $\lambda$  を用いて  $\lambda \times f_1 = f_2 \circ \Phi$  と表されるときを言う。

$\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^n$  への可微分写像全体の集合  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  にホイットニー  $C^\infty$  位相が与えられているとする。写像に関する性質を  $P$  と表す。部分集合  $B = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid f \text{ が性質 } P \text{ を持つ}\}$  が  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  の残留集合 (加算個の稠密開集合の共通部分) を含むとき性質  $P$  (または性質  $P$  を持つ写像  $f$ ) はジェネリックであると言う。特に  $B$  は  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  で稠密開集合である。

$n = 1$  の場合、関数芽  $f$  はジェネリックにそのヘッセ行列が正則となる。 $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への可微分写像は他の特異点を持つことができるが、写像の特異点が高々折り目型・カスプ型しか現れない条件はジェネリックになっていることがホイットニーによって明らかにされている。

定理 2.1 (Whitney). ジェネリックな写像  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  と  $f$  の任意の特異点  $a \in \mathbb{R}^2$  について、 $f$  の  $a$  における写像芽は原点における写像芽  $g(x, y) = (x, y^2)$  (折り目型) または  $g(x, y) = (x, x^3 - xy)$  (カスプ型) に  $\mathcal{A}$ -同値である。

## 3 ローレンツ空間の微分幾何学

ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  の擬内積を  $\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$  と表す。 $\mathbb{R}_1^{n+1}$  のベクトル  $v \neq 0$  について  $\langle v, v \rangle$  の符号が正、負または 0 である場合にそれぞれ空間的、時間的または光的と呼ぶ。 $N$  をミンコフスキー空間、双曲空間、ド・ジッター空間のいずれかとし、 $N$  の部分多様体  $M$  は埋め込み写像  $f : U \rightarrow S_1^n$  の像で与えられているとする。部分多様体  $M$  が空間的であるとは、各点  $p \in M$  での接ベクトル  $v \neq 0$  がすべて空間的であることをいう。このとき埋め込み写像  $X$  から定まる部分多様体  $M$  の誘導計量  $ds^2$  は正定値計量 (リーマン計量) であることが分かる。部分多様体  $M$  が時間的であるとは誘導計量が指数 1 の非退化計量、 $M$  が光的であるとは退化次数 1 の退化した半正定値計量となる場合である。

泉屋ら [6] は曲面の時間的法線写像  $e : U \rightarrow H_+^n(-1)$  を用いて光錐ガウス像  $\mathbb{L}^\pm(u) = X(u) + e(u)$  を定義した。このとき光錐ガウス像の微分写像 (型作用素) の固有値の積によって光的ガウス曲率が定義される。光錐ガウス像の特異点は光的ガウス曲率 0 の点と対応する。一方ベクトル  $v \in LC^*$  をパラメータにとるローレンツ計量に関する光錐高さ関数族  $H : U \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H(u, v) = h_v(u)$  を定義することができる。 $N$  が双曲空間、ド・ジッター空間のいずれかとき、 $N$  と  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  の光的超平面との共通部分は多様体となり、ホ口超球面と呼ばれる。ホ口超球面の型作用素は恒等的に消えていることが分かる。

さて  $n = 3$  の場合について、ジェネリックな曲面  $X$  の光錐ガウス像に現れる特異点はカスピダルエッジ型とスワローテイル型がある。ここで写像芽  $f : (\mathbb{R}^2, a) \rightarrow (\mathbb{R}^3, b)$  がカスピダ

ルエッジ型であるとは原点における写像芽  $g(x, y) = (x, y^2, y^3)$  と  $\mathcal{A}$ -同値であるときで、 $f$  がスワローテイル型であるとは  $g(x, y) = (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$  と  $\mathcal{A}$ -同値であるときを言う。スワローテイル型は孤立特異点で、2 方向にカスピダルエッジ型に分岐し、その像に自己交差を持つ。

定理 3.1 ([6]).  $X$  を 3 次元双曲空間  $H_+^n(-1)$  のジェネリックな空間的超曲面のパラメーターとする。このとき曲面上の放物点の集合は正則曲線をなし、どちらか一方の主曲率は 0 ではない。光錐ガウス像に現れる特異点は高々カスピダルエッジ型とスワローテイル型のみである。この時  $h_v(u)$  は夫々原点における関数芽  $h(x, y) = x^2 + y^3$ ,  $h(x, y) = x^2 \pm y^4$  と  $\mathcal{K}$ -同値になる。

尚、一般的な次元での  $\mathcal{A}$ -同値類による分類はルジャンドルはめ込み芽のルジャンドル安定性、または高さ関数族の  $\mathcal{K}$ -普遍性を必要とする (ここでは単に安定性と呼ぶことにする)。次元が十分高くなると現れる特異点の  $\mathcal{A}$ -同値類が実数パラメータを持つまでに多くなる ([1] 参照)。

一方、双曲空間内での特異点論を用いた研究はド・ジッター空間の空間的超曲面においても適用できる。

定理 3.2 ([10]). 3 次元ド・ジッター空間  $S_1^3$  のジェネリックな空間的超曲面の光錐ガウス像についても高々カスピダルエッジ型とスワローテイル型の特異点が存在する。

一方、多様体  $M \subset N$  の余次元  $r$  が 2 以上の場合法方向は自由度を持つため一方向に定まらないが、 $M$  上の各点から距離が一定の法方向の軌跡を考えることで管状超曲面を構成することができる。[8] では双曲空間内の部分多様体の空間的管状曲面が構成されている。

余次元  $r$  の空間的部分多様体  $M$  は  $X : U \rightarrow N$  でパラメータ付けされているとする。曲面上の各点  $p$  における単位法方向はパラメータ  $\mu$  をつけて  $e(u, \mu)$  と書く、ただし  $e(u, \mu)$  は平行条件  $\partial e(u, \mu)/\partial u_i \in T_p M$  を満たすものとする。 $e(u, \mu)$  が時間的 (または空間的) なとき、空間的 (時間的) 管状超曲面はそれぞれ  $\bar{X}_{CM}^s(u, \mu) = \cosh \theta X(u) + \sinh \theta e(u, \mu)$ ,  $\bar{X}_{CM}^t(u, \mu) = \cos \theta X(u) + \sin \theta e(u, \mu)$  で与えられる。管状超曲面そのものは特異点を持つ場合があり、その条件は空間的部分多様体の法方向  $e(u, \mu)$  に関する主曲率の値と管状超曲面の半径を表すパラメータ  $\theta$  と関係する。ここでは管状超曲面そのものの特異点を避けるために管状超曲面が正則になるように制限をしておく。

空間的管状超曲面には光錐ガウス写像・ガウス曲率が定められるが、空間的部分多様体は法方向  $e(u, \mu)$  に関する型作用素の固有値によって主曲率が定められる。両者には次の関係がある。

命題 3.3 ([11]). 空間的管状超曲面の光錐ガウス像に特異点を持つ (光的ガウス曲率が 0 になる) 必要十分条件は空間的部分多様体のある光的法方向  $e(u, v)$  に関する光的の主曲率が 0 になることである。特に光錐ガウス像の  $\text{corank}$  は部分多様体の光的の主曲率 0 の重複度に一致する。

一方、時間的管状超曲面については [9] からド・ジッター=ガウス像やド・ジッターガウス曲率・主曲率が定義されている。空間的部分多様体の時間的法方向  $e(u, \mu)$  についても同様に考えることができる。

命題 3.4 ([12]). 時間的管状超曲面のド・ジッター=ガウス像に特異点が存在する必要十分条件は対応する空間的部分多様体のある空間的法方向  $e(u, v)$  に関する主曲率のひとつが  $\tan \theta$  の値をとることである。特にド・ジッター=ガウス像の  $\text{corank}$  はこの主曲率の重複度に一致する。

今後の研究課題としている光的曲面についてはこれまでの方法は通用しない。その理由の一つが光的曲面  $M$  の計量は光的な（退化する）方向と空間的な方向が存在することである。曲面にそった光的な曲線  $\gamma(t) : I \rightarrow M$  を伸ばすと、誘導計量におけるこの曲線の長さは消えてしまうことがすぐに分かる。しかしながら  $\sqrt{\|\gamma''(t)\|}$  ( $\gamma''(t)$  は二階導関数) の積分で定義される曲線の光的長さはパラメータ  $t$  の取り方によらないことが知られている。ロメロ・フスターら [14] は 3 次元ユークリッド空間内の曲面  $N$  からド・ジッター空間への光的曲面  $M$  を構成し、 $M$  の光的長さが  $N$  のメビウス変換に関して不変になることを示している。

## 参考文献

- [1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differential Maps, Volume I, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, Cusps of Gauss mappings, Research Notes in Mathematics 55, Pitman, London, 1982.
- [3] D. Bleeker and L. Wilson, Stability of Gauss maps, Illinois J. Math. 22 (1978) 279–289.
- [4] L. Chen, On geometry of general surfaces in Anti de Sitter 3-space, preprint
- [5] S. Izumiya, Differential geometry from the view point of Lagrangian or Legendrian singularity theory, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [6] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, Singularities of hyperbolic Gauss maps, Proc. London Math Soc. 86 (2003) 485–512.
- [7] S. Izumiya and H. Yildirim, Slant geometry of spacelike hypersurface in the lightcone, J. Math Soc Japan, (3) 63 (2011) 715–752.
- [8] S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space, J. London Math. Soc. (2) 71 (2005) 779–800.
- [9] S. Izumiya, Time-like hypersurfaces in de Sitter space and Legendrian singularities, J. Math. Sci. (1) 144 (2007) 3789–3803.
- [10] M. Kasedou, Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space, J. of Geom 94 Issue 1 (2009) 107–121.
- [11] M. Kasedou, Spacelike submanifolds in de Sitter space, Demonstratio Mathematica (2) 43 (2010) 401–418.
- [12] M. Kasedou, Timelike canal hypersurfaces of spacelike submanifolds in a de Sitter space, Contemporary Mathematics 569 (2012) American Mathematical Society
- [13] I.R. Porteous, Geometric Differentiation, Cambridge university press.
- [14] M.C. Romero Fuster and E. Sanabria Codesal, Conformal invariants interpreted in de Sitter space. Mat. Contemp. 35 (2008) 205–220.
- [15] 泉屋周一、石川剛郎、応用特異点論、共立出版、1998
- [16] 野口広、福田拓生、初等カタストロフィー（復刊）、共立出版、2002

# 格子上のラプラシアンの特クトル解析

竹内 祐太

信州大学理工学系研究科

**概要:** 物質中の原子を頂点、原子間の結合を辺と考えて得られるグラフのラプラシアンの特クトルは、物質中の電子のエネルギーを近似的に表すと考えられる。本講演では、グラフエンと呼ばれる物質に水素を付加して構造を変化させるとき、グラフのラプラシアンの特クトルがどのように変化するかについて考察する。

## 1 はじめに

原子を頂点、原子と原子の結びつきを辺と考えると、物質の構造をグラフとして数学的に取り扱うことができる。例えば、グラフエンと呼ばれる物質は、六角格子状に炭素が並んだ構造をしている。また、グラフエンの各炭素原子に、水素原子を付加してできる物質はグラフェインと呼ばれる。

本講演では、六角格子の頂点に新たな頂点を付加してできるグラフの特クトルを解析する。

一般に、グラフ  $G = (V(G), E(G))$  は頂点の集合  $V(G)$  と辺の集合  $E(G)$  からなり、2 頂点  $x, y \in V(G)$  に対して、 $x$  と  $y$  を結ぶ辺があるとき、その辺を  $\{x, y\} \in E(G)$  のように書く。また、2 頂点  $x, y \in V(G)$  を結ぶ辺  $\{x, y\} \in E(G)$  が存在するとき、 $x \sim y$  と書く。頂点  $x \in V(G)$  の次数  $\deg x$  を  $x$  と結ばれている頂点の数によって定義する。つまり、 $\deg x = \#\{y | y \sim x\}$  である。一般に、全ての頂点の次数が有限であるグラフを局所有限といい、頂点の集合  $V(G)$  が有限集合であるようなグラフを有限グラフという。有限グラフでないグラフを無限グラフという。

$\mathbb{Z}$  をグラフと見るときは、 $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  として、互いに隣り合う整数を辺で結ぶ。即ち、 $n \sim m$  であることは  $|n - m| = 1$  という事に他ならない。したがって、全ての頂点の次数は 2 であり、グラフ  $\mathbb{Z}$  は局所有限な無限グラフである。

グラフ  $G$  は局所有限であるとする。このとき、 $G$  上のラプラシアン  $-\Delta_G$  を

$$(-\Delta_G \psi)(x) := \frac{1}{\deg x} \sum_{y \sim x} \{\psi(x) - \psi(y)\}, \quad \psi \in \ell^2(V(G))$$

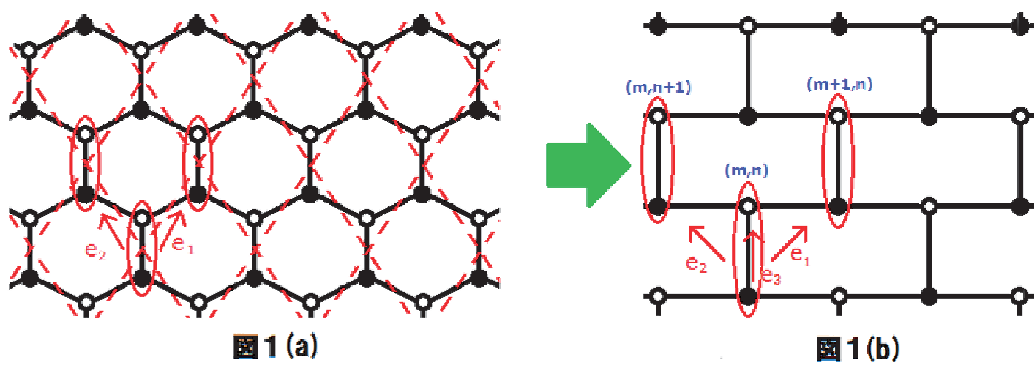
によって定義する。ここで

$$\ell^2(V(G)) = \{\psi; V(G) \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in V(G)} |\psi(x)|^2 \deg x < \infty\}$$

は内積

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_{x \in V(G)} \overline{\psi(x)} \phi(x) \deg x$$

を持つヒルベルト空間である。グラフ  $G$  上のラプラシアン  $-\Delta_G$  は、 $G$  上を運動する粒子のハミルトニアンと考えることができる。 $-\Delta_G$  は有界な自己共役作用素であることが知られている。



六角格子の頂点は、図 1 (a) のように二つの頂点の対が二つのベクトル  $(e_1, e_2)$  による平行移動で生成されていると考えることができる。また、図 1(b) のように変形を行う。図 1(b) のグラフを  $G_0$  とすると、

$$V(G_0) = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\} = \{(m, n, s) \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2, s \in \{0, 1\}\}$$

$$E(G_0) = \{\{x, y\} \mid x \sim y\}$$

ここで、 $(m, n, s) \in V(G_0)$  は、 $s = 0$  のとき  $(m, n)$  内の●を、 $s = 1$  のとき  $(m, n)$  内の○を表す。また、 $x \sim y$  は次のいずれかを満たす。

- (i)  $x = (m, n, 0) \Rightarrow y = (m, n, 1)$ , または  $y = (m, n - 1, 1)$ , または  $y = (m - 1, n, 1)$ ,
- (ii)  $x = (m, n, 1) \Rightarrow y = (m, n, 0)$ , または  $y = (m, n + 1, 0)$ , または  $y = (m + 1, n, 0)$

$$\begin{array}{ccc} \{me_1 + ne_2 + se_3 \mid (m, n, s) \in \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\} \\ \Psi & & \Psi \\ me_1 + ne_2 + se_3 & \longmapsto & (m, n, s) \end{array}$$

このとき、 $G_0$  は局所有限な無限グラフである。 $-\Delta_{G_0}$  のスペクトル  $\sigma(-\Delta_{G_0})$  はよく知られていて、

$$\sigma(-\Delta_{G_0}) = [0, 2]$$

となる。

## 2 主結果

$G_0$  に新たな頂点を付加したグラフを考える。

グラフ  $G_0$  を変形してスペクトルを考えよう。簡単のため、頂点  $x_0 = (0, 0, 0) \in V(G_0)$  にひとつのペンダント辺を付けたグラフ  $G_1$  を考える。ここで、次数 1 の頂点を結ぶ辺のことをペンダント辺という。グラフ  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  を次の性質によって定める。

- $V(G_1) \subset G_0 \times \{0, 1\}$  は

$$V(G_1) = \{(x, 0) \mid x \in G_0\} \cup \{(x_0, 1)\}.$$

- $\deg(x_0, 1) = 1$  かつ

$$\deg(x, 0) = \begin{cases} 3, & x \neq x_0 \\ 4, & x = x_0 \end{cases}$$

が成り立つ.

- $(x_0, 1) \sim (x_0, 0)$  であり,  $(x, 0) \sim (y, 0)$  が成り立つのは,  $x \sim y$  のときに限る.

このグラフは,  $\{(x, 0) \mid x \in G_0\}$  を  $G_0$  と同一視して, これらの頂点は  $G_0$  と同じように辺で結び,  $x \in V(G_0)$  と同一視される頂点  $(x_0, 0) \in V(G_1)$  に次数 1 の頂点  $(x_0, 1) \in V(G_1)$  を結ぶペンダント辺を付けたものである.

**定理 1** グラフ  $G_1$  上のラプラシアン  $-\Delta_{G_1}$  について, 次の関係が成り立つ.

$$\sigma(-\Delta_{G_1}) = [0, 2].$$

この定理は, 上のような変形に対して, スペクトルは不変であることをいっている. 以下で述べる方法と同様にし, 有限個のペンダント辺を重ならないようにつけたグラフについても, スペクトルの不変性が示される. また,  $G_0$  のかわりに  $\mathbb{Z}^2$  を考えたものでも同様のことが言えるが, 無限個の頂点を付けるような変形に対しては, ペンダント辺の配置によって, スペクトルの不変性が成り立つ場合と成り立たない場合がある. 特に, 六角格子にペンダント辺を付けて得られるグラフ上のラプラシアンは, グラフェンやグラフェイン中を運動する電子のハミルトニアンと関係していて, 応用上も興味深い. ここで考えたグラフ  $G_1$  などは, その単純化とみることができる.

以下では,  $G_0$  に周期的にペンダント辺を加えたグラフを考察していく.

(i) まず, 既知の結果から述べる.

$G_0$  の全ての頂点にペンダント辺を付加したグラフ  $G_{100}$  は,

$$V(G_{100}) = \{(x, s) \mid x \in V(G_0), s \in \{0, 1\}\}$$

のような頂点を持つ. この場合は,

$$\sigma(-\Delta_{G_{100}}) = \left[0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, 2\right]$$

が知られている.

(ii) 以下,  $V(G_0)$  に 25%, 50%, 75% の割合でペンダント辺を付加したグラフを考える ( $G_0$  は 0%,  $G_{100}$  は 100% と考える.).

(a) 50% の場合

付加率が 50% であるようなペンダント辺の付加の仕方はいくつかあるが, まず, このようなグラフとして次のようにして定義される  $G_{50}^{(0)}$  を考える.  $G_{50}^{(0)}$  は  $G_0$  の●にペンダント辺を加えたものと定義する. この場合,

$$\sigma(-\Delta_{G_{50}^{(0)}}) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

となる, 特に 1 は  $-\Delta_{G_{50}^{(0)}}$  の固有値である.

次に,  $G_{50}^{(1)}$  と  $G_{50}^{(2)}$  を考える. これらは, FIG2(a1),(a2) のようにペンダント辺を付加して, 周期的に拡張したものである.

これらについては, 数値計算による結果が得られている. FIG2(b1), (b2) のグラフの値域がラプラシアンのスペクトルに対応しており,  $-\Delta_{G_{50}^{(1)}}$  はスペクトルギャップを持つが,  $-\Delta_{G_{50}^{(2)}}$  はスペクトルギャップを持たないことがわかる.

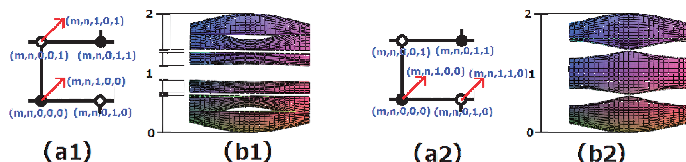


FIG.2

(b) 25%, 75% の場合

25% と 75% の割合で付加したモデルを考える, (a) と同様に考え, それぞれのモデルと計算した結果得られ

た値域を FIG.3 に示す.

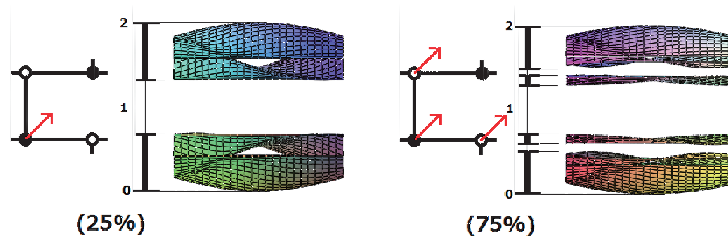


FIG.3

## 参考文献

- [1] 安藤和典, 六角格子上的シュレディンガー作用素のスペクトルについて, 2010
- [2] 青木利夫・高橋渉, 集合位相空間要論, 1979
- [3] 新井朝雄, ヒルベルト空間と量子力学, 1997
- [4] 浦川 肇, ラプラス作用素とネットワーク, 1996
- [5] A systematic study of electronic structure from graphen to graphane J.Phys.:Condens. Matter 22, 2010

# DYNAMICAL CONSTRUCTION OF NUMERICAL KÄHLER-EINSTEIN METRIC ON TORIC DEL PEZZO SURFACES

The 9th Mathematics Conference for Young Researchers

Graduate school of science, Osaka university

Homare TADANO\*

## Abstract

In this note we give explicit numerical solutions for the Kähler-Einstein equation on three points blowing-up  $\mathbb{CP}^2 \# 3\overline{\mathbb{CP}^2}$  of the complex projective plane. This note is based on a joint work with Professor Toshiki Mabuchi.

Let  $X$  be a del Pezzo surface, i.e., a compact connected complex surface with  $c_1(X) > 0$ . For each Kähler form  $\omega$  in the anticanonical class of  $X$ , we have the corresponding Ricci form  $\text{Ric}(\omega)$  cohomologous to  $\omega$ . Then  $\omega$  is said to be a **Kähler-Einstein form** if it satisfies the following Kähler-Einstein equation:

$$(1) \quad \text{Ric}(\omega) = \omega.$$

Let  $\square_j := \bar{\square}_j \setminus \partial \square_j$  be the interior of  $\bar{\square}_j$ , where  $\bar{\square}_j$  is the compact convex polygon in  $\mathbb{R}^2 = \{(u, v)\}$  defined by

$$\bar{\square}_j := \begin{cases} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \leq 1, u \geq -1, v \geq -1\}, & j = 1, \\ \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u| \leq 1, |v| \leq 1\}, & j = 2, \\ \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u + v| \leq 1, |u| \leq 1, |v| \leq 1\}, & j = 3. \end{cases}$$

For each  $\bar{\square}_j$  as above, by setting  $\bar{\square}_j \cap \mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N\}$  and  $\mathbf{a}_i = (a_i^1, a_i^2)$ ,  $0 \leq i \leq N$ , we define

$$X_j := \text{closure of } \left\{ \left[ z_1^{a_0^1} z_2^{a_0^2} : \dots : z_1^{a_N^1} z_2^{a_N^2} \right] : (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \right\} \text{ in } \mathbb{CP}^N.$$

Then  $X_j$  is called a **toric projective variety** with a convex polytope  $\bar{\square}_j$ . It is known that  $X_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , are biholomorphic to

$$(2) \quad \mathbb{CP}^2 \quad (j = 1), \quad \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \quad (j = 2), \quad \mathbb{CP}^2 \# 3\overline{\mathbb{CP}^2} \quad (j = 3).$$

In the 1980s, Siu [4] and Tian-Yau [5] proved that  $\mathbb{CP}^2 \# 3\overline{\mathbb{CP}^2}$  admits a Kähler-Einstein metric. Every toric del Pezzo surface which admit a Kähler-Einstein metric is one of the (2) above. Since the Fubini-Study metric is already known as a typical Kähler-Einstein metric, we here consider a Kähler-Einstein metric on  $X_3 \simeq \mathbb{CP}^2 \# 3\overline{\mathbb{CP}^2}$ . Note that  $K := S^1 \times S^1 = \{(s, t) \in \mathbb{C}^2 : |s| = 1, |t| = 1\}$  acts on  $X_3$  by

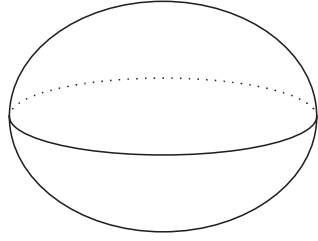
$$(3) \quad (s, t) \cdot [\zeta_0 : \zeta_1 : \dots : \zeta_6] = [s^{-1}t\zeta_0 : t\zeta_1 : s^{-1}\zeta_2 : \zeta_3 : s\zeta_4 : t^{-1}\zeta_5 : st^{-1}\zeta_6].$$

---

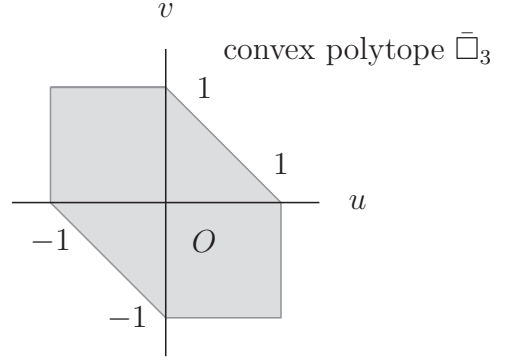
\*h-tadano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

The image of a moment map  $\mu : X_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  under this action (3) is the convex polytope  $\bar{\square}_3$  above.

toric projective variety  $X_3$



$\mu$   
moment map



We consider a Kähler-Einstein form  $\omega$  on  $X_3$  in the class  $2\pi c_1(X_3)$  invariant under the action of  $K = S^1 \times S^1$  and  $D_6$ , where  $D_6$  denotes the dihedral group of order 12. Such invariance is obtained by the uniqueness theorem of [1]. As shown in [2], the Einstein equation (1) on  $X_3$  is reduced to the following real Monge-Ampère equation on  $\bar{\square}_3$ :

$$(MA) \quad \begin{cases} \det \begin{pmatrix} H_{vv} - \frac{1}{3}u^2 & H_{uv} + \frac{1}{3}uv \\ H_{uv} + \frac{1}{3}uv & H_{uu} - \frac{1}{3}v^2 \end{pmatrix} = H - uH_u - vH_v & \text{on } \square_3, \\ H - uH_u - vH_v = 0 & \text{on } \partial\square_3, \end{cases}$$

where  $H$  is an analytic function defined on  $\bar{\square}_3$  obtained from a Kähler potential of  $\omega$ .

**MAIN THEOREM A.** *We have an explicit super-solution  $\bar{H} = \bar{H}(u, v)$  and sub-solution  $\underline{H} = \underline{H}(u, v)$  defined on  $\bar{\square}_3$  satisfying*

$$\underline{H}(u, v) \leq H(u, v) \leq \bar{H}(u, v) \quad \text{on } \bar{\square}_3, \quad \max_{(u,v) \in \bar{\square}_3} \left( \bar{H}(u, v) - \underline{H}(u, v) \right) < 0.00001,$$

where  $H = H(u, v)$  is the solution of (MA).

We can not distinguish between the super-solution and the sub-solution:

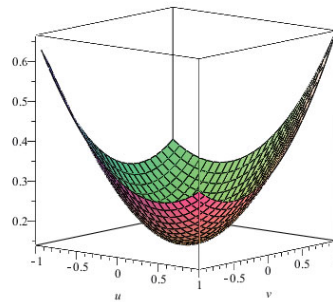
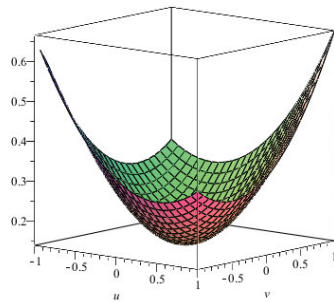
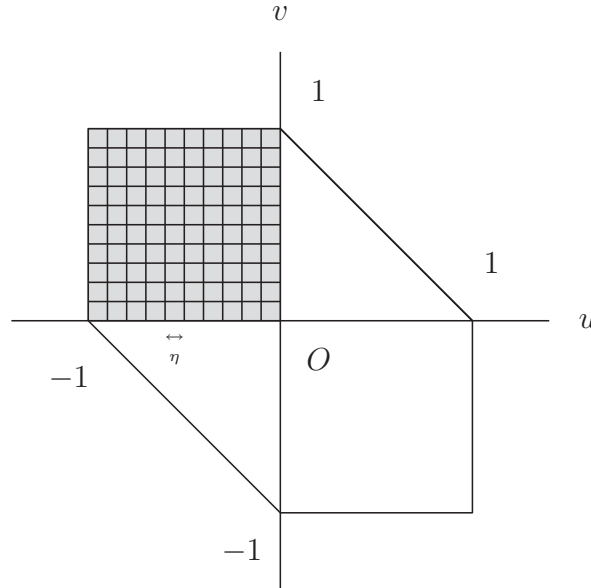


Figure : (Left) The super-solution. (Right) The sub-solution.

By  $D_6$ -invariability of  $H$ , we only consider on the closed domain

$$D := \{(u, v) \in \bar{\square}_3 : u \leq 0, 0 \leq v\}.$$

To obtain a better numerical solution for (MA), we set a lattice coordinate on  $D$  as follows:



Here  $\eta$  is a interval of a lattice coordinate. By approximating (MA) on the diagonal line, we also have some recurrence relations which allow us to obtain a better numerical solution for (MA):

**MAIN THEOREM B.** *A better numerical solution for (MA) can be obtained by a dynamical construction using recurrence relations.*

## REFERENCES

- [1] S. Bando and T. Mabuchi, Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions, in Algebraic Geometry, Sendai (1985), 11-40, *Adv. Stud. Pure Math.*, **10**, Kinokuniya and North-Holland, Tokyo and Amsterdam (1987).
- [2] T. Mabuchi, An affine sphere equation associated to Einstein toric surfaces, in *Proc. 4th ICCM*, vol. I (2008), 206-215.
- [3] ———, Einstein-Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties, *Osaka J. Math.*, **24** (1987), 705-737.
- [4] Y. -T. Siu, The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anti-canonical line bundle and a suitable finite symmetry group, *Ann. Math.*, **127** (1988), 585-627.
- [5] G. Tian and S. -T. Yau, On Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with  $C_1 > 0$ , *Commun. Math. Phys.*, **112** (1987), 175-203.



# 超幾何微分方程式の Voros 係数の Borel 和

反田 美香\*

近畿大学大学院総合理工学研究科

## 1 はじめに

この報告では大きなパラメータを導入した超幾何微分方程式の Voros 係数を各特異点で定義し具体系をそれぞれ求め, Voros 係数の Borel 和を考察する. Voros 係数の概念は [5] に於いて導入された. Voros 係数およびその Borel 和は parametric Stokes phenomena と呼ばれる Schrödinger 形の方程式のパラメータを動かしたときの WKB 解の Stokes 現象を記述する為に利用されている ([2], [3], [4]). Voros 係数の Borel 和は各 Stokes 曲線の形状ごとに関数として異なるものが得られる. その為に Stokes 曲線におけるパラメータの依存性を考察し分類を行った ([1]). 今回の発表はこの Stokes 曲線の形状ごとに得られた超幾何微分方程式の Voros 係数の Borel 和をそれぞれ比較した. その結果の一例を紹介する. 本報告内容は青木貴史との共同研究であり, 主に [1] に基づいている.

## 2 Large parameter を含む超幾何微分方程式と Voros 係数

一般的な定数  $a, b, c \in \mathbb{C}^3$  における古典的超幾何微分方程式:

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dw}{dx} - abw = 0 \quad (2.1)$$

に大きなパラメータ  $\eta$  を  $a = 1/2 + \eta\alpha$ ,  $b = 1/2 + \eta\beta$ ,  $c = 1 + \eta\gamma$  と導入する. ここで  $\alpha, \beta, \gamma$  は複素数である. また, 未知関数の変換  $\psi = x^{\frac{1}{2} + \frac{\eta\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2} + \frac{\eta(\alpha+\beta-\gamma)}{2}}w$  により一階項を消去することにより次の方程式を得る:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q\right)\psi = 0. \quad (2.2)$$

ここで  $Q = Q_0 + \eta^{-2}Q_1$  であり,

$$Q_0 = \frac{(\alpha - \beta)^2 x^2 + 2(2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma)x + \gamma^2}{4x^2(x-1)^2}, Q_1 = -\frac{x^2 - x + 1}{4x^2(x-1)^2}. \quad (2.3)$$

である. 方程式 (2.2) は WKB 解と呼ばれる形式解

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp(\pm \int_{a_k}^x S_{\text{odd}} dx) \quad (2.4)$$

を持つ. ただし,  $S_{\text{odd}}$  は (2.2) に付随する Riccati 方程式  $\frac{dS}{dx} + S^2 = \eta^2 Q$  の  $\eta^{-1}$  に関する形式的冪級数解  $S = \sum_{h=-1}^{\infty} \eta^{-h} S_h$  の奇数次部分であり,  $a_k$  ( $k = 0, 1$ ) は方程式 (2.2) の変わり点の一つであり,  $Q_0$  の零点と呼ばれる. 方程式 (2.2) の  $(b_j, a_0)$  ( $j=0,1,2$ ) に関する Voros 係数を

$$V_j = V_j(\alpha, \beta, \gamma) := \frac{1}{2} \int_{b_j}^{a_0} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx,$$

により定める. ただし  $b_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) は特異点であり,  $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = \infty$  である. ここで右辺の被積分関数に現れる  $S_{\text{odd}}$  と  $\eta S_{-1}$  の 0 における留数が等しいため積分は収束し,  $V_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) は  $\eta^{-1}$  の形式的冪級数となる.  $V_j$  ( $j=0,1,2$ ) とは  $a_0$  で規格化した WKB 解析と各特異点  $0, 1, \infty$  で規格化したものの違いを表すものである. すなわち

---

\*tanda@math.kindai.ac.jp

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_{a_0}^x S_{\text{odd}} dx\right), \quad \psi_{\pm}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_j^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \pm \eta \int_{a_0}^x S_{-1} dx\right)$$

と定めると関係式  $\psi_{\pm}^{(j)} = \exp(\pm V_j) \psi_{\pm}$  を満たす. Voros 係数  $V_j$  の具体的な形は次のように表される

**定理 2.1.**  $(h, a_0)$  ( $h = 0, 1, 2$ ) に関する Voros 係数  $V_j$  は次のような表示式を持つ:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n(n-1)} \eta^{1-n} \left\{ (1 - 2^{1-n}) \left( \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{n-1}} + \frac{1}{(\gamma - \alpha)^{n-1}} + \frac{1}{(\gamma - \beta)^{n-1}} \right) + \frac{2}{\gamma^{n-1}} \right\}, \\ V_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n(n-1)} \eta^{1-n} \left\{ (1 - 2^{1-n}) \left( \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{n-1}} - \frac{1}{(\gamma - \alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(\gamma - \beta)^{n-1}} \right) + \frac{2}{(\alpha + \beta - \gamma)^{n-1}} \right\}, \\ V_2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n(n-1)} \eta^{1-n} \left\{ (1 - 2^{1-n}) \left( \frac{1}{\alpha^{n-1}} - \frac{1}{\beta^{n-1}} - \frac{1}{(\gamma - \alpha)^{n-1}} + \frac{1}{(\gamma - \beta)^{n-1}} \right) - \frac{2}{(\beta - \alpha)^{n-1}} \right\}. \end{aligned}$$

ここで  $B_n$  は Bernoulli 数であり次の関係式により定義する:

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

### 3 Stokes graphs

この節では (2.2) の Stokes グラフのパラメータ  $\beta, \alpha, \gamma$  における特徴付けを行う. 変わり点  $a_h$  ( $h = 0, 1$ ) から生じる Stokes 曲線とは

$$\text{Im} \int_{a_h}^x \sqrt{Q_0} dx = 0$$

で定まる曲線である. Stokes 曲線は特異点または変わり点に流れ込む. 2つの変わり点  $a_0, a_1$ , 変わり点から生じるすべての Stokes 曲線および特異点  $0, 1, \infty$  のなすグラフを Stokes グラフと呼ぶ. ここでパラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  における集合  $E_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) を次のように定める:

$$E_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \gamma) \cdot (\alpha + \beta - \gamma) \neq 0\}, \quad (3.1)$$

$$E_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re} \alpha \cdot \text{Re} \beta \cdot \text{Re}(\gamma - \alpha) \cdot \text{Re}(\gamma - \beta) \neq 0\}, \quad (3.2)$$

$$E_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}(\alpha - \beta) \cdot \text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \cdot \text{Re} \gamma \neq 0\}. \quad (3.3)$$

もし  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が  $E_0$  に含まれるならば, 2つの相異なる変わり点  $a_0, a_1$  があり  $a_0, a_1 \neq 0, 1, \infty$  である. さらに,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が  $E_1 \cup E_2$  に含まれないならば, Stokes 幾何は退化する.

パラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が  $E_0 \cup E_1 \cup E_2$  に含まれると仮定する. Stokes グラフはそれぞれの特異点  $0, 1, \infty$  に流れ込む Stokes 曲線の本数の列  $\hat{n} = (n_0, n_1, n_2)$  (これを Stokes グラフの指数という) により分類できる. 次にパラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  の集合  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) を次のように定義する:

$$\omega_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \text{Re} \alpha < \text{Re} \gamma < \text{Re} \beta\}, \quad \omega_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \text{Re} \alpha < \text{Re} \beta < \text{Re} \gamma < \text{Re} \alpha + \text{Re} \beta\},$$

$$\omega_3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \text{Re} \gamma < \text{Re} \alpha < \text{Re} \beta\}, \quad \omega_4 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re} \gamma - \text{Re} \beta < \text{Re} \alpha < 0\}.$$

また,  $Q$  は 以下のような  $\iota_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) で不変である:

$$\begin{aligned} \iota_0 : (\alpha, \beta, \gamma) &\mapsto (\beta, \alpha, \gamma), \\ \iota_1 : (\alpha, \beta, \gamma) &\mapsto (\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma), \\ \iota_2 : (\alpha, \beta, \gamma) &\mapsto (-\alpha, -\beta, -\gamma). \end{aligned}$$

$G$  を  $\iota_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) で生成される群とし,  $\Pi_k$  を次のように定義する:

$$\Pi_k = \bigcup_{r \in G} r(\omega_k) \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (3.4)$$

Stokes グラフの指数は以下のようにパラメータによって特徴付けられる.

**定理 3.1.** Stokes グラフの指数を  $\hat{n}$  とする

- (1)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_1$  のとき  $\hat{n} = (2, 2, 2)$  である.
- (2)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_2$  のとき  $\hat{n} = (4, 1, 1)$  である.
- (3)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_3$  のとき  $\hat{n} = (1, 4, 1)$  である.
- (4)  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_4$  のとき  $\hat{n} = (1, 1, 4)$  である.

注意 3.2.  $\operatorname{Re} \gamma > 0$  と固定したとき,  $\alpha, \beta$  の実部の平面で  $\omega_k$  と  $\Pi_k$  は 図 3.1 のようになる.

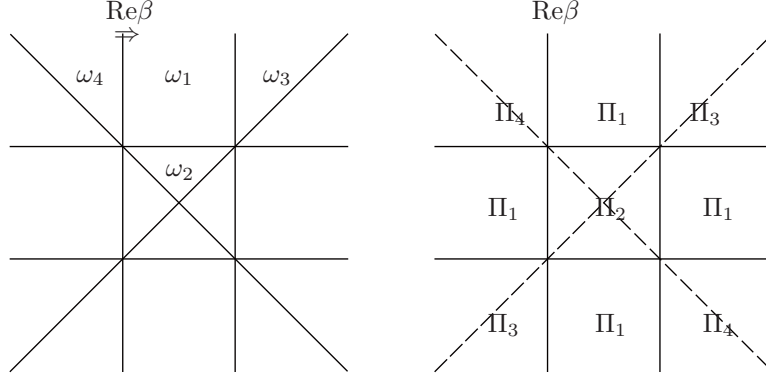


図 3.1

ここでは, 図 3.1 の左図のように パラメータが  $\omega_4$  から境界を経て  $\omega_1$  に変化するときの Voros 係数の Borel 和の解析接続を考察する.  $\omega_1, \omega_4$  および境界上にパラメータをとると Stokes グラフはそれぞれ図 3.2 のようになる.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-0.1, 2, 1)$$

$$(0 + \epsilon i, 2, 1)$$

$$(0.1, 2, 1)$$

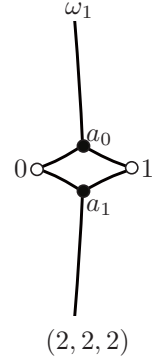
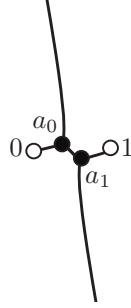
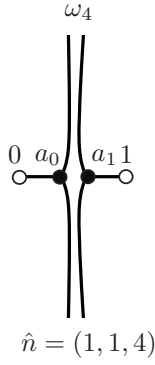


図 3.2

ここで黒丸は変わり点, 白丸は特異点,  $\epsilon > 0$  である. 境界上にパラメータをとると図 3.2 中央図のように Stokes グラフは退化する.

## 4 Voros 係数の Borel 和

この節では  $\omega_1$  および  $\omega_4$  における Voros 係数の Borel 和を計算し, 比較を行う. ここで  $V_j^1$  (resp.  $V_j^4$ ) を  $\omega_1$  (resp.  $\omega_4$ ) における Voros 係数の Borel 和とする ( $j = 0, 1, 2$ ).

定理 4.1.  $\omega_1$  (resp.  $\omega_4$ ) における Voros 係数  $V_j$  の Borel 和を  $V_j^1$  (resp.  $V_j^4$ ) とすると次のような式が成り立つ:

$$\begin{aligned} V_0^1 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta) \Gamma^2(\gamma\eta) \alpha^{\alpha\eta} \beta^{\beta\eta} (\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta} \eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta) (\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta} \gamma^{2\gamma\eta - 1}}, \\ V_0^4 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (-\alpha)\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta) \Gamma^2(\gamma\eta) \beta^{\beta\eta} (\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta} \eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta) (-\alpha)^{-\alpha\eta} (\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta} \gamma^{2\gamma\eta - 1} 2\pi}, \\ V_1^1 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta) \Gamma^2((\alpha + \beta - \gamma)\eta) \alpha^{\alpha\eta} \beta^{\beta\eta} (\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta} \eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta) (\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta} (\alpha + \beta - \gamma)^{2(\alpha + \beta - \gamma)\eta - 1}}, \\ V_1^4 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (-\alpha)\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta) \Gamma^2((\alpha + \beta - \gamma)\eta) \beta^{\beta\eta} (\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta} \eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta) (-\alpha)^{-\alpha\eta} (\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta} (\alpha + \beta - \gamma)^{2(\alpha + \beta - \gamma)\eta - 1} 2\pi}, \\ V_2^1 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta) \alpha^{\alpha\eta} (\beta - \alpha)^{2(\beta - \alpha)\eta - 1}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha\eta) \Gamma^2((\beta - \alpha)\eta) \beta^{\beta\eta} (\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta} (\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta} \eta}, \\ V_2^4 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (-\alpha)\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta) \Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta) (\beta - \alpha)^{2(\beta - \alpha)\eta - 1}}{\Gamma^2((\beta - \alpha)\eta) (-\alpha)^{\alpha\eta} \beta^{\beta\eta} (\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta} (\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta} 2\pi}. \end{aligned}$$

ここでは Voros 係数の Borel 和  $V_0^1$  と  $V_0^4$  の関係式を考察する. Voros 係数の Borel 和  $V_0^4$  が  $\omega_1$  に解析接続される. その解析接続と  $V_0^1$  を比較する.  $\text{Im } \alpha > 0$  の時,  $V_0^4$  を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} V_0^4 &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta)\Gamma(\frac{1}{2} + (-\alpha)\eta)\Gamma(\gamma\eta)^2(\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta}\beta^{\beta\eta}\eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta)\Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta)(\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta}(-\alpha)^{-\alpha\eta}\gamma^{2\gamma\eta - 1}2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta)\Gamma(\frac{1}{2} + (-\alpha)\eta)\Gamma(\gamma\eta)^2(\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta}\beta^{\beta\eta}\eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta)\Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta)(\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta}(\alpha)^{-\alpha\eta}\gamma^{2\gamma\eta - 1}2\pi} + \frac{\alpha\eta\pi i}{2}. \end{aligned}$$

この式から  $V_0^4$  を  $\omega_1$  に解析接続したものと  $V_0^1$  を比較すると以下ようになる:

$$\begin{aligned} V_0^1 - V_0^4 &= -\frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha\eta)\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha\eta)}{2\pi} - \frac{\alpha\eta\pi i}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log(e^{-2\alpha\eta\pi i} + 1). \end{aligned}$$

注意 4.2.  $V_0^4$  を  $\omega_1$  に解析接続したものと  $V_0^1$  を比較したとき次の関係式を利用する.

$$\Gamma(\frac{1}{2} + t)\Gamma(\frac{1}{2} - t) = \frac{\pi}{\cos \pi t}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

同様に  $\text{Im } \alpha < 0$  の時,  $V_0^4$  を以下のように書き換える.

$$V_0^4 = \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (\beta - \gamma)\eta)\Gamma(\frac{1}{2} + (-\alpha)\eta)\Gamma(\gamma\eta)^2(\gamma - \alpha)^{(\gamma - \alpha)\eta}\beta^{\beta\eta}\eta}{\Gamma(\frac{1}{2} + (\gamma - \alpha)\eta)\Gamma(\frac{1}{2} + \beta\eta)(\beta - \gamma)^{(\beta - \gamma)\eta}(\alpha)^{-\alpha\eta}\gamma^{2\gamma\eta - 1}2\pi} - \frac{\alpha\eta\pi i}{2}.$$

この式から  $V_0^4$  を  $\omega_1$  に解析接続したものと  $V_0^1$  を比較すると以下ようになる:

$$V_0^1 - V_0^4 = \frac{1}{2} \log(e^{2\alpha\eta\pi i} + 1).$$

$\omega_1$   $\omega_4$  における Voros 係数の Borel 和を計算し, 比較することにより次の定理を得る.

定理 4.3. Voros 係数の Borel 和  $V_j^1$  と  $V_j^4$  ( $j = 0, 1, 2$ .) を比較することにより以下の関係式を得る:

(1)  $\text{Im } \alpha > 0$  の時, 次の関係式を得る:

$$V_h^4 = -\frac{1}{2} \log(e^{-2\alpha\eta\pi i} + 1) + V_h^1.$$

(2)  $\text{Im } \alpha < 0$  の時, 次の関係式を得る:

$$V_h^4 = -\frac{1}{2} \log(e^{2\alpha\eta\pi i} + 1) + V_h^1.$$

定理の証明および他の場合の Voros 係数の Borel 和については現在準備中の論文に記載予定である.

## 参考文献

- [1] Aoki, T. and Tanda, M., Characterization of Stokes graphs and Voros coefficients of hypergeometric differential equations with a large parameter, *to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [2] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **43** (1993), 153–199.
- [3] Delabaere, E. and Pham, F., Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **71** (1999), 1–94.
- [4] Takei, Y., Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B10** (2008), 205–224.
- [5] Voros, A., The return of the quartic oscillator, The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), 211–338.

# 強独立な二分的部分基を持つハウスドルフ空間

京都大学大学院人間・環境学研究科 D1 塚本靖之\*

独立な二分的部分基から位相空間のドメイン表現を得ることを紹介し、強独立な二分的部分基をもつハウスドルフ空間が存在することを示す。

## 1 二分的部分基とその独立性

位相空間  $X$  を第 2 可算公理を満たすハウスドルフ空間とする。  $X$  の二分的部分基 (dyadic subbase)  $S$  とは、  $\omega \times 2$  ( $\omega$  は第 1 順序数) でラベル付けされた部分基  $S = \{S_{n,i}; n < \omega, i < 2\}$  であり、  $S_{n,0}, S_{n,1}$  が互いの外部であるようなものをいう。ここで、非負整数および  $\omega$  を、それより小さい非負整数の集合と同一視している。

二分的部分基  $S$  は、次を満たすとき独立であるという。

$$\bigcap_{k < n} S_{k,\sigma(k)} \neq \emptyset, \quad \forall n < \omega, \forall \sigma : n \rightarrow 2. \quad (1.1)$$

さらに、  $S_{n,\perp} = X \setminus (S_{n,0} \cup S_{n,1})$  において (記号 “ $\perp$ ” は「ボトム」と読み「定義されない」などの意),

$$\bigcap_{k < n} S_{k,\sigma(k)} \neq \emptyset, \quad \forall n < \omega, \forall \sigma : n \rightarrow \{0, 1, \perp\} \quad (1.2)$$

を満たすとき、強独立であるという。

例 1.1. 区間  $[0, 1]$  の通常の位相での独立な二分的部分基は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} S_{n,0} &:= \bigcup_{k < \omega} \left( \frac{4k-1}{2^{n+1}}, \frac{4k+1}{2^{n+1}} \right) \cap [0, 1], \\ S_{n,1} &:= \bigcup_{k < \omega} \left( \frac{4k+1}{2^{n+1}}, \frac{4k+3}{2^{n+1}} \right) \cap [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

例 1.1 の部分基は独立であるが、強独立ではない。

## 2 ドメイン表現

位相空間  $X$  とその独立な二分的部分基  $S$  を固定する。集合  $\mathbb{T} := \{0, 1, \perp\}$  に  $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \mathbb{T}\}$  という位相を入れる。  $\mathbb{T}$  における順序を  $\perp \preceq 0, \perp \preceq 1$  で定める。  $0$  と  $1$  は比較不能で、  $\preceq$  は半順序である。また  $\mathbb{T}^\omega$  にも  $\mathbb{T}$  から誘導される位相と順序を入れる。

$X$  から  $\mathbb{T}^\omega$  への埋め込み  $\phi_S$  が次のように定まる。

$$\phi_S : X \rightarrow \mathbb{T}^\omega, \quad \phi_S(x)(n) = i \Leftrightarrow x \in S_{n,i}. \quad (2.1)$$

---

\* tsukamoto@i.h.kyoto-u.ac.jp

ここで、 $\phi_S(x)(n)$  が 0 か 1 であることは有限時間で求まるが、 $\perp$  であることを結論付けるには無限時間かかる（無限に高い精度の近似が必要）という計算機科学的なイメージをもとに話を進める。

$X$  の点  $x$  について、初期状態  $\perp^\omega = (\perp, \perp, \dots)$  から、 $\phi_S(x)(n) \in \{0, 1\}$  であるような  $n < \omega$  について、 $\perp$  を 0, 1 に置き換えていくことで  $\phi_S(x)$  を計算すると考える。ただし、最後まで  $\perp$  のままである部分が含まれるため、先頭から順に行うことは不可能である。しかし、勝手な位置から置き換えるのも不自然である。そこで、有限時間の出力での 0, 1 に置き換えられる位置を、以下で定める  $K_S$  に従うように制限する。

$$K_S := \{\phi_S(x)|_n \in \mathbb{T}^\omega; x \in X, n < \omega\}. \quad (2.2)$$

ただし、 $\sigma \in \mathbb{T}^\omega$  に対し、 $\sigma|_n$  は

$$\sigma|_n(k) := \begin{cases} \sigma(k) & (k < n) \\ \perp & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義される  $\mathbb{T}^\omega$  の元である。 $K_S$  の元をたどって得られる極限を  $K_S$  に付け加えた集合を次のように定める。

$$D_S := \{\sigma \in \mathbb{T}^\omega; \forall n < \omega, \sigma|_n \in K_S\}. \quad (2.3)$$

明らかに  $\phi_S$  は  $D_S$  への埋め込みである。

**定義 2.1.** 半順序集合  $D_S$  と、埋め込み  $\phi_S$  の組  $(D_S, \phi_S)$  を  $X$  の  $S$  によるドメイン表現という。

$D_S$  の部分集合で、次のようなものを考える。

$$L_S := D_S \setminus K_S, \quad (2.4)$$

$$M_S : L_S \text{ の極小元の集合}. \quad (2.5)$$

ここでの興味は、 $D_S$  から位相空間  $X$  の構造をどのくらい復元できるかである。

$X$  がコンパクトならば、 $M_S$  は  $X$  と同相となる。例 1.1 では  $\phi_S(X) = M_S$  である。コンパクトでなくても  $X$  が正則ならば、 $X$  は  $M_S$  の部分空間と同相となる。ゆえに、 $M_S$  は  $K_S$  を近似とする空間のなかでもっとも自然なものと考えられる。

$X$  が正則でなくても、多くのハウスドルフ空間では  $M_S$  は空集合ではない。しかし、二分的部分基  $S$  が強独立であるならば、 $D_S = \mathbb{T}^\omega$  となり、 $M_S = \emptyset$  である。

### 3 主結果

**定理 3.1.** 強独立な二分的部分基を持つハウスドルフ空間が存在する。

強独立な二分的部分基を持つ位相空間において、任意の非空な 2 個の開集合の閉包は交わる。そのようなハウスドルフ空間である Prime integer topology をもとに以下のように例を構成した。

**例 3.2.** 集合  $\mathbb{N}$  を自然数の集合 ( $0 \notin \mathbb{N}$ ) とし、 $(p_n)_{n < \omega} := (3, 5, 7, 11, 13, \dots)$  を奇素数の列とする。 $\mathbb{N}$  の集合の族  $S = \{S_{n,i}; n < \omega, i < 2\}$  を次で定める。

$$\begin{aligned} S_{n,0} &:= \left\{ (a-1)p_n + b; a, b \in X, 0 < b < \frac{p_n}{2} \right\}, \\ S_{n,1} &:= \left\{ (a-1)p_n + b; a, b \in X, \frac{p_n}{2} < b < p_n \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\mathbb{N}$  に  $S$  で生成される位相  $\mathfrak{P}_2$  を入れたとき、 $S$  が  $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}_2)$  の強独立な二分的部分基であることは、中国剰余定理から明らかだろう。

**命題 3.3.** 位相空間  $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}_2)$  はハウスドルフである.

証明の全体は少し込み入ったものになるが、次の命題に還元できることは容易に示せる.

**命題 3.4.** 任意の素数  $p$  と自然数  $n$  に対し、 $n \geq p$  ならば  $p$  個の自然数  $n+1, \dots, n+p$  の中に、 $p$  より大きい素因数を持つものが存在する.

証明. (命題 3.4  $\Rightarrow$  命題 3.3) 2 個の自然数  $x, y$  ( $x < y$ ) を固定する.

(i)  $2x \leq y$  の場合、 $y$  を超えない最大の素数を  $p$  とする. 命題 3.4 より、

$$y < lp_n \leq y + p \leq 2y, \quad p_n > p$$

となる奇素数  $p_n$  と自然数  $l$  が存在する. ここで  $p$  のとり方より、 $p_n > y$  となる. また、容易に  $l = 1, p_n < 2y$  を得る.

よって、 $0 < x < p_n/2 < y < p_n$  より、 $x \in S_{n,0}, y \in S_{n,1}$  で  $x, y$  は分離可能である.

(ii)  $x < y < 2x$  の場合、 $2(y-x)$  を超えない最大の素数を  $p$  とする.  $p \leq 2(y-x) < 2x$  だから命題 3.4 より、

$$2x < lp_n \leq 2x + p \leq 2y, \quad p_n > p$$

となる奇素数  $p_n$  と自然数  $l$  が存在する. ここで、 $lp_n = 2y$  となりうるのは  $p = 2$  のときだけである. しかし、このときは  $2x+1$  が 2 より大きい素因数を持つので、 $lp_n < 2y$  としてよい.

$p$  のとり方から  $p_n > 2(y-x)$  であるので

$$(l-1)p_n < 2x < lp_n < 2y < (l+1)p_n$$

となる. よって、 $l$  が偶数ならば  $x \in S_{n,1}, y \in S_{n,0}$ ,  $l$  が奇数ならば  $x \in S_{n,0}, y \in S_{n,1}$  となり、いずれの場合も  $x, y$  は分離可能である.  $\square$

証明. (命題 3.4) 概略だけ述べる.

素数  $p$  と  $p$  以上の自然数  $n$  について、2 項係数  $\binom{n+p}{p}$  が  $p$  より大きい素因数を持つことを示せばよい.

$\binom{n+p}{p}$  を解析的に下から押さえ、素因数分解と素数定理の評価によって上から押さえる.

$\binom{n+p}{p}$  が  $p$  より大きい素因数を持たない仮定すると、十分大きい  $p$  については  $n < 2p$  ( $n$  が  $p$  の定数倍で押さえられればよい) となる. これは  $n+p > 1.5n$  となるためエルデシュの定理 “ $\forall n \geq 8, n < \exists p' < 1.5n, p' : \text{prime}$ ” (チェビシェフの定理の拡張) に反する. 小さい  $p$  については個別に示すことができる.  $\square$

これは立木秀樹氏との共同研究によるものである. 命題 3.4 については、立木氏も私もこの専門でないため、多くの意見を期待する.

## 参考文献

[OTY] Ohta, H., Tsuiki, H., Yamada, S., *independent subbases and non-redundant codings of separable metrizable spaces*, Topology and its Applications, vol.158, p.1–14, Elsevier Science (2011).



## 2 次形式に付随する指標和について

橋口啓伍（室蘭工業大学大学院数理システム工学専攻）

概要 正の整数  $N$  を法とするディリクレ指標  $\chi$  と  $n$  次半整数行列  $A$  に対し,

$$h(A, \chi) = \sum_{U \in SL_n(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})} \chi(\text{tr}(A[U]))$$

と定義する．ここでは,  $A[U] = {}^t UAU$  とする．

今までは  $h(A, \chi)$  の明示公式が  $n = 2$  のとき, H. Katsurada, Y. Mizuno[J.London Math. 85(2012), 455-471] によって求められている．

今回は  $n = 3$  で,  $N$  が奇素数  $p$  のとき  $h(A, \chi)$  の明示公式を求める．

### 1. 準備と主結果

$L_n := \{(a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}, a_{ii} \in \mathbf{Z}, a_{ij} = a_{ji}\}$  を  $\mathbf{Z}$  上の  $n$  次半整対称行列の集合とする．

また,  $\chi: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$  が整数  $N$  を法とするディリクレ指標とは

- (1)  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  for  $\forall m, n \in \mathbf{Z}$
- (2)  $m \equiv n \pmod{N} \Rightarrow \chi(m) = \chi(n)$
- (3)  $\chi(m) \neq 0 \Leftrightarrow (m, N) = 1$

の 3 つの条件を満たすものである．

$A \in L_n$  と  $N$  を法とするディリクレ指標  $\chi$  に対して,

$$h(A, \chi) = \sum_{U \in SL_n(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})} \chi(\text{tr}({}^t UAU))$$

と定義する．ここで, 一般に可換環  $R$  に対して

$$SL_n(R) := \{A \in M_n(R) \mid \det A = 1\}$$

である．

$n = 1$ , つまり  $A \in L_1$  のときは  $A = (a)_{1 \times 1}$  であり,  $h(A, \chi) = \chi(a)$  となる．  
 $n = 2$  のときは H. Katsurada, Y. Mizuno[1] によって求められ, 次の結果が得られている．

定理 1.1  $A \in L_2$  かつ  $\det A \neq 0$  とする .

$p$  を素数とする .  $\chi$  を  $p$  を法とする原始ディリクレ指標とする .

(1)  $\chi(-1) = -1$  を仮定すると ,  $h(A, \chi) = 0$  となる .

(2)  $\chi(-1) = 1$  を仮定すると ,

$$h(A, \chi) = (1 + (\frac{4 \det A}{p})) (1 - (\frac{-1}{p}) p^{-1}) p^2 (\frac{-1}{p}) \tilde{\chi}(4 \det A)$$

となる . ここで ,  $\tilde{\chi}$  は  $\chi = \tilde{\chi}^2$  となるような指標で ,  $(\frac{*}{p})$  はルジャンドル記号である .

$n = 3$  で ,  $N$  が奇素数  $p$  のときの  $h(A, \chi)$  の明示公式を求めるため , 次の記号を用意する .

$p$  を法とする原始指標  $\chi_0$  を以下のように定義する .

$\alpha$  を  $p$  を法とする原始根とすると ,

$c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \not\equiv 0 \pmod{p}$  は

$c \equiv \alpha^r \pmod{p}$  と書ける .

このとき ,  $\chi_0(c) = \zeta_{p-1}^r$  と定義する .

ここで ,  $\zeta_m = \exp(\frac{2\pi i}{m})$  である .

また , 3 乗剰余記号を  $(\frac{\alpha^r}{p})_3 = \zeta_3^r$  と定義する .

さらに ,  $p$  を法とする 2 つのディリクレ指標  $\eta_1, \eta_2$  に対してヤコビ和  $J(\eta_1, \eta_2)$  を,

$$J(\eta_1, \eta_2) = \sum_{y=0}^{p-1} \eta_1(y) \eta_2(1-y)$$

と定義する . このとき , 以下の主定理が成立する .

定理 1.2  $A \in L_3$  かつ  $\det A \neq 0$  とする .

(1)  $p \equiv 1 \pmod{3}$  とする .

(1.1)  $\chi = \chi_0^s$  かつ  $s \not\equiv 0 \pmod{3}$  のとき

$h(A, \chi) = 0$  となる .

(1.2)  $\chi = \chi_0^{3s}$  のとき ,  $\tilde{\chi} = \chi_0^s$  とおく .  $\chi^2$  が単位指標でないとする .

$$h(A, \chi) = p^3(p^2 - 1) \left\{ \sum_{j=0}^2 \tilde{\chi}^{(j)}(-4 \det A) J(\overline{\tilde{\chi}^{(j)}}, \overline{\tilde{\chi}^{(j)2}}) \right\}$$

となる . ここで ,  $\tilde{\chi}^{(j)}(u) = \tilde{\chi}(u)(\frac{u}{p})_3^j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) である .

(2)  $p \equiv 2 \pmod{3}$  とする .  $\chi^2$  が単位指標でないとする .

$$h(A, \chi) = p^3(p^2 - 1) \tilde{\chi}(4 \det A) \tilde{\chi}(-1) J(\overline{\tilde{\chi}}, \overline{\tilde{\chi}^2})$$

ここで  $\tilde{\chi} = \chi^r$  ( $r$  は  $3r \equiv 1 \pmod{p-1}$ ) となるような値) である .

## 2. 応用

前節の主結果はジーゲル・カスプ形式に付随する *Koecher – Maass* 級数に応用される。

シンプレクティック群 (Symplectic group)  $S_{p_n}(\mathbf{Z})$ , およびジーゲル上半空間  $\mathbf{H}_n$  を次のように定義する。

$$S_{p_n}(\mathbf{Z}) := \{U \in GL_{2n}(\mathbf{Z}) \mid {}^t U J_n U = J_n, J_n = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}\}$$

$$\mathbf{H}_n := \{Z = X + iY \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^t Z = Z, \text{Im} Z = Y > 0\}$$

ここで,  $0_n$  は  $n$  次零ベクトル,  $1_n$  は  $n$  次単位ベクトルである。

$F(Z) : \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbf{C}$  が  $S_{p_n}(\mathbf{Z})$  に関する重さ  $k$  のジーゲル・カスプ形式であるとは, 次を満たすものをいう。

$$(1) F((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) = \det(CZ + D)^k F(Z)$$

$$\forall \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S_{p_n}(\mathbf{Z})$$

(2)  $F(Z)$  は次のフーリエ展開をもつ。

$$F(Z) = \sum_{A \in L_n(\mathbf{Z})_{>0}} c_F(A) \exp(2\pi i \text{tr}(AZ))$$

ここで,  $L_n(\mathbf{Z})_{>0} := \{A \in L_n(\mathbf{Z}) \mid A : a \text{ positive definite}\}$  である。

$F(Z)$  とディリクレ指標  $\chi$  に対して 2 つの *Koecher – Maass* 級数を

$$L(s, F, \chi) = \sum_{A \in L_n(\mathbf{Z})_{>0} / SL_{n,N}(\mathbf{Z})} \frac{c_F(A) \chi(\text{tr}(A))}{e_N(A) (\det A)^s}$$

$$L^*(s, F, \chi) = \sum_{A \in L_n(\mathbf{Z})_{>0} / SL_n(\mathbf{Z})} \frac{c_F(A) \chi(\det(2A))}{e(A) (\det A)^s}$$

と定義する。ここで,

$$SL_{n,N}(\mathbf{Z}) := \{U \in SL_n(\mathbf{Z}) \mid U \equiv 1_n \pmod{N}\}$$

$$e_N(A) := \#\{U \in SL_{n,N}(\mathbf{Z}) \mid {}^t U A U = A\}$$

$$e(A) := \#\{U \in SL_n(\mathbf{Z}) \mid {}^t U A U = A\} \text{ である。}$$

$L(s, F, \chi)$  は Y.Choie, W.Kohnen[2] によって導入され, その整数論的性質はよく知られている。しかし, その明示公式を求めるのは一般に難しい。一方,

$L^*(s, F, \chi)$  の明示公式は比較的容易に求められる場合が多い .

そこで ,  $L(s, F, \chi)$  を  $L^*(s, F, \chi)$  を用いて表すことを目標とする . まず , 次が成り立つ .

**命題 2.1**

$F(Z)$  を  $S_{p_n}(\mathbf{Z})$  に関する重さ  $k$  のジークル・カスプ形式とする .

$$L(s, F, \chi) = \sum_{A \in L_n(\mathbf{Z})_{>0}/SL_n(\mathbf{Z})} \frac{c_F(A)h(A, \chi)}{e(A)(\det A)^s}$$

これに定理 1.2 の指標和  $h(A, \chi)$  の結果を適用すると , 次が成り立つ .

**定理 2.2**

$F(Z)$  を  $S_{p_3}(\mathbf{Z})$  に関する重さ  $k$  のジークル・カスプ形式とする .

(1)  $p \equiv 1(mod\ 3)$  とする .

(1.1)  $\chi = \chi_0^s$  かつ  $s \not\equiv 0(mod\ 3)$  のとき

$$L(s, F, \chi) = 0$$

(1.2)  $\chi = \chi_0^{3s}$  のとき ,  $\tilde{\chi} = \chi_0^s$  とおく . このとき ,

$$L(s, F, \chi) = p^3(p^2 - 1) \sum_{j=0}^2 J(\tilde{\chi}^{(j)}, \overline{\tilde{\chi}^{(j)^2}}) \overline{\tilde{\chi}^{(j)}(-2)} L^*(s, F, \tilde{\chi}^{(j)})$$

となる .

(2)  $p \equiv 2(mod\ 3)$  のとき

$$L(s, F, \chi) = p^3(p^2 - 1) \overline{\tilde{\chi}(-2)} J(\tilde{\chi}, \overline{\tilde{\chi}^2}) L^*(s, F, \tilde{\chi})$$

となる .

**参考文献**

[1] H.Katsurada and Y.Mizuno, Linear dependence of certain L-values of half-integral weight modularforms, J.London Math. 85(2012), 455-471

[2] Y.Choie and W.Kohnen, Special values of Koecher-Maass series of Siegel cusp forms, Pacific J.Math. 198(2001), 373-383

# 擬トーリック多様体の直積分解の一意性

畑中 美帆

まず、次の 2 つの問題を考える。

## 問題 1

任意の整数  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$  に対して  $X_i, Y_j$  をコンパクトで既約な微分可能多様体とする。この時、 $X_1 \times \cdots \times X_k$  と  $Y_1 \times \cdots \times Y_l$  が微分同相であれば、 $k = l$  であり、対称群  $S_k$  のある元  $\sigma$  が存在し、 $X_i$  が  $Y_{\sigma(i)}$  と微分同相になるか。

## 問題 2 (cancellation)

$X, Y, Z$  をコンパクトで既約な微分可能多様体とする。 $X \times Z$  と  $Y \times Z$  が微分同相であれば、 $X$  と  $Y$  は微分同相か。

ここで、微分可能多様体が既約というのは、これ以上他の多様体の直積に分解できないことをいう。

問題 1 はあるコンパクトな微分可能多様体がコンパクトで既約な微分可能多様体の直積になる時、その直積分解は一意的であるかどうかという問題で、問題 2 は cancellation 問題とよばれていて、問題 1 が成り立てば問題 2 も成り立つ。しかし、Charlap により、あるコンパクトで平坦な多様体  $X$  と  $Y$  で  $X \times S^1$  と  $Y \times S^1$  が微分同相でかつ  $X$  と  $Y$  が微分同相でないものが存在することが示された [1]。このことから問題 1 と 2 は成り立たないことがわかる。そこで、問題 1 はどんな多様体の範疇で成り立つのかという問題が自然に出てくる。今回はその多様体の範疇を調べ、問題 1 と 2 の部分的肯定的結果について紹介する。

次の定理と系は問題 1 と 2 の部分的肯定的結果の一つである [2]。

## 定理 1 (S.Choi, M.Masuda, and S.Oum)

任意の整数  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$  に対して  $X_i, Y_j$  を実 Bott 多様体とする。この時、 $X_1 \times \cdots \times X_k$  と  $Y_1 \times \cdots \times Y_l$  が微分同相であれば、 $k = l$  であり、対称群  $S_k$  のある元  $\sigma$  が存在し、 $X_i$  が  $Y_{\sigma(i)}$  と微分同相になる。

## 系 1 (cancellation)

$X, Y, Z$  を既約な実 Bott 多様体の有限個の直積とする。この時  $X \times Z$  が  $Y \times Z$  と微分同相であれば  $X$  と  $Y$  が微分同相になる。

ここで、実 Bott 多様体について紹介する。次の列を高さ  $n$  の実 Bott タワーという。

$$B_n \xrightarrow{\pi_3} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}^{-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0 = \{point\}$$

ここで、 $\pi_i; B_i \rightarrow B_{i-1}$  は  $B_{i-1}$  上の 2 つの実直線束のホイットニー和の射影化、つまり  $\mathbb{R}P^1$  束である。このことから、上の実 Bott タワーは  $\mathbb{R}P^1$  束の列と考えることができる。この時  $B_i$  のことを  $i$  段目の実 Bott

多様体という。例えば  $B_1$  は  $\mathbb{R}P^1$  であり、 $B_2$  は  $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$  または  $\mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2$  となる。また、すべての  $i$  に対して  $\pi_i$  が自明な束である時、 $B_n$  はコンパクトトーラス、特に平坦な多様体となる。実 Bott タワーの定義から各  $i$  に対して  $B_i$  はコンパクトトーラスをねじったようなものであり、平坦な多様体であることが知られている。Charlap により cancellation の反例が平坦な多様体で見つがっているが、上の定理は実 Bott 多様体という特別な平坦な多様体の範疇で cancellation が成り立つことを示している。

今回の主定理は次の定理である。

## 定理 2

任意の整数  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$  に対して  $X_i, Y_j$  を既約な複素 1 か 2 次元のトーリック多様体とする。この時、 $X_1 \times \cdots \times X_k$  と  $Y_1 \times \cdots \times Y_l$  が微分同相であれば、 $k = l$  であり、対称群  $S_k$  のある元  $\sigma$  が存在し、 $X_i$  が  $Y_{\sigma(i)}$  と微分同相になる。

## 系 2

$X, Y, Z$  を既約な複素 1 か 2 次元のトーリック多様体の有限個の直積とする。この時  $X \times Z$  が  $Y \times Z$  と微分同相であれば  $X$  と  $Y$  が微分同相になる。

トーリック多様体とは、複素  $n$  次元のコンパクトで滑らかな代数多様体で効果的な複素トーラスの代数的作用を持ち、この作用に関して稠密な開軌道を 1 つ持つもののことである。例えば、 $\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$  はトーリック多様体である。ここで、 $\overline{\mathbb{C}P^2}$  は  $\mathbb{C}P^2$  の向きを逆にしたものである。 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  と  $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$  は Hirzebruch surfaces と呼ばれている。これは  $\mathbb{C}P^1$  上の  $\mathbb{C}P^1$  束のことである。トーリック多様体は複素 1 と 2 次元で微分同相に関する完全な分類が知られている。1 次元のトーリック多様体は  $\mathbb{C}P^1$  であり、2 次元のトーリック多様体は  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  と  $\mathbb{C}P^2 \sharp l\overline{\mathbb{C}P^2}$  である。 $l\overline{\mathbb{C}P^2}$  は  $\mathbb{C}P^2$  の  $l$  個の連結和を表す。これらの多様体の範疇で直積分分解の一意性が成り立つ。

また、上の定理は擬トーリック多様体に対しても成り立つ。

## 定理 3

任意の整数  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$  に対して  $X_i, Y_j$  を既約な実 2 か 4 次元の擬トーリック多様体とする。この時、 $X_1 \times \cdots \times X_k$  と  $Y_1 \times \cdots \times Y_l$  が微分同相であれば、 $k = l$  であり、対称群  $S_k$  のある元  $\sigma$  が存在し、 $X_i$  が  $Y_{\sigma(i)}$  と微分同相になる。

## 系 3

$X, Y, Z$  を既約な実 2 か 4 次元の擬トーリック多様体の有限個の直積とする。この時  $X \times Z$  が  $Y \times Z$  と微分同相であれば  $X$  と  $Y$  が微分同相になる。

擬トーリック多様体は Davis と Januszkiewicz によって 1991 年に導入された [3]。擬トーリック多様体とは、実  $2n$  次元のコンパクトで滑らかな多様体で効果的なコンパクトトーラスの滑らかな作用を持ち、局所的にコンパクトトーラスの表現空間に同変微分同相で、軌道空間がある単純凸多面体になるもののことをいう。例えば  $\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}, \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$  は擬トーリック多様体である。トーリック多様体には複素トーラス作用があるが、この作用をコンパクトトーラス作用に制限すると多くの場合に軌道空間は単純凸多面体になる。このことから、ほとんどのトーリック多様体は擬トーリック多様体になる。擬トーリック多様体も実 2 か 4 次元で完全な分類が知られている。実 2 次元の擬トーリック多様体は  $\mathbb{C}P^1$  であり、実 4 次元の擬トーリック多様体は  $k\mathbb{C}P^2 \sharp l\overline{\mathbb{C}P^2} \sharp m(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)$  である。これらは複素 1 と 2 次元のトーリック多様体を真に含んでいる。これらの多様体の範疇で直積分分解の一意性が成り立つ。

最近、石田-福川-柁田により位相的トーリック多様体が導入された [4]。位相的トーリック多様体とは、コンパクトで滑らかな実  $2n$  次元の多様体で滑らかな複素トーラス作用をもち、その作用が局所的に複素トーラスの滑らかな表現空間に同変微分同相であるもののことである。位相的トーリック多様体上の複素トーラス作用は稠密な開軌道をもち、トーリック多様体を微分可能多様体と思えば位相的トーリック多様体となる。位相的トーリック多様体の族は擬トーリック多様体の族も含んでいる。しかし、実 6 次元までは位相的トーリック多様体の族と擬トーリック多様体の族は同じである。このことから、次の定理が成り立つ。

#### 定理 4

任意の整数  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$  に対して  $X_i, Y_j$  を既約な実 2 か 4 次元の位相的トーリック多様体とする。この時、 $X_1 \times \cdots \times X_k$  と  $Y_1 \times \cdots \times Y_l$  が微分同相であれば、 $k = l$  であり、対称群  $S_k$  のある元  $\sigma$  が存在し、 $X_i$  が  $Y_{\sigma(i)}$  と微分同相になる。

#### 系 4

$X, Y, Z$  を既約な実 2 か 4 次元の位相的トーリック多様体の有限個の直積とする。この時  $X \times Z$  が  $Y \times Z$  と微分同相であれば  $X$  と  $Y$  が微分同相になる。

## 参考文献

- [1] L. S. Charlap, *Compact flat riemannian manifolds 1*, Annals of Mathematics, Second series, Vol.81, No.1 (Jan.,1965), pp.15-30
- [2] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Rigidity problems in toric topology, a survey*, Proc. Steklov Inst. Math., 275(2011), 177-190.
- [3] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), 417-451.
- [4] H. Ishida, Y. Fukukawa, and M. Masuda, *Topological toric manifolds*, preprint arXiv:1012.1786,2010.



# Non-normal very ample polytopes

東谷 章弘<sup>1</sup>

大阪大学大学院・情報科学研究科

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$  を整凸多面体、つまり、頂点の座標が全て整数であるような凸多面体とする。また、 $\tilde{\mathcal{P}} = \{(\alpha, 1) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$  とする。さらに、有理強凸多面錐  $\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}}$  に含まれる整数点  $(\alpha, n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{N+1}$  について、 $(\alpha, n)$  の次数を  $\deg(\alpha, n) = n$  として定義する。

$K$  を体とする。 $S$  を  $K$  上の  $N+1$  変数ローラン多項式環  $K[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_N, x_N^{-1}, t]$  とする。整数点  $(\mathbf{a}, n) = (a_1, \dots, a_N, n) \in \mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し、 $S$  のローラン単項式  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}t^n = x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}t^n$  を割り当てる。

$d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  について、 $\mathcal{P}$  のトーリック環  $K[\mathcal{P}]$  とは、

$$\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}t^n : (\mathbf{a}, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1})\}$$

で生成される  $S$  の部分環のことである。一方、 $\mathcal{P}$  のエルハート環  $\mathcal{E}_K(\mathcal{P})$  とは、

$$\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}t^n : (\mathbf{a}, n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1}\}$$

で生成される  $S$  の部分環のことである。

$d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  について、 $\mathcal{P}$  ( $K[\mathcal{P}]$  または  $\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}}$ ) が正規 (normal) であるとは、

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1})$$

を満たすときに言う。一方、 $\mathcal{P}$  ( $K[\mathcal{P}]$  または  $\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}}$ ) が非常に豊富 (very ample) であるとは、

$$(\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1}) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1})$$

が有限集合であるときに言う。特に、正規ならば非常に豊富である。さらに、 $(\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1}) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1})$  の元のことを  $\mathcal{P}$  ( $K[\mathcal{P}]$  または  $\mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{\mathcal{P}}$ ) のホールと呼ぶ。

---

<sup>1</sup>The author is supported by JSPS Research Fellowship for Young Scientists

E-mail: a-higashitani@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

ある正整数  $k$  について、 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  が  $k$ -正規であるとは、任意の正整数  $n \geq k$ 、及び、任意の整数点  $\alpha \in n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$  について、 $n$  個の整数点  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$  が存在して、 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  と表せるときに言う。

$\mathcal{P}$  の正規性について、次の 4 条件の同値性は直ちに従う。

- $\mathcal{P}$  は正規である。
- $\mathcal{P}$  は 1-正規である。
- $K[\mathcal{P}] = \mathcal{E}_K(\mathcal{P})$  が成立する。
- $\mathcal{E}_K(\mathcal{P})$  は次数 1 の元で生成される。

さらに、 $\mathcal{P}$  の非常に豊富性について、次の 3 条件も同値である。

- $\mathcal{P}$  は非常に豊富である。
- $\mathcal{P}$  は、十分大きい整数  $k$  について、 $k$ -正規である。
- $K[\mathcal{P}]$  の斉次極大イデアル  $\mathfrak{m} \subset K[\mathcal{P}]$ 、 $\mathcal{E}_K(\mathcal{P})$  の斉次極大イデアル  $\mathfrak{n} \subset \mathcal{E}_K(\mathcal{P})$  および十分大きい整数  $k$  について、 $\mathfrak{m}^k = \mathfrak{n}^k$  が成立する。

本原稿では、任意の次元について、非正規かつ非常に豊富な整凸多面体の存在について議論する。

非正規かつ非常に豊富な整凸多面体の最初の例は、[1, Example 5.5.1] において紹介されている。その例は、5 次元整凸多面体である。さらに、[2, Exercise 2.24] において、第二の例として、3 次元の非正規かつ非常に豊富な整凸多面体の例も構成されている。また、[4, Section 2] において、非正規かつ非常に豊富な 3 次元整凸多面体の例の無限系列が構成されている。しかし、一般次元でのそのような整凸多面体の例は知られていない。

著者は、3 次元以上の任意の次元について、非正規かつ非常に豊富な整凸多面体の例を構成することに成功した。次の定理は、本原稿の主定理である。

**定理 1** 任意の正整数  $h$  および  $d$  (ただし  $h \geq 1$ 、 $d \geq 3$  を満たす) について、非正規かつ非常に豊富であり、 $h$  個のホールを持つような  $d$  次元整凸多面体が存在する。

実際には、次のようにして構成する。 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$  とし、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  を  $\mathbb{R}^d$  の標準基底とする。正整数  $h$  および  $d$  (ただし  $h \geq 1$ 、 $d \geq 3$ ) について、次のよう

な  $(2d + 6)$  個の整数点を定義する。

$$u_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \mathbf{e}_d, & i = 2, \\ \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1}, & i = 3, \\ h(\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1} + \mathbf{e}_d), & i = 4, \\ (h-1)(\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1}) + h\mathbf{e}_d, & i = 5, \\ h(\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1}) + (h-1)\mathbf{e}_d, & i = 6, \\ \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_d, & i = 7, \\ \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_d, & i = 8, \\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1}, & i = 9, \\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1} + \mathbf{e}_d, & i = 10, \end{cases}$$

$$v_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 2, \dots, d-1,$$

$$v'_i = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d, \quad i = 2, \dots, d-1.$$

これらを用いて、 $d$  次元整凸多面体

$$\mathcal{P}_{h,d} = \text{conv}(\{u_1, \dots, u_{10}\} \cup \{v_i, v'_i : i = 2, \dots, d-1\})$$

を定義する。このとき、 $\mathcal{P}_{h,d}$  は次のような性質を満たす。

- $\mathcal{P}_{h,d}$  は正規でない。実際、 $j = 1, \dots, h$  について、

$$(u_j, 2) = \mathbf{e}_1 + j(\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_{d-1}) + (j+2)\mathbf{e}_d + 2\mathbf{e}_{d+1}$$

としたとき、 $(u_j, 2) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \widetilde{\mathcal{P}}_{h,d} \cap \mathbb{Z}^{d+1}) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}(\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^{d+1})$  であることがわかる。  
よって、 $\mathcal{P}_{h,d}$  は少なくとも  $h$  個のホールを持つため、正規ではない。

- $\mathcal{P}_{h,d}$  は、次数 2 の他のホールを持たない。
- $\mathcal{P}_{h,d}$  は 3-正規である。つまり、次数 3 以上のホールを持たない。よって、 $\mathcal{P}_{h,d}$  は非常に豊富である。

ゆえに、上で定義した  $d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P}_{h,d}$  は、丁度  $h$  個のホールを持つ非正規かつ非常に豊富な整凸多面体であることがわかる。

## 参考文献

- [1] W. Bruns and J. Gubeladze, Semigroup algebras and discrete geometry, *Geometry of toric varieties*, L. Bonavero and M. Brion Eds., Sémin. Congr. **6**, Soc. de France, (2002), 43–127.
- [2] W. Bruns and J. Gubeladze, “Polytopes, rings and K-theory,” Springer–Verlag, Heidelberg, 2009.
- [3] A. Higashitani, Non-normal very ample polytopes and their holes, arXiv:1208.3955v2.
- [4] S. Ogata, Very ample but not normal lattice polytopes, to appear in *Beitrage Algebra Geom.*

# カタラン数の一般化

福川 由貴子 (大阪市立大学)

## 1 序

カタラン数  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  には様々な解釈が知られており、現時点で少なくとも 200 を超える解釈が [1] に紹介されている。例えば、 $(n+2)$  角形の三角形分割の個数、 $(n+1)$  枚の葉をもつ二分木の個数、ヤング図形  $(n, n)$  上の標準盤の個数、 $(n+1)$  文字の文字列への二項演算の順序の入れ方などがあるが、最も有名な解釈の一つとして Dyck path の個数としての解釈が挙げられるだろう。自然数  $n$  に対し、格子点の列

$$P = \{P_0 = (0, 0), P_1, \dots, P_{2n} = (n, n)\}$$

が、各  $i = 1, 2, \dots, 2n$  において  $P_i$  の  $x$  座標 (resp.  $y$  座標) が  $P_{i-1}$  の  $x$  座標 (resp.  $y$  座標) 以上であり、かつ、領域  $y \leq x$  にあるとき  $P$  を Dyck path といい、 $(0, 0)$  から  $(n, n)$  への Dyck path の総数は  $C_n$  に等しい。また簡単な考察からカタラン数  $C_n$  は次の漸化式を満たすことが知られている。

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \text{但し } C_0 = 1 \text{ とする。} \quad (1.1)$$

この漸化式の証明はカタラン数をどう解釈するかによって、様々な証明を与えることができる。

これ以降、任意の自然数  $m, n$  に対して格子点の列  $P = \{P_0 = (0, 0), P_1, \dots, P_{m+n} = (m, n)\}$  が、各  $i = 1, 2, \dots, m+n$  において  $P_i$  の  $x$  座標 (resp.  $y$  座標) が  $P_{i-1}$  の  $x$  座標 (resp.  $y$  座標) 以上でかつ、領域  $y \leq \frac{n}{m}x$  にあるとき Dyck path と呼び、その総数を  $C(m, n)$  と表す。

P. Hilton と J. Pedersen は [2] の中で  $(0, 0)$  から  $(kn, n)$  への Dyck path の総数について触れている。

**Theorem 1.1** (Hilton-Pedersen [2]). 任意の自然数  $k, n$  に対し,  $(0, 0)$  から  $(kn, n)$  への Dyck path の総数  $C(kn, n)$  は

$$C(kn, n) = \frac{1}{kn+1} \binom{(k+1)n}{n}$$

で与えられる .

また  $C(kn, n)$  は (1.1) の拡張として

$$C(kn, n) = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})} \prod_{i=1}^{k+1} C(kn_i, n_i) \quad (1.2)$$

が成り立つことにも言及している . ここで (1.2) の和は  $\sum_{i=1}^{k+1} n_i = n-1$  を満たす非負整数の組  $(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})$  全てに渡って和をとる . (カタラン数  $C_n$  の他の解釈についても  $C(n, n)$  への拡張があることが知られている , 例えば  $(kn+2)$  角形の  $(k+2)$  角形分割の個数が  $C(kn, n)$  となる .)

自然に考えられる問題として,  $(0, 0)$  から座標が正の任意の格子点への Dyck path の総数の数え上げの問題があるが, P. Duchon は  $(0, 0)$  から  $(2\ell, 3\ell)$  への Dyck path の総数を [3] で記述している .

**Theorem 1.2** (Duchon [3]). 任意の自然数  $n$  に対し,  $(0, 0)$  から  $(2\ell, 3\ell)$  への Dyck path の総数  $C(2\ell, 3\ell)$  は次で与えられる .

$$C(2\ell, 3\ell) = \sum_{i=0}^5 \frac{1}{5\ell+i+1} \binom{5\ell+1}{n-i} \binom{5\ell+2i}{i}.$$

Dyck path の数え上げに関して次章にある結果が得られた .

## 2 主結果

主結果を述べる前に必要な記号を定義しておく . 非負整数の列  $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$  に対して  $\|a\| := \sum_{i=1}^{\infty} ia_i$  とおく . また自然数  $m, n$  に対して ,

$$A_{(m,n)} := \frac{1}{m+n} \binom{m+n}{n}$$

とおく . このとき、次が成り立つ .

**Lemma 2.1** (F). 任意の自然数  $m, n$  と最大公約数  $\gcd(m, n) = d$  に対し,  $(0, 0)$  から  $(m, n)$  への Dyck path の総数  $C(m, n)$  は次の漸化式を満たす.

$$C(m, n) = \sum_{i=1}^d \frac{i}{d} A_{(\frac{i}{d}m, \frac{i}{d}n)} C(\frac{d-i}{d}m, \frac{d-i}{d}n).$$

この漸化式を  $m = n$  の時に整理すると (1.1) が得られ,  $(m, n) = (kn, n)$  の時に補題の証明をよく見ると (1.2) と同値な式であることが分かる. よってこの補題は (1.1), (1.2) の一般化になっている. またこの補題から次の主定理が直ちに従う.

**Theorem 2.2** (F). 任意の自然数  $m, n$  と最大公約数  $\gcd(m, n) = d$  に対し,  $(0, 0)$  から  $(m, n)$  への Dyck path の総数  $C(m, n)$  は次で与えられる.

$$C(m, n) = \sum_{a, \|a\|=d} \prod_{i=1}^d \left( \frac{1}{a_i!} A_{(\frac{i}{d}m, \frac{i}{d}n)}^{a_i} \right).$$

定理 2.2 により,  $(0, 0)$  から任意の格子点への Dyck path の総数が与えられた.

**Corollary 2.3.** 上の定理で  $d = 1$  の時, つまり  $(0, 0)$  から  $(m, n)$  ( $m$  と  $n$  は互いに素) への Dyck path の総数  $C(m, n)$  は

$$C(m, n) = \frac{1}{m+n} \binom{m+n}{n}.$$

## 参考文献

- [1] R. P. Stanley, <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>
- [2] P. Hilton and J. Pedersen, *Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses*, The Mathematical Intelligencer, Spring 1991, Volume 13, Issue 2, pp 64-75.
- [3] P. Duchon, *On the enumeration and generation of generalized Dyck words*, Discrete Mathematics, Volume 225, Issues 1-3, 28 October 2000, pp 121-135.



# 生体分子の分子動力学に対する時系列解析

— 生体分子の複雑な動きの変化とその意味 —

富士 香奈<sup>1</sup> 関嶋 政和<sup>2</sup> 藤崎 弘士<sup>3</sup> 戸田 幹人<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 奈良女大学大学院 人間文化研究科 複合現象科学専攻

<sup>2</sup> 東京工業大学 学術国際情報センター

<sup>3</sup> 日本医科大学 物理学教室

<sup>4</sup> 奈良女子大学 理学部 物理科学科

生体分子などの多自由度な時系列データ解析において、その膨大なデータの中からいかにして必要な情報を読み取るかは重要な問題の一つである。本研究では分子動力学法によってえられる生体分子の多自由度時系列データに対する解析を行った。二面角座標に対する構造解析と運動解析の結果から、安定な構造と不安定な構造それぞれにおいて励起される周波数領域がアミノ酸残基ごとに異なるという結果を得た。この結果は、特定の周波数領域を励起させることによって構造遷移を引き起こすことができる可能性を示唆する。

## 1 はじめに

生体分子機能の発現は、非常に幅広い時空間スケールに渡る現象であり、周囲の環境との相互作用によりさらに複雑である。生命活動の分子レベルでの理解を目指し、生体分子の分子動力学 (MD) による大規模シミュレーションが盛んに行われている。計算機能力の向上に伴い、扱える時空間スケールは大幅に増加した。近年ではミリ秒オーダーの長時間シミュレーションが実現している [1]。

そのように多くの生体分子のシミュレーションデータが得られるようになった一方で、その得られるデータが膨大になればなるほど解析が困難になる。系が多自由度である為にその振る舞いは非常に複雑で、周囲の環境と相互作用する生体分子の複雑な振る舞いから分子機能に関係する情報を「どのように」読み取るか、が重要な課題となる。本研究では、そのような多自由度時系列データに対する新たな解析手法の確立を目指し、構造解析と運動解析を行っている。

本稿では、タンパク質の分子動力学計算から得られた時系列の構造面と運動面の両面から解析を行った結果を報告する。まず構造面では、2 面角に対する主成分解析 (dPCA) [2] を用いて構造の分類を行った。運動面では、構造遷移を起こす時刻の前後でウェーブレット変換を用いた周波数解析 [3] を二面角に対して行った。

## 2 解析対象と時系列データ

本研究の解析対象は、シニョリン (chignolin) と呼ばれる人工タンパク質である [4]。シニョリンは 10 個のアミノ酸が鎖状につながったポリペプチドで、図 1 のような構造をしている。シニョリンは核磁気共鳴 (NMR) により 18 の構造が明かになっており、複数の構造を遷移することのできるタンパク質である。また、一般的なその他のタンパク質と比べアミノ酸の数が少なく、解析が容易であるという利点がある。

本研究で用いたシニョリンの時系列データは、分子動力学シミュレーションソフトウェアの AMBER12 を用いて計算されたものである。シミュレーションの時間刻みは 1[fsec]。1000step 毎にサンプリングされているので、時系列データの時間刻みは 1[psec] となっている。全時間は 1.8[μ sec] である。

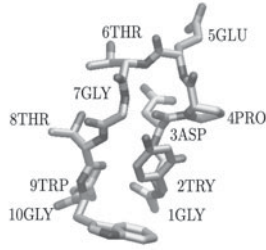


図 1: シニョリン

図 2 は本時系列データの両末端間距離  $d_{NC}$  の時間変化を示す。シニョリンの両端が閉じている時の  $d_{NC}$  の値はおよそ 5[Å] である。時刻 900[nsec]、1100[nsec]、1950[nsec] 辺りで  $d_{NC}$  の値が 20[Å] 以上を示しており、時刻 900[nsec] の辺りで  $d_{NC}$  の揺らぎに変化が見られる。このことは、時刻 900[nsec] である構造から別の構造へ遷移している可能性を示唆している。

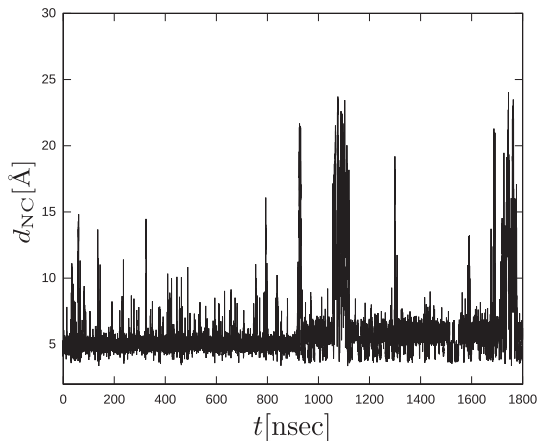


図 2: 両末端間距離の時間変化

今回は、本時系列データの各時刻における二面角を計算し、時系列解析を行った。二面角とはタンパク質のねじれや曲がりを表す指標であり、空間の座標軸のとり方に依存することなく、構造を記述することができる。シニョリンの場合、18 個の二面角で構造を記述できるので、空間座標を直接扱うより少ない自由度で解析を行うことが可能である。

### 3 dPCA を用いた構造の分類

図 3 タンパク質を構成する原子の 3 次元座標から二面角を計算し、その座標を用いて主成分分析を行った。

時刻  $t$  を変数とする 18 個の二面角  $\phi_i(t), \psi_i(t) (i = 1, 2, \dots, 9)$  を

$$x_{4i-3}(t) = \cos \phi_i(t)$$

$$x_{4i-2}(t) = \sin \phi_i(t)$$

$$x_{4i-1}(t) = \cos \psi_i(t)$$

$$x_{4i}(t) = \sin \psi_i(t)$$

と変形し、新たな変数  $x_j(t) (j = 1, 2, \dots, 36)$  を定義する。変数  $x_j(t)$  の共分散行列  $C$  は 36 次の正方行列で与えられ、その各成分は

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \langle (x_m(t) - \langle x_m(t) \rangle_t) (x_n(t) - \langle x_n(t) \rangle_t) \rangle_t \\ &= \langle x_m(t) x_n(t) \rangle_t - \langle x_m(t) \rangle_t \langle x_n(t) \rangle_t \quad (m, n = 1, \dots, 36) \end{aligned}$$

となる。この共分散行列  $C$  を対角化して得られる固有ベクトル  $w_1, w_2, \dots, w_{36}$  を用いて各時刻の  $x_j(t)$  を主成分空間へと射影する。

図 3 は第 1 主成分と第 2 主成分空間への射影の分布図と各構造集団での構造である。構造遷移を起こす 900[nsec] よりも前の時間では右側の集団 (a)、構造遷移後の時間では左側の集団 (b) に対応する。つまり、本時系列データにおいて構造遷移の前後の構造が、出現頻度の高い 2 つの構造に対応していることを示している。

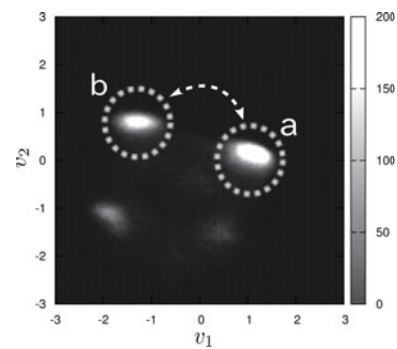


図 3: 第 1 主成分と第 2 主成分空間への射影の分布

各集団での構造を図 4 に示した。集団 a の構造は両端の先がそろった構造をしているのに対して、集団 b は両端の一方が伸びた構造をしており、折れ曲がる位置がずれて不安定な構造に遷移していることがわかる。

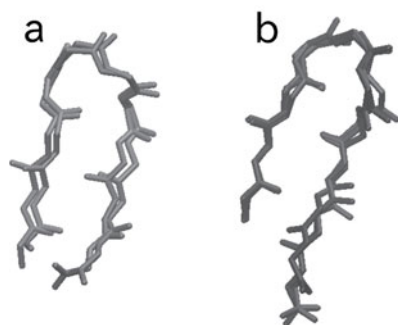


図 4: 各集団における構造

## 4 構造遷移における周波数の時間変化

本章では、構造遷移における周波数の時間変化を解析するため、二面角の各自由度に対してウェーブレット変換を行った結果を示す。構造遷移を起こす 900[nsec] の前後の時間帯、600~1100[nsec] に対してモルレーウェーブレットを用いたウェーブレット変換を行った。

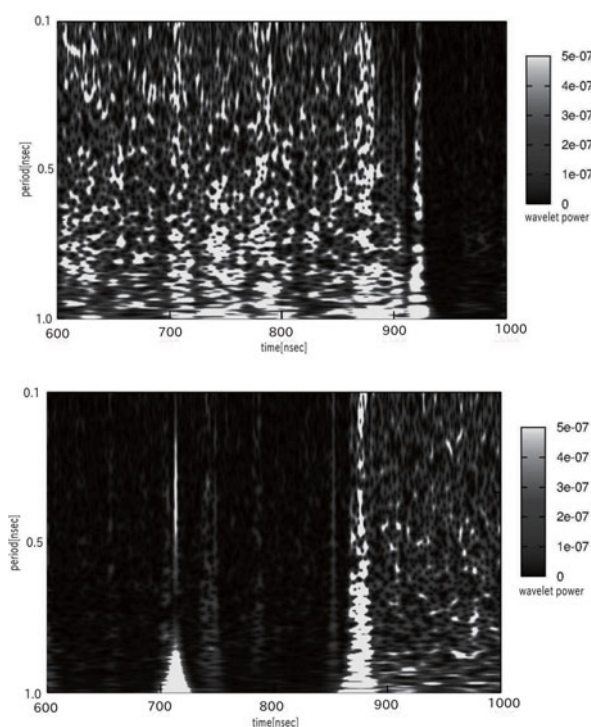


図 5: ウェーブレットスペクトルの時間変化  
上図が 2 番目のアミノ酸チロシン、下図が 7 番目のアミノ酸グリシンの二面角に対応する。

図 5 はある自由度でのウェーブレットのパワースペクトルである。2 番目のアミノ酸チロシン (2TYR) と 7 番目のアミノ酸グリシン (7GLY) の二面角に対応するパワースペクトルを示した。2TYR では構造遷移を起こす 900[nsec] よりも前の時間帯で複数の周波数領域が励起されている。一方、7GLY では構造遷移よりも後の時間帯で周波数の励起が見られる。つまり、構造遷移の前後では二面角の自由度によって励起される周波数領域に違いがあることを示す。

## 5 まとめと展望

dPCA による構造解析の結果では、出現頻度の高い構造が 2 つの集団に分けられることを示し、安定な構造から不安定な構造遷移であることを示した。二面角の時系列に対するウェーブレット変換による周波数解析からは、安定な構造と不安定な構造それぞれにおいて励起される周波数領域がアミノ酸残基ごとに違うことを示した。この結果は、特定の周波数領域を励起させることによって構造遷移を引き起こすことができる可能性を示唆する。

今後は、特異値分解を用いて各時刻ごとに励起される周波数領域とその方向を解析する予定である。また、タンパク質の構造形成に重要な水素結合に着目した解析との比較についても議論したい。

## 参考文献

- [1] D. E. Shaw, et al., *SCIENCE*, Vol. 330, pp. 341 (2010)
- [2] Y. Mu, et al., *PROTEINS: Structure, Function, and Bioinformatics*, Vol. 58, pp. 45 (2005)
- [3] M. Kamada, et al., *Chem.Phys.Lett.*, Vol. 502, pp. 241 (2011)
- [4] S. Honda, et al., *Structure*, Vol. 12, pp. 1507 (2004)



# CR submanifolds

Mirjana Milijević

## Summary

We will give generalization of some results on real hypersurfaces to CR submanifolds of maximal CR dimension in complex space forms.

## 1 Introduction and results

Let  $\overline{M}$  be an  $(n+p)$ -dimensional complex space form, i.e. a Kaehler manifold of constant holomorphic sectional curvature  $4c$ , endowed with metric  $\overline{g}$ . Let  $M$  be an  $n$ -dimensional real submanifold of  $\overline{M}$  and  $J$  be the almost complex structure of  $\overline{M}$ . If the maximal  $J$ -invariant subspace  $H_x(M) = JT_x(M) \cap T_x(M)$  of  $T_x(M)$  has constant dimension for any  $x \in M$ , then  $M$  is called a CR submanifold and the constant complex dimension of  $H_x(M)$  is called the CR dimension of  $M$ . If, for any  $x \in M$ ,  $H_x(M)$  satisfies  $\dim_C H_x(M) = \frac{n-1}{2}$ , then  $M$  is called a CR submanifold of maximal CR dimension [1].

A typical example of a CR submanifold of maximal CR dimension is a real hypersurface. Hereby we may expect to generalize some results which are valid in real hypersurfaces to CR submanifolds of maximal CR dimension.

A real hypersurface  $M$  of a nonflat complex space form is called  $\eta$ -umbilical, if its shape operator  $A$  is of the form  $AX = \alpha X$  for each vector  $X$  on  $M$  which is orthogonal to the characteristic vector  $U$  of  $M$ , where  $\alpha$  is a smooth function on  $M$ . This definition can be rewritten easily as  $AX = \alpha X + \beta g(X, U)U$ , for each  $X \in TM$ , where  $\alpha, \beta$  are smooth functions on  $M$ . It is known that these two functions  $\alpha$  and  $\beta$  are automatically constant.

The next theorem is a known classification theorem of totally umbilical hypersurfaces in nonflat complex space forms.

**Theorem 1.** *Let  $M^{2n-1}$  be a totally  $\eta$ -umbilical real hypersurface of a nonflat complex space form  $\overline{M}_n(c)$ ,  $n \geq 2$  (with shape operator  $A = \alpha I + \beta u \otimes U$ ). Then  $M$  is locally congruent to one of the following:*

(P) *geodesic spheres of radius  $r$  ( $0 < r < \frac{\pi}{\sqrt{c}}$ ) in  $CP^n(c)$ , where  $\alpha = (\frac{\sqrt{c}}{2})\cot(\frac{\sqrt{c}r}{2})$  and  $\beta = -\frac{1}{\alpha}$ ,*

(H)

i) *horospheres in  $CH^n(c)$ , where  $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{|c|}}{2}$ ,*

ii) *geodesic spheres of radius  $r$  ( $0 < r < \infty$ ) in  $CH^n(c)$ , where  $\alpha = (\frac{\sqrt{c}}{2})\coth(\frac{\sqrt{c}r}{2})$  and  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ,*

iii) tubes of radius  $r$  ( $0 < r < \infty$ ) around totally geodesic complex hyperplane  $CH^{n-1}(c)$  in  $CH^n(c)$ , where  $\alpha = (\frac{\sqrt{c}}{2})\tanh(\frac{\sqrt{c}r}{2})$  and  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ .

Our goal is to obtain the classification of  $\eta$ -umbilical CR submanifolds of maximal CR dimension with respect to the shape operator  $A$  of the distinguished normal  $\xi$  in nonflat complex space forms. First, we want to prove that  $\alpha$  and  $\beta$  are constants. First result obtained is contained in the next proposition.

**Proposition 1.** *Let  $M$  be an  $n$ -dimensional CR submanifold of maximal CR dimension in an  $(n+p)$ -dimensional complex space form  $(\bar{M}, J, \bar{g})$ , where  $n \geq 3$  and the constant holomorphic sectional curvature of  $\bar{M}$  equals  $4c$ . Let  $A$  be the shape operator of the distinguished vector field  $\xi$ . If  $AX = \alpha X + \beta g(X, U)U$ , for  $X \in T(M)$  and for smooth functions  $\alpha, \beta$ , then  $U\alpha = 0$ .*

## 2 CR submanifolds of maximal CR dimension and the proof of Proposition 1

Let  $\bar{M}$  be an  $(n+p)$ -dimensional complex space form with Kaehler structure  $(J, \bar{g})$  and of constant holomorphic sectional curvature  $4c$ . Let  $M$  be an  $n$ -dimensional CR submanifold of maximal CR dimension in  $\bar{M}$  and  $\iota : M \rightarrow \bar{M}$  be an immersion. Also, we denote by  $\iota$  the differential of an immersion. The Riemannian metric  $g$  of  $M$  is induced from the Riemannian metric  $\bar{g}$  of  $\bar{M}$  in such a way that  $g(X, Y) = \bar{g}(\iota X, \iota Y)$ , where  $X, Y \in T(M)$ . We denote by  $T(M)$  and  $T^\perp(M)$  the tangent bundle and the normal bundle of  $M$ , respectively.

On  $\bar{M}$  we have the following decomposition into tangential and normal components:

$$J\iota X = \iota F X + u(X)\xi, \quad X \in T(M). \quad (1)$$

Here  $F$  is a skew-symmetric endomorphism acting on  $T(M)$  and  $u$  in one-form on  $M$ . Since  $T_1^\perp(M) = \{\eta \in T^\perp(M) | \bar{g}(\eta, \xi) = 0\}$  is  $J$ -invariant, from now on we will denote the orthonormal basis of  $T^\perp(M)$  by  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_q, \xi_{1*}, \dots, \xi_{q*}$ , where  $\xi_{a*} = J\xi_a$  and  $q = \frac{p-1}{2}$ . Also,  $J\xi$  is the vector field tangent to  $M$  and we write

$$J\xi = -\iota U. \quad (2)$$

Furthermore, using (1), (2) and the Hermitian property of  $J$  implies

$$F^2 X = -X + u(X)U, \quad (3)$$

$$FU = 0, \quad (4)$$

$$g(X, U) = u(X). \quad (5)$$

$$(\nabla_Y F)X = u(X)AY - g(AX, Y)U. \quad (6)$$

Next, we denote by  $\bar{\nabla}$  and  $\nabla$  the Riemannian connection of  $\bar{M}$  and  $M$ , respectively, and by  $D$  the normal connection induced from  $\bar{\nabla}$  in the normal bundle of  $M$ . They are related by the following Gauss equation

$$\bar{\nabla}_{\iota X} \iota Y = \iota \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (7)$$

where  $h$  denotes the second fundamental form, and by Weingarten equations

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\iota X} \xi &= -\iota AX + D_X \xi \\ &= -\iota AX + \sum_{a=1}^q \{s_a(X)\xi_a + s_{a^*}(X)\xi_{a^*}\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\iota X} \xi_a &= -\iota A_a X + D_X \xi_a = -\iota A_a X - s_a(X)\xi \\ &\quad + \sum_{b=1}^q \{s_{ab}(X)\xi_b + s_{ab^*}(X)\xi_{b^*}\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\iota X} \xi_{a^*} &= -\iota A_{a^*} X + D_X \xi_{a^*} = -\iota A_{a^*} X - s_{a^*}(X)\xi \\ &\quad + \sum_{b=1}^q \{s_{a^*b}(X)\xi_b + s_{a^*b^*}(X)\xi_{b^*}\}, \end{aligned} \quad (10)$$

where the  $s$ 's are the coefficients of the normal connection  $D$  and  $A, A_a, A_{a^*}; a = 1, \dots, q$ , are the shape operators corresponding to the normals  $\xi, \xi_a, \xi_{a^*}$ , respectively.

Since the ambient manifold is a Kaehler manifold, using (1), (2), (9) and (10), it follows that

$$A_{a^*} X = F A_a X - s_a(X)U, \quad (11)$$

$$A_a X = -F A_{a^*} X + s_{a^*}(X)U, \quad (12)$$

$$s_{a^*}(X) = u(A_a X), \quad (13)$$

$$s_a(X) = -u(A_{a^*} X), \quad (14)$$

for all  $X, Y$  tangent to  $M$  and  $a = 1, \dots, q$ .

Finally, the Codazzi equation for the distinguished vector field  $\xi$  becomes

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X &= c\{u(X)FY - u(Y)FX - 2g(FX, Y)U\} \\ &\quad + \sum_{a=1}^q \{s_a(X)A_a Y - s_a(Y)A_a X\} + \sum_{a=1}^q \{s_{a^*}(X)A_{a^*} Y - s_{a^*}(Y)A_{a^*} X\}, \end{aligned} \quad (15)$$

for all  $X, Y$  tangent to  $M$ .

*Sketch of proof of Proposition 1.* From our assumption that  $AX = \alpha X + \beta g(X, U)U$  it follows that  $A$  and  $F$  commute. First we will differentiate the equation

$$AF = FA.$$

We get the next.

$$\begin{aligned} &g((\nabla_Y A)FX, Z) + g(A(\nabla_Y F)X, Z) + g(AF\nabla_Y X, Z) = \\ &g((\nabla_Y F)AX, Z) + g(F(\nabla_Y A)X, Z) + g(FA\nabla_Y X, Z). \end{aligned}$$

After few steps of calculation from the last equation we get,

$$-cg(FY, FX) + \sum_{a=1}^q \{-g(A_{a^*}Y, U)g(A_a U, FX) + g(A_{a^*}U, U)g(A_a Y, FX)\} + \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^q \{g(A_a U, Y)g(A_{a^*}U, FX) - g(A_a U, U)g(A_{a^*}Y, FX) \\ &- (U\alpha)g(X, FY) - \alpha\beta g(X, Y) + \alpha\beta g(Y, U)g(X, U)\} = 0, \end{aligned}$$

On the other hand, multiplying the Codazzi equation by  $U$  and putting  $Y = U$ , we obtain

$$grad(\alpha + \beta) = U(\alpha + \beta)U + \sum_{a=1}^q \{2g(A_{a^*}U, U)A_a U - 2g(A_a U, U)A_{a^*}U\} \quad (17)$$

In the final step we get

$$(U\alpha)g(FX, Y) = 0, \quad (18)$$

from which the assertion follows.  $\square$

## References

- [1] M. Djorić and M. Okumura, *CR submanifolds of complex projective space*, Developments in Mathematics, vol. 19, Springer, Berlin, 2009.
- [2] T. Itoh, S. Maeda, *Characterization of totally  $\eta$ -umbilic real hypersurfaces in nonflat complex space forms by some inequality*, Proc. Japan Acad., 80, Ser. A (2004)
- [3] Y. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 529-540.
- [4] R. Niebergall and P.J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and Taut Submanifolds, MSRI Publications 32 (1997), 233-305.
- [5] Y. Tashiro and S. Tachibana, *On Fubinian and C-Fubinian manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep 15 (1963), 176-183.

# Partial control of chaos and continuity of safe set

Genming. Wang

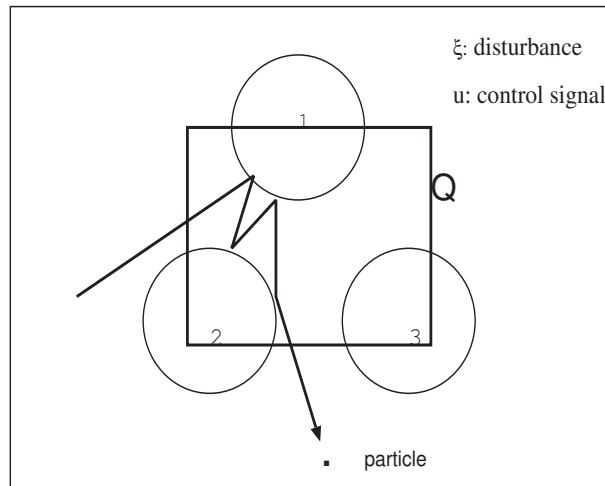
*RIES/Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo*

## Abstract

Since the theory of controlling chaos proposed more than two decades ago [1, 2], it has been applied to nonlinear systems such as species extinction in ecology, lasers and mechanical systems in physics, and cardiac tissue in biology. Recently, Zambrano, Sanjuan, and Yorke have studied a new problem on “loose control” of chaotic dynamical systems, which is called partial control of chaos [3, 4]. An open dynamical system with presence of noise is controlled by a carefully chosen perturbation to trap an orbit in a finitely bounded region forever. It can be done by control signals which is smaller than the amplitude of noise. The set of partially controllable initial conditions is called safe set [4], which can be constructed by using an algorithm [5]. Here we investigate the simplest problem of the partial control, that is, safe sets of one-dimensional piecewise-linear maps with and without escapes.

## 1 Introduction

In transient chaos, all the initial conditions will diverge from a compact region  $Q$  except a zero-measure set. For example, chaotic scattering in open billiard systems under presence of noise: orbits of particles will escape from  $Q$  more fast.

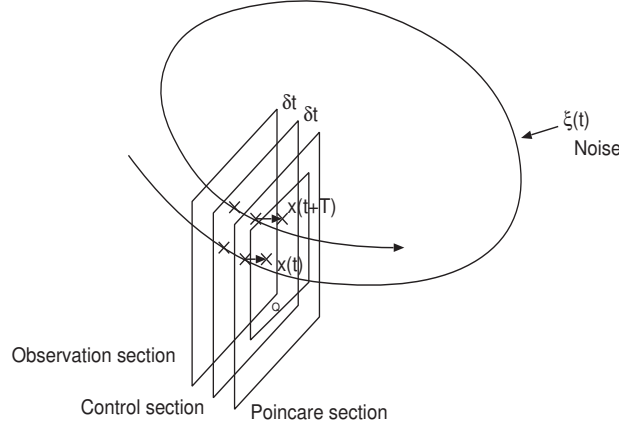


## 2 Discrete model

In [4]: The dynamics is expressed in this form  $x_{n+1} = f(x_n)$ , where  $x_n$  is the state at time  $n$ . Then the state is perturbed by noise and feedbacked a careful control.

Since we study discrete-time dynamics, then how is the flow translated into the form of discrete maps?

Choose one particular Poincare section with Poincare map  $x(t+T) = f(x(t))$ . Other two section near the Poincare section are given as observation section, control section. Now consider about the independent noise, in observation section,  $\xi_{[n,n+1]} = \int_t^{t+T-2\delta t} \xi(t)dt \sim x'(t+T-2\delta t) - f(x(t))$ . In control section, control signal  $u(t+T-\delta t)$  is introduced. In the Poincare section,  $x'(t+T) \sim x'(t+T-2\delta t) + u(t+T-\delta t)$ . Finally,  $x'(t+T) = x_{n+1}, x(t) = x_n, u(t+T-\delta t) = u_{[n,n+1]}$ , then  $x_{n+1} = f(x_n) + u_{[n,n+1]} + \xi_{[n,n+1]}$ , concisely,  $x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n + u_n$ .



Our model is now as follows;

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n + u_n$$

$f$  : discrete map       $Q$  : finitely bounded region

$\xi_n$  : bounded noise at time  $n$

$u_n$  : control signal at time  $n$ ,  $|u_n| \leq |u_0|, |\xi_n| \leq |\xi_0|, |u_0| < |\xi_0|$

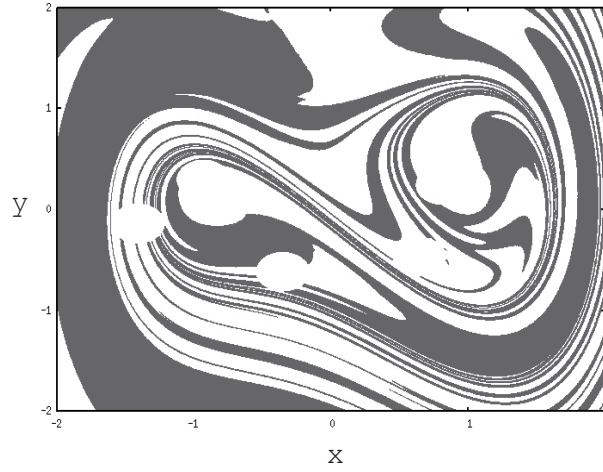
The safe set is given as follows [5].

$$\forall \xi_n, \exists u_n, \text{ s.t., } \exists S \subset Q, \forall x \in S, f(x) + \xi_n + u_n \in S.$$

Partial control is possible by control signals  $\{u_n\}$  which are smaller than disturbance amplitude  $\{\xi_0\}$ , with initial conditions in the safe set  $S$  [4].

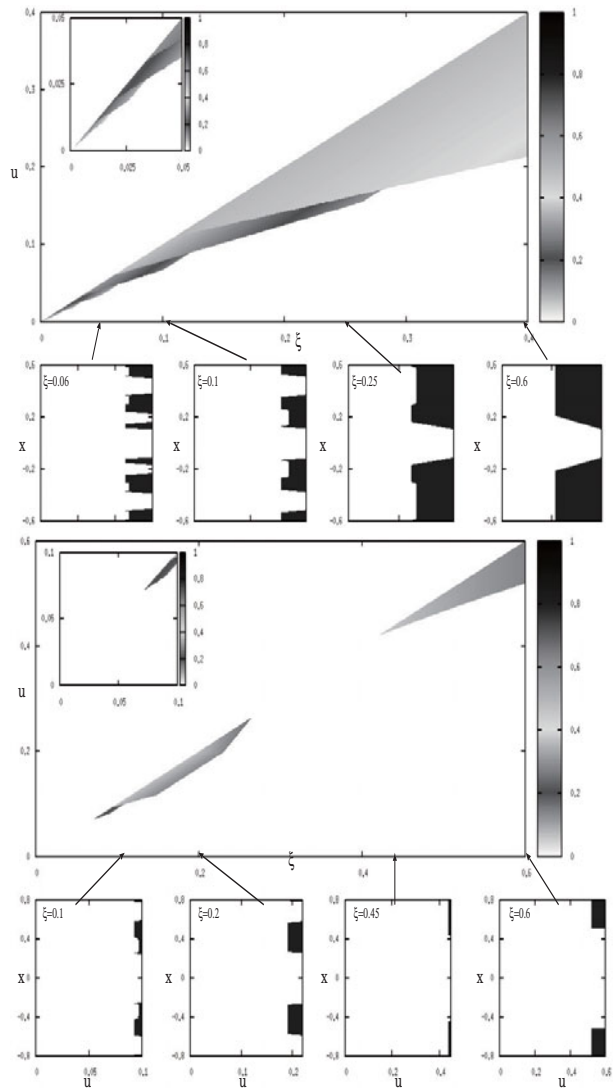
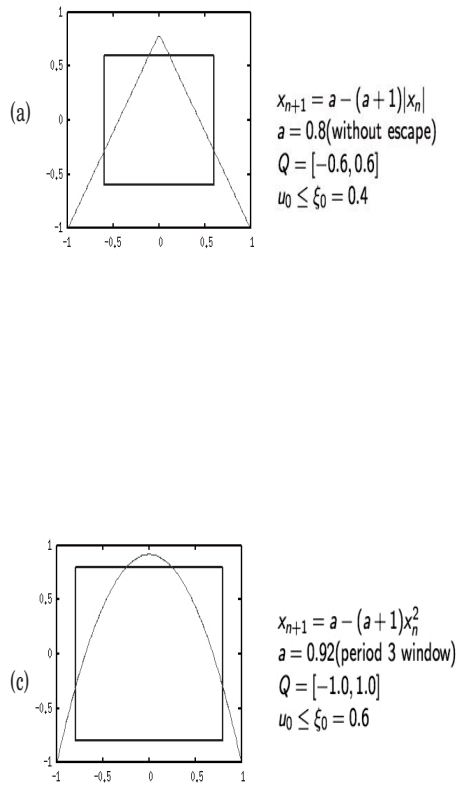
An example: Safe set of Duffing oscillator [5]:

$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + ax^3 = \gamma \cos(\omega t)$ ,  $\delta = 0.15, \beta = 1, a = 1, \gamma = 0.245, \xi_0 = 0.080, u_0 = 0.048$  [5]. Let  $y = \dot{x}$ , safe set is shown below:



### 3 Models and Numerical results

We numerically investigate safe sets of tent map and logistic map with and without escapes for all pairs of  $(u, \xi)$ .



Top figures: Color represents the ratio of safe set with respect to width of  $Q$ . Bottom figures: The safe set as a function of control signal  $u$  for given fixed disturbances. In the case of (a) and (c), there are discontinuous shape changes of safe sets at several disturbance levels. In case of (c), when disturbance is around between 0.28 and 0.42, there is no safe set no matter how large control signals are.

## 4 Summary

From the figures above, we find that the safe set will not always grow continuously by increasing control signals at given fixed disturbance, and disappears with some amplitude of disturbance. For logistic map in period 3 window, we observe disappearance of safe set when disturbance is around between 0.28 and 0.42.

The authors thank to Prof. M.A.F. Sanjuan, Mr. Juan. Sabuco(Universidad Rey Juan Carlos) and Prof. J. A. Yorke (University of Maryland).

## References

- [1] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J.A., “Controlling chaos,” *Phys Rev Let.* 64, (1990), 1196–1199.
- [2] Pyragas, K., “Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” *Phys. Lett. A*, 170, (1992), 421–428.
- [3] Aguirre, J., Ovidio, F., and Sanjuan, M.A.F., “Controlling chaotic transients: Yorke’s game of survival,” *Phys. Rev. E*, 69, (2004), 016203.
- [4] Zambrano, S., M A.F.Sanjuan, M.A.F., and Yorke, J.A. “Partial control of chaotic systems,” *Phys. Rev. E*, 77, (2008), 055201(R).
- [5] Sabuco, J. Zambrano, S., Sanjuan, M.A.F., Yorke, J.A., “Finding safety in partially controllable chaotic systems,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* ,17, p4274, (2012).