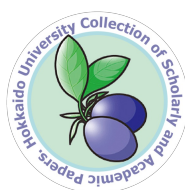




HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第11回数学総合若手研究集会
Author(s)	船川, 大樹; 可香谷, 隆; 加葉田, 雄太朗 他
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 162, i, 1-vii, 349
Issue Date	2015-02-23
DOI	https://doi.org/10.14943/81524
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/68087
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech162.pdf



第11回数学総合若手研究集会

～ 数学を基盤とした多分野間交流による豊かな発展・発見を ～

The 11th Mathematics Conference for Young Reserchers

—MCYR11—

世話人

船川大樹 可香谷隆 加葉田雄太朗 佐々木克真
武田裕康 千野由喜 土田旭 山下達也 和田和幸

札幌, 2015

Series#162.February, 2015

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS
<http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/view/type/techreport.html>

- #140 T. Suda, Y. Umeta, K. Kasai, M. Kasedou, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.
- #141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.
- #142 K. Kasai, H. Kuroda, T. Nagai, K. Nishi, S. Tsujie and T. Yamaguchi, 第 6 回数学総合若手研究集会, 267 pages. 2010.
- #143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.
- #144 Liang Chen, Doctoral thesis “On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space”, 79 pages. 2010.
- #145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.
- #146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.
- #147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.
- #148 T. Fukunaga, N. Nakashima, A. Sekisaka, T. Sugai, K. Takasao and K. Umeta, 第 7 回数学総合若手研究集会, 280 pages. 2011.
- #149 M. Kasedou, Doctoral thesis “Differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space”, 69 pages. 2011.
- #150 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.
- #151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第 8 回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.
- #152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第 20 回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.
- #153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 81 pages. 2012.
- #154 N. Hu, Doctoral thesis “Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces”, 69 pages. 2012.
- #155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.
- #156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第 21 回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.
- #157 D. Suyama, T. Ito, M. Kuroda, Y. Goto, N. Teranishi, S. Futakuchi, T. Fuda and N. Miyagawa, 第 9 回数学総合若手研究集会, 344 pages. 2013.
- #158 Y. Giga, S. Jimbo, H. Terao, K. Yamaguchi, Proceedings of the 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 154 pages. 2013.
- #159 Y. Giga, S. Jimbo, T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, H. Kubo, T. Sakajo, and H. Takaoka, Proceedings of the 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2013.
- #160 M. Kuroda, Y. Goto, K. Sasaki, S. Futakuchi, D. Funakawa, T. Yamashita, and K. Wada, 第 10 回数学総合若手研究集会, 335 pages. 2014.
- #161 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 39th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 147 pages. 2014.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されているこの数学総合若手研究集会も今年で第 11 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者に講演の場を提供することで、研究の発展および人的ネットワークの構築することを目的として行われてきました。近年、多くの分野が数学的手法を取り入れることに関心を持っており、数学を軸とした多分野間の交流による発展・発見を目指してこのような場を設けることは、意義があると信じております。当研究集会を支援して下さる皆様のおかげで研究集会としての規模も年々大きくなり、今年は数学はもちろんのこと、物理・化学・生物学・工学など、幅広い分野の若手研究者の方々 76 名にご講演して頂くこととなりました。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション (60 分) とパラレルセッション (30 分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションは、あらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などを含んだ入門的な内容となっております。対してパラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分け、より専門的な内容の講演が行われます。ポスター発表では、個別の発表時間ではなく、発表者と聴講者との質疑応答の時間となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿を印刷し、まとめたものです。サブタイトルにもあります、「数学を基盤とした多分野間交流による豊かな発展・発見を」目的とし、他分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演と交流によって豊かな発展・発見を促し、また皆様の研究の一助となれば喜びの極みでございます。

当研究集会の開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様、
- 北大数学教室の先生方、
- 数学事務の方々、
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

また、昨年同様今年も、より円滑な運営のため、ウェブ上での申し込みを継続致しました。申し込みフォームの制作・管理は広島大学の山口崇幸氏主導の下で行われました。さらに当研究集会のホームページの制作は、北海道大学数学事務の柳沼かなめ氏に作って頂きました。両氏に厚くお礼申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたしております。

2015 年 3 月

MCYR11 世話人

船川大樹 (代表) 可香谷隆 加葉田雄太郎 佐々木克真
武田裕康 千野由喜 土田旭 山下達也 和田和幸

第11回 数学総合若手研究集会

～数学を基盤とした多分野間交流による豊かな発展・発見を～

The 11th Mathematics Conference for Young Researchers

日時：2015年3月2日(月)～3月5日(木)

場所：北海道大学 理学部5号館

S : 大講堂 5-203 号室 (シングル会場) A : 5-305 (パラレル会場)
B : 5-206 (パラレル会場) C : 5-205 (パラレル会場)
D : 5-304 (パラレル会場) E : 5-201 (ポスター会場・休憩所)

URL: <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2015/>

● シングルセッション (会場 S)

大泉 嶺 (Ryo OIZUMI)	明治大学 研究・知財戦略機構, 東京大学数理科学研究科 生物個体と集団の数理	3
渡辺 朋成 (Tomonari WATANABE)	広島大学理学研究科数学専攻 消散型波動方程式における Strichartz 型評価とその応用	11
稲葉 和正 (Kazumasa INABA)	東北大学大学院理学研究科数学専攻 On deformations of isolated singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials	19
小川 泰朗 (Yasuaki OGAWA)	名古屋大学多元数理研究科 Derived categories and generalized complexes	27
川本 昌紀 (Masaki KAWAMOTO)	神戸大学理学研究科数学専攻 外場中のクライナー-ゴールドン方程式の解の存在と伝播評価	35
小川 駿 (Shun OGAWA)	京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻 二次元完全流体における渦度場のパターン	43
小島居 祐香 (Yuka KOTORII)	東京大学大学院数理科学研究科 結び目の HOMFLY 多項式を用いた Milnor の μ -不変量の表現	51
中島 規博 (Norihito NAKASHIMA)	豊田工業大学工学部 射影空間の分解を用いた射影 Reed-Muller 符号の復号法とその性能評価	59

● パラレルセッション (会場 A)

服部 至宏 (Yukihiro HATTORI)	室蘭工業大学工学研究科数理システム工学専攻 小山中島の L-関数の母関数表示	69
門田 慎也 (Shinya KADOTA)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 多重ゼータ値に対する少し変わった重みつき和公式	73
鈴木 雄太 (Yuta SUZUKI)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 一般リーマン予想の下での Hardy-Littlewood 予想の例外集合について	77

Suriajaya Ade Irma (Ade irma SURIAJAYA)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科
一般化されたリーマン予想の下でのディリクレ L 関数の対数関数の臨界線付近における挙動	81
古牧 弘幸 (Hiroyuki KOMAKI)	北海道大学大学院理学院数学専攻
Multi-Poly-Bernoulli numbers と Poly-Bernoulli numbers の関係性	85
土谷 昭善 (Akiyoshi TSUCHIYA)	大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
reflexive 凸多面体とその双対凸多面体の δ 列	89
田端 亮 (Ryo TABATA)	広島大学大学院理学研究科数学専攻
Immanent 不等式の精密化とその極限挙動	93
百瀬 康弘 (Yasuhiro MOMOSE)	信州大学大学院 総合工学系研究科
アソシエーションスキーモイドの構成法とその性質	97
黒田 匡迪 (Masamichi KURODA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
平面三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ	101
植松 哲也 (Tetsuya UEMATSU)	豊田工業高等専門学校
アフィン対角的 2 次曲面の Brauer 群について	105
山下 達也 (Tatsuya YAMASHITA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
Vector fields on differentiable schemes and derivations on differentiable rings	109
荒川 智匡 (Tomoki ARAKAWA)	上智大学理工学部
Effective nonvanishing of pluriadjoint line bundles	113
野本 文彦 (Fumihiko NOMOTO)	東京工業大学理工学研究科数学専攻
An explicit formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$	117

● パラレルセッション (会場 B)

DEOLINDO · SILVA JORGE · LUIZ (Jorge luiz DEOLINDO SILVA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
Singularities of projections of surfaces in $\mathbb{R}^4$	123
寺本 圭佑 (Keisuke TERAMOTO)	神戸大学大学院理学研究科数学専攻
カスプ辺の平行曲面について	127
隅田 大貴 (Daiki SUMIDA)	九州大学数理学研究院
On fold singularities of product maps with radially actions	131
奥田 喬之 (Takayuki OKUDA)	九州大学大学院数理学研究院
Splitting of singular fibers in barking families	135
今田 充洋 (Mitsuhiro IMADA)	慶応義塾大学大学院理工学研究科
$\mathbb{C}^{2n}$ の複素超曲面における複素概接触計量構造について	139
高橋 良輔 (Ryosuke TAKAHASHI)	名古屋大学多元数理科学研究科
On the modified Futaki invariant of complete intersections in projective spaces	143
小塚 菜美 (Nami KOZUKA)	お茶の水女子大学
リーマン面からの調和写像の収束について	147

緒方 勇太 (Yuta OGATA)	神戸大学大学院理学研究科数学専攻
3次元 Lorentz 空間内の空間的な離散平均曲率一定曲面の構成について	151
畑中 美帆 (Miho HATANAKA)	大阪市立大学理学研究科数物系専攻
Pseudograph から構成されるスピントーリック多様体	155
鎌田 英也 (Hideya KUWATA)	大阪市立大学大学院理学研究科
位相的トーリック多様体上の複素直線束の切断の有限次元性	159
佐藤 敬志 (Takashi SATO)	京都大学大学院理学研究科数学教室
GKM 理論を用いた同変ファイバー束の解析について	163
大森 源城 (Genki OMORI)	東京工業大学理工学研究科数学専攻
非有向閉曲面の $\mathbb{Z}_2$ 係数 1 次ホモロジー上の交叉形式を保つ自己同型群の有限表示	167
久野 恵理香 (Erika KUNO)	大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Uniform hyperbolicity for curve graphs of nonorientable surfaces	171

● パラレルセッション (会場C)

町田 夏久子 (Kakuko MACHIDA)	早稲田大学理工学術院基幹理工学研究科数学応用数理 専攻
スイッチングシステムを用いた近似最適制御の構成	177
鈴木 拓也 (Takuya SUZUKI)	東京大学大学院数理科学研究科
C^1 級領域上の有界関数空間での高階楕円型作用素が生成する半群の解析性について	181
劉 曉静 (Xiaojing LIU)	茨城大学理工学研究科宇宙地球システム専攻
Remarks on the strong maximum principle involving p-Laplacian	185
谷口 晃一 (Koichi TANIGUCHI)	中央大学大学院理工学研究科数学専攻
Scattering problem for semilinear wave equation with a potential	189
米山 泰祐 (Taisuke YONEYAMA)	東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
波束変換を用いた散乱理論の展開	193
富澤 佑季乃 (Yukino TOMIZAWA)	中央大学理工学部数学科
準線形波動方程式の初期値問題の可解性	197
高橋 甫宗 (Toshinori TAKAHASHI)	近畿大学大学院総合理工学研究科理学専攻
On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a Stokes curve of loop type	201
李 正勲 (Jeonghun YI)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科
非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理の別証明	205
船川 大樹 (Daiju FUNAKAWA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
場の量子論のモデルにおける縮退度の評価について	209
和田 和幸 (Kazuyuki WADA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
複素スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群について	213
日高 建 (Takeru HIDAKA)	九州大学大学院数理学研究院
準相対論的な Pauli-Fierz 模型のスペクトル解析	217

井元 隆史 (Takashi IMOTO)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
拡張した量子ハイゼンベルク模型の鏡映正值性を用いた解析		221
浅原 啓輔 (Keisuke ASAHARA)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
d 次元水素様原子ハミルトニアン自己共役性		225

● パラレルセッション (会場 D)

寺西 功哲 (Noriaki TERANISHI)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
時間作用素について		231
山口 崇幸 (Takayuki YAMAGUCHI)	広島大学理学研究科数学専攻	
Gray-Scott モデルのトランジェント軌道に対する共変 Lyapunov ベクトルの引き戻しによる数値解析		235
平川 義之輔 (Yoshinosuke HIRAKAWA)	慶應義塾大学大学院理工学研究科	
On the descent of modular Calabi-Yau varieties arising from the Cynk-Hulek construction		239
中屋 智瑛 (Tomoaki NAKAYA)	九州大学大学院数理学府数理学専攻	
ある微分方程式のモジュラー形式解と楕円曲線の超特異多項式		243
板垣 智洋 (Tomohiro ITAGAKI)	東京理科大学大学院理学研究科数学専攻	
Notes on the Hochschild homology dimension and truncated cycles		247
千野 由喜 (Yuki CHINO)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
ランダムピニング模型における相転移・臨界現象について		251
秋田 大 (Dai AKITA)	北海道大学大学院生命科学院	
信号処理理論のための超関数の積および畳み込み		255
江夏 洋一 (Yoichi ENATSU)	東京大学大学院数理科学研究科	
Asymptotic behavior of solutions of renewal equations in epidemiology		259
赤間 知子 (Tomoko AKAMA)	上智大学理工学部物質生命理工学科	
演算子の変換に基づく時間微分方程式の効率的な数値解法：3 項間漸化式法の開発		263
山本 健 (Ken YAMAMOTO)	中央大学理工学部物理学科	
ベキ乗則を導く確率モデルと映画の統計データへの適用		267
青山 暢 (Toru AOYAMA)	神戸大学理学研究科数学専攻	
イデアルの素分解におけるモジュラーアルゴリズムの応用		271
柴田 和樹 (Kazuki SHIBATA)	立教大学大学院理学研究科	
切断イデアルに対応する半群環の strongly Koszul 性について		275
亀山 統胤 (Noritsugu KAMEYAMA)	信州大学大学院総合工学系研究科	
フロベニウス拡大とアウスランダー・ゴーレンステイン環		279

● ポスターセッション (会場 E)

伊東 杏希子 (Akiko ITO)	神奈川大学工学部数学教室	
類数が 3 で割れる二次体のある無限族の存在について		285
小原 まり子 (Mariko OHARA)	東北大学大学院理学研究科数学専攻	
On algebraic K -theory of quasi-coherent modules over spectral schemes		289

小野塚 友一 (Tomokazu ONOZUKA)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科	
等号付き多重ゼータ関数の非零領域		293
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)	九州大学大学院	
Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の極小自由分解について		297
小坂 亘 (Wataru KOSAKA)	北海道大学大学院工学院量子理工学専攻	
非一様電磁場中の単一荷電粒子に対する量子論的数値解析		301
Chan Poh Kam (Poh kam CHAN)	北海道大学大学院量子理工学専攻	
Quantum Mechanical Diffusion of a Magnetized Particle in the Presence of a Field Particle in the Extended Gyration Cycle		305
小山 民雄 (Tamio KOYAMA)	東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻	
Holonomic modules associated with multivariate normal probabilities of polyhedra		309
栗田 紘大 (Kodai KURITA)	北海道大学大学院工学院量子理工学専攻	
重みを考慮した不完全投影データからの CT 再構成法		313
一木 信吾 (Shingo ICHIKI)	東京大学大学院工学系研究科	
吸脱着を持つ一次元非対称単純排他過程の動力学について		317
恩田 将樹 (Masaki ONDA)	自由学園最高学部数理情報研究室	
パターン認識を用いたかたちと動きの数理解析		321
本多 俊一 (Shunichi HONDA)	室蘭工業大学大学院工学研究科数理システム工学専攻	
枠付き曲線の縮閉線について		325
竹内 司 (Tsukasa TAKEUCHI)	東京理科大学大学院理学研究科数学専攻	
Integrability in the geodesic flow for the Berger metric		329
行野 亘 (Wataru YUKUNO)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
ジェネリックなベクトル場の生成系における一般化されたサブリーマン多様体上の異常測地線の性質について		333
可香谷 隆 (Takashi KAGAYA)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
自由境界の外力項付き曲率流方程式に対する解の挙動と最大存在時刻		337
大澤 進 (Susumu OSAWA)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
Quantum Estimation Theory of Quantum Statistical Mechanics		341
北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA)	お茶の水女子大学理学部数学科	
作用素環による McKay 対応の拡張		345

世話人： 船川大樹 (代表) 可香谷隆 加葉田雄太郎 佐々木克真
武田裕康 千野由喜 土田旭 山下達也 和田和幸

Schedule

3月2日(月)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	大泉 嶺 (数理)			
11:20-12:20	渡辺 朋成 (解析)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	服部 至宏 (代数)	Deolindo Silva (幾何) Jorge Luiz	町田 夏久子 (解析)	寺西 功哲 (数理)
14:50-15:20	門田 慎也 (代数)	寺本 圭佑 (幾何)	鈴木 拓也 (解析)	山口 崇幸 (数理)
15:40-16:10	鈴木 雄太 (代数)	隅田 大貴 (幾何)	劉 曉静 (解析)	平川 義之輔 (代数)
16:30-17:00	Ade Irma Suriajaya (代数)	奥田 喬之 (幾何)	谷口 晃一 (解析)	中屋 智瑛 (代数)
17:20-17:50	古牧 弘幸 (代数)	今田 充洋 (幾何)	米山 泰祐 (解析)	板垣 智洋 (代数)

3月3日(火)

10:00-11:00	稲葉 和正 (幾何)			
11:20-12:20	小川 泰朗 (代数)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	土谷 昭善 (代数)	高橋 良輔 (幾何)	富澤 佑季乃 (解析)	千野 由喜 (数理)
14:50-15:20	田端 亮 (代数)	小塚 菜美 (幾何)	高橋 甫宗 (解析)	秋田 大 (数理)
15:40-16:10	百瀬 康弘 (代数)	緒方 勇太 (幾何)	李 正勲 (解析)	江夏 洋一 (数理)
16:30-18:00	ポスターセッション (会場 E)			

3月4日(水)

10:00-11:00	川本 昌紀 (解析)			
11:20-12:20	小川 駿 (数理)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	黒田 匡迪 (代数)	畑中 美帆 (幾何)	船川 大樹 (解析)	赤間 知子 (数理)
14:50-15:20	植松 哲也 (代数)	楢田 英也 (幾何)	和田 和幸 (解析)	山本 健 (数理)
15:40-16:10	山下 達也 (幾何)	佐藤 敬志 (幾何)	日高 健 (解析)	青山 暢 (代数)
16:30-17:00	荒川 智匡 (代数)	大森 源城 (幾何)	井元 隆史 (解析)	柴田 和樹 (代数)
17:20-17:50	野本 文彦 (代数)	久野 恵理香 (幾何)	浅原 啓輔 (解析)	亀山 統胤 (代数)
18:30-20:30	懇親会 (中央食堂)			

3月5日(木)

10:00-11:00	小鳥居 裕香 (幾何)			
11:20-12:20	中島 規博 (代数)			
12:20-12:30	閉会			

シングルセッション 会場 S

生物個体と集団の数理

¹ 大泉嶺*

Ryo Oizumi*

¹ 明治大学研究・知財戦略機構, 東京大学数理科学研究科
oizumi@ms.u-tokyo.ac.jp

1 概要

政治、環境保全、生態学的興味など、多くの動機から我々の社会は人間を含めた生物個体群の動態に関心を寄せてきた。人に限れば、その将来の人口構成を予測する事は国の政策や社会保障、公衆衛生や経済を考える上で有益な情報をもたらす。また、絶滅危惧種の個体群動態が予測出来れば、その種の保全にとって何が有益であるか、多くのヒントを与えてくれるはずである。そんな動機から生まれた分野に数理人口学という分野がある。名前の通り、この分野は人間の集団の数の変動を予測する為に生まれたものだが、現在その手法は人間に限らず様々な生物個体の持つ性質（年齢、サイズや空間的位置など）からその生物集団全体の動態（人口の増減）を議論するより一般的な数理生物学分野の一つになっている。ある意味この分野はミクロな粒子の相互作用からマクロな現象（熱力学など）の説明を試みる統計力学の生物学版と考える事も出来る。本講演では個体の生活史の統計量を与えた場合、その個体群の動態にどう影響するのか、その手法を紹介する。

2 推移行列モデルの基本

まず、最も基本的なモデルとして Leslie 行列を紹介しよう。最大齢 α を持ち、各齢 $\mathbf{a} := (0, 1, 2, \dots, a, \dots, \alpha)$ 毎に出生率 f_a と次齢への生存率 p_a を持つコホート（同じ齢のカテゴリに属する集団） $P_t(a)$ が次を満たすとする:

$$P_{t+1}(0) = \sum_{a=0}^{\alpha} f_a P_t(a) \quad (1)$$

$$P_{t+1}(a+1) = p_a P_t(a). \quad (2)$$

このとき、これらのコホートで構成された個体群全体

$$\mathbf{P}_t(\mathbf{a}) := {}^t(P_t(0), \dots, P_t(a), \dots, P_t(\alpha))$$

(人口ベクトル) の動態は、推移行列 $\mathbf{L}$ を用いて下記のように表される。

$$\mathbf{P}_{t+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{L}\mathbf{P}_t(\mathbf{a}), \quad (3)$$

ここで

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_a & \cdots & f_\alpha \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{\alpha-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

である。これは Leslie 行列と呼ばれる、個体群の年齢構造に焦点を当てた基本的な推移行列モデルである。人間に当てはめる場合、 f_a は a 歳の女性のコホート $P_t(a)$ の女性の出生率を表し、 p_a は女性のための生存率である。人口学では簡単のために、しばしば女性のみの動態で人口全体を論ずることがある [1]。推移行列モデルの解析で中心的な役割を演じるのはその行列の最大固有値である。Leslie 行列の場合、全ての固有値 λ は以下の方程式を満たす：

$$1 = \sum_{a=0}^{\alpha} \lambda^{-a-1} f_a s_a. \quad (5)$$

ここで、 $s_a := \prod_{l=0}^{a-1} p_l$ は年齢 a まで生き残る確率（生存率という）を表す。式 (5) を満たす最大の固有値を λ_0 とおくと、Leslie 行列のような非負行列では Perron–Frobenius の定理によって λ_0 は正の実数であることが示せる [2]。式 (5) の右辺は λ に関して単調減少関数であることから、これが唯一である事もわかる。また、この λ_0 はその個体群成長率を表している。例えば、 λ_0 が 1 を上回れば個体群は増加傾向であるし、逆に 1 を下回れば減少傾向にあると考えられる。加えて、式 (5) は個体レベルの統計量（出生率や生存率）から集団全体の動態に変換するという点で、非常に重要な意味を持つ等式であるため、Euler-Lotka 方程式と名付けられている。

一方で、野外調査や植物などの実証研究を中心とするとき、Leslie 行列のようなフレームワークは有用ではない場合がある。例えば野外におけるある植物個体群を初めて対象とする際、現存する各個体の年齢は明らかでないことがある。そういう場合、年齢ではなくサイズやバイオマス、葉の数などのステージをカテゴリ別に構成した推移行列が役に立つ。そうすると種や個体群ごとに推移行列は多様な形状を持ち、Leslie 行列のような次年齢への生存率以外の成分は全て 0 といった見やすい形や、Euler-Lotka 方程式のように固有方程式の係数が常に生物学的に解釈が出来るとは限らなくなる。そのため、研究者は調査対象の特性に合わせて、推移行列の選択または構築をしなければならない。こういった推移行列の多様性や一般論に興味がおありの方は次の文献を参照されたい [3, 4]。

3 齢-サイズ推移行列モデル

これまでの話は、推移行列モデルを扱った本であればどこにでも書いてあるような話である．Leslie 行列と齢以外の行列モデル（例えばサイズ）との間は、常に一長一短の関係がある．前者はコホートのダイナミクスを記述しているため、各個体の生育過程と個体群動態を結びつけてはいるが、生育速度の違いによる出生率の差などの個体差の影響は考慮されない．一方、その他の推移行列は種の特性を活かせる構造を重視しているので、個体差の推移を表すという点では前者のモデルより優れてはいる．しかし、年齢を考慮していないので、その特徴に属する人口ベクトルの成分が生育過程のどの齢のどの段階からなるものであるかは言及されない．これらの制約は理論的限界というよりも、むしろ先述の調査・実験・データ解析の限界から来るものである．実際の生物はコホートを持ち、種の持つ特性毎にコホート内に個体差が生じるというのが本来のあるべき姿であろう．理論はそういった技術的制約にとらわれる必要はないのでその一長一短を解決するとどうなるか、それを考察しようと思う．

ここで任意の $M \times M$ 非負値正方行列 $\mathbf{K}$ を考える．具体的なイメージを持っていたくためにこの行列はコホート内のサイズ成長の推移を表すとしよう、その成分 $k_{a,m'm}$ は m' 番目のサイズカテゴリに属している個体が次の年に生き残りかつ m のカテゴリまで成長する確率を表し、次を満たすとする：

$$p_{a,m'} = \sum_{m=1}^M k_{a,m'm} \leq 1. \quad (6)$$

$p_{a,m'}$ は a 歳で m' のカテゴリにいた個体の生存率を表すとする．また、各サイズカテゴリ $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, \dots, y_M)$ に対して出生率 $\mathbf{F} := (f_1, \dots, f_m, \dots, f_M)$ を対応させる ($\mathbf{F}$ は齢には依らない)．Leslie 行列の構造に倣いこれらを組み合わせて以下の推移行列を得る．

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} f_1 & \mathbf{F} & \dots & \mathbf{F} & \dots & \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_0 & O & \dots & O & \dots & O \\ 0 & \mathbf{K}_1 & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & O & \ddots & O & \dots & O \\ 0 & \dots & O & \dots & \mathbf{K}_{\alpha-1} & O \end{bmatrix} \quad (7)$$

O は $M \times M$ 零行列、 $\mathbf{K}_a = (k_{a,m'm})$ は齢毎に成分の値が異なっても構わない事を意味する、見やすくするため今後 a の表記は省略する．また、簡単のため、0 歳個体は全て同一のサイズ y_1 で生じる事を仮定する．そのため、 $\mathbf{K}_0 :=$

${}^t(k_{11}, k_{12}, k_{13}, \dots, k_{1m}, \dots, k_{1M})$ とし、1 行 1 列目の成分 f_1 はスカラーとする． $\omega = 1 + \alpha \times M$ とするなら $\mathbf{H}$ は $\omega \times \omega$ 齢-サイズ推移行列である．加えて、人口ベクトルを $\mathbf{P}_t(\mathbf{a}, \mathbf{y}) := {}^t(P_t(0, y_1), \dots, P_t(a, y_m), \dots, P_t(\alpha, y_M))$ とおけば

$$\mathbf{P}_{t+1}(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \mathbf{H}\mathbf{P}_t(\mathbf{a}, \mathbf{y}), \quad (8)$$

となるので、理論上はこのようにして二つの推移行列モデルの短所を補う事が可能である．モデル (8) の演算を見やすくするためにコホートごとの発展方程式で書くと

$$P_{t+1}(0, y_1) = \sum_{a=0}^{\alpha} \sum_{m=1}^M f_m P_t(a, y_m) \quad (9)$$

$$P_{t+1}(a+1, y_m) = \sum_{m'=1}^M k_{m'm} P_t(a, y_{m'}) \quad (10)$$

となる．Leslie 行列のそれ (式 (1),(2)) と比べると、このモデルは一つの状態への推移はコホート中の多状態からの推移により構成される．すなわち、コホート内の個体の個性を Leslie 行列内に表現したと解釈できる．実はこの式 (9)、(10) が本稿で主題となる確率解析との関連の入り口となる．

4 確率過程として見る生育過程

この節では式 (10) に着目し、生育過程の視点からこれを眺める．そのため、式 (8) の生育過程の統計量として、ある表現を導出する．まず式 (10) を漸化式と思い形式的に解く、

$$P_t(a, y_m) = \sum_{m'=1}^M \sum_{m''=1}^M \cdots \sum_{m^{(a)}=1}^M \overbrace{k_{m'm} k_{m''m'} \cdots k_{1,m^{(a)}}}^{a \text{ 個の積}} P_{t-a}(0, y_1). \quad (11)$$

この等式の右辺は $k_{m'm}$ の定義より「齢 0 のときサイズカテゴリ y_1 であった個体が齢 a でサイズカテゴリ y_m までに“死なずに”到達する一つの成長“経路”の実現確率」を表す．そして和算 $\sum$ を含めると右辺は時刻 $t-a$ において新生児であったコホート $P_{t-a}(0, y_1)$ が「 y_1 から齢 a で y_m に生き残って達する全ての成長“経路”の実現確率の和」をもって y_m に至る個体数の期待値を表している (図 1 参照)．ここで、あえて $k_{m'm}$ を純粋な $y_{m'}$ から y_m への推移確率 $k'_{m'm}$ とそのカテゴリでの生存率 $p_{a,m'}$ にわけて記述する

$$k_{m'm} = k'_{m'm} p_{a,m'}. \quad (12)$$

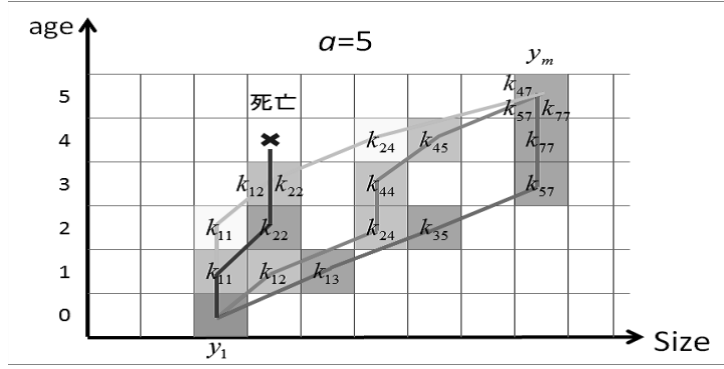


図1 この図は $a = 5$ とした場合の y_1 から y_m の成長経路のサンプルが図示されている．それぞれ同色の色は1個体のサイズカテゴリの推移を表している（重なったところは合成色で表される）．この図では実際 M^4 本の経路が考えられ各カテゴリが別々の生存率を持つとすれば経路ごとに異なる M^4 通りの生残率が得られる．

図.1 で示したような成長経路は、この推移確率 $k'_{m'm}$ によって生成される．したがって、一個体の生育過程は $k'_{m'm}$ に従うサイズの確率変数列

$$\{Y_a\}_{a \in [0, \alpha]}, \quad Y_a \in \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, \dots, y_M\} \quad (13)$$

で表す事が出来る．このとき生残率 $p_{a,m}$ は y_m の関数として考えれば、適当な2変数関数 $\mu(a, y_m) \geq 0$ を用いて

$$p(a, Y_a) = \exp \{-\mu(a, Y_a)\} \quad (14)$$

と書き換えられ、同様に出生率も $f(Y_a)$ と表せられる．式(12)に話を戻すと、この表記で書き換えた式(11)を(9)に代入して整理し以下の表現を得る．

$$\begin{aligned} P_{t+1}(0, y_1) &= \sum_{a=0}^{\alpha} \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \cdots \sum_{m^{(a)}=1}^M f_m S_a \overbrace{k'_{m'm} \cdots k'_{1,m^{(a)}}}^{\text{経路の確率}} P_{t-a}(0, y_1) \\ &= \sum_{a=0}^{\alpha} \mathbb{E}_{y_1} [f(Y_a) S_a] P_{t-a}(0, y_1) \\ S_a &:= \underbrace{\exp \left\{ - \sum_{l=0}^{a-1} \mu(l, Y_l) \right\}}_{\text{経路ごとの生残率}} = p_{a-1,m'} \cdots p_{0,m^{(a)}} \end{aligned} \quad (15)$$

生存率がサイズカテゴリ毎に異なる事から、生残率も成長経路に依存する．つまり、新規個体の再生産過程である式 (9) は成長経路全体が持つ確率 (確率測度) を用いて、 y_1 を初期値とする齢 a における出生率と生残率の積の期待値で書き下せる事を示している—これは動物で言えば、 y_1 で生まれた雌個体が齢 a で産む娘の数の期待値を表す．

5 Euler–Lotka 方程式の一般化

では、元の推移行列モデル (8) のダイナミクスは式 (15) で得られた統計量とどういった関係を持つであろうか．まず、式 (8) の固有値・固有ベクトルをそれぞれ λ 、 $\mathbf{P}^*(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = {}^t(P^*(0, y_1), \dots, P^*(a, y_m), \dots, P^*(\alpha, y_M))$ とおくと

$$\mathbf{H}^t \mathbf{P}^*(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \lambda^t \mathbf{P}^*(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \quad (16)$$

を満たすのは良く知られた事実である．これより式 (15) は

$$\lambda^{t+1} P^*(0, y_1) = \sum_{a=0}^{\alpha} \mathbb{E}_{y_1} [f(Y_a) S_a] \lambda^{t-a} P^*(0, y_1) \quad (17)$$

となり、両辺を整理して式 (8) の固有方程式

$$1 = \sum_{a=0}^{\alpha} \mathbb{E}_{y_1} [f(Y_a) S_a] \lambda^{-a-1} \quad (18)$$

を得る [5]．式 (5) と見比べれば、これは Euler–Lotka 方程式の一般化に他ならない．なぜなら $f(\cdot)$ も $\mu(\cdot)$ も齢 a にしか依存しないのであれば、全ての経路の確率の和は 1 であるので式 (18) は式 (5) と同じになるからである．ちなみに初期サイズを全て y_1 とおいたのは、この形を導出するためである．加えて $\mathbf{K}$ が任意の非負値正方行列で成り立つことから、 $\mathbf{K}_{\{\dots\}}$ を様々な推移行列に対応させる事が出来る．例えば

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\{\text{サイズ}\}} \otimes \mathbf{K}_{\{\text{繁殖器官サイズ}\}} \otimes \mathbf{K}_{\{\text{空間的位置}\}} \otimes \dots \quad (19)$$

といった多変量の特性を与えた行列においても同様に固有値を計算する事ができる．式 (18) を眺めると、この個体群動態は出生率 $f(\cdot)$ 、死亡率の関数形 $\mu(\cdot)$ 、そして個体の生育過程 Y_a の統計的性質によって支配されていることに気づく．ならば逆に、この三つを先に与えたとして、個体群動態はどのようにこれら個体の持つ統計量の影響を受けるのか？ また、実際の動植物のサイズ成長などは大抵連続な量と考える方が自然である．そうすると有限サイズの推移行列では足りず $\infty \times \infty$ の行列と、離散確率過程 Y_a から拡散過程 X_a (連続確率過程) へ、それに伴い齢 a や時刻 t も連続量とし

て考える必要が出てくる．例えば、生物の齢 a における状態 $X_a \in A \subseteq \mathbb{R}^d$ （サイズ、ある遺伝子の発現量など）の発展方程式を Itô 型確率微分方程式

$$\begin{aligned} dX_a^j &= g_j(X_a) da + \sum_{k=1}^N \sigma_{jk}(X_a) dB_a^k \\ X_0^j &= x^j \end{aligned} \quad (20)$$

$(1 \leq j \leq d)$ で与えたとする．つまり、個体差とはこの方程式の生み出すサンプルパスの違いということである．また各個体の状態に依存した繁殖率を $F : A \rightarrow [0, \infty)$ 、死亡率を $\mu : A \rightarrow (0, \infty]$ とすることによってこれら三つの要素を生物の生活史と呼ぶことにする．式 (15) に対応する新規個体の密度 $n_t(x)$ の動態は

$$n_t(x) = G_t(x) + \int_0^t da \, n_{t-a}(x) \mathbb{E}_x \left[F(X_a) \exp \left\{ - \int_0^a d\tau \, \mu(X_\tau) \right\} \right] \quad (21)$$

$G_t(x)$ を $(t < a)$ からの情報: で与えられる [6]．式 (9) の右辺の被積分関数に式 (15) と同じ期待値が出現しているがこれの正当性は Feynman–Kac の公式 [7] よりいえる．この関数を $u_a(x) := \mathbb{E}_x [F(X_a) \exp \{ - \int_0^a d\tau \, \mu(X_\tau) \}]$ とすると、この公式より

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} u_a(x) = -H_x^* u_a(x) \\ H_x^* := - \sum_{j=1}^d g_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^d c_{j,j'}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^{j'}} + \mu(x) \\ c_{j,j'}(x) := \sum_{k=1}^N \sigma_{jk}(\xi) \sigma_{j'k}(\xi) \\ u_0(x) = F(x). \end{cases} \quad (22)$$

を満たす事が知られている．Laplace 変換を

$$\hat{f}_r = \int_0^\infty dt \exp \{ -rt \} f(t)$$

とすれば式 (21) は

$$\hat{n}_r(x) = \hat{G}_r(x) + \hat{n}_r(x) \hat{u}_r(x) \quad (23)$$

となり、整理して逆変換をすると

$$n_t(x) = \lim_{\beta \downarrow \infty} \int_{\gamma-\beta}^{\gamma+\beta} dr \int_0^\infty dt \exp \{ rt \} f(t) \frac{\hat{G}_r}{1 - \hat{u}_r(x)} \quad (24)$$

であるから、内的増加率 r^* は

$$1 = \int_0^\alpha da \exp\{-r^*a\} \mathbb{E}_x \left[F(X_a) \exp \left\{ - \int_0^a d\tau \mu(X_\tau) \right\} \right] \quad (25)$$

を満たす．このとき r^* は実数で単根、さらに正数 Q, η を用いて以下を満たす (Sharp–Lotka–Feller の定理 [1]) :

$$n_t(x) = Q \exp\{r^*t\} (1 + O(\exp\{-\eta t\})) \quad (26)$$

このように我々は、式 (22)、(25) を用いることで、確率微分方程式によるモデルで組み立てた生活史によって個体差を考慮した個体群動態を解析する事が可能になる．

参考文献

- [1] 稲葉寿, 数理人口学, 東京大学出版会, 2002.
- [2] 巖佐庸, 数理生物学入門: 生物社会のダイナミックスを探る, 共立出版, 1998.
- [3] 瀬野裕美, 数理生物学会, 「数」の数理生物学, 共立出版, 2008.
- [4] H. Caswell, Matrix population models, Wiley Online Library, 2006.
- [5] R. Oizumi, Unification theory of optimal life histories and linear demographic models in internal stochasticity, PLOS ONE 9 (6) (2014) e98746.
- [6] R. Oizumi, T. Takada, Optimal life schedule with stochastic growth in age-size structured models: theory and an application, Journal of Theoretical Biology 323 (2013) 76–89.
- [7] B. Øksendal, Stochastic differential equations: an introduction with applications, Springer Verlag, 2003.

消散型波動方程式における Strichartz 型評価とその応用

広島大学理学研究科 渡辺 朋成*

1 序

次の非斉次偏微分方程式を考える.

$$(DW) \quad \partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) + \partial_t u(t, x) = h(t, x)$$

ここで $u(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, h は既知関数であり, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$ である. 方程式 (DW) を消散型波動方程式と呼ぶ.

消散型波動方程式は波動現象を表す波動方程式 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ に, 消散 (摩擦) の効果をあらわす消散項 $\partial_t u$ を加えたものとみなすことができ, 摩擦のある弦の振動や, ケーブルを使った信号の伝播などを表現することが知られている. 物理的には消散項として, 速度を変数とする正值関数 $B(\partial_t u) \geq 0$ を採用した

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) + B(\partial_t u) = h(t, x)$$

を消散型波動方程式と呼ぶほうが一般的である. 実際に様々な形の消散項 $B(\partial_t u)$ についての研究の存在するが, ここでは最も簡単な線形の場合 $B(\partial_t u) = \partial_t u$ を考えることにする.

2 Fourier 変換と Sobolev 空間

現在の偏微分方程式の解析において, Fourier 変換 (周波数表示) は重要な方法として用いられている. ここでは Fourier 変換を用いて, 消散型波動方程式 (DW) の解を求めることを目指す.

*email:watanabe-to@hiroshima-u.ac.jp

定義 1 (Fourier 変換). *Fourier* 変換 $\mathcal{F}$ と *Fourier* 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を次で定める.

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}_x^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad (1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}_\xi^d} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi. \quad (2)$$

ここで $f: \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}_\xi^d \rightarrow \mathbb{R}$ である.

Fourier 変換の有用な点として, “都合の良い” 性質を持つ関数 f に対しては, 次の事実が成立することが挙げられる.

事実 1.

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f.$$

事実 2.

$$\xi_j \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[-i\partial_j f](\xi) \quad (j = 1, 2, \dots, d), \quad \text{特に} \quad \mathcal{F}[-\Delta f] = |\xi|^2 \mathcal{F}[f].$$

事実1は, $\mathcal{F}$ の逆写像は $\mathcal{F}^{-1}$ であることを意味する. 一方事実2は, $\mathbb{R}_x^d$ における微分という操作が, $\mathbb{R}_\xi^d$ では多項式を掛けるという操作に対応することを意味する. これらの事実を用いると, いくつかの線形偏微分方程式を (形式的に) 解くことができる.

例 1 (熱方程式).

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) - \Delta v(t, x) = 0, \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases}$$

の解は

$$v(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{t|\xi|^2} \mathcal{F}[v_0] \right] (x) =: (e^{-t\Delta} v_0)(x).$$

例 2 (波動方程式).

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t, x) - \Delta w(t, x) = h(t, x) \\ (w(0, x), \partial_t w(0, x)) = (w_0(x), w_1(x)) \end{cases}$$

の解は

$$w(t) = \cos(t|D|)w_0 + \frac{\sin(t|D|)}{|D|}w_1 + \int_0^t \frac{\sin((t-s)|D|)}{|D|}h(s, \cdot)ds$$

ただし $D = (-i\partial_1, \dots, -i\partial_d)$.

同様にして, Fourier 変換による議論を用いることで, 消散型波動方程式 (DW) の解も, 形式的に次で与えられることがわかる。

$$u(t, x) = K_0(t, D)u_0 + K_1(t, D) \left(\frac{1}{2}u_0 + u_1 \right) + \int_0^t K_1(t-s, D)h(s, x)ds, \quad (3)$$

$$K_0(t, \xi) = e^{-\frac{t}{2}} \cos(t\varphi(\xi)), \quad K_1(t, \xi) = e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin(t\varphi(\xi))}{\varphi(\xi)},$$

ただし

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} & (|\xi| > \frac{1}{2}) \\ i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} & (|\xi| \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

さて, こうして形式的に (DW) の解が得られた. しかしこの解は形式的な議論で得られたものであり, 数学的な正当性は怪しい. これらの議論を正当化するためには, とくに事実 1,2 が成立する “都合の良い” 関数というものをはっきりとさせなければならない.

事実 1,2 が成立するような関数の集合として, 急減少関数 (平たく言うと指数減衰しているような C^∞ 関数) の集合 $\mathcal{S}$ や, 台がコンパクトな C^∞ 関数の集合 C_0^∞ などが存在するが, 次の Lebesgue 空間はこれらを稠密集合として持つ完備距離空間であることが知られている.

$$L^p = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ (可測関数)} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty).$$

一般に L^p に属する関数は微分できない (というか通常の意味の関数ですらない). しかし事実 1,2 を用いた “広い意味の微分” を用いることで, 次の Sobolev 空間 $W^{s,p}$ ($s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$) が定義される.

$$W^{s,p} = \{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ (可測関数)} : \|f\|_{s,p} := \|(1 + |D|^2)^{s/2} f\|_p < \infty \}.$$

大雑把に言うと Sobolev 空間 $W^{s,p}$ とは, s 階まで “広い意味の微分” ができて, そのすべてが L^p に属するという関数の集合である. この Sobolev 空間が, Fourier 変換を用いた解析を行う上で基本的な空間となる.

3 消散型波動方程式の解の性質 (熱と波動成分への分解)

(DW) の解表示は得られたので, 次に興味があるのは解 u の振る舞いである. 今回考える消散型波動方程式の解の重要な性質として, 次のように熱部分と波動部分に分解できることが知られている ([5]).

$$u(t) = \underbrace{J(t)}_{\text{拡散部分}} + \underbrace{e^{-\frac{t}{2}} W(t)}_{\text{波動部分}}, \quad (4)$$

もう少し正確に述べると, $W(t)$ はある波動方程式の解であり, 拡散部分 $J(t)$ には次の熱方程式と類似した L^p - L^q 評価が成立する.

$$\|J(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(\|u_0\|_q + \|u_1\|_q) \quad (5)$$

この事実は, 元々は別の解表示を用いて示されたが, 今回は解表示 (3) から考察してみよう. 消散型波動方程式の解の発展群の Fourier 像 $K_j(t, \xi)$ は, 高周波 ($|\xi| \gg 1$) と低周波 ($|\xi| \ll 1$) では性質が大きく異なる. 具体的には高周波の場合

$$\varphi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} = |\xi| + o(|\xi|^{-1}) \quad (|\xi| \rightarrow \infty)$$

となることに注意すると,

$$K_0(t, \xi) \cong e^{-\frac{t}{2}} \cos(t|\xi|), \quad K_1(t, \xi) \cong e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

より, フーリエ像はそれぞれ波動方程式の解の発展群に近似されることが予想される. 一方で低周波の場合は

$$\varphi(\xi) = i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} = \frac{i}{2} + o(|\xi|) \quad (|\xi| \rightarrow 0)$$

となることに注意すると,

$$\hat{K}_0(\xi) \cong \frac{1}{2}e^{t|\xi|^2}, \quad \hat{K}_1(\xi) \cong e^{t|\xi|^2}$$

より, そのフーリエ像はそれぞれ熱方程式の解の発展群で近似されることが予想される.

この考察により, 消散型波動方程式の解は, 高周波成分が波動方程式の解とよく似た振る舞いをする一方, 低周波成分は熱方程式の解とよく似た振る舞いをしているのだと予想される. 実際にこの予想が正しいことは, 多くの研究によって証明されている.

熱・波動への分解 (4) が, 実は高周波・低周波への分解することに対応していることは, L^p - L^q 評価 (5) にも現れている. 評価 (5) と, 実際の熱方程式の L^p - L^q 評価が大きく異なる点は, 前者は $t = 0$ において有界である点にある. これは熱方程式の $t = 0$ での特異性が低周波成分には現れないという事実と対応しており, 消散型波動方程式 (DW) の解において $t = 0$ おける特異性は低周波部分には存在しないことを意味している. この事実は転じて, 消散型波動方程式 (DW) のもつ $t = 0$ における特異性は, 波動成分にのみ由来することを意味しており, 解の減衰が期待されない初期値 (たとえば $W^{1,2} \times L^2$ のみに属する場合) に対する解の適切性については, 波動方程式的な性質に着目しなければならないことを示唆している.

4 Strichartz 評価と解の一意存在

我々は非線形消散型波動方程式に興味を持っている. 特に次のような, べき乗型の非線形項を持つ初期値問題において, 初期データがエネルギークラス $W^{1,2} \times L^2$ にのみ属している場合に解けるかという問いは基本的な問題である.

$$(NDW) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + \partial_t)u(t, x) = |u|^{\alpha-1}u & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1) \in W^{1,2} \times L^2. \end{cases}$$

初期値がエネルギークラスにのみ所属する場合は, 一般に時間減衰評価が導出されない ((5) において $p = q = 2$ とせよ). その為消散型波動方程式の可解性議論によく用いられる, 一般的な埋め込み定理を用いた重みつきエネルギー法が使いづらい. そこで我々は, §3 で説明した解の分解を利用して時間大域的な Strichartz 型評価の導出することで, 非線形問題の可解性を議論しようと考えた.

今回得られたのは, 次の消散型波動方程式における Strichartz 型評価である.

Theorem 4.1. $d = 2$ または 3 とする. 二組の指数 (θ_j, p_j) ($j = 1, 2$) が次を満たすと仮定する.

$$(A) \quad 2 < \theta_j \leq \infty, \quad \begin{cases} 2 \leq p_j \leq \frac{2d}{d-2} & (d = 3) \\ 2 \leq p_j < \infty & (d = 2) \end{cases} \quad \text{and} \quad d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j} \right) \geq \frac{2}{\theta_j},$$

$$(B) \quad 2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j} \right) - \mu \leq \frac{2}{\theta_j} \quad \text{and} \quad \mu_j = \max \left\{ 1, (d+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j} \right) \right\}.$$

この時, 次の (I)(II) が成立する.

(I) 次を満たす $2 \leq l \leq \frac{2d}{d-1}$ と $\sigma \in [0, 1]$ が存在すると仮定する.

$$\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{l}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{\sigma}{p_2} + \frac{1-\sigma}{l} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\theta_1} = \frac{\sigma}{\theta_2}.$$

このとき, 次の評価が成立する.

$$\left\| \int_0^t K_1(t-s)h(s)ds \right\|_{L_t^{\theta_1} L_x^{p_1}} \leq C \|h\|_{L_t^{\theta_2'} W_x^{\mu_2-1, p_2'}},$$

(II) 次を満たす $\sigma \in [0, 1]$ が存在すると仮定する.

$$\frac{1}{p_2} = \frac{\sigma}{p_1} + \frac{1-\sigma}{2} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\theta_2} = \frac{\sigma}{\theta_1}.$$

このとき, 次の評価が成立する.

$$\left\| \int_0^t K_1(t-s)h(s)ds \right\|_{L_t^{\theta_1} L_x^{p_1}} \leq C \|h\|_{L_t^{\theta_2'} W_x^{\sigma(\mu_1-1), p_2'}},$$

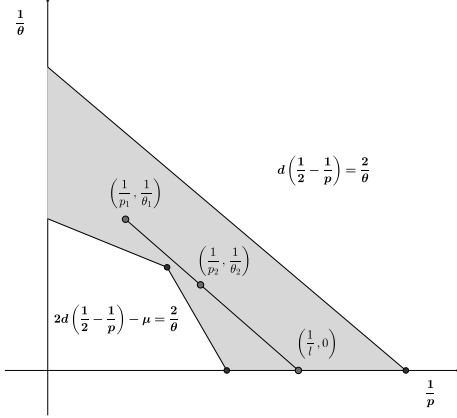


図 1: $d = 2$

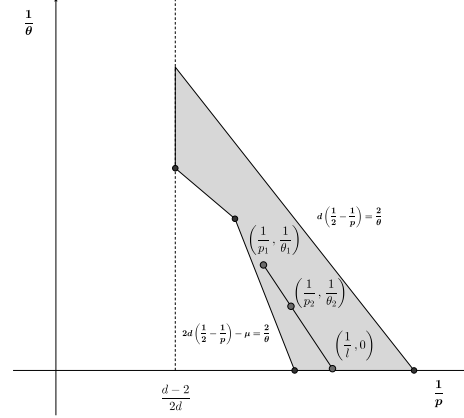


図 2: $d = 3$

(I) は $\frac{1}{p_1} \geq \frac{1}{p_2}$ の場合, (II) は $\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{p_2}$ の場合である. 条件 (A) は拡散部分に由来する制限であり, 等号を満たす (θ, p) は Schrödinger 方程式における L^2 許容指数と一致する (e.g. [2]). 一方条件 (B) は波動部分に由来する制限であり, 特に $(\frac{d-1}{2d}, 0)$ と $(\frac{d-1}{2(d+1)}, \frac{d-1}{2(d+1)})$ を結ぶ直線上で, Theorem 1 の主張は波動方程式に対する Strichartz 評価とほぼ一致する (e.g. [1]).

証明については, L^p - L^q 評価から Hardy-Littlewood 不等式を用いて $L_t^\theta L_x^p - L_t^{\theta'} L_x^{p'}$ を構成するまでは, 他の方方程式に対する Strichartz 型評価の導出の際と同様に議論される (たとえば小川 §12). $L_t^\theta L_x^p - L_t^{\theta'} L_x^{p'}$ さえ得られれば, Schrödinger 方程式や波動方程式などでは, 双対性議論 (Duality Argument) と呼ばれる手法により指数の取替えも含む評価が得られる. しかしこの議論には, 発展群のユニタリ性 (もしくは時間可逆性) が必要であり, 今回の消散型波動方程式の発展群にはそのような性質は期待されない. そこで我々は, 消散型波動方程式が持つ消散効果を代用品として利用することで, 直接補間定理を適用することを可能にし, 指数の取替えを含む Strichartz 型評価を導出した.

非線形問題 (NDW) について, 初期値がエネルギークラスのみに属する場合は, Nakao や Radu によって $1 < \alpha < \frac{d+2}{d-2}$ に対する解の一意存在が知られていた. しかしその議論は複雑であり, 特に存在時間 T が初期値のどのような量に因っているのかわかりづらいという欠点があった. さらに臨界べき $\alpha = \frac{d+2}{d-2}$ ($d \geq 3$) については局所解の存在すら示されていなかった.

そこで我々は Theorem 4.1 を用いることで, 劣臨界べきの非線形項を持つ (NDW) に対する局所解存在定理に簡明な証明を与え, さらに存在時間が初期データのエネルギーノルムにのみよることを示した.

Theorem 4.2. $d = 3$, $3 < \alpha < 5$ とし, さらに $\|(u_0, u_1)\|_{W^{1,2} \times L^2} \leq A$ を仮定する. この時ある存在時間 $T = T(A, \alpha) > 0$ が存在して (NDW) は局所一意解を次のクラ

スに持つ:

$$C^1([0, T]; L^2) \cap C^0([0, T]; W^{1,2}).$$

さらに臨界べきについても, 次の大域解の存在定理を得た.

Theorem 4.3. $d = 3, \alpha = 5$ とする. ある $\tilde{\delta} > 0$ が存在して, $\|(u_0, u_1)\|_{W^{1,2} \times L^2} \leq \tilde{\delta}$ を満たすならば, (NDW) は時間大域的な解を $C^1([0, \infty); L^2) \cap C^0([0, \infty); W^{1,2})$ 上で一意に持つ.

これらの定理の証明は, (NDW) を積分方程式に書き直し, 非線形部分を Strichartz 型評価によって処理をして, 最終的に Banach の不動点定理を適応することで完成する. この議論自体は非常にスタンダードなものであるが (たとえば Cazenave[2], 小川[6]§17 を見よ), 実際に議論が回るような Strichartz 型評価の指数 (p, θ) が取れるかどうかは問題となる. しかし今回得られた Strichartz 型評価は, すでによく知られている非線形波動方程式の可解性議論で用いられる指数と同じものが取れるため, 問題なく上の二つの定理が証明されるのである.

参考文献

- [1] J. Ginibre and G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. J.Funct. Anal., 133, 1995, 50-68.
- [2] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger Equations, American Mathematical Soc., 2003.
- [3] K. Nishihara, L^p - L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, Mathematische Zeitschrift, Volume 244, Issue 3, 2003, 631-649.
- [4] T. Watanabe, Strichartz type estimates for the damped wave equation and their application, preprint.
- [5] K. Nishihara, L^p - L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, Mathematische Zeitschrift, Volume 244, Issue 3, 2003, 631-649.
- [6] 小川卓克, 非線型発展方程式の実解析的方法 (シュプリンガー現代数学シリーズ), 丸善出版, 2012.

On deformations of isolated singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials

稲葉和正 (東北大学)*

1. Mixed polynomials

$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を複素変数 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ とその複素共役 $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ を用いて次のように表される多項式とする:

$$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} \mathbf{z}^\nu \bar{\mathbf{z}}^\mu,$$

ここで $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ に対して $\mathbf{z}^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$ ($\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ に対して $\bar{\mathbf{z}}^\mu = \bar{z}_1^{\mu_1} \cdots \bar{z}_n^{\mu_n}$) と定める. このような多項式を混合多項式と呼ぶ [18, 19]. 各 $j = 1, \dots, n$ に対して $P((0, \dots, 0, z_j, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, \bar{z}_j, 0, \dots, 0)) \neq 0$ が成り立つとき, $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は convenient であるという.

$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $\mathbb{R}^{2n}$ から $\mathbb{R}$ への実多項式写像とし, 実変数を $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ とおく. このとき $(\rho_1, \rho_2) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は次のように混合多項式写像で表すことができる:

$$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \rho_1\left(\frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2}, \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i}\right) + i\rho_2\left(\frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2}, \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i}\right),$$

ここで $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, \dots, n$).

$\Re P$ と $\Im P$ はそれぞれ混合多項式 P の実部と虚部とする. $\Re P$ と $\Im P$ のグラディエントが一次従属になる点 $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ を P の特異点という. P の特異点 $\mathbf{w}$ は次の性質をもつ.

Proposition 1 ([18] Proposition 1). 次の条件は同値である:

1. $\mathbf{w}$ は P の特異点である.
2. ある複素数 α が存在して, $|\alpha| = 1$,

$$\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial z_1}(\mathbf{w}), \dots, \frac{\partial \bar{P}}{\partial z_n}(\mathbf{w})\right) = \alpha \left(\frac{\partial P}{\partial \bar{z}_1}(\mathbf{w}), \dots, \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_n}(\mathbf{w})\right).$$

2. Milnor fibrations

$P(\mathbf{z})$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$ で消える n 変数 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ の複素多項式とする. $\mathbf{o}$ は $P(\mathbf{z})$ の特異点, つまり $(\partial P / \partial z_1)(\mathbf{o}) = \cdots = (\partial P / \partial z_n)(\mathbf{o}) = 0$ をみたす点とする. 1968 年に J. Milnor は次のことを証明した.

Theorem 1 ([14]). 十分小さい正の数 ε_0 が存在して, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ をみたす任意の正の数 ε に対し,

$$\frac{P}{|P|} : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus K_P \rightarrow S^1$$

は局所自明なファイバー束になる. ここで S_ε^{2n-1} は $(2n-1)$ 次元の原点を中心にもつ半径 ε の球面とし, $K_P = S_\varepsilon^{2n-1} \cap P^{-1}(0)$ とおく.

*e-mail: sb0d02@math.tohoku.ac.jp

このファイバー束を Milnor 束と呼ぶ. 原点が $P(\mathbf{z})$ の孤立特異点になるとき, このファイバー束の各ファイバーは $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} のブーケ $S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ と同じホモトピー型をもつ. ブーケとは S^{n-1} の μ 個のコピー $S_1^{n-1}, \dots, S_\mu^{n-1}$ を用意し, そこから 1 点 $x_j \in S_j^{n-1}$ を選ぶ. そして, 球面のコピーの非交和 $S_1^{n-1} \cup \dots \cup S_\mu^{n-1}$ において $x_1, \dots, x_\mu$ を 1 点に同一視して得られる位相空間のことをいう. この位相空間は点 x_j の選び方に依存しない. よってファイバー F のホモロジー群は

$$H_k(F; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} & k = n-1 \\ \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. またファイバー F の閉包は内部が F で境界が K_P になる滑らかな多様体である. このとき K_P はホモトピー群 $\pi_j(K_P)$ ($0 \leq j \leq n-3$) が全て自明になる滑らかな多様体である. このような多様体を $(n-3)$ -連結であるという. K_P を特異点の絡み目と呼ぶ. 複素超曲面の特異点の絡み目は, 後で説明する単純なファイバー絡み目の重要な例になっている. 例えば $n=2$ のとき, $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ としたときの K_f は (p, q) -トーラスリンクになる. 一般には複素多項式の孤立特異点から定まる絡み目はトーラスリンクのケーブルリンクで, ケーブルの係数たちはある不等式をみたしているものになる [6].

混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が非退化なとき, 複素多項式と同様に Milnor 束が存在することが知られている [19].

3. Polar weighted homogeneous mixed polynomials

$p_1, \dots, p_n$ は $\gcd(p_1, \dots, p_n) = 1$ をみたす整数, $q_1, \dots, q_n$ は非負な整数とする. このとき $\mathbb{C}^n$ 上の S^1 -作用と $\mathbb{R}^*$ -作用を次のように定義する:

$$\begin{aligned} s \circ \mathbf{z} &= (s^{p_1} z_1, \dots, s^{p_n} z_n), \quad s \in S^1. \\ r \circ \mathbf{z} &= (r^{q_1} z_1, \dots, r^{q_n} z_n), \quad r \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

もし正の整数 d_p が存在して $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が次の等式をみたすとする:

$$P(s^{p_1} z_1, \dots, s^{p_n} z_n, \bar{s}^{p_1} \bar{z}_1, \dots, \bar{s}^{p_1} \bar{z}_n) = s^{d_p} P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s \in S^1,$$

このとき混合多項式 P は polar weighted homogeneous であるという. また正の整数 d_r が存在して $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が次の等式をみたすとき, P は radial weighted homogeneous であるという:

$$P(r^{q_1} z_1, \dots, r^{q_n} z_n, r^{q_1} \bar{z}_1, \dots, r^{q_n} \bar{z}_n) = r^{d_r} P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad r \in \mathbb{R}^*.$$

polar かつ radial weighted homogeneous な混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が複素多項式のとき, $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は擬斉次多項式と呼ぶ. もし P が polar かつ radial weighted homogeneous ならば,

$$P : \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

は局所自明なファイバー束であり, モノドロミー写像 $h : F \rightarrow F$ は

$$h(\mathbf{z}) = \exp\left(\frac{2\pi i}{d_p}\right) \circ \mathbf{z} = \left(z_1 \exp\left(\frac{2p_1 \pi i}{d_p}\right), \dots, z_n \exp\left(\frac{2p_n \pi i}{d_p}\right)\right)$$

で与えられる [20, 4, 18, 19].

混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は polar かつ radial weighted homogeneous であると仮定する. このとき次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} d_p P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{\partial P}{\partial z_j} z_j - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j} \bar{z}_j \right), \\ d_r P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \sum_{j=1}^n q_j \left(\frac{\partial P}{\partial z_j} z_j + \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j} \bar{z}_j \right). \end{aligned}$$

また $j = 1, \dots, n$ に対して, $p_j = q_j$ ならば,

$$\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial P}{\partial z_j} z_j = \frac{d_p + d_r}{2} P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$$

が成り立つ.

4. Deformations

混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の変形とは多項式写像

$$F_t : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (\mathbf{z}, t) \mapsto F_t(\mathbf{z})$$

で, $F_0(\mathbf{z}) = P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ をみたすものとする. 原点 $\mathbf{o}$ は $P(\mathbf{z})$ の孤立特異点と仮定する. このとき $K_P := S_\varepsilon^{2n-1} \cap P^{-1}(0)$ は S_ε^{2n-1} に余次元 2 で埋め込まれた滑らかな多様体になる. ここで S_ε^{2n-1} は原点中心の半径 ε の $2n - 1$ 次元球面である ($0 < \varepsilon \ll 1$).

複素特異点のとき, 原点の近傍 U と $P(\mathbf{z})$ の変形 F_t で各 $0 < t \ll 1$ に対して $F_t(\mathbf{z})$ は複素多項式で, U 内の $F_t(\mathbf{z})$ の特異点は Morse 特異点になるものが存在する (Morsification) [5]. ここで Morse 特異点とは次の多項式の特異点として表される特異点のことである: $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + \dots + z_n^2$. 特に $n = 2$ のときは, Milnor 束のモノドロミー写像の計算に応用することができる [1, 8, 9, 10].

5. Milnor 数の enhancement

(S^{2n-1}, K) を絡み目, つまり K は $(2n - 1)$ 次元球面 S^{2n-1} 内の余次元 2 の向き付けられた閉多様体とする. $N(K)$ で K の S^{2n-1} 内のチューブ近傍を表し, $E(K) = S^{2n-1} \setminus \text{Int}(N(K))$ とおく. $N(K)$ が 2 次元円板上のファイバー束

$$\phi_0 : N(K) \rightarrow D^2$$

と $E(K)$ が S^1 上のファイバー束

$$\phi_1 : E(K) \rightarrow S^1$$

をもち, さらに $\phi_0|_{\partial N(K)} = \phi_1|_{\partial N(K)}$ をみたすとき, K をファイバー絡み目という. このファイバー束は S^{2n-1} のオープンブック分解とも呼ばれている. ファイバー絡み目 K が $(n - 3)$ -連結かつファイバー曲面が $(n - 2)$ -連結のとき K は単純であるという. 複素多項式から定まるファイバー絡み目は単純であることが知られている [14]. ただし, 混合多項式のときはファイバー絡み目が常に単純になるのかはわかっていない. 単純なファイバー絡み目 (S^{2n-1}, K) のファイバーの $(n - 1)$ 次ホモロジー群のランクを Milnor 数と呼び $\mu(K)$ で表す.

W. Neumann と L. Rudolph はファイバー絡み目の研究のために接束 $TS^{2n-1} \oplus \mathbb{R}$ 内の向き付けられた $(2n-2)$ 次元平面場で $E(K)$ 上では K のファイバー束の各ファイバーに横断的に交わっていて、 K 上では $K \oplus \mathbb{R}$ に接している平面場を研究した [15, 16, 17, 21]. この平面場は写像 $\Lambda : S^{2n-1} \rightarrow G(2n-2, 2n)$ を定義する. ここで $G(2n-2, 2n)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 内の向き付けられた $(2n-2)$ 次元の平面場によるグラスマン多様体である. Neumann と Rudolph はホモトピー群 $\pi_{2n-1}(G(2n-2, 2n))$ が

$$\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \oplus \pi_{2n-1}(S^{2n-2}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$$

と同型であることを示した. ここで $n=2$ のとき $r=0$ で $n>2$ のとき $r=2$ とする. さらに, Λ のホモトピー類は $((-1)^n \mu(K), \lambda(K)) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ と表すことができることを示した. この整数の組 $((-1)^n \mu(K), \lambda(K))$ のことを enhanced Milnor 数と呼び, $\lambda(K)$ のことを Milnor 数の enhancement と呼ぶ. $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が複素多項式のときは常に $\lambda(K_P) = 0$ になることが知られている. 一方で次の定理が成り立つ.

Theorem 2 ([11], Theorem 1). 任意の $k \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ に対して, $\lambda(K_P) = k$ を満たすファイバー束 $P/|P| : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus K_P \rightarrow S^1$ をもつ混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が存在する.

もし混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点に変形により Morse 特異点のみに分裂するならば, $\lambda(K_P) \geq 0$ となる. よって混合多項式の孤立特異点で Morse 特異点に分裂しないものが存在する.

6. Generic maps

X と Y はそれぞれ n 次元と m 次元の滑らかな多様体とする. また $C^\infty(X, Y)$ は X から Y への滑らかな写像全体の集合とする. $f, g \in C^\infty(X, Y)$ が $p \in X$ において r -同値であるとは, $f(p) = g(p)$ であり, p を中心とする局所座標系 (U, φ) と $f(p)$ を中心とする局所座標系 (V, ψ) に対して,

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}(\psi \circ f_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(\varphi(p)) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}(\psi \circ g_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(\varphi(p))$$

が全ての $1 \leq i \leq m$, および $k_1 + \dots + k_n \leq r$ なる負でない整数の全ての組 $(k_1, \dots, k_n)$ に対して成立するときという. ここで $f = (f_1, \dots, f_m), g = (g_1, \dots, g_m)$ とおく.

r -同値は $C^\infty(X, Y)$ の元の間と同値関係である. f の属する同値類を f の p における r -ジェットといい, 記号 $j^r f(p)$ で表す. また $f : X \rightarrow Y$ で $f(p) = q$ を満たす p における r -ジェット全体の集合を $J^r(X, Y, p, q) = \{j^r f(p) \mid f(p) = q\}$ と書き,

$$J^r(X, Y) := \bigcup_{(p,q) \in X \times Y} J^r(X, Y, p, q)$$

とおく. このとき $J^r(X, Y)$ は r -ジェット空間という. $J^r(X, Y)$ は滑らかな多様体であり, f の r -拡大 $j^r f : X \rightarrow J^r(X, Y)$ は $p \mapsto j^r f(p)$ と定義すると $j^r f$ は滑らかな写像である.

以下では $m=2$ と仮定する. $J^1(X, Y)$ は $(3n+2)$ 次元多様体である. $J^1(X, Y)$ の余次元 $(n-2+k)k$ -部分多様体を次のように定義する:

$$S_k(X, Y) = \{j^1 f(p) \in J^1(X, Y) \mid \text{rank } df_p = 2 - k\} \quad (k = 1, 2).$$

また $S_k(f)$ を次のように定義する:

$$S_k(f) = \{\mathbf{z} \in U \mid \text{rank } df(\mathbf{z}) = 2 - k\} \quad (k = 0, 1, 2).$$

ここで $S_0(f)$ は f の正則点の集合であり, $S_1(f) \cup S_2(f)$ は f の特異点集合である.

滑らかな写像 $f: X \rightarrow Y$ がジェネリックであるとは, f が次の条件をみたすときである [13]:

1. $j^1 f$ は $S_1(X, Y)$ 及び $S_2(X, Y)$ と横断的に交わる,
2. $j^2 f$ は $S_1^2(X, Y)$ と横断的に交わる,

ここで $S_1^2(f) = S_1(f|S_1(f))$ と表し, $S_1^2(X, Y)$ は次のように定義する:

$$S_1^2(X, Y) = \left\{ j^2 f(p) \in J^2(X, Y) \left| \begin{array}{l} j^1 f(p) \in S_1(X, Y), \\ j^1 f(p) \text{ is transversal to } S_1(X, Y), \\ \text{rank } d(f|S_1(f))(p) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

もし $f: X \rightarrow Y$ がジェネリックならば, ある $p \in S_1(f)$ 中心の局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ が存在して, p の近傍で f は次のいずれかの形で書ける:

$$(1) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \sum_{j=2}^n \pm x_j^2),$$

$$(2) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \sum_{j=3}^n \pm x_j^2 + x_1 x_2 + x_2^3).$$

(1) のときは p は折り目特異点であるといい, (2) のときは p はカuspであるという. また各 x_j ($j = 2, \dots, n$) の係数が全て正または負のときは定値折り目特異点と呼び, そうでないとき不定値折り目特異点と呼ぶ.

ジェネリック写像は $C^\infty(X, Y)$ 内で稠密に存在することが知られている. 4次元多様体から2次元多様体への滑らかな写像が特異点として, Morse 特異点と不定値折り目特異点しかもたないとき, broken Lefschetz fibration という [2, 3, 7, 22].

7. Main results

本講演では次のような混合多項式 $f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ の変形を考える. $f(\mathbf{z})$ と $g(\mathbf{z})$ は convenient な2変数複素擬斉次多項式で共通の分枝を持たず, 原点が孤立特異点になると仮定する.

また $\mathbb{C}^2$ 上の $\mathbb{C}^*$ -作用を次のように定義する:

$$c \circ \mathbf{z} = (c^q z_1, c^p z_2), \quad c \in \mathbb{C}^*, \quad \gcd(p, q) = 1.$$

このとき $f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ は $f(c \circ \mathbf{z})\overline{g(c \circ \mathbf{z})} = c^{pq(m-n)} f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ ($m > n$) をみたすと仮定する. U は原点 $\mathbf{o}$ の十分小さい近傍とする. 最初に次のような $f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ の変形を考える:

$$F_t(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})} + th(\mathbf{z}),$$

$$h(\mathbf{z}) = \begin{cases} \gamma_1 z_1^{p(m-n)} + \gamma_2 z_2^{q(m-n)} & (g(\mathbf{z}) \text{ は線形多項式ではない}) \\ z_1^m \bar{z}_1 + z_1^{m-1} + \gamma z_2^{m-1} & (g(\mathbf{z}) \text{ は線形多項式}). \end{cases}$$

このとき $F_t(\mathbf{z})$ の特異点は次の性質を持つ:

- $S_j(F_t)$ の各連結成分は S^1 -作用の軌道になる,
- $S_2(F_t) = \{\mathbf{o}\}$ または $\emptyset$.

さらに次の性質をみたす $h(\mathbf{z})$ の存在を示すことができる.

Theorem 3 ([12]). U 内では $S_1(F_t)$ の各点が不定値折り目特異点になり, 原点 $\mathbf{o}$ のリンク $F_t^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ が $(p(m-n), q(m-n))$ -トーラスリンクになる $h(\mathbf{z})$ が存在する.

次に定理3で得られた $F_t(\mathbf{z})$ の変形を考える:

$$F_{t,s}(\mathbf{z}) := f(\mathbf{z})\bar{g}(\mathbf{z}) + th(\mathbf{z}) + s\ell(\mathbf{z}),$$

ここで $\ell(\mathbf{z}) = c_1 z_1 + c_2 z_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 < s \ll t \ll 1$ とする.

Theorem 4 ([12]). $F_t(\mathbf{z})$ は定理3の $f(\mathbf{z})\bar{g}(\mathbf{z})$ の変形とする. このとき $S_1(F_{t,s})$ の各点が不定値折り目特異点になり, $S_2(F_{t,s})$ の各点が混合 Morse 特異点になる $\ell(\mathbf{z})$ が存在する.

ここで $\mathbf{w}$ を混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点, $c = P(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}})$ で $S_{\mathbf{w}}^{2n-1}$ は $\mathbf{w}$ 中心の球面とする. もしリンク $P^{-1}(c) \cap S_{\mathbf{w}}^{2n-1}$ が有向リンクとして複素 Morse 特異点のリンクとアイソトピックならば, $\mathbf{w}$ を混合 Morse 特異点と呼ぶ.

参考文献

- [1] N. A'Campo, *Le group de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes plane. I*, Math. Ann. **213** (1975), 1–32.
- [2] D. Auroux, S.K. Donaldson and L. Katzarkov, *Singular Lefschetz pencils*, Geom. Topol. **9** (2005), 1043–1114.
- [3] R. I. Baykur, *Existence of broken Lefschetz fibrations*, Int. Math. Res. Not. (2008), Art. ID rnn 101, 15pp.
- [4] J. L. Cisneros-Molina, *Join theorem for polar weighted homogeneous singularities*, Singularities II, edited by J. P. Brasselet, J. L. Cisneros-Molina, D. Massey, J. Seade and B. Teissier, Contemp. Math. **475**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 43–59.
- [5] W. Ebeling, *Functions of several complex variables and their singularities*, Translated from the 2001 German original by Philip G. Spain, Graduate Studies in Math. 83, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2007.
- [6] D. Eisenbud and W. Neumann, *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Annals of Mathematics Studies 110, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.
- [7] D. Gay and R. Kirby, *Constructing Lefschetz-type fibrations on four manifolds*, Geom. Topol. **11** (2007), 2075–2115.
- [8] S.M. Gusein-Zade, *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*, Funt. Anal. Appl. **8** (1974), 10–13.
- [9] S.M. Gusein-Zade, *The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces*, Russian. Math. Surveys **32** (1977), 23–69.
- [10] S.M. Gusein-Zade, *Dynkin diagrams of singularities of functions of two variables*, Funt. Anal. Appl. **8** (1974), 295–300.
- [11] K. Inaba, *On the enhancement to the Milnor number of a class of mixed polynomials*, J. Math. Soc. Japan. **66** (2014), 25–36.
- [12] K. Inaba, *On deformations of isolated singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials*, arXiv:1409.0120.

- [13] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology. **3** (1965), 263–296.
- [14] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annales of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [15] W. Neumann and L. Rudolph, *Unfoldings in knot theory*, Math. Ann. **278** (1987), 409–439.
- [16] W. Neumann and L. Rudolph, *The enhanced Milnor number in high dimensions*, Differential Topology Proceedings, Siegen 1987, edited by U. Koschorke, Springer Lecture Notes in Math. 1350, Springer-Verlag, 1988, pp.109–121.
- [17] W. Neumann and L. Rudolph, *Difference index of vectorfields and the enhanced Milnor number*, Topology, **29** (1990), 83–100.
- [18] M. Oka, *Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces*, Kodai Math. J. **31** (2008), 163–182.
- [19] M. Oka, *Non-degenerate mixed functions*, Kodai Math. J. **33** (2010), 1–62.
- [20] M. A. S. Ruas, J. Seade and A. Verjovsky, *On real singularities with a Milnor fibration*, Trends Math., edited by A. Libgober and M. Tibăr, Birkhäuser, Basel, 2003, 191–213.
- [21] L. Rudolph, *Isolated critical points of maps from $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^2$ and a natural splitting of Milnor number of a classical fibered link. Part 1*, Comment. Math. Helv., **62** (1987), 630–645.
- [22] O. Saeki, *Elimination of definite fold*, Kyushu J. Math. **60** (2006), 363–382.

Derived categories and generalized complexes

小川 泰朗*

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

概要

複体とは2-微分を有する次数付き対象のことで、数学の幅広い分野で応用されている。“2-微分”であることはどれほど本質的なのだろうか？本稿ではこの問に対する1つの解答を与える。即ち、反復代数 (repetitive algebra) を通じて構成される一般化された複体についても“良い”ホモロジー群や導来圏が定義できることを示し、これらと通常の導来圏との関係について述べる。

1 2-複体の導来圏

単位元を有する結合的な環 R に対して、その導来圏 $D(R)$ とは、環 R のホモロジー代数的構造を調べる際の良い枠組みとして Grothendieck のアイデアに基づき導入されたものである。基本的なアイデアは、複体の圏 $C(R)$ においてホモロジー群の同型を誘導する射を同型射と見做す、というシンプルなものである。本節ではこの導来圏の構成について述べる。

本稿では簡単のため、環 R として体 k 上の有限次元代数のみを扱うものとする。右 R 加群の圏 $\text{Mod} R$ における (鎖) 複体 $X^\bullet$ とは、 R 加群と R 準同型の列

$$X^\bullet = (\dots \rightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \rightarrow \dots)$$

で、全ての $i \in \mathbb{Z}$ について $d_X^{i+1}d_X^i = 0$ を満たすものを言う。複体 $X^\bullet$ の第 i 次の項を $(X^\bullet)^i = X^i$ と表すことにする。各 d^i を複体 $X^\bullet$ の微分というが、2つ合成すると0になることから、本稿ではしばしば2-微分と呼ぶことにする。合わせて複体のことも2-複体と呼ぶ。2-複体 $X^\bullet, Y^\bullet$ の間の射とは、次の図式で表されるように、各 i ごとの R 準同型 $f^i : X^i \rightarrow Y^i$ の集合で、それぞれ2-微分と可換であるもの、つまり $d_Y^i f^i = f^{i+1} d_X^i$ が全ての i で成り立つものを言う。

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \dots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow f^{i-1} & \circlearrowleft & \downarrow f^i & \circlearrowleft & \downarrow f^{i+1} & & \\ Y^\bullet : & \dots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

2-複体及びそれらの間の射からなる圏を2-複体の圏と言い $C(R)$ で表す。この2-複体の圏 $C(R)$ は懸垂と呼ばれる重要な関手を持つ。

定義 1.1. 2-複体 $X^\bullet$ に対して2-複体 $\Sigma X^\bullet$ を、

$$(\Sigma X^\bullet)^i := (X^\bullet)^{i+1}, \quad d_{\Sigma X}^i := -d_X^i$$

で定義することで、自己同型関手 $\Sigma : C(R) \rightarrow C(R)$ を得る。これを懸垂と言う。

*m11019b@math.nagoya-u.ac.jp

懸垂とは、与えられた 2-複体を左に 1 つずらす操作のことである。以下のように図示しておくとう分かり良い。

$$\begin{aligned} X^\bullet &= (\cdots \rightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} \overbrace{X^i}^{\text{第 } i \text{ 次}} \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \rightarrow \cdots) \\ \Sigma X^\bullet &= (\cdots \rightarrow X^i \xrightarrow{-d_X^i} \underbrace{X^{i+1}}_{\text{第 } i \text{ 次}} \xrightarrow{-d_X^{i+1}} X^{i+2} \rightarrow \cdots) \end{aligned}$$

逆に、右にずらす操作 Σ^{-1} を考えることも出来る。明らかに Σ と Σ^{-1} は互いに逆射になっている。

定義 1.2. 2-複体 $X^\bullet$ 及び任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して、その (i 次) ホモロジー群を

$$H^i(X^\bullet) := \text{Ker } d^i / \text{Im } d^{i-1}$$

と定める。

本稿ではこのホモロジー群を非常に重要な対象と考えることにする。然らば、2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ に誘導されるホモロジー群の間の射

$$H^i(f) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$$

が全ての i で 0 になるのはいつかを考えるのは自然なことであろう。

定義 1.3. 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは、各 i ごとの R 準同型 $s^i : X^i \rightarrow Y^{i-1}$ が存在し、 $f^i = d_Y^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d_X^i$ となることを言う。

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow f^{i-1} & \swarrow s^i & \downarrow f^i & \swarrow s^{i+1} & \downarrow f^{i+1} & & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

命題 1.4. 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が null-homotopic であれば、これに誘導されるホモロジー群の間の射 $H^i(f)$ は、全ての i で 0 となる。

これは上記の問に対する十分条件を与えている。ホモロジー群に着目した場合、null-homotopic な射を最初から 0 と見做すことは自然なアイデアであり、これを実現するものがホモトピー圏である。以下のように構成される。2-複体の圏 $C(R)$ において、null-homotopic な射を全て集めるとイデアル $\mathcal{I}$ を構成する。つまり合成可能な 3 つの射 f, g, h において、もし $f \in \mathcal{I}$ であれば、 $g \circ f, f \circ h \in \mathcal{I}$ が成り立つのである。圏 $C(R)$ をこのイデアル $\mathcal{I}$ で割ったものがホモトピー圏 $K(R)$ である。

定義 1.5. ホモトピー圏 $K(R)$ とは、次の対象及び射空間で定義される。

- (i) $\text{Ob}(K(R)) := \text{Ob}(C(R))$.
- (ii) $\text{Hom}_{K(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

ここで、 $\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$ は null-homotopic な射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ からなる $\text{Hom}_{C(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ の部分群である。

後のために、null-homotopic な射の別の定義を与えておく。

定義 1.6. 2-複体 $P^\bullet \in C(R)$ が **relative-projective** であるとは、次の形をした 2-複体 $P_i^\bullet$ の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であることを言う。

$$P_i^\bullet = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow P_i = P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots).$$

命題 1.7. 2-複体の圏 $C(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ について、以下は同値である。

- (i) 射 f は null-homotopic である。
- (ii) 射 f は、ある relative-projective な対象 $P^\bullet \in C(R)$ を経由する。即ち、

$$\begin{array}{ccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f_1} & P^\bullet & \xrightarrow{f_2} & Y^\bullet \\ & \searrow f & & \nearrow & \end{array}$$

なる分解が存在する。

次にホモトピー圏の持つ2つの重要な性質について述べる。

命題 1.8. 加群圏 $\text{Mod } R$ からホモトピー圏 $K(R)$ への自然な埋め込み関手 $\iota : \text{Mod } R \hookrightarrow K(R)$ が存在する。この埋め込みは R 加群 X に対して、2-複体 $\iota X := (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{X}_{\text{第0次}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$ を対応させるものである。

この埋め込み関手を通じて、任意の R 加群を自然に 2-複体と見做することができる。

定義 1.9. 2-複体の圏 $C(R)$ の懸垂 Σ は、ホモトピー圏 $K(R)$ の自己同型関手を誘導する。これも記号を変えず $\Sigma : K(R) \rightarrow K(R)$ で表し、懸垂と呼ぶ。

命題 1.10. 2-複体 $X^\bullet \in K(R)$ について、次の同型が存在する。

$$H^i(X^\bullet) \cong \text{Hom}_{K(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで、 R 加群 R を 2-複体と見做している。

次に 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ に誘導される、ホモロジー群の間の射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \cong H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になるもの考える。

定義 1.11. ホモトピー圏 $K(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が擬同型であるとは、これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う。

ホモトピー圏 $K(R)$ において、擬同型を同型と見做した圏を導来圏 $D(R)$ とする。より精確には、擬同型射全体のクラス S を考え、 S による $K(R)$ の Verdier 局所化 $Q : K(R) \rightarrow K(R)[S^{-1}] := D(R)$ により定義される¹。

注 1.12. 可換環 A とその積閉集合 S が与えられたとき、局所環 $R[S^{-1}]$ が定義できた。 $R[S^{-1}]$ において、 S に属する元は全て可逆元であった。実はこの操作を圏に拡張したものが上記の Verdier 局所化である。

次の命題はホモロジー代数を考える際、導来圏が良い枠組みを与えていることを示唆している。

命題 1.13. 2-複体 $X^\bullet \in D(R)$ について、次の同型が存在する。

$$H^i(X^\bullet) \cong \text{Hom}_{D(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで、 R 加群 R を 2-複体と見做している。

命題 1.10 と同様の同型が導来圏でも成り立つ。つまり、導来圏は複体のホモロジー群の情報を射空間として有しているのである。

¹Verdier 局所化及び導来圏の定義については、[Kra] が良い文献である。

2 N -複体の導来圏

本節では、2-微分の代わりに N -微分を有する N -複体を定義し、通常の 2-複体同様、ホモロジー群や導来圏が定義できることを述べる。さらに 2-複体の導来圏と N -複体の導来圏の関係について述べる。

本節を通じ $N \geq 2$ とする。加群圏 $\text{Mod} R$ における N -複体 $X^\bullet$ とは、対象と射の列

$$\cdots \rightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \rightarrow \cdots$$

で、全ての i について $d^{i-N+1} \cdots d^{i+1} d^i = 0$ を満たすものを言う。 N -複体の圏を $C_N(R)$ と表す。

定義 2.1. N -複体 $X^\bullet$ のホモロジー群 $H_{(r)}^i(X^\bullet)$ を以下で定義する。正数 $r < N$ および $i \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\begin{aligned} Z_{(r)}^i(X^\bullet) &:= \text{Ker}(d^{i+r-1} \cdots d^i) \\ B_{(r)}^i(X^\bullet) &:= \text{Im}(d^{i-1} \cdots d^{i-r}) \\ H_{(r)}^i(X^\bullet) &:= Z_{(r)}^i(X)/B_{(r)}^i(X) \end{aligned}$$

2-複体の場合同様、 N -複体の間の射にも null-homotopic が定義でき、これに誘導されるホモロジー群の間の射は 0 になる。

定義 2.2. N -複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは、各 i ごとに準同型 $s^i : X^i \rightarrow Y^{i-N+1}$ が存在し、

$$f^i = \sum_{j=1}^{N-1} d_Y^{i-1} \cdots d_Y^{i-N+j} s^{i+j-1} d_X^{i+j-2} \cdots d^i$$

となることを言う。

この定義式は少々複雑なので、例として 3-複体の null-homotopic 射を図示しておく。

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^{i-2} & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & X^i & \longrightarrow & X^{i+1} & \longrightarrow & X^{i+2} & \longrightarrow \cdots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & Y^{i-2} & \longrightarrow & Y^{i-1} & \longrightarrow & Y^i & \longrightarrow & Y^{i+1} & \longrightarrow & Y^{i+2} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

(Dotted arrows from X^{i-1} to Y^{i-2} , X^i to Y^{i-1} , X^{i+1} to Y^i , and X^{i+2} to Y^{i+1} represent the maps $s^{i-1}, s^i, s^{i+1}, s^{i+2}$ respectively.)

各 i について、 $f^i = d_Y^{i-1} d_Y^{i-2} s^i + d_Y^{i-1} s^{i+1} d_X^i + s^{i+2} d_X^{i+1} d_X^i$ が成立している。

命題 2.3. N -複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が null-homotopic であれば、これに誘導されるホモロジー群の間の射 $H_{(r)}^i(f)$ は、全ての i, r で 0 になる。

2-複体の場合同様、null-homotopic な射の全体はイデアル $\mathcal{I}$ をなし、 N -複体のホモトピー圏が定義できる。 N -ホモトピー圏 $K_N(R)$ とは、 N -複体を対象とし、任意の N -複体 $X^\bullet, Y^\bullet$ に対し射空間を

$$\text{Hom}_{K_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

により定義したものである。命題 1.7 において、2-複体の圏 $C(R)$ における射が null-homotopic であるとは、relative-projective な対象を経由することと同値であると述べた。 N -複体の圏 $C_N(R)$ においても同様の特徴付けが可能である。 $C_N(R)$ における **relative-projective** な対象 $P^\bullet$ とは次の形をした対象 $P_i^\bullet$ の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であるものを言う。

$$P_i^\bullet = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{P_i = P_i = \cdots = P_i}_{N \text{ 個}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

続いて、2-複体の場合を真似て N -複体の導来圏を定義する。

定義 2.4. N -ホモトピー圏 $K_N(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が擬同型であるとは、これに誘導される射 $H_{(r)}^i(f) : H_{(r)}^i(X^\bullet) \rightarrow H_{(r)}^i(Y^\bullet)$ が各 i, r がで同型になることを言う。

擬同型射全体 S による Verdier 局所化 $K_N(R)[S^{-1}]$ が N -導来圏 $D_N(R)$ である。通常の導来圏と同様、直観的には N -ホモトピー圏において、擬同型を同型と見做した圏である。

環 R に対して、通常の導来圏 $D(R)$ と N -導来圏 $D_N(R)$ の関係を調べるのは自然なことであろう。次の結果が知られている。

定理 2.5. [IKM] 次の圏同値が存在する²。

$$D_N(R) \simeq D(\mathbb{T}_{N-1}(R)).$$

ここで、 $\mathbb{T}_{N-1}(R)$ は上三角行列環 $\begin{pmatrix} R & \cdots & R \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & R \end{pmatrix}$ である。

この定理は環 R の N -導来圏 $D_N(R)$ が、環を取り換えることで通常の導来圏として実現できることを意味する。即ち、環 R 上で N -複体のホモロジー代数を行うことは、上三角行列環 $\mathbb{T}_{N-1}(R)$ 上で通常のホモロジー代数を行うことと同じである。

3 $\hat{A}$ -複体の導来圏

本節では、 N -複体をさらに一般化するための道具として反復代数 (repetitive algebra) を導入する。その動機付けの説明をするために、まずは N -複体の圏を以下のように捉え直す。

次の有向グラフと関係式を考える。

$$\cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \rightarrow \cdots, \quad d^N = 0 \quad (1)$$

直観的な説明ではあるが、この有向グラフの点 $\bullet$ に R 加群、矢印 $\rightarrow$ に R 準同型を、関係式 $d^N = 0$ を満たすように貼り付けると N -複体が出る。これらを全て集めたものが N -複体の圏 $C_N(R)$ である。

数学的にきちんとした定義も可能で、有向グラフ (1) に誘導される k -線型圏 $\mathcal{N}$ に対して、 $\mathcal{N}$ から $\text{Mod } R$ への共変関手全体からなる圏を $\mathcal{F}un_k(\mathcal{N}, \text{Mod } R)$ を考える。このとき、圏同値 $\mathcal{F}un_k(\mathcal{N}, \text{Mod } R) \simeq C_N(R)$ を得る。

(1) のような“良い”有向グラフを作るための道具が反復代数である。

定義 3.1. [Hap, HW] 標準 k 双対を $D := \text{Hom}_k(-, k)$ を表す。有限次元 k 代数 A に対して、その反復代数 $\hat{A}$ とは、ベクトル空間

$$\hat{A} := \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} DA \right)$$

に以下で積を定めたものである。ベクトル空間 $\hat{A}$ の元 $(a_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (b_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ に対し、

$$(a_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cdot (b_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (a_i b_i, a_{i+1} \psi_i + \varphi_i b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

と定める。

²より精確には、 $D_N(R)$ 及び $D(\mathbb{T}_{N-1}(R))$ は三角圏構造を有することが示される。即ち、この圏同値は三角同値である。

注 3.2. 反復代数 $\hat{A}$ の定義は、次のように考えておくと分かり良い。つまり、無限行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ & A & DA & \\ & & A & DA \\ 0 & & & A & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

に自然な積を定めたものである。

例 3.3. 反復代数 $\hat{A}$ の構造を表す有向グラフの例をしてみる。

(i) 体 k の反復代数 $\hat{k}$ の有向グラフは、

$$\cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \rightarrow \cdots, \quad d^2 = 0$$

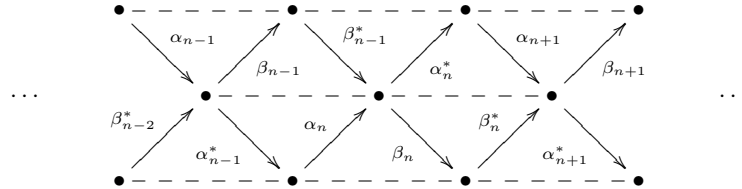
で与えられる。この有向グラフに R 加群及び R 準同型を張り付けて得られるのは、通常の 2-複体である。従って、圏同値 $\mathcal{F}un_k(\hat{k}, \text{Mod} R) \simeq \mathcal{C}(R)$ を得る。

(ii) 上三角行列環 $A = \begin{pmatrix} k & \cdots & k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k \end{pmatrix}$ の反復代数 $\hat{A}$ の有向グラフは、

$$\cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \rightarrow \cdots, \quad d^N = 0$$

で与えられる。つまり、圏同値 $\mathcal{F}un_k(\hat{A}, \text{Mod} R) \simeq \mathcal{C}_N(R)$ を得る。

(iii) 行列環 $A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ の反復代数 $\hat{A}$ を表す有向グラフは、



及び関係式 $\beta_n \alpha_n = 0, \alpha_n^* \beta_{n-1}^* = 0, \alpha_{n+1} \alpha_n^* = \beta_n^* \beta_n$ により与えられる。

以下の例から分かるように反復代数が与えられれば、それを表現する有向グラフが得られる。この有向グラフに R 加群と R 準同型を貼り付けたものが $\hat{A}$ -複体である。

定義 3.4. 反復代数 $\hat{A}$ を通じて定義した圏 $\mathcal{F}un_k(\hat{A}, \text{Mod} R)$ を、 $\hat{A}$ -複体の圏といい $\mathcal{C}_{\hat{A}}(R)$ で表す。

第 1, 2 節同様、 $\hat{A}$ -複体に対しても null-homotopic 射を定義する。 N -複体の場合は、実際に図式を使って null-homotopic を定義することができた。しかし $\hat{A}$ -複体の場合は、その形は A の取り方によって様々である。図式を使って定義することはできない。そこで利用するのが、relative-projective な対象を経由するという条件である (命題 1.7)。

定義 3.5. (i) 射影的な左 $\hat{A}$ 加群 P 及び R 加群 Z に対して、 $P \otimes_k Z$ を次の方法で $\mathcal{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象と見做す。圏 $\mathcal{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象とは $\hat{A}$ から $\text{Mod} R$ への関手であるから、

$$P \otimes_k Z : \hat{A} \xrightarrow{P} \text{Mod} k \xrightarrow{- \otimes_k X} \text{Mod} R.$$

と考えればよい。 $P \otimes_k X$ の形で書ける $\mathcal{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象を **relative-projective** と言う。

- (ii) 圏 $C_{\hat{A}}(R)$ の射 $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは, f がある relative-projective な対象を経由することを言う. つまり, ある $P \otimes_k Z$ が存在し,

$$\begin{array}{ccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f_1} & P \otimes_k Z & \xrightarrow{f_2} & Y^\bullet \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f & & \end{array}$$

と分解できることを言う.

例 3.6. 例 3.3 の場合の relative-projective な対象 $P \otimes_k Z$ の形を見てみよう.

- (i) $A = k$ の場合は, $\hat{A}$ -複体は通常の 2-複体に他ならない. 実際, relative-projective な対象は,

$$P \otimes_k Z = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow Z = Z \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

となる.

- (ii) $A = \mathbb{T}_{N-1}(k)$ の場合は, $\hat{A}$ -複体は N -複体であった. 実際,

$$P \otimes_k Z = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{Z = Z = \cdots = Z}_{N \text{ 個}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

となる.

- (iii) $A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ の場合は, 直既約射影的 $\hat{A}$ 加群 P の取り方で, 次のいずれかの形になる.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & 0 & & Z & & 0 \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ 0 & & Z & & 0 & & 0 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & 0 & & Z & & Z \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ 0 & & 0 & & Z & & 0 \end{array} \quad \cdots$$

null-homotopic 射全体はイデアル $\mathcal{I}$ を成す. $\hat{A}$ -ホモトピー $K_{\hat{A}}(R)$ とは $C_{\hat{A}}(R)$ をイデアル $\mathcal{I}$ で割ったもの, つまり射空間を

$$\text{Hom}_{K_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

としたものである.

$\hat{A}$ -導来圏を定義するには, ホモロジー群と擬同型を定義する必要がある. しかしやはり $\hat{A}$ -複体は形がはっきりと分からないため $\text{Ker } \alpha / \text{Im } \beta$ の形で定義することは出来ない. そこで, 2-複体 $X^\bullet$ のホモロジー群 $H^i(X^\bullet)$ がホモトピー圏上の射空間 $\text{Hom}_{K(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet)$ と同型であることに着目する (命題 1.10).

定義 3.7. (i) $\hat{A}$ 加群 A 及び R 加群 R に対して, $\hat{A}$ -複体 $A \otimes_k R$ を考える. このとき $\hat{A}$ -複体 $X^\bullet$ の (i 次) ホモロジー群を,

$$H^i(X^\bullet) := \text{Hom}_{K(R)}(A \otimes_k R, \Sigma^i X^\bullet)$$

で定める. ここで Σ は $K_{\hat{A}}(R)$ の懸垂である³.

- (ii) $\hat{A}$ -ホモトピー圏 $K_{\hat{A}}(R)$ の射 $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が擬同型であるとは, これに誘導される射 $H^i(f): H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う.

- (iii) 擬同型全体 S による Verdier 局所化 $K_{\hat{A}}(R)[S^{-1}]$ を $\hat{A}$ -導来圏 $D_{\hat{A}}(R)$ と言う.

³2-複体の圏において懸垂とは 2-複体を左にずらす操作であった. しかし, $\hat{A}$ -複体の懸垂はこのような簡単な記述にはならない. 任意の $\hat{A}$ -複体 $X^\bullet$ に対して, ある relative-projective な対象 $P \otimes_k Z$ 及び完全列 $0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow P \otimes_k Z \rightarrow \Sigma X^\bullet \rightarrow 0$ がいつでも存在することが示される. この Σ が $\hat{A}$ -ホモトピー圏と $\hat{A}$ -導来圏の懸垂を導くのである.

最後に主結果として, $\hat{A}$ -導来圏 $D_{\hat{A}}(R)$ も環 R を取り換えることで通常の導来圏として, 実現できることを述べる.

定理 3.8. 圏同値 $D_{\hat{A}}(R) \simeq D(A \otimes_k R)$ が存在する.

例 3.9. 上の圏同値 $F : D_{\hat{A}}(R) \xrightarrow{\sim} D(A \otimes_k R)$ による具体的な対象の対応例を挙げておく. 例 3.3(iii) 同様,

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \text{ の場合を考える.}$$

$\hat{A}$ -導来圏 $D_{\hat{A}}(R)$	導来圏 $D(A \otimes_k R)$
$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ \cdots & & 0 & & R^{\oplus 2} & & 0 \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ & 0 & & R & & R^{\oplus 2} & \\ & & & & & & 0 \end{array}$	$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \otimes_k R \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$
$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ \cdots & & 0 & & X & & 0 \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ & 0 & & X & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{array}$	$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X = X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$
$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & X & & Z & \\ & \swarrow & & \searrow^{\alpha} & & \swarrow & \\ \cdots & & X & & Y & & 0 \\ & \swarrow & & \searrow^{\alpha} & & \swarrow^{\beta} & \\ & 0 & & Y & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{array}$	$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta} \begin{pmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$

参考文献

- [Hap] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [HW] D. Hughes, J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 641–648.
- [IKM] O. Iyama, K. Kato, J. Miyachi, *Derived categories of N -complexes*, preprint arXiv:1309.6039.
- [Kra] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability*, Interactions between homotopy theory and algebra 101–139, Contemp. Math., 436, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

外場中のクライン-ゴルドン方程式の解の存在と伝播評価

神戸大学 D3 川本 昌紀 ⁽¹⁾

Abstract

私は、量子力学系に対する散乱理論について研究をしている。特に、空間に一様な電磁場が存在している場合における散乱理論を研究している。本講演では、光速近くで運動している荷電粒子が空間に一様な電場の影響を受けた物理モデルについて近年自身の研究で得られた結果について話させて頂く。

1 Introduction

まず荷電粒子が光速に比べ十分遅い場合を考える。この時、外場の影響がない場合では荷電粒子 $\phi(t, x)$ は次のシュレーディンガー方程式の初期値問題の解として振る舞う事が知られている。

$$\begin{cases} i\partial_t \phi(t, x) &= (p^2/(2m)\phi)(t, x) \\ \phi(0, x) &= \phi_0(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $t \in \mathbf{R}$ を時刻、 $x \in \mathbf{R}^n$ を粒子の位置 $m > 0$ を粒子の質量とし、 $p = -i\nabla_x = -i(\partial_1, \dots, \partial_n)$ を粒子の運動量と呼ぶ。 $p^2 = -\Delta$ (ラプラシアン) に注意する。量子力学系に支配される粒子は全空間での存在確率を 1 とする。すなわち、

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\phi(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^n} |\phi_0(x)|^2 dx = 1$$

を必要とする。数学の用語で書き直せば、

$$\phi(t, x) \in L^2(\mathbf{R}_x^n), \quad \phi_0(x) \in L^2(\mathbf{R}_x^n)$$

である。時刻 t 粒子における粒子の位置の期待値を

$$x(t) = (x\phi(t, x), \phi(t, x))$$

で定義しよう。ここで、 $(\cdot, \cdot)$ は L^2 内積であり、 $\phi(t, x)$ は (1.1) の解とする。 $\phi(t, x) = e^{-itp^2/(2m)}\phi_0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} x'(t) &:= \frac{d}{dt}(x\phi(t, x), \phi(t, x)) = \frac{d}{dt}(xe^{-itp^2/(2m)}\phi_0, e^{-itp^2/(2m)}\phi_0) \\ &= (i[p^2/(2m), x]e^{-itp^2/(2m)}\phi_0, e^{-itp^2/(2m)}\phi_0) \\ &= ((p/m)e^{-itp^2/(2m)}\phi_0, e^{-itp^2/(2m)}\phi_0) \end{aligned}$$

⁽¹⁾mkawa@math.kobe-u.ac.jp

同様に、時刻 t における運動量の期待値を

$$p(t) = (p\phi(t, x), \phi(t, x))$$

とおけば、

$$p'(t) := \frac{d}{dt}(p\phi(t, x), \phi(t, x)) = 0$$

となる。よって、

$$x'(t) = p(t)/m, \quad p'(t) = 0, \quad mx'(0) = p(0) = (p\phi_0, \phi_0), \quad x(0) = (x\phi_0, \phi_0)$$

が分かる。これは、古典力学、すなわち、ニュートン方程式と一致する。これを解けば、

$$x(t) = tp(0)/m + x(0), \quad \text{等速直線運動}$$

となり、 $p(0)/m$ (初速度) が 0 でなければ、時間が経つごとに $x(t)$ が増大する事が分かる。実際、この事実を使えば以下の式が成り立つ：

任意の $\varepsilon_0 > 0$ に対して、 $\phi_0 \in \mathcal{S}$ を $\text{supp} \left\{ \widehat{\phi}_0(\xi) \right\} = \{ \xi \in \mathbf{R}^n : |\xi|/m > \varepsilon_0 \}$ を満たす関数とする。ここで、 $\widehat{\phi}_0$ は ϕ_0 のフーリエ変換である。この時、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F(|x| \leq \varepsilon_0 t/2) \phi(t, x)\| = 0 \quad (1.2)$$

が成立する。ここで、 $F(|x| \leq a)$ とは、 $|x| \leq a$ の時 1 で、それ以外は 0 とする定義関数である。この式の意味は、初速度 ε_0 で発射された粒子の中で、時刻 t での速度 ($|x|/t$) が $\varepsilon_0/2$ 以下になるようなものの存在確率は 0 に近づくという意味であり、物理的に当たり前の事実である。この (1.2) 式のように、粒子の時刻 t での散乱情報を示す評価を伝播評価と呼び、散乱理論では重要な評価式である。

次に、電場の影響を考慮に入れた系について考察しよう。 $\mathbf{R}^n$ 空間に一様な定電場 $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n)$ が存在するとする。この時、荷電粒子が満たす Schrödinger 方程式は、

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi(t, x) &= (p^2/(2m) - qE \cdot x) \psi(t, x) \\ \psi(0, x) &= \psi_0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ は荷電粒子の電荷であり、 $E \cdot x = E_1 x_1 + \dots + E_n x_n$ は通常のユークリッド内積とする。この時、同様にして、時刻 t における位置、運動量の期待値を

$$x(t) = (x\psi(t, x), \psi(t, x)), \quad p(t) = (p\psi(t, x), \psi(t, x))$$

とおく。また、 $H^S = p^2/(2m) - qE \cdot x$ の自己共役性を使えば、 $\psi(t, x) = e^{-itH^S} \psi_0$ と書ける事に注意すると

$$\begin{aligned} x'(t) &= (i[H^S, x]e^{-itH^S} \psi_0, e^{-itH^S} \psi_0) = ((p/m)\psi(t, x), \psi(t, x)) \\ p'(t) &= (i[H^S, p]e^{-itH^S} \psi_0, e^{-itH^S} \psi_0) = ((qE)\psi(t, x), \psi(t, x)) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$x(t) = t^2((qE/m)\psi_0, \psi_0) + tp(0)/m + x(0), \quad \text{等加速度運動}$$

となり、電場の影響により早く散乱する事が示唆される。実際、 $|E| = E_0$ とおけば、任意の $\psi_0 \in \mathcal{S}$ に対して、次の伝播評価が成立する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F(|x|/t^2 \leq |qE_0|/(2m))\psi(t, x)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 0$$

伝播評価が初期運動量 p_0 に依らない事から、電場方向へ強制散乱される事が分かる。ここで見るように、電場は散乱を考える際には強い影響力を持つ。例えば $H = -\Delta + V$ が負の固有値を持っていたり、電場を印加すると固有値が消滅する事などが知られている。

2 相対論的な系

次に粒子が光速に近い速度で運動する系について考察する。この場合、外場の影響力が働かなければ、粒子は次のクライン-ゴルドン方程式の解として振る舞う事が知られている。

$$\begin{cases} (i\partial_t)^2\phi(t, x) = (c^2p^2 + (mc^2)^2)\phi(t, x) =: L\phi(t, x) \\ \phi(0, x) = \phi_0, \quad (i\partial_t\phi)(0, x) = \phi_1 \end{cases}, \quad (2.1)$$

ここで、 $m \geq 0$ は粒子の質量であり、 $c > 0$ は光速としている。注意すべきは、この方程式は光子のような粒子の運動も記述できる。その際は $m = 0$ であり、今の場合は波動方程式と一致する。量子力学系の散乱理論を考察するにはエネルギーの考察が課題となる。この場合、まず、

$$\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} \phi(t, x) \\ i\partial_t\phi(t, x) \end{pmatrix}$$

とおく。ここで、 $\phi(t, x)$ は (2.1) の解とする。すると、 $\Phi(t, x)$ は次のシュレーディンガー型の方程式を満たす。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}\Phi(t, x), \quad \Phi(0, x) = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

ここで問題となるのは、上式、右辺の行列

$$H_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

が $L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の対称行列とならない事である。そこでエネルギー空間 (クライン空間) を次の内積を備えたヒルベルト空間で定義しよう：

任意の $\Phi, \Psi \in H^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して、

$$(\Phi, \Psi)_{\mathcal{H}} = \left(\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi, \Psi \right)_{L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

この時、 H_0 はクライン空間 $\mathcal{K}$ 上、対称作用素となり、さらに自己共役作用素となる。この時、ストーンの公式から、強連続ユニタリー群 e^{-itH_0} がただ一つ存在して、 $\Phi(t, x) = e^{-itH_0}\Phi_0$ となる。また、簡単な計算からユニタリー群 e^{-itH_0} は次の表現を持つ。

$$e^{-itH_0} = \begin{pmatrix} \cos(tQ) & \sin(tQ)/Q \\ -iQ \sin(tQ) & i \cos(tQ) \end{pmatrix},$$

$$(e^{-itH_0})^{-1} =: (e^{-itH_0})^*_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \cos(tQ) & i \sin(tQ)/Q \\ Q \sin(tQ) & -i \cos(tQ) \end{pmatrix}$$

ここで、 $Q = L^{1/2}$ である。この時、次のエネルギー保存則が成立する。

$$\|e^{-itH_0}\Phi_0\|_{\mathcal{K}} = \|\Phi_0\|_{\mathcal{K}}$$

成分で書けば、

$$\int |(\nabla\phi)(t, x)|^2 dx + \int |(i\partial_t\phi)(t, x)|^2 dx = \int |(\nabla\phi_0)(x)|^2 dx + \int |(\phi_1)(x)|^2 dx$$

となる。この系における伝播評価を見よう。この系の散乱理論には多くの研究があり、様々な手法が用いられてきている。ここでは、Gérard [Ge] が用いた手法を紹介する。これは、シュレーディンガー方程式の解析で扱われた手法のクライナーゴールドン版であると思ってくれてよい。

Lemma 2.1. 任意の $\varepsilon_0 > 0$ に対して、 $\varphi \in C_0^\infty((\varepsilon_0, \infty))$ とする。この時、ある $0 < \tilde{\varepsilon}_0$ が存在して、

$$(xe^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0)_{\mathcal{K}} \geq (x\varphi(H_0)\Phi_0, \varphi(H_0)\Phi_0)_{\mathcal{K}} + t\tilde{\varepsilon}_0 \|\varphi(H_0)\Phi_0\|_{\mathcal{K}}^2$$

が成立する。

Remark 2.2. (初期速度) $^2 \sim$ (初期エネルギー) と思えば $\varphi(H_0)\Phi_0$ とは初期速度が 0 でない初期値の空間への写像と思える。

証明はシュレーディンガーの場合のように簡単には出来ない。概略を述べれば、

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 1 \\ L^{1/2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_0 = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & -L^{1/2} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\mathcal{J}H_0 = \hat{H}_0\mathcal{J}, \quad (\Phi, \Psi)_{\mathcal{K}} = (\mathcal{J}\Phi, \mathcal{J}\Psi)_{L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)}$$

となる。この事に注意すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (xe^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0)_{\mathcal{K}} \\ &= \left(\tilde{\varphi}(\hat{H}_0) \begin{pmatrix} c^2 p L^{-1/2} & \\ 0 & -c^2 p L^{-1/2} \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(\hat{H}_0) \mathcal{J} e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, \mathcal{J} e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0 \right)_{\mathcal{K}} \\ &\geq \tilde{\varepsilon}_0 (\mathcal{J} e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, \mathcal{J} e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0)_{\mathcal{K}} = \tilde{\varepsilon}_0 (e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0)_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\varphi}\varphi = \varphi$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ である. この命題がクライナーゴールドン版の伝播評価である. この手法は, 右辺の評価を $\mathcal{H}$ 空間での評価にしたため, ポテンシャルの相対的有界性, コンパクト性を用いた解析手法などが扱え, ムール理論を用いることが出来るため非常に有用な解析手法である事が分かる.

さて, 今, 考察している粒子が他の動かない粒子 (他の粒子を静止系とみなす) と十分に近い時, 相互作用によりエネルギーが生じる. このエネルギーが粒子の初期エネルギーよりも十分に大きいとき, 粒子はエネルギーの壁から脱出できず, 他の粒子の近傍に留まり続ける. これを束縛されるという事にする. 一方, 粒子の初期エネルギーが十分に大きい場合, ポテンシャルの壁を越える. その後, 粒子自体は等速直線運動を行うので, 他の粒子から十分遠方に飛んでいく事が予想される. この予想を数学的に見るには, 波動作用素と呼ばれる作用素を定義し, その存在を示す事と, その完全性 (ユニタリー性) を証明する. これらの研究を散乱理論と呼んでいる. シュレーディンガー, クライナーゴールドン, ディラック方程式など, 量子力学で現れる方程式に対する散乱理論は 20 世紀の後半から研究されており, 多くの研究結果がある.

一方でクライナーゴールドン方程式に対する散乱理論については次のような問題が度々現れる:

他の粒子との相互作用を $q_V(x)$ とおく, この時のクライナーゴールドン方程式は, 以下で与えられる:

$$\begin{cases} (i\partial_t + q_V)^2 \varphi(t, x) = L\varphi(t, x) \\ \varphi(0, x) = \varphi_0, \quad (i\partial_t \varphi)(0, x) = \varphi_1 \end{cases}$$

この場合におけるエネルギー空間 $\mathcal{H}_V$ は以下の内積を備えたヒルベルト空間となる:

$$(\Phi, \Psi)_{\mathcal{H}_V} = \left(\begin{pmatrix} L - q_V^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi, \Psi \right)_{L^2(\mathbf{R}^2) \oplus L^2(\mathbf{R}^2)}$$

この空間がヒルベルトであるためには条件,

$$\int (|(\nabla \varphi_0)(x)|^2 + |(i\partial_t \varphi_1)(x)|^2) dx - \int |q_V \varphi_0(x)|^2 dx > 0$$

が必要となる. q_V が十分に大きいとき, このエネルギーノルムは負になる. エネルギーが負になってしまう現象をクライナー・パラドックスと呼ぶことにすると, このクライナー・パラドックスが起こる場合における散乱理論の考察は現状としてまったくの手つかずであると言ってよいと思われる. Gérard [Ge] は近年の長距離型と呼ばれるポテンシャルに対しての散乱理論を考察したが, この際は $m > 0$, $mc^2 \gg 1$ という仮定をもってこの困難を回避した. またその論文では, クライナー・パラドックスが起こりうる系に対しては, Open Problem としている.

3 電場中のクライナーゴールドン方程式

クライナー・パラドックスが起こる系の中で, 重要な物理モデルが幾つかある. その多くが一様な外場問題である. さて, その問題の中で, 私は特に電場問題について近年考察して

いる。時間に依存した空間一様な電場を $E(t)$ と書けば、この影響下でのクライナーゴールドン方程式は、

$$\begin{cases} (i\partial_t + qE(t) \cdot x)^2 \phi_E(t, x) = L\phi_E(t, x) \\ \phi_E(0, x) = \phi_{E,0}, \quad (i\partial_t + qE(t) \cdot x)\phi_E(t, x)|_{t=0} = \phi_{E,1} \end{cases}$$

である。この研究における先行研究は Veselić [Ve] などがある。さて、この問題に対する系を考察しよう。

$$\Phi_E(t, x) = \begin{pmatrix} \phi_E(t, x) \\ (i\partial_t + qE(t) \cdot x)\phi_E(t, x) \end{pmatrix}$$

とおけば、系は、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_E(t, x) = \begin{pmatrix} -qE(t) \cdot x & 1 \\ L & -qE(t) \cdot x \end{pmatrix} \Phi_E(t, x), \quad \Phi_E(0, x) = \Phi_{E,0} = \begin{pmatrix} \phi_{E,0} \\ \phi_{E,1} \end{pmatrix}$$

となる。 $E(t) \equiv E$ (定電場) におけるこの系のエネルギー空間のノルムは、

$$\int (|\nabla \phi_{E,0}(x)|^2 + |\phi_{E,1}(x)|^2) - (qE \cdot x) (\phi_{E,0}(x)\overline{\phi_{E,1}(x)} + \overline{\phi_{E,0}(x)}\phi_{E,1}(x)) dx$$

となり、ノルムの正値性はほぼ成立しない。この問題に対して少し変わった視点からエネルギー空間を定めた論文がある。これは、[ACJ] であり、大変興味深い。

さて、エネルギー空間と自己共役性の理論を扱わず解を構成する。まず $b(t) = \int_0^t qE(s)ds$ とおき、 $\phi_E(t, x) = e^{ib(t) \cdot x} \psi_E(t, x)$ とおく。この時、 $\psi_E(t, x)$ は以下の初期値問題の解となる。

$$\begin{cases} -(\partial_t)^2 \psi_E(t, x) = (c^2(p + b(t))^2 + (mc^2)^2) \psi_E(t, x) =: \widehat{L}(t) \psi_E(t, x) \\ \psi_E(0, x) = \psi_{E,0} = \phi_{E,0}, \quad (\partial_t \psi_E)(0, x) = \psi_{E,1} = i(qE(0) \cdot x) \phi_{E,0} + \phi_{E,1} \end{cases}$$

この変換により常微分方程式の理論を用いて解を構成、評価する。 $\zeta_0(t, p)$, $\zeta_1(t, p)$ を

$$\zeta_j''(t, p) + \widehat{L}(t) \zeta_j(t, p) = 0, \quad j \in \{0, 1\}, \quad \begin{cases} \zeta_0(0, p) = \text{Id} \\ \zeta_0'(0, p) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \zeta_1(0, p) = 0 \\ \zeta_1'(0, p) = \text{Id} \end{cases}$$

を満たす作用素とする。この時、

$$\psi_E(t, x) = \zeta_0(t, p) \psi_{E,0} + \zeta_1(t, p) \psi_{E,1}$$

となる。さて、電場 $E(t)$ の仮定を述べよう。そのためにまず、集合 $P_0 \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $j \in P_0$ を次で定義する。

$j \in P_0$ ならば、

$$E_j(t) \int_0^t E_j(s) ds \geq \widetilde{E}_j t^{\gamma_j} + \eta_j(t) t^{\gamma_{0,j}} \quad (3.1)$$

を満たすような、 $\gamma_j > 0$, $\gamma_j \geq \gamma_{0,j}$, $\widetilde{E}_j > 0$, $\sup_t |\eta_j(t)| < \widetilde{E}_j$ が存在する。この時、電場の仮定 (E1) を次とする：

(E1) $P_0 \neq \emptyset$

Remark 3.1. 仮定 (E1) は $n = 1$ の場合には次のような電場などを含んでいる.

$$E(t) = E, \quad E(t) = t^{-\rho} E, \quad E(t) = E \sin^2(t), \quad E \neq 0, \quad 0 < \rho < 1$$

この時, 以下の定理が成立する.

Theorem 3.2. (E1) を仮定し, $\gamma > 0$ を $\gamma \leq (\max_{j \in P_0} \gamma_j)/4$ を満たすある実数とする. この時, 任意の $\phi \in \mathcal{S}$, $\hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して,

$$\|\zeta_j(t, p)\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C(\hat{\phi})t^{-\gamma}\|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad j \in \{0, 1\}$$

が成立する. ここで, $C(\hat{\phi})$ は $\hat{\phi}$ のサポートに依った定数である.

Remark 3.3. 電場の影響により, L^2 -解自体が減衰してしまう事を意味している. この現象とクライン・パラドックスとの因果関係については現在のところ (私は) よく分からないが何らかの関連性があると予想している.

この解を用いて時間発展作用素 $U_0(t)$ を次で定義しよう.

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} e^{ib(t) \cdot x} & 0 \\ 0 & e^{ib(t) \cdot x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0(t) & \zeta_1(t) \\ i\zeta'_0(t) & i\zeta'_1(t) \end{pmatrix},$$

$$U_0^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \zeta'_1(t) & i\zeta_1(t) \\ -\zeta'_0(t) & -i\zeta_0(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ib(t) \cdot x} & 0 \\ 0 & e^{-ib(t) \cdot x} \end{pmatrix}$$

ここで, $\zeta_0\zeta'_1 - \zeta'_0\zeta_1 = 1$ に注意する. この時,

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_0(t) = \begin{pmatrix} -qE(t) \cdot x & 1 \\ L & -qE(t) \cdot x \end{pmatrix} U_0(t)$$

が成立する. この手法を用いて摂動項付きのクライン-ゴールドン方程式,

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t) = \begin{pmatrix} -qE(t) \cdot x & 1 \\ L - q_V^2 & -qE(t) \cdot x + 2qV \end{pmatrix} U(t)$$

の解の存在も同様に示す事ができる.

私は近年, この結果に加えて, 自由解の $L^p - L^q$ 評価, 波動作用素の構成法について考察した. 本講演では, 自由解の具体的な求め方や評価法の計算についてお話したい. また時間があれば伝播評価の導出についても話したい.

References

- [ACJ] Arredondo, R., Cruz, M., Juan, H.: Scattering theory for the Klein-Gordon equation with nondecreasing potentials. J.M.P, **49**, (2008).
- [Ge] Gérard, C.: Scattering Theory for Klein-Gordon Equations with Non-Positive Energy. Ann. Henri. Poincaré, **13** 883-941 (2012).
- [Ve] Veselić, K.: A Spectral Theory of the Klein-Gordon Equation Involving a Homogeneous Electric Field. J. Operator. Theory, **25**, 319-330 (1991).

二次元完全流体における渦度場のパターン

小川駿

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

概要

二次元トーラス上の完全流体において、安定な層流に摂動を加えると、摂動のサイズや層流を特徴付けるパラメータに依り、摂動が減衰して元の層流に戻る、複数の止まっている渦が生じる、あるいは複数の動いている渦が生じることが知られていた。本テクニカルレポートでは、線形化 Euler 方程式のダイナミクスをベースに、摂動の指数関数的な減衰と非線形トラッピングのタイムスケールを比較することで、初期状態に依ってどのような渦のパターンが生じるのかを予測する方法を紹介する。本テクニカルレポートの内容は、Julien Barré 氏 (ニース大)、森田英俊氏 (京大理)、山口義幸氏 (京大情報) との共同研究 [S. Ogawa, J. Barré, H. Morita, and Y. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. E **89**, 063007 (2014)] に基づく。

1 導入

二次元流体における渦度場のパターンに関する研究は理論的な興味のみならず、しばしば、惑星表面の大気の大規模な流れや海流の近似モデルとして研究される [1, 2, 3]。本稿では、これらのパターン形成に関する理論的理解を目指し、よりシンプルなモデルとして Euler 方程式に従う二次元トーラス $T^2 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi\Gamma]$ 上の理想流体における Cat's eye パターン [4, 5, 6] について考察する。具体的には、ベースフローは安定な層流であるとし、その速度場は $\vec{v} = (\cos(y/\Gamma), 0)$, ($\Gamma \geq 1$) であるとする。この層流に摂動を加えるとトーラスの縦横比 Γ と摂動のサイズ ϵ によって、

- (i) 摂動がただちに減衰して層流に戻る。
- (ii) 二つの静止している渦ができる (ダイポール相)。
- (iii) 四つの動く渦ができる (振動相)。

という三通りのパターンが見られることが、既に Morita [7] によって、数値的に確認されている。先行研究 [7] では、さらに、その観察に基づき (ϵ, Γ) 平面上に相図が描かれている。本稿では、シミュレーションによらず理論的にこの相図を描くための判別式を得る方法 [8] を紹介する。

二次元の完全流体において、ある初期状態からどのような定常状態に落ち着くのか? という問題に対するアプローチとしては、既に Miller-Robert-Sommeria (MRS) による統計力学の理論がある [9, 10, 11, 12]。これは、Vlasov 方程式 (無衝突 Boltzmann 方程式) 系における Lynden-Bell 統計 [13] とよく似ている理論である。MRS 理論では、まず、相空間 T^2 を小さいセルに分割し、Euler 方程式の非圧縮性を考慮しながら状態数を数え上げ、その対数を取って、連続極限をとり、エントロピー汎関数を求める。そして、そのエントロピーを無限個の (粗視化された) Casimir 不変量による拘束条件の下最大にするような密度関数を求める。ただし、一般には、以下の理由

- (一般に) 初期の渦度場は無限個の準位を持つ。
- 無限個の Casimir 不変量を考慮する必要がある。(最終的に密度関数を得るには無限個の Lagrange 未定数を求める必要がある。)

のため、実際に MRS 理論に基づいて最終的な定常解を予測することは困難な場合がある。また、MRS 理論は定常状態を扱う理論であり、例えば、シミュレーションによる観察で見つけられている (iii) の様な動的なパターンは理論の対象外である。

似た現象は一次元プラズマ系や長距離相互作用系のモデルであるハミルトニアン平均場モデルにおいて、すでに発見され理論的な研究もなされている [14, 15, 16, 17]。そこで本研究では、Vlasov 方程式に基づいたこれらの先行研究をヒン

トにする。素朴な線形理論によると、安定定常解に加えられた摂動はただちに指数関数的に減衰して消えてしまう [18] (この様な減衰は Landau 減衰と呼ばれる)。これは、摂動が十分に小さい場合や、安定性が強い場合に限られたことであり、安定性が弱かったり、摂動が大きい場合には非線形効果が現れ、系の状態は元の安定定常解に戻らず、相空間上にクラスタが現れることが知られている [14, 15, 16, 17]。これを非線形トラッピングと呼ぶことにする。ハミルトン系においては以下の様な手順で、この様なクラスタが生じる場合の研究が行われていた。

- 素朴な線形化方程式から分散関係を導出し、Landau 減衰率と共鳴振動数を求める。
- Landau 減衰率の逆数として Landau 減衰の時間スケール τ_L を求める。また、共鳴振動数から動くクラスタの出来る場所が分かり、摂動のサイズ ϵ からクラスタの幅が分かる。
- クラスタの幅からテスト粒子がクラスタにトラップされている時間スケール (非線形トラッピングのタイムスケール τ_T) を求める。
- (i) $\tau_L < \tau_T$ ならば Landau 減衰の方が速やかに進み、安定定常解に戻る。
(ii) 共鳴振動数が 0 で $\tau_T < \tau_L$ ならば非線形トラッピングの効果が勝ち、止まっているクラスタができる。
(iii) 共鳴振動数が非 0 で $\tau_T < \tau_L$ 、かつ複数のクラスタが衝突することがなければ、共鳴振動数に対応する速度で動き回るクラスタが複数生じる。この状態は、複数の、一つのクラスタを持つ解達の非線形重ね合わせ近似で表される [19]。

これと同じことが二次元流体にも起こっていると考えられる。そこで、本テクニカルレポートでは、二次元 Euler 方程式の線形化方程式に関するレビューを行い、 τ_L と τ_T を ϵ, Γ や分散関係の根 (線形化方程式の固有値を一般化したものであり、Landau 極と呼ばれる) で表し、上記の τ_L と τ_T の大小関係に関する判別式や非線形重ね合わせ近似の条件を求める。最後にそれらを解いて (ϵ, Γ) 平面上に相図を描く。

2 線形化 Euler 方程式と分散関係

本研究では、トーラス $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi\Gamma)$ 上における渦度場 ω の従う 2D Euler 方程式,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (1)$$

を出発点とする。ただし、 $\vec{v}$ は速度場である。速度場 $\vec{v}$ と渦度場 ω は、流れ関数 ψ を用いて次の様に表すこともできる:

$$\omega = \nabla^2 \psi, \quad \vec{v} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (2)$$

まずは、Euler 方程式 (1) をベースフローの周りで線形化する。文献 [23] に倣い、線形化 Euler 方程式に、 x について Fourier 級数展開、時間 t について Laplace 変換を施し、流れ関数の摂動が従う Rayleigh 方程式を導出する。そして、そこから分散関係を導出する。分散関係は Laplace 変換を用いて導出されており、この時点では上半平面か下半平面のどちらか一方でしか定義されていない。そこで、Landau 減衰に対応する根を見つけるためには、分散関係の定義域を拡大する必要がある。本稿では、円盤上の二次元 Euler 方程式においてなされていた方法 [20, 21, 22] を、トーラス上のフローにも適用できるように拡張することで、分散関係の定義域を拡大する方法を紹介する。

2.1 分散関係の導出

Euler 方程式 (1) を流れ関数 $\psi_0(y)$ で表されるベースフロー周りで展開する。このベースフローに対応する速度場を $\vec{v}_0 = (U(y), 0)$ とすると、渦度場は $\omega_0(y) = -U'(y)$ である。このベースフローに以下の様に摂動を加える:

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \psi_1(x, y, t), \quad \psi_1(x, y, t=0) = \epsilon \cos x. \quad (3)$$

流れ関数の摂動部分 ψ_1 に対応する渦度場と速度場を各々 $\omega_1, \vec{v}_1$ とする。これらを用いて線形化 Euler 方程式を書く:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

渦度場 ω_1 と流れ関数 ψ_1 を x について Fourier 級数展開する:

$$\omega_1(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\omega}_k(y, t) e^{ikx}, \quad \psi_1(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}_k(y, t) e^{ikx}. \quad (5)$$

これらを線形化 Euler 方程式に代入すると, 各 Fourier モード毎の方程式

$$\frac{\partial \hat{\omega}_k}{\partial t} + ikU(y)\hat{\omega}_k - ik\hat{\psi}_k U''(y) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

を得る. 次に関数 $\hat{g}(t)$ の Laplace 変換を $\tilde{g}(z) = \int_0^\infty \hat{g}(t) e^{-zt} dt$, ($\text{Re} z > 0$) で定義する. 条件 $\text{Re} z > 0$ は積分を収束させるための制限である. 各モード毎の線形化 Euler 方程式に Laplace 変換を施すと次の式を得る:

$$(U(y) - c)\tilde{\omega}_k - U''(y)\tilde{\psi}_k = \frac{\hat{\omega}_k(y, 0)}{ik}. \quad (7)$$

ただし, $z = -ikc$, ($\text{Im}(kc) > 0$) である. 渦度場と流れ関数の関係 (2) と式 (7) より, Rayleigh 方程式

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dy^2} - q(y)\tilde{\psi}_k = f(y), \quad q(y) = k^2 + \frac{U''(y)}{U(y) - c}, \quad f(y) = \frac{\hat{\omega}_k(y, 0)}{ik(U(y) - c)} \quad (8)$$

を得る. これに対応する同次 Rayleigh 方程式は

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - q(y)\phi = 0 \quad (9)$$

である. ここから Rayleigh 方程式 (8) の一般解を求め, 分散関係を導出する. まず, ϕ_1, ϕ_2 を各々, 同次方程式 (9) の境界条件 $\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0$, と $\phi_2(0) = 0, \phi_2'(0) = 1$ に対応する解であるとする. すると非同次方程式 (8) の特解

$$\phi_p(y) = -\phi_1(y) \int_0^y \phi_2(y') f(y') dy' + \phi_2(y) \int_0^y \phi_1(y') f(y') dy' \quad (10)$$

を得る. よって, 非同次方程式 (8) の一般解は

$$\phi_g(y) = \phi_p + a_1 \phi_1(y) + a_2 \phi_2(y) \quad (11)$$

で表されるので, a_1, a_2 を周期境界条件 $\phi_g(2\pi\Gamma) = \phi_g(0)$ を満たすように決める. つまり次の一次方程式を解けばよい:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(2\pi\Gamma) - 1 & \phi_2(2\pi\Gamma) \\ \phi_1'(2\pi\Gamma) & \phi_2'(2\pi\Gamma) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_p(2\pi\Gamma) \\ \phi_p'(2\pi\Gamma) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

ここで, ϕ_1, ϕ_2 は方程式 (9) の $q(y)$ で決まるので, 実は c に依存していることを思い出すと, この方程式の左辺の行列の行列式は c の関数であるので $D(c)$ で表す. Wronskian, $\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2$ が 1 であることを用いると,

$$D(c) = 2 - \phi_1(2\pi\Gamma) - \phi_2'(2\pi\Gamma) \quad (13)$$

である. 一般解 ϕ_g は $D(c) = 0$ なる c において極を持ち, この極は逆 Laplace 変換を行う際に, e^{-ikct} に比例する非自明なモードの素 (留数) として拾われる. $D(c)$ は分散関数, $D(c) = 0$ は分散関係と呼ばれる.

2.2 分散関係の定義域の拡大

ここから $k = 1$ とし, $U(y) = \cos(y/\Gamma)$ とする. 分散関数 $D(c)$ は Laplace 変換を用いて得られたので, 現時点では, その定義域は $\{c \in \mathbb{C} | \text{Im}(c) > 0\}$ である. 指数関数的な減衰に対応する根を得るため, $D(c)$ を解析接続し, 定義域を下半平面へ拡大する. 解析接続は, 二次元円盤上の流体でなされた先行研究における方法をトラス上で使えるように若干の修正をすることで行う.

c が上半平面にある場合, 分散関数 $D(c)$ の値は同次方程式 (9) を $L = \{y \in \mathbb{R} | y = y(s) = 2\pi\Gamma s : s \in [0, 1]\}$ 上で積分することで得られる. ここで, c を連続的に上半平面から下半平面へ動かすと $(-1, 1)$ を横切る際に, $U(y) = c$ を満たす y が存在してしまい, 同次方程式 (9) を積分することができなくなってしまう. そこで, 積分経路 L を

$$L_h = \{y \in \mathbb{R} | y = y_h(s) = 2\pi\Gamma(s + ih(s)) : s \in [0, 1]\}, \quad h : C^2, \text{ real valued, and 1 periodic}, \quad (14)$$

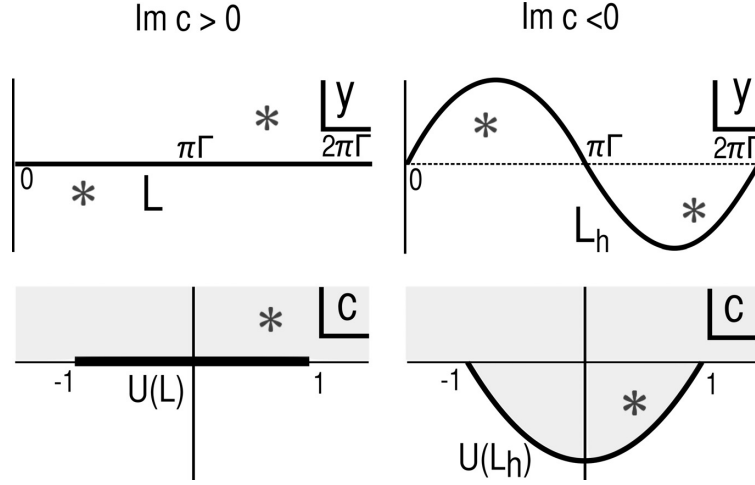


図1 $k=1$ の場合に, c (図中では $*$) を上半平面から下半平面へと連続的に動かした場合に L_h はどの様に c を避け, $D(c)$ の定義域 (灰色部) はどの様に拡大されるのかを表した. ここで用いられている方法は, 本質的には, 線形化 Vlasov 方程式の分散関係の解析接続における Landau の方法 [18] と同じ方法である.

に変形することで, $U(y) = c$ になることを回避し, $\{c \in \mathbb{C} | \text{Im} c \leq 0\}$ へ解析接続をする (図1).

ここで $s \in [0, 1]$ の関数 $\varphi(s) = \phi(y_h(s))$ と $p(s) = q(y_h(s))$ を導入し, 同次 Rayleigh 方程式 (9) に代入する. 添え字 R と I は各々実部と虚部を表す.

$$\begin{aligned} \varphi_R'' - \frac{h'h''}{1+h'^2} \varphi_R' + \frac{h''}{1+h'^2} \varphi_1' - (2\pi\Gamma)^2 ((1-h'^2)p_R - 2h'p_I) \varphi_R + (2\pi\Gamma)^2 (2h'p_R + (1-h'^2)p_I) \varphi_I &= 0, \\ \varphi_I'' - \frac{h''}{1+h'^2} \varphi_R' - \frac{h'h''}{1+h'^2} \varphi_1' - (2\pi\Gamma)^2 (2h'p_R + (1-h'^2)p_I) \varphi_R - (2\pi\Gamma)^2 ((1-h'^2)p_R - 2h'p_I) \varphi_I &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

先ほど用いた ϕ_1, ϕ_2 にあたる $\varphi_1(s), \varphi_2(s)$ は, 各々, 次の境界条件を満たす:

$$\begin{cases} \varphi_{1,R}(0) = 1, \\ \varphi_{1,I}(0) = 0, \\ \varphi_{1,R}'(0) = 0, \\ \varphi_{1,I}'(0) = 0, \end{cases} \text{ and } \begin{cases} \varphi_{2,R}(0) = 0, \\ \varphi_{2,I}(0) = 0, \\ \varphi_{2,R}'(0) = 2\pi\Gamma, \\ \varphi_{2,I}'(0) = 2\pi\Gamma h'(0). \end{cases} \quad (16)$$

これらを用いると, 解析接続された分散関数

$$D(c) = 2 - \varphi_1(1) - \frac{\varphi_2'(1)}{2\pi\Gamma(1 + ih'(1))} \quad (17)$$

を得る. ある $c = c_R + ic_I$ が分散関係の根ならば $-\bar{c} = -c_R + ic_I$ も分散関係の根である.

3 ダイポール相と振動相になるための条件

3.1 減衰の時間スケール vs トラッピング時間スケール

Landau 減衰の時間スケールは減衰率 $|c_I|$ の逆数, つまり $\tau_L = 1/|c_I|$ である. さらに長時間待つと, 指数関数的 Landau 減衰ではなく, ベキ的 Landau 減衰の効果が現れるが [23, 24], 今回着目するスケールでは指数関数的 Landau 減衰の方が支配的である.

次に非線形トラッピングのタイムスケール τ_T を求める. これは, 試験点渦が渦の端を一周する時間スケールとして求められる. そこで, 渦の中心近傍の試験点渦の運動に着目する.

まず, 試験点渦の従う運動方程式は

$$\dot{x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = U(y) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \quad (18)$$

(流れ関数が有効ハミルトニアン, x が y の共役運動量のハミルトン系と見なせる.) 我々はマクロな挙動に興味があるので, 摂動 ψ_1 の第一 Fourier モードだけに着目するという近似を行う:

$$\psi_1(x, y, t) \simeq \epsilon \hat{\psi}_1(y) \cos(x - c_R t), \quad \hat{\psi}_1(y) = O(\epsilon^0). \quad (19)$$

これを試験点渦の運動方程式 (18) に代入すると,

$$\dot{x} = U(y) - \epsilon \hat{\psi}_1'(y) \cos(x - c_R t), \quad \dot{y} = -\epsilon \hat{\psi}_1(y) \sin(x - c_R t) \quad (20)$$

を得る. あとは, これを ϵ について逐次的に解く. まず, x, y を次の様に表しておく:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2), \quad y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + O(\epsilon^2). \quad (21)$$

$O(\epsilon^0)$ について, 初期値 $x_0(0) = X, y_0(0) = Y$ とすると

$$x_0(t) = X + U(Y)t, \quad y_0(t) = Y \quad (22)$$

を得る. 特に, 渦の中心の y 座標に対応する Y を $Y^* = U^{-1}(c_R)$ で表す.

$O(\epsilon^1)$ について, $x_1(t), y_1(t)$ は以下の方程式に従う:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= U'(Y) y_1(t) - \hat{\psi}_1'(Y) \cos(X + (U(Y) - c_R)t), \\ \dot{y}_1(t) &= -\hat{\psi}_1(Y) \sin(X + (U(Y) - c_R)t). \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, y_1 の振動の周期を知りたいので, $y(t)$ の初期値 Y を $Y^* + g(\epsilon, \Gamma)$ とし ($x_1(t=0), y_1(t=0) = (0, 0)$) とする. ただし, $g(\epsilon, \Gamma)$ は摂動のサイズ ϵ とトーラスの縦横比 Γ の場合に生じる渦の幅であるとする. この g は後に自己無撞着に定められる. 時間スケール τ_T は, $y_1(t)$ の振動の周期と等しい時間スケールであり, 次の様に求められる:

$$\tau_T \simeq \frac{1}{|U(Y^* + g(\epsilon, \Gamma)) - c_R|} \simeq \frac{1}{g(\epsilon, \Gamma) |U'(Y^*)|}. \quad (24)$$

次に, $g(\epsilon, \Gamma)$ を求める. まず, 式 (23) の解 $y_1(t)$ は,

$$y_1(t) = -\frac{\hat{\psi}_1(Y^* + g(\epsilon, \Gamma))}{U(Y^* + g(\epsilon, \Gamma)) - c_R} \sin([U(Y^* + g(\epsilon, \Gamma)) - c_R] t), \quad (25)$$

ただし, $X = \pi/2$ とした. この $y_1(t)$ の振幅は渦の幅 $g(\epsilon, \Gamma)$ と等しい. そこで, 渦の端にあたる点で $\hat{\psi}_1(y) = 1$ になっているとすると,

$$g(\epsilon, \Gamma) = \frac{\epsilon}{U(Y_* + g) - c_R} \Rightarrow g(\epsilon, \Gamma) \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{|U'(Y_*)|}}. \quad (26)$$

今, $U(y) = \cos(y/\Gamma)$ であるから, $|U'(Y_*)| = \Gamma^{-1} \sqrt{1 - c_R^2}$ である. これと式 (26) を式 (24) に代入することで, τ_T は具体的に次の様に表される:

$$\tau_T = \sqrt{\frac{\Gamma}{\epsilon}} (1 - c_R^2)^{-1/4}. \quad (27)$$

従って, トラッピングが Landau 減衰に比べ支配的になる条件 $\tau_T < \tau_L$ は

$$\frac{\Gamma c_L^2}{\sqrt{1 - c_R^2}} < \epsilon \quad (28)$$

である.

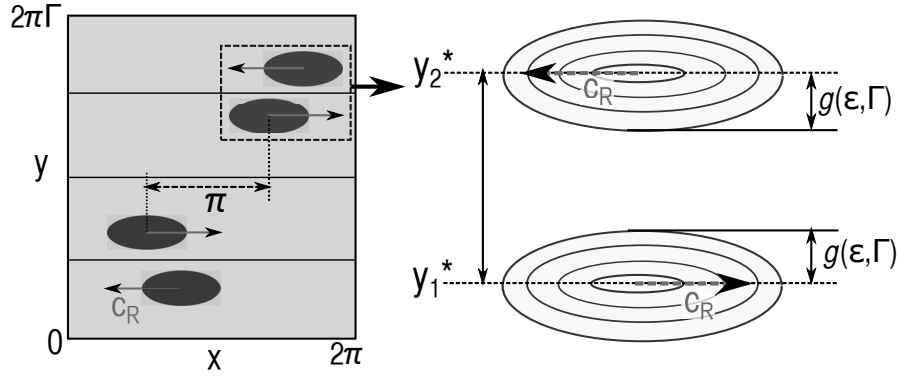


図2 振動相の模式図: (左) 同色の渦は渦度の符号の等しい渦を表す. これらはベースフローに乗って移動している. (右) 左図の一部を拡大した図. 不等式 $|Y_2^* - Y_1^*| > 2g$ がこの二つの渦が重ならない条件であり, これは不等式 (30) の上の方と等価である.

3.2 動く渦が重ならない条件

ダイポール相においては, $c_R = 0$, つまり, $Y^* = \pi\Gamma/2, 3\pi\Gamma/2$ なので, 2つの渦は少なくとも $\pi\Gamma$ ($\Gamma \geq 1$) だけ離れている. 今回扱われる摂動のサイズは $\epsilon < 0.5$ の範囲なので, ダイポール相においては渦の重なりについては心配する必要は無い.

一方, 振動相 ($c_R \neq 0$) では, 図2に示すように, $+X$ 方向へ動く二つの渦と $-X$ 方向へ動く二つの渦の計四つの渦が生じる. この場合, 動く渦同士が接触することがあるので, その様なことが起きない条件を求める必要がある. 分散関係の一つの根の実部 c_R は $0 < \arcsin(c_R) < \pi/2$ を満たしているとする. この時, $-c_R + ic_I$ も根になっているので, 動いている渦が生じるのは,

$$Y^* = \Gamma \arccos(c_R), \pi\Gamma - \Gamma \arccos(c_R), \pi\Gamma + \Gamma \arccos(c_R), 2\pi\Gamma - \Gamma \arccos(c_R), \quad (29)$$

の四箇所になる. ここで, どの渦も同じ幅 g であるとする. 二つの隣接する渦がぶつからない条件はそれらの y 方向の隔たりが $2g$ より大きければ良いので,

$$\begin{cases} \Gamma \arcsin(c_R) > g, & |c_R| < 1/\sqrt{2}, \\ \Gamma \arccos(c_R) > g, & |c_R| > 1/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (30)$$

ところで, 数値的な観察によると, 同じ速度で動く二つの渦の間の x 方向の隔たりは π なので, 実際に重要な条件は, 互いに動いて動く渦同士がぶつからない条件を表す $\Gamma \arcsin(c_R) > g$ である. つまり, 振動相では不等式 (28) に加え,

$$\epsilon < \Gamma \sqrt{1 - c_R^2} (\arcsin(c_R))^2 \quad (31)$$

が満たされている必要がある.

摂動が加わった初期状態からどの状態へ行くのかについてまとめた:

層流 $\Leftrightarrow \tau_L < \tau_T$,

ダイポール相 $\Leftrightarrow \tau_L > \tau_T, c_R = 0$,

振動相 $\Leftrightarrow \tau_L > \tau_T, c_R \neq 0, \epsilon < \Gamma \sqrt{1 - c_R^2} (\arcsin(c_R))^2$,

不明 $\Leftrightarrow \tau_L > \tau_T, c_R \neq 0, \epsilon > \Gamma \sqrt{1 - c_R^2} (\arcsin(c_R))^2$.

これらの不等式を解いて, 相図を描くと図3を得る. これは Morita [7] によるシミュレーション結果より得られた相図と質的には同等である.

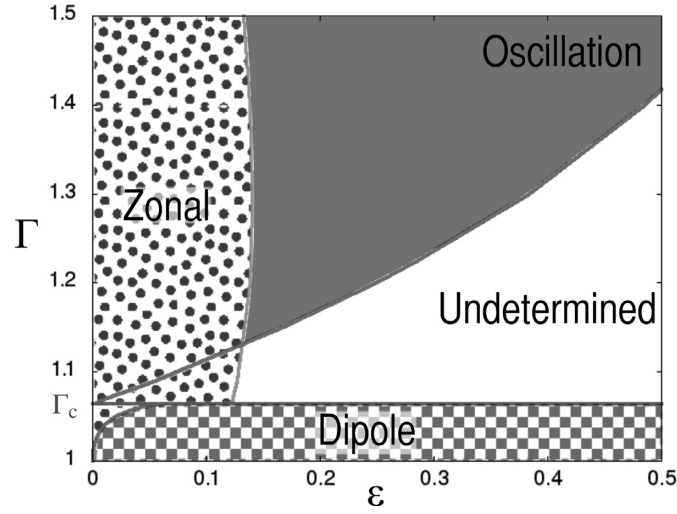


図3 相図: マダラ模様領域は Landau 減衰がトラッピング効果より強く、元の層流に減衰する領域である。 $\Gamma < \Gamma_c$ ならば分散関係の根の実部 $c_R = 0$ であり、 $\Gamma > \Gamma_c$ ならば分散関係の根の実部 $c_R \neq 0$ である。チェックの領域はダイポール相である。グレーの領域は振動相である。白い領域は本理論の適用範囲外、つまり不明な領域である。振動相と不明な領域との境界線は判別式 (31) で得られ、振動相と層流の境界は $\tau_L = \tau_T$ で得られる。また、ダイポール相と層流の境界も $\tau_L = \tau_T$ で得られる。

4 まとめ

まず、 $\mathbb{T}^2$ 上の線形化 Euler 方程式より分散関係を文献 [23] に倣って導出し、その定義域を円板上でなされていた方法 [22] を改良することで下半平面に広げ、Landau 減衰の元になる分散関係の根 (Landau 極や埋没固有値) を求める方法を紹介した。本研究で用いたベースフロー $U(y) = \cos(y/\Gamma)$ は $\Gamma < 1$ で不安定、 $\Gamma = 1$ で中立安定になり、 $\Gamma > 1$ で安定になることが知られている [23]。分散関係の根を求めてみると、 $\Gamma < 0$ では分散関係 $D(c) = 0$ の根の虚部 c_i は正であり、確かに不安定である。また、 $\Gamma = 1$ では分散関係の根 $c = 0$ である。 $1 < \Gamma < \Gamma_c$ では分散関係の根は $c_R = 0, c_i < 0$ を満たし、ベースフローはスペクトル安定であることも分かる [8]。さらに、 $\Gamma > \Gamma_c$ では分散関係の根は $c_R \neq 0, c_i < 0$ を満たし、ベースフローはスペクトル安定であり、動く渦が生じる [8]。

こうして求められた分散関係の根を用いて、与えられた初期状態に対し、

1. Landau 減衰と非線形トラッピング効果のどちらが支配的なのか
2. 線形化 Euler 方程式から導出した分散関係 $D(c) = 0$ の根の実部 c_R は 0 か。
3. $c_R \neq 0$ の場合、その振動数に対応する速度で移動する複数の渦は衝突しないか。

を調べることで、しばらく経った後に観測される相は次の様に予測された:

- 1. Landau 減衰 $\Rightarrow$ 層流
- 1. 非線形トラッピング, 2. $c_R = 0 \Rightarrow$ ダイポール相
- 1. 非線形トラッピング, 2. $c_R \neq 0$, 3. 衝突しない $\Rightarrow$ 振動相

複数の渦が衝突してしまう場合は、線形化 Euler 方程式を基にした理論では扱えない領域である。こうして得られた相図は質的には既に数値的な観察より得られていた相図 [7] と同等である。従って、二次元流体の渦度場におけるパターン形成も、プラズマ系やハミルトニアン平均場モデルにおけるクラスタ形成と同様、非線形トラッピングと線形 Landau 減衰の関係で説明されることが分かった。

最後に, 実際の流体との対応について述べる. 本研究では粘性が無い理想流体を用いた. 粘性 ν が非 0 である場合, 渦度場の従う方程式においては, 粘性 ν に関する項が最高次数の項である. 従って, $\nu \rightarrow 0$ で得られる結果と初めから $\nu = 0$ として得られた結果は異なることがあり, ν が十分小さいとしても, 粘性が本結果にどのような影響を与えるのかはまだ分かっていない.

謝辞

本テクニカルレポートは Julien Barré 氏 (ニース大), 森田英俊氏 (京大理), 山口義幸氏 (京大情報) との共同研究 [8] に基づいている. 著者は日本学術振興会特別研究員奨励費 (No. 254728) による助成を受けている.

参考文献

- [1] F. Bouchet and A. Venaille, Phys. Rep. **515**, 227 (2012).
- [2] P. S. Marcus, Nature, **331**, 693 (1988).
- [3] B. Marston, Physics **4**, 20 (2011).
- [4] W. Thomson, Nature **23**, 45 (1880).
- [5] H. Lamb, Hydrodynamics, 6th edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 1932).
- [6] J. T. Stuart, J. Fluid Mech. **29**, 417 (1967).
- [7] H. Morita, arXiv:1103.1140.
- [8] S. Ogaw, J. Barré, H. Morita, and Y. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. E **89**, 063007 (2014)
- [9] J. Miller, Phys. Rev. Lett. **65**, 2137 (1990).
- [10] J. Miller, P. B. Weichman, and M. C. Cross, Phys. Rev. A **45**, 2328 (1992).
- [11] R. Robert, J. Stat. Phys. **65**, 531 (1991).
- [12] R. Robert and J. Sommeria, J. Fluids. Mech. **229**, 291 (2002).
- [13] D. Lynden-Bell, Mon. Not. R. astr. Soc. **136**, 101 (1967).
- [14] T. M. O'Neil, Phys. Fluids **8**, 2255 (1965).
- [15] J. P. Holloway, J. J. Dornig, Phys. Rev. A **44** 3856 (1991).
- [16] C. Lancellotti and J. J. Dornig, Phys. Rev. Lett. **80**, 5236 (1998); Phys. Rev. E **68**, 026406 (2003); Trans. Th. Stat. Phys. **38**, 1 (2009).
- [17] J. Barré and Y. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. E **79**, 036208 (2009).
- [18] L. D. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **10**, 25 (1946); Collected papers of L. D. Landau edited by D. T. Haar (Pergamon Press, Oxford, 1965).
- [19] M. Buchanan and J. J. Dornig, Phys. Rev. Lett. **70**, 3732 (1993); Phys. Rev. E **52** 3015 (1996).
- [20] R. J. Briggs, J. D. Daugherty, and R. H. Levy, Phys. Fluids **13**, 421 (1970).
- [21] N. R. Corngold, Phys. Plasmas **2**, 620 (1995).
- [22] R. L. Spencer and S. N. Rasband, Phys. Plasmas **4**, 53 (1997).
- [23] F. Bouchet and H. Morita, Physica D **239**, 948 (2010).
- [24] J. Barré, A. Olivetti, and Y. Y. Yamaguchi, J. Phys. A: Math. Gen. **44**, 405502 (2011).

結び目の HOMFLY 多項式を用いた Milnor の μ -不変量の表現

小鳥居 祐香*

東京大学大学院数理科学研究科

数理科学連携基盤センター iBMath 拠点

概要

絡み目とは、有限個の円周の 3 次元球面への埋め込みである。絡み目の Milnor 不変量とは、絡み数の一般化として定義された整数列によって定まる絡み目の不変量の族である。Polyak により、長さ 3 の数列から定まる Milnor 不変量は結び目の Conway 多項式によって表されることが示されている。一方、Habegger と Lin によって Milnor 不変量はストリング絡み目の不変量としても定義され、 μ -不変量と呼ばれている。 μ -不変量をストリング絡み目のある条件のもとで HOMFLY 多項式で表したので、これについて報告する。特に、長さ 3 の数列から定まる μ -不変量の場合においては任意のストリング絡み目に対して HOMFLY 多項式と絡み数で表わすことが出来たので、これについても報告する。

1 導入

絡み目とは、有限個の円周の 3 次元球面への埋め込みである。特に一つの円周の埋め込みを結び目と呼ぶ。結び目理論において、絡み目あるいは結び目のアンビエントアイソトピーと呼ばれる同値関係による分類は基本的な研究課題である。これらを分類するため、多くの絡み目（および結び目）の不変量が構成されている。絡み目の不変量とは、アンビエントアイソトピーで移りあう絡み目どうしの値が変わらないような絡み目全体の集合から数量や代数的量への写像である。絡み目の不変量を用い、絡み目どうしを直接比較するのではなく、比較が容易である代数的量を見つけ、それらを比較することを考える。結び目理論は、この絡み目の不変量を研究する理論であるとも言える。

本結果は、絡み目の類似であるストリング絡み目と呼ばれる対象に対する不変量である Milnor 不変量を他の既存の不変量で表現したものである。以下、ストリング絡み目の Milnor 不変量と HOMFLY 多項式について紹介し、主結果であるこれらの関係について述べる。

*本研究の一部は、文部科学省「生命動態システム科学推進拠点事業」の支援を受けて実施されたものである。

2 スtring絡み目に対する Milnor の μ -不変量

絡み目の Milnor 不変量とは、絡み数の一般化として 1954 年に Milnor [M1, M2] によって定義された 3 次元球面内の順序付き有向絡み目に対する不変量の族である。また、後に Habegger-Lin[HL] により、ブレイド群の Artin 表現の拡張として定義された String 絡み目に関する自己同型写像の正規部分群が構成され、この String 絡み目に対する不変量が本質的に Milnor 不変量であるということが示されている。

String 絡み目とは、有限個の単位区間 I の円盤と単位区間の直積への proper な埋め込みの像で、単位区間 I の両端点が上下の円盤上で同じ位置にくるものである (図 1)。(String 絡み目から絡み目へは closure による自然な全射が存在する.)

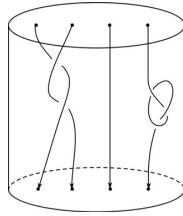


図 1: String 絡み目

任意の順序付き n 成分 String 絡み目 σ に対して、その補空間の基本群 $\pi_1(D^2 \times I \setminus \sigma)$ をその q 番目の降中心部分群で割った商群は、 n 個の生成元からなる自由群を q 番目の降中心部分群で割った商群と同型になる。String 絡み目の各成分のロンジチュードをこの商群の中で見ることで、その Magnus 表現を考える。自由群の Magnus 表現とは、自由群 $F(m_1, m_2, \dots, m_n)$ からそれに対応する非可換な形式的冪級数環 $\mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ への生成元 m_i を $1 + X_i$ に移す忠実な群準同型写像である。

j 番目の成分のロンジチュードの Magnus 表現を与えたとき、各項 $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k}$ の係数は、 $k < q$ のとき String 絡み目のイソトピー不変量となっている。これを $\mu_\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k, j)$ で表し、Milnor の μ -不変量と呼ぶ。特に、数列 $i_1, i_2, \dots, i_k, j$ が互いに異なるとき、 $\mu_\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k, j)$ は絡み目ホモトピーに関する不変量となる。絡み目ホモトピーとはイソトピーと自己交差交換によって生成される同値関係である。



特に、長さ 2 の Milnor 不変量は絡み数 lk と一致する。図 2 の String 絡み目 σ_1 と σ_2 の長さ 2 の Milnor 不変量は $\mu_{\sigma_1}(1, 2) = lk_{\sigma_1}(1, 2) = 1$ および $\mu_{\sigma_2}(1, 2) = lk_{\sigma_2}(1, 2) = 0$ である。



図 2: スtring絡み目 σ_1 と 2 成分自明String絡み目 σ_2

また, Milnor 不変量によって図 3 のボロミアンString絡み目 σ_3 と 3 成分自明String絡み目 σ_4 が絡み目ホモトピーに関して異なるString絡み目であることを示すことが出来る. 実際, $\mu_{\sigma_3}(1, 2, 3) = 1$ であり, $\mu_{\sigma_4}(1, 2, 3) = 0$ となることから, 2つのString絡み目が異なることがわかる.

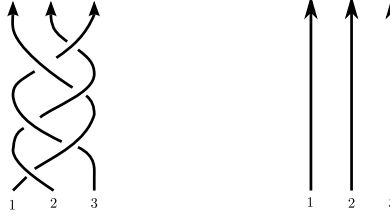


図 3: ボロミアンString絡み目 σ_3 と 3 成分自明String絡み目 σ_4

3 HOMFLY 多項式

HOMFLY 多項式とは, アレキサンダー多項式やジョーンズ多項式を特別な場合として含むような多項式不変量であり, この多項式の複数の発見者にちなみ, そのイニシャルをとり命名されたものである.

有向絡み目 L に対して, L の HOMFLY 多項式 $P(L; t, z) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ は次の 2 つの関係式によって特徴付けられる 2 変数多項式の絡み目の不変量である.

1. $P(U; t, z) = 1$,
2. $t^{-1}P(L_+; t, z) - tP(L_-; t, z) = zP(L_0; t, z)$,

ここで, U は自明な結び目, また L_+ および L_- , L_0 はある 3 次元球体の内側では以下のように異なり, 残りの部分では一致しているような絡み目である.

$$L_+ = \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad ; \quad L_- = \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} \quad ; \quad L_0 = \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array} .$$

特に, n 成分絡み目 L の HOMFLY 多項式は

$$P(L; t, z) = \sum_{k=1}^N P_{2k-1-r}(L; t) z^{2k-1-r}$$

と表せる. ここで, $P_{2k-1-r}(L; t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ は L の $(2k-1-r)$ 番目の係数多項式と呼ばれる.

さらに, HOMFLY 多項式に $z = 1$ を代入した t に関する多項式は Conway 多項式 $\nabla_L(t)$ と呼ばれている.

4 有限型不変量

Milnor 不変量と HOMFLY 多項式は以下で述べるように有限型と呼ばれる不変量の族であることが知られている. これを用いて, 今回の主結果である関係式を導いた. まず有限型不変量について定義を紹介する.

特異結び目とは, 3次元球面への円周のはめ込みで特異な点として有限個の二重点のみ持つものである. そのとき, 任意のアーベル群 G に対して, G に値を持つような結び目の不変量 v を特異結び目の不変量に拡張することを考える. 拡張の仕方は次のような関係式で行う. (拡張された不変量も v で表すこととする.)

$$v(\text{X}) = v(\text{X}) - v(\text{X}).$$

そのとき, 有限型不変量とは次のように定義される.

定義 1. (Vassiliev) 結び目不変量 v が次数 m 以下の有限型不変量であるとは, $m + 1$ 個の特異点を持つ任意の特異結び目に対する値が全て 0 である.

ここで, V_m を次数 m 以下の有限型不変量全体と定義すると, 以下のようなフィルトレーションが得られる.

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \cdots.$$

このとき, V_0 は定値写像のみ, $V_0 = V_1$, $V_2 \setminus V_1$ は Conway 多項式の 2 次の係数 a_2 の定数倍で表されるなど, 次数の低い有限型不変量はすでに知られている.

絡み目やストリング絡み目の場合も各成分ごとに同様に定義ができる. 以下のように Milnor 不変量と HOMFLY 多項式は有限型であることが示されている.

定理 1. (Bar-Natan) ストリング絡み目 σ に対する Milnor 不変量 $\mu_\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k, j)$ は次数 k の有限型不変量である.

定理 2. (Kanenobu-Miyazawa) 任意の絡み目 L に対して, HOMFLY 多項式の k 番目の係数多項式 $P_k(L; t)$ の $t = 1$ における l 階微分 $P_k^{(l)}(L; 1)$ は次数 $k + l$ の有限型不変量である.

Polyak 氏により次数が 2 の有限型不変量に対応する絡み目の Milnor 不変量 $\bar{\mu}(i_1, i_2, i_3)$ と, 次数 2 の結び目の有限型不変量である Conway 多項式の 2 次の係数 a_2 との関係が示されている ([P]). この関係は次数 2 の結び目の有限型不変量が本質的に a_2 のみであることを用いている. さらにこの拡張として, 成分数の異なる絡み目の同じ次数の有限型不変量の間関係を考えた Meilhan 氏および安原氏の結果がある ([MY]). これは, 絡み目の Milnor 不変量と結び目の HOMFLY 多項式の関係式を得たものである. さらにその結果を改良した安原氏と著者との結果 ([KY]) もある. 今回の結果はこれらの関係式をストリング絡み目に対して与えたものである.

5 主結果

ストリング絡み目の Milnor 不変量と結び目の HOMFLY 多項式に関して、ある条件の下で以下のような 1 つの関係式を得た。

ここで、ストリング絡み目から結び目を構成する closure operation を以下のように定義する。

σ を n 成分ストリング絡み目とする。また、整数列 $12 \cdots n$ の置換によって得られる数列 $I = i_1 i_2 \cdots i_n$ とその部分列 $J = j_1 j_2 \cdots j_k$ の組が与えられたとき、以下の操作で結び目を構成する。まず、 σ_J を σ の $j_1, j_2, \dots, j_k$ 以外の紐を他のすべての紐の下にくる自明な紐に取り替えた n 成分ストリング絡み目とする。また、 b_I を置換 $b = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 \end{pmatrix}$ によって以下の構成で定義される n 成分ブレイドとする。線分 S_{i_p} ($1 \leq p \leq n$) を $(i_p, 0)$ と $(b(i_p), 1)$ を繋いだ線分とし、交点に各 k ($1 \leq k \leq n-1$) に対して $S_{b^{k(1)}}$ が $S_{b^{k'(1)}}$ ($k < k'$) の下となるよう上下の情報を定める。このとき結び目 $\overline{\sigma_{I,J}}$ を σ_J と b_I の積の通常 closure により定義する。

定理 3. 任意の $n (\geq 4)$ 成分ストリング絡み目 σ に対して、その長さ $n-2$ 以下の Milnor の絡み目ホモトピー不変量が全て消えているとき、数列 $12 \cdots n$ の置換によって得られる任意の整数列 I に対して、以下の関係式が成り立つ。

$$\mu_\sigma(I) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}} \sum_{J:I \text{ の部分列}} (-1)^{|J|} P_0^{(n-1)}(\overline{\sigma_{I,J}}; 1).$$

ここで、 $|J|$ は数列 J の長さを表す。

さらに、長さ 3 の Milnor 不変量に関しては、ストリング絡み目に対する制限がなく、以下の関係式を得た。

定理 4. 任意の $n (\geq 3)$ 成分ストリング絡み目 σ と 1 から n の間の互いに異なる整数からなる列 $I = i_1 i_2 i_3$ に対して、以下の関係式が成り立つ。

$$\mu_\sigma(I) = - \sum_{J:I \text{ の部分列}} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{I,J}}) - lk_\sigma(i_1 i_2) lk_\sigma(i_2 i_3) + A_I.$$

ここで、

$$A_I = \begin{cases} lk_\sigma(i_1 i_2) & (i_2 < i_3 < i_1) \\ -lk_\sigma(i_1 i_2) & (i_1 < i_3 < i_2) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

とする。

6 例

図 4 で表される 3 成分ストリング絡み目を σ とする。そのとき、 $\mu_\sigma(132) = -1$, $\mu_\sigma(312) = 1$, $\mu_\sigma(231) = \mu_\sigma(123) = \mu_\sigma(321) = \mu_\sigma(213) = 0$ 。さらに、 $lk_\sigma(12) = lk_\sigma(23) = 0$ および $lk_\sigma(13) = 1$ となる。

一方, $\overline{\sigma_{123,J}}$ は全て自明な絡み目となる. よって, 定理 2 の関係式の右辺は

$$\begin{aligned} & - \sum_{J < 123} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{123,J}}) - lk_\sigma(12)lk_\sigma(23) = 0 - 0 \cdot 0 = 0, \\ & - \sum_{J < 231} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{231,J}}) - lk_\sigma(23)lk_\sigma(31) = 0 - 0 \cdot 1 = 0, \\ & - \sum_{J < 312} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{312,J}}) - lk_\sigma(31)lk_\sigma(12) + lk_\sigma(13) = 0 - 0 \cdot 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

さらに, $\overline{\sigma_{132,132}}$ と $\overline{\sigma_{132,13}}$ はともに 8 の字結び目であり, 8 の字結び目の Conway 多項式は $1 - z^2$ より, $a_2(\overline{\sigma_{132,132}}) = a_2(\overline{\sigma_{132,13}}) = -1$ また, $\overline{\sigma_{132,J}}$ ($J \neq 132, 13$) はすべて自明な結び目. よって, 定理 2 の関係式の右辺は

$$\begin{aligned} & - \sum_{J < 132} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{132,J}}) - lk_\sigma(13)lk_\sigma(32) - lk_\sigma(13) = -1, \\ & - \sum_{J < 213} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{213,J}}) - lk_\sigma(21)lk_\sigma(13) = 0, \\ & - \sum_{J < 321} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{321,J}}) - lk_\sigma(32)lk_\sigma(21) = 0. \end{aligned}$$

となる.

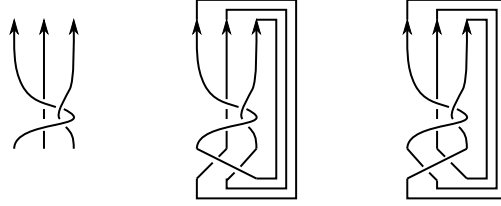


図 4: スtring絡み目とその closure operation によって得られる結び目

7 謝辞

この度は第 11 回数学区総合若手研究集会に参加させていただき, また講演の機会を与えていただきありがとうございました. このような機会を与えて下さった運営委員の方々にお礼申し上げます.

参考文献

- [HL] N. Habegger and X.S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 389–419.
- [KY] Y. Kotorii, A. Yasuhara, *Milnor invariants of length $2k + 2$ for links with vanishing Milnor invariants of length $\leq k$* , arXiv:1304.1870.
- [MY] J.B. Meilhan and A. Yasuhara, *Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial*, Geom. Topol. **16** (2012), 889–917.

- [M1] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.
- [M2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [P] M. Polyak, *On Milnor's triple linking number*, C. R. Acad. Sci. Paris Sé. I Math. **325** (1997), no. 1, 77–82.

射影空間の分解を用いた射影 Reed–Muller 符号の復号法とその性能評価

中島 規博 (豊田工業大学)*

概 要

誤り訂正符号の符号化・復号化のプロセスでは、デジタル通信などにおいて生じる誤りを自動的に修正し元の情報を復元することを目的とする。宇宙船通信の分野では、訂正能力の高い代数的符号である Reed–Solomon(RS) 符号・Golay 符号・Reed–Muller(RM) 符号などの復号法の研究が進み、1972 年のマリナー計画では符号長 32 の 1 次 RM 符号を使って火星写真の電送に成功した。本講演では RM 符号の射影化として定義された射影 RM 符号の復号法について発表する。本研究は豊田工業大学松井一氏との共同研究である。

1. 序文

誤り訂正符号では、以下に示されるようにデジタル通信などにおいて生じるエラーを自動的に修正し元の情報を復元することを目的とする。以下では c は符号語、 e は誤り (ベクトル)、 $r = c + e$ は受信語を表す。



誤り訂正符号は、Reed–Solomon(RS) 符号、Golay 符号・Reed–Muller(RM) 符号といった代数的符号と畳み込み符号、Low-Density Parity–Check(LDPC) 符号といった非代数的符号に大別される。代数的符号の符号化・復号化の過程は処理速度の点で非代数的符号 (特に LDPC 符号) に劣るが、理論的な訂正可能数が求まる場合が多いため非代数的符号のデータ処理と比べて高い信頼制度を有する。特に RS 符号は、現代の社会生活に欠かせない CD、DVD、ハードディスク、二次元バーコード (QR コード) の誤り訂正に応用されている。

本稿で扱う射影 RM 符号は (古典的な) RM 符号の射影化として 1988 年に Lachaud [10] によって定義された。その後すぐに Sørensen [16] により、射影 RM 符号の最小距離と双対符号が決定された。また Berger と Maximy [3] は射影 RM 符号が巡回符号あるいは準巡回符号であるための条件を与えた。最近の研究では、Ballet と Rolland [2] による低重みの符号語の検証と二番目の重みの評価がなされている。一方で射影 RM 符号の復号法に関する研究は低次元の射影空間に対応する射影 RM 符号の計算例が知られているのみである。(例えば [7] には 1 次元射影空間、[8] には 2 次元射影空間に対応する符号の復号計算例がある。)

本研究の目的はすべての射影 RM 符号に有効に働く復号法を構成することである。そのために代数幾何学の基礎である射影空間のアフィン空間の和集合への分解を用いる。射影空間の各アフィン成分に対して、誤り位置の情報を持つイデアルのグレブナー基

本研究は科研費 (課題番号:26887043) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 94B35, 13P10

キーワード: error-correcting codes, projective Reed–Muller codes, Gröbner basis, Berlekamp–Massey–Sakata algorithm, discrete Fourier transform

* 〒468-8511 愛知県名古屋市中天白区久方二丁目 12 番地 1 豊田工業大学

e-mail: nakashima@toyota-ti.ac.jp

底を得るために Berlekamp–Massey–Sakata(BMS) アルゴリズム [14], [15] を採用し, 誤り値決定のために離散フーリエ変換 (DFT) を用いた復号法 [12] を適用する. また, 本研究で構成した復号法の計算量の評価, 誤り訂正数の決定を行い, 復号誤り率を最小距離復号法と比較する.

本研究は豊田工業大学の松井一氏との共同研究に基づく.

2. 定義

$q = p^e$ を素数べきとし, $\mathbb{F}_q$ を q 元からなる有限体とする. また $\mathbb{F}_q[X_0, X_1, \dots, X_m]$ は $\mathbb{F}_q$ 上 $m+1$ 変数の多項式環を表すこととする.

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^m &:= \{(\omega_1, \dots, \omega_m) \mid \omega_1, \dots, \omega_m \in \mathbb{F}_q\} = \mathbb{F}_q^m, \\ \mathbb{P}^m &:= (\mathbb{A}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim \\ &= \bigcup_{i=0}^m \{(0 : \dots : 0 : 1 : \omega_{i+1} : \dots : \omega_m) \mid \omega_j \in \mathbb{F}_q, j > i\}\end{aligned}$$

とおく. ただし, 同値関係 $\sim$ は次で定める:

$$P_1 \sim P_2 \quad \text{if} \quad P_1 = \lambda P_2 \text{ for some } \lambda \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}.$$

$\mathbb{A}^m(\mathbb{F}_q) = \mathbb{A}^m$ を $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン空間, $\mathbb{P}^m(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}^m$ を $\mathbb{F}_q$ 上の射影空間という. $i = 0, 1, \dots, m$ に対して $\Psi_i := \{(0 : \dots : 0 : 1 : \omega_{i+1} : \dots : \omega_m) \in \mathbb{P}^m \mid \omega_j \in \mathbb{F}_q, j > i\} \simeq \mathbb{A}^{m-i}$ とおくと, 明らかに

$$\mathbb{P}^m = \Psi_m \cup \Psi_{m-1} \cup \dots \cup \Psi_1 \cup \Psi_0$$

である.

定義 1 (Reed-Muller 符号). $\mathbb{A}^m = \{P_1, \dots, P_{q^m}\}$ とする.

$$\text{RM}_\nu(m, q) = \{(f(P_1), \dots, f(P_{q^m})) \mid f \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_m]_{\leq \nu}\},$$

を次数 ν の Reed–Muller(RM) 符号という. ただし, $\mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_m]_{\leq \nu}$ は次数 $\leq \nu$ の多項式全体とする.

定義 2 (射影 Reed–Muller 符号). $n := \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = q^m + \dots + q + 1$, $\mathbb{P}^m = \{P_1, \dots, P_n\}$ とおく. このとき

$$\text{PRM}_\nu(m, q) := \{(f(P_1), \dots, f(P_n)) \mid f \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, \dots, X_m]_\nu\}$$

を符号長 n , 次数 ν の射影 Reed–Muller(RM) 符号という. ただし, $\mathbb{F}_q[X_0, X_1, \dots, X_m]_\nu$ は次数 ν の斉次多項式全体とし, $P = (0 : \dots : 0 : 1 : \omega_{i+1} : \dots : \omega_m)$ に対し $f(P) = f(0, \dots, 0, 1, \omega_{i+1}, \dots, \omega_m)$ とする.

注意: $\nu > m(q-1)$ のとき, 射影 RM 符号は自明な符号である [16, Remark 3]. したがって以下では $\nu \leq m(q-1)$ を仮定する.

定義 3.

$$\text{ev} : \mathbb{F}_q[X_0, X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathbb{F}_q^n, \quad \text{ev}(f) := (f(P))_{P \in \mathbb{P}^m}$$

を評価写像とよぶ.

3. 射影RM符号の基底

本節では $q > 2$ とする. $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}_0^{m+1}$ に対して, $X^{\mathbf{a}} := X_0^{a_0} X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m}$, $|\mathbf{a}| := a_0 + a_1 + \cdots + a_m$ と定める. 単項式順序 $\prec$ を次の方法で定義する: “ $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$ ” あるいは “ $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ かつ $a_m = b_m, a_{m-1} = b_{m-1}, \dots, a_{\ell+1} = b_{\ell+1}$ and $a_\ell < b_\ell$ をみたすインデックス ℓ が存在する” とき, $X^{\mathbf{a}} \prec X^{\mathbf{b}}$ とする.

すべての $i = 1, \dots, m$ に対して $f_i := X_i^q - X_i$ と定め, $i = 0, \dots, m$, と $\ell \in \{0, 1\}$ に対して $g_{(i,\ell)} := X_i^\ell (X_i - 1) \cdots (X_1 - 1)(X_0 - 1) = X_i^\ell \prod_{j=0}^i (X_j - 1)$ と定める. このとき次が成り立つ.

定理 4. $2m + 1$ 個の多項式からなる集合

$$\mathcal{G} := \{f_i, g_{(m,0)}, g_{(j,1)} \mid i = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, m-1\}$$

は $\ker(\text{ev})$ の $\prec$ に関するグレブナー基底である.

例 5. $m = 1, 2, 3$ の場合の $\mathcal{G}$ の具体例を挙げる.

1. $m = 1$ のとき

$$\mathcal{G} = \{X_1^q - X_1, (X_1 - 1)(X_0 - 1), X_0^2 - X_0\}.$$

2. $m = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \{ & X_2^q - X_2, X_1^q - X_1, \\ & (X_2 - 1)(X_1 - 1)(X_0 - 1), \\ & (X_1^2 - X_1)(X_0 - 1), \\ & X_0^2 - X_0\}. \end{aligned}$$

3. $m = 3$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \{ & X_3^q - X_3, X_2^q - X_2, X_1^q - X_1, \\ & (X_3 - 1)(X_2 - 1)(X_1 - 1)(X_0 - 1), \\ & (X_2^2 - X_2)(X_1 - 1)(X_0 - 1), \\ & (X_1^2 - X_1)(X_0 - 1), \\ & X_0^2 - X_0\}. \end{aligned}$$

また標準単項式は次で与えられる.

1. $m = 1$ のとき, $\{X_0 X_1^a \mid 0 \leq a \leq q-1\} \cup \{X_0\}$,
2. $m = 2$ のとき, $\{X_1^a X_2^b \mid 0 \leq a, b \leq q-1\} \cup \{X_0 X_2^a \mid 0 \leq a \leq q-1\} \cup \{X_0 X_1\}$,
3. $m = 3$ のとき, $\{X_1^a X_2^b X_3^c \mid 0 \leq a, b, c \leq q-1\} \cup \{X_0 X_2^a X_3^b \mid 0 \leq a, b \leq q-1\} \cup \{X_0 X_1 X_3^a \mid 0 \leq a \leq q-1\} \cup \{X_0 X_1 X_2\}$.

例 6. $\text{PRM}_3(2, 9)$ の $\mathbb{F}_9$ 上の基底を標準単項式の線形結合の形で表す. $\{\text{ev}(X^a) \mid |a| = 3\}$ は (標準単項式の線形結合で表されていない) $\text{PRM}_3(2, 9)$ の基底であることを考えると

$$\begin{aligned} \text{ev}(X_0^3) &= \text{ev}(X_0), \\ \text{ev}(X_1X_0^2) &= \text{ev}(X_1X_0), \\ \text{ev}(X_2X_0^2) &= \text{ev}(X_2X_0), \\ \text{ev}(X_1^2X_0) &= \text{ev}(X_1^2 + X_1X_0 - X_1), \\ \text{ev}(X_2X_1X_0) &= \text{ev}(X_2X_1 + X_2X_0 + X_1X_0 - X_2 - X_1 - X_0 + 1), \\ \text{ev}(X_2^2X_0) &= \text{ev}(X_2^2X_0), \\ \text{ev}(X_1^3), \text{ev}(X_1^2X_2), \text{ev}(X_1X_2^2), \text{ev}(X_2^3) \end{aligned}$$

とかきかえることができる. ここで $\text{ev}(X_0X_1X_2)$ に注目する. $\text{ev}(X_0X_1X_2)$ は基底の線形変換で $\text{ev}(X_2X_1 - X_2 - X_1 + 1)$ とかきかえられるが, どのような基底の線形変換でも 1 つの標準単項式 ($\text{ev}(X^{\text{alpha}})$) の形にはかきかえられない.

例 6 のように標準単項式の形で表される元からなる基底を持たない場合には [12] に示される復号アルゴリズム (次節の Algorithm 1) が適用できない.

4. 復号法

Algorithm 1 は BMS アルゴリズムと DFT を用いた RM 符号の復号法である. (BMS アルゴリズムの詳細は [6] をみよ.) ここで $\mathcal{F}$ と $\mathcal{E}$ は以下で定義される写像であり, $\mathcal{F}$ の逆写像 $\mathcal{F}^{-1}$ を n^3 より小さいオーダーで計算する方法も知られている [12].

定義 7 (離散フーリエ変換). $M = \{X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m} \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m, 0 \leq a_1, \dots, a_m \leq q-1\}$ とする. 線形写像 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} : \mathbb{F}_q^{\mathbb{A}^m} \rightarrow \mathbb{F}_q^M, \quad (c_P)_{P \in \mathbb{A}^m} \mapsto \left(\sum_{P \in \mathbb{A}^m} c_P h(P) \right)_{h \in M},$$

で定義し, $\mathbb{F}_q^{\mathbb{A}^m}$ 上の離散フーリエ変換という. ただし, $\mathbb{F}_q^\Omega := \{(c_P)_{P \in \Omega} \mid c_P \in \mathbb{F}_q\}$ は集合 Ω で指数付けられた $\mathbb{F}_q$ 上の線形空間である.

定義 8. 写像 $\mathcal{E}_\Phi$ は

$$\mathcal{E}_\Phi : \mathbb{F}_q^{D(\Phi)} \rightarrow \mathbb{F}_q^M, \quad (r_h)_{h \in D(\Phi)} \mapsto (r_g)_{g \in M},$$

により定義される. ただし, $g \in M$ に対して

$$r_g = \sum_{h \in D(\Phi)} v_h r_h$$

であり, v_h はグレブナー基底 $\mathcal{G} = \{f^{(w)}\}_{0 \leq w < z}$ の割り算アルゴリズムによって

$$g(X) = \sum_{0 \leq w < z} u^{(w)}(X) f^{(w)}(X) + v(X) \quad (v(X) := \sum_{h \in D(\Phi)} v_h h),$$

で与えられる.

Algorithm 2 は Algorithm 1 を使った射影 RM 符号の復号法の疑似コードである.

5. 計算量

本節では Algorithm 2 の計算量について考察する.

定義 9. $f(q)$ と $g(q)$ を $\mathbb{R}$ の部分集合上で定義された関数とする. ある定数 q_0 と C が存在して, 任意の $q > q_0$ に対して $|f(q)| \leq C|g(q)|$ が成り立つとき, $f(q) = O(g(q))$ とかく. O は Landau の記号とよばれる. さらに, $f(q) = O(g(q))$ かつ $g(q) = O(f(q))$ であるとき $f(q) = \theta(g(q))$ とかく.

$N_i = q^{m-i}$ を $(m-i)$ 次元アフィン空間の要素数とする. 各アフィン成分における Algorithm 1 の復号に関して誤り位置決定と誤り値決定に要する計算量は, それぞれ $O(z_i N_i^2) = O(z_i q^{2m-2i})$ ([5], [6]) と $O(q N_i^2) = O(q^{2m-2i+1})$ ([12]) である. ただし, z_i は Ψ_i 部分の BMS アルゴリズムで得られるグレブナー基底の要素数である. すべての $i = 0, 1, \dots, m$ に対して, $z_i < q^{m-i}$ であるから, Ψ_i 部分の合計計算量 $O(w_i q^{2m-2i})$ は $O(n^3)$ より真に小さい¹. ただし, $w_i := \max\{z_i, q\}$ である.

Algorithm 2 全体で要する計算量は

$$O(w_0 q^{2m} + w_1 q^{2m-2} + w_2 q^{2m-4} + \dots + w_m)$$

であり, さらに次のこともわかる.

命題 10. $w := \max\{q, z_0, z_1, \dots, z_m\} < q^m < n$ とおくと Algorithm 2 の計算量は $O(w n^2)$ である. また $w n^2 = \theta(w q^{2m})$ である.

6. 訂正可能数

$\mu = m(q-1) - \nu$ とする. $i_0 \geq 0$ を $\nu - i_0(q-1) \leq -1$ なる最小の整数とすると, $i \geq i_0$ に対して $\text{RM}_{\mu-1}(m-i, q) = \mathbb{F}_q^{q^{m-i}}$ となる. Algorithm 2 を各アフィン成分にわけたときの成分ごとの訂正可能数は次のとおりである.

定理 11. $\text{PRM}_\nu(m, q)$ を射影 RM 符号として,

$$t_0 := \left\lfloor \frac{(q-s)q^{m-r-1} - 1}{2} \right\rfloor, \quad (6.1)$$

とおく. ただし, $\nu = r(q-1) + s$, $0 \leq s < q-1$, $0 \leq r \leq m-1$ である. Algorithm 2 において, Ψ_i -部分で適用する復号法と訂正可能な誤りの数は次のとおりである.

Algorithm 1 Decoding for affine variety codes (cf. [12])

Input: A received word $(r_P)_{P \in \mathbb{A}^m} \in \mathbb{F}_q^{\mathbb{A}^m}$

Output: $(c_P)_{P \in \mathbb{A}^m} \in \text{RM}_{\nu'}(m, q)$

Step 1. $(\tilde{r}_h)_{h \in B} := \left(\sum_{P \in \mathbb{A}^m} r_P h(P) \right)_{h \in B}$.

Step 2. Calculate a Gröbner basis $\mathcal{G}$ from the syndrome $(\tilde{r}_h)_{h \in B}$ by BMS algorithm.

Step 3. $(e_P)_{P \in \mathbb{A}^m} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{E}((\tilde{r}_h)_{h \in B})$.

Step 4. $(c_P)_{P \in \mathbb{A}^m} = (r_P)_{P \in \mathbb{A}^m} - (e_P)_{P \in \mathbb{A}^m} \in \text{RM}_{\nu'}(m, q)$.

Remark. This algorithm works if $2|\Phi| < d_{\text{FR}}$, where d_{FR} is a Feng-Rao bound of $\text{RM}_{\nu'}(m, q)^\perp$ (see [1], [6], [9], [13] for Feng-Rao bounds) and Φ is the set of error locations.

¹ より細かくいうと $w_i q^{2m-2i}$ は q^{3m-3i} より小さいが, 計算量としては $n^3 = \theta(q^{3m-3i})$ であるので, 符号長 n を使ってこのように表した.

1. $0 \leq i < i_0$ ならば $\text{RM}_{\nu-i(q-1)}(m-i, q)$ に関する *Algorithm 1* を適用して t_0 個の誤りを訂正できる.

2. $i_0 \leq i \leq m$ ならば *IDFT* を適用して q^{m-i} 個の誤りを訂正できる.

これは $\mathbb{P}_m$ の成分ごとに誤りの数を制限した特殊誤りが起こる場合の訂正可能数である. 一方で, 命題 11 から常に直せる誤りの数もわかる.

系 12. $\text{PRM}_{\nu}(m, q)$ に対して *Algorithm 2* は任意に起こる t_0 個までの誤りを訂正できる.

7. 復号誤り率

Algorithm 2 の復号誤り率を最小距離復号法 (MDD) との比較をする². *Algorithm 2* において訂正可能数は2種類考えることができる: 一つは常に訂正可能である誤りの数 t_0 で (命題 12), もう一つは成分ごとに誤りの数を制限した特殊誤りが起こる場合の訂正可能数 (表 2) である. この二つの場合には, 復号誤り率が異なるので, 常に訂正可能な数 t_0 を訂正する復号法を Proposed method 1 (PM1), 特殊な場合の誤りを訂正する復号法を Proposed method 2 (PM2) と書くこととする. このとき, p をシンボル誤り率 (符号語の1つの成分が誤る確率) とすると, 復号誤り率はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{PM1: } 1 - P & \quad (P = \sum_{j=0}^{t_0} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}) \\ \text{PM2: } 1 - \prod_{i=0}^{i_0-1} P_i & \quad (P_i = \sum_{j=0}^{t_0} \binom{q^{m-i}}{j} p^j (1-p)^j) \\ \text{MDD: } 1 - P_{\text{MD}} & \quad (P_{\text{MD}} = \sum_{j=0}^{t_{\text{MD}}} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}) \\ \text{ただし, } t_{\text{MD}} & := \left\lfloor \frac{d_{\min}(\text{PRM}_{\nu}(m, q)) - 1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

で与えられる. 常に $t_{\text{MD}} \geq t_0$ なので

$$1 - P_{\text{MD}} = 1 - P - \sum_{j=t_0+1}^{t_{\text{MD}}} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

である. したがって, 復号誤り率を比べると常に MDD の方が PM1 より性能がよいことがわかる³. 一方で表 2 に表されるように ν が大きくなれば復号誤り率の差が少なくなる. 特に $\text{PRM}_{24}(2, 16)$ のように PM1 が MDD と同じ復号誤り率をもつこともある. また, 図 1 は $\text{PRM}_{13}(2, 16)$ と $\text{PRM}_{19}(2, 16)$ に関して PM1, PM2, MDD の復号誤り率を比較したグラフである.

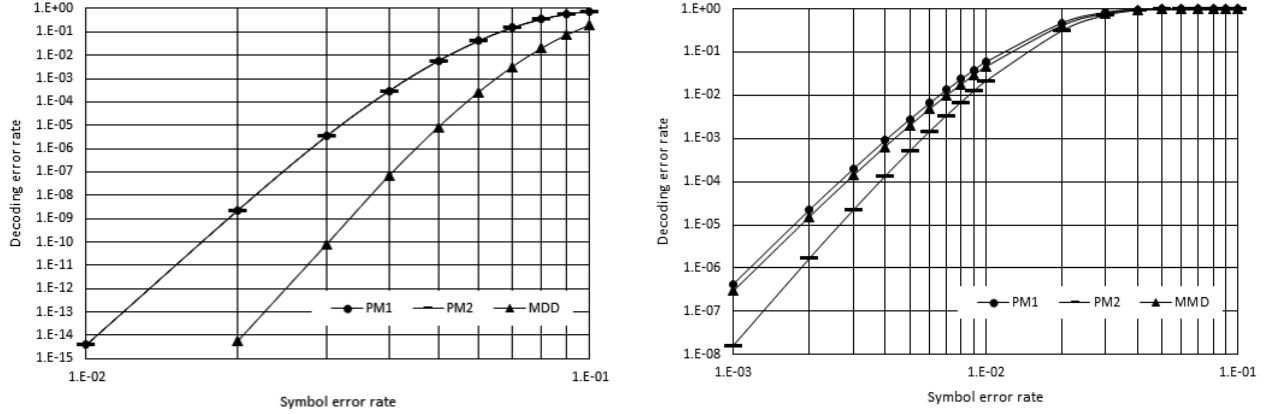
参考文献

- [1] H. E. Andersen, O. Geil, “Evaluation codes from order domain theory,” *Finite Fields Appl.*, vol.14, no.1, pp.92-123, 2008
- [2] S. Ballet, R. Rolland, “On low weight codewords of generalized affine and projective Reed–Muller codes,” *Designs Codes Cryptogr.*, vol.73, no.2, pp.271-297, 2014
- [3] T. P. Berger, L. de Maximy, “Cyclic Projective Reed–Muller Codes,” In *Proc. of Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error Correcting Codes*, vol. 2227, pp.77-81, 2001.

² 復号誤り率とは復号結果とオリジナルの情報を符号化した語が一致しない率を表す. また, MDD は誤り訂正符号のほとんどの入門書で学ぶことができる. 例えば [11] の 1 章 3 節を見てほしい. MDD は主に $q = 2$ のときに考えられるが, 一般の q の場合にも誤り位置決定に利用できる.

³ MDD による復号は復号誤り率の面で非常に高い性能を有するが, 符号語の全探索を行わなければならないので計算量は指数オーダーである. 処理速度を考えると実用化は非常に難しいとされる.

図 1: $\text{PRM}_{13}(2, 16)$ (左) と $\text{PRM}_{19}(2, 16)$ (右) に関する復号誤り率の比較



- [4] I. F. Blake and R. C. Mullin, *The Mathematical Theory of Coding*, New York: Academic Press, 1975.
- [5] M. Bras-Amoós, M. E. O’Sullivan, “The correction capability of the Berlekamp–Massey–Sakata algorithm with majority voting,” *Appl. Algebr. Eng. Commun. Comput.*, vol.17, no.5 pp.315-335, 2006.
- [6] D. Cox, J. Little, D. O’Shea, “The Berlekamp–Massey–Sakata algorithm,” *Using Algebraic Geometry*, 2nd ed., Chapter 10, pp.494-532, Springer, Berlin, 2005.
- [7] A. Dür, “The decoding of extended Reed–Solomon codes,” *Discrete Math.*, vol.90, issue 1, pp.21-40, 1991.
- [8] I. Duursma, “Decoding codes from curves and cyclic codes,” PhD. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- [9] G. L. Feng, T. R. N. Rao, “Decoding algebraic geometric codes up to the designed minimum distance,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.39, pp.36-47, 1993.
- [10] G. Lachaud, “Projective Reed–Muller codes,” in *Lect. Notes in Comp. sci.*, vol.311, Berlin: Springer 1988.
- [11] F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, 1977.
- [12] H. Matsui, “Lemma for linear feedback shift registers and DFTs applied to affine variety codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.60, no.5, pp.2751-2769, 2014.
- [13] S. Miura, “Linear codes on affine algebraic varieties,” *Trans. IEICE*, vol.J81-A, no.10, pp.1386-1397, 1998. (in Japanese)
- [14] S. Sakata, “Finding a minimal set of linear recurring relations capable of generating a given finite two-dimensional array,” *J. Symb. Comput.*, vol.5, no.3, pp.321-337, 1988.
- [15] S. Sakata, “Extension of the Berlekamp–Massey algorithm to n dimensions,” *Inform. Comput.*, vol.39, no.2, pp.207-239, 1990.
- [16] A. B. Sørensen, “Projective Reed–Muller codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.37, pp.1567-1576, 1991.

Algorithm 2 Decoding algorithm for $\text{PRM}_\nu(m, q)$

Input: A received word $(r_P)_{P \in \mathbb{P}^m} \in \mathbb{F}_q^n$

Output: The error vector $(e_P)_{P \in \mathbb{P}^m}$ of $(r_P)_{P \in \mathbb{P}^m} \in \mathbb{F}_q^n$

for $i = 0, \dots, m$ **do**

Step 1.

if $i = 0$ **then**

$r_P^{(0)} := r_P$.

else $\{i > 0\}$

$r_P^{(i)} := r_P - e_P$ for $P \in \bigcup_{j=0}^{i-1} \Psi_j$,

$r_P^{(i)} := r_P$ for $P \notin \bigcup_{j=0}^{i-1} \Psi_j$.

end if

Step 2. Let $S_{\mathbf{u}}^{(i)} := \langle (r_P^{(i)})_{P \in \mathbb{P}^m}, \mathbf{u} \rangle$ for $\mathbf{u} \in \text{ev}(B_i(\mu))$.

if $\nu - i(q-1) \geq 0$ **then**

Calculate $(e_P)_{P \in \Psi_i}$ by Algorithm 1 as decoding of $\text{RM}_{\nu-i(q-1)}(m, q)$ from syndromes $\{S_{\mathbf{u}}^{(i)}\}_{\mathbf{u} \in \text{ev}(B_i(\mu))}$.

else

Calculate $(e_P)_{P \in \Psi_i} = \mathcal{F}_i^{-1}((S_{\mathbf{u}}^{(i)})_{\mathbf{u} \in \text{ev}(B_i(\mu))})$.

end if

end for

Remark. Set $\mu := m(q-1) - \nu$, $B_i := \{X^{\mathbf{a}} \in R \mid \mathbf{a} = (a_i, \dots, a_m), a_i > 0\}$, $B_i(\mu) := \{X^{\mathbf{a}} \in B_i \mid |\mathbf{a}| = \mu\}$ for any $i = 0, 1, \dots, m$.

表 1: Algorithm 2 の成分ごとの訂正可能数

$\mathbb{P}^m$ の成分	復号法を適用する符号	訂正可能数
Ψ_0	$\text{RM}_{\mu-1}(m, q)^\perp = \text{RM}_\nu(m, q)$	t_0
Ψ_1	$\text{RM}_{\mu-1}(m-1, q)^\perp = \text{RM}_{\nu-(q-1)}(m-1, q)$	t_0
Ψ_2	$\text{RM}_{\mu-1}(m-2, q)^\perp = \text{RM}_{\nu-2(q-1)}(m-2, q)$	t_0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ψ_{i_0-1}	$\text{RM}_{\mu-1}(m-i_0+1, q)^\perp = \text{RM}_{\nu-(i_0-1)(q-1)}(m-i_0+1, q)$	t_0
Ψ_{i_0}	$(\mathbb{F}_q^{q^{m-i_0}})^\perp$	$q^{m-i_0} = \#\Psi_{i_0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ψ_{m-1}	$(\mathbb{F}_q^q)^\perp$	$q^1 = \#\Psi_{m-1}$
Ψ_m	$\mathbb{F}_q^\perp$	$q^0 = \#\Psi_m$

表 2: $\text{PRM}_\nu(2, 16)$ に関する Algorithm 2 と MDD の訂正可能数の差

ν	5	8	11	13	17	19	24	26	29
Algorithm 2	87	63	39	23	6	6	3	2	0
MDD	95	71	47	31	7	5	3	2	1
Difference	8	8	8	8	1	1	0	0	1

パラレルセッション 会場A

小山中島の L 関数の母関数表示

室蘭工業大学 工学研究科前期博士課程 数理システム工学専攻 服部 至宏

1 Artin-Mazur ゼータ

本文では, 小山中島の L 関数という組み合わせ論的ゼータ関数の行列式表示の形に着目してその母関数表示を導くことを目標とする. この母関数表示を導くということに関して, 組み合わせ論的ゼータの一つの Artin-Mazur ゼータの場合を例にとり説明する.

まず, X を n 点集合とする. n 次対称群 S_n は X に作用し, その元を σ とする. この時, 有限離散力学系 (X, σ) が得られる. これを $\mathbb{Z}$ -力学系と呼ぶ. σ の固定点の集合を $\text{Fix}(\sigma)$ とする. また, $\text{Cyc}\sigma$ は σ を互いに素な巡回置換の積にした時に表れるその巡回置換の集合で $|c|$ は巡回域に含まれる元の個数である. Artin-Mazur ゼータは以下のような母関数表示で定義される.

定義 1.1 (Artin-Mazur ゼータ)

$$\begin{aligned} Z_\sigma(u) &:= \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{|\text{Fix}(\sigma^k)|}{k} u^k\right) : \text{母関数表示} \\ &= \prod_{c \in \text{Cyc}\sigma} \frac{1}{1 - u^{|c|}} : \text{オイラー積表示} \end{aligned}$$

ここでまた, Artin-Mazur ゼータは行列式表示が以下になることが知られている.

定理 1.1 (Artin-Mazur ゼータの行列式表示)

$$Z_\sigma(u) = \frac{1}{\det(I - uM_\sigma)}, \quad M_\sigma = (\delta_{\sigma(i)j})_{i,j=1,\dots,n}$$

このように通常 Artin-Mazur のような力学系モデルは母関数表示で定義され, その結果として行列式表示が導出される. 小山中島の L 関数においてもこのような力学系モデルによる解釈における母関数表示を求めたい. しかし小山中島の L 関数はオイラー積表示で定義され, 行列式表示の形から母関数表示を求めることになるため今後の議論のひな形として Artin-Mazur ゼータを使って具体的に行列式表示に着目し母関数表示を導く導出過程を見る.

例えば, $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5) \in S_5$ における行列式表示を見てみると, σ^1 の時固定点の個数は 0 個, σ^2 の時固定点の個数は 2 個, σ^3 の時固定点の個数は 3 個, σ^4 の時固定点の個数は 2 個, σ^5 の時固定点の個数は 0 個, σ^6 の時固

定点の個数は 5 個となりそれ以降の固定点の個数はこの繰り返しとなる. また, σ の行列表示は,

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. つまり $\det(I - uM_\sigma) = (1 - u^2)(1 - u^3)$ となる. つまり,

$$\begin{aligned} \det(I - uM_\sigma)^{-1} &= \frac{1}{1 - u^2} \frac{1}{1 - u^3} \\ &= \exp(-\log(1 - u^2)(1 - u^3)) \\ &= \exp\left(\sum_{k \geq 1} \left(\frac{2}{2k} u^{2k} + \frac{3}{3k} u^{3k}\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{|Fix(\sigma^k)|}{k} u^k\right) \end{aligned}$$

となる. 以上の話を複素鏡映群に拡張し小山中島の L 関数で母関数表示を求めることが本文の目標である.

2 小山中島の L 関数

そこで小山中島の L 関数を定義します. まず, 複素鏡映群 $G(m, n) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ の元を τ とする. また 1 の m 乗根を ξ とした, 複素鏡映群から n 次一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ への写像を M として,

$$M(\tau) = M_\tau = (\xi^{s_i} \delta_{\sigma(i), j})_{i, j=1, 2, \dots, n}, \quad (1)$$

とする. このとき行列 $M(\tau)$ は複素鏡映群の行列表示である. ここで l 項巡回置換 p

$$p : i \mapsto \sigma(i) \mapsto \sigma^2(i) \mapsto \dots \mapsto \sigma^l(i) = i$$

の巡回の長さ $l = |p|$ とする. $\int_p \tau = \sum_{i \in p} s_i$ において巡回群 $Cyc(\sigma)$ から 0 元を含まない複素数体 $\mathbb{C}^\times$ への写像 χ を次のように定義する.

$$\chi_\tau : Cyc(\sigma) \rightarrow \mathbb{C}^\times : p \mapsto \xi^{\int_p \tau},$$

定義 2.1 (L 関数) 今まで導入したことから, L 関数 $L_\sigma(s, \chi)$ を以下のように定義する.

$$L_\tau(u) = \prod_{p \in Cyc(\sigma)} (1 - \chi_\tau(p) u^{|p|})^{-1}.$$

ここで小山中島の L 関数において次のことが分かっている。

定理 2.1 (Koyama-Nakajima, 2012)

$$L_\tau(u) = \det(I - uM_\tau)^{-1} \quad (2)$$

行列式表示が $1/\det(I - A)$ の形になるとき, 次の形の母関数表示を持つことが知られている.

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{k} u^k\right), \quad N_k = \text{tr} A^k$$

本文の目標はこの N_k に Artin-Mazur ゼータと同じ様に力学系モデルによる解釈を加えることである. 最後に主結果として小山中島の L 関数にこのような解釈を与える力学系モデルができたので紹介する.

3 主結果

小山中島の L-関数においても A-M ゼータと同様に力学系モデルによる解釈を得るために, ここで, 新たな力学系を考える. X をアルファベットとする. τ は複素鏡映群の元とする. また, $\mathbb{R}$ は単位的可換環である. このとき, 有限離散力学系 (X, σ) が得られるが, ここで w という以下の関数を定義する.

$$w : X \rightarrow \mathbb{R} : i \mapsto \xi^{s_i},$$

この w を重みと呼び, Z 力学系に対して w を付け $(X, \sigma; w)$ という重み付き力学系を考える. ここで w_k を以下のように定義する.

$$w_k(i) = \begin{cases} w(\sigma^0(i))w(\sigma^1(i))\dots w(\sigma^{k-1}(i)) & (\sigma^k(i) = i \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}.$$

たとえば i という X の元を考える. i に対して σ を作用させていき, 初めて $\sigma^k(i) = i$ となるまでを 1 周期として考える. この時 i に対して重み付き力学系を作用させていくと以下ようになる.

$$i \xrightarrow{w(\sigma^0(i))} \sigma(i)^1 \xrightarrow{w(\sigma^1(i))} \sigma(i)^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{w(\sigma^{k-1}(i))} \sigma(i)^k$$

このことから, 1 周期ごとにそれまでにかかったすべての重みつまり, $w_k(i)$ という重みの積が表れるということがわかる. ただ注意してほしいのは矢印一つ一つに重みがかかっているが, 1 周期ごと以外では重みは表れない. また上図を 1 本のオービットまたは軌道と呼ぶ. X の元の個数とオービットの本数は一致する.

定義 3.1 ($\Phi_{uA}(\Lambda^{-1})$ の実現)

$$\begin{aligned} L_\tau(u) &= \prod_{l \in \text{Lyn}(\sigma)} \frac{1}{1 - \text{circ}_{uA}(l)} : \text{Euler 積表示} \\ &= \frac{1}{\det(1 - uA)} : \text{行列式表示} \end{aligned}$$

これらのことから $L_\tau(u)$ においても以下のような母関数表示が期待できる.

$$L_\tau(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{k} u^k\right) : \text{母関数表示}$$

この N_k を W-ZDS を用いて以下のように表せる.

定理 3.1 ($L_\tau(u)$ の母関数表示)

$$L_\tau(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\text{infity}} \frac{N_k}{k} u^k\right), \quad N_k = \sum_{i \in X} w_k(i)$$

つまり, この N_k というのは重み付き力学系の m 周期点の軌道の重みの総和となる.

参考文献

- [1] リーマン予想のこれまでとこれから,
出版社: 日本評論社,
著者: 黒川 信重, 小山 信也
- [2] Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas
By Shin-ya KOYAMA and Sachiko NAKAJIMA

多重ゼータ値に対する少し変わった重み つき和公式

門田慎也

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 導入

多重ゼータ値とは自然数の組 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq 2$) に対して、次の級数で定義される実数である:

$$\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) := \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} \dots m_n^{\alpha_n}}.$$

$\alpha_n = 1$ だと級数が収束しないため $\alpha_n \geq 2$ としている. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ のことを重さ (weight), n を深さ (depth) という. $n = 1$ のものがリーマンゼータ値である. この多重ゼータ値の研究は Euler [2] に始まる (当時は depth が 2 のものしか考えられていなかった). Euler の研究の後, しばらくの間は多重ゼータ値の研究はあまり行われていなかったのだが, 20 世紀に入ってから再び取り上げられ研究されるようになった. 1990 年代に入ってから, 数論幾何や Galois 表現, 結び目不変量や量子群など多くの分野との密接な関わりが注目されるようになり, 研究が活発になってきた. この多重ゼータ値 $\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ には次のような積分表示があることが知られている.

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = & \int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} < 1} \frac{dt_1}{1 - t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{\alpha_1}}{t_{\alpha_1}} \frac{dt_{\alpha_1+1}}{1 - t_{\alpha_1+1}} \frac{dt_{\alpha_1+2}}{t_{\alpha_1+2}} \dots \frac{dt_{\alpha_1+\alpha_2}}{t_{\alpha_1+\alpha_2}} \times \\ & \times \dots \frac{dt_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1}}{1 - t_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1}} \frac{dt_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 2}}{t_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 2}} \dots \frac{dt_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{t_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}. \end{aligned}$$

この積分の $\frac{dt_i}{1 - t_i}$ を級数展開して積分を繰り返すことによって, 上の多重級数と等しいことがわかる. $\frac{dt_i}{1 - t_i}$ の個数が depth を, $\frac{dt_i}{1 - t_i}$ と $\frac{dt_i}{t_i}$ を

合わせた個数が weight を表している. この積分表示が, 主結果の証明を行う上で非常に重要な役割を果たすのである. 現在, 多重ゼータ値の研究は活発に行われているのであるが, その中の一つに「多重ゼータ値の間の線型関係式を見つける」というものがある. たくさんの関係式を知りたい方は [1] を参照していただきたい. この研究は Euler の時代から行われており, Euler は [2] において次の式を示した.

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=m \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 1}} \zeta(\alpha_1, \alpha_2 + 1) = \zeta(m + 1) \quad (m \geq 2).$$

そしてこの関係式を一般の depth に拡張したのが Granville [4] でありそれを和公式と呼ぶ.

さて, タイトルにも出てくる「重みつき和公式」であるが, これはその名の通り多重ゼータ値に重みがついた和公式である. たくさんの重みつき和公式があるのだが, その中の一つに Ohno–Zudilin [6] が示した次の関係式がある.

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=m \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 1}} 2^{\alpha_2+1} \zeta(\alpha_1, \alpha_2 + 1) = (m + 2) \zeta(m + 1) \quad (m \geq 2).$$

これは, Euler が示した式における多重ゼータ値に重みがついたものと見ることができる. そして Granville が示した和公式における多重ゼータ値に重みがついたもの, すなわち Ohno–Zudilin の結果を一般の depth に拡張したのが Eie–Liaw–Ong [3] であり, 次の関係式だ.

$$\sum_{|\alpha|=m} \sum_{j=1}^n 2^{\alpha_{2j}+1} \zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} + 1) = (m + 2n) \zeta(m + 1) \quad (m \geq 2n).$$

ただし, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_{2n}$ とし, $\sum_{|\alpha|=m}$ は自然数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ で和が m

になるものにわたる和である.

今回の研究で, Eie–Liaw–Ong の結果のある種の一般化になっている式が得られた.

2 主結果

Theorem 2.1. 非負の整数 k, r と 4 つのパラメータ $\mu_1, \mu_2, \xi_1, \xi_2$ に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{a_1+a_2=k \\ x_1+x_2=r}} \mu_1^{a_1} \mu_2^{a_2} \xi_1^{x_1} \xi_2^{x_2} \zeta(a_1+x_1+2) \zeta(a_2+x_2+2) \\
&= \sum_{\sigma \in S_2} \left[\sum_{\substack{a_1+a_2=k \\ x_1+x_2=r}} \mu_{\sigma(1)}^{a_1} \mu_{\sigma(2)}^{a_2} \xi_{\sigma(1)}^{x_1} \xi_{\sigma(2)}^{x_2} \times \right. \\
&\quad \times \sum_{\substack{|\alpha|=a_1+x_1+1 \\ |\beta|=a_2+x_2+1}} \zeta(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{a_1}+1, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{a_2}+1) + \\
&\quad + \sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=k \\ x_1+x_2+x_3=r}} \left\{ \mu_{\sigma(2)}^{a_3} \xi_{\sigma(2)}^{x_3} + \mu_{\sigma(1)}^{a_3} \xi_{\sigma(1)}^{x_3} \right\} \mu_{\sigma(1)}^{a_1} \xi_{\sigma(1)}^{x_1} (\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2} (\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{x_2} \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{|\alpha|=a_1+x_1+1 \\ |\beta|=a_2+x_2+1}} \zeta(\alpha_0, \dots, \alpha_{a_1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{a_2} + \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{a_3} + 1).
\end{aligned}$$

この式において $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1$ とし, 少し計算すると Eie–Liaw–Ong の結果が得られる.

他にも関係式が得られたのだが, 式が長くページに収まりきらないのでここでは省略することにする.

参考文献

- [1] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, MI レクチャーノート **23**.
- [2] L.Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci.Petropol **20** (1776), 140-186.
- [3] M. Eie, W. -C. Liaw, Y. L. Ong, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, International J. Number Theory, Vol. 9, No. 5 (2013), 1185–1198.
- [4] A.Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in London Math. Soc. Lecture Note Ser.**247**, Cambridge, 1997, pp.95-101.
- [5] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.

一般リーマン予想の下での Hardy-Littlewood 予想の例外集合について

鈴木雄太 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)*

1. Introduction

1923 年, Hardy-Littlewood[1] は

「十分大きい自然数は平方数であるか素数と平方数の和でかけるであろう」

と予想した. この予想は今日 “Hardy-Littlewood 予想” と呼ぶもののひとつであるが, やはり未解決である. 自然数 N に対して, N 以下の自然数であって平方数でも素数と平方数の和でもないものの個数 $E(N)$ を考える. 今回は一般リーマン予想の下で, この $E(N)$ の上からの評価を行いたい. 以後, 一般リーマン予想を常に仮定する.

一般リーマン予想の下での $E(N)$ の最初の評価は 1985 年の A. I. Vinogradov[6] による $E(N) \ll N^{2/3+\varepsilon}$ である. 彼は詳細な計算を残さなかった上, その評価は一般リーマン予想を仮定したという観点からは余り満足のいくものではない. このような評価の詳細な計算は 1993 年に三河 [3, Proposition] により初めて行われ, 彼は Circle Method を用いて Vinogradov の評価を

$$E(N) \ll N^{1/2}(\log N)^A(\log \log N)^4, \quad (A \text{ はある正の定数}) \quad (1)$$

という形へと改善した. 彼の得た定数 A の値は $A = 4$ である. この評価は GRH の効果が典型的に現れていて, GRH を仮定する上では現在の技術でのほぼ最良な評価であろう. しかし $\log$ べき分の観点からは, まだ改善が望める. 実際, 1995 年に Perelli-Zaccagnini[4, p. 191] は, 三河 [3] の計算を改良することで $A = 3 + \varepsilon$ とできることを注意した. この $\log$ べき分の改善がどこまで行えるかについて考えたい.

今回, 彼らのような Circle Method による計算を, いくつかの点でより注意深く行うことで, $A = 3/2$ とできることを示した. 本講演では, この改善の方法について報告する.

Main Theorem. 一般リーマン予想の下,

$$E(N) \ll N^{1/2}(\log N)^{3/2}(\log \log N)^4$$

が成り立つ.

2. Circle Method

この $E(N)$ の評価には Hardy-Littlewood による Circle Method を用いる. まず, 三河 [3] の計算では, 素数および平方数の生成関数として三角多項式

$$S(\alpha) := \sum_{n \leq N} \Lambda(n)e(n\alpha), \quad W(\alpha) := \sum_{n^2 \leq N} e(n^2\alpha), \quad e(x) := \exp(2\pi i x)$$

が用いられているが, Languasco-Perelli [2] に習いべき級数

$$\tilde{S}(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)e^{-n/N}e(n\alpha), \quad \tilde{W}(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2/N}e(n^2\alpha)$$

* e-mail: m14021y@math.nagoya-u.ac.jp

を用いる. すると, 自然数 n を素数と平方数で書き表す書き表し方をおおよそ $\log$ の重み付きで数えた

$$R(n) = \sum_{k+m^2=n} \Lambda(k)$$

を考えることにすれば, その生成関数は

$$\tilde{S}(\alpha)\tilde{W}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} R(n)e^{-n/N}e(n\alpha)$$

で与えられる. 一方, Hardy-Littlewood より,

$$\mathfrak{S}(n) = \begin{cases} \prod_p \left(1 - \frac{(n/p)}{p-1}\right) & (n \text{ が平方数でない時}) \\ 0 & (n \text{ が平方数の時}) \end{cases}$$

とおくと¹,

$$R(n) \sim \mathfrak{S}(n)\sqrt{n}, \quad n \rightarrow \infty, n \neq m^2$$

となることが予想されている. この観点から

$$\sum_{n \leq N} (R(n) - \mathfrak{S}(n)\sqrt{n})^2$$

というような2乗平均を考えることにすると, (1)はこの2乗平均を $\ll N^{3/2}(\log N)^A$ という形で評価できれば従うことが分かる. そこでこの2乗平均の評価のためにべき級数²

$$U(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}(n)\sqrt{n}e^{-n/N}e(n\alpha)$$

を考えれば, Parseval の等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} (R(n) - \mathfrak{S}(n)\sqrt{n})^2 e^{-2n/N} = \int_0^1 \left| \tilde{S}(\alpha)\tilde{W}(\alpha) - U(\alpha) \right|^2 d\alpha \quad (2)$$

を得る. ここで左辺の Abelian weight $e^{-2n/N}$ はさほど問題にならない. このように2乗平均を積分で表して, その積分を $\tilde{S}(\alpha)$ や $\tilde{W}(\alpha)$ の近似を用いて評価する, というのが大体の流れである. そのために以下の様な Farey 分割を用いる. パラメータ $1 \leq P, Q \leq N$ を導入し, $PQ = N$ かつ $Q \geq 2015\sqrt{N}$ と仮定する. 単位区間 $I = [1/Q, 1 + 1/Q]$ を考える. この単位区間 I の中にある a/q という形の分数であって $(a, q) = 1$ なるものを Farey 分数と呼ぶが, この Farey 分数の周りの小区間 $\xi_{a,q} = [a/q - 1/qQ, a/q + 1/qQ]$ を考える. そこで, これら小区間のうち分母の小さい Farey 分数に対応する者たちの和集合

$$\mathfrak{M} = \prod_{q \leq P} \prod_{a \pmod q}^* \xi_{a,q}$$

を major arc と呼ぶ. ただしここで $\prod^*$ は既約剰余類のみを渡るという意味である. この補集合 $\mathfrak{m} = I \setminus \mathfrak{M}$ を minor arc と呼ぶ. 評価すべき (2) の右辺の積分は major arc 上の積分と minor arc 上の積分へと分割して評価される. $\tilde{S}(\alpha)$ や $\tilde{W}(\alpha)$ の近似が行われるのは major arc 上の積分のみであり, 近似のあまりうまく行かない minor arc 上の積分は Bessel の不等式を用いて評価する.

¹ ここで (n/p) は Legendre 記号.

² 本当はさらに $\mathfrak{S}(n)$ を有限な形に切ってしまったものに対してべき級数を考える.

3. Languasco-Perelli の評価

まず、素数の生成関数 $\tilde{S}(\alpha)$ の近似を考える。先に三角多項式でなく、べき級数を生成関数として採用したわけであるが、その主な理由は $\tilde{S}(\alpha)$ の近似にある。必要な評価は適当な幅 $\xi > 0$ に対して

$$\sum_{a \pmod{q}}^* \int_{-\xi}^{\xi} \left| \tilde{S}\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{1}{z} \right|^2 d\alpha \ll qN\xi(\log N)^B \quad (3)$$

というようなものである。ここで $z = 1/N - 2\pi i\alpha$ である。この左辺は major arc の中で同じ分母 q を持つ Farey 分数に対応する小弧上での 2 乗誤差をだいたい表していることに注意する。尚、三河 [3] での対応する評価では $B = 4$ である。

三角多項式を用いた場合、Dirichlet の L 関数から三角多項式への直接の Explicit Formula が得られない。そのため、一旦 Gallagher の補題等を用いて Explicit Formula が存在し使用できるような形に変形してから評価せねばならない。このように間接的に Explicit Formula を用いなければならないという事情により (3) の定数 B は $B = 4$ 程度の大きさになってしまう。

これを回避するために、Languasco-Perelli [2] は（一般）リーマン予想下の Circle Method において、べき級数を用いた。べき級数に対しては Mellin-Cahen formula による古典的な Explicit Formula が存在したことに注意する。彼らの手法により、(3) において $B = 2$ と取れる事がわかり、最終的に、(1) において $A = 3$ ととれる事がわかる。Perelli-Zaccagnini [4] は彼らの注意について詳細を述べていないが、恐らくこの方法に基づき $A = 3 + \varepsilon$ を導いたと思われる。

4. Jacobi の変換公式

次に平方数の生成関数 $\widetilde{W}(\alpha)$ の近似を考える。この $\widetilde{W}(\alpha)$ は古典的な Jacobi のテータ関数を少し変形しただけのものである。従って、Jacobi の変換公式を評価することで、Farey 分数 a/q の周りで

$$\widetilde{W}\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{G(a, q)}{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + O\left(q^{1/2} + q^{1/2}N^{1/2}|\alpha|^{1/2}\right) \quad (4)$$

という周知の近似式を得る。ここで $G(a, q)$ は Gauss 和

$$G(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^2}{q}\right)$$

である。三河 [3] は三角多項式の場合の Weyl 評価

$$|W(\alpha)|^2 \ll \left(\frac{N}{q} + q\right) (\log N), \quad \alpha \in \xi_{a, q}, q \leq P \quad (5)$$

や Vaughan の教科書にある評価 [5, Theorem 4.1]

$$\left| W(\alpha) - \frac{G(a, q)}{q} \sum_{n \leq N} \frac{e(n\alpha)}{2\sqrt{n}} \right| \ll q(\log q)^2, \quad \alpha \in \xi_{a, q}, q \leq P \quad (6)$$

を用いたが、そのべき級数における対応物を (4) から得ることができる。その Jacobi の変換公式を Weyl 評価 (5) や Vaughan の評価 (6) と比べると、 $\log$ べきが綺麗に消えている事がわかる。そこで、この Jacobi 変換公式による評価を用いると、(1) において容易に $A = 5/2$ とできることが分かる。

5. Major arcの伸展

さらなる改良を行おうとすると、次の主な障壁は major arc の伸展³ による誤差である。ここで major arc の伸展による誤差と言っているのは、次のようなものである。先に (2) の右辺の積分を評価する際、生成関数の近似は major arc 上でしか行わなかった。minor arc 上の積分は評価し終えてしまったわけである。そのため、近似後の積分は

$$\int_{\mathfrak{M}} (\text{生成関数の近似}) d\alpha + (\text{誤差}) = \sum_{q \leq P} \sum_{a \pmod{q}}^* \int_{\xi_{a,q}} (\text{生成関数の近似}) d\alpha + (\text{誤差})$$

という形になる。こうしておけば、生成関数を近似したものは分かりやすい関数のため、個々の $\xi_{a,q}$ 上の積分を I 全体の積分へと伸展して明示的に計算できる。この I 全体の積分への近似の際に生じる誤差を major arc の伸展による誤差と呼んだ。

三河 [3] はこの誤差を dual large sieve を用いて評価したが、さらなる改良を目指すとき、これでは不十分である。そこで、小さな個々の major arc の伸展部たちを、互いに重なり合わない部分

$$\prod_{q \leq P} \prod_{a \pmod{q}}^* \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{2qP}, \frac{a}{q} - \frac{1}{qQ} \right] \cup \left[\frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2qP} \right]$$

と重なってしまう部分

$$\prod_{q \leq P} \prod_{a \pmod{q}}^* \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{2}, \frac{a}{q} - \frac{1}{2qP} \right] \cup \left[\frac{a}{q} + \frac{1}{2qP}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2} \right]$$

に分けてみる。そうしておいて、重なり合わない部分に Bessel の不等式を適用し、残りの部分に large sieve を用いると、log べきが他の項に圧倒される程にまで消えてしまう。これにより $A = 2$ とできることが分かる。

6. Main Theoremの導出

さらなる改善のためには、major arc 上で平方数の生成関数の減衰を考慮に入ればよい。これにより Main Theorem の通り $A = 3/2$ とできることが分かる。

参考文献

- [1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), pp. 1-70.
- [2] A. Languasco and A. Perelli, *On Linnik's theorem on Goldbach numbers in short intervals and related problems*, Ann. Inst. Fourier. **44** (1994), pp. 307-322.
- [3] H. Mikawa, *On the sum of a prime and a square*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), pp. 299-310.
- [4] A. Perelli and A. Zaccagnini, *On the sum of a prime and a k -th power*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math. **59** (1995), pp. 185-200.
- [5] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method. 2nd ed.*, Cambridge, 1997.
- [6] A. I. Vinogradov, *On a binary problem of Hardy-Littlewood.*, Acta Arith. **46** (1985), pp. 33-56.

³本来, GRH を仮定しているのだから, major arc と minor arc の違いはないようなものだが, 今は log べき分の違いを問題にしているため, やはり major, minor arc を導入したほうが結果が良くなる。

一般化されたリーマン予想の下でのディリクレL関数の対数関数の臨界線付近における挙動

Ade Irma Suriajaya (名古屋大学多元数理科学研究科)*

2015年3月2日

概 要

ディリクレL関数はリーマンゼータ関数の一つの一般化である。ディリクレL関数の零点に対して、自明でないものは全て臨界線上にあるという一般化されたリーマン予想がある。この講演では、一般化されたリーマン予想を仮定したときのディリクレL関数の対数関数の臨界線付近における評価を紹介する。

1. 導入

リーマンゼータ関数は次のように定義される。

定義 1.1. リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ とは、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ を満たす複素数 s に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

を満たすような複素平面上の有理型関数である。

リーマンゼータ関数の零点についてはリーマン予想がある。リーマン予想とは、 $\zeta(s) = 0$ を満たす複素数 s は、 $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ なら、 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ を満たすという予想である。さらに、リーマンゼータ関数の一種の一般化であるディリクレL関数に関しては一般化されたリーマン予想がある。ディリクレL関数の定義及び一般化されたリーマン予想の主張は第2節で述べる。

リーマン予想を仮定したときのリーマンゼータ関数及びその一階導関数の対数関数の $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ の近くにおける評価が知られている。詳しくは [Tit, Section 14.14] と [Aka, Lemmas 2.4 and 2.6] を参照されたい。これらの結果は、リーマンゼータ関数及びその一階導関数の零点の個数の評価における誤差項と零点の実部の分布に関する評価の誤差項に影響する。詳しくは [Tit, Theorems 9.3, 9.4, and 14.13] 及び [Aka, Theorems 1 and 3] を参照されたい。

この講演の目的は、前段落で述べたもののディリクレL関数への拡張を紹介することである。一般化されたリーマン予想を仮定したときのディリクレL関数及びその一階導関数の対数関数の $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ の近くにおける評価については第3節で述べる。第4節では、これらの結果がディリクレL関数及びその一階導関数の零点の個数と零点の実部の分布に関する評価との関係を述べる。

岩谷直治記念財団の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 11M06, 11M26

キーワード: リーマンゼータ関数, ディリクレL関数, 対数関数, 導関数, 零点

*〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科

e-mail: m12026a@math.nagoya-u.ac.jp

2. ディリクレ L 関数

この節では、ディリクレ L 関数の定義と一般化されたリーマン予想の主張を述べる。

はじめに、ディリクレ指標を定義する。

定義 2.1. 自然数 q を法とするディリクレ指標 χ とは、乗法群 $(\mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z})^\times$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への写像であり、次の性質を満たすものである：

1. 任意の自然数 m と n に対して、 $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$,
2. 任意の自然数 n に対して、 $\chi(n+q) = \chi(n)$,
3. $(n, q) > 1$ を満たす任意の自然数 n に対して、 $\chi(n) = 0$,
4. ある自然数 n_0 が存在して、 $\chi(n_0) \neq 0$.

特に、任意の自然数 $q' < q$ に対して、ある自然数 n が存在して、 $(n, q) = 1$ かつ $\chi(n+q') \neq \chi(n)$ となるとき、 χ が原始的であるという。

ディリクレ L 関数は次のように定義されるリーマンゼータ関数の一つの一般化である。

定義 2.2. 自然数 q を法とするディリクレ指標 χ に付随するディリクレ L 関数 $L(s, \chi)$ とは、 q を法とするディリクレ指標 χ と $\operatorname{Re}(s) > 1$ を満たす複素数 s に対して、ディリクレ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

を満たすような複素平面上の有理型関数である。

注 2.3. ディリクレ指標は原始的なら、そのディリクレ級数は $\operatorname{Re}(s) > 0$ を満たす全ての複素数 s に対して成り立つ。

注 2.4. 1 を法とするディリクレ指標に付随するディリクレ L 関数はリーマンゼータ関数に一致する。

$L(s, \chi)$ の零点については以下の予想がある。

一般化されたリーマン予想 (**GRH**). $L(s, \chi) = 0$ を満たす複素数 s とディリクレ指標 χ に対して、 $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ なら、 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ である。

以降、 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ を満たす s 全体の集合を臨界線と呼ぶ。

3. ディリクレ L 関数の対数関数の臨界線付近における挙動

この節では、一般化されたリーマン予想を仮定したときのディリクレ L 関数及びその一階導関数の対数関数の臨界線付近における評価を紹介する。

GRH の仮定の下での $L(s, \chi)$ の対数関数の臨界線付近における挙動については以下のように知られている。詳細は [MV, Section 13.2 Exercise 8] 及び [Sel, Section 5] を参照されたい。

定理 3.1. GRH を仮定し、 χ を原始的とする。 $1/2 \leq \sigma \leq 3/2$ に対して、

$$\log L(\sigma + it, \chi) = O\left(\frac{\log qt}{\log \log qt}\right)$$

が成り立つ。

また、整数 m と関数 $G(s, \chi)$ を以下のように定義する：

$$m := \min\{m' \in \mathbb{N} \mid \chi(m') \neq 0, m' \geq 2\}, \quad G(s, \chi) := -\frac{m^s}{\chi(m) \log m} L'(s, \chi).$$

GRH を仮定したときに、その対数関数の臨界線付近における挙動は次のようである。

定理 3.2. GRH を仮定し、 χ を原始的とする。 $1/2 \leq \sigma \leq 3/4$ であるとき、大きい $T > 0$ と q のみに依存する定数 M_q に対して、ある定数 $C > 0$ が存在して、

$$\log G(\sigma + iT, \chi) = O \left((\log \log qT) \log \left(\frac{m^{M_q} \exp \left(C \left(\frac{(\log qT)^{2(1-\sigma)}}{(\log \log qT)^{1/2}} + (\log qT)^{1/10} \right) \right)}{\log m} \right) \right)$$

が成り立つ。

4. 応用

この節では、定理 3.1 と 3.2 の二つの応用を述べる。

① $L(s, \chi)$ の零点の個数の評価の誤差項は $L(s, \chi)$ の対数関数 $\log L(s, \chi)$ の臨界線付近における挙動によって決まる。まず、 $L(s, \chi)$ の偏角関数

$$S(T, \chi) := \frac{1}{\pi} \arg L \left(\frac{1}{2} + iT, \chi \right)$$

は標準な対数枝によって定まった関数として定義する (cf. [Sel, p. 5])。次の命題の詳細は [Sel, p. 5]、[Dav, Chapter 16]、[Sel, Theorem 6] を参照されたい。

命題 4.1. $T > 0$ に対して、 $N(T, \chi)$ は $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, $0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T$ にある $L(s, \chi)$ の零点の重複度を込めた個数としたとき、

$$N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} - \frac{\chi(-1)}{8} + S(T, \chi) - S(0, \chi) + O \left(\frac{1}{1+T} \right) \quad (4.1)$$

が成り立つ。さらに、

$$S(t, \chi) = \begin{cases} O(\log q(1 + |t|)), & \text{無条件;} \\ O \left(\frac{\log q(1 + |t|)}{\log \log q(3 + |t|)} \right), & \text{GRH の下} \end{cases}$$

が成り立つ。

② $L(s, \chi)$ の一階導関数 $L'(s, \chi)$ の実数でない零点の実部の分布と零点の個数の評価において、誤差項は $\log L(s, \chi)$ 及び $\log G(s, \chi)$ によって決まる。具体的には、次の二つの命題がある。

命題 4.2. GRH を仮定し、 χ を原始的とする。 M_q を q のみに依存する定数、 c を定数

とする。 $T \geq q^c$ に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho'=\beta'+i\gamma', \\ L'(\rho', \chi)=0, q^c < \gamma' \leq T}} \left(\beta' - \frac{1}{2} \right) &= \frac{T}{2\pi} \log \log \frac{qT}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \log m - \log \log m \right) T - \frac{1}{q} \int_2^{\frac{qT}{2\pi}} \frac{dt}{\log t} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^{M_q} (-\arg L(\sigma + iq^c, \chi) + \arg G(\sigma + iq^c, \chi)) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^{M_q} (-\arg L(\sigma + iT, \chi) + \arg G(\sigma + iT, \chi)) d\sigma \\ &\quad + O(q^c \log \log q + \log q) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、対数枝を $\log L(s, \chi)$ と $\log G(s, \chi)$ が $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ のときに 0 に近づいて、それぞれが $\mathbb{C} \setminus \{\rho + \lambda \mid L(\rho, \chi) = 0 \text{ or } \infty, \lambda \leq 0\}$ と $\mathbb{C} \setminus \{\rho' + \lambda \mid L'(\rho', \chi) = 0 \text{ or } \infty, \lambda \leq 0\}$ 上で正則となるように取る。

命題 4.3. GRH を仮定し、 χ を原始的とする。 $T \geq 2$ に対して、 $N_1(T, \chi)$ は $0 < \operatorname{Im}(s) \leq T$ にある $L'(s, \chi)$ の零点の重複度を込めた個数としたとき、

$$\begin{aligned} N_1(T, \chi) &= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2m\pi} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \arg G \left(\frac{1}{2} + iq^c, \chi \right) - \frac{1}{2\pi} \arg L \left(\frac{1}{2} + iq^c, \chi \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \arg G \left(\frac{1}{2} + iT, \chi \right) + \frac{1}{2\pi} \arg L \left(\frac{1}{2} + iT, \chi \right) \\ &\quad + O(q^K \log q) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 c と K は定数であり、対数枝を命題 4.2 のように取る。

参考文献

- [Aka] H. Akatsuka, *Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of $\zeta'(s)$* , J. Number Theory **132** (2012), 2242–2257.
- [Dav] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, third ed., Springer, 2000.
- [MV] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*, Cambridge University Press, 2006.
- [Sel] A. Selberg, *Contributions to the theory of Dirichlet's L -functions*, Skr. Norske Vid-Akad. Oslo. I. **1946** (1946), no. 3, 1–62. also available as arxiv:1310.6489 [math.NT].
- [Tit] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second ed. (revised by D. R. Heath-Brown), Oxford Univ. Press, 1986.

Multi-Poly-Bernoulli numbers と Poly-Bernoulli numbers の関係性

古牧 弘幸 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

1 Introduction

ベルヌーイ数は、Jakob Bernoulli により 1713 年に発見され、べき乗和の公式、リーマンゼータ関数や多重ゼータ値と関係 ([1],[2]) があるものである。本講演では、まず各々の定義を挙げる。次に Multi-Poly-Bernoulli numbers(以下 MPBN と略す) の関係式を挙げ、そこから多重ベルヌーイ数と MPBN の間にある関係式について紹介する。

Definition 1.1 (ベルヌーイ数)

ベルヌーイ数 B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を逐次

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1$$

で定める。なお n が 3 以上の奇数のとき、 $B_n = 0$ が知られている。

1997 年には金子昌信氏によってベルヌーイ数の一般化である多重ベルヌーイ数 (Poly-Bernoulli numbers) $B_n^{(k)}$ が定義され、さらにその後 MPBN: $B_n^{(k_1, \dots, k_r)}$ が導かれた。

Definition 1.2 (多重ベルヌーイ数)

多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)} \in \mathbf{Q}$ ($n \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) を、母関数により

$$\frac{Li_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

で定義する。ここで $Li_k(t)$ は形式的べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ を表す。

この定義は、ベルヌーイ数の一般化であり、 $k=1$ のとき $Li_k(1 - e^{-t})=t$ となるので、ベルヌーイ数の母関数表示

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

と一致する。

Definition 1.3 (MPBN)

Multi-Poly-Bernoulli numbers $B_n^{(k_1, \dots, k_r)}$ を整数 $k_1, \dots, k_r$ を用いて

$$\frac{Li_{k_1, \dots, k_r}(1 - e^{-t})}{(1 - e^{-t})^r} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k_1, \dots, k_r)} \frac{t^n}{n!}$$

と定義する。ここで、 $Li_{k_1, \dots, k_r}(t)$ は

$$Li_{k_1, \dots, k_r}(t) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{t^{m_r}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

と定義する。 $r=1$ のときは多重ベルヌーイ数と一致し、 $r=1$ かつ $k_1=1$ のときはベルヌーイ数と一致する。これらのことから MPBN は多重ベルヌーイ数の一般化であり、多重ベルヌーイ数はベルヌーイ数の一般化となっていることがわかる。

2 Multi-Poly-Bernoulli numbers の関係式

上指数が負の MPBN はべき乗の形で以下のように表される。

Theorem2.1 ([3])

r を正整数とし、 $k_1, \dots, k_r$ を $(k_1, \dots, k_r) \neq (0, \dots, 0)$ である非負整数とする。 $k := k_1 + \dots + k_r$ とおく。このとき、次の等式が成り立つ。

$$B_n^{(-k_1, \dots, -k_r)} = \sum_{l=1}^k \alpha_l^{(k_1, \dots, k_r)} (l+r)^n$$

ここで $\alpha_l^{(k_1, \dots, k_r)}$ ($1 \leq l \leq k$) は $k_1, \dots, k_r$ にのみ依存する整数で、次の漸化式により帰納的に定まる。

- (i) $\alpha_l^{(k_1)} = (-1)^{l+k_1} l! \left\{ \begin{smallmatrix} k_1 \\ l \end{smallmatrix} \right\}$
- (ii) $\alpha_l^{(k_1, \dots, k_{r-1}, 0)} = \alpha_l^{(k_1, \dots, k_{r-1})}$
- (iii) $\alpha_l^{(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r+1)} = (l+r-1) \alpha_{l-1}^{(k_1, \dots, k_r)} - l \alpha_l^{(k_1, \dots, k_r)}$

ここで

$$\alpha_0^{(k_1, \dots, k_r)} = \begin{cases} 1 & (k_1, \dots, k_r) = (0, \dots, 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であり、 $\alpha_l^{(k_1, \dots, k_r)} = 0$ ($l > k$) である。

$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ は第 2 種スターリング数であり、 n 元集合を m 個の空でない部分集合に分ける方法の数である。

ここで Theorem2.1 において、 $(k_1, \dots, k_r) = (0, \dots, 0)$ なら、 $B_n^{(\overbrace{0, \dots, 0}^r)} = r^n$ である。また、theorem2.1 から次の特殊な場合の関係式が成り立つ。

Theorem2.2

$$(1) B_n^{(-1, \overbrace{0, \dots, 0}^{r-1})} = (r+1)^n = B_n^{(\overbrace{0, \dots, 0}^{r+1})}$$

$$(2) B_n^{(\overbrace{0, \dots, 0}^{r-1}, -1)} = r(r+1)^n$$

$$(3) B_n^{(\overbrace{0, \dots, 0}^r, -1, 0, \dots, 0)} = i(r+1)^n \quad (1 \leq i \leq r) \quad (i \text{ 番目の値を } -1 \text{ とする。})$$

(3) において $i = 1$ のとき (1) であり、 $i = r$ のとき (2) となっている。証明は Theorem2.1 を用いることで得られる。

3 Main Results

上指数が負の多重ベルヌーイ数と MPBN の間にある関係式を紹介する。まず、Theorem2.2 で挙げた MPBN の特殊な値が上指数が負の多重ベルヌーイ数の結合和として書けることを紹介する。

Theorem3.1 ($r \geq 1$)

$$(1) B_n^{(-1, \overbrace{0, \dots, 0}^{r-1})} = \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^r \left[\begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right] B_n^{(-k)}$$

$$(2) B_n^{(\overbrace{0, \dots, 0}^{r-1}, -1)} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=1}^r \left[\begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right] B_n^{(-k)}$$

$$(3) B_n^{(\overbrace{0, \dots, 0}^r, -1, 0, \dots, 0)} = \frac{i}{r!} \sum_{k=1}^r \left[\begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right] B_n^{(-k)} \quad (i \text{ 番目の値を } -1 \text{ とする。})$$

$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]$ は第 1 種スターリング数であり、 m 個のサイクルからなる n 次置換 (n 次対称群の元) の個数である。Theorem3.1 の一般化として次が成り立つ。

Theorem3.2 ($r \geq 1$)

$$(1) B_n^{(-m, \overbrace{0, \dots, 0}^{r-1})} = \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{l+m} l! \{m\}_l}{(r+l-1)!} \sum_{k=1}^{r+l-1} \begin{bmatrix} r+l-1 \\ k \end{bmatrix} B_n^{(-k)}$$

$$(2) B_n^{(0, \dots, 0, -m)} = \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{l+m} (r)_{l-1} \{m\}_l}{(r+l-2)!} \sum_{k=1}^{r+l-1} \begin{bmatrix} r+l-1 \\ k \end{bmatrix} B_n^{(-k)}$$

ここで、 $(r)_l = r(r+1) \cdots (r+l-1), (r)_0 = 1$ である。

$$(3) B_n^{(0, \dots, 0, -m, 0, \dots, 0)} = \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{l-m} (i)_l \{m\}_l}{(r+l-1)!} \sum_{k=1}^{r+l-1} \begin{bmatrix} r+l-1 \\ k \end{bmatrix} B_n^{(-k)} \quad (i \text{ 番目の値を } -m \text{ とする。})$$

Example3.3 (Theorem3.1 の $2 \leq r \leq 4$ の場合)

$$B_n^{(-1,0)} = \frac{1}{2} B_n^{(-1)} + \frac{1}{2} B_n^{(-2)}$$

$$B_n^{(-1,0,0)} = \frac{1}{3} B_n^{(-1)} + \frac{1}{2} B_n^{(-2)} + \frac{1}{6} B_n^{(-3)}$$

$$B_n^{(-1,0,0,0)} = \frac{1}{4} B_n^{(-1)} + \frac{11}{24} B_n^{(-2)} + \frac{1}{4} B_n^{(-3)} + \frac{1}{24} B_n^{(-4)}$$

$$B_n^{(0,-1)} = B_n^{(-1)} + B_n^{(-2)}$$

$$B_n^{(0,0,-1)} = B_n^{(-1)} + \frac{3}{2} B_n^{(-2)} + \frac{1}{2} B_n^{(-3)}$$

$$B_n^{(0,0,0,-1)} = B_n^{(-1)} + \frac{11}{6} B_n^{(-2)} + B_n^{(-3)} + \frac{1}{6} B_n^{(-4)}$$

また、 $B_n^{(-m, \overbrace{0, \dots, 0}^{r-1})}, B_n^{(0, \dots, 0, -m)}, B_n^{(0, \dots, 0, -m, 0, \dots, 0)}$ を r のべき乗の結合和で表したときの係数和に注目すると次のことがわかる。

Corollary3.4 ($r \geq 1$)

$$(1) B_n^{(-m, \overbrace{0, \dots, 0}^{r-1})} \text{ の係数和は } 1$$

$$(2) B_n^{(0, \dots, 0, -m)} \text{ の係数和は } r^m$$

$$(3) B_n^{(0, \dots, 0, -m, 0, \dots, 0)} \text{ の係数和は } i^m \quad (i \text{ 番目の値を } -m \text{ とする。})$$

今度は上指数が負の多重ベルヌーイ数を MPBN の特殊な値の結合和を用いて表す。

Theorem3.5

多重ベルヌーイ数 $B_n^{(-k)}$ ($n \geq 0, k \geq 1$) は次のように表せる。

$$(1) B_n^{(-k)} = (-1)^{k-1} B_n^{(0,0)} + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+k+1} (r+1)! \left\{ \begin{matrix} k \\ r+1 \end{matrix} \right\} B_n^{(-1, \overbrace{0, \dots, 0}^r)}$$

$$(2) B_n^{(-k)} = (-1)^{k-1} B_n^{(0,0)} + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+k+1} r! \left\{ \begin{matrix} k \\ r+1 \end{matrix} \right\} B_n^{(0, \dots, 0, -1)}$$

$$(3) B_n^{(-k)} = (-1)^{k-1} B_n^{(0,0)} + \sum_{r=i}^{k+i-2} (-1)^{r-i+k} \frac{(r-i+2)!}{i} \left\{ \begin{matrix} k \\ r-i+2 \end{matrix} \right\} B_n^{(0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)} \quad (i \text{ 番目の値を } -1 \text{ とする。})$$

Example3.6 ($1 \leq k \leq 4$)

$$(1) B_n^{(-1)} = B_n^{(0,0)}$$

$$B_n^{(-2)} = -B_n^{(0,0)} + 2B_n^{(-1,0)}$$

$$B_n^{(-3)} = B_n^{(0,0)} - 6B_n^{(-1,0)} + 6B_n^{(-1,0,0)}$$

$$B_n^{(-4)} = -B_n^{(0,0)} + 14B_n^{(-1,0)} - 36B_n^{(-1,0,0)} + 24B_n^{(-1,0,0,0)}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & B_n^{(-1)} = B_n^{(0,0)} \\
& B_n^{(-2)} = -B_n^{(0,0)} + B_n^{(0,-1)} \\
& B_n^{(-3)} = B_n^{(0,0)} - 3B_n^{(0,-1)} + 2B_n^{(0,0,-1)} \\
& B_n^{(-4)} = -B_n^{(0,0)} + 7B_n^{(0,-1)} - 12B_n^{(0,0,-1)} + 6B_n^{(0,0,0,-1)}
\end{aligned}$$

また Theorem3.5 で挙げた式の MPBN の係数和は次のようになる。

Corollary3.7 ($k = 1$ のときは 1)

$$\begin{aligned}
(1) \quad & (-1)^{k-1} + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+k+1} (r+1)! \left\{ \begin{matrix} k \\ r+1 \end{matrix} \right\} = 1 \\
(2) \quad & (-1)^{k-1} + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+k+1} r! \left\{ \begin{matrix} k \\ r+1 \end{matrix} \right\} = 0 \\
(3) \quad & (-1)^{k-1} + \sum_{r=i}^{k+i-2} (-1)^{r-i+k} \frac{(r-i+2)!}{i} \left\{ \begin{matrix} k \\ r-i+2 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1 & (k : \text{奇数}) \\ \frac{2}{i} - 1 & (k : \text{偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] 荒川恒男・伊吹山和義・金子昌信 著、ベルヌーイ数とゼータ関数、牧野書店 (2001)
- [2] 荒川恒男・金子昌信、「多重ゼータ値入門」，九州大学 MI レクチャーノート、vol.23,(2010)
- [3] K.Kamano,A formula for Multi-Poly-Bernoulli numbers of negative index.Kyushu J. Math.67,(2013)

reflexive 凸多面体とその双対凸多面体 の δ 列

土谷 昭善 (大阪大学大学院・情報科学研究科)*

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体、つまり、任意の頂点の座標が全て整数であるような凸多面体とし、 $\partial\mathcal{P}$ をその境界とする。任意の正整数 n について、 $i(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する。この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、 n に関する d 次多項式であり、定数項は常に 1 である。
- (Ehrhart 相互法則) $|n(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$ が成立する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。

整数列 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$ を次の公式で定義する。

$$(1 - \lambda)^{d+1} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathcal{P}, n) \lambda^n = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i.$$

$i(\mathcal{P}, n)$ が n に関する d 次多項式であることなどから、任意の $i > d$ について $\delta_i = 0$ であることがわかる。この整数列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_d)$$

を $\mathcal{P}$ の δ 列 と呼ぶ。

δ 列について、次のようなことが知られている。

- $\delta_0 = 1$ 、 $\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$ 、 $\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$ である。よって、 $\delta_1 \geq \delta_d$ が成立する。
- δ_i は非負である。([3])
- $i(\mathcal{P}, n)$ の最高次の係数 $\sum_{i=0}^d \delta_i / d!$ は $\mathcal{P}$ の通常の体積に一致する。

d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ について、 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が **unimodular 同値** であるとは、unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して、 U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を用いて $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + w$ とできる時に言う。ここで $v \in \mathbb{R}^d$ に対し、 $f_U(v) = vU$ と定める。 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が unimodular 同値であるならば、 $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{Q})$ が成立する。

* e-mail: a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

$\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部に属する唯一の整数点になっていると仮定する。このとき、整凸多面体 $\mathcal{P}$ が **reflexive** 凸多面体であるとは、その双対凸多面体

$$\mathcal{P}^\vee := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in \mathcal{P}\}$$

も整となるときに言う。ここで $\langle x, y \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積のことである。

整凸多面体 $\mathcal{P}$ が reflexive 凸多面体となる必要十分条件は δ 列が対称、つまり

$$\delta_i = \delta_{d-i} \quad 0 \leq i \leq d$$

が成立することが知られている ([2])。reflexive 凸多面体 $\mathcal{P}$ の双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ もまた reflexive 凸多面体であるので、その δ 列は対称である。しかし、一般的に $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ は成立しない。本原稿では reflexive 凸多面体で、 δ 列がその双対凸多面体の δ 列と一致するものの存在について議論する。

2次元の reflexive 凸多面体では δ 列が $(1, 4, 1)$ となるものは全て、その双対凸多面体の δ 列も $(1, 4, 1)$ となる。しかし、他の δ 列を持つ reflexive 凸多面体の場合は全て、その双対凸多面体の δ 列とは異なる。また3次元の reflexive 凸多面体では [1, Example 35.11] において、その例が構成されている。しかし、一般次元でのそのような reflexive 凸多面体の例は知られていない。

筆者は、2次元以上の任意の次元について、reflexive 凸多面体でその δ 列がその双対凸多面体の δ 列と一致する例を、特に unimodular 同値に着目して構成することに成功した。次の定理は、本原稿の主定理である。

定理 1 (a) 各 $d \geq 2$ に対し、 d 次元 reflexive 凸多面体 $\mathcal{P}$ で $\mathcal{P}$ とその双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が unimodular 同値となるものが存在する。

(b) 各 $d \geq 3$ に対し、 d 次元 reflexive 凸多面体 $\mathcal{P}$ で $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ を満たすが、 $\mathcal{P}$ とその双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が unimodular 同値とならないものが存在する。

実際には、次のように帰納的に構成する。 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ を $d-1$ 次元 reflexive 凸多面体で、 $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ となるものとする。これを用いて、 d 次元整凸多面体

$$\mathcal{Q} = \text{conv}(\{\mathcal{P} \times [-1, 0], (0, 0, \dots, 0, 1)\})$$

を定義する。このとき、 $\mathcal{Q}$ は reflexive であり、かつ $\delta(\mathcal{Q}) = \delta(\mathcal{Q}^\vee)$ である。

さらに $\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}^\vee$ と $w = 0$ である unimodular 同値のとき、 $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}^\vee$ と unimodular 同値となり、 $\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}^\vee$ と unimodular 同値でないとき、 $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}^\vee$ と unimodular 同値でないので、この $\mathcal{Q}$ が条件を満たす reflexive 凸多面体であることがわかる。

定理 1 の証明では d 単体、つまり $d+1$ 個の頂点で構成される d 次元整凸多面体に制限すると成立しない。筆者はさらに、2次元以上の任意の次元について、reflexive 単体で δ 列がその双対凸多面体の δ 列と一致する例の構成に成功した。次の定理は、本原稿の2つ目の主定理である。

定理 2 各 $d \geq 2$ に対し、 d 次元 reflexive 単体 $\mathcal{P}$ で $\mathcal{P}$ とその双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が unimodular 同値となる、つまり $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ となるものが存在する。

実際には次のように構成する。 $d = 2$ のときは、

$$\mathcal{P} = \text{conv}(\{(1, 0), (-1, 2), (-1, -1)\})$$

$d = 3$ のときは、

$$\mathcal{P} = \text{conv}(\{(1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (-3, -2, -2)\})$$

がその例である。

$d \geq 4$ の場合を考える。 $e_1, \dots, e_d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とする。Sylvester列と呼ばれる整数列を次のように定義する。

$$b_1 := 2, b_n := 1 + b_1 \cdots b_{n-1} (n \geq 2)$$

これを用いて $d + 1$ 個の整数点を定義する。

$$v_i = \begin{cases} -3e_1 - 2 \sum_{i=2}^d e_i & i = 0, \\ e_1 & i = 1, \\ e_1 + 2e_i & i = 2, 3, \\ e_1 + b_{i-3}e_i & i = 4, \dots, d, \end{cases}$$

これらを用いて、 d 単体

$$\mathcal{P} = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_d\})$$

を定義する。このとき、 $\mathcal{P}$ はreflexiveであり、さらに $\mathcal{P}^\vee$ の頂点は次の整数点となる。

$$w_i = \begin{cases} e_1 & i = 0, \\ (a_1, \dots, a_d) & i = 1, \\ e_1 - 2e_i & i = 2, \dots, d \end{cases}$$

ここで

$$a_i = \begin{cases} -(4b_1 \cdots b_{d-3} - 1) & i = 1, \\ \frac{4b_1 \cdots b_{d-3}}{2} & i = 2, 3, \\ \frac{4b_1 \cdots b_{d-3}}{2b_{i-3}} & i = 4, \dots, d. \end{cases}$$

である。このとき、 $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}^\vee$ とunimodular同値となる。よって、この $\mathcal{P}$ が条件を満たすreflexive単体であることがわかる。

参考文献

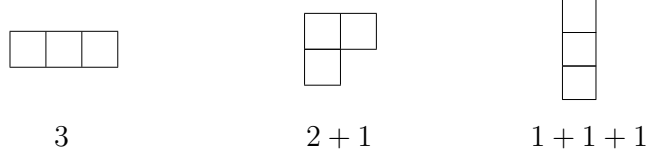
- [1] T. Hibi, Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes, Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.
- [2] T. Hibi, Dual polytopes of rational convex polytopes, *Combinatorica* **12**(1992), 237–240
- [3] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 333 – 342.
- [4] A. Tsuchiya, The δ -vectors of reflexive polytopes and of the dual polytopes, arXiv:1411.2122v1.

Immanant 不等式の精密化とその極限挙動

田端亮 (広島大学大学院理学研究科)*

1. Immanant の定義と不等式

n の分割とは, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell = n$ となる整数の非増大列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 0$ のことである. i 行目に λ_i 個の箱を並べたものはヤング図形と呼ばれ, 分割との対応があるので, 区別せずに扱うことにする. $n = 3$ に対するヤング図形は以下である.



$\mathfrak{S}_n$ の表現とは, 準同型写像 $\rho: \mathfrak{S}_n \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ のことである. その中で, 既約な表現もまた n の分割と 1 対 1 に対応することが知られている.

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の determinant (行列式) と permanent (恒久式) とは,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad \text{per } A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

であるが, これらの係数部分はそれぞれ交代表現 $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$, 自明表現 $\sigma \mapsto 1$ (のトレース) と見ることができる. この部分をその他の既約表現のトレースに置き換えることでいくらかのバリエーション (d_λ で表す) ができよう. 例えば, $n = 3$ であれば,

$$\begin{aligned} \det A = d_{\mathbb{1}}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}, \\ d_{\mathbb{2}}(A) &= 2a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}, \\ \text{per } A = d_{\mathbb{1}^3}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

といった具合である. これらを immanant と呼ぶのだが, 改めて, その定義を以下に記す.

定義. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする. ρ_λ を, n の分割 λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現とすると, λ に対応する immanant d_λ を次で定義する.

$$d_\lambda(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{tr}(\rho_\lambda(\sigma)) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

また, immanant の normalization $\bar{d}_\lambda$ を $\bar{d}_\lambda = 1/(\text{tr}(\rho_\lambda(\text{id})))d_\lambda$ と定義する.

Schur は immanant を導入し, さらに次のような不等式を示した.

定理 (Schur [6]). A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\bar{d}_\lambda(A) \geq \det A.$$

*e-mail: tabata-ryo@hiroshima-u.ac.jp

つまり, determinant とは最小の immanant である. これに対し, Lieb による最大なもの
の予想が次であり, permanental dominance 予想と呼ばれる.

予想 (Lieb [2]). A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\bar{d}_\lambda(A) \leq \text{per } A.$$

この予想は, $n \leq 13$ で正しいことが知られている ([4]) が, 一般には解決していない.

Schur の不等式と Lieb の permanental dominance 予想の精密化を考えるために,
 $\det A \neq \text{per } A$ を満たす半正値エルミート行列 A に対して, 次を定義する.

$$T_\lambda(A) = \frac{\bar{d}_\lambda(A) - \det A}{\text{per } A - \det A}.$$

Schur の不等式, Lieb の予想は, それぞれ $T_\lambda(A) \geq 0$, $T_\lambda(A) \leq 1$ と言い換えられる. こ
の観点から精密化を考えたときに, ほとんどの immanant に対して, 次のような行列が
 T_λ の最大値を与えることが予想される [8].

$$Y_n = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

半正値エルミート行列は, グラム行列で表すことができ, それによりベクトルの配置と
みなすことができるが, Y_n は原点から中心とする正 $n-1$ 単体の各頂点へのベクトルの
配置に対応する. また, 完全グラフのラプラシアン行列 (の正規化) ということもできる.

2. Immanant の極限挙動

ここからは半正値エルミート行列 Y_n について見ていく. 行列 Y_n の determinant が
0 であることは即座に分かるが, permanent に関して Frenzen-Fischer [1] は次のような
結果を与えている.

定理 (Frenzen-Fischer[1]).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{per } Y_n = \frac{e}{2}.$$

これを受け, Y_n の他の immanant はどのような極限值をとるのかを考えたい. 上
で定義した T_λ についてその挙動 (つまり, permanental dominance 予想の挙動) を見て
いくことにする. n を大きくすると, ヤング図形の箱の数が大きくなることに注意する.
最も基本的なランダムヤング図形である Plancherel 測度を考えると次のことが分かる.

定理. Plancherel 測度によるランダムヤング図形 λ に対し, Y_n のそれに対応する T_λ の
期待値について次が成り立つ.

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} E[T_\lambda(Y_n)] = \frac{2}{e}.$$

次に, 長方形ヤング図形 $\lambda = (k^n)$ について考えてみよう.

定理. k を正整数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k^n)}(Y_{kn}) = 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^k.$$

ここで, 列の数 k を $k \rightarrow \infty$ とすると,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k^n)}(Y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{2}{e}$$

となることが分かる.

続いて, ヤング図形列 $\lambda^{(n)}$ を考え, ただし, 行の数を有限とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, $\lambda_i^{(n)}/n \rightarrow b_i$ となる場合を考える.

定理. ℓ を正整数とし, ヤング図形の列 $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots$, $|\lambda^{(n)}| = n$ を考える. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}/n = b_i$, $b_1 > b_2 > \dots > b_\ell$ であるとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = 2 \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{1}{1+b_i} \right).$$

ここで, $\prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i)$ がある微分方程式の折れ線近似であることに気付くと,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu^{(n)}}(Y_n) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i) = \frac{2}{e}.$$

となることが分かる. 同様にして, $\lambda^{(n)}$ の共役 (つまり, 行と列を入れ替えたもの) $\mu^{(n)}$ を考えると, やはり

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu^{(n)}}(Y_n) = \frac{2}{e}$$

が得られ, 上記の例はいずれも $e/2$ という値となる. このことから, 次の予想を立てた.

予想. ヤング図形の列 $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots$, $|\lambda^{(n)}| = n$ を考える. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)}/n = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)}/n = 0$ ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = \frac{2}{e}.$$

参考文献

- [1] C. L. Frenzen, I. Fischer, On a Conjecture of Pierce for Permanents of Singular Correlation Matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14(1):74-81 (1993).
- [2] E. H. Lieb, Proofs of Some Conjectures on Permanents, J. Math. and Mech. 16:127-134 (1966).
- [3] T. H. Pate, Immanants and Decomposable Tensors that Symmetrize to Zero, Linear and Multilinear Algebra 28(3):175-184 (1990).
- [4] T. H. Pate, Row Appending Maps, Ψ -functions, and Immanant Inequalities for Hermitian Positive Semi-definite Matrices, Proc. London Math. Soc.(3) 76(2):307-358 (1998).
- [5] S. Pierce, Permanents of Correlation Matrices, Current Trends in Matrix Theory, R. Grone and F. Uhlig eds., Elsevier, North-Holland, Amsterdam (1987).
- [6] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen, Math. Z. 1:184-207 (1918).
- [7] Dias da Silva, On the μ -colorings of a Matroid, Linear and Multilinear Algebra 27(1):25-32 (1990).
- [8] 田端亮, Generalized Matrix Functions の不等式, 第10回数学総合若手研究集会 (2014).

アソシエーションスキームの構成法とその性質

百瀬 康弘*

信州大学大学院 総合工学系研究科

アソシエーションスキームは Bose–Shimamoto [1] によって統計の実験計画法の中で導入され, 現在では代数的組合せ論においても重要な研究対象となっている. また, アソシエーションスキームモイドは Kuribayashi–Matsuo [2] によってアソシエーションスキームを小圏の表現論およびホモトピー論を用いて研究するために導入された概念である.

まずは, 小圏の基本事項を定義する.

定義 1. $\mathcal{C}$ が小圏とは対象と呼ばれる元からなる集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ と, 射と呼ばれる元からなる集合 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ からなり以下を満たすときをいう.

1. 任意の射 f に対して 2 つの対象 $s(f)$ と $t(f)$ が定まる.
 - $s(f) = x$ かつ $t(f) = y$ のとき f を $f : x \rightarrow y$ とかき, x から y への射という.
 - 任意の対象 x, y に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid s(f) = x, t(f) = y\}$ と定める.
2. $t(f) = s(g)$ である任意の射 f, g に対して 1 つの射 $g \circ f : s(f) \rightarrow t(g)$ が定まり, $t(f) = s(g)$ かつ $t(g) = s(h)$ である射 f, g, h に対して $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ となる.
 - $g \circ f$ を f と g の合成という.
3. 任意の対象 x に対して射 id_x が存在して, 任意の射 $f : x \rightarrow y$ に対して $f \circ \text{id}_x = f = \text{id}_y \circ f$ となる.
 - $\text{id}_x : x \rightarrow x$ を x の恒等射という.

定義 2. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を小圏とする. F が $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への共変関手とは, $\mathcal{C}$ の任意の対象 x に対して $\mathcal{D}$ の対象 $F(x)$, $\mathcal{C}$ の任意の射 f に対して $\mathcal{D}$ の射 $F(f)$ が定まり以下の (FUN-0), (FUN-1), (FUN-2) を満たすものをいう.

(FUN-0). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ ならば $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$ となる.

(FUN-1). $t(f) = s(g)$ となる $\mathcal{C}$ の任意の射 f, g に対して $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ となる.

(FUN-2). $\mathcal{C}$ の任意の対象 x に対して $F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$ となる.

また, F が (FUN-2) と次の (FUN-0)', (FUN-1)' を満たすとき F を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への反変関手という.

*e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

(FUN-0)'. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ ならば $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(y), F(x))$ となる.

(FUN-1)'. $t(f) = s(g)$ となる $\mathcal{C}$ の任意の射 f, g に対して $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ となる.

F が $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への共変関手または反変関手のとき $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ とかく.

次に, アソシエーションスキームの概念の本質的な一般化である擬スキーモイドの定義を述べる.

定義 3. $\mathcal{C}$ を小圏, S を $2^{\text{Mor}(\mathcal{C})}$ の部分集合とする. このとき, $(\mathcal{C}, S)$ が擬スキーモイドとは次を満たすときをいう.

1. $\text{Mor}(\mathcal{C}) = \coprod_{\sigma \in S} \sigma$ となる.
2. 任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と $f, g \in \mu$ に対して集合として次の同型が存在する.

$$\{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = f\} \cong \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = g\}.$$

そして, 次がアソシエーションスキーモイドの定義であり, 擬スキーモイドに“ある種の対称性”を付加したものとなっている.

定義 4. $(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーモイド, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を反変関手とする. $(\mathcal{C}, S, T)$ がアソシエーションスキーモイドとは次を満たすときをいう.

1. $J = \coprod_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ としたとき, $\sigma \cap J \neq \emptyset$ となる任意の $\sigma \in S$ に対して $\sigma \subset J$ が成り立つ.
2. $T^2 = \text{id}_{\mathcal{C}}$ となる.
3. 任意の $\sigma \in S$ に対して $T(\sigma) \in S$ が成り立つ.

この定義に出て来る T が“ある種の対称性”を表している. アソシエーションスキームはアソシエーションスキーモイドであり他にも, 亜群と呼ばれる小圏からアソシエーションスキーモイドを構成する方法が挙げられるがその他の構成法は知られていない. このことは, 自己同型反変関手 T をもつ小圏の例に乏しいことに依存している.

本講演ではまず, 自己同型反変関手 T をもつ小圏を構成する十分条件を述べる. 以下では小圏 $\mathcal{E}$ に対して射の向きを反対にした圏 (反対圏と呼ぶ) を $\mathcal{E}^{\text{op}}$ で表し, $d_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{op}}$ と $d_2 : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ を自明な反変関手とする. また, 小圏全体の圏を Cat と表す.

定理 5. $\alpha : \text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ を以下を満たす共変関手とする.

- 小圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して同型 $\Phi_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})} : \alpha(\mathcal{C}, \mathcal{D})^{\text{op}} \rightarrow \alpha(\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}})$ が存在する.

- 小圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して次は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
\alpha(\mathcal{C}, \mathcal{D})^{\text{op}} & \xrightarrow{\Phi_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})}} & \alpha(\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}}) \\
\uparrow d_1 & & \uparrow d_2 \\
\alpha(\mathcal{C}, \mathcal{D}) & \xrightarrow{\Phi_{(\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}})}^{-1}} & \alpha(\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}
\end{array}$$

このとき, 小圏 $\mathcal{C}$ に対して $T : \alpha(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\text{op}}) \rightarrow \alpha(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\text{op}})$ を $T = \Phi_{(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\text{op}})} \circ d_1$ と定義すると $T^2 = \text{id}_{\alpha(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\text{op}})}$ となる.

定理の条件を満たす α として, 以下が挙げられる.

1. 非交和関手 $\coprod : \text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$
2. 直積関手 $\times : \text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$
3. join construction 関手 $*$: $\text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$

但し, 小圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して $\mathcal{C} * \mathcal{D}$ は次のような小圏である.

- $\text{Ob}(\mathcal{C} * \mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \coprod \text{Ob}(\mathcal{D})$.
- $\text{Mor}(\mathcal{C} * \mathcal{D}) = \text{Mor}(\mathcal{C}) \coprod \text{Mor}(\mathcal{D}) \coprod (\text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D}))$.

さらに, これらの関手は2つの擬スキーマイドから新たな擬スキーマイドを構成する関手でもあるので定理 5 の T を用いて, これらの関手が擬スキーマイドからアソシエーションスキーマイドを構成する関手となることを述べる.

系 6. $(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーマイド, $T : \mathcal{C} \coprod \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C} \coprod \mathcal{C}^{\text{op}}$ を $\coprod : \text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ に対して定理 5 から得られた反変関手とする.

このとき, $(\mathcal{C} \coprod \mathcal{C}^{\text{op}}, S \coprod S^{\text{op}}, T)$ はアソシエーションスキーマイドである.

系 7. $(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーマイド, $T : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\text{op}}$ を $\times : \text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ に対して定理 5 から得られた反変関手とする.

このとき, $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\text{op}}, S \times S^{\text{op}}, T)$ はアソシエーションスキーマイドである.

系 8. $(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーマイド, $T : \mathcal{C} * \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C} * \mathcal{C}^{\text{op}}$ を $*$: $\text{Cat} \times \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ に対して定理 5 から得られた反変関手とする.

このとき, $(\mathcal{C} * \mathcal{C}^{\text{op}}, S * S^{\text{op}}, T)$ はアソシエーションスキーマイドである.

参考文献

- [1] R. C. Bose and T. Shimamoto, Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 47:151–184, 1952.

[2] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories. to appear in Applied Categorical Structures, preprint (2013). arXiv:1304.6883 math. CT.

平面三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ

黒田 匡迪* 北海道大学大学院 理学院 数学専攻

概要

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライを $\overline{P}_{1,3}$ とする. 本公演では, 非安定, 半安定あるいは安定な組の幾何学的な分類と $\overline{P}_{1,3}$ における非自明な同一視についての結果を紹介する. また, 中村郁氏による Hesse の三次曲線のモジュライ $SQ_{1,3}$ や V. Alexeev 氏による完備なモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ との関係についての結果も紹介する.

1 GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$

以下, 標数が 2, 3 でない代数閉体 k 上で考える. はじめに $\overline{P}_{1,3}$ の定義を与える. 射影平面 $\mathbb{P}_k^2 = \text{Proj}(k[x_0, x_1, x_2])$ 上の一次斉次多項式全体 $k[x_0, x_1, x_2]_1$ の双対空間を V とする. S^3V を V 上の三次の対称代数, すなわち, 三次斉次多項式全体 $k[x_0, x_1, x_2]_3$ の双対空間とし, $\text{Sym}(V)$, $\text{Sym}(S^3V)$ をそれぞれ V , S^3V 上の対称代数とする. このとき, $\mathbb{P}(V) := \text{Proj}(\text{Sym}(V))$, $\mathbb{P}(S^3V) := \text{Proj}(\text{Sym}(S^3V))$ はそれぞれ $\mathbb{P}_k^2$ に含まれるすべての直線, 三次曲線からなる空間を表している. なぜならば $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(S^3V)$ の各点はそれぞれ $S \in V^\vee = k[x_0, x_1, x_2]_1$, $F \in (S^3V)^\vee = k[x_0, x_1, x_2]_3$ の零点集合 $V(S)$, $V(F)$ と同一視できるからである. $\mathbb{P}_k^2$ 内の平面三次曲線と直線からなる組全体を表すファイバー積 $\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$ 上に, 三次射影線型群スキーム $\text{PGL}(3)$ の $\mathbb{P}_k^2$ への自然な作用から誘導される作用を定める. すなわち, 任意の $g \in \text{PGL}(3)$, $(C, L) = (V(F(x)), V(S(x))) \in \mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$ に対し, $g \cdot (C, L) := (V(F(g^{-1} \cdot x)), V(S(g^{-1} \cdot x)))$ とする. この作用による半安定な組全体 $(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss}$ の GIT-商を $\overline{P}_{1,3}$ とする:

$$p: (\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss} \longrightarrow (\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss} // \text{PGL}(3) =: \overline{P}_{1,3}.$$

ここでは GIT-商の詳細な定義は省略するが, 任意の $z_1, z_2 \in (\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss}$ に対して, GIT-商の定義から直ちに次が従う (GIT の詳細な議論については [2], [4] あるいは [6] を見よ):

$$p(z_1) = p(z_2) \iff \overline{\text{PGL}(3) \cdot z_1} \cap \overline{\text{PGL}(3) \cdot z_2} \cap (\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss} \neq \emptyset. \quad (1)$$

従って, GIT-商 $\overline{P}_{1,3}$ は集合としては半安定な組の閉軌道全体のなす空間と等しい.

次に, 組 (C, L) の安定性を調べる判定法を紹介する. それは D. Hilbert 氏と D. Mumford 氏による数値的判定法である. 一次一般線型群スキーム $\mathbb{G}_m = \text{GL}(1)$ から $\text{PGL}(3)$ への射 λ を $\text{PGL}(3)$ の 1 変数部分群という. $r_0 \geq r_1 \geq r_2$, $r_0 + r_1 + r_2 = 0$ を満たす整数 r_i を用いて $\lambda(t) = \text{Diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2})$ とかけるとき, λ は正規化された 1 変数部分群と呼ばれる. 以下, λ はすべて正規化された 1 変数部分群とする. C, L の定義方程式をそれぞれ $F = \sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x_0^{3-(i+j)} x_1^i x_2^j$, $S = \sum_{0 \leq k \leq 2} b_k x_k$ とし, $H(x, y) := F(x)S(y)$ とする. 任意の λ に対し, $\mu(H, \lambda) := \max \{(3-i-j)r_0 + ir_1 + jr_2 + r_k \mid a_{ij}b_k \neq 0\}$ とする.

* E-mail: m-kuroda@math.sci.hokudai.ac.jp

定理 1.1. ([4], Theorem 2.1.)

組 (C, L) はあらゆる λ に対して $\mu(H, \lambda) \geq 0$ となるとき半安定であり, $\mu(H, \lambda) > 0$ となるとき安定である. 半安定でないものを非安定と呼ぶ.

上記の数値的判定法を用いて, 半安定な組の幾何学的な条件を調べたいが, λ は無数に存在するので, 半安定な組を直接分類するのは困難である. そのため, ある λ に対して $\mu(H, \lambda) < 0$ となる, すなわち, 非安定となる $H(x, y) = F(x)S(y)$ の係数の条件を決定する. この条件と同値な (C, L) の幾何学的な条件を求めることで, 非安定な組の幾何学的な分類が得られる. この幾何学的な条件を否定することで, 半安定な組の幾何学的な分類が得られる. さらに, この半安定な条件に加えて, ある λ に対して $\mu(H, \lambda) = 0$ となることを仮定して, 同様の操作を行うことで, 半安定な組と安定な組を分類することが出来る.

定理 1.2. (半安定あるいは安定な組 (C, L) の幾何学的条件)

半安定あるいは安定な組 (C, L) の分類は以下の表で与えられる. 下の表に含まれない組 (C, L) はいずれも非安定である. 下の表における列 k の半安定な組全体のなす $(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss}$ の部分集合を S_k とする.

C	C と L	安定性	k
非特異	L は C と横断的に交わる	安定	1
	L は C と二重に接する	半安定	2
三角形	L は C と横断的に交わる	安定	3
直線 L' + 二次曲線 Q	L, L' は Q と横断的に交わる	安定	4
	L は Q と二重に接する	半安定	5
	L' は Q と二重に接する	半安定	6
	L, L' は Q と二重に接する	半安定	7
結節三次曲線	L は C と横断的に交わる	安定	8
	L は C と二重に接する	半安定	9
尖点三次曲線	L は C と横断的に交わる	安定	10
	L は C と二重に接する	半安定	11

次に, (1) を用いた $\bar{P}_{1,3}$ における非自明な同一視を紹介する. 簡単な計算により, 次が従う:

補題 1.3. 半安定な組 $z_i \in S_i$ ($i = 3, 5, 6, 7, 11$) を以下で定める:

$$\begin{aligned}
z_3 &= (V(x_0x_1x_2), V(x_0 + x_1 + x_2)), & z_5 &= (V(x_0(x_0x_2 + x_1(x_1 + x_2))), V(x_2)), \\
z_6 &= (V(x_0(x_0x_2 + x_1(x_0 + x_1))), V(x_2)), & z_7 &= (V(x_0(x_0x_2 + x_1^2)), V(x_2)), \\
z_{11} &= (V(x_0^2x_2 + x_1^2(x_0 + x_1)), V(x_2)).
\end{aligned}$$

このとき, $S_3 = \mathrm{PGL}(3) \cdot z_3$, $S_5 = \mathrm{PGL}(3) \cdot z_5 + \mathrm{PGL}(3) \cdot z_7$, $S_6 = \mathrm{PGL}(3) \cdot z_6 + \mathrm{PGL}(3) \cdot z_7$, $S_7 = \mathrm{PGL}(3) \cdot z_7$, $S_{11} = \mathrm{PGL}(3) \cdot z_{11}$ が成り立つ.

この補題より, $p(S_3)$, $p(S_7)$, $p(S_{11})$ は $\bar{P}_{1,3}$ において一点からなることがわかる. さらに, $p(S_5) = p(S_7)$ を示せる. これは $p(z_5) = p(z_7)$ を示せば十分である. 各 $a \in k^\times$ に対し, $g_a \in \mathrm{PGL}(3)$ を $g_a^{-1} : (x_0, x_1, x_2) \mapsto$

$(x_0/a, x_1, ax_2)$ で定める. このとき

$$g_a \cdot z_5 = (V(x_0(x_0x_2 + x_1(x_1 + ax_2))), V(x_2)) \in (\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss}$$

が成り立つ. 従って $\lim_{a \rightarrow 0} g_a \cdot z_5 = z_7$ が成り立つので, (1) より $p(z_5) = p(z_7)$ を得る. 同様にして, 次の $\overline{P}_{1,3}$ における非自明な同一視, すなわち, $\mathrm{PGL}(3)$ の作用では移りあわないが, 閉軌道が交わるものを得る.

命題 1.4. $p(S_3), p(S_5), p(S_6), p(S_7), p(S_{11})$ は $\overline{P}_{1,3}$ において一点からなり, $p(S_5) = p(S_6) = p(S_7) = p(S_{11})$ が成り立つ.

2 $\overline{P}_{1,3}$ と $\overline{AP}_{1,3}$ との比較

$\overline{P}_{1,3}$ と V. Alexeev 氏により [1] において構成された完備モジュライ空間 $\overline{AP}_{1,3}$ との比較を与える. $\overline{AP}_{1,3}$ は高々, 結節点を持つ三次曲線 C と C の特異点を通らない直線 L からなる組 (C, L) のモジュライである.

$W_{\mathrm{Cusp}} := p(S_{10}) + p(S_{11}) \subset \overline{P}_{1,3}$ とし, $W_{\mathrm{T}} \subset \overline{AP}_{1,3}$ を三次曲線 C と C に 3 重で接する直線 L からなる組 (C, L) 全体とする. また, $Y := \overline{P}_{1,3} \setminus W_{\mathrm{Cusp}}$, $Z := \overline{AP}_{1,3} \setminus W_{\mathrm{T}}$ とする. このとき, 恒等写像 $f: Y \rightarrow Z$, $(C, L) \mapsto (C, L)$ は有理写像 $f: \overline{P}_{1,3} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$ を定め, その逆写像 $f^{-1}: Z \rightarrow Y$ は f の逆有理写像を定める. 従って $f: \overline{P}_{1,3} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$ は双有理写像であり, f, f^{-1} の基点集合はそれぞれ $W_{\mathrm{Cusp}}, W_{\mathrm{T}}$ である. f のグラフを $G(f) = \mathrm{Im}((\mathrm{id}, f): Y \rightarrow Y \times Z) \subset \overline{P}_{1,3} \times \overline{AP}_{1,3}$ とすると次が成り立つ:

定理 2.1. W_{Cusp} と W_{T} はいずれも $\mathbb{P}_k^1$ と同型であり,

$$W_{\mathrm{Cusp}} \times W_{\mathrm{T}} = \mathrm{pr}_1^{-1}(W_{\mathrm{Cusp}}) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(W_{\mathrm{T}}) = \overline{G(f)} \setminus G(f),$$

但し, $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ はそれぞれ $\overline{P}_{1,3} \times \overline{AP}_{1,3}$ から $\overline{P}_{1,3}, \overline{AP}_{1,3}$ への標準射影である.

3 $SQ_{1,3} \times \mathbb{P}(V)$ のブローアップから $\overline{AP}_{1,3}, \overline{P}_{1,3}$ への写像

二つのモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の構造を調べる為に, $X := SQ_{1,3} \times \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^2$ のあるブローアップから $\overline{AP}_{1,3}, \overline{P}_{1,3}$ への自然な写像を構成する. ここで, $SQ_{1,3}$ は中村郁氏により [5] において構成された Hesse の三次曲線のモジュライであり, $\mathbb{P}(V)$ は第一章で述べた $\mathbb{P}_k^2$ 内の直線全体がなす空間である.

X の各点は Hesse の三次曲線 C と直線 L からなる組

$$C: \mu_0(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 3\mu_1x_0x_1x_2, L: b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

に対応するので, X の一般の点から $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定まるが, C が三角形をなし, かつ L が C の特異点を通るときに $\overline{AP}_{1,3}, \overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できず, L が C に三重で接するときに $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できない. これらの写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると, 対応する点列は $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ の点に収束することがわかる.

例 3.1. X のアフィン開集合 $U = \mathrm{Spec}\left(k\left[s, t, u, \frac{1}{u^3-1}\right]\right)$, $s = b_0/b_2$, $t = b_1/b_2$, $u = \mu_0/\mu_1$ において, 前者の定義できない部分集合は $(u = s = 0) \cup (u = t = 0)$ であり, 後者の定義できない部分集合 (で U の原点 O を通るもの) は $(s = \zeta_3^j u, t = \zeta_3^{2j} u)$, $0 \leq j \leq 2$ である. 但し, ζ_3 は 1 の原始三乗根とする. このとき, U の点 (s, t, u) に対応する組 $C: u(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 3x_0x_1x_2$, $L: sx_0 + tx_1 + x_2 = 0$ において, $y_0 = x_0$,

$y_1 = x_1, y_2 = ux_2$ とすると, $C : y_0^3 + y_1^3 + u^3 y_2^3 = 3y_0 y_1 y_2, L : (s/u)y_0 + (t/u)y_1 + y_2 = 0$ となる. $\ell_c := (s = c_0 u, t = c_1 u), (c_0, c_1) \neq (\zeta_3^j, \zeta_3^{2j})$ に沿って $u \rightarrow 0$ とすると $(s, t, u) \rightarrow O$ であり, 対応する組は

$$C : y_0^3 + y_1^3 = 3y_0 y_1 y_2, L : c_0 y_0 + c_1 y_1 + y_2 = 0$$

に収束する. このとき C は結節点 $p := (0 : 0 : 1)$ を持つ結節三次曲線であり, L は p を通らない. 故に $\overline{AP}_{1,3}$ の点であり, $(c_0, c_1) \neq (\zeta_3^j, \zeta_3^{2j})$ より, $\overline{P}_{1,3}$ の点でもある. 同様に, 適切な近づけ方を考えると, $(u = s = 0) \cup (u = t = 0) \setminus O$ に対応する極限は C が直線 $L' +$ 二次曲線 Q となる組であり, $(s = \zeta_3^j u, t = \zeta_3^{2j} u) \setminus O$ に対応する極限は C が尖点三次曲線となる組である.

従って, 写像が定義できない部分集合を中心に適当なブローアップを行うことで, 例外集合からこれらの極限への写像を構成することが出来る. 実際, 前者の定義できない部分集合を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\tilde{X}$ から $\overline{AP}_{1,3}$ への写像 $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$ が構成でき, さらに, $\tilde{X}$ における後者の定義できない部分集合の強変換を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\hat{X}$ から $\overline{P}_{1,3}$ への写像 $\psi : \hat{X} \rightarrow \overline{P}_{1,3}$ が構成できる (紙面の都合上, φ と ψ の詳細な定義を述べることは出来ない. 詳しくは [3], Definition 5.3.1, 5.4.1 を見よ). 特に, これらの写像の構成の仕方から $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の (粗い) 構造が得られる. 加えて, これらの写像と第二章で構成した双有理写像との関係も得られる:

系 3.2. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \overline{P}_{1,3} \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{AP}_{1,3} \\ \pi \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

が存在する. 但し, π は前者の三回ブローアップであり, p は後者の三回ブローアップである. このとき, $\varphi^{-1}(W_T)$ と $\psi^{-1}(W_{\text{Cusp}})$ はそれぞれ三回ブローアップ p の中心と例外集合である.

参考文献

- [1] V. Alexeev, *Complete moduli in the presence of semiabelian group action*, Ann. of Math. **155** (2002), 611–708.
- [2] I. V. Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, volume 296 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, (2003).
- [3] M. Kuroda, *On the GIT moduli of semistable pairs consisting of a plane cubic curve and a line*, doctoral thesis (to appear)
- [4] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34, Springer-Verlag, (1994).
- [5] I. Nakamura, *Stability of degenerate abelian varieties*, Invent. Math. **136** (1999), 659–715.
- [6] P. E. Newstead, *Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Inst. Lecture Notes, Springer-Verlag, (1978).

アフィン対角的 2 次曲面の Brauer 群について

植松 哲也*

概要

3つの係数 b, c, d でパラメトライズされたアフィン対角的 2 次曲面 $x^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ の族を考えると、各曲面に対して、Brauer 群と呼ばれる不変量が定義される。主結果は、各曲面の Brauer 群の生成元を一斉に与えるような代数的な公式 (統一的生成元) の非存在定理である。

キーワード: Brauer 群, アフィン対角的 2 次曲面, 統一的生成元

MSC 2010: Primary: 14F22, Secondary: 11R34, 19R15, 14J26

1 はじめに

本稿は、2015 年 3 月 2 日から 5 日にかけて行われた「第 11 回数学総合若手研究集会」における著者の講演内容を中心として、関連する概念等の解説を行ったものである。主結果の証明をはじめ、詳しい内容については、プレプリント [Uem] を参照されたい。

2 Brauer 群

表題にあるように、本研究における研究対象はある多様体の **Brauer** 群とよばれる不変量である。本論に入る前に、この Brauer 群について、振り返っておく。

2.1 体の Brauer 群

歴史的には、まず、体 k の Brauer 群が定義された。体 k 上の中心的単純環とは、(可換とは限らない) 有限次元 k -代数 A であって、 A の中心が k に等しく、非自明な両側イデアルを持たないもののことをいう。ここで、体 k に対し、「 k 上の中心的単純環がどれくらいあるのか？」ということを考えるのは自然であろう。この間に対して、次のような構造定理が知られている ([Wed08]):

命題 2.1. 体 k 上の中心的単純環 A に対し、ある 正整数 n と k 上の中心的斜体 D が存在して、 k -代数の同型 $A \cong M_n(D)$ がある。さらに、 n は一意的であり、 D も k -同型を除いて一意的である。

したがって、中心的単純環の分類は斜体の分類に帰着される。そこで、 k 上の中心的単純環 A, B に対し、

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{ある } n, m \text{ と斜体 } D \text{ が存在して, } A \cong M_n(D), B \cong M_m(D)$$

と関係 $\sim$ を定義すると、これは k 上の中心的単純環の同型類の集合上の同値関係 (森田同値) を与えることがわかる。この集合を $\text{Br}(k)$ と書き、 A の同値類を $[A]$ で表す。 $[A] + [B] := [A \otimes_k B]$ と定めると、これは 集合 $\text{Br}(k)$ 上の二項演算として well-defined であり、これにより、 $\text{Br}(k)$ はアーベル群となることが知られている。これが体 k の Brauer 群である。

Brauer 群 は **Galois** コホモロジーを用いても記述することができる。実際、アーベル群の同型 $H^2(k, \bar{k}^*) \cong \text{Br}(k)$ がある。この同型の具体的記述については、例えば [斎 97] を参照のこと。

* 豊田工業高等専門学校 一般学科 e-mail: utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp

2.2 シンボル

以下、体 k の標数は 0 とし、ある自然数 n を固定し、1 の n 乗根のなす群 μ_n が k に含まれるものとする。さらに、1 の原始 n 乗根 ζ を一つ固定しておく。このとき、 k の乗法群 k^* の 2 元 a, b から Brauer 群の元を対応させる準同型 $\{ \cdot, \cdot \}_n$ (ノルム剰余記号) を構成することができる:

$$\{ \cdot, \cdot \}_n : k^* \otimes k^* \rightarrow H^1(k, \mu_n) \otimes H^1(k, \mu_n) \xrightarrow{\cup} H^2(k, \mu_n \otimes \mu_n) \cong H^2(k, \mu_n) \hookrightarrow H^2(k, \bar{k}^*) \cong \text{Br}(k).$$

ここで、1 つめ、4 つめの写像は、Kummer 完全系列 $1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \bar{k}^* \xrightarrow{n} \bar{k}^* \rightarrow 1$ から定まる長完全列によるもの、2 つめの写像はコホモロジーのカップ積、3 つめの写像は、同型 $\mu_n \otimes \mu_n \cong \mu_n; \zeta^i \otimes \zeta^j \mapsto \zeta^{ij}$ によるものである。 $\{a, b\}_n$ の形に表せる Brauer 群の元をシンボルと呼ぶ。 $\text{Br}(k)$ の位数 n の元は、このシンボルの幾つかの和として書き表せることが知られている ([MS82]) が、すべての元がシンボル一つで表示できるかどうかということは、体によって異なり、また、具体的にどんなシンボル (の和) が Brauer 群の生成元として取ってこれるのか、ということも、一般には難しい問題である。

2.3 代数多様体の Brauer 群

20 世紀中頃にかけて、東屋 [Azu51], Grothendieck [Gro68] らにより、可換環の Brauer 群、より一般に、代数多様体 (= 代数方程式系の解集合) X の Brauer 群 $\text{Br}(X)$ が定義された。中心的単純環の代わりに、 X 上の東屋代数とよばれる層を考えて、その分類空間として定義する方法と、Galois コホモロジーの一般化であるエタールコホモロジーを用いた定義があるが、ここでは後者を定義として採用する^{*1}:

$$\text{Br}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m).$$

多様体の Brauer 群は、体の場合の一般化としての興味の他に、多様体の性質を調べる上で様々な役立つ、という点からも、興味のある研究対象である。例えば、多様体の有理性 (= 射影空間にどれくらい近いか) を計る指標として Brauer 群が用いられたり ([AM72])、また、有理数体上の多様体の局所大域原理を調べたり、ゼロサイクルと呼ばれる別の不変量を計算するにおいても、Brauer 群が応用されている ([Man71])。

体 k 上の非特異代数多様体 X に対して、その商体を $k(X)$ と書くとき、多様体の Brauer 群 $\text{Br}(X)$ は、自然に商体の Brauer 群 $\text{Br}(k(X))$ の部分群とみなせる ([Gro68], II, 1.10.)。したがって、先に述べた事実から、 $\text{Br}(X)$ の位数 n の元は、 $k(X)^*$ の元を用いたシンボルの和として表示できることがわかる。

3 アフィン対角的 2 次曲面 と その Brauer 群

前章でみた、代数多様体 X の Brauer 群 $\text{Br}(X)$ について、基本的な問題として、

- 群としての構造はどうか?
- 生成元を具体的に書き表すことができるか?

というものを挙げるができるだろう。本稿の目的は、

$$x^2 + by^2 + cz^2 + d = 0 \quad (b, c, d \text{ は } k^* \text{ の元})$$

という定義方程式で定まる、 k 上のアフィン対角的 2 次曲面 $U_{b,c,d}$ に対して、これらの問題を考えることにある。構造射 $U_{b,c,d} \rightarrow \text{Spec } k$ から、反変函手的に、群準同型 $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(U_{b,c,d})$ が定まる。多様体固有の情報に興味があるので、以下では、この準同型の余核

$$\text{Br}(U_{b,c,d}) / \text{Br}(k) := \text{Coker}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(U_{b,c,d}))$$

^{*1} 本稿に出てくる多様体に限れば、両者の定義は同型な群を与えることが知られている。

について、その構造と生成元を考える。構造については、次のことがわかる：

命題 3.1. $\text{Br}(U_{b,c,d})/\text{Br}(k)$ は 0 か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型で、 $bcd \in (k^*)^2$ ならば、0 である。

注意 3.2. $bcd \notin (k^*)^2$ のときに、0 か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるかは、一般には分からないが、例えば、(i) $U_{b,c,d}(k) \neq \emptyset$ (= 定義方程式が k で解を持つ) か (ii) $k = \mathbb{Q}$ または $k = \mathbb{Q}_p$ (より一般に、コホモロジー次元が 2 以下の体) であれば、 $\text{Br}(U_{b,c,d})/\text{Br}(k) = 0 \Leftrightarrow bcd \in (k^*)^2$ が成り立つ。

次に、 $\text{Br}(U_{b,c,d}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である場合に、その生成元を具体的に求めることができるか、ということの問題にしたい。例えば、論文 [CTX09] では、 $U_{b,c,d}(k) \neq \emptyset$ という仮定のもとで、各曲面 $U_{b,c,d}$ ごとに、シンボルを求める手法が与えられている。そこで、ここでは、生成元の代数的な公式に当たるようなもの、すなわち、 B, C, D をパラメータとして、アフィン対角的 2 次曲面の族 $U : x^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$ を考えたときに、 $\text{Br}(U)$ の元 $e = e(B, C, D)$ であって、 $(B, C, D) = (b, c, d)$ を (適切な仕方) で代入すると、 $e(b, c, d)$ が各 $\text{Br}(U_{b,c,d})/\text{Br}(k)$ の生成元になるようなものが存在するかどうかを考察したい。このような $e \in \text{Br}(U)$ を 統一的生成元 (uniform generator, [Uem14]) と呼ぶことにする。

もしこのような生成元があれば、例えば、前述した多様体のゼロサイクルなど、Brauer 群を用いて計算できる他の不変量を、この族に含まれる各曲面に対して、統一的に計算できるので、非常に有用である。裏を返せば、統一的生成元の非存在は、その族に含まれる多様体の性質が、係数ごとに大きく変化しうるといったことを示唆するものであると考えられる。

本研究では、統一的生成元が (上記のような 3 つのパラメータをもつ) アフィン対角的 2 次曲面の族に対しては存在しないことを示した。以下、「代入」を定式化した後、主結果の正確な主張を紹介する。

3.1 Brauer 群の特殊化写像

3 変数多項式環 $\mathcal{O}_F = k[B, C, D]$ に対して、 F をその商体とする。 $\mathcal{O}_F$ 上のアフィン対角的 2 次曲面

$$U = \text{Spec } \mathcal{O}_F[x, y, z]/(x^2 + By^2 + Cz^2 + D) \rightarrow \mathbb{A}_k^3 = \text{Spec } \mathcal{O}_F$$

を考え、 $U = \mathcal{U} \times_{\mathbb{A}_k^3} \text{Spec } F$ とする。 $e \in \text{Br}(U)$ に対して、 $\mathbb{A}_k^3$ の開集合 S が存在して、 e は $\tilde{e} \in \text{Br}(\mathcal{U} \times_{\mathbb{A}_k^3} S)$ に持ち上げることができる。ここで、 $P = (b, c, d) \in S(k)$ に対して、 $U_P = \text{Spec } k[x, y, z]/(x^2 + by^2 + cz^2 + d)$ とおいたとき、 e の P における特殊化 $\text{sp}(e; P) \in \text{Br}(U_P)$ を $\tilde{e}$ の P による引き戻し $P^*\tilde{e}$ によって定める。これは $\tilde{e}, S$ の取り方には依らないことがわかる。

3.2 主結果

まず、特殊化写像の定義域にあたる集合 $\mathcal{P}_k$ を定めておく：

$$\mathcal{P}_k := \{P \in k^* \times k^* \times k^* \mid \text{Br}(U_P)/\text{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

このとき、結果は次のように述べることができる：

定理 3.3. k を 2-closed でない (= 2 次拡大をもつ) 体とする。このとき、アフィン対角的 2 次曲面の族 U に対して、Brauer 群の統一的生成元は存在しない。すなわち、次の条件を満たす $e \in \text{Br}(U)$ と稠密開集合 $W \subset (\mathbb{G}_{m,k})^3$ は存在しない：

- $\text{sp}(e; \cdot)$ が $W(k) \cap \mathcal{P}_k$ 上定義され、かつ
- すべての $P \in W(k) \cap \mathcal{P}_k$ に対し、 $\text{sp}(e; P)$ は $\text{Br}(U_P)/\text{Br}(k)$ の生成元となる。

つまり、パラメータ (B, C, D) の動きうる “3 次元領域” W をどんなに小さくとったとしても、その中の各点 (b, c, d) に対して、 $\text{Br}(U_{b,c,d})/\text{Br}(k)$ の生成元を与えてくれる “公式” $e \in \text{Br}(U)$ は存在しない、ということである。

注意 3.4. k の non-2-closedness は, $\mathcal{P}_k$ の $(\mathbb{G}_{m,k})^3$ における像の稠密性を保証する条件である. したがって, この仮定のもとでは, $W(k) \cap \mathcal{P}_k \neq \emptyset$ であり, 上記 2 条件が自明な条件になることはない.

3.3 統一的生成元が存在する族の例

上で見たように, 3 つのパラメータ B, C, D を持つようなアフィン対角的 2 次曲面の族に対しては, 統一的生成元は存在しなかったわけであるが, この統一的生成元概念自体は不自然なものではなく, 統一的生成元を持つような多様体の族も存在する. その一例を紹介し, 本稿の結びとしたい. (対角的 3 次曲面での例については, 論文 [Uem14] を参照されたい.)

パラメータを 2 つにし, $O_F = k[C, D], U : x^2 - y^2 - Cz^2 + D = 0$ なる曲面の族を考える. このとき, 同様にして, 特殊化や $\mathcal{P}_k$ を定めることができる. ここで, シンボル

$$e(C, D) := \{CD, x + y\}_2 \in \text{Br}(F(U))$$

を考えると, $e(C, D)$ は $\text{Br}(U)$ の元を定めることがわかる. このとき, 次が成り立つ:

命題 3.5. この曲面族 U に対してシンボル $e(C, D)$ は統一的生成元である.

謝辞. 講演および本稿執筆の機会を与えてくださった, 第 11 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様と, 今回の研究のきっかけとなる質問をして下さった Timothy D. Browning 氏に感謝いたします.

参考文献

- [AM72] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), no. 3, 75–95.
- [Azu51] G. Azumaya, *On maximally central algebras*, Nagoya Math. Journal **2** (1951), 119–150.
- [CTX09] J.-L. Colliot-Thélène and F. Xu, *Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms*, Compos. Math. **145** (2009), no. 2, 309–363.
- [Gro68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II, III*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.
- [Man71] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes de Congrès international de Mathématiciens (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.
- [MS82] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, *k-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.
- [Uem] T. Uematsu, *On the Brauer group of affine diagonal quadrics*, preprint, available in <http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/index.html>.
- [Uem14] ———, *On the Brauer group of diagonal cubic surfaces*, Q. J. Math. **65** (2014), no. 2, 677–701.
- [Wed08] J. H. M. Wedderburn, *On hypercomplex numbers*, Proc. London Math. Soc. **s2-6** (1908), no. 1, 77–118.
- [斎 97] 斎藤秀司, 整数論, 共立講座 21 世紀の数学, vol. 20, 共立出版, 1997.

Vector fields on differentiable schemes and derivations on differentiable rings

Tatsuya Yamashita

1 Introduction

Let M, N be C^∞ -manifolds and $f : N \rightarrow M$ a C^∞ -map. Write an $\mathbb{R}$ -algebra $C^\infty(M)$ as a set of C^∞ -functions on M , and a homomorphism $f^* : C^\infty(M) \ni h \mapsto h \circ f \in C^\infty(N)$.

We can regard vector fields $V : N \rightarrow TM$ along f as an $\mathbb{R}$ -**derivation** $V : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$ by f^* i.e. V is an $\mathbb{R}$ -linear map such that

$$V(h_1 h_2) = f^*(h_1) \cdot V(h_2) + f^*(h_2) \cdot V(h_1) \text{ for any } h_1, h_2 \in C^\infty(M).$$

Note that in this case, V turns to be a C^∞ -**derivation**, i.e. V satisfies that

$$V(g \circ (h_1, \dots, h_l)) = \sum_{i=1}^l f^* \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ (h_1, \dots, h_l) \right) \cdot V(h_i)$$

$$\text{for any } l \in \mathbb{N}, h_1, \dots, h_l \in C^\infty(M), \text{ and } g \in C^\infty(\mathbb{R}^l).$$

$C^\infty(M)$ is a kind of “ C^∞ -**ring**” with the property: for any $l \in \mathbb{N}$ and $g \in C^\infty(\mathbb{R}^l)$, there exists an operation $\Phi_f : C^\infty(M)^l \ni (h_1, \dots, h_l) \mapsto g \circ (h_1, \dots, h_l) \in C^\infty(M)$. For a C^∞ -ring $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ and a homomorphism $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$, when does an $\mathbb{R}$ -derivation $v : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ over ϕ become a C^∞ -derivation?

1.1 Motivations for manifolds and C^∞ -rings

C^∞ -ringed spaces are sheaves with C^∞ -rings. There exists a functor $\text{Spec} : \mathbf{C}^\infty \mathbf{Rings}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{LC}^\infty \mathbf{RS}$ such that C^∞ -manifolds are regarded as “ C^∞ -**schemes**” $M = \text{Spec}(C^\infty(M))$. We can regard a C^∞ -manifold M as a “space” associated with $C^\infty(M)$ and a vector field over M as a derivation $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ by the functor Spec .

Then, what should we regard as a vector field on C^∞ -scheme? To define and study of singular points and vector fields on C^∞ -schemes, we study properties of derivations $V : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ of C^∞ -rings.

2 Differentiable rings and their derivations

2.1 The definition of C^∞ -rings

We define C^∞ -ring with the following definition.

Definition 2.1 (E. J. Dubuc, c.f. D. Joyce) 1. A C^∞ -**ring** (**differentiable ring**) is a set $\mathfrak{C}$ which satisfies that:

for any $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ and any C^∞ -map $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$, there exists an operation $\Phi_f : \mathfrak{C}^l \rightarrow \mathfrak{C}$ such that

- for any $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, any C^∞ -maps $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_i : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, k)$,

$$\Phi_g(\Phi_{f_1}(c_1, \dots, c_l), \dots, \Phi_{f_k}(c_1, \dots, c_l)) = \Phi_{g \circ (f_1, \dots, f_k)}(c_1, \dots, c_l) \text{ for any } c_1, \dots, c_l \in \mathfrak{C}.$$

- for all projections $\pi_i(x_1, \dots, x_l) = x_i (i = 1, \dots, l)$, $\Phi_{\pi_i}(c_1, \dots, c_l) = c_i$ for any $c_1, \dots, c_l \in \mathfrak{C}$.

2. Let $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ be C^∞ -rings. A morphism between C^∞ -rings is a map $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ such that $\phi(\Phi_f(c_1, \dots, c_n)) = \Psi_f(\phi(c_1), \dots, \phi(c_n))$.
3. We will write **C^∞ Rings** for the category of C^∞ -rings.

Any C^∞ -ring $\mathfrak{C}$ has a structure of the commutative $\mathbb{R}$ -algebra. Define addition on $\mathfrak{C}$ by $c + c' := \Phi_{(x,y) \mapsto x+y}(c, c')$. Define multiplication on $\mathfrak{C}$ by $c \cdot c' := \Phi_{(x,y) \mapsto xy}(c, c')$. Define scalar multiplication by $\lambda \in \mathbb{R}$ by $\lambda c := \Phi_{x \mapsto \lambda x}(c)$. Define elements 0 and 1 in $\mathfrak{C}$ by $0_{\mathfrak{C}} := \Phi_{\emptyset \mapsto 0}(\emptyset)$ and $1_{\mathfrak{C}} := \Phi_{\emptyset \mapsto 1}(\emptyset)$.

Example 2.1 1. Suppose that M is a C^∞ -manifold.

- (a) The set $C^\infty(M)$ has a structure of C^∞ -ring by $(c_1, \dots, c_n) \mapsto f \circ (c_1, \dots, c_n)$.
 - (b) Let $I \subset C^\infty(M)$ be an ideal of an $\mathbb{R}$ -algebra. We can define a quotient $\mathbb{R}$ -algebra $C^\infty(M)/I$. For any natural number $l \in \mathbb{N}$ and a C^∞ -map $f \in C^\infty(\mathbb{R}^l)$, $f(x_1 + y_1, \dots, x_l + y_l) - f(x_1, \dots, x_l) = \sum_{i=1}^l y_i g_i(x, y)$ by Hadamard's lemma. Then $f \circ (c_1 + i_1, \dots, c_n + i_n) - f \circ (c_1, \dots, c_n) = \sum_{k=1}^n i_k \cdot g_k \circ (c_1, \dots, c_n, i_1, \dots, i_n)$ for any $c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{C}$ and $i_1, \dots, i_n \in I$. Therefore the $\mathbb{R}$ -algebra $C^\infty(M)/I$ has a structure of C^∞ -ring.
 - (c) The set $C_p^\infty(M)/m_p^{k+1}$ of k -jet functions on a point $p \in M$ has a structure of C^∞ -ring.
2. The set of real numbers $\mathbb{R}$ has a structure of C^∞ -ring by $(r_1, \dots, r_n) \mapsto f(r_1, \dots, r_n)$.

We define two derivations on C^∞ -rings as followings.

Definition 2.2 (R. Hartshorne, D. Joyce) Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring and $\mathfrak{M}$ be a $\mathfrak{C}$ -module.

1. An **$\mathbb{R}$ -derivation** is an $\mathbb{R}$ -linear map $d : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{M}$ such that

$$d(c_1 c_2) = c_2 \cdot d(c_1) + c_1 \cdot d(c_2) \text{ for any } c_1, c_2 \in \mathfrak{C}.$$

2. A **C^∞ -derivation** is an $\mathbb{R}$ -linear map $d : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{M}$ such that

$$d(\Phi_f(c_1, \dots, c_n)) = \sum_{i=1}^n (\Phi_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(c_1, \dots, c_n)) \cdot d(c_i) \text{ for any } n \in \mathbb{N}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ and } c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{C}.$$

By definition, we have that any C^∞ -derivation is an $\mathbb{R}$ -derivation.

Example 2.2 Let M be a C^∞ -manifold and $C^\infty(T^*M)$ the set of C^∞ -sections to the cotangent bundle T^*M on M .

1. Define $\mathbb{R}$ -mapping $d : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(T^*M)$ as $(d(f))(x) : T_x M \ni v \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$ for any $f \in C^\infty(M)$ and $x \in M$. This $\mathbb{R}$ -mapping d is the C^∞ -derivation.
2. Let $V : M \rightarrow TM$ be a C^∞ -vector field of M . Define a smooth function $V(f)$ as $V(f) : M \ni x \mapsto V_x(f) \in \mathbb{R}$. We can regard $V : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ as the $\mathbb{R}$ -derivation.

2.2 k -jet projections of C^∞ -ring

Definition 2.3 (D. Joyce) Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring.

1. An $\mathbb{R}$ -point of $\mathfrak{C}$ is a homomorphism $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}$ of C^∞ -rings. The set of $\mathbb{R}$ -points $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is a base space of the C^∞ -scheme $\text{Spec} \mathfrak{C}$.
2. For any $\mathbb{R}$ -point $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}$, the localization $\mathfrak{C}_p := \mathfrak{C}[s^{-1} | s \in \mathfrak{C}, p(s) \neq 0]$ by $\{s \in \mathfrak{C} | p(s) \neq 0\}$ always exists with the unique maximal ideal $m_p \subset \mathfrak{C}_p (\mathfrak{C}_p/m_p \cong \mathbb{R})$.
3. For any nonnegative number $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, define natural projections as

$$j_p^k : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}_p/m_p^{k+1}, j_p^\infty : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}_p/m_p^\infty (m_p^\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} m_p^k),$$

$$j^k := (j_p^k)_{p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}} : \mathfrak{C} \rightarrow \prod_{p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}} \mathfrak{C}_p/m_p^{k+1}, j^\infty := (j_p^\infty)_{p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}} : \mathfrak{C} \rightarrow \prod_{p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}} \mathfrak{C}_p/m_p^\infty.$$

Example 2.3 Let M be a C^∞ -manifold and $p \in M$. For the $\mathbb{R}$ -point $e_p : C^\infty(M) \ni f \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$, a localization $(C^\infty(M))_{e_p}$ is isomorphic to the set $C_p^\infty(M)$ of germs of C^∞ -functions at p . Its unique maximal ideal is $m_{e_p} = \{[f, U]_p \in C_p^\infty(M) | f(p) = 0\}$.

2.3 k -jet determined C^∞ -rings

Definition 2.4 (1, l. Moerdijk and G.E. Reyes, 2, 3, Yamashita) Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring.

1. $\mathfrak{C}$ is **point determined** if for each $c \in \mathfrak{C}$, $c = 0$ if and only if $p(c) = 0$ for all $\mathbb{R}$ -point $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Let $k \in \mathbb{N}$. $\mathfrak{C}$ is **k -jet determined** if $j^k : \mathfrak{C} \rightarrow \prod_{p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}} \mathfrak{C}_p / m_p^{k+1}$ is injective.
3. $\mathfrak{C}$ is **∞ -jet determined** if $j^\infty : \mathfrak{C} \rightarrow \prod_{p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}} \mathfrak{C}_p / m_p^\infty$ is injective.

Example 2.4 Suppose that M is a C^∞ -manifold.

1. $C^\infty(M)$ is a point determined C^∞ -ring.
2. $C_p^\infty(M) / m_p^{k+1}$ is not a point determined C^∞ -ring, but a k -jet determined C^∞ -ring.

For two C^∞ -rings $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ with operations $\Phi_f : \mathfrak{C}^n \rightarrow \mathfrak{C}$ and $\Psi_f : \mathfrak{D}^n \rightarrow \mathfrak{D}$ for $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, we can define a direct product $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$. This product has a structure of C^∞ -ring by $\Xi_f : (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})^n \rightarrow \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ as

$$\Xi_f : (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})^n \ni ((c_1, d_1), \dots, (c_n, d_n)) \mapsto (\Phi_f(c_1, \dots, c_n), \Psi_f(d_1, \dots, d_n)) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}.$$

For direct product of k -jet determined C^∞ -rings, we have a following lemma.

Lemma 2.1 (Yamashita) Let $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ be k, l -jet determined C^∞ -rings and $k' := \min(k, l)$.

The direct product $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ is a k' -jet determined C^∞ -ring.

Example 2.5 Let M and M' be m -dimensional C^∞ -manifolds. Write $M \sqcup M'$ as a disjoint union of C^∞ -manifolds M and M' . $C^\infty(M)$ and $C^\infty(M')$ are point determined C^∞ -rings. Furthermore, $C^\infty(M) \times C^\infty(M') = C^\infty(M \sqcup M')$ is a point determined C^∞ -ring, too.

Proposition 2.1 (Yamashita) Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring and $k, l = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\} (k \leq l)$.

If $\mathfrak{C}$ is a k -jet determined C^∞ -ring, then $\mathfrak{C}$ is also l -jet determined.

3 Algebraic viewpoints

3.1 The universality of cotangent bundles

Proposition 3.1 (Yamashita) Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring and $\mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ a free $\mathfrak{C}$ -module generated by $d(c) (c \in \mathfrak{C})$.

Define $\mathfrak{C}$ -submodules of $\mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ as

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}, \mathbb{R}} &:= \langle d(c_1 c_2) - c_2 d(c_1) + c_1 d(c_2) \rangle_{\mathfrak{C}} \text{ and} \\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}, C^\infty} &:= \langle d(\Phi_f(c_1, \dots, c_n)) - \sum_{i=1}^n \Phi_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(c_1, \dots, c_n) d(c_i) \rangle_{\mathfrak{C}}. \end{aligned}$$

If $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}, \mathbb{R}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}, C^\infty}$, any $\mathbb{R}$ -derivation $d : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{M}$ is C^∞ -derivation.

Example 3.1 Let $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ be C^∞ -rings and $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ a homomorphism of C^∞ -rings. Suppose that $\mathfrak{C}$ is a local C^∞ -ring which has a maximal ideal m with $m^{k+1} = 0 (k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$.

$\mathfrak{C}$ has a property that $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}, \mathbb{R}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}, C^\infty}$ because $\Phi_f(c_1, \dots, c_n)$ is the sum of $\Phi_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(c_1, \dots, c_n)$.

Therefore, any $\mathbb{R}$ -derivation $V : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ is a C^∞ -derivation.

3.2 The relation between k -jet determined C^∞ -rings and derivations

Theorem 3.1 (Yamashita) Let $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ be C^∞ -rings, $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ a homomorphism of C^∞ -rings and $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Suppose that $\mathfrak{D}$ is point determined or k -jet determined.

Then any $\mathbb{R}$ -derivation $V : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ over ϕ is a C^∞ -derivation.

Example 3.2 1. Let V be an $\mathbb{R}$ -derivation $V : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$ over the pull-back $f^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$.

$C^\infty(N)$ is a point determined C^∞ -ring. From the previous theorem, this $\mathbb{R}$ -derivation is a C^∞ -derivation.

2. $C^\infty(\mathbb{R})/\langle x^{k+1} \rangle_{C^\infty(\mathbb{R})}$ is not point determined but k -jet determined C^∞ -ring.

Any $\mathbb{R}$ -derivation $V : C^\infty(\mathbb{R})/\langle x^{k+1} \rangle_{C^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})/\langle x^{k+1} \rangle_{C^\infty(\mathbb{R})}$ is C^∞ -derivation such that

$$V(f(x) + \langle x^{k+1} \rangle) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)v(x) + \langle x^{k+1} \rangle \text{ by } v(x) + \langle x^{k+1} \rangle := V(x + \langle x^{k+1} \rangle).$$

For the previous example, we have a following corollary by generalizing $C^\infty(\mathbb{R})/\langle x^{k+1} \rangle_{C^\infty(\mathbb{R})}$.

Corollary 3.1 (Yamashita) Let $\mathfrak{C}$ be a k -jet determined C^∞ -ring with the form $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$.

For any $\mathbb{R}$ -derivation $V : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, V is a C^∞ -derivation.

Moreover, there exists smooth functions $a_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that

$$V(f(x) + I) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + I \text{ for any } f(x) + I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)/I.$$

4 Applications

Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring and $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ a homomorphism of C^∞ -rings. This homomorphism is regarded as a C^∞ -curve $\mathbb{R} \rightarrow \text{Spec}\mathfrak{C}$.

Suppose that $V : \mathfrak{C} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ is an $\mathbb{R}$ -derivation over ϕ . For the previous theorem, this derivation V is a C^∞ -derivation. Furthermore, C^∞ -derivation V is regarded as a tangent vector at $\text{Spec}\mathfrak{C}$.

For any element $c' \in \mathfrak{C}$, we can define a homomorphism $\psi : \mathfrak{C} \ni c \mapsto \Phi_{\phi(c)}(c') \in \mathfrak{C}$ of C^∞ -rings, and a C^∞ -derivation $V' : \mathfrak{C} \ni c \mapsto \Phi_{V(c)}(c') \in \mathfrak{C}$ over ψ .

4.1 Applications to C^∞ -vector field along C^∞ -map

Let $\mathfrak{C}$ be a C^∞ -ring, M a C^∞ -manifold and $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow C^\infty(M)$ a homomorphism of C^∞ -rings.

Suppose that $V : \mathfrak{C} \rightarrow C^\infty(M)$ is an $\mathbb{R}$ -derivation by ϕ . For the previous theorem, this derivation V is a C^∞ -derivation.

Therefore, we can define a vector field $V : M \rightarrow \text{Spec}\mathfrak{C}$ over $\text{Spec}\phi : M \rightarrow \text{Spec}\mathfrak{C}$ as the image of derivation $\mathfrak{C} \rightarrow C^\infty(M)$ by the functor Spec .

参考文献

- [1] R. Hartshorne, *algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics. 52, Springer-Verlag, New York, 1977
- [2] Dominic Joyce, *Algebraic Geometry over C^∞ -rings*, arXiv:1001.0023, 2010
- [3] S. マックレーン著 ; 三好博之, 高木理訳, 圏論の基礎 (Categories for the working mathematician), シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2005.7
- [4] I. Moerdijk and G.E. Reyes, *Models for smooth infinitesimal analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991

Effective nonvanishing of pluriadjoint line bundles

Tomoki Arakawa (Sophia University)

1. Introduction

Let X be a smooth projective variety defined over $\mathbf{C}$ and L an ample line bundle over X . Then the pair (X, L) is called a **polarized manifold**.

In the classification theory of polarized manifolds, it is important to study a condition on the integer m for which $|K_X + mL|$ is free. Fujita's freeness conjecture predicts that $|K_X + mL|$ is free for any $m \geq \dim X + 1$. It is known that the above conjecture is true when $\dim X \leq 4$. In higher dimensional case, it is proved that $|K_X + mL|$ is free for every integer $m \geq \dim X(\dim X + 1)/2 + 1$ (see [1], [9]).

On the other hand when $K_X + L$ is nef, by the nonvanishing theorem due to V. Shokurov, we see that $|m(K_X + L)| \neq \emptyset$ holds for $m \gg 0$. Then it is important to find an integer m with $|m(K_X + L)| \neq \emptyset$. Concerning this, Y. Kawamata ([7]) proposed the following conjecture:

CONJECTURE 1.1. *Let X be a normal projective variety and let B be a $\mathbf{Q}$ -effective divisor on X such that (X, B) is a KLT pair. Let D be a nef Cartier divisor on X such that $D - (K_X + B)$ is nef and big. Then $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ holds.*

When X is smooth, $B = 0$ and $D := K_X + L$ is nef, this implies that $|K_X + L| \neq \emptyset$ holds for any polarized manifold (X, L) with $K_X + L$ nef. In [7], Kawamata solved the conjecture above when X is 2-dimensional and when X is a minimal 3-fold. A. Höring ([6, Theorem 1.5]) solved it when X is a normal projective 3-fold with at most $\mathbf{Q}$ -factorial canonical singularities, $B = 0$, and $D - K_X$ is a nef and big Cartier divisor. These results are immediate consequences of the Hirzebruch-Riemann-Roch theorem and some classical results on surfaces and 3-folds. In higher dimensional case, it is rather difficult to calculate $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Indeed, Conjecture 1.1 is still widely open for the case of $\dim X \geq 4$.

Concerning the effective nonvanishing of global sections of pluri-adjoint line bundles, Y. Fukuma proposed the following problem:

PROBLEM 1.2 ([4, Problem 3.2]). *For any fixed positive integer n , find the smallest positive integer m_n depending only on n such that $H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + L))) \neq 0$ for every $m \geq m_n$ and for every polarized manifold (X, L) of dimension n with $\kappa(K_X + L) \geq 0$.*

It is known that $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ (cf. [4, Theorem 2.8]) and $m_3 = 1$ ([6]). Recently, Fukuma also treated the case of $\dim X = 4$ ([5]).

Our main result is the following:

THEOREM 1.3. *Let (X, L) be a polarized manifold of dimension n with $K_X + L$ nef. Then $H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + L))) \neq 0$ holds for every positive integer $m \geq n(n + 1)/2 + 2$.*

The above theorem gives a partial answer to Problem 1.2 in higher dimensional case. We give the proof in Section 3; our basic tool is singular hermitian metrics, which will be reviewed in the next section.

2. Preliminaries

We introduce the notions of singular hermitian metrics and multiplier ideal sheaves.

DEFINITION 2.1. Let L be a holomorphic line bundle over a complex manifold X . A **singular hermitian metric** h on L is given by $h = h_0 \cdot e^{-\varphi}$, where h_0 is a C^∞ -hermitian metric on

Mathematics Subject Classification: Primary 14C20; Secondary 14J40.

Key words and phrases: Polarized manifolds, adjoint bundles, effective nonvanishing.

L and $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(X)$. The **curvature current** Θ_h of h is defined by

$$\Theta_h := \Theta_{h_0} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi,$$

where Θ_{h_0} denotes the curvature form of h_0 , and $\partial\bar{\partial}\varphi$ is taken in the sense of currents.

EXAMPLE 2.2. Let L be a holomorphic line bundle over a complex manifold X . Suppose that there exists a positive integer m such that $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(mL)) \neq 0$. Let $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(mL))$ be a nontrivial section. Then

$$h := \frac{1}{|\sigma|^{2/m}} = \frac{h_0}{h_0^{\otimes m}(\sigma, \sigma)^{1/m}}$$

is a singular hermitian metric on L , where h_0 is an arbitrary C^∞ -hermitian metric on L . By Poincaré-Lelong's formula, we have $\Theta_h = 2\pi/m(\sigma)$, where (σ) denotes the current of integration over the divisor of σ . In particular, we see that Θ_h is a positive current.

DEFINITION 2.3. Let L be a line bundle over a complex manifold X and h a singular hermitian metric on L . We shall write h as $h = h_0 \cdot e^{-\varphi}$, where h_0 is a C^∞ -hermitian metric on L and $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(X)$. Then we define the **multiplier ideal sheaf** $\mathcal{I}(h)$ of (L, h) by

$$\Gamma(U, \mathcal{I}(h)) := \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid |f|^2 \cdot e^{-\varphi} \in L^1_{\text{loc}}(U)\},$$

where U runs over the open subsets of X .

The following vanishing theorem due to A. Nadel ([8]) plays a crucial role in the proof of Theorem 1.3 (cf. Remark 2.4.1).

THEOREM 2.4. Let L be a line bundle over a compact Kähler manifold (X, ω) , and h a singular hermitian metric on L . Suppose that the curvature current Θ_h of h is strictly positive, i.e., there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $\Theta_h - \varepsilon\omega$ is a positive $(1, 1)$ -current. Then $\mathcal{I}(h)$ is a coherent sheaf on X , and

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$$

holds for every $q \geq 1$.

REMARK 2.4.1. We shall explain how to establish the effective nonvanishing of global sections of (multi-)adjoint line bundles by using the above theorem. Suppose that there exists a singular hermitian metric h on a line bundle L such that

1. Θ_h is strictly positive;
2. $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h)$ has isolated support at a point x in X .

Then by Theorem 2.4, we have $H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$. This implies that the map:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h))$$

is surjective. Therefore, since the support of $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h)$ is isolated at x , we can take a global section $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L))$ with $\sigma(x) \neq 0$. In particular, we conclude $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) \neq 0$.

3. Sketch of the proof of Theorem 1.3

We shall prove Theorem 1.3. Let $\Phi_m : X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + L)))^*$ denote the rational map associated with $|m(K_X + L)|$. By the base point free theorem and by taking an integer $m \gg 1$, we obtain a surjective morphism $f := \Phi_m : X \rightarrow Y$, where Y denotes the image of X . We may assume that $\kappa(X, K_X + L) = \dim Y$ and $\kappa(F, K_F + L|_F) = 0$ for the general fiber F of f . Taking a suitable modification, we may also assume that Y is smooth. Now we define the reflexive sheaf B on Y by $B := f_*\mathcal{O}_X(K_{X/Y} + L)^{**}$. Since $K_F + L|_F$ is trivial, B is an invertible sheaf on Y . Moreover we have the following:

LEMMA 3.1. *B is big, and $K_Y + B$ is nef and big.*

PROOF. Let h_L be a C^∞ -hermitian metric on L with strictly positive curvature. Then we define the singular hermitian metric h_B on B by

$$h_B(\sigma, \sigma) := \int_{X/Y} h_L \cdot \sigma \wedge \bar{\sigma}, \quad (3.1)$$

where $\sigma \in \Gamma(Y, B)$ is a global section of B . Then by [3, Theorem 0.1], we see that h_B has strictly positive curvature current. This implies that B is big. On the other hand, by the construction of B , it follows immediately that $K_Y + B$ is big. (For the nefness of $K_Y + B$, see [2, Lemma 4.3].) $\square$

So it suffices to show the following:

LEMMA 3.2. *$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + B))) \neq 0$ holds for every integer $m \geq d(d+1)/2 + 2$, where $d := \dim Y$.*

SKETCH OF THE PROOF OF LEMMA 3.2. We use the technique adopted by Angehrn and Siu ([1]) and Tsuji ([9]) in their study of Fujita's freeness conjecture. We set $\mu_0 := N^d$ and fix a point y_0 on Y . First, by a dimension counting argument, we have the following:

LEMMA 3.3. *$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + B)) \otimes \mathfrak{m}_{y_0}^{\lceil \frac{d}{\sqrt{\mu_0}}(1-\varepsilon)m \rceil}) \neq 0$ holds for every $0 < \varepsilon < 1$ and every $m \gg 0$.*

Fix $0 < \varepsilon < 1$ and a positive integer m_0 as in the above lemma, and take a nontrivial global section:

$$\sigma_0 \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m_0(K_Y + B)) \otimes \mathfrak{m}_{y_0}^{\lceil \frac{d}{\sqrt{\mu_0}}(1-\varepsilon)m_0 \rceil}).$$

We define the singular hermitian metric h_0 on $K_Y + B$ by $h_0 = |\sigma_0|^{-2/m_0}$. Let α_0 be the positive number defined by $\alpha_0 := \inf \{ \alpha > 0 \mid \mathcal{I}(h_0^\alpha)_{y_0} \neq \mathcal{O}_{Y, y_0} \}$. Then by the fact that $(\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{-n}$ is not locally integrable around the origin of $\mathbf{C}^n$, we get $\alpha_0 \leq (d/\sqrt{\mu_0})(1-\varepsilon)^{-1}$. Fix an arbitrary positive number $\lambda \ll 1/d$. Since $\mu_0 \geq 1$ holds, by taking ε sufficiently small, we may assume that $\alpha_0 \leq d + \lambda$ holds.

Let V_1 be the analytic set whose structure sheaf is $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(h_0^{\alpha_0})$, and Y_1 an irreducible component of V_1 which passes through y_0 . Here, for simplicity, we suppose that $\dim Y_1 = 0$. Then we have the following:

LEMMA 3.4. *$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + B))) \neq 0$ holds for every $m \geq d + 2$.*

PROOF. Fix an integer $m \geq \alpha_0$. Then by $\alpha_0 \leq d + \lambda$, we have $m \geq d + 1$.

Since $K_Y + B$ is big, by Kodaira's lemma, we have an effective $\mathbf{Q}$ -divisor G on Y such that $K_Y + B - G$ is ample. We may assume that the support of G does not contain y_0 . Let $0 < \delta \ll 1$ be a rational number, and we set $A := (m - \alpha_0)(K_Y + B) - \delta G$. Note that A is ample, because $K_Y + B$ is nef. Fix a C^∞ -hermitian metric h_A on A with strictly positive curvature. Let $G = \sum e_i E_i$ be the irreducible decomposition of G and $\sigma_i \in \Gamma(Y, E_i)$ a global section with $(\sigma_i) = E_i$. Then we define the singular hermitian metric h on $\mathcal{O}_Y(m(K_Y + B))$ by

$$h := \frac{h_0^{\alpha_0} \cdot h_A}{\prod_i |\sigma_i|^{2\delta e_i}}.$$

Since $h \cdot h_B$ has strictly positive curvature current, by virtue of Theorem 2.4 (cf. Remark 2.4.1), we see that the restriction map:

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y((m+1)(K_Y + B))) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y((m+1)(K_Y + B)) \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(h \cdot h_B)) \quad (3.2)$$

is surjective. Now we may assume that y_0 is not on the singular locus of h_B , and hence $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(h \cdot h_B)$ has isolated support at y_0 . Therefore by the surjectivity of (3.2), there exists a global section $\tau \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y((m+1)(K_Y + B)))$ with $\tau(y_0) \neq 0$. We have thus proved the lemma. $\square$

When $\dim Y_1 > 0$, we need to cut down the support of $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(h \cdot h_B)$ in order to construct a singular hermitian metric as in Remark 2.4.1; by Angehrn-Siu's argument, we obtain the following lemma (see [1], [2, Section 3] for details).

LEMMA 3.5. *Let m be an integer with $m \geq d(d+1)/2 + 1$. Then there exists a singular hermitian metric h_{y_0} on $\mathcal{O}_Y(m(K_Y + B))$ such that h_{y_0} has strictly positive curvature current, and $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(h_{y_0})$ has isolated support at y_0 .*

Then by an similar argument to that in the proof of Lemma 3.4, we see that there exists a global section $\tau \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + B)))$ with $\tau(y_0) \neq 0$ for every $m \geq d(d+1)/2 + 2$. $\square$

References

- [1] U. Angehrn and Y.-T. Siu: *Effective freeness and point separation for adjoint bundles*, Invent. Math. **122** (1995), 291–308.
- [2] T. Arakawa: *Effective nonvanishing of pluri-adjoint line bundles*, to appear in Tokyo Journal of Mathematics Vol. **38** (2015), no. 1.
- [3] B. Berndtsson and M. Paun: *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 341–378.
- [4] Y. Fukuma: *On the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized 3-folds and 4-folds*, J. Pure Appl. Algebra **211** (2007), 609–621.
- [5] Y. Fukuma: *Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for polarized 4-folds*, J. Pure Appl. Algebra **217** (2013), 1535–1547.
- [6] A. Höring: *On a conjecture of Beltrametti and Sommese*, Journal of Algebraic Geometry **21** (2012), 721–751.
- [7] Y. Kawamata: *On effective nonvanishing and base point freeness*, Kodaira's issue, Asian J. Math. **4**, (2000), 173–181.
- [8] A. M. Nadel: *Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **132** (1990), 549–596.
- [9] H. Tsuji: *Global generation of adjoint line bundles*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 5–16.

Present Address:

DEPARTMENT OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, SOPHIA UNIVERSITY,
KIOICHO, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-8554 JAPAN.
e-mail: tomoki-a@sophia.ac.jp

An explicit formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$

野本 文彦

概要

このテクニカルレポートは、以下の様な構成である。第 1, 2 節では、他分野の研究者向けに、講演で用いるルート系と Weyl 群についての説明し、非対称 Macdonald 多項式の定義を述べる。第 3 節では、講演のテーマである非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ での特殊化の表現論的意味を解説する。

1 ルート系と Weyl 群

ここではベクトル空間から抽象的に定義されるルート系と Weyl 群について説明する。Lie 環との関係については、[K] などを参照されたい。

1.1 ルート系

V を n 次元実ベクトル空間として、 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を V 上の内積とする。 $\alpha \in V \setminus \{0\}$ に対して、 $\alpha^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ とする。 s_α を、 α についての鏡映とする： $s_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$ ($x \in V$)。このとき、次を満たす V の有限部分集合 Δ をルート系と呼び、 Δ の元をルートと呼ぶ：

- (1) Δ は V を生成する。
- (2) $\alpha, \beta \in \Delta$ について、 $s_\alpha(\beta) \in \Delta$ が成り立つ。
- (3) $\alpha, \beta \in \Delta$ について、 $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ は整数である。
- (4) $\alpha \in \Delta, c \in \mathbb{R}$ について、 $c\alpha \in \Delta$ となるのは $c = \pm 1$ の場合に限る。

このとき、次の性質を満たす V の基底 $\{\alpha_i\} \subset \Delta$ が存在する： $\alpha \in \Delta$ を $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ と表した時、 m_i はすべて非負の整数であるか、あるいはすべて非正の整数である。このような α_i を単純ルートと呼ぶ。 m_i がすべて非負の整数であるようなルートを正ルートと呼び、正ルートの全体を Δ^+ で表す。特に、単純ルートは正ルートである。

部分集合による非交和分解 $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ について、任意の $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$ に対して $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0$ を満たすとき、 Δ は可約であるといい、そうでないとき、 Δ は既約であるという。既約なルート系 Δ は、 A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 3$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 という型に分類できることが知られている。以下では、 Δ は既約なルート系であると仮定する。

$\alpha \in \Delta$ に対し、 $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ をルートの長さと呼ぶ。ルートの長さは、既約なルート系 Δ の中で高々 2 種類しか無い。従って、長いルートを long ルート、短いルートを short ルートと呼ぶ。 Δ の中で長さが 1 種類しか無い場合には、すべてのルートを short ルートと呼ぶ。

また、 $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}$ ($1 \leq j \leq n$) を満たす V の元 ϖ_i ($1 \leq i \leq n$) を基本ウエイトと呼ぶ。ウエイト格子 P を、 $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \varpi_i$ で定義する。 $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0$ を満たすウエイト $\lambda \in P$ を dominant ウエイト、 $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$ を満たすウエイト $\lambda \in P$ を antidominant ウエイト、 $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle \neq 0$ を満たすウエイト $\lambda \in P$ を regular ウエイトと呼ぶ。

Example 1.1. A_2 型ルート系を紹介する。

$V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ とする。 $\mathbb{R}^3$ の標準的な基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ とする。 $\Delta = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$ は条件 (1), (2), (3), (4) を満たす。単純ルートは、 $\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3$ である。従って、正ルートの全体は $\Delta^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ と表せる。

基本ウエイトは、 $\varpi_1 = e_1, \varpi_2 = e_1 + e_2$ である。 $\varpi_1 + \varpi_2$ は dominant ウエイトであり、regular ウエイトでもある。

1.2 Weyl 群

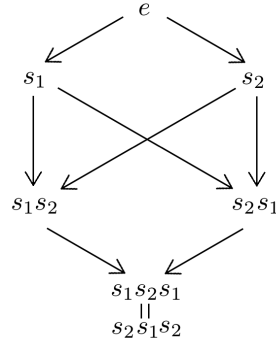
ルートに関する V 上の鏡映で生成される群 $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ を Δ の Weyl 群と呼ぶ。Weyl 群は有限群である。

Weyl 群 W は、単純ルートに関する鏡映 s_{α_i} ($1 \leq i \leq n$) で生成される。以下、単純ルート α_i ($1 \leq i \leq n$) に対し、 $s_i = s_{\alpha_i}$ と書く。

任意の Weyl 群の元 $w \in W$ は、 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p}$ と単純ルートについての鏡映の積で表せる。この表示は複数あるが、すべての表示の中で表示の長さ p が最小となるものを簡約表示という。簡約表示の長さ p を w の長さといい、 $\ell(w)$ で表す。特に、 $1 \leq i \leq n$ について、 $\ell(s_i) = 1$ である。また、 W の中で長さ最大の元を w_0 で表す。

W の元 w, ws_α ($\alpha \in \Delta$) について、 $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) + 1$ を満たすとき、 $w < ws_\alpha$ と書く。この 2 項関係の推移閉包 $(W, \leq)$ を Bruhat 順序という。

Example 1.2. A_2 型の場合、 W は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ と同型である。特に s_i は隣接互換 ($i \ i+1$) と同一視される。また、 $s_{\alpha_1+\alpha_2} = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ と表せる (これ以上短い表示は存在しない)。従って、 $\ell(s_{\alpha_1+\alpha_2}) = 3$ とわかる。また、この元は W の中で長さ最大の元である。 W の元を列挙すると以下の通りである ($w < ws_\alpha$ を $w \rightarrow ws_\alpha$ で表している)：



2 非対称 Macdonald 多項式

2.1 非対称 Macdonald 多項式

この節では、非対称 Macdonald 多項式を定義する。一般の非対称 Macdonald 多項式は最大で 6 個のパラメーターを持つが、本講演では $t \rightarrow \infty$ の極限のみを考えるため、ここでは 2 個のパラメーター q, t を持つものののみを考える。一般の場合は、[M] を参照されたい。

まず、 P 上の半順序を定義する。 $\mu \in P$ に対し、 $v_\mu \in W$ を $v_\mu \mu$ が dominant ウェイトとなるような最短の元とする。このとき、 $\mu, \nu \in P$ に対し $\mu > \nu$ であるとは、次のいずれかの条件を満たすことである：

- (1) $0 \neq v_\mu \mu - v_\nu \nu \in \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ が成り立つ。
- (2) $v_\mu \mu = v_\nu \nu$ であり、 W 上の Bruhat 順序について $v_\nu > v_\mu$ が成り立つ。

体 K を $\mathbb{Q}$ 上の変数 q, t についての有理関数体 $K = \mathbb{Q}(q, t)$ とし、weight lattice P の K 上の群環を A 、その完備化である形式的冪級数環を $\hat{A}$ とする：

$$A = \{f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \mid f_\mu \in K, f_\mu \text{ は有限個を除いて } 0\},$$

$$\hat{A} = \{f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \mid f_\mu \in K\}.$$

但し、 $e^\mu \cdot e^{\mu'} = e^{\mu+\mu'}$ ($\mu, \mu' \in P$)、 $e^0 = 1$ であることに注意する。

$\bar{\cdot} : K \rightarrow K$ を q, t を q^{-1}, t^{-1} で取り替える K 上の involution とし、 A 上の involution $\bar{\cdot} : A \rightarrow A$ を、 $f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu$ に対し $\bar{f} = \sum_{\mu \in P} \bar{f}_\mu e^{-\mu}$ で定義する。また、(定数項) 写像 $\text{ct} : \hat{A} \rightarrow K$ を $\sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \mapsto f_0$ により

定める.

$\alpha \in \Delta$ に対し, ν_α と q_α を

$$\nu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ は short ルート}), \\ 2 & (\mathfrak{g} \text{ は } B_n, C_n, F_4 \text{ 型で, } \alpha \text{ は long ルート}), \\ 3 & (\mathfrak{g} \text{ は } G_2 \text{ 型で, } \alpha \text{ は long ルート}), \end{cases}$$

$$q_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} q^{\nu_\alpha}$$

により定義する. ただし, $\mathfrak{g}$ が A_n, D_n, E_n 型 (ルートの長さが 1 種類) のときには $\nu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 1$ ($\forall \alpha \in \Delta$) とする.

重み関数 $\nabla \in \hat{A}$ を

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - e^\alpha q_\alpha^j)(1 - e^{-\alpha} q_\alpha^{j+1})}{(1 - e^\alpha t q_\alpha^j)(1 - e^{-\alpha} t q_\alpha^{j+1})}$$

と定める. これにより, A 上の Hermite 内積 $(\cdot, \cdot) : A \times A \rightarrow K$ が, $f, g \in A$ に対し, $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ct}(f \bar{g} \nabla) / \text{ct}(\nabla)$ により定義される. この内積は, 非退化かつ半双線型かつ $(f, g) = \overline{(g, f)}$ ($f, g \in A$) を満たす.

このとき, A の K 上の基底 $\{E_\mu(q, t)\}_{\mu \in P}$ で次の (1), (2) を満たすものが一意に存在する (この $E_\mu(q, t)$ を非対称 Macdonald 多項式と呼ぶ):

- (1) E_μ は, 最大項 e^μ を持つ.
- (2) $\mu' < \mu$ を満たす任意の μ' に対し, $(E_\mu, e^{\mu'}) = 0$ が成り立つ.

Remark 2.1. 定義から直ちに $(E_\mu(q, t), E_{\mu'}(q, t)) = 0$ ($\mu \neq \mu'$) がわかる. すなわち, $\{E_\mu(q, t)\}_{\mu \in P}$ は A の (内積 $(\cdot, \cdot)$ についての) 直交基底となっている.

$E_\mu(q, t)$ における $e^{\mu'}$ ($\mu' \in P$) の係数 $[E_\mu(q, t) : e^{\mu'}]$ を q, t の有理式として見て, 極限 $E_\mu(q, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} E_\mu(q, t) = \sum_{\mu' \in P} \lim_{t \rightarrow \infty} [E_\mu(q, t) : e^{\mu'}] e^{\mu'}$ を考えると, $E_\mu(q, \infty)$ は well-defined である ([CO]).

2.2 非対称 Macdonald 多項式と対称 Macdonald 多項式

ここでは紙面の都合上定義を省略するが, 対称 macdonald 多項式 $\{P_\lambda(q, t) \mid \lambda \in P \text{ は dominant ウェイト}\}$ は A の W -不変な部分環の基底として同様に定義され, この部分環上の内積に関する直交基底となっている. 対称 Macdonald 多項式は, Hall-Littlewood 多項式, Jack 多項式, Askey-Wilson 多項式などの様々な対称多項式の一般化になっている.

3 非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ での特殊化 $E_\mu(q, \infty)$ と表現論との関係

この節では表現論についての基礎知識を仮定する.

Δ をルートの集合として持つ有限次元複素単純 Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする. $\mathfrak{g}$ の三角分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^-$ とし, $\mathfrak{n}$ の基底を $\{e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_N}\}$ ($\beta_1, \dots, \beta_N \in \Delta^+$) とする. カレント Lie 代数 $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]$ は次の関係式を満たす Lie 代数である: $[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n}$ ($x, y \in \mathfrak{g}, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

dominant ウェイト $\lambda \in P$ に対し, $\mathfrak{g}[t]$ -加群 $W(\lambda)$ を次の関係式によって $v \neq 0$ から生成される加群として定義する:

$$\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}[t] \cdot v = 0, \quad \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t] \cdot v = 0, \quad h \cdot v = \langle \lambda, h \rangle v \quad (h \in \mathfrak{h}).$$

この $\mathfrak{g}[t]$ -加群 $W(\lambda)$ を Weyl 加群と呼ぶ. Weyl 加群は有限次元である. $W(\lambda)$ の元 $v_{w_0\lambda}$ で $h \cdot v_{w_0\lambda} = \langle w_0\lambda, h \rangle v_{w_0\lambda}$ ($h \in \mathfrak{h}$) を満たすものはスカラー倍を除いて一意に存在するので, その中で 0 でない $v_{w_0\lambda}$ を固定する. $v_{w_0\lambda}$ は, $\mathfrak{n}[t]$ -加群として $W(\lambda)$ を生成する. すなわち, $v_{w_0\lambda}$ は, $U(\mathfrak{n}[t])$ -加群として $W(\lambda)$ を生成する. ただし, $U(\mathfrak{n}[t])$ は生成元 $\mathfrak{n}[t]$ と関係式 $x \cdot y - y \cdot x = [x, y]$ ($x, y \in \mathfrak{n}[t]$) で生成される結合代数であり, $\mathfrak{n}[t]$ の universal enveloping algebra と呼ばれる.

$U(\mathfrak{n}[t])$ の部分空間 $U(\mathfrak{n}[t])_s$ を,

$$U_s = \{x_1 x_2 \cdots x_r \mid x_i \in \mathfrak{n}[t] \text{ } (1 \leq i \leq r), r \leq s\}$$

で定義する. このとき, $U(\mathfrak{n}[t])$ の filtration $\mathbb{C} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U(\mathfrak{n}[t])$ により, $W(\lambda)$ の filtration $\mathbb{C}v_{w_0\lambda} = U_0v_{w_0\lambda} \subset U_1v_{w_0\lambda} \subset \cdots \subset U(\mathfrak{n}[t])v_{w_0\lambda} = W(\lambda)$ が得られる. これにより,

$$W^{\text{gr}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}v_{w_0\lambda} \oplus \left(\bigoplus_{s \geq 0} \frac{U_{s+1}v_{w_0\lambda}}{U_s v_{w_0\lambda}} \right)$$

と定義すると, $W^{\text{gr}}(\lambda)$ は $W(\lambda)$ とベクトル空間として同型な $S(\mathfrak{n}[t])$ -加群である. ここで, $S(\mathfrak{n}[t])$ は $\mathfrak{n}[t]$ で生成される可換環である. $S(\mathfrak{n}[t])$ は, 基底 $\{(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s \mid (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を持つ. $(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s$ の次数を $n_1 + \cdots + n_N$ とすると, $S(\mathfrak{n}[t])$ は次数付き可換環の構造を持つ. このとき, $W^{\text{gr}}(\lambda)$ は次数付き $S(\mathfrak{n}[t])$ -加群である (ただし, $v_{w_0\lambda}$ は次数 0 を持つとする).

$W^{\text{gr}}(\lambda)$ の基底は以下のように書ける:

$$B = \{(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s \mid (n_1, \dots, n_N) \in Z_\lambda, 0 \leq s \leq s(n_1, \dots, n_N)\}.$$

ここで, Z_λ は λ により定まる $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ の部分集合であり, $s(n_1, \dots, n_N)$ はこの非負整数の組 $(n_1, \dots, n_N)$ から定まる 0 以上の整数である.

Cherednik と Orr は次の予想を立てた.

Conjecture 3.1. ([CO]) $\lambda \in P$ を dominant ウェイトとする. このとき, 次の等式が成立する:

$$E_{w_0\lambda}(q, \infty) = \sum_{(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s \in B} q^{n_1 + \cdots + n_N + s} e^{\lambda - n_1\beta_1 - \cdots - n_N\beta_N}.$$

講演では, W_λ の q -類似である, 量子群 $U_q(\mathfrak{n}[t])$ 上の加群 $W_q(\lambda)$ (これを量子 Weyl 加群と呼ぶ) の結晶基底を実現する quantum Lakshmibai-Seshadri path の集合の明示的部分集合を用いて, 非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ の特殊化 $E_\mu(q, \infty)$ の明示的公式を与える.

参考文献

- [CO] I. Cherednik and D. Orr, Nonsymmetric difference Whittaker functions, preprint, arXiv:1302.4094.
- [K] V. G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [M] I. G. Macdonald, Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

パラレルセッション 会場B

Singularities of projections of surfaces in $\mathbb{R}^4$

Jorge Luiz Deolindo Silva

Abstract: We study the geometry of surfaces in $\mathbb{R}^4$ associated to contact with hyperplanes, planes and lines. In particular, we show the existence of multi-local robust feature of surface. These are smooth curves representing the various types of multi-local singularities.

1 Introduction

In this work we study the generic geometry of surfaces in $\mathbb{R}^4$ associated to its contact with hyperplanes, planes and lines. This contact is captured by the local and multi-local singularities of the height function and the orthogonal projection to 2, 3-spaces. There are several results about the subject, see for exemple [1, 2, 4, 6]. We show the existence of multi-local robust features of the surface.

Given M be a regular surface in Euclidean space $\mathbb{R}^4$. Given a point $p \in M$ consider the unit circle in $T_p M$ parametrized by $\theta \in [0, 2\pi]$. The set of the curvature vectors $\eta(\theta)$ of the normal sections of M by the hyperplane $\langle \theta \rangle \oplus N_p M$ form an ellipse in the normal plane $N_p M$ to M at p , called the *curvature ellipse* ([4]).

The curvature ellipse is the image of the unit circle in $T_p M$ by a map formed by a pair of quadratic forms (Q_1, Q_2) . This pair of quadratic forms is the 2-jet of the 1-flat map $F : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ whose graph, in orthogonal co-ordinates, is locally the surface M .

The flat geometry of surfaces is affine invariant. A different approach to the geometry of surfaces in $\mathbb{R}^4$ is given in [1]. This is via the pencil of the binary forms determined by the pair (Q_1, Q_2) . Each point on the surface determines a pair of quadratics: $(Q_1, Q_2) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, lx^2 + 2mxy + ny^2)$.

If the forms Q_1 and Q_2 are independent, then we have the invariant

$$\delta(p) = (an - cl)^2 - 4(am - bl)(bn - cm).$$

A point p is said to be *elliptic/parabolic/hyperbolic* if $\delta(p) < 0 / = 0 / > 0$. The set of points in M where $\delta = 0$ is called the *parabolic set* of M and is denoted by Δ .

If Q_1 and Q_2 are dependent in a point p , the point is called *inflection point*.

The geometrical characterization of points on M using singularity theory is first carried out in [6] via the family height function.

Definition 1.1 *The family of **height functions** is defined by*

$$\begin{aligned} h : M \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\mapsto h(p, v) = \langle p, v \rangle \end{aligned}$$

where S^3 denotes the unit sphere in $\mathbb{R}^4$.

The height function h_v (v fix) is singular at p if and only if $v \in N_p M$. It is shown in [6] that elliptic points are non-degenerate critical points of h_v for any $v \in N_p M$. At a hyperbolic point, there are exactly two directions in $N_p M$, labeled *binormal directions*, such that p is a degenerate critical point of the corresponding height functions. The two binormal directions coincide at a parabolic point. The set of the A_3 singularities of the height function is a smooth curve in M (A_3 -curve) and the singularity A_4 of the height function occurs isolated on the A_3 -curve [6].

The direction of the kernel of the Hessian of the height functions along a binormal direction is an *asymptotic direction* associated to the given binormal direction ([6]). If p is not an inflection point, there are $2/1/0$ asymptotic directions at p depending on p being a hyperbolic/parabolic/elliptic point.

Definition 1.2 *The family of **orthogonal projections** is given by*

$$\begin{aligned} P : M \times S^3 &\rightarrow TS^3 \\ (p, v) &\mapsto (v, p - \langle p, v \rangle v). \end{aligned}$$

For v fixed, the projection can be viewed locally at a point $p \in M$ as a map germ $P_v : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$. If we allow smooth changes of coordinates in the source and target (i.e. consider the action of the Mather group $\mathcal{A}$) then the generic $\mathcal{A}$ -singularities of P_v are those that have $\mathcal{A}$ -codimension less than or equal to 3 (which is the dimension of S^3). These are listed in [7].

The projection P_v is singular at p if and only if $v \in T_p M$. The singularity is a cross-cap unless v is an asymptotic direction at p . The codimension 2 singularities occur generically on curves on the surface and the codimension 3 ones at special points on these curves. The H_2 -curve coincides with the Δ -set ([1]). The B_2 -curve of P_v , with v asymptotic, is also the A_3 -set of the height function along the binormal direction associated to v ([1]). This curve meets the Δ -set tangentially at isolated points ([2]) and intersects the S_2 -curve transversally at a C_3 -singularity. At inflection points the Δ -set has a Morse singularity and the configuration of the B_2 and S_2 -curves there is given in [1].

In [5], carried out a study using the family orthogonal projections in planes.

Definition 1.3 *The **orthogonal projections to planes** is given by*

$$\begin{aligned} \Pi : M \times G(2, 4) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, v) &\mapsto \Pi(p, v) = (\langle p, a \rangle, \langle p, b \rangle), \end{aligned}$$

where $G(2, 4)$ is the Grassmanian of 2-planes in $\mathbb{R}^4$ and, a and b are unit vectors linearly independents generating the plane $v \in G(2, 4)$.

The family projections in planes can be seen to 4-parameters and, moreover, fixed v is locally in $p \in M$ a germ of a map $\Pi_v : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ which give that contact between M and the plane which is the orthogonal complement of plane v . The generic $\mathcal{A}$ -singularities of that germs are those in [8].

Π_v is singular at $p \in M$, if only if, the intersection of the tangent plane to M at p with the orthogonal complement of the plane v , denoted by $v^\perp$, is different of zero, i. e., there is a tangent vector not null $u \in T_p M$ such that $u \in v^\perp$. The singularities of corank 2 correspond to normal planes to surface. For singularities of corank 1, at hyperbolic (resp.

parabolic) points there are two (resp. one) degenerate planes whose projection is of type 4_2 (or worse) and at elliptic points there is only transversal singularities to Σ^1 . (Σ^1 is the set of singular points with corank 1). On the plane of degenerate projection v chosen a direction in this plane, the A_2 -set of the height function coincides with the 4_2 -set of Π_v .

2 The multi-local curves and their applications

We are seeking the loci of points in M where h_v, P_v has a multi-local singularity of $\mathcal{A}_e$ -codimension ≤ 2 .

Theorem 1 *In the family the height function h_v . The A_3 -curve and the A_1A_2 -curve are generically tangential at A_4 with contact of order 2.*

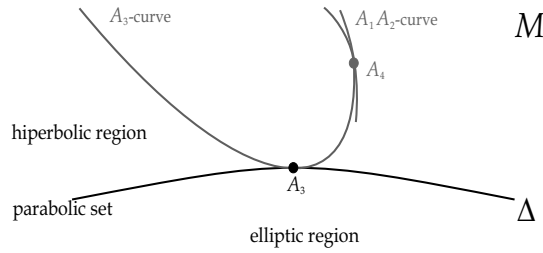


Figure 1: multi-local curves in M away of the inflection points

Theorem 2 *In family of the orthogonal projection P_v . For a generic surface M embedded in $\mathbb{R}^4$, the multi-local singularities of P_v of codimension 2 that are adjacent to local singularities occur only at codimension 3 local singularities of P_v .*

- (i) *At a B_3 -singularity of P_v , there is an $[A_2]$ -curve which meets the B_2 -curve transversally;*
- (ii) *At an S_3 -singularity of P_v , there are no codimension 2 multi-local singularities;*
- (iii) *At a C_3 -singularity of P_v , there are no codimension 2 multi-local singularities;*
- (iv) *At an H_3 -singularity of P_v , there is an $(A_0S_0)_2$ -curve which meets the Δ -set tangentially;*
- (v) *At a $P_3(c)$ -singularity of P_v , there are the curves A_0S_1 , $(A_0S_0)_2$ and $A_0S_0|A_1^\pm$ which meets the Δ -set tangentially.*

All the tangential are generically of order 2, (see Figure 2). Where $[A_2]$, $(A_0S_0)_2$, A_0S_1 and $A_0S_0|A_1^\pm$ are bigerms the $\mathcal{A}_e$ -codimension 2 classified in [3].

Proposition 2.1 *At a point $P_3(c)$, the surface is projectively equivalent to $(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$, where*

$$j^4(f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 + xy^2 + \alpha y^4, xy + \beta y^3 + \phi_4).$$

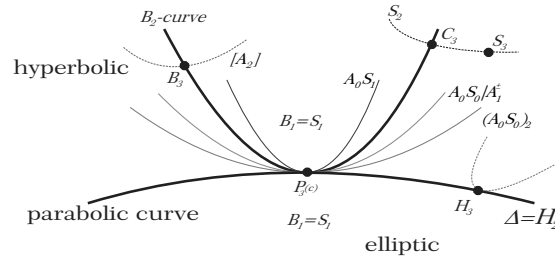


Figure 2: multi-local curves in M away of the inflection points

We denote tangents at $P_3(c)$ to the Legendrian lifts of the parabolic, B_2 , $(A_0S_0)_2$, A_0S_1 and $A_0S_0|A_1^\pm$ curves by l_P , l_b , l_{s_0} , l_{s_1} , and $l_{s_0_2}$, respectively. We denote by l_g the contact element to the point $P_3(c)$ (the vertical line in the contact plane at that point).

Theorem 3 *At a generic point $P_3(c)$, two cross-ratios can permit recover the projective invariants α and β of surface.*

References

- [1] J. W. Bruce and A. C. Nogueira, Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and duality. *Quart. J. Math. Oxford Ser. Ser. (2)*, 49 (1998), 433–443.
- [2] J. W. Bruce and F. Tari, Families of surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 45 (2002), 181–203.
- [3] C. A. Hoobs, N. P. Kirk, On the classification and bifurcation of multi-germs of maps from surfaces to 3-space, *Math. Scand.* 89 (2001), 57–96
- [4] J. A. Little, On the singularities of submanifolds of heigher dimensional Euclidean space. *Annli Mat. Pura et Appl.* (4A) 83 (1969), 261–336.
- [5] A. C. Nogueira, Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade. Tese de Doutorado, ICMC, São Carlos-USP, 1998.
- [6] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. *Geometria Dedicata* 54 (1995), 323–332.
- [7] D. M. Q. Mond, On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$. *Proc. London Math. Soc.* 50 (1985), 333–369.
- [8] J. H. Rieger, Families os maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (1987), 351–369.

カスプ辺の平行曲面について

神戸大学大学院理学研究科
寺本 圭佑*

1 準備

まず, 以下の議論で必要となるものを定義していく. ここに現れる内容の詳細については, [1, 3, 5, 7] などを参照されたい.

$f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ 写像とする ($\mathbf{0} \in U \subset \mathbf{R}^2$ を領域とする). このとき, f が波面であるとは, f に沿う単位ベクトル場 ν で, $L = (f, \nu): U \rightarrow T_1\mathbf{R}^3$ がルジャンドルはめ込みとなるものが存在するときをいう. ここで, $T_1\mathbf{R}^3$ は標準接触構造を持つ $\mathbf{R}^3$ の単位接束である. 波面は一般に特異点を持つことに注意する. 波面 f に対して, C^∞ 関数 $\lambda: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v)$ で定め, 符号付面積密度関数という. 点 $p \in U$ が $\lambda(p) = 0$ を満たすとき, p を波面 f の特異点といい, 特異点集合を $S(f)$ と表す. 点 $p \in S(f)$ が非退化であるとは, $d\lambda(p) \neq 0$ が成り立つときをいう. 点 $p \in S(f)$ が非退化であるとき, $S(f)$ 上で $df(\eta) = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場 η が存在し, これをナルベクトル場と呼ぶ. 波面にジェネリックに現れる特異点にはカスプ辺とツバメの尾がある ([1]). これらは, 次の写像に原点で $\mathcal{A}$ -同値なものをいう:

$$\begin{aligned}(u, v) &\mapsto (u, v^2, v^3) \text{ カスプ辺,} \\ (u, v) &\mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv) \text{ ツバメの尾.}\end{aligned}$$

ここで, 2つの写像芽 $f, g: (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \mathbf{0})$ が $\mathcal{A}$ -同値であるとは, 値域の微分同相写像芽 $S: (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \mathbf{0})$ と像域の微分同相写像芽 $T: (\mathbf{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \mathbf{0})$ が存在し, $T \circ f = g \circ S$ を満たすときをいう. これらの特異点に対して, 以下の判定法が知られている.

Theorem 1.1 ([3]). $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面とし, 原点が特異点であるとする.

(1) f が原点でカスプ辺であるための必要十分条件は, 原点において $d\lambda(\eta) \neq 0$ が成立することである. 特に, カスプ辺において, 特異方向とナル方向は横断的である.

(2) f が原点においてツバメの尾であるための必要十分条件は, $d\lambda(\mathbf{0}) \neq 0$, $\eta\lambda(\mathbf{0}) = 0$ かつ $\eta\eta\lambda(\mathbf{0}) \neq 0$ が成り立つことである.

2 カスプ辺

$f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をカスプ辺とする. このとき, 次が成り立つ.

*teramoto@math.kobe-u.ac.jp

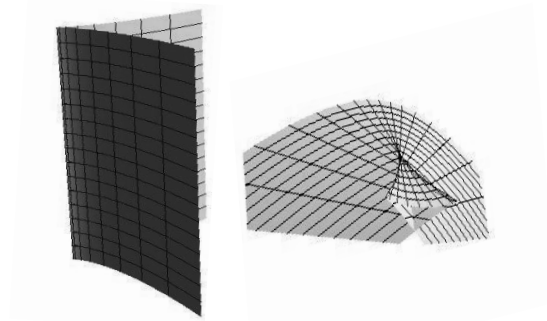


Figure 1: カスプ辺 (左側) とツバメの尾 (右側).

Proposition 2.1 ([4]). $f : (U; u, v) \rightarrow \mathbf{R}^3$ カスプ辺とする. このとき, 値域の座標変換と像域の等長変換を用いて

$$f(u, v) = \left(u, \frac{a_{20}}{2}u^2 + \frac{a_{30}}{6}u^3 + \frac{v^2}{2}, \frac{b_{20}}{2}u^2 + \frac{b_{30}}{6}u^3 + \frac{b_{12}}{2}uv^2 + \frac{b_{03}}{6}v^3 \right) + h(u, v), \quad (2.1)$$

$(b_{20} \geq 0, b_{03} \neq 0)$

と表すことができる. ここで,

$$h(u, v) = (0, u^4 h_1(u), u^4 h_2(u) + u^2 v^2 h_3(u) + uv^3 h_4(u) + v^4 h_5(u, v)),$$

であり, $h_i(u)$ ($1 \leq i \leq 4$), $h_5(u, v)$ は C^∞ 関数である.

上の (2.1) をカスプ辺の標準形という (詳細は [4] を参照されたい). ここで, adapted 座標系と呼ばれる座標系を導入する.

Definition 2.1. U 上の座標系 (u, v) が *adapted* であるとは, これが次を満たすときをいう:

- (1) u -軸が特異曲線,
- (2) ∂_v が u -軸上のナルベクトル場を与える,
- (3) u -軸の他に特異点がない.

adapted 座標を用いて, 単位法ベクトル場 ν は, $\nu(u, v) = f_u \times \tilde{f}_v / |f_u \times \tilde{f}_v|(u, v)$ で与えられる. ここで, $\tilde{f}_v = f_v/v$ とする.

Remark 2.1. (u, v) を U 上の adapted 座標とすると, $\{f_u, \tilde{f}_v, \nu\}$ は一次独立である. さらに, $f_{vv} = \tilde{f}_v$ on $S(f) = \{v = 0\}$ が成立する.

adapted 座標系を用いて次を導入する.

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \langle f_u, f_u \rangle, \quad \tilde{F} = \langle f_u, \tilde{f}_v \rangle, \quad \tilde{G} = \langle \tilde{f}_v, \tilde{f}_v \rangle, \\ \tilde{L} &= -\langle f_u, \nu_u \rangle, \quad \tilde{M} = -\langle \tilde{f}_v, \nu_u \rangle, \quad \tilde{N} = -\langle \tilde{f}_v, \nu_v \rangle, \end{aligned}$$

ここで, $\tilde{E} = 1, \tilde{F} = 0, \tilde{G} = 1, \tilde{L} = b_{20}, \tilde{M} = b_{12}, \tilde{N} = b_{03}/2$ at $(0, 0)$ である. 特に, $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = 1$ at $(0, 0)$ なので, 原点の近傍で, 行列 $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$ は正則である. これらの量を用いて, 以下の関数を定める.

$$\tilde{\kappa}_1 := \frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2v(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\kappa}_2 := \frac{\tilde{A} - \tilde{B}}{2v(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} \quad (2.3)$$

ここで, $\tilde{A} = \tilde{E}\tilde{N} - 2v\tilde{F}\tilde{M} + v\tilde{G}\tilde{L}$, $\tilde{B} = \sqrt{(\tilde{E}\tilde{N} - 2v\tilde{F}\tilde{M} + v\tilde{G}\tilde{L})^2 - 4v(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\tilde{L}\tilde{N} - v\tilde{M}^2)}$. このとき, 以下を得る.

Proposition 2.2. 上の状況において, $S(f)$ 上で $\tilde{N} > 0$ (resp. < 0) のとき, $\tilde{\kappa}_2$ が収束 (resp. 発散) し, $\tilde{\kappa}_1$ は発散 (resp. 収束) する.

このことから, $\tilde{N} > 0$ のとき, $\tilde{\kappa}_2$ を主曲率と考えることができる. さらに, この主曲率に対する主方向を $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{N} - \tilde{\kappa}_2 v \tilde{G})\partial_u + (-\tilde{M} + \tilde{\kappa}_2 \tilde{F})\partial_v$ と取ることができる.

さて, 主曲率 $\tilde{\kappa}_2$ と対応する主方向 $\tilde{\mathbf{v}}$ を用いて, カスプ辺の峰点を定義する (正則曲面に対しては [2, 6] を参照).

Definition 2.2. $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をカスプ辺, $\tilde{\kappa}_2$ を主曲率, $\tilde{\mathbf{v}}$ を主曲率に対応する主方向とする. このとき, $f(p)$ が $\tilde{\mathbf{v}}$ についての峰点であるとは, $\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\kappa}_2(p) = 0$ が成り立つときをいう. ここで, $\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\kappa}_2(p)$ は, $\tilde{\kappa}_2$ の $\tilde{\mathbf{v}}$ についての方向微分である. さらに, $f(p)$ が $\tilde{\mathbf{v}}$ についての k 階峰点であるとは, $\tilde{\mathbf{v}}^{(m)}\tilde{\kappa}_2(p) = 0$ ($1 \leq m \leq k$) であり, $\tilde{\mathbf{v}}^{(k+1)}\tilde{\kappa}_2(p) \neq 0$ であるときをいう. ただし, $\tilde{\mathbf{v}}^{(m)}\tilde{\kappa}_2(p)$ は, $\tilde{\kappa}_2$ の $\tilde{\mathbf{v}}$ についての m 階の方向微分である.

3 カスプ辺の平行曲面

カスプ辺を初期曲面としたときの平行曲面を考えていく. 正則曲面の平行曲面に現れる特異点と初期曲面の微分幾何学的性質については [2] において詳細に調べられていることを述べておく.

$f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をカスプ辺とし, この平行曲面 f_t を定数 $t \in \mathbf{R}$ を用いて

$$f_t(u, v) = f(u, v) + t\nu(u, v), \quad (3.1)$$

と定義する. 平行曲面に対する単位法ベクトル場としては, 初期曲面 f に対する単位法ベクトル場 ν がそのまま使える. いま, この平行曲面に対する判別関数 λ_t を

$$\lambda_t(u, v) = \det((f_t)_u, (f_t)_v, \nu)(u, v) \quad (3.2)$$

と定める. 原点において, $\lambda_t(\mathbf{0}) = -b_{03}t(1 - b_{20}t)/2$ であることから, $t = 0, 1/b_{20}$ であるときに特異点を持つ. ここで, $b_{20} = \tilde{\kappa}_2(\mathbf{0}) \neq 0$ であるとする. $t = 0$ は初期曲面であるので, 原点でカスプ辺となっている. そこで以下では $t = t_0 = 1/\tilde{\kappa}_2(\mathbf{0}) (= 1/b_{20})$ として考える. さらに, 平行曲面は波面であるので, 定理 1.1 を適用することができる. そのためには, 平行曲面 f_{t_0} に対するナルベクトル場 η_{t_0} が必要であるが, それは次のように求められる:

$$\eta_{t_0} = - \left(v + t_0 \frac{v\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{E}\tilde{N}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \right) \partial_u + t_0 \frac{\tilde{F}\tilde{L} - \tilde{E}\tilde{M}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \partial_v. \quad (3.3)$$

定理 1.1 とナルベクトル場 η_{t_0} を用いて, 初期曲面の幾何学的性質と平行曲面に現れる特異点の関係を
得ることができる.

Theorem 3.1. $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をカスプ辺とする. このとき, f の平行曲面 f_{t_0} , $t_0 = 1/\tilde{\kappa}_2(\mathbf{0})$ が,
原点においてツバメの尾特異点を持つための必要十分条件は, 原点が初期曲面 f の 1 階峰点であ
り, 平行曲面 f_{t_0} の非退化特異点になることである.

References

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol.1, Monographs in Mathematics **82**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] T. Fukui, and M. Hasegawa, Singularities of parallel surfaces, *Tohoku Math. J.* **64** (2012), 387–408.
- [3] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.
- [4] L. F. Martins, and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, Preprint, 2013.
- [5] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Behavior of Gaussian curvature around non-degenerate singular points on wave fronts, Preprint, 2013.
- [6] I. R. Porteous, *Geometric differentiation for the Intelligence of Curves and Surfaces*, second edition, Cambridge University Press, 2001.
- [7] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. of Math.* **169** (2009), 491–529.

On fold singularities of product maps with radially actions

九州大学 数理学研究院 学術研究員 隅田大貴

1 Introduction

複素 n 変数多項式 f は原点で消えるものとする。原点を中心とする球面 $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = \varepsilon\}$ と複素超曲面 $V_f = f^{-1}(0)$ の交わりを $L_f = S_\varepsilon \cap V_f$ と表しリンクと呼ぶ。このとき実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、写像

$$\frac{f}{|f|} : S_\varepsilon \setminus L_f \rightarrow S^1$$

は臨界点を持たない全射な可微分写像になり、局所自明なファイバー束になる。このファイバーを F_f とすると、任意のファイバーについて $\partial \overline{F_f} = L_f$ となっている。このファイバー束はミルナー束と呼ばれ、複素超曲面特異点のトポロジーの研究にしばしば現れる対象である。原点を中心とする閉球を $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq \varepsilon\}$ とするとき、空間対 $(D_\varepsilon, D_\varepsilon \cap V_f)$ は空間対 (S_ε, L_f) の錐に同相になる。その意味でリンクを調べることは、複素超曲面の特異点の近くでの位相構造に密接に関連していると言える ([4])。また岡睦雄氏によって、良い条件を持つ mixed polynomial から構成されたミルナー束に一般化されており、近年研究が進められている ([2],[3])。

一方、複素多項式 f について、各ファイバーや全空間の位相的構造を調べるために、 $|f|$ の臨界点を調べられることがしばしばある。大域的ミルナー束

$$f : \mathbb{C}^n \setminus V_f \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

の定義域多様体には $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が作用する。多項式 f の任意の 0 でない単項 $Cz_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n}$ について $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = d$ が成り立つとき、 f は weight が $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ で degree が $d \in \mathbb{N}$ の擬斉次多項式であるという。この多項式について

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^n \setminus V_f \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus V_f, (c, z) \mapsto (c^{a_1} z_1, \dots, c^{a_n} z_n)$$

という具体的な作用がある。位相部分群 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ についても $\mathbb{C}^n \setminus V_f$ への作用が同様に考えられる。その作用を許容するクラスの mixed polynomial をそれぞれ、radially weighted homogeneous mixed polynomial, polar weighted homogeneous mixed polynomial という。それぞれの作用

$$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{C}^n \setminus V_f \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus V_f, (t, z) \mapsto (t^{r_1} z_1, \dots, t^{r_n} z_n),$$

$$S^1 \times \mathbb{C}^n \setminus V_f \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus V_f, (\lambda, z) \mapsto (\lambda^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_n} z_n)$$

を radially action, polar action という。Mixed polynomial に付随する $|f|$ の性質を顕著に表すのが radially weighted homogeneous mixed polynomial である。今回の講演では radially action に注目した、 $\mathbb{R}^2$ への可微分写像の特異点の折り目特異点 ([1]) の判定法を述べる。

2 Results

Definition. ([2]) 複素変数 $z_1, \dots, z_n$ とその複素共役 $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ が変数である複素数係数多項式を **mixed polynomial** という。特に *mixed polynomial* f が任意の $t \in \mathbb{R}^\times$ について

$$f(t^{r_1} z_1, \dots, t^{r_n} z_n) = t^d f(z_1, \dots, z_n)$$

を満たす時、 f は **radially weighted homogeneous** であるといい、 $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ を f の **weights**, $d \in \mathbb{Z}$ を f の **degree** と呼ぶ。

Definition. ([1]) M, N をそれぞれ実 m, n 次元の可微分多様体とする。可微分写像 $\varphi: M \rightarrow N$ に対して、 φ の微分写像 $d\varphi_p: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ の表現行列がフルランクではないとき、 $p \in M$ を φ の特異点であるといい、 φ の特異点集合を $S(\varphi)$ で表す。以下 $m \geq n$ とする。可微分写像 φ の特異点 p の近くで、 φ が標準形

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \pm x_n^2 \pm \dots \pm x_m^2)$$

を持つとき、 p を φ の折り目特異点と言い、特異点全てが折り目特異点である可微分写像を折り目写像という。

微分演算子 $d, \bar{d}$ を次で定義する。

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right), \quad \bar{d} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right)$$

原点で消える mixed polynomial f について

$$a = \operatorname{Re} \log f = \log |f|: \mathbb{C}^n \setminus V_f \rightarrow \mathbb{R}$$

を考える。エルミート内積を $\langle v, w \rangle = v_1 \bar{w}_1 + \dots + v_n \bar{w}_n$ で定義した時、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \log f &= \operatorname{Re} \left(\frac{d}{dt} \log f \right) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \left(\frac{dz_j}{dt} \frac{\partial \log f}{\partial z_j} + \frac{d\bar{z}_j}{dt} \frac{\partial \log f}{\partial \bar{z}_j} \right) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \left(\frac{dz_j}{dt} \frac{\partial \log f}{\partial z_j} + \frac{dz_j}{dt} \frac{\partial \overline{\log f}}{\partial \bar{z}_j} \right) = \operatorname{Re} \left\langle \frac{dz}{dt}, \bar{d} \log f + d \log f \right\rangle \end{aligned}$$

より、 $\operatorname{Re} \langle v, \bar{d} \log f + d \log f \rangle = 0$ が全ての接ベクトル $v \in T_p(\mathbb{C}^n \setminus V_f)$ について成り立つことと、 p が a の臨界点であることが同値なので、 a の臨界点集合は

$$S(a) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f\bar{f} > 0, \overline{d \log f} + d \log f = 0\}$$

になる。サードの定理より、写像 a の臨界値集合は $\mathbb{R}$ の測度 0 の部分集合なので、すなわち $\mathbb{R}$ の離散集合になる。実数 $r > 0$ について、原点を中心とする半径 r の開球とディスクを

$$B_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}, \quad D_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq r\}$$

で定義する。写像 a を制限した写像を

$$a_r = \operatorname{Re} \log f = \log |f|: M = B_r \setminus V_f \rightarrow \mathbb{R}$$

で定義すると、同様に a_r の臨界点集合は

$$S(a_r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid f\bar{f} > 0, r^2 - \|z\|^2 > 0, f\bar{d}f + \bar{f}df = 0 \right\}$$

になる。写像 a_r の臨界点について曲線選択補題により、次のことが成り立つ。

Lemma 1. (曲線選択補題 [4]) V を $\mathbb{R}^N$ の実代数的集合とし、 U を有限個の実多項式不等式で定義される $\mathbb{R}^N$ の開集合とする。 $z_0 \in \overline{U \cap V}$ ならば、 $c(0) = z_0$, $c(t) \in U \cap V \ \forall t \in (0, 1)$ を満たす解析的曲線 $c: [0, 1) \rightarrow \overline{U \cap V}$ が存在する。

Lemma 2. 実数 $\eta > 0$ が存在して、写像 a_r の任意の臨界点 z は $|f(z)| \geq \eta$ を満たす。

Proof. 写像 a_r の臨界点 z で $|f(z)|$ が 0 にいくらでも近いものが存在すると仮定すると、それらの極限はコンパクト集合 D_r 上で存在し、 $z_0 \in \overline{S(a_r)}$ を満たす。曲線選択補題から解析的曲線 $c: (0, 1) \rightarrow S(a_r)$ で $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = z_0$ を満たすものが存在するが、この曲線にそって $|f|$ の値は一定で 0 にはならず、 $\lim_{t \rightarrow 0} |f(c(t))| = |f(z_0)| = 0$ に反する。 $\square$

Proposition 3. 実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、 a_ε は臨界点を持たない。

Proof. Mixed polynomial f の定数項は 0 であり $|z_j| = |\bar{z}_j| \leq \|z\|$ なので、三角不等式から $|f(z)| \leq F(\|z\|)$ を満たす非負実数係数多項式 $F(x)$ で定数項が 0 であるものが存在する。多項式 F は $x \geq 0$ で単調増加なので、実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、 $z \in B_\varepsilon$ ならば $|f(z)| < \eta$ が成り立つ。よって Lemma 2 より a_ε は臨界点を持たない。 $\square$

$\varepsilon_0 > 0$ を十分小さくにとって、 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、mixed polynomial f, g から定義された写像

$$\text{Re log } f: B_\varepsilon \setminus V_f \rightarrow \mathbb{R}, \text{ Re log } g: B_\varepsilon \setminus V_g \rightarrow \mathbb{R}$$

が臨界点を持たないと仮定する。これらから写像

$$\Phi = (\text{Re log } f, \text{Re log } g): B_\varepsilon \setminus V_{fg} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

を構成する。 $B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ の点 p が Φ の特異点になる為の必要十分条件は、次で与えられる。

Proposition 4. p を $B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ の点とする。 p が Φ の特異点になる為の必要十分条件は、 $\overline{d \log f} + \overline{d \log g}$ と $\overline{d \log f} + \overline{d \log g}$ が p で $\mathbb{R}$ 上一次従属になることである。特に f, g が複素多項式の場合、 p で gdf, fdg が $\mathbb{R}$ 上一次従属になることである。

Example. $f = z_1^3 + z_2^2$, $g = z_1^2 + z_2^3$ の場合を考える。まず gdf と fdg が $\mathbb{C}$ 上一次従属になる点を見つけ、その中から $\mathbb{R}$ 上一次従属になるよう条件付けを行う。計算を行うことにより、

$$gdf = (z_1^2 + z_2^3)(3z_1^2, 2z_2) = (3z_1^4 + 3z_1^2 z_2^3, 2z_1^2 z_2 + 2z_2^4),$$

$$fdg = (z_1^3 + z_2^2)(2z_1, 3z_2^2) = (2z_1^4 + 2z_1 z_2^2, 3z_1^3 z_2^2 + 3z_2^4),$$

$$\det \begin{pmatrix} gdf \\ fdg \end{pmatrix} = z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^3)(z_1^3 + z_2^2)(9z_1 z_2 - 4)$$

を得る。 $B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ 上では $f(z), g(z) \neq 0$ より、 Φ の特異点は $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_1 z_2 = 4/9$ のどれかを満たす必要がある。 $z_1 = 0$ の場合、 $gdf = (0, 2z_2^4)$, $fdg = (0, 3z_2^4)$ なのでこれらは $\mathbb{R}$ 上一次従属。 $z_2 = 0$ の場合、 $gdf = (3z_1^4, 0)$, $fdg = (2z_1^4, 0)$ なのでこれらは $\mathbb{R}$ 上一次従属。 $z_1 z_2 = 4/9$ の場合、 $z_1 = x$, $z_2 = 4/9x$ を代入して

$$gdf = (z_1^2 + z_2^3)(3z_1^2, 2z_2) = \frac{729x^5 + 64}{6561x^4}(27x^3, 8),$$

$$fdg = (z_1^3 + z_2^2) (2z_1, 3z_2^2) = \frac{162x^5 + 32}{2187x^4} (27x^3, 8)$$

を得る。 gdf と fdg が $\mathbb{R}$ 上一次従属になる為には、

$$\frac{729x^5 + 64}{6561x^4} / \frac{162x^5 + 32}{2187x^4} = \frac{729x^5 + 64}{486x^5 + 96} = s$$

が実数になることが必要十分である。よって 1 の 5 乗根 ω_5 と実数 $s \neq 2/3, 3/2$ について、

$$z_1 = x = -\frac{2}{3}\omega_5 \sqrt[5]{\frac{3s-2}{2s-3}}, \quad z_2 = \frac{4}{9x} = -\frac{2}{3}\omega_5^{-1} \sqrt[5]{\frac{2s-3}{3s-2}}$$

を満たす点 $p \in B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ が Φ の特異点になる。今得た $z_1 z_2 = 4/9$ の場合の特異点は、 ε_0 を十分小さくすると存在しないことがわかる。よって $S(\Phi) = (B_\varepsilon \setminus V_{fg}) \cap V_{z_1 z_2}$ を得る。

Theorem 5. *Mixed polynomial f, g は radially weighted homogeneous で、その weights が共に $(r_1, \dots, r_n)$ で degrees がそれぞれ d_f, d_g であるとする。* $\mathbb{C}^n$ における $\bar{d} \log \bar{f} + \bar{d} \log f$ の直交補空間の基底 $\{v_1, \dots, v_{2n-1}\}$ を並べた行列を $K \in M(2n-1, n, \mathbb{C})$ とする。 $d_f \log g - d_g \log f$ の変数 $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ についてのヘッセ行列を $H \in M_{2n}(\mathbb{C})$ とする。 $W = (K, \bar{K})$ とし、 W の転置行列を W^T で表す。このとき Φ の特異点 p が折り目特異点であることと、 $\text{Re}(WHW^T)$ が p で正則行列になることは同値である。

Proof. 証明の概略のみ述べる。

$$f(t^{r_1} z_1, \dots, t^{r_n} z_n) = t^{d_f} f(z_1, \dots, z_n), \quad g(t^{r_1} z_1, \dots, t^{r_n} z_n) = t^{d_g} g(z_1, \dots, z_n)$$

より、 $(t; r)(z) = (t^{r_1} z_1, \dots, t^{r_n} z_n)$ と定義すると、

$$\text{Re} \log f((e^u; r)(z)) = d_f u + \text{Re} \log f(z), \quad \text{Re} \log g((e^u; r)(z)) = d_g u + \text{Re} \log g(z),$$

が成り立つので

$$\text{Re} \log f((e^u; r)(z)) = d_f u + \text{Re} \log f(z),$$

$$(d_f \text{Re} \log g - d_g \text{Re} \log f)((e^u; r)(z)) = d_f \text{Re} \log g(z) - d_g \text{Re} \log f(z)$$

を得る。この式から Φ の特異点 p の近くでの $B_\varepsilon \setminus V_f$ の局所座標を、radially action 方向の座標成分 x_1 とそれと横断的な方向の座標成分 $x_2, \dots, x_{2n}$ に分けたとき、 Φ の特異点 p が関数 $d_f \text{Re} \log g - d_g \text{Re} \log f$ の座標 $x_2, \dots, x_{2n}$ についての非退化臨界点であることと、 p が Φ の折り目特異点になることが同値になる。この事実を式で書き下すと、定理の主張を得る。 $\square$

参考文献

- [1] Golubitsky, Martin, and Victor W. Guillemin. Stable mappings and their singularities. Springer, 1973.
- [2] Oka, Mutsuo. "Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces." Kodai Mathematical Journal 31.2 (2008): 163-182.
- [3] Oka, Mutsuo. "Non-degenerate mixed functions." Kodai Mathematical Journal 33.1 (2010): 1-62.
- [4] Milnor, John Willard. Singular points of complex hypersurfaces. No. 61. Princeton University Press, 1968.

Splitting of singular fibers in barking families

奥田喬之* (九州大学大学院数理学研究院)

概要

複素曲線族に現れる特異ファイバーの正則近傍は「リーマン面の退化」と呼ばれ、その位相同値類が曲面写像類群との間に位相モノドロミーを通した良い対応関係を持つことが知られている。これをさらに別のパラメータによって摂動した複素曲線族の族であって、もとの特異ファイバーがより簡単な特異ファイバー達へ分裂するようなもの、即ち「分裂族」の存在性は興味深い問題である。本レポートでは、講演で扱う「剥離変形族」をはじめ、こうした研究対象達の概観を紹介する。

1 特異ファイバーの分裂

滑らかな複素曲面 M から複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の原点中心の開円板 Δ への固有全射正則写像 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を考えよう。このとき各 $s \in \Delta$ 上のファイバー、即ち s の逆像 $X_s := \pi^{-1}(s)$ は (滑らかとは限らないコンパクトな) 複素曲線となるため、 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を複素曲線の族とみなすことができる。特に π が $0 \in \Delta$ にのみ特異値を持つと仮定すると、一般ファイバー X_s ($s \neq 0$) は全て滑らかな複素曲線である一方、中心ファイバー X_0 のみが特異点を持ち得る。一般ファイバーが中心に近づくにつれて潰れていく様から、こうした $\pi: M \rightarrow \Delta$ をリーマン面の退化と呼ぶ (図 1 左)。リーマン面の退化は、コンパクトな複素曲面が持つファイバー構造における特異ファイバーの正則近傍として現れる、小平邦彦による楕円曲面の結果 [K] に端を発した研究対象である。

ここでは、退化した特異ファイバーの「分裂」について考えていきたい。唯一の特異ファイバー X_0 を持つリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を、新たな複素パラメータ t によって摂動することで複素曲線族 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ が得られたとしよう。この π_t が複数の特異ファイバー $X_{t,s_1}, X_{t,s_2}, \dots, X_{t,s_k}$ ($s_1, s_2, \dots, s_k \in \Delta_t$) を持つとき、特異ファイバー X_0 は $X_{t,s_1}, X_{t,s_2}, \dots, X_{t,s_k}$ に分裂するという。

この分裂を法とした分類、即ち原子ファイバー (それ以上分裂することができない特異ファイバー) の分類は非常に興味深い。例えばレフシェッツファイバーや、多重リーマン面 (複素曲線としては滑らかだが重複度を持つもの) は原子ファイバーであることが知られている。一方、それ以外の特異ファイバーは全てレフシェッツファイバーや多重リーマン面に分裂すると予想されているが、一般にはまだ示されていない。ただ、一部の特異ファイバーの分裂可能性については解決しており、超楕円的な退化に対しては二重被覆を経由した分裂の構成法 ([Mo], [H], [AA]) が与えられた。より多くのクラスに対する分裂の構成法として、後述する「剥離変形」が高村茂 [T] によって構築され、筆者 [O3] の手によってさらなる一般化が進められている。

後のために、上で述べた「摂動による分裂」を正確に定義しておこう。 $\Delta^\dagger$ を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の十分に小さい原点中心の開円板とする。ある複素 3 次元多様体 $\mathcal{M}$ から $\Delta \times \Delta^\dagger$ への固有平坦全射正則写像 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を考えよう。第二射影 $\text{pr}_2: \Delta \times \Delta^\dagger \rightarrow \Delta^\dagger$ との合成 $\text{pr}_2 \circ \Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta^\dagger$ が沈め込みであると仮定する。このとき、各 $t \in \Delta^\dagger$ に対して、 $M_t := (\text{pr}_2 \circ \Psi)^{-1}(t)$ は滑らかな複素曲面であり、 $\Delta_t := \Delta \times \{t\}$ とおくと $\pi_t := \Psi|_{M_t}: M_t \rightarrow \Delta_t$ は複素曲線の族となる。ここで、与えられたリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ が $\pi_0: M_0 \rightarrow \Delta_0$ と一致するとき、 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) は π を摂動したものとみなすことができる。こうした“複素曲線族の族” $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ に対する変形族と呼び、特に、各 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) が複数の特異ファイバーを持つとき、分裂族と呼ぶ (図 1 右)。つまり、分裂族の存在性を以て特異ファイバーの分裂可能性は定義される。

* E-mail: t-okuda@math.kyushu-u.ac.jp

Webpage: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~t-okuda/>

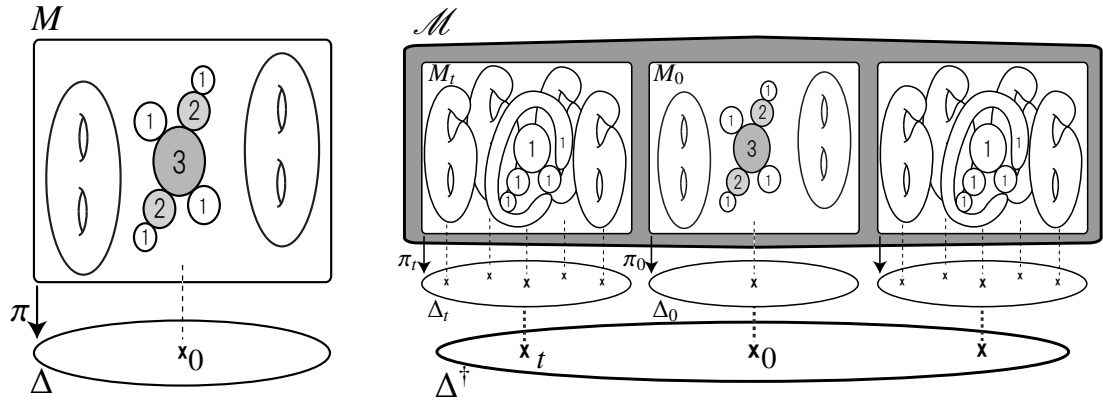


図1 リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ と、それに対する剥離変形による分裂族 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^+$ の例。

2 剥離変形族

次に、剥離変形によるリーマン面の退化に対する分裂族の構成法を紹介しよう。

まず、退化の線型性を定義する。与えられたリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の特異ファイバー X_0 は（必要ならば適当にブローアップすることで）高々正規交差しか持たず、且つ各既約成分が滑らかであると仮定する。 X_0 の一つの既約成分 Θ に着目し、その重複度を m とおく。 Θ は h 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_h$ で他の既約成分達と交わり、相手の既約成分の重複度がそれぞれ $m_1, m_2, \dots, m_h$ であるとしよう。さらに N_Θ を M における Θ の法束とする。このとき、 Θ 上の因子 $P := \sum_{j=1}^h m_j p_j$ について、

$$N_\Theta^{\otimes(-m)} \cong \mathcal{O}_\Theta(P)$$

が成り立つ。ここで、右辺は P で定義される Θ 上の線束である。すなわち、 Θ 上の線束 $N_\Theta^{\otimes(-m)}$ には点 p_j ($j = 1, 2, \dots, h$) で位数 m_j の零点を持つ正則切断 σ が存在する。線束 N_Θ の変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ に対して線束 $N_\Theta^{\otimes(-m)}$ の変換関数は $\{g_{\alpha\beta}^{-m}\}$ となることに注意すると、 $\pi_\Theta(z, \zeta) := \sigma(z)\zeta^m$ (z は底方向、 ζ はファイバー方向の N_Θ の局所座標) は N_Θ 上の正則関数を与えることがわかる。 $\pi_\Theta^{-1}(0)$ は、 N_Θ の零切断と p_j 上のファイバー達とから成り、その重複度はそれぞれ m, m_j である。以上の考察の上で、リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ が線型であるとは次を満たすものとして定義される。

- X_0 の各既約成分 Θ の M における管状近傍と、その法束 N_Θ の零切断の管状近傍とが双正則である。
- 上の双正則写像による同一視の下、 π は各既約成分 Θ の周りで π_Θ と一致する。
- X_0 の既約成分それぞれの管状近傍達は plumbing で貼り合わされている。

X_0 を π で定まる M 上の因子 $\text{div}(\pi) = \sum m\Theta$ とみなし、そのある部分因子 $Y = \sum n\Theta$ を考える。さらに、 ℓ を $\ell Y \leq X_0$ (つまり任意の既約成分に対して $\ell n \leq m$) を満たすある正の整数とする。このとき、 (Y, ℓ) がクラストであるとは、各既約成分において (Y, ℓ) が“クラスト条件”と呼ばれる条件達のうちの一つを満たすときをいう。クラスト条件を満たす既約成分の周りでは、 (Y, ℓ) に関連付けられた π の局所的な変形族を構成することができる。紙面の都合上、全てのクラスト条件を挙げることはできないが、そのうちの一つを次に紹介する。

既約成分 Θ の周りに制限した線型な退化 $\pi: N_\Theta \rightarrow \Delta$ は $\pi(z, \zeta) = \sigma(z)\zeta^m$ で表され $\text{div}(\sigma) = \sum_{j=1}^h m_j p_j$ を満たすのであった。 Θ が点 $p_1, p_2, \dots, p_h$ で交わる他の既約成分それぞれの“ Y における重複度” (つまり $\sum n\Theta$ における係数) を $n_1, n_2, \dots, n_h$ とすると、 $P_Y := \sum_{j=1}^h n_j p_j$ は $P = \sum_{j=1}^h m_j p_j$ の部分因子である。既約成分 Θ において (Y, ℓ) がクラスト条件 (A) を満たすとは、 Θ 上にある効果的な因子 $Q_Y := \sum_{i=1}^k a_i q_i$ が存在して、

$$N_\Theta^{\otimes(-n)} \cong \mathcal{O}_\Theta(P_Y - Q_Y)$$

なるときをいう。ただし、 $\text{red}P_Y \cap \text{red}Q_Y \neq \emptyset$ (つまり $p_j = q_i$ ならば $n_j = 0$ または $a_i = 0$) とする。すなわち、 Θ 上の線束 $N_\Theta^{\otimes(-n)}$ の有理型切断 τ であって、点 p_j ($j = 1, 2, \dots, h$) で位数 n_j の零点を、点 q_i

$(i = 1, 2, \dots, k)$ で位数 a_i の極を持つものが存在する。この τ を用いて、既約成分 Θ の周りでの π の局所的な変形族 $\Psi: N_\Theta \times \Delta^\dagger \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を

$$\Psi(z, \zeta, t) = \left(\sigma(z) \zeta^m \left(1 + \frac{t}{\tau \zeta^n} \right)^\ell, t \right) \quad \left(= \left(\sigma(z) \tau(z)^{-\ell} \zeta^{m-\ell n} (\tau \zeta^n + t)^\ell, t \right) \right)$$

で定義しよう。これを $\Delta_0 = \Delta \times \{0\}$ 上に制限すると明らかに $\pi(z, \zeta) = \sigma(z) \zeta^m$ と一致する。それに対し $\Delta_t = \Delta \times \{t\}$ ($t \neq 0$) 上に制限した $\pi_t: N_\Theta \times \{t\} \rightarrow \Delta_t$ については、その中心ファイバー $\pi_t^{-1}(0)$ をなす既約成分を調べると、 N_Θ の零切断と p_j 上のファイバー達（それぞれ重複度は $m - \ell n, m_j - \ell n_j$ に下がっている）のみでなく、新たに重複度 ℓ の既約成分が現れていることがわかる。この既約成分は t を 0 に近づけていくと他の既約成分に貼り付いていくことから、摂動によって中心ファイバーから剥がれたものであると思える。この既約成分を剥離成分と呼ぶ。

各既約成分の周りで構成されたこうした局所的な変形族は、クラスト (Y, ℓ) がある条件を満たすとき（シンプルクラストと呼ぶ）、整合性を保ちつつ大域的に貼り合わせることができる。この貼り合わせで得られる $\pi: M \rightarrow \Delta$ に対する変形族 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を剥離変形族と呼ぶ。このとき、 π の変形 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) の中心ファイバー $X_{t,0} := \pi_t^{-1}(0)$ は、もとの特異ファイバー X_0 に由来する重複度の下がった既約成分達と新たに現れた重複度 ℓ の剥離成分達とから成る特異ファイバーであり、これを特に主ファイバーと呼ぶ。もとの特異ファイバー X_0 と主ファイバー $X_{t,0}$ の位相型が異なるならば、 π_t は必ず $X_{t,0}$ 以外にも特異ファイバーを持つ。したがって非自明な剥離変形族は一般に分裂族であることがわかる。こうして、以下の剥離変形による分裂可能性定理が得られる。

定理 1 ([T], [O3]). リーマン面の線型な退化に対して、その特異ファイバーが非自明なシンプルクラストを持つならば、分裂族が存在する。

注意 2. このセクションでは [O3] でより一般化された剥離変形としての術語を用いているため、[T] で導入されたものとは少し異なることに注意。この一般化によって、例えば、昨年本研究集会で講演した「周期的写像類のデーンツイスト積表示」の結果 [O1] がより種数の高い場合でも成り立つことがわかった。

3 分裂位相モノドロミー

リーマン面の退化の位相型は、次の定理による、曲面写像類群との間の位相モノドロミーを通した対応関係を以て分類される。

定理 3 ([MM]). 種数 $g \geq 2$ のリーマン面の極小な退化の位相同値類と、種数 g の実有向閉曲面の写像類群 MCG_g における負型擬周期的写像類の共役類とは、位相モノドロミーを通して一対一に対応する。

ここでの位相モノドロミーとは、退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の一般ファイバー $X_s = \pi^{-1}(s)$ ($s \in \Delta \setminus \{0\}$) を、 $\Delta \setminus \{0\}$ 上で 0 の周りを反時計回りに一周するループに沿って走らせることで得られる自己同相写像 $f: X_s \rightarrow X_s$ のアイソトピー類（つまり X_s の写像類）として定義された。

では一方、分裂族の位相型だとうであろうか？ [O2] では、上の退化の位相モノドロミーの類似として分裂族の位相モノドロミー（以下、単に分裂位相モノドロミーと呼ぶ）なるものを新たに導入した。まず、分裂族は複素曲線族の族であることに注意したい。分裂族の“一般ファイバー”として $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \in \Delta^\dagger \setminus \{0\}$) をとり、 $\Delta^\dagger \setminus \{0\}$ 上で t を基点とし 0 の周りを反時計回りに一周するループに沿って複素曲線族 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$

を走らせる。これにより、向きを保つ自己同相写像 $F: M_t \rightarrow M_t$, $\phi: \Delta_t \rightarrow \Delta_t$ であって図式

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{F} & M_t \\ \downarrow \pi_t & & \downarrow \pi_t \\ \Delta_t & \xrightarrow{\phi} & \Delta_t \end{array}$$

を満たすものを得る。この組 (F, ϕ) の“アイソトピー類”として分裂位相モノドロミーは定義される。

F は π_t の特異ファイバーを特異ファイバーに写す。特に剥離変形族の場合、主ファイバーは主ファイバーに写る。主ファイバーへの F の作用については次の結果が得られている。

定理 4 ([O2]). $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ をシンプルクラスト (Y, ℓ) による剥離変形族とする。このとき、 Ψ の分裂位相モノドロミーは、複素曲線族 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) の主ファイバーの各既約成分に対して負型擬周期的に作用する。実際、剥離成分には Y に対応する負型擬周期的写像類として作用し、それ以外の既約成分には自明に作用する。

証明のアイディアとしては、まず $\Delta_0^\dagger := \{0\} \times \Delta^\dagger \subset \Delta \times \Delta^\dagger$, $M_0^\dagger := \Psi^{-1}(\Delta_0^\dagger) \subset \mathcal{M}$ とおき、 Ψ の $\Delta_0^\dagger$ 上への制限 $\pi_0^\dagger := \Psi|_{M_0^\dagger}: M_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger$ を考える（つまり、分裂変形パラメータではなく退化パラメータを固定する）。 $M_0^\dagger$ が滑らかでないため $\pi_0^\dagger$ そのものは複素曲線族になっていない。ただし集合としては、中心ファイバーはもとの特異ファイバー X_0 と、一般ファイバーは変形後の複素曲線族の主ファイバー $X_{t,0}$ と一致しており、この $\pi_0^\dagger: M_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger (\cong \Delta^\dagger)$ の“位相モノドロミー”が、我々の分裂位相モノドロミーの主ファイバーへの制限と対応していることがわかる。この複素曲線族もどき $\pi_0^\dagger: M_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger$ をさらに適当に制限してやることによって、主ファイバー $X_{t,0}$ の既約成分を一般ファイバーに持つ $\Delta_0^\dagger$ 上の複素曲線族が得られる。剥離成分以外の既約成分 Θ については自明な族 $\Theta \times \Delta_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger$ となり、剥離成分については Y に関連付けられた特異ファイバーを持つリーマン面の退化となる^{*1}。ここで定理 3 を適用することで定理 4 が示される。

この定理 4 を用いることで、興味深い分裂位相モノドロミーを持つ分裂族の例が得られるのだが、その紹介は本講演に譲りたい。そうした例は、分裂後の特異ファイバー達の位相型のみならず分裂族そのものの位相型を調べる上では、分裂位相モノドロミーが重要となるであろうことを示唆している。

■謝辞 昨年に引き続き、この度このような素晴らしい講演の機会を頂いたことを光栄に思います。本研究集会「第 11 回数学総合若手研究集会」の世話人の皆様には心より御礼申し上げます。

参考文献

- [AA] T. Arakawa, and T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils I*, Tohoku Math. J. (2) **53** (2001), 369–394
- [H] E. Horikawa, *Local deformation of pencil of curves of genus two*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **64** (1988), 241–244
- [K] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces, II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626
- [MM] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic Maps and Degeneration of Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 2030, Springer-Verlag, 2011
- [Mo] B. Moishezon, *Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes*, Lecture Notes in Math., Vol. 603, Springer-Verlag, 1977
- [O1] 奥田喬之, *Dehn-twist presentations of periodic mapping classes and splitting of singular fibers*, “第 10 回数学総合若手研究集会”, Hokkaido Univ. Technical Report Series in Math. #160 (2014), 35–42 (和文)
- [O2] T. Okuda, *Monodromies of splitting families for degenerations of Riemann surfaces*, preprint, submitted for publication
- [O3] T. Okuda, *Generalization of barking families*, in preparation
- [T] S. Takamura, *Towards the Classification of Atoms of Degenerations, III — Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*, Lecture Notes in Math., Vol. 1886, Springer-Verlag, 2006

^{*1} 正確には、この族と稠密に一致するような、 Y の極小拡張を特異ファイバーとして実現するリーマン面の退化を再構成する。

$\mathbb{C}^{2n}$ の複素超曲面における複素概接触計量構造について

今田 充洋 (慶應義塾大学大学院 基礎理工学専攻)

1 序

実 $(2n+1)$ 次元多様体上の接触構造とは、ある 1 形式 η が存在して、 $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ を満たすものであった。この概念を奇数次元の複素多様体へ拡張したものを考えたい。この拡張は Kobayashi の論文 [6] に始まり、それ以来 Ishihara-Konishi [5], Blair [2] らの研究により進展が見られている。実接触幾何において、normality をもつ接触構造は佐々木構造と呼ばれ、近年、物理学からも注目される重要な存在となっている。本講演では複素接触多様体に対する normality と、 $\mathbb{C}^{2n}$ の複素超曲面における複素概接触計量構造について紹介する。

2 定義

Definition 2.1. M を $(2n+1)$ 次元の複素多様体、 $\{\mathcal{O}_\lambda\}$ をその開被覆とする。 M が複素接触多様体であるとは、以下の 1) と 2) を満たすものとする。

- 1) 各 $\mathcal{O}_\lambda$ において正則 1 形式 ω_λ がとれて、 $\mathcal{O}_\lambda$ の各点で、 $\omega_\lambda \wedge (d\omega_\lambda)^n \neq 0$.
- 2) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \emptyset$ ならば、その上に 0 でない正則関数 $h_{\lambda\mu}$ が存在し、 $\omega_\lambda = h_{\lambda\mu}\omega_\mu$.

各 $\mathcal{O}_\lambda$ において、 $\mathcal{H}_\lambda = \{X \in T\mathcal{O}_\lambda \mid \omega_\lambda(X) = 0\}$ と定義しておく。 $h_{\lambda\mu}$ たちは 0 でないので、 $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$ 上で $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu$ が成り立つ。よって $\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}_\lambda$ は well-defined で、 M 上の正則かつ、可積分でない subbundle である。これを horizontal subbundle と呼ぶ。

Definition 2.2. (M, J, g) を $(4n+2)$ 次元の Hermite 多様体 (J は概複素構造, g は Hermite 計量), $\{\mathcal{O}_\lambda\}$ をその開被覆とする。 M が複素概接触計量多様体とは、以下の 1) と 2) を満たすものとする。

- 1) 各 $\mathcal{O}_\lambda$ において、1 形式 u_λ と $v_\lambda = u_\lambda J$, $(1,1)$ -テンソル G_λ と $H_\lambda = G_\lambda J$, 単位ベクトル場 U_λ と $V_\lambda = -JU_\lambda$ が存在して、以下を満たす。

$$\begin{aligned} H_\lambda^2 &= G_\lambda^2 = -id + u_\lambda \otimes U_\lambda + v_\lambda \otimes V_\lambda, & g(G_\lambda X, Y) &= -g(X, G_\lambda Y), \\ g(U_\lambda, X) &= u(X), & G_\lambda J_\lambda &= -J_\lambda G_\lambda, & G_\lambda U_\lambda &= 0, & u_\lambda(U_\lambda) &= 1. \end{aligned}$$

- 2) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \emptyset$ ならば、 $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$ 上に $a^2 + b^2 = 1$ なる関数 a, b が存在して、

$$u_\mu = au_\lambda - bv_\lambda, \quad v_\mu = bu_\lambda + av_\lambda, \quad G_\mu = aG_\lambda - bH_\lambda, \quad H_\mu = bG_\lambda + aH_\lambda.$$

複素接触多様体 M に対して、 $\omega_\lambda = u_\lambda - iv_\lambda$ と 2 つの実形式に分解することで M 上に複素概接触計量構造を構成出来る。これを複素接触計量構造と呼ぶ。定義は以下の通りである。

Definition 2.3. $(J_\lambda, G_\lambda, H_\lambda, u_\lambda, v_\lambda, U_\lambda, V_\lambda, g)$ が M 上の複素接触計量構造とは

$$\begin{aligned} g(X, G_\lambda Y) &= du_\lambda(X, Y) + (\sigma_\lambda \wedge v_\lambda)(X, Y), \\ g(X, H_\lambda Y) &= dv_\lambda(X, Y) - (\sigma_\lambda \wedge u_\lambda)(X, Y) \end{aligned}$$

を満たす複素概接触計量構造とする. ここで $\sigma_\lambda(X) = g(\nabla_X U, V)$ (∇ は g に関する Levi-Civita 接続).

Example 2.4. $\mathbf{C}^3$ 上に (大域的な) 正則 1 形式 $\omega = (dz_3 - z_2 dz_1)/2$ が存在して, $\mathbf{C}^3$ は複素接触多様体になる. さらに複素接触計量構造が Blair ら [1] により構成されている.

3 Normality

記号はこれまでの通りとする (以下, 添字は省略する). Ishihara-Konishi [3] は複素概接触計量構造 (J, G, H, u, v, U, V, g) の normality を, 以下に定義する 2 つのテンソル S, T が恒等的に 0 になることと定義した.

$$\begin{aligned} (1) \quad S(X, Y) &= [G, G](X, Y) + 2g(X, GY)U - 2g(X, HY)V + 2v(Y)HX \\ &\quad - 2v(X)HY + \sigma(GY)HX - \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX, \\ (2) \quad T(X, Y) &= [H, H](X, Y) - 2g(X, GY)U + 2g(X, HY)V + 2u(Y)GX \\ &\quad - 2u(X)GY + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX - \sigma(Y)GHX + \sigma(X)GHY. \end{aligned}$$

$[\cdot, \cdot]$ は Nijenhuis テンソルとする. Normality を満たす多様体の例として, Fubini-Study 計量をもった $\mathbf{C}P^{2n+1}$ が挙げられる. ここで, 講演者の結果を一つ紹介する.

Proposition 3.1 [4] M 上の複素接触計量構造が normality をもてば,

$$K(X, JX) + K(X, GX) + K(X, HX) = 6 \quad (X \in \mathcal{H})$$

が成り立つ. ここに, $K(X, Y)$ は X, Y により生成される平面による断面曲率を表す.

Example 2.4 の $\mathbf{C}P^{2n+1}$ に関して断面曲率を計算すると, $K(X, JX) = 4$, $K(X, GX) = K(X, HX) = 1$ と求まる (実際, これは normality をもっている). しかしこれ以外に normality をもった複素接触計量多様体はまだ見つかっていない.

4 Kähler 多様体における複素超曲面

この章は Smyth [7] の論文に基づく. $(\widetilde{M}, \widetilde{J}, \widetilde{g})$ を Kähler 多様体とし, M をその複素超曲面とする (両者を実多様体とみなせば, $\widetilde{M}$ は偶数次元の多様体, M は余次元 2 の部分多様体である). また $\widetilde{M}$ の $\widetilde{g}$ に関する Levi-Chivita 接続を $\widetilde{\nabla}$ と表すことにする. このとき $\widetilde{M}$ 上の Kähler 構造 $(\widetilde{J}, \widetilde{g})$ が M 上に Kähler 構造 (J, g) を誘導する. いま適当な ξ を, $\xi, J\xi$ が M の法ベクトル場となるようにしておく. すると $X, Y \in TM$ に対して, $\widetilde{g}$ に関する $\widetilde{\nabla}_X Y, \widetilde{\nabla}_X \xi$ の直交分解

$$(3) \quad \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\xi + g(JAX, Y)J\xi$$

$$(4) \quad \widetilde{\nabla}_X \xi = -AX + s(X)J\xi$$

を得る. (A は TM 上の $(1, 1)$ テンソル, s は M 上の 1 形式) この A を, M の shape operator と呼ぶことにする. この式により, 複素超曲面に対しても実超曲面のような議論が行えるが, A は $\text{trace } A = 0$ を満たしていることに注意されたい.

5 hyperkähler 多様体からの reduction

初めに, hyperkähler 多様体の定義を振り返る.

Definition 5.1. (M, J_1, J_2, J_3, g) が hyperkähler 多様体であるとは, M 上の複素構造 J_1, J_2, J_3 が, 関係式

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = J_1 J_2 J_3 = -id$$

を満たし, かつ (M, J_i, g) ($i = 1, 2, 3$) が Kähler 多様体になる事とする.

標準的な計量を入れた $\mathbf{C}^{2n}$ には, compatible な hyperkähler 構造が入る. これを用いて, 以下の結果を得た.

Theorem 5.2. [3] $(J_1, J_2, J_3, \tilde{g})$ を標準的な $\mathbf{C}^{2n}$ の hyperkähler 構造とし, M を $\mathbf{C}^{2n}$ の複素超曲面とする. このとき immersion $\phi : M \rightarrow \mathbf{C}^{2n}$ により, $(J_1, J_2, J_3, \tilde{g})$ から M 上に誘導される構造は, 複素概接触計量構造の定義 (Definition 2.2.) を満たす.

実の場合においては, Tashiro [8] が同様の結果を示している.

Theorem 5.3. [8] $(\tilde{M}, J, \tilde{g})$ を Kähler 多様体とし, M を $\tilde{M}$ の実超曲面とする. このとき immersion $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ により, M 上に概接触計量構造 (Φ, ξ, η, g) が定まる.

以下, M を $\mathbf{C}^{2n}$ の複素超曲面とし, (J, G, H, u, v, U, V, g) を Theorem 5.2. で定まる M 上の複素概接触計量構造とする. このとき, 講演者は以下の命題を示した.

Proposition 5.4. [3] $X, Y \in TM$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\nabla_X G)Y &= -u(Y)AX + v(Y)JAX + g(AX, Y)U - g(JAX, Y)V, \\ (\nabla_X H)Y &= -u(Y)JAX - v(Y)AX + g(AX, Y)V + g(JAX, Y)U. \end{aligned}$$

Proposition 5.5. [3] $\nabla G, \nabla H$ は計量 g に関して skew-symmetric である.

Proposition 5.6. [3] 式 (4) における 1 形式 s は, 以下の関係式を満たす.

$$s(X) = -\sigma(X) = g(\nabla_X V, U) \quad (X \in TM)$$

6 今後の課題

今後は Theorem 5.2. で構成した複素概接触計量多様体と normality の関係を調べていく. まず, Ishihara-Konishi の結果を紹介する.

Proposition 6.1. [5] M 上の複素接触計量構造 (J, G, H, u, v, U, V, g) が normality を満たせば, (M, J, g) は Kähler 多様体になる.

しかし複素接触計量構造をもった Kähler 多様体が, normality を持つかどうかは不明である. そこで Theorem 5.2. で構成した複素概接触計量構造をもった複素超曲面は, Kähler 多様体であることを利用して, これが複素接触計量構造および normality の定義を満たすための条件を考える. まず 5 章で紹介した命題を用いることで, Definition 2.3. および式 (1), (2) は shape operator A を用いた式に書き直される. これは複素 (概) 接触計量構造 (J, G, H, u, v, U, V, g) の定義式が, 複素超曲面の満たすべき条件式に書き直されたことを意味する. 本講演では, これらの条件についても触れる.

参考文献

- [1] C. Baikoussis, D. Blair and F. Gouli-Andreou, *Holomorphic Legendre curves in the complex Heisenberg group*, Bull. inst math. Acad. Sinica, **26** (1998), 179-194.
- [2] D. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, second edition, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, 2010.
- [3] M. Imada, *Complex contact metric structures on complex hypersurfaces of $\mathbf{C}^{2n}$* , in preparation.
- [4] M. Imada, *Construction of complex contact manifolds via reduction*, to appear in Tokyo J. Math..
- [5] S. Ishihara and M. Konishi, *Complex almost contact manifolds*, Kōdai Math. J., **3** (1980), 385-396.
- [6] S. Kobayashi, *Remarks on complex contact manifolds*, Proc. Amer. math. Soc., **10** (1959), 164-167.
- [7] B. Smyth, *Geometry of complex hypersurfaces*, Ann. of Math., **85** (1967), 244-266.
- [8] Y. Tashiro, *On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I.*, Tôhoku Math. J., **15** (1963), 62-78.

On the modified Futaki invariant of complete intersections in projective spaces

高橋 良輔 (名古屋大学 多元数理科学研究科)*

1. 導入

コンパクト複素多様体 M 上の Kähler 計量 ω が **Kähler-Einstein** (KE) 計量であるとは、ある定数 c が存在して、関係式 $\text{Ric}(\omega) = c\omega$ を満たすことである。 c は計量を正規化することで $c = -1, 0, 1$ として構わない。 KE 計量が存在するためには、 $c_1(M)$ がそれぞれ負定値、零、正定値の実 $(1, 1)$ 型の形式で代表される必要がある。 この条件を単に $c_1(M) < 0$, $c_1(M) = 0$, $c_1(M) > 0$ と表すことにする。 M が Riemann 面のとき、 KE 計量の存在は古典的な一意化定理から従う。 M が高次元のときは、 $c_1(M) \leq 0$ であれば KE 計量はただ 1 つ存在することが、 Aubin, Yau によって証明された。 M が Fano 多様体 (すなわち、 $c_1(M) > 0$) の場合は、二木不変量と呼ばれる KE 計量が存在するための障害と、二木不変量が消えないような具体例がいくつか構成されている。近年の研究によって、KE 計量の存在は“K-安定性”と呼ばれる幾何学的不変式論的安定性と同値であることが Chen-Donaldson-Sun, Tian によって証明された。

本講演では、**Kähler-Ricci soliton** (KS) の存在問題について考える。 Fano 多様体 M 上の Kähler 計量 ω と正則ベクトル場 V の対 (ω, V) は、関係式 $\text{Ric}(\omega) - \omega = L_V \omega$ を満たすとき、KS であると言う。 KS は Kähler-Ricci flow と呼ばれる Kähler 計量 ω_t に関する時間発展方程式：

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\text{Ric}(\omega_t) + \omega_t \\ \omega_0 \in c_1(M) \end{cases}$$

の自己相似解として自然に考えうる計量であり、KE 計量の一般化を与えている。 また、KS を研究することは次の 2 つの理由で重要である：

(1) KS の候補となるベクトル場 V は M の正則構造から一意的に決まる。したがって、KS は KE 計量が存在するための障害である [5]。

(2) Kähler-Ricci flow は時間大域解をもつ [2]。さらに、この解は適当な仮定のもとで、KS に Cheeger-Gromov 収束する [6]。

KS に対しては二木型の障害 (**modified** 二木不変量と呼ぶことにする) は構成されてはいたものの [5]、つい昨今まで幾何学的不変式論的安定性の概念は存在しなかった。2014 年、Berman-Nyström は modified 二木不変量を対数端末特異点をもつ Fano 多様体に対して一般化することで、KS に対する K-安定性の概念を導入した [1]。

2. 基本事項

2.1. modified 二木不変量

M を n 次元正規 $\mathbb{Q}$ -Fano 多様体とする。簡単のため、 M は次の条件を満たしているものと仮定する：

1. M は射影多様体 N のコンパクトな部分多様体である。
2. ある整数 k と N 上の豊富な直線束 L が存在して、 M の regular part M_{reg} 上で、同型

$$L|_{M_{\text{reg}}} \simeq -kK_{M_{\text{reg}}} \quad (1)$$

が成り立つ。

本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:25-3077) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 53C25

キーワード: Kähler-Ricci soliton, complete intersection

*〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学 多元数理科学研究科

e-mail: m11036a@math.nagoya-u.ac.jp

3. Lie 群 $G := \text{Aut}(M)$ が (N, L) に同型 (1) が G -同変になるように作用する.

特に, 小平埋め込みは上の条件をすべて満たしていることに注意しておく.

定義 1. $-K_{M_{\text{reg}}}$ 上の Hermite 計量 h が *admissible* であるとは, h^k が同型 (1) のもとで L 上の滑らかな Hermite 計量に拡張できることである.

h を $-K_{M_{\text{reg}}}$ 上の *admissible* な Hermite 計量とし, $\omega := -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log h$ とおく. このとき, $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ 上の関数 $\mathcal{F}$ を関係式

$$\mathcal{F}(V) = -\frac{1}{c_1(M)^n} \int_M e^{\mu_{h,V}} \omega^n \quad (2)$$

で定め, さらに, modified 二木不変量 Fut_V を

$$\text{Fut}_V(W) = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{F}(V + tW) \right|_{t=0} = -\frac{1}{c_1(M)^n} \int_M \mu_{h,W} e^{\mu_{h,V}} \omega^n \quad (3)$$

で定める. ただし, $\mu_{h,V}$ は正則ポテンシャルを表す. また, h は *admissible* なので, (2), (3) の積分は有限であることに注意しておく.

M が対数端末特異点をもつ場合は, 次のように代数的に定義することも可能である: V を M 上の正則ベクトル場でトーラス作用を生成すると仮定する. このとき, レベル k の関数 $\mathcal{F}$ の量子化 $\mathcal{F}_k(V)$ を

$$\mathcal{F}_k(V) = -k \sum_{i=1}^{N_k} \exp(v_i^{(k)}/k) \quad (4)$$

により定める. ここで, $N_k := \dim(H^0(M, -kK_M))$, $(v_i^{(k)})$ は $\text{Re}(V)$ の生成する無限小作用の固有値とする. さらに, W を $\mathbb{C}^*$ -作用を生成する M 上の正則ベクトル場とし, レベル k の modified 二木不変量 $\text{Fut}_{V,k}(W)$ を

$$\text{Fut}_{V,k}(W) := -\sum_{i=1}^{N_k} \exp(v_i^{(k)}/k) w_i^{(k)} \quad (5)$$

と定める. ここで, $(v_i^{(k)})$, $(w_i^{(k)})$ はそれぞれ $\text{Re}(V)$, $\text{Re}(W)$ の生成する無限小作用の固有値である. 一般論により, $k \rightarrow \infty$ のとき, N_k は高々 k^n の増大度, $\mathcal{F}_k(V)$ および $\text{Fut}_{V,k}(W)$ は高々 k^{n+1} の増大度をもつことが知られている (M が滑らかであれば, これは同変 Riemann-Roch の定理を用いて証明することもできる). そこで, 我々は

$$\mathcal{F}(V) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{F}_k(V)}{kN_k}, \quad (6)$$

$$\text{Fut}_V(W) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Fut}_{V,k}(W)}{kN_k} \quad (7)$$

により, 関数 $\mathcal{F}$ および modified 二木不変量 Fut_V を定める. これらの定義は先に積分不変量として与えた定義と一致する.

2.2. テスト配位

代数多様体 M に代数群 G の作用 $G \curvearrowright M$ があつたとする. このとき, 我々は商空間 M/G を構成したい. しかし, M は滑らかとは限らないし, G -作用は一般には自由ではないため, M/G が性質のよい空間 (例えば Hausdorff 分離公理を満たす空間) として定義できる保証はない. Mumford のアイデアは, M/G を射影代数多様体 $M/G := \text{Proj} A^G$ として定義するというものであつた. ここで, A は M 上の関数全体の成す代数であり, A^G はその G -不変な元全体の成す部分代数である. この構成は非常にシンプルだが, むしのそのために射影 $M \dashrightarrow M/G$ を理解することが困難となる. この射影は一般には有理写像であり, 任意の G -不変関数 f に対して $f(x) = 0$ であるような点 $x \in M$ では, この写像は定義できない. そこでこのような点

(unstable な点) をすべて排除し, semistable な点だけからなる集合 M_{ss} を考えることで, 射影 $M_{ss} \rightarrow M/G$ は自然な意味で定義される. このような理論は幾何学的不変式論 (GIT) と呼ばれる. 以上はすべて有限次元の枠組みの中での話であるが, 実は, KE 計量 (あるいは KS) の存在問題は無限次元版の幾何学的不変式論 (GIT) による形式的な解釈が存在する (詳しくは, [3] を参照されたい).

さて, M を Fano 多様体, V を M 上のトーラス作用を生成する正則ベクトル場とする.

定義 2. 対 (M, V) に対するテスト配位 $\mathcal{T}$ とは,

- 平坦なスキームの射 $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$.
- $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ への同変 $\mathbb{C}^*$ -作用 ρ , ここで, 底空間 $\mathbb{C}$ への作用はスカラー積により定義されるものとする.
- $\mathcal{M}$ 上の正則ベクトル場 $\mathcal{V}$.

から成るもので, さらに条件

1. $\mathcal{M}$ の各ファイバーは対数端末特異点をもつ正規 $\mathbb{Q}$ -Fano 多様体.
2. generic ファイバー (M_1, V_1) ($1 \in \mathbb{C}$ 上のファイバー) は, (M, V) に同型である.
3. ベクトル場 $\mathcal{V}$ は, $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ の各ファイバーを保存する.

このとき, ρ 作用によって, ファイバー (M_t, V_t) ($t \neq 0$) は, すべて generic ファイバー (M_1, V_1) に同型となる. 一方で, 中心ファイバー (M_0, V_0) は一般に特異をもつ. また, ρ は自然に中心ファイバー (M_0, V_0) への $\mathbb{C}^*$ -作用を定める. ρ の無限小生成ベクトル場を $\mathcal{W}$ とすると, $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ は共に中心ファイバーに接するベクトル場であり, 従って M_0 への制限 $V_0 := \mathcal{V}|_{M_0}$, $W_0 := \mathcal{W}|_{M_0}$ が定義される. テスト配位 $\mathcal{T}$ の最も簡単な具体例は, $\mathcal{M} = M \times \mathbb{C}$ で, ρ を M 第 2 因子へのスカラー積により定める場合である. このような $\mathcal{T}$ を積テスト配位と呼ぶ.

定義 3. 対 (M, V) は次の条件を満たすとき, K -polystable であるという:

1. 対 (M, V) の任意のテスト配位 $\mathcal{T}$ に対して, $\text{Fut}_{V_0}(W_0) \geq 0$ が成り立つ.
2. 1 の等号成立は, $\mathcal{T}$ が積テスト配位のときに限る.

K -polystable の定義は, 有限次元 GIT における Hilbert-Mumford 判定法が元になっている. つまり, 安定性を示すためには, 1-パラメータ群でパラメトライズされた (M, V) の任意の変形族に対する数値判定を行えば十分である, ということを言っている.

定理 1 ([1], Theorem 1.5). (M, V) は KS を許容すれば, K -polystable である.

3. 主結果

KS に対する K -安定性の概念は導入されて日が浅いため, 研究手法はおろか, 計算例すらほとんど知られていない状態であった. そこで, 講演者は関数 $\mathcal{F}$ (従って, modified 二木不変量 Fut_V) を代数的に計算可能にする公式を構成した.

定理 2 ([4]). M を $\mathbb{C}P^N$ 内の Fano 完全交叉とし, M の定義式 (斉次多項式) を $F_1, \dots, F_s$, それぞれの次数を $d_1, \dots, d_s$ とおく. また, $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{i=0}^N |z^i|^2 \right)$ を $\mathbb{C}P^N$ の Fubini-Study 計量とする. $V \in \mathfrak{sl}(N+1, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}P^N$ 上の正則ベクトル場で, 適当な定数 α_i に対して関係式 $VF_i = \alpha_i F_i$ ($i = 1, \dots, s$) を満たすものとする. このとき, 関数 $\mathcal{F}$ は次の式で表される:

$$\mathcal{F}(V) = -\frac{(N-s)!}{d_1 \cdots d_s m^{N-s}} \exp \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i \right) \int_{\mathbb{C}P^N} \prod_{i=1}^s (d_i \omega + d_i \theta_V - \alpha_i) e^{m \theta_V} \cdot e^{m \omega}. \quad (8)$$

ただし, $m := N+1-d_1-\dots-d_s$ は定数, $\theta_V := V \log \left(\sum_{i=0}^N |z^i|^2 \right)$ は $\mathbb{C}P^N$ 上の関数である.

この公式は, 局所化定理や特異点解消を用いた計算とは異なり, 多様体の幾何学的データを一切必要とせず, また, 多様体がどのような種類の特異点をもっていたとしても, 代数的なデータのみを用いて画一的に計算ができるという点で優れていると考えられる.

参考文献

- [1] R. J. Berman and D. W. Nyström, *Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler-Ricci solitons*, arXiv:1401.8264.
- [2] H. D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds*, Invent. Math., **81** (1985), 359–372.
- [3] S. K. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology*, in ‘Fields Medallists’ Lectures’ (Atiyah, Iagolnitzer eds.), World Scientific, 1997, 384–403.
- [4] R. Takahashi, *On the modified Futaki invariant of complete intersections in projective spaces*, arXiv:1410.4891.
- [5] G. Tian and X. H. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Comm. Math. Helv., **77** (2002), 297–325.
- [6] G. Tian and X. H. Zhu, *Convergence of Kähler-Ricci flow*, J. Amer. Math. Soc., **20** (2007), 675–699.

リーマン面からの調和写像の収束について

お茶の水女子大学創成科学研究科 博士課程1年

小塚菜美

0 はじめに

本講演ではリーマン面からの調和写像の存在定理について発表する。[2] によれば、次のことが成り立つ。

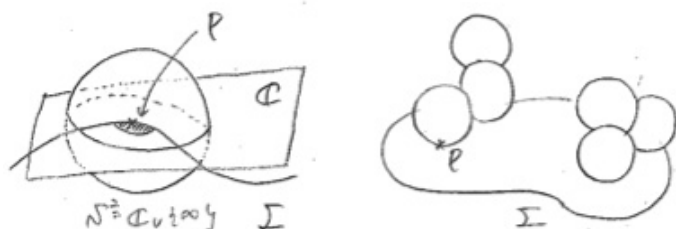
主定理. Σ をコンパクトリーマン面、 N をコンパクトリーマン多様体とする。
このとき $\varphi \in C^0 \cap H^{1,2}(\Sigma, N)$ に対し、調和写像 $u: \Sigma \rightarrow N$ で φ とホモトピックなものが存在するかあるいは、非自明で等角な調和写像 $v: S^2 \rightarrow N$ が存在する。

ここで調和写像は、リーマン多様体の間の写像 $f: (M, \gamma) \rightarrow (N, g)$ に対して定義されるエネルギー汎関数 $E(f) := \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 dM$ の臨界点として定義される。調和写像の例としては、曲線の長さの臨界点である測地線 (M が S^1 の場合) や表面積の臨界点である極小曲面 (M の次元が2の場合の平均曲率0の曲面) などがあげられる。

このように調和写像を多様体の間の性質のよい写像と考えることができるので、与えられた写像のホモトピー類に調和写像は存在するかという問題は基本的である。一般には調和写像が存在しないホモトピー類もあるが、次のような場合には調和写像が存在することが知られている。

- (1) 値域の多様体 N が負曲率を持つとき
- (2) $\dim M = 2$ かつ $\pi_2(N) = 0$ であるとき

また (2) の場合は $\pi_2(N) \neq 0$ であるときでもバブリング現象を考慮し $\pi_2(N)$ を代表する調和写像を付け加えることで、そのホモトピー類の代表元をとることができる。ここで調和写像のバブリング付き収束とは、写像が収束しない点 P が存在するとき適当にスケールリングすることでその点でも収束するような写像 (バブル) を付け加えて収束を考えることである (図1 参照)。これが上記主定理の主張である。



(図1) バブリングのイメージ

[2] ではこのバブリング付き調和写像の存在を示すために、局所的にエネルギー最小な写像列 u_n の構成を考えている。この写像列の極限が調和写像になることの議論が難点であるが、著者の Palais-Smale 条件による証明を私は正当化することができなかったので、少し異なる方法で証明した。本講演ではこの主定理の証明を行う。

1 準備

定義 1.1. $(M, \gamma), (N, g)$ をリーマン多様体とする。

$f : M \rightarrow N$ のエネルギー密度 $e(f)$ とエネルギー $E(f)$ を次のように定義する。

$$e(f) := \frac{1}{2} \|df\|^2 = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(f(x)) \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^j(x)}{\partial x^\beta}$$

$$E(f) := \int_M e(f) dM$$

このエネルギーの臨界点、すなわち次のオイラーラグランジュ方程式の解を調和写像という。

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^i) + \gamma^{\alpha\beta}(x) \Gamma_{jk}^i(f(x)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f^j \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^k = 0$$

注意 1.1.

- オイラーラグランジュ方程式は楕円型二階偏微分方程式であり、特にユークリッド空間の場合はラプラシアン $\Delta = 0$ と一致する。
- また [1] より、連続かつ $H^{1,2}$ 写像であれば滑らかな調和写像になる。特に $\dim M = 2$ のときは、連続でなくても滑らかな調和写像になる。

定義 1.2. (ソボレフ空間)

ナッシュの埋め込み定理 [3] と写像の連続性より、局所座標が次の $\mathbb{R}^n$ ソボレフ空間の定義を満たすときにリーマン多様体間のソボレフ空間を定義する。:

自然数 k と $1 \leq p < \infty$ と $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: 開集合に対し、

$$H^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq k : D_\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

$$\|f\|_{H^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D_\alpha f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

注意 1.2. $H^{k,p}$ はバナッハ空間であり、特に $H^{1,2}$ はヒルベルト空間となる。

定理 1.1. (ディリクレ解の存在と一意性¹⁾)

Σ をコンパクトリーマン面、 $D \subset \Sigma$ を円盤、 N を完備リーマン多様体とし、 $r > 0$ は十分小さいとする。このとき $\varphi \in C^0 \cap H^{1,2}(D, B(p, r))$ に対し

$$h = \varphi \quad (\partial D \text{ 上})$$

を満たす写像の中で、エネルギー最小な写像 $h \in H^{1,2}(D, B(p, r))$ が存在する²⁾。

また h_1, h_2 が同じ境界値に対するディリクレ解であるとき、

$$h_1 = h_2 \quad \text{が成り立つ。}$$

2 証明のメインアイデア

φ から始まる写像のエネルギー減少列 u_n を構成する。 Σ をディスク $B(x_n, r_n)$ で被覆し $u_n(B(x_n, r_n))$ が N の測地球に入るような半径 r_n を選ぶと、測地球 $B(x_n, r_n)$ 内で調和写像のディリクレ問題が解けるので、その上で u_n を取り替えたものを u_{n+1} とする。

この写像列の極限が、調和写像になることを示す。一般に内点における調和写像の収束は知られているためディスクの内点では調和写像に収束することが従うが、境界での極限が調和写像になるかどうかは問題になる。次の二つの場合が考えられる。

1. $\inf_{n \in \mathbb{N}} r_n > R \neq 0$ のとき

2. $\inf_{n \in \mathbb{N}} r_n = 0$ のとき

1. のときは、 u_n の極限がある調和写像に一樣収束する。 $p \in \Sigma$ を一点固定し、 p を含む近傍 $B(p, \frac{R}{2})$ における収束を示す。 u_n が収束する部分列 u_{n_i} で、 $B(p, \frac{R}{2})$ を含むようなディスク $B(x_{n_i}, r_{n_i})$ が存在するものをとる。部分列 u_{n_i} と $u_{(n-1)_i}$ の極限が一致することを示せばよい。二つの部分列の極限を u_∞^1 と u_∞ とする。

ここで著者の Palais-Smale 条件による証明の代わりに次の補題を示して、以下のように証明を完成させた。

補題. エネルギー最小な写像 $h_n : \Sigma \supset B(x_n, r_n) \rightarrow N$ が h に $H^{1,2}$ 弱収束、境界で一樣収束しているとする。このとき、 $\inf_{n \in \mathbb{N}} r_n \neq 0$ が成り立つならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(h_n) = E(h)$ が成り立つ。

この補題が成り立てば、エネルギー下半連続性から u_∞ と u_∞^1 のエネルギーが等しくなるので特に u_∞ と u_∞^1 はディスクの境界値に対してエネルギー最小となる。従って調和写像になることがわかる。境界値に対する調和写像の一意性 [4] より $u_\infty = u_\infty^1$ が成り立つので、 u_n はディスクの境界でも調和写像に収束することがわかる。

また 2. のときはバブリングが起きる。すなわち r_n を適当に正規化し直しと同様の議論を行うことで、 S^2 からの等角調和写像に収束することを示すことができる。

参考文献

- [1] F.Hélein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne. C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 312 (1991), 591-596
- [2] J.Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer, (2000)
- [3] John Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, Annals of Mathematics 63 (1956), 20-63
- [4] W.Jäger and H.Kaul. Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields. Man. math. 28 (1979), 269-291

¹一意性は [4] を参照。

²厳密には κ を N の断面曲率の上界、 i_0 を N の単射半径、 $p \in N$ とするとき、 $0 < r < \min(\frac{i_0}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}})$ ならば $\min\{E(h) : h \in H^{1,2}(D, B(p, r)), h - \bar{g} \in H_0^{1,2}(D, B(p, r))\}$ を実現する写像 h がただ 1 つ存在する。

3次元 Lorentz 空間内の空間的な離散平均曲率一定曲面 の構成について*

緒方 勇太

1 Introduction

「平均曲率一定曲面 (CMC 曲面)」はシャボン玉の数学的モデルであり、CMC 曲面の構成方法の研究は古くから行われてきた。1866 年に、K. T. Weierstrass により $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定零曲面 (極小曲面) に対して、積分型の公式 (「Weierstrass の表現公式」) が与えられた。また、 $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率がゼロでない一定曲面に関しては、J. Dorfmeister 氏と F. Pedit 氏、H. Wu 氏によって、行列分解などを用いた構成理論が考案された。([3]) この構成法は「DPW 法」と呼ばれ、近年では $\mathbb{R}^3$ だけではなく、さまざまなリーマン空間形やセミ・リーマン空間形内の CMC 曲面の構成のために応用されている。

一方、可積分系理論に立脚した曲面の離散化は、A. I. Bobenko 氏と U. Pinkall 氏 ([1],[2]) の研究を契機に急速な発展を遂げている。[1],[2] では双等温曲面と呼ばれる、共形かつ曲率線座標を持つ曲面の離散化が行われた。なめらかな場合、双等温曲面の特別なクラスとして CMC 曲面が含まれており、非常に豊かな研究対象として古くから研究が盛んに行われてきた。双等温曲面は、無限小の正方形の貼り合わせとして解釈することができ、このことに注目し、[1],[2] では、 $\mathbb{R}^3$ 内の双等温曲面の特徴付けを「複比」を用いて行い、その性質をもとに双等温曲面の離散化を行った。また、[1],[2] では、「双対曲面」というものを定義し、離散極小曲面を構成した。その後、T. Hoffmann 氏は $\mathbb{R}^3$ 内の離散平均曲率一定曲面の構成理論として「離散 DPW 法」を考案し、いくつかの離散 CMC 曲面の例を構成した。([4],[5]) 本講演では、この離散 DPW 法が 3次元 Lorentz 空間と呼ばれる、正定値とは限らない計量を持つ空間内でも応用できることを報告する。([6])

2 Notations

はじめに、3次元 Lorentz 空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ を以下の Lorentz 計量をもつ 3次元空間として定義する：

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_0 y_0 \quad \text{for } x = (x_1, x_2, x_0), y = (y_1, y_2, y_0) \in \mathbb{R}^{2,1}.$$

このとき、 $\mathbb{R}^{2,1}$ は以下のように行列群と同一視される：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2,1} & \longrightarrow & su_{1,1} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x = (x_1, x_2, x_0) & \longmapsto & \begin{pmatrix} ix_0 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -ix_0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

ここからは離散微分幾何に関わるいくつかの定義を紹介する。「空間的な CMC 曲面」も含むより広い曲面のクラスとして、空間的な双等温曲面がある。ここでは、空間的な双等温曲面の離散化のために、行列に対する「複比」を定義する。

*この研究は、安本真士氏 (神戸大学) との共同研究 ([6]) によるものである。

Definition 2.1 ([7]). X_1, X_2, X_3, X_4 を $su_{1,1} \approx \mathbb{R}^{2,1}$ 内の 4 点とする。そのとき、

$$\text{cr}(X_1, X_2, X_3, X_4) := (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)^{-1}(X_3 - X_4)(X_4 - X_1)^{-1}$$

を X_1, X_2, X_3, X_4 に対する複比と呼ぶ。

この複比を使って、ここでは「空間的な双等温曲面」の離散化を以下で与える：

Definition 2.2 ([7]). $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ が

$$\text{cr}(f_{m,n}, f_{m+1,n}, f_{m+1,n+1}, f_{m,n+1}) = -\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} I \quad \text{for all } (m, n) \in \mathbb{Z}^2$$

をみたすとき、 f を空間的な離散双等温曲面と呼ぶ。ただし、 $\alpha_m, \beta_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を m または n のみに依存する関数とする。

また、主定理 Theorem 4.1 で必要になる「離散正則関数」も複比を用いて定義される。

Definition 2.3 ([4], [5], [7]). $\mathcal{Z} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ が

$$\text{cr}(\mathcal{Z}_{m,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n+1}, \mathcal{Z}_{m,n+1}) = -\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} \quad \text{for all } (m, n) \in \mathbb{Z}^2$$

をみたすとき、 $\mathcal{Z}$ を離散正則関数と呼ぶ。ただし、 α_m, β_n は Definition 2.2 と同様。

そして、「双対曲面」を定義することで「空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面」を定義する。

Definition 2.4 ([7]). $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ を空間的な離散双等温曲面とする。そのとき、 f の双対曲面 f^* を、以下の差分方程式を満たすものとして定義する：

$$f_{m+1,n}^* - f_{m,n}^* = \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{f_{m+1,n} - f_{m,n}}{\langle f_{m+1,n} - f_{m,n}, f_{m+1,n} - f_{m,n} \rangle}, \quad f_{m,n+1}^* - f_{m,n}^* = -\frac{1}{\beta_m^2} \frac{f_{m,n+1} - f_{m,n}}{\langle f_{m,n+1} - f_{m,n}, f_{m,n+1} - f_{m,n} \rangle}.$$

Definition 2.5 ([7]). 空間的な離散双等温曲面 $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ の双対曲面 f^* が以下を満たすとき：

$$\langle f_{m,n} - f_{m,n}^*, f_{m,n} - f_{m,n}^* \rangle = -\frac{1}{H^2}$$

f を空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面とよぶ。

3 Result 1(離散的な場合の行列分解)

DPW 法において、一つの重要な役割を果たすのが「Birkhoff 分解」と「Iwasawa 分解」と呼ばれる 2 つの行列分解である。なめらかな場合、これらの分解は「ループ群」というリー群に対して行われるのだが、離散の場合は異なり、「射影的ループ群」という行列群を用いる。まず、ループ群 $\text{ASL}_2(\mathbb{C})$ の射影的ループ群 $\text{PASL}_2(\mathbb{C})$ を紹介する。([4],[5])

Definition 3.1 ([4],[5]). $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ と $\lambda_1 \in i\mathbb{R} \setminus \{\pm i\}$ に対し、2 次行列の集合 $\text{PASL}_2(\mathbb{C})$ を以下の条件で定義する： $C(\lambda) \in \text{PASL}_2(\mathbb{C})$ であるとは、

1. $C(\lambda)$ は λ に関するローラン多項式.
2. $C(\lambda)$ は *twisted* である： $C(-\lambda) = \sigma_3 C(\lambda) \sigma_3$.
3. $\det(C(\lambda)) = (1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2})^i (1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2})^j (1 - \lambda_0^2 \lambda^2)^k (1 - \lambda_1^2 \lambda^2)^l$ for some $i, j, k, l \in \mathbb{N}$.

ただし、 $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

ここで、 $\text{PASL}_2(\mathbb{C})$ に対する「離散 Birkhoff 分解」を紹介する。

Proposition 3.1 ([4], [5]). $C \in \text{PASL}_2(\mathbb{C})$ とする。そのとき、以下の条件をみたす行列 X , $\tilde{C} \in \text{PASL}_2(\mathbb{C})$ が存在する：

$$C = X\tilde{C}, \quad X(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} I, \quad \det(\tilde{C}(\lambda)) = \frac{\det(C(\lambda))}{1 - \frac{\lambda_l^2}{\lambda^2}}.$$

ただし、 $l = 0$ or 1 .

さらに、主定理 Theorem 4.1 でも必要になり、今回新たに構成した行列分解を紹介する。

Theorem 3.1.

$$L_{l,m,n}^-(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p_{l,m,n}}{\lambda} \\ \frac{\lambda_l^2}{p_{l,m,n}\lambda} & 1 \end{pmatrix} \quad (l = 0, 1)$$

とする。そのとき、以下を満たす行列 $L_{l,m,n}(\lambda)$ が符号の違いを除いてただ一つ存在する：

1. $L_{l,m,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{l,m,n} & \lambda b_{l,m,n} - \frac{1}{\lambda b_{l,m,n}} \\ \frac{\bar{b}_{l,m,n}}{\lambda} - \frac{\lambda}{\bar{b}_{l,m,n}} & \bar{a}_{l,m,n} \end{pmatrix}$
2. $\left(L_{l,m,n}^-(\lambda_l)\right)^{-1} \cdot L_{l,m,n}(\lambda_l) = \mathbf{0}$
3. $\det(L_{l,m,n}(\lambda)) = \frac{\pm 1}{|\lambda_l|^2} \left(1 - \frac{\lambda_l^2}{\lambda^2}\right) (1 - \lambda_l^2 \lambda^2)$

4 Result 2($\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面の構成法)

ここでは、 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面に対する「離散 DPW 法」について結果のみを述べる。詳細は、講演当日に説明する。(詳しくは [6])

Theorem 4.1. 空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面 $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ は以下の Steps 1~4 で構成される：

Step 1: $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ と $\lambda_1 \in i\mathbb{R} \setminus \{\pm i\}$ を一つずつ選ぶ。 $\mathcal{Z} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を離散正則関数とし、 $\text{cr}(\mathcal{Z}_{m,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n+1}, \mathcal{Z}_{m,n+1}) = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}$ とする。さらに、 $L_{m,n}^-$ と $M_{m,n}^-$ を以下で定義する：

$$L_{m,n}^- = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p_{m,n}}{\lambda} \\ \frac{\lambda_0^2}{\lambda p_{m,n}} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{m,n}^- = \begin{pmatrix} 1 & \frac{q_{m,n}}{\lambda} \\ \frac{\lambda_1^2}{\lambda q_{m,n}} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

for $p_{m,n} := \mathcal{Z}_{m+1,n} - \mathcal{Z}_{m,n}$ and $q_{m,n} := \mathcal{Z}_{m,n+1} - \mathcal{Z}_{m,n}$.

Step 2: 次の差分方程式を解く：

$$\begin{cases} \phi_{m+1,n} = \phi_{m,n} L_{m,n}^- \\ \phi_{m,n+1} = \phi_{m,n} M_{m,n}^- \end{cases} \quad (4.2)$$

ただし、初期条件は $\phi_{0,0} = I$.

Step 3: Result 1 の 2 つの行列分解を施して、 $\phi_{m,n}$ を分解する：

$$\phi_{m,n} = F_{m,n} B_{m,n} \quad (4.3)$$

Step 4: $F_{m,n}$ を以下の Sym-Bobenko 型の公式に代入すると、曲面 $f_{m,n}$ が得られる：

$$f_{m,n} = \text{Sym}(F_{m,n}) = \text{Im} \left[\frac{1}{2} F_{m,n} i \sigma_3 F_{m,n}^{-1} + i \lambda (\partial_\lambda F_{m,n}) F_{m,n}^{-1} \right] \Big|_{\lambda=1}, \quad (4.4)$$

where

$$\text{Im} : \begin{pmatrix} a + ib & c - id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ib & c - id \\ c + id & -ib \end{pmatrix}.$$

5 Examples

ここでは、離散 DPW 法を用いて構成した空間的な離散 CMC 曲面の新しい例を一つ紹介する。講演当日は、より多くのグラフィックスをお見せしたい。

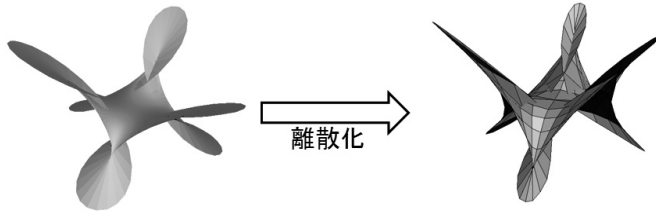


Fig. 1: Smyth 曲面と呼ばれる曲面の離散化

Bibliography

- [1] A. I. Bobenko and U. Pinkall, *Discrete isothermic surfaces*, J. Reine Angew. Math., 475 (1996), 187-208.
- [2] A. I. Bobenko and U. Pinkall, *Discretization of surfaces and integrable systems*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16. Oxford. Univ. Press (1998). 3-58.
- [3] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6**(4) (1998), 633-668.
- [4] T. Hoffmann, *Discrete cmc surfaces and discrete holomorphic maps*, Discrete integrable geometry and physics (Vienna, 1996) , 83-96, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16, Oxford Univ. Press, New York, 1999.
- [5] T. Hoffmann, *Discrete curves and surfaces*, doctoral thesis, TU Berlin (2000).
- [6] Y. Ogata and M. Yasumoto, *The DPW method for constant mean curvature surfaces with singularities in Minkowski space*, in preparation.
- [7] M. Yasumoto, *Discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, submitted.

Pseudograph から構成されるスピントーリック多様体

畑中 美帆 (大阪市立大学 後期博士課程 2 年)

複素 n 次元のトーリック多様体とは、複素 n 次元の代数多様体で、複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ が効果的かつ代数的に作用し、この作用に関して稠密な開軌道を持つもののことである。同型を除いたトーリック多様体の族は扇という組合せ論の対象の族と全単射対応がある。さらに、Delzant polytope から扇を作り、トーリック多様体を構成することができる。

定義 1 $P \subset \mathbb{R}^n$ が Delzant polytope であるとは、以下の条件を満たす n 次元の単純凸多面体である。

P の各頂点に対して、それを含む全ての facets の facet vectors が $\mathbb{Z}^n$ の基底になっている。

facet vector とは、facet に垂直な内向きの primitive vector のことである。primitive vector とは $\mathbb{Z}^n$ 上のベクトルで、1 と -1 以外で割り切れないベクトルのことである。

この講演では多様体 M 上にスピン構造が入る時、 M をスピン多様体ということにする。従って、 M がスピン多様体になるための必要十分条件は第一と第二シュティーフエル - ホイットニー類がともに 0 になることである。このことから以下の命題が成り立つ。

命題 1 以下は同値である。

- (1) Delzant polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ から構成できるトーリック多様体にスピン構造が入る。
- (2) $\epsilon(\lambda(\mathbf{F})) = \{1\}$ を満たす、 $\mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{Z}_2$ への準同型写像 ϵ が存在する。ここで、 $\mathbf{F}$ は Delzant polytope の facets の集合とし、 λ は各 facet に facet vector を対応させる写像とする。

注意 1 この命題は、扇の underlying simplicial complex の実現がディスクであるようなトーリック多様体でも成立する。

一方で、多重辺やループを持ってもよいグラフを pseudograph という。有限な pseudograph から Delzant polytope または simple polyhedral cone (i.e, 頂点で n 個の facets が交わる polyhedral cone) を構成し ([1]), トーリック多様体に対応させることにより、スピントーリック多様体が構成できる pseudograph を特徴づけることができる。Pseudograph から Delzant polytope または simple polyhedral cone は以下のように構成する。

定義 2 G を有限 pseudograph とする。

- (1) G の proper 連結部分グラフが tube であるとは、頂点のどんなペアにも G に辺があれば、少なくとも 1 本の辺を含む。

- (2) tube G_t が G の頂点集合のある部分集合上の極大部分グラフ (i.e, G の induced subgraph) になっているとき, G_t は *full* であるという.
- (3) G のループでない 2 本の辺の端点のペアが同じである時, それら 2 本の辺は 1 つの *bundle* の中にあるという.

例 1 以下は tubes の例である. 右下の例のみ full でない tube である.

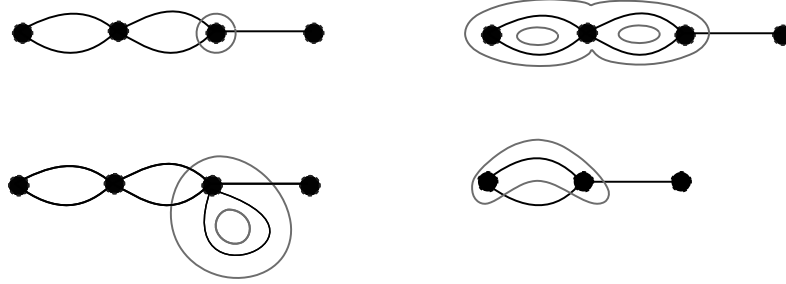


図 1 tubes

Pseudograph G の各 tube G_t に対して, 集合 S を次で定める (例 2, 図 3).

- (1) G_t の頂点が S の元.
- (2) G_t の辺とループが S の元.
- (3) G_t の辺を含まない G の bundles の中にある辺が S の元.
- (4) G_t のどの頂点にもくっついていないループが S の元.

この S を G_t のラベルという.

G を pseudograph とし, $n + 1$ 個の頂点と l 個のループを持つとする. $\{B_1, \dots, B_k\}$ を G の bundles の集合, b_i を bundle B_i の辺の数, Δ^s を s -単体, ρ を半直線とする.

$$\Sigma_G := \Delta^n \times \prod_{i=1}^k \Delta^{b_i-1} \times \rho^l$$

で定義し, 以下のように face をラベル付けする.

- (1) Δ^n の各 facet を G の各頂点と対応させる. Δ^n の各 face は, それを含むすべての facets に対応する G の頂点集合の部分集合と対応させる.
- (2) Δ^{b_i-1} の各頂点を bundle B_i の各辺と対応させる. Δ^{b_i-1} の各 face は, その face を張る頂点に対応する G の辺の集合と対応させる.
- (3) 各 ρ を G の各ループと対応させる.

この Σ_G をユークリッド空間に”うまく”配置する.

例 2 例えば, 図 2 のような pseudograph G を考える. Σ_G のラベルで, a は省略してある. この Σ_G を $\mathbb{R}^3$ に各 facet vector が以下になるように埋め込む.

$$1bc \rightarrow e_1, \quad 2bc \rightarrow e_2, \quad 3bc \rightarrow -e_1 - e_2, \quad 123b \rightarrow e_3, \quad 123c \rightarrow -e_3$$

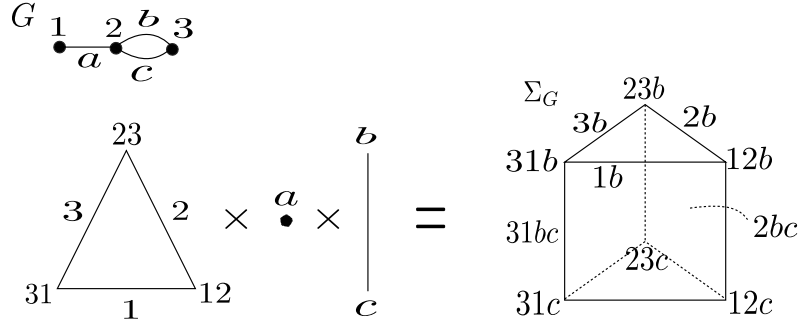


図2 Σ_G and labels of faces

Σ_G を次の2段階に分けてカットし, pseudograph associahedron KG をつくる.
 Full tubes のラベルと同じラベルを持つ Σ_G の faces を以下のようにカットする. カットする Σ_G の face F を $F_1 \cap \dots \cap F_k$ で表す. ここで各 F_i は Σ_G の facet である. この F を新しい facet vector が $F_1, \dots, F_k$ の facet vectors の和になるようにカットする. 次に, full でない tubes でラベル付けされた faces を, 小さい tube に対応する face から full tubes の時と同様にカットする.

命題 2 ([1]) G を pseudograph, KG を G から構成できる pseudograph associahedron とする. G がループを持たないとき KG は Delzant polytope, ループを持つとき KG は simple polyhedral cone になる. KG の facets は G の tubes と全単射対応がある.

これにより有限な pseudograph G から KG が構成され, 対応するトーリック多様体を $M(G)$ で表す.

例 3 例2の pseudograph G に対して, pseudograph associahedron KG をつくる. G のすべての tubes とそれらのラベルは図3のようになっている. 1行目は full tubes, 2行目は full でない tubes である. Full tubes でラベル付けされた faces をカットすると, 図4の左になる. さらに,

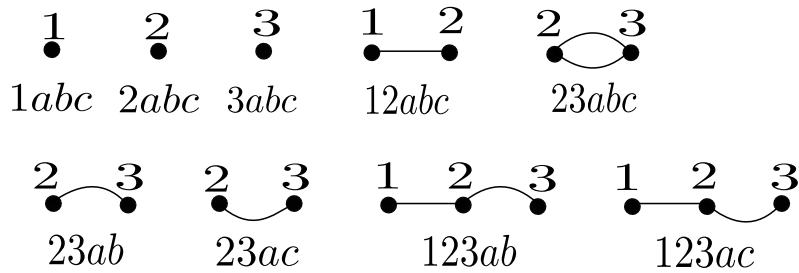


図3 tubes and corresponding labels

full でない tubes でラベル付けされた faces をカットすると図4の右になり, これが pseudograph associahedron KG である. 各 facet に対応する facet vector は以下のようにになっている. a は省

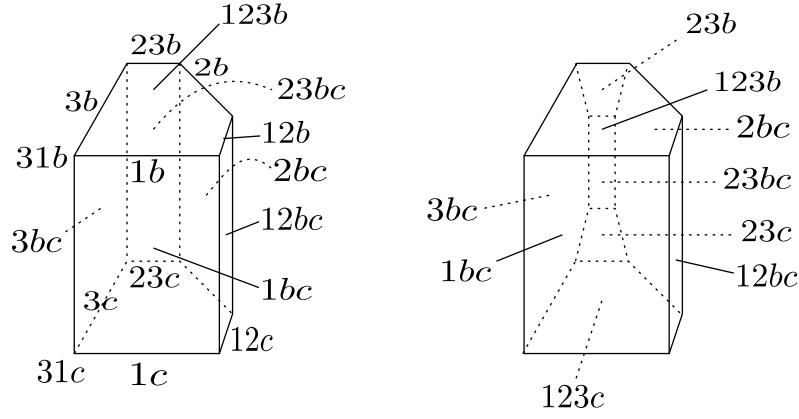


図 4 pseudograph associahedron

略してあることを思い出しておく．

$$\begin{aligned}
 1bc &\rightarrow e_1, & 2bc &\rightarrow e_2, & 3bc &\rightarrow -e_1 - e_2, & 12bc &\rightarrow e_1 + e_2, & 23bc &\rightarrow -e_1 \\
 23b &\rightarrow -e_1 + e_3, & 23c &\rightarrow -e_1 - e_3, & 123b &\rightarrow e_3, & 123c &\rightarrow -e_3
 \end{aligned}$$

定理 1 G を有限な pseudograph とする． $M(G)$ にスピンの構造が入る必要十分条件は， $M(G)$ が $\mathbb{C}P^{k-1}$ ($k : 1$ or even), $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}$ のどれかに微分同相になることである．さらに対応するグラフはそれぞれ k 個の頂点の非交和，2 点からなる連結な単純グラフ，2 個の頂点と 2 本の多重辺を持つ連結な pseudograph，1 点にループが 1 つついた pseudograph である．

参考文献

- [1] M. Carr and S. L. Devadoss and S. Forcey, *Pseudograph associahedra*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 118 (2011), 2035-2055.

位相的トーリック多様体上の 複素直線束の切断の有限次元性

鋤田 英也 (大阪市立大学)*

概 要

完備な扇に対応するトーリック多様体上の直線束の正則な大域切断のなす空間が有限次元であることはよく知られた事実である。一方、石田-福川-栢田は(コンパクトかつ非特異な)トーリック多様体の一般化として位相的トーリック多様体 [IFM13] を導入した。トーリック多様体が扇と一対一対応するように、全向き付けされた (ominioriented) 位相的トーリック多様体にも位相的扇と呼ばれる組合せ論的对象が一対一に対応する。位相的扇がある条件を満たす時に良い (nice) と呼ばれ、対応するものを良い (nice) 位相的トーリック多様体と呼ぶ ([Li12])。今回は良い位相的トーリック多様体に対し、適切な直線束と切断を考えることで、大域切断のなす空間が有限次元になることが分かったので以下で説明したいと思う。

1. 良い (nice) 位相的トーリック多様体と良い (nice) 位相的扇

位相的トーリック多様体は本来は位相的扇に関係なく定義されているものであるが、今回は簡単のため良い位相的扇をまず定義し、良い位相的扇に対応するものとして良い位相的トーリック多様体を導入する。大雑把に言うとも良い位相的扇とは完備単体的扇と非特異多重扇 [Mas99] の組である。正確には次のように定義する。

K を頂点集合 $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ 上の (有限) 単体複体とし、 $\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^m$ を整数ベクトルの対、ただし各 i に対して $b_i = (b_i^1, \dots, b_i^n), v_i = (v_i^1, \dots, v_i^n) \in \mathbb{Z}^n$ で、 $j = 1, \dots, n$ に対して $b_i^j \equiv v_i^j \pmod{2}$ とする。これらの組 $(K, \{(b_i, v_i)\}_{i=1}^m)$ が次の条件を満たすとき (n 次元) 良い位相的扇 と言い Δ で表すことにする。

- 任意の $I \in K$ に対して、 $\{b_i\}_{i \in I}$ は一次独立である。
- $\{v_i\}_{i \in I}$ は一次独立である。
- $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in K$ に対して、

$$\sigma_I := \{c_1 b_{i_1} + \dots + c_k b_{i_k} \mid c_j \geq 0 \quad \forall j\}$$

と定義すると、任意の単体 $I, J \in K$ に対して $\sigma_I \cap \sigma_J = \sigma_{I \cap J}$ である。

- $\bigcup_{I \in K} \sigma_I = \mathbb{R}^n$ (完備性)
- 任意の $I \in K$ に対して $\{v_i\}_{i \in I}$ は $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底の一部を成す (非特異性)

例えば $K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$, $(b_1, v_1) = (e_1, e_1), (b_2, v_2) = (e_2, e_2), (b_3, v_3) = (-e_1, -e_1 - 2e_2), (b_4, v_4) = (-e_1 - e_2, -e_1 - e_2)$ のとき以下の良い位相的扇が得られる。

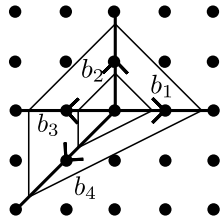


図 1: 完備単体的扇

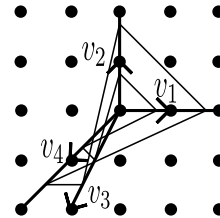


図 2: 非特異多重扇

* e-mail: hideya0813@gmail.com

良い位相的扇の情報を用いて、良い位相的トーリック多様体を次の商構成法 (quotient construction) で構成する。

まず $I \subset [m]$ に対して

$$U(I) := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i \neq 0 \quad \forall i \in I\}$$

$$U(K) := \bigcup_{I \in K} U(I)$$

と定義する。次に各 (b_i, v_i) に対して次の写像を考える。

$$\lambda_{(b_i, v_i)} : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \quad h_i \mapsto (h_i^{(b_i^1, v_i^1)}, \dots, h_i^{(b_i^n, v_i^n)})$$

ここで

$$h_i^{(b_i^j, v_i^j)} := h_i^{\frac{b_i^j + v_i^j}{2}} h_i^{\frac{b_i^j - v_i^j}{2}}$$

で定義する。 $b_i \equiv v_i \pmod{2}$ より指数は整数になることに注意。

この写像を座標ごとに掛ける合わせるにより次の全射群準同型 λ を定義する。

$$\lambda : (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \quad (h_1, \dots, h_m) \mapsto \prod_{i=1}^m \lambda_{(b_i, v_i)}(h_i)$$

$X(\Delta)$ を商空間

$$X(\Delta) := U(K)/\text{Ker} \lambda = \bigcup_{I \in K} U(I)/\text{Ker} \lambda$$

で定義し、これを良い位相的扇 Δ に付随する良い位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ という。

注意. 1 $X(\Delta)$ はコンパクトかつ非特異である。

注意. 2 各 i に対して $b_i = v_i$ ならば $X(\Delta)$ はトーリック多様体になる。

補題. 3 ([IFM13]Lemma.4.1) λ は全射である。また $n-1$ 次元単体 $I \in K$ に対して $\{(b_i, v_i)\}_{i \in I}$ の双対 $\{(c_i^I, u_i^I)\}_{i \in I} (c_i, u_i \in \mathbb{Z})$ を

$$\langle (c_i^I, u_i^I), (b_j, v_j) \rangle := \left(\sum_{i \in I} c_i^{I,k} b_j^k, \sum_{i \in I} u_i^{I,k} v_j^k \right) = \delta_{ji}(1, 1) \quad (\text{for } j \in I)$$

で定義すると、このとき $I \in K$ に対して $\text{Ker} \lambda$ は次の形で書ける。

$$\text{Ker} \lambda = \{(h_1, \dots, h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m \mid h_i \prod_{k \notin I} h_k^{\langle (c_i^I, u_i^I), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \text{for } \forall i \in I\}$$

■

以下、簡単のため $I = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。また適切な線形変換を行うことで一般性を失うことなく $\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^n = \{(e_i, e_i)\}_{i=1}^n$ として良い。ここで $e_1, \dots, e_n$ は標準基底を意味する。このとき、 $\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^n$ の双対 $\{(c_i^I, u_i^I)\}_{i=1}^n$ も $\{(e_i, e_i)\}_{i=1}^n$ となることに注意すると、 $\text{Ker} \lambda$ は次の形で書ける。

$$\begin{aligned} \text{Ker} \lambda &= \{(h_1, \dots, h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m \mid h_i \prod_{k=n+1}^m h_k^{\langle (c_i^I, u_i^I), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \text{for } \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \{(h_1, \dots, h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m \mid h_i \prod_{k=n+1}^m h_k^{(b_k^i, v_k^i)} = 1 \quad \text{for } \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \left\{ \left(\prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^1, v_k^1)}, \dots, \prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^n, v_k^n)}, h_{n+1}, \dots, h_m \right) \right\} \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n} = \{(h_{n+1}, \dots, h_m) \mid h_{n+1}, \dots, h_m \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

この同一視の下で $\text{Ker}\lambda \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}$ の1次元表現 α を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \text{Ker}\lambda &\cong (\mathbb{C}^*)^{m-n} \xrightarrow{\alpha} GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ (h_{n+1}, \dots, h_m) &\mapsto \prod_{k=n+1}^m h_k^{(x_k, y_k)} \quad (x_k, y_k \in \mathbb{Z}, x_k \equiv y_k \pmod{2}) \end{aligned}$$

注意. 4 α の表示は $n-1$ 単体 $I \in K$ の取り方に依存する. しかし別の $n-1$ 単体 $J \in K$ を用いても α は依然として $h_{i_k}, \bar{h}_{i_k}$ (i_k は $1, \dots, m$ の中の異なる $m-n$ 個の数字) のローラン単項式なので意味がある (well-defined).

2. 良い位相的トーリック多様体上の複素直線束

注意.4 より $\text{Ker}\lambda$ と $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$ の同一視を1章で議論したもの ($I = \{1, 2, \dots, m\}$) に固定して話を進める.

1節で定義した α に対して同伴直線束 L_α を以下で定義する.

$$L_\alpha := U(K) \times_{\text{Ker}\lambda} \mathbb{C}_\alpha \rightarrow X(\Delta)$$

ここで $\mathbb{C}_\alpha$ は α の表現空間である. また L_α の元は同値関係

$$[(z_1, \dots, z_m), v] = h \cdot [(z_1, \dots, z_m), v] := \left[\left(\prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^1, v_k^1)} z_1, \dots, \prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^n, v_k^n)} z_n, h_{n+1} z_{n+1}, \dots, h_m z_m, \alpha(h_{n+1}, \dots, h_m) v \right) \right]$$

による同値類である.

L_α に対して次の切断 s_f を考える.

$$\begin{aligned} s_f : X(\Delta) &\rightarrow U(K) \times_{\text{Ker}\lambda} \mathbb{C}_\alpha \\ (z_1, \dots, z_m) &\mapsto [(z_1, \dots, z_m), f(z_1, \dots, z_m)] \end{aligned}$$

ここで f は

$$\begin{aligned} f : U(K) &\rightarrow \mathbb{C}_\alpha \\ (z_1, \dots, z_m) &\mapsto \prod_{l=1}^m z_l^{(p_l, q_l)} \quad (p_l, q_l \in \mathbb{Z}, p_l \equiv q_l \pmod{2}, p_l \geq 0, p_l \geq |q_l|) \end{aligned}$$

で次の関係式を満たすもの.

$$\begin{aligned} f((h_{n+1}, \dots, h_m) \cdot (z_1, \dots, z_m)) &= \alpha(h_{n+1}, \dots, h_m) f(z_1, \dots, z_m) \\ \iff \\ f\left(\prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^1, v_k^1)} z_1, \dots, \prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^n, v_k^n)} z_n, h_{n+1} z_{n+1}, \dots, h_m z_m\right) &= \prod_{l=1}^m z_l^{(p_l, q_l)} f(z_1, \dots, z_m) \quad (*) \end{aligned}$$

注意. 5 条件 $p_l, q_l \in \mathbb{Z}, p_l \equiv q_l \pmod{2}, p_l \geq 0, p_l \geq |q_l|$ は各 z_l の指数部分が常に非負整数となるためのものである.

3. 主結果

命題. 6 (*) を満たす f は有限個, すなわち切断 s_f は有限個である.

証明の概略. f は単項式なので (*) を満たすことは, 両辺の $h_i, \bar{h}_i$ ($i = n, \dots, m+1$) の指数部分がそれぞれ等しいことを示せばよい. 実際に両辺を比較すると,

$$\left(\prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^1, u_k^1)} z_1 \right)^{(p_1, q_1)}, \dots, \left(\prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^n, v_k^n)} z_n \right)^{(p_n, q_n)}, (h_{n+1} z_{n+1})^{(p_{n+1}, q_{n+1})}, \dots, (h_m z_m)^{(p_m, q_m)} = \prod_{l=1}^m z_l^{(x_l, y_l)} f(z_1, \dots, z_m)$$

これを整理して変数 $h_{n+1}, \dots, h_m$ の指数部分を両辺比較すると,

$$-\langle p, b_k \rangle + p_k = x_k \quad \text{for } k = n+1, \dots, m$$

$$-\langle q, v_k \rangle + q_k = y_k \quad \text{for } k = n+1, \dots, m$$

ここで

$$p = (p_1, \dots, p_n), b_k = (b_k^1, \dots, b_k^n)$$

$$q = (q_1, \dots, q_n), v_k = (v_k^1, \dots, v_k^n)$$

である. また $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は通常の内積.

ただし

$$(h^{(b,v)})^{(p,q)} := h^{\langle (p,q), (b,v) \rangle}$$

で定義し, $\langle (p,q), (b,v) \rangle = (\sum_{i=1}^n p^i b^i, \sum_{i=1}^n q^i v^i)$ であったことに注意. $p_i \geq 0, p_i \geq |q_i|$ なので p_i の有限性が示せれば, q_i の有限性も自動的に示される. 以下, p_i を含む式のみに注目する. $p_i \geq 0$ より

$$p_k = x_k + \langle p, b_k \rangle \geq 0 \quad \text{for } k = n+1, \dots, m$$

従って

$$\langle p, b_k \rangle \geq -x_k \quad \text{for } k = n+1, \dots, m$$

さらに今 $b_1, \dots, b_n$ は標準基底で $p \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ より

$$\langle p, b_k \rangle \geq -x_k \quad \text{for } k = 1, \dots, m$$

ただし, $k = 1, \dots, n$ に対して $x_k = 0$ とする. このとき次が示せば良い.

補題. 7

$$P := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, b_k \rangle \geq -x_k \quad \text{for } k = 1, \dots, m\}$$

は有界.

この証明に関しては [[Ful93]P.67, Proposition] とほぼ同様なのでそちらを参照.

以上より $p_1, \dots, p_n$ が有限個である事が示せたので $p_{n+1}, \dots, p_m$ も有限個. 従って先ほどの考察より $q_1, \dots, q_m$ も有限個となる ■

$X(\Delta)$ 上の大域切断 s は s_f 達の線形結合であるから次を得る.

系. 8 良い位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ に対してその上の直線束 L_α を2章で定義したものとする, このとき大域切断 s の成す空間 $\Gamma(X(\Delta), L_\alpha)$ は有限次元である.

参考文献

- [Ful93] William Fulton. Introduction to toric varieties. No. 131. Princeton University Press, 1993.
- [IFM13] Hiroaki Ishida, Yukiko Fukukawa, and Mikiya Masuda. Topological toric manifolds. Mosc. Math. J., Vol. 13, No. 1, pp. 57–98, 189–190, 2013.
- [Li12] Yu Li. On transition functions of topological toric manifolds. Dal’nevost. Mat. Zh., Vol. 12, No. 1, pp. 35–47, 2012.
- [Mas99] Mikiya Masuda. Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index. 東北数学雑誌. Second series, Vol. 51, No. 2, pp. 237–265, 1999.

GKM理論を用いた同変ファイバー束の解析について

佐藤 敬志*

概要

今回の講演ではトーラスが作用している空間の同変コホモロジーを決定する強力な方法として GKM 理論を少し解説した後、良いファイバー束を GKM 理論的に解析する手法について述べる。その応用として例外型旗多様体 F_4/T の整係数同変コホモロジーを明示的に与える。

1 イン트로ダクション

G をコンパクトで連結な Lie 群とし、 T をその極大トーラスとする。等質空間 G/T は旗多様体であり、 T が左からの積で作用している。Goresky, Kottwitz, MacPherson [GKM] は G/T を含む良い空間のクラスに対してその $\mathbb{C}$ -係数同変コホモロジーを決定する強力な方法を与えた。

位相空間 X に群 Γ が作用しているとき、 X の同変コホモロジー $H_\Gamma^*(X)$ を $H^*(E\Gamma \times_\Gamma X)$ として定義する。ここで $E\Gamma$ は Γ の自由な作用を持つ弱可縮な空間とする。固定点集合 $(G/T)^T$ は G の Weyl 群 $W(G)$ と同一視できるので、包含 $i: (G/T)^T \rightarrow G/T$ は次の環準同型を誘導する

$$i^*: H_T^*(G/T) \rightarrow H_T^*((G/T)^T) = \prod_{W(G)} H^*(BT) = \text{Map}(W(G), H^*(BT)).$$

複素数係数の場合、この i^* 写像は localization theorem によって単射であることが分かる (cf. [H, Theorem (III.1)]). ゆえに i^* の像を求めれば複素数係数同変コホモロジー $H_T^*(G/T)$ が決定でき、GKM 理論はその像をなす元の条件を記述する。Guillemin と Zara による GKM 理論の主張の言い換え [GZ, Theorem 1.7.3] によると、 i^* の像は G から得られるグラフで完全に決定できる。特に G を単純でかつ C 型でないとすると、Harada, Henriques, Holm [HHH] は上の方法が整係数でも適用できることを示した。以下、全ての議論は整係数で行われている。

2 GKM 理論

R を環とする。辺に R の元が付随しているグラフ $\mathcal{G} = (V, E)$ に対して集合間の写像 $f: V \rightarrow R$ を考える。本稿でのグラフは多重辺を許す。 f がグラフ $\mathcal{G}$ 上の GKM 関数である

*t-sato@math.kyoto-u.ac.jp

とは、任意の辺 $e (= vv')$ に対し

$$f(v) - f(v') \in (\alpha(e)) \quad (2.1)$$

が成り立つときに言う。ここで $\alpha(e)$ は辺 e に付随した R の元、また $(x_1, \dots, x_n)$ は $x_1, \dots, x_n$ によって生成されるイデアルを表す。 G 上の GKM 関数全体の集合は $\text{Map}(V, R)$ の部分環をなす。和と積は各成分ごとのそれらで定義されることに注意。この部分環を $H^*(G)$ と書き、グラフ G のコホモロジー環と呼ぶ。

自然な同一視

$$\text{Hom}(T, S^1) \cong H^2(BT) (= H^2(BT; \mathbb{Z}))$$

により、 G のルートやウェイトを $H^2(BT)$ の元とみなす。 $W(G)$, $\Phi(G)$ で G の Weyl 群、ルート系をそれぞれ表すこととする。 $W(G)$ は通常的作用で $\text{Hom}(T, S^1)$ に作用しており、それゆえ $\Phi(G)$ にも作用している。 $H^*(BT)$ は 2 次の元で生成されているので、この作用は自然に $H^*(BT)$ へ拡張される。 $\alpha \in \Phi(G)$ に対応する鏡映を $\sigma_\alpha \in W(G)$ で表す。旗多様体 G/T の GKM グラフを次で定義する。

Definition 2.1. G/T の GKM グラフ $\mathcal{G}(G/T)$ の頂点集合は $W(G)$ である。頂点 $w, w' \in W(G)$ と正ルート $\alpha \in \Phi(G)$ が存在して $w' = \sigma_\alpha w$ が成立すればその時に限り w と w' を結ぶ辺でコホモロジー類 $\alpha \in H^*(BT)$ が付随しているものがただ 1 つ存在する。そのコホモロジー類 α をその辺のラベルと呼ぶ。

$\mathcal{G}(G/T)$ の頂点は G/T の固定点に対応しており、辺は T 作用で不変な 2 次元球面に対応している。この球面は各固定点における接空間のルート空間分解と対応した各 (実) 2 次元部分空間の $\exp$ の像として得られる。また、ラベルはこのルートに対応しており、各辺に対して GKM 関数の満たすべき条件 (2.1) は対応する 2 次元球面の同変コホモロジーをその固定点に制限した時のその像の満たす条件である。特に旗多様体 G/T には Bruhat 分解と呼ばれる偶数次元の同変なセルからなるセル分割が存在し、セルは Weyl 群の元と一対一対応している。 G が良い性質を持つ時、各セルを貼り付けて生じる条件は上で述べた 2 次元球面から来るものであることが示される。さらに T を含む閉部分 Lie 群 H に対しても同様に GKM グラフ $\mathcal{G}(G/H)$ を定義でき、その同変コホモロジーについても上で述べたとおりである。 $H^*(BT)$ は次数付き環であり、 $\mathcal{G}(G/H)$ のラベルは全て 2 次の斉次元なので $H^*(\mathcal{G}(G/H))$ は次数付き環となる。

Harada, Henriques, Holm は Guillemin と Zara による GKM 理論の言い換えを整係数の場合に拡張し、次の定理を得た。

Theorem 2.1 ([HHH, Theorem 3.1 and Lemma 5.2]). G の任意の 2 つの正ルートが $H^*(BT)$ において互いに素とする。このとき

$$H_T^*(G/H) \cong H^*(\mathcal{G}(G/H)).$$

3 GKM ファイバー束

Guillmin, Sabatini, Zara [GSZ] による良いファイバー束を GKM 理論的に解析する手法を整係数の場合に具体例を通じて考える。 T^n を $U(n)$ の標準的な極大トーラスとし、 T を T^n と $SU(n)$ の共通部分として定める。 T は $SU(n)$ の極大トーラスである。 $t_1, \dots, t_n$ を標準的な $H^2(BT^n)$ の基底とし、 $H^2(BT^n) \rightarrow H^2(BT)$ でのそれらの像を同じ記号で書く。 $H^2(BT)$ においては $\sum_{i=1}^n t_i = 0$ が成立する。さらに GKM 関数 $\tau_i: W(G) \rightarrow H^*(BT)$ を

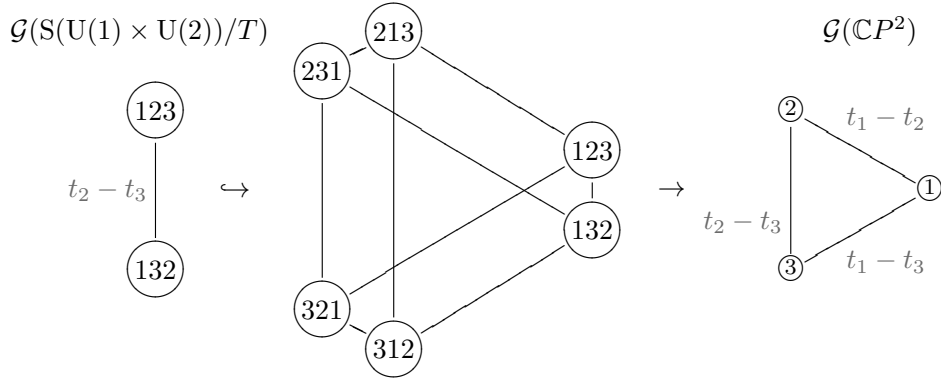
$$\tau_i(w) = w(t_i)$$

で定める。

さて、具体的にファイバー列 $S(U(2) \times U(1))/T \rightarrow SU(3)/T \rightarrow \mathbb{C}P^2$ を考える。福川・石田・栢田 [FIM] の結果により、一般の n で

$$H_T^*(SU(n)/T) \cong H^*(BT)[\tau_i \mid 1 \leq i \leq n]/(c_i(\tau) - c_i(t) \mid 1 \leq i \leq n) \quad (3.1)$$

であることが示される。ここで c_i は i 次基本対称多項式を表している。上のファイバー列を GKM グラフとその間の準同型として描くと次のようになる。ここで ijk という表記は $\sigma(t_1) = t_i, \sigma(t_2) = t_j, \sigma(t_3) = t_k$ なる $W(SU(3)) \cong \mathfrak{S}_3$ の元 σ を表す。また、赤い $H^*(BT)$ の元はラベルを表す。 $\mathcal{G}(\mathbb{C}P^2)$ の頂点集合は $W(SU(3))/\{123, 132\}$ である。図では代表元の 1 文字目でその頂点を表している。



頂点の表し方からも明らかなように τ_1 は $\mathcal{G}(\mathbb{C}P^2)$ 上の GKM 関数とみなせ、 $H^*(BT)$ 上 $H^*(\mathcal{G}(\mathbb{C}P^2))$ を生成することが容易に分かる。そして、その関係式は $\prod_{i=1}^3 (\tau_1 - t_i) = 0$ で尽くされていることが分かる。

一方、(3.1) によりファイバー $S(U(2) \times U(1))/T \cong SU(2)/T'$ の同変コホモロジーの生成元は τ_2, τ_3 であり、関係式は $\tau_2 + \tau_3 = t_2 + t_3, \tau_2 \tau_3 = t_2 t_3$ で尽くされている。ここで T' は $SU(2)$ の標準的な極大トーラスを表す。また、このファイバー上では $\tau_1 = t_1$ となっていることを注意しておく。

さて、全空間 $SU(3)/T$ の同変コホモロジーは τ_1 および τ_2, τ_3 で生成されているが、これは底空間とファイバーの生成元であった。 t_i, τ_i ($1 \leq i \leq 3$) に関する基本対称多項式について $c_1(\tau) = c_1(t)$ および $c_2(\tau) = c_2(t)$ がファイバーへの制限写像によりファイバーの関係式に移る

ことは上の注意から明らかである。さらに底空間の関係式 $\prod_{i=1}^3(\tau_1 - t_i) = 0$ は $c_1(\tau) = c_1(t)$, $c_2(\tau) = c_2(t)$ のもとで

$$\begin{aligned}
0 &= \prod_{i=1}^3(\tau_1 - t_i) \\
&= \tau_1^3 - c_1(t)\tau_1^2 + c_2(t)\tau_1 - c_3(t) \\
&= \tau_1^3 - c_1(\tau)\tau_1^2 + c_2(\tau)\tau_1 - c_3(\tau) + c_3(\tau) - c_3(t) \\
&= \prod_{i=1}^3(\tau_1 - \tau_i) + c_3(\tau) - c_3(t) \\
&= c_3(\tau) - c_3(t)
\end{aligned}$$

を導く。

以上の観察により、全空間の生成元と関係式は本質的にファイバーと底空間のそれらから得られることが予想される。

今回の講演ではこの観察の具体的な定式化を行う（証明は [S2] で行われている）。そして、これを $\text{Spin}(9)/T \rightarrow F_4/T \rightarrow \mathbb{O}P^2$ に適用することで F_4/T の整係数同変コホモロジーを具体的に得る（詳しくは [S1] を参照）。

参考文献

- [FIM] Y. Fukukawa, H. Ishida, and M. Masuda, *The cohomology ring of the GKM graph of a flag manifold of classical type*, Kyoto J. Math. **54-3** (2014), 653-677.
- [GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25-83.
- [GSZ] V. Guillemin, S. Sabatini and C. Zara, *Cohomology of GKM fiber bundles*, J. Algebraic Combin. **35** (2012), no. 1, 19-59.
- [GZ] V. Guillemin and C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 283-349.
- [H] W. Y. Hsiang, *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 85. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- [HHH] M. Harada, A. Henriques, and T. Holm, *Computation of generalized equivariant cohomologies of Kac-Moody flag varieties*, Adv. Math. **197** (2005), no 1, 198-221.
- [S1] T. Sato, *The T-equivariant Integral Cohomology Ring of F_4/T* , Kyoto J. Math. **54-4** (2014), 703-726.
- [S2] T. Sato, *The T-equivariant Integral Cohomology Ring of E_6/T* , arXiv:1406.3893.

非有向閉曲面の $\mathbb{Z}_2$ 係数 1 次ホモロジー上の 交叉形式を保つ自己同型群の有限表示

大森 源城

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士 2 年

1 導入

N_g を種数 g の連結な向き付け不可能閉曲面, すなわち射影平面 g 個の連結和, $\cdot : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \times H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を N_g の $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 1 次ホモロジー群 $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ 上の交叉形式とする. N_g のモデルとして g 個の境界成分を持つ球面の各境界成分にメビウスの帯を貼り合せたものを考えることにし, メビウスの帯を貼り合せた印として円 (球面の境界) の中に $\times$ を描くことにする (図 1, 3 を参照). この N_g の表記は, g 個の境界成分を持つ球面の各境界成分の対蹠点を同一視したものと同一であることに注意する. このとき, $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ を, 交叉形式 $\cdot$ を保つ $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ 上の自己同型写像全体からなる $\text{Aut } H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の部分群とする. 図 1 のような $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の基底 $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ を取ることにより $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は $\mathbb{Z}_2^g$ 上の直行変換からなる群 $O(g, \mathbb{Z}_2) = \{A \in GL(g, \mathbb{Z}_2) \mid {}^tAA = E\}$ と同型である為, $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は有限群である. 特に, $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は有限表示可能である. 更に, Korkmaz [1] と Szepietowski [5] により, 次の同型対応が知られている.

$$\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot) \cong \begin{cases} \text{Sp}(2h, \mathbb{Z}_2) & \text{if } g = 2h + 1, \\ \text{Sp}(2h, \mathbb{Z}_2) \ltimes \mathbb{Z}_2^{2h+1} & \text{if } g = 2h + 2. \end{cases}$$

本稿では $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の明確な有限表示について述べ, その応用として $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の 1, 2 次ホモロジー群の計算についても述べる.

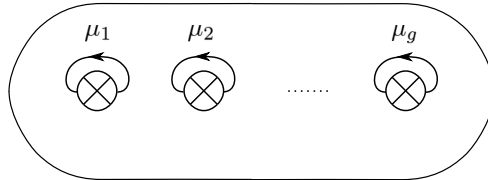


図 1: ホモロジー類 $x_1, x_2, \dots, x_g$ を代表する N_g 上の単純閉曲線 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$.

2 準備

2.1 群の表示

任意の群 G に対し, ある集合 X を生成系とする自由群 F (ここでは $\sharp X < \infty$ でなくても良い) と全射準同型 $\pi: F \rightarrow G$ が存在する. $N := \ker \pi$ の正規生成系を R とする (ここで, 一般に群 G とその正規部分群 N に対し, $R \subset N$ が N の G 上の正規生成系とは, $\{grg^{-1} | g \in G, r \in R\}$ が N の生成系となることである). このとき, G は生成系 X と関係式 R からなる表示を持つといい, $\langle X | R \rangle := F/N$ を G の表示という. また, X と R の元を並べて, G は生成系 $x_1, x_2, \dots \in X$ と関係式 $r_1, r_2, \dots \in R$ からなる表示を持つといたり, $\langle x_1, x_2, \dots | r_1, r_2, \dots \rangle$ を G の表示ともいったりもする. 任意の群 G は表示を持ち, 特に $\sharp X < \infty$ かつ $\sharp R < \infty$ のとき, G は有限表示を持つという. ある群が与えられた時, それが有限表示可能かどうかは重要な問題である.

2.2 群のホモロジー

群 G に対し, $(G, 1)$ -型の Eilenberg-MacLane 複体 Y とは, ホモトピー群が $\pi_1(Y) = G$, $\pi_n(Y) = 1$ ($n \neq 1$) となる CW 複体のことである. Y は G に対しホモトピーの差を除いて一意に定まるので, この Y を $K(G, 1)$ と書くことにする. このとき, 群 G のホモロジーとは $(G, 1)$ -型の Eilenberg-MacLane 複体 $K(G, 1)$ のホモロジーのことである (すなわち, $H_n(G; \mathbb{Z}) := H_n(K(G, 1); \mathbb{Z})$). 特に $n = 1$ のとき, $H_1(G; \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$ となることに注意する (ここで $[G, G]$ は G の交換子群). また, G に群の表示 F/N が与えられたとき, 次のような公式が成り立つ.

$$H_2(G; \mathbb{Z}) \cong \frac{K \cap [F, F]}{[K, F]}.$$

これを Hopf の公式という. この公式により G の表示が与えられていれば $H_2(G; \mathbb{Z})$ を計算する術は与えられているが, この計算の難易度は与えられた G の表示に大きく依存してくる.

2.3 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の生成系

N_g 上の双側な単純閉曲線 γ に対し, γ に沿った Dehn twist とは, 次のような操作で得られる N_g 上の自己微分同相写像のことである. まず, γ の N_g 内での管状近傍 N を取る (N はアニュラスと微分同相となる). このとき, N を γ で切って 360 度 (アニュラスに適当な向きを入れ) 右回転させ再度貼り直すことによって構成される N 上の写像 τ_γ を考える (図 2 参照). γ に沿った N_g 上の Dehn twist t_γ とは, この τ_γ を恒等写像で N_g 上に拡張して得られ

る N_g 上の自己微分同相写像のことである。曲面が向き付け可能な場合と異なり、 N_g 上の Dehn twist を考える場合は、Dehn twist を定義する各曲線ごとに捻る方向を指定する必要があることに注意する。

図 3 のような N_g 上の単純閉曲線 $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta$ に対し、それらに沿った Dehn twist をそれぞれ $t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_{g-1}}, t_\beta$ とする。それぞれの曲線の横の矢印で Dehn twist の正の向きを定義する。 N_g 上の自己微分同相写像 $f : N_g \rightarrow N_g$ に対し f の $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ への作用を f_* とし、 $a_i := (t_{\alpha_i})_*$ ($i = 1, \dots, g-1$)、 $b = (t_\beta)_*$ とおく。このとき、 a_i ($i = 1, \dots, g-1$)、 b は 1 章で与えられた $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の基底 $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ に対し、以下のように作用することが分かる。

$$a_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} & \mapsto x_i, \\ x_k & \mapsto x_k \quad (k \neq i, i+1), \end{cases} \quad b : \begin{cases} x_1 & \mapsto x_2 + x_3 + x_4, \\ x_2 & \mapsto x_1 + x_3 + x_4, \\ x_3 & \mapsto x_1 + x_2 + x_4, \\ x_4 & \mapsto x_1 + x_2 + x_3, \\ x_k & \mapsto x_k \quad (k \neq 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Mccarthy-Pinkall [2] は、 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ が $a_1, \dots, a_{g-1}, b$ よって生成されることを示している。

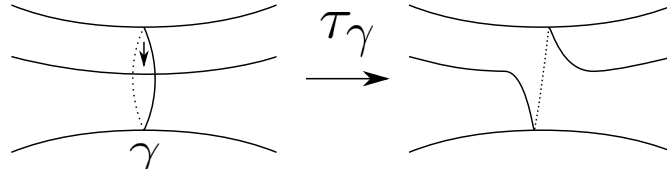


図 2: アニュラス上の写像 τ_γ .

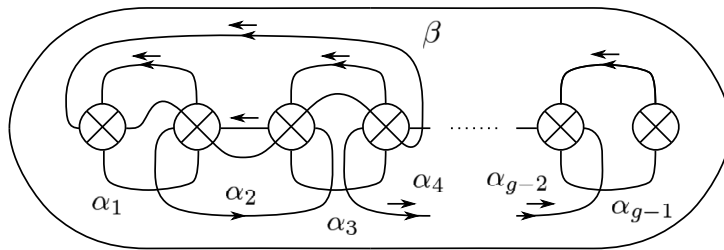


図 3: N_g 上の単純閉曲線 $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta$.

3 主結果

定理 3.1. $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は $g = 1$ のとき自明な群となり、また $g = 2, 3$ のとき生成系を $a_1, \dots, a_{g-1}$ 、 $g \geq 4$ のとき生成系を $a_1, \dots, a_{g-1}, b$ とし、以下のような関係式からなる群表示を持つ：

1. $a_i^2 = b^2 = 1$ $(i = 1, \dots, g-1),$
2. $(a_i a_j)^2 = 1$ $(|i-j| > 1, g \geq 4),$
3. $(a_i a_{i+1})^3 = 1$ $(i = 1, \dots, g-2, g \geq 3),$
4. $(a_i b)^2 = 1$ $(i \neq 4, g \geq 4),$
5. $(a_4 b)^3 = 1$ $(g \geq 5),$
6. $(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^{12} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^9$ $(g \geq 7),$
7. $[a_{g-5}, b_{\frac{g-2}{2}}] = 1$ $(g \geq 8 \text{ even}),$

ただし, $b_0 = a_1, b_1 = b, b_2 = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b)^5,$

$b_{i+1} = (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3} b_i)^5 (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3})^{-6} (2 \leq i \leq \frac{g-4}{2}),$
 $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$ とする.

定理 3.2. $g \geq 9$ もしくは $g = 7$ のとき, $H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = 0$ となる.

注意 3.3. 定理 3.1 は $g = 1, 2$ の場合は明らかであり, $g = 3, 4$ の場合に関しては Szepietowski [4] によって与えられている. また, 定理 3.2 の g が奇数の場合は Stein [3] により示されていることに注意する.

注意 3.4. 定理 3.1 の表示を用いて計算することにより, $g \geq 1$ に対し $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の 1 次ホモロジー群は以下ようになる.

$$H_1(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (g = 1, g \geq 7), \\ \langle [a_1] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 & (g = 2, 3, 5, 6), \\ \langle [a_1], [b] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & (g = 4). \end{cases}$$

この結果は $g \geq 7$ のとき Korkmaz [1] により示されている.

参考文献

- [1] M. Korkmaz, *First homology group of mapping class group of nonorientable surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 123 (1998), 487-499.
- [2] J. D. McCarthy and U. Pinkall. *Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces*, Max Planck Inst. Preprint MPI/SFB 85-11, revised version written on 26 Feb 2004, available from <http://www.math.msu.edu/~mccarthy/publications/selected.papers.html>.
- [3] M. R. Stein, *Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973), 165-191.
- [4] B. Szepietowski. *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata 160 (2012), 169-183.
- [5] B. Szepietowski, *Low dimensional linear representations of the mapping class group of a nonorientable surface*, arXiv:1303.1917 [math.GT], 2013.

Uniform hyperbolicity for curve graphs of nonorientable surfaces

久野恵理香 (大阪大学)*

本稿では, $N = N_{g,n}$ を種数 $g \geq 1$, 境界成分 $n \geq 0$ 個の向き付け不可能曲面とする.

1. 導入

$\mathcal{C}(N)$ を N の curve graph とする. 2007 年に Bestvina-Fujiwara[2] が, 2013 年に Masur-Schleimer[6] が $\mathcal{C}(N)$ は (Gromov の意味で) 双曲的であるということを示したが, その一様性は分かっておらず, その具体的な双曲性定数も与えられていなかった. 一方, 2013 年に Aougab[1], Bowditch[3], Clay-Rafi-Schleimer[4], そして Hensel-Przytycki-Webb[5] が独立に向き付け可能曲面の curve graph は曲面の種数と境界成分の個数によらない定数で双曲的である (これを一様双曲的であるという) ことを示した. そしてこの Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用し, 次の結果を得た:

定理 1.1. $\mathcal{C}(N)$ は連結のとき, 17-双曲的になる.

本稿は, 特にこの Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用するとき注意しなければならない点に重点を置く.

2. 準備

定義 2.1. 種数 $g \geq 1$, 境界成分 $n \geq 0$ 個の向き付け不可能曲面 $N = N_{g,n}$ とは, 射影平面 g 個の連結和から n 個の開円板を取り除いたものである. これは, $g+n$ 個の境界成分を持った球面に g 個のメビウスの帯を境界成分に沿って張り合わせた曲面 (図 1 の左) に同相である. そしてこれを, n 個穴あき球面上に g 個の crosscap と呼ばれるものを書いた模式図 (図 1 の右) で表す. 各 crosscap の円周には対蹠点の同一視が入っている.

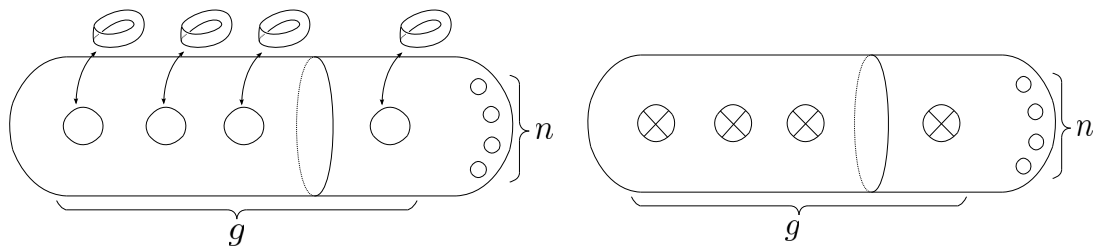


図 1: 向き付け不可能曲面 $N_{g,n}$.

定義 2.2. N 上の単純弧または単純閉曲線が, 境界は N の境界に, 内部は N の内部に埋め込まれているとき, それらは N に固有に埋め込まれているという. N に固有に埋め込まれている単純弧が本質的であるとは, その単純弧が N の境界成分の一部にホモトピックでないことである. N に固有に埋め込まれている単純閉曲線が本質的である

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科 数学専攻
e-mail: e-kuno@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

とは, その単純閉曲線が N 上で円板やメビウスの帯の境界になっておらず, 更に N の境界成分にホモトピックでないことである.

定義 2.3. N の **arc curve graph** $\mathcal{AC}(N)$ とは, N に固有に埋め込まれた本質的な単純弧 (以下, 単純弧) と本質的な単純閉曲線 (以下, 単純閉曲線) のホモトピー類を頂点とし, 2 つの頂点はそれらに対応する単純弧または単純閉曲線のホモトピー類の中で交わらない代表元の組が選べるときに辺で結ばれる, と定めることによってできるグラフのことである. また, N の **arc graph** $\mathcal{A}(N)$ とは N 上の単純弧のホモトピー類のみによってできる $\mathcal{AC}(N)$ の部分グラフのことで, N の **curve graph** $\mathcal{C}(N)$ とは N 上の単純閉曲線のホモトピー類のみによってできる $\mathcal{AC}(N)$ の部分グラフのことである. それぞれのグラフの各辺には 1 という長さを入れ, 2 つの頂点の距離は 2 つの頂点を結ぶ辺の最小列 (測地線) の長さで定め, $\mathcal{AC}(N)$, $\mathcal{A}(N)$, $\mathcal{C}(N)$ を測地空間とみなす. それぞれの距離を, $d_{\mathcal{AC}}(\cdot, \cdot)$, $d_{\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$, $d_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ とかく.

定義 2.4. graph が (Gromov の意味で) 双曲的であるとは, ある定数 $k \geq 0$ が存在して, graph 内の任意の測地三角形 $T = abd$ (a, b, d は graph の頂点) に対して, ある graph の頂点 p が存在して, T の 3 つの各辺と p の距離がそれぞれ高々 k になることである. (図 2 を見よ.) この k のことを双曲性定数という. 但し, 測地空間内の測地三角形とは, 各辺が空間内の測地線で結ばれているような三角形のことである.

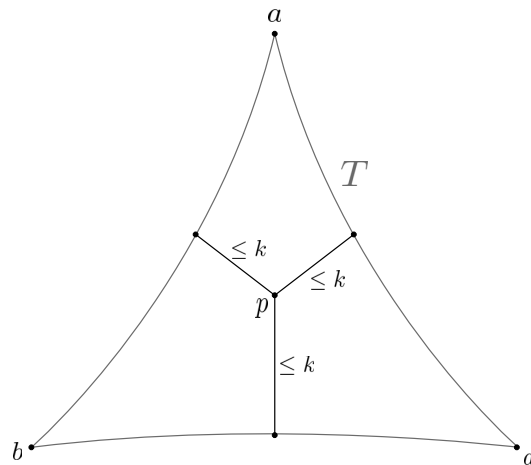


図 2: Gromov 双曲的.

3. 向き付け可能曲面の場合との違い

以下, a と b を N 上の単純弧で minimal position にあるものとする.

単純弧 a の部分弧で端点 α と α' を持つものを $\overline{\alpha\alpha'}_a$ によって表す.

定義 3.1. α と β をそれぞれ a と b の片方の端点とする. $\pi \in a \cap b$ を 1 つ選び, $a' = \overline{\alpha\pi}_a$, $b' = \overline{\beta\pi}_b$ とする. $a' \cup b'$ が N に埋め込まれた単純弧になるとき, $a' \cup b'$ のことを a^α , b^β と π によって定められる **unicorn arc** という. (図 3 は unicorn arc の 1 つの例.)

[5] と同様に, *unicorn path* という $\mathcal{A}(N)$ 上の 1 つの path を定めることができる.

定義 3.2. $a' \cup b'$ と $a'' \cup b''$ ($a', a'' \subset a$, $b', b'' \subset b$) を a^α と b^β から得られる 2 つの unicorn arc とする. $a' \cup b' \leq a'' \cup b'' \Leftrightarrow a'' \subseteq a'$ かつ $b' \subseteq b''$ と順序を定める. ($c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$)

を a^α, b^β から得られる順序づけられた unicorn arc の列とする. このとき $\mathcal{P}(a^\alpha, b^\beta) := (a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b)$ を a^α と b^β の間の **unicorn path** という.

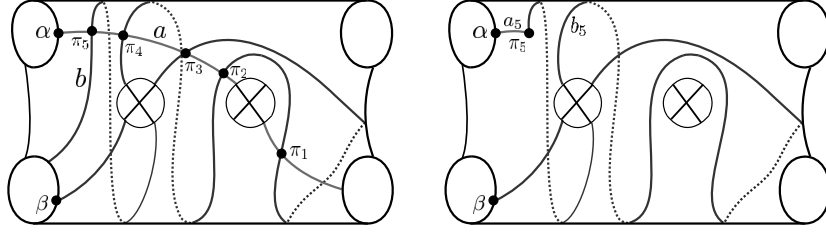


図 3: a^α と b^β と π_5 によって定められる unicorn arc.

向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に次の命題が成り立つ.

Proposition 3.3. a, b を $\mathcal{A}(N)$ の 2 つの頂点とする. 記号を乱用してこの a, b を N 上の単純弧で minimal position にあるものとする. このとき, 任意の unicorn path $\mathcal{P}(a^\alpha, b^\beta)$ は a と b を結ぶ $\mathcal{A}(N)$ 内の path になる. 但し α, β はそれぞれ a, b の一方の端点である.

向き付け不可能曲面の場合に注意しなければならないのは, unicorn path 内の隣り合う 2 つの unicorn arc を横断的に交わらないようにするためのホモトピー変形の仕方であるが次のように工夫すればよい. $c_i = \overline{\alpha\pi_a} \cup \overline{\beta\pi_b}$ ($2 \leq i \leq n-1$) とする. π' を unicorn arc c_{i-1} を定める $a \cap b$ の点とする. c_i とホモトピックな単純弧で c_{i-1} と横断的に交わらないものが存在する: c_i が π で曲がるときに c_{i-1} と交わらない $\overline{\alpha\pi_a}$ の正則近傍の境界成分の方向に $\overline{\alpha\pi_a}$ をずらし, 更に π' において c_{i-1} と交わらない $\overline{\beta\pi_b}$ の正則近傍の境界成分の方向に $\overline{\beta\pi_b}$ をずらせばよい. (図 4 は c_i を c_{i-1} と横断的に交わらないようにホモトピーによって変形した 1 つの例である.)

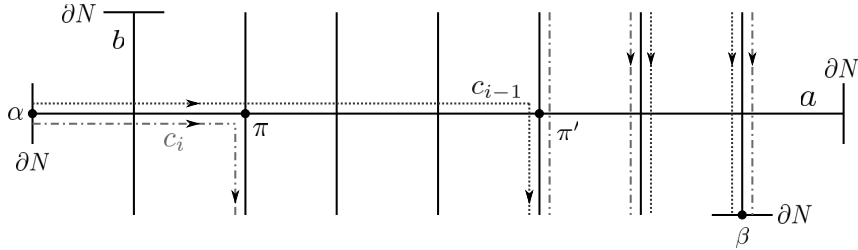


図 4: c_i を c_{i-1} と横断的に交わらないようにホモトピーによって変形した 1 つの例.

定義 3.4. レトラクション $r: \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$ を次のように定める (例は図 5).

a が単純閉曲線るとき, $r(a) = a$ と定める.

a が単純弧るとき, a の端点を持つ N の境界成分を γ_1 と γ_2 とする ($\gamma_1 = \gamma_2$ も含む) と, $\gamma_1 \cup a \cup \gamma_2$ の正則近傍の 1 つの境界成分を $r(a)$ に対応させる. もし $\gamma_1 \cup a \cup \gamma_2$ の正則近傍の境界成分の個数が複数になった場合は, 本質的な単純閉曲線を 1 つ選ぶ.

このとき, 向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に次の主張が成り立つ.

主張 3.5. r は 2-リプシッツである. すなわち $d_{\mathcal{C}}(r(a), r(b)) \leq 2d_{\mathcal{AC}}(a, b)$ を満たす.

向き付け可能曲面の場合との違いは、単純弧 a, b が crosscap を奇数回通過することによって $r(a), r(b)$ が“ねじれる”場合も考える必要があるということである。 $\mathcal{AC}(N)$ 内での距離が 1 なる単純弧 a, b の組に対してのみ示せば十分で、その組のパターンは図 6 のように 8 つある。これら全てのパターンについて $r(a), r(b)$ がそれぞれねじれる場合とねじれない場合がある。しかし、どの場合でも $r(a)$ と $r(b)$ の両方に交わらない単純閉曲線 α が取れるということが言え、 $r(a)$ と $r(b)$ の $\mathcal{C}(N)$ 内での距離が 2 以下になるということが示せる。

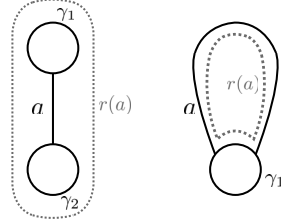


図 5: レトラクション $r : \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$ の例.

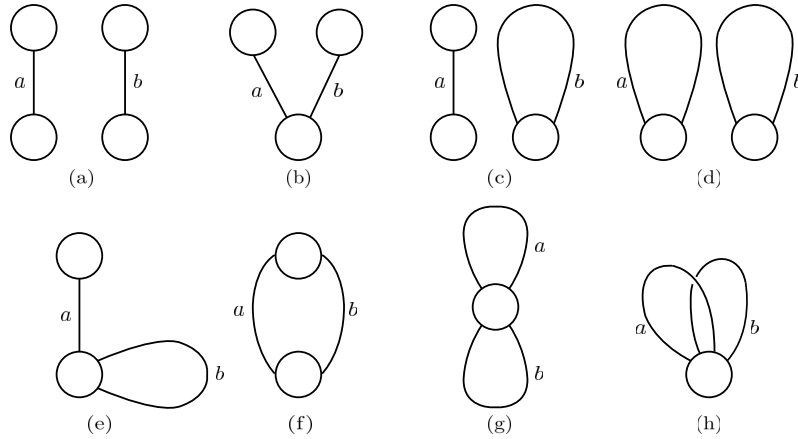


図 6: $d_{\mathcal{AC}}(a, b) = 1$ なる単純弧 a, b の組の 8 つの場合.

参考文献

- [1] T. Aougab, *Uniform hyperbolicity of the graphs of curves*, Geom. Topol. **17**, no.5 (2013), 2855-2875.
- [2] M. Bestvina and K. Fujiwara, *Quasi-homomorphisms on mapping class groups*, Glas. Mat. Ser. III, **42** (62) no.1 (2007), 213-236.
- [3] B. H. Bowditch, *Uniform hyperbolicity of the curve graphs*, Pacific J. Math. **269** (2014), 269-280.
- [4] M. T. Clay, K. Rafi, and S. Schleimer, *Uniform hyperbolicity of the curve graph via surgery sequences*, to appear in Algebr. Geom. Topol.
- [5] S. Hensel, P. Przytycki, and R. C. H. Webb, *Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs*, to appear in J. Europ. Math. Soc.
- [6] H. A. Masur and S. Schleimer, *The geometry of the disk complex*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), 1-62.

パラレルセッション 会場C

スイッチングシステムを用いた近似最適制御の構成

町田 夏久子*

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

概要

本講演では最適制御問題における基本的な問題である近似最適制御構成の一手法を紹介する。実際、最適制御は存在しないことがあり、代替となる近似最適制御を考察するのは自然である。Clarke, Ledyaev, Sontag, Subbotin (1997) は、古典的な最適制御の構成法を粘性解の枠組みに取り込み、粘性解の下限畳み込み (inf-convolution) 近似を通して近似最適制御の構成法を与えた。本講演で紹介する方法では、与えられた最適制御問題に対して、それを近似するスイッチング制御問題を考え、そのベルマン方程式の粘性解を用いて、近似最適制御を構成する。

1 はじめに

最適制御理論では、1960 年代初頭に発展したポントリヤーギンの最大値原理とベルマンの動的計画法という二つの重要な研究がよく知られている。前者は、与えられた制御が最適制御であるための必要条件を与える結果で、これを用いると最適制御を具体的に構成できることがある。後者は、ベルマンの最適性原理に基づいて時間ごとの最適政策を求めるアルゴリズムの一つである。ベルマンは、最適制御問題に対応する値関数が動的計画法の原理を満たすことから値関数が滑らかと仮定した時に、それが満たすべき方程式としてハミルトン・ヤコビ方程式を導出した。最適制御に現れるハミルトン・ヤコビ方程式は、特にベルマン方程式 (ここでは以下、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式と呼ぶ) と呼ばれることがある。ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のなめらかな解を利用した最適フィードバック制御の構成法が動的計画法では知られている。

しかし、最適制御が存在しない問題があり、そのような問題を扱う際は、代替となる近似最適制御を考察するのは自然である。ポントリヤーギンの最大値原理は最適制御が存在する場合にのみ、その具体的構成が期待できるような結果であるため、近似最適制御の具体的構成は一般に期待できない。そこで、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式を用いた近似最適フィードバック制御の具体的構成の可能性が期待されるが、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のなめらかな解が存在するとは限らないため、工夫する必要がある。

Clarke, Ledyaev, Sontag, Subbotin [3] は、動的計画法で知られている古典的な最適制御の構成法を粘性解の枠組みに取り込み、粘性解の下限畳み込み (inf-convolution) 近似を通して、必ずしも微分可能とは言えない粘性解を適当な近似を通して近似最適制御を構成した。粘性解とは、1981 年に Crandall と Lions が導入した偏微分方程式の弱解の概念の一つである [1, 4, 7]。粘性解は、最大値原理に基づいて微分を試験関数に移行することで、通常の意味で微分不可能な関数を広い意味で微分可能な関数として扱うことができ、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のような非線形性の強い方程式に対しても適用できるという利点がある。そのため、方程式をかなり一般的な形で扱うことができ、たとえば 2 階の退化楕円型・放物型方程式に対する理論が構築されている。

*correspondance: kakukomachida@akane.waseda.jp

本講演で紹介する方法では、与えられた最適制御問題に対して、それを近似するスイッチング制御問題を考え、対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の粘性解を用いて、近似最適制御を構成する。関連した近似法の研究として、Barles, Jakobsen [2] も参照のこと。

2 準備

$f \in C(\mathbb{R}^N \times A, \mathbb{R}), g \in C(\mathbb{R}^N \times A, \mathbb{R}^N)$ が与えられていて、次の仮定を満たすとする。すべての $(x, a) \in \mathbb{R}^N \times A$ に対して、

$$\begin{cases} |f(x, a) - f(y, a)| \leq L_f |x - y|, \\ |g(x, a) - g(y, a)| \leq L_g |x - y|. \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、 $A \subset \mathbb{R}^M$ は制御集合とする。 $\mathcal{A}$ を可測関数 $\alpha : [0, \infty) \rightarrow A$ 全体の集合とする。 $\alpha \in \mathcal{A}$ と $x \in \mathbb{R}^N$ に対して、以下の初期値問題の解を考察する。

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = g(X(t), \alpha(t)) \quad (t > 0), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

(2.1) の解は、初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ と $\alpha \in \mathcal{A}$ に依って定まる $t \in [0, \infty)$ の関数であるから、 $X(t; x_0, \alpha)$ と表記する。もし $\alpha \in \mathcal{A}$ が $\alpha(t) \equiv a \in A$ である場合、 $X(t; x_0, a)$ と表す。(2.1) で記述される制御系は $\alpha \in \mathcal{A}$ を通して制御されると考える。ここでは経費汎関数 J として次のものを考える。

$$J(x_0, \alpha) = \int_0^\infty f(X(t; x_0, \alpha), \alpha(t)) e^{-t} dt$$

値関数 V は次で与えられる。

$$V(x_0) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x_0, \alpha).$$

$x_0 \in \mathbb{R}^N$ を与えたとき、

$$V(x_0) = J(x_0, \alpha)$$

を満たす $\alpha \in \mathcal{A}$ を x_0 における**最適制御**と呼ばれるが、最適制御は一般には存在しない。そこで、代替となる ε -近似最適制御を考察したい。 $\varepsilon > 0$ に対して

$$|J(x_0, \alpha_\varepsilon) - V(x_0)| < \varepsilon.$$

を満たす $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{A}$ を ε -**近似最適制御**と呼ぶ。本講演の目的は、 ε -近似最適制御の構成法を与えることである。

f と g が前述した仮定を満たすとき、値関数 V はハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式

$$V(x) + \sup_{a \in A} \{-g(x, a) \cdot DV(x) - f(x, a)\} = 0 \quad (\text{HJ})$$

のただ一つの粘性解であり、 g のリプシッツ定数が 1 より大きければ V もリプシッツ連続、1 以下ならばヘルダー連続であることはよく知られている [1, 7]。

次に、近似最適制御の構成法を与える際に重要な役割を果たすスイッチング制御問題に対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式系を用意する。具体的には

$$\max\{v(x, a) - g(x, a) \cdot D_x v(x, a) - f(x, a), v(x, a) - \inf_{b \neq a} \{v(x, b) + k\}\} = 0 \quad (\text{SS})$$

で与えられる. ここで, k は正の定数であり, v は未知関数, $D_x v$ は x 変数に関する勾配を表す.

(SS) の粘性解を考察する. 粘性解理論の観点では, (SS) のような無限システムの粘性解を取り扱うのに, 通常粘性解の定義は適用できないため, 定義を修正する必要がある. Ishii, Shimano [5] は, あるパラメーター依存する関数偏微分方程式に対するコーシー問題の解の漸近挙動の研究で解析したある無限システムに対する粘性解の定義を, 各パラメーターごとに通常粘性解の定義を用いるものとし, その解 (粘性解) の存在, 一意性を示した. その定義を参考にすると, (SS) の粘性解は定義 2.1 で定義される.

Definition 2.1. (1) v が (SS) の粘性劣解であるとは, 次が成り立つことである. $a \in A$ を固定する.

$$\begin{cases} \phi \in C^1(\mathbb{R}^N), x \in \mathbb{R}^N, \max_{\mathbb{R}^N \times A} v^*(\cdot, a) - \phi(\cdot) = v^*(x, a) - \phi(x) = 0, \\ \implies \max\{v^*(x, a) - g(x, a) \cdot D_x v^*(x, a) - f(x, a), v^*(x, a) - \inf_{a \neq b} \{v^*(x, b) + k\}\} \leq 0. \end{cases}$$

(2) v が (SS) の粘性優解であるとは, 次が成り立つことである. $a \in A$ を固定する.

$$\begin{cases} \phi \in C^1(\mathbb{R}^N), x \in \mathbb{R}^N, \min_{\mathbb{R}^N \times A} v_*(\cdot, a) - \phi(\cdot) = v_*(x, a) - \phi(x) = 0, \\ \implies \max\{v_*(x, a) - g(x, a) \cdot D_x v_*(x, a) - f(x, a), v_*(x, a) - \inf_{a \neq b} \{v_*(x, b) + k\}\} \geq 0. \end{cases}$$

(3) v が粘性劣解であり, 粘性優解でもあるとき, v は (SS) の粘性解であるという.

v^*, v_* はそれぞれ v の上半連続包, 下半連続包である.

3 主結果

Theorem 3.1. (SS) の有界な粘性解は一意に存在する

Theorem 3.2. $L_g < 1$ とする. すべての $a \in A$ に対して, (SS) の粘性解 $v(\cdot, a)$ は $\mathbb{R}^N$ 上のリプシッツ連続関数で, そのリプシッツ定数は $L_f/(1 - L_g)$ である. $L_g \geq 1$ とし, $\theta L_g < 1$ を満たす $0 < \theta < 1$ を一つ固定する. 全ての $a \in A$ に対して, (SS) の粘性解 $v(\cdot, a)$ は $\mathbb{R}^N$ 上指数 θ のヘルダー連続関数で, そのヘルダー定数は, $B_f^{1-\theta} L_f^\theta / (1 - \theta L_g)$ である.

Theorem 3.3. v^k は (SS) の粘性解, V は (HJ) の粘性解であるとする. v^k, V が同程度リプシッツ連続関数であるとき,

$$\sup_{(x,a) \in \mathbb{R}^N \times A} |v^k(x, a) - V(x)| = O(k^{1/3}).$$

$0 < \theta < 1$ とする. v^k, V が指数 θ の同程度ヘルダー連続関数であるとき,

$$\sup_{(x,a) \in \mathbb{R}^N \times A} |v^k(x, a) - V(x)| = O(k^{\theta/(2+\theta)}).$$

次に, ε -近似最適制御の構成のアルゴリズムを述べる. 簡単のため A はコンパクトと仮定する. $x_0 \in \mathbb{R}^N$ を固定し, 制御 α_k をつぎのように与える. そのために, 列 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$, $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ をまず帰納的に定義する. x_{i-1} が与えられたとして, a_i, τ_i, x_i をつぎの式で定める.

$$\begin{aligned} a_i &\in \operatorname{argmin} v^k(x_{i-1}, \cdot), \\ \bar{\tau}_i &= \inf\{t > 0 \mid X(t; x_{i-1}, a_{i-1}) \in \partial B_r(x_{i-1})\}, \\ \tau_i &= \min\{\bar{\tau}_i, 1\}, \\ x_i &= X(\tau_i; x_{i-1}, a_{i-1}). \end{aligned}$$

このように与えられた $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, $\alpha_k \in \mathcal{A}$ を次式で定義する.

$$\alpha_k(t) = a_i \quad (t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), i \in \mathbb{N}).$$

ただし, $\tau_0 = 0$ とする. (関数 g の有界性より, $\inf_i \tau_i > 0$ が分り, α_k は $[0, \infty)$ 上の関数であることが確かめられる.)

$\varepsilon(k) \geq 0$ を

$$\varepsilon(k) = \sup_{(x,a) \in \mathbb{R}^N \times A} (v^k(x, a) - V(x))$$

と定義する. 定理 3.3 の仮定下では

$$\varepsilon(k) = O(k^{\theta/(2+\theta)}) \quad (k \rightarrow 0+)$$

が成り立つことに注意する.

Theorem 3.4. α_k と $\varepsilon(k)$ を上のように定義するとき, α_k は x_0 に対する $\varepsilon(k)$ -近似最適制御である.

参考文献

- [1] Bardi, Martino; Capuzzo-Dolcetta, Italo Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997
- [2] Barles, Guy; Jakobsen, Espen R. Error bounds for monotone approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005), no. 2, 540-558 (electronic)
- [3] Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Sontag E.D., Subbotin A.I., Asymptotic controllability implies feedback stabilization, IEEE Trans. Automat. Control 42 (1997) 1394-1407.
- [4] Crandall, Michael G.; Ishii, Hitoshi; Lions, Pierre-Louis User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1—67.
- [5] Ishii, Hitoshi; Shimano, Kazufumi Asymptotic analysis for a class of infinite systems of first-order PDE: nonlinear parabolic PDE in the singular limit. Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), no. 1-2, 409—438.
- [6] Hitoshi, Ishii; Shigeaki Koike On ε -optimal controls for state constraint problems. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2000), no. 4, 473-502.
- [7] Lions, Pierre-Louis Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. Research Notes in Mathematics, 69. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1982.

C^1 級領域上の有界関数空間での高階楕円型作用素が生成する 半群の解析性について

鈴木 拓也^{*†}

1 導入

作用素の半群論と偏微分方程式論には密接な関係があります。例えば、 ∂_t を時間についての微分として Δ をラプラシアンとして次の熱方程式の初期値問題を考えます。

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \{t > 0\} \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

熱方程式の解 $u(x, t)$ は初期値 u_0 を定めると次のように表せることが知られています。

$$u(x, t) = (G(\cdot, t) * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

この解 u は初期値 u_0 から t 秒時間を進める作用素 $S(t)$ を用いて $S(t)u_0$ と表せて次の性質を満たします。

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 \quad \text{for } t, s > 0.$$

この性質に着目して次のように作用素の半群を定義します。

Definition 1.1. X をバナッハ空間とする。 X 上の有界線形作用素の族 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ が半群であるとは次を満たすことを言う。

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S(t)S(s) \quad \text{for } t, s > 0, \\ S(0) &= I_X. \end{aligned}$$

本講演では半群の中でも特に解析的半群について考察します。半群として解析的であることが分かれば、それは解としても時間について解析的であることを意味するので解析的半群を調べることは非常に重要な問題です。例えば熱方程式の解が時間について解析的かどうか調べるためには、その生成作用素であるラプラシアン $-\Delta$ がセクトリアルという性質を満たすかを調べればよいということが作用素の半群論の抽象論から知られています。ラプラシアン $-\Delta$ がセクトリアルという条件は大雑把に言うと、 λ と f が適切に与えられた時に次のレゾルベント方程式のアプリオリ評価、そして解の存在と一意性が成り立つという条件です。

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

特に本講演では高階楕円型作用素について L^∞ 空間でのレゾルベント評価と解が生成する半群の解析性を一様 C^1 級領域上の場合に背理法と膨らまし法と呼ばれる手法を用いた解析を紹介します。

^{*} Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan

[†] tsuzuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2 レゾルベント方程式のアプリオリ評価について

まず最初に半群の解析性をえるために必要なアプリオリ評価の結果について記述しようと思います。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を一様 C^1 級の滑らかさの境界を持つ領域、つまり大まかに言うと領域の境界上の各点の十分小さい近傍で回転と平行移動などの操作により境界が C^1 級関数で表すことが出来てその傾きが一様に抑えられているとして、 $f \in L^\infty(\Omega)$ とします。また、係数 $a_{\alpha,\beta}$ を実数関数として主表象を $b(x, \xi) = \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta}$ として、次の $2m$ 階の微分作用素 L を考えて次のように仮定します。

$$L = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2m} (-1)^{|\beta|+1} \partial^\beta a_{\alpha,\beta} \partial^\alpha$$

$$(E1) \ a_{\alpha,\beta} \in \begin{cases} W^{1,\infty}(\Omega) & \text{if } |\alpha| = m \\ L^\infty(\Omega) & \text{if } |\alpha| \leq m-1 \end{cases}$$

(E2) L は強一様楕円型つまり、定数 $\delta_L > 0$ が存在して、

$$b(x, \xi) \geq \delta_L |\xi|^{2m} \text{ for } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

記号を次のように定義し、弱解について定義し定理を述べます。

$$\Sigma_{\pi-\varepsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon\},$$

$$W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) = \{f \in W_{loc}^{m,p}(\Omega) : f\eta \in W_0^{m,p}(\Omega) \ \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\},$$

$$N(u_\lambda, \lambda) = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{|\alpha|=k \leq m-1} |\lambda|^{1-\frac{k}{2m}} |\partial^\alpha u(x)| \right).$$

Definition 2.1. $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ 、 $M > 0$ 、 $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon} \cap \{|\lambda| \geq M\}$ 、そして $f \in L^\infty(\Omega)$ とします。このとき、 $u_\lambda \in W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ がレゾルベント方程式

$$\begin{cases} (\lambda - L)u = f & \text{in } \Omega \\ u = \partial_N u = \cdots = \partial_N^{m-1} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解であるとは、 u_λ が任意のテスト関数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して次を満たすことをいいます。

$$\lambda(u_\lambda, \phi)_{L^2} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (a_{\alpha,\beta} \partial^\alpha u_\lambda, \partial^\beta \phi)_{L^2} = (f, \phi)_{L^2}.$$

このときレゾルベント方程式

$$\begin{cases} (\lambda - L)u = f & \text{in } \Omega \\ u = \partial_N u = \cdots = \partial_N^{m-1} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解 $u \in W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ のレゾルベント評価について次の結果が成立します。

Theorem 2.1. $p > n$ 、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を一様 C^1 級領域とする。この時、定数 $\varepsilon > \kappa_L$ 、 $C > 0$ 、及び $M > 0$ が存在して、任意の $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon} \cap \{|\lambda| \geq M\}$ 、 $f \in L^\infty(\Omega)$ 、及び弱解 $u_\lambda \in W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) \cap W^{m-1,\infty}(\Omega)$ について次のレゾルベント評価が成立する。

$$N(u_\lambda, \lambda) \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1)$$

このアプリオリレゾルベント評価を示す方針を二重調和作用素 Δ^2 の場合に見てみましょう。まず始めに背理法によってアプリオリ評価が成立しないと仮定すると爆発する解の列 λ_k 、 f_k 、 u_k が取れて次の求めるレゾルベント方程式と逆向きの評価が成立します。

$$\|u_k\|_\infty > \frac{k}{|\lambda_k|} \|f_k\|_\infty.$$

最大値ノルムが 1 になるように次のように正規化します。 $v_k = |\lambda_k|u_k$ とおき ($\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\theta_k}$)

$$\tilde{v}_k = \frac{v_k}{N(v_k, \lambda_k)}, \quad \tilde{f}_k = \frac{f_k}{N(v_k, \lambda_k)}.$$

このとき、 $\frac{1}{k} > \|\tilde{f}_k\|_\infty$ 、 $|\lambda_k| \geq k$ 、 $\|\tilde{v}_k\|_\infty = 1$ となり、次の方程式が得られます。

$$\begin{cases} (e^{i\theta_k} + \frac{\Delta^2}{|\lambda_k|})\tilde{v}_k = \tilde{f}_k & \text{in } \Omega \\ \tilde{v}_k = \frac{d\tilde{v}_k}{dN} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

正規化したのでこのとき 1 に近い値をとるような領域内の点が取れます。

$$\exists x_k \in \Omega \text{ s.t. } |\tilde{v}_k(x_k)| + |\nabla \tilde{v}_k(x_k)| > \frac{1}{2}$$

その点の周りで解を次のようにスケール変換します。

$$\tilde{w}_k = \tilde{v}_k(x_k + \frac{x}{|\lambda_k|^{\frac{1}{4}}}), \quad \tilde{g}_k = \tilde{f}_k(x_k + \frac{x}{|\lambda_k|^{\frac{1}{4}}})$$

このとき、 $\Omega_k = |\lambda_k|^{\frac{1}{4}}(\Omega - x_k)$ 上の次の方程式が得られます。

$$\begin{cases} (e^{i\theta_k} + \Delta^2)\tilde{w}_k = \tilde{g}_k & \text{in } \Omega_k \\ \tilde{w}_k = \frac{d\tilde{w}_k}{dN} = 0 & \text{on } \partial\Omega_k \end{cases} \quad (3)$$

その後次の二つの主張を示すことで矛盾を示します。まず一つ目がコンパクト性の主張で、宮崎 (2006) などの結果から得られる $W^{m,p}$ 評価を元にスケール変換された解の列が原点のある近傍で一様収束する部分列が取れることを示します。このことから特に解の極限が原点の近傍でゼロでないことが従います。その次に一意性の主張で、レゾルベント方程式の極限方程式の解が恒等的にゼロであることを示します。解の極限は極限方程式を満たすので恒等的にゼロであることが分かるので、コンパクト性の議論で得られる事実と合わせて矛盾が得られてアプリオリ評価が示されます。

2.1 レゾルベント方程式の解の存在と一意性、そして半群の構成と解析性について

有界関数の空間での半群の解析性についての先行研究は、無限遠でゼロな連続関数の空間 C_∞ において $(-\infty, \infty)$ 上の二階楕円型作用素の場合に吉田 (1966) により初めて示されて、その後 N 次元の C^{2m} 級領域上の $2m$ 階楕円型作用素の場合に増田 (1972) により示されて、Stewart(1974) により証明が改良されました。また、M. Hieber(1996) で 2 階の場合は任意の領域の場合に半群の解析性が示されました。その後 M. Hieber(2010) や A. Lunardi(1995) に挙げられているように L^∞ 空間での高階の作用素が生成する半群の解析性について楕円型作用素の係数についての仮定を緩める研究は多くされていますが領域の境界の滑らかさの

仮定を緩める研究はあまりされていませんでした。そこで、得られたレゾルベント評価からレゾルベント方程式の弱解の存在と一意性を示し半群の理論を用いて、一様に C^1 級の有界, 非有界領域上の $2m$ 階の発散型楕円型作用素の L^∞ 空間での解析半群の生成定理を示しました。次のように作用素のドメインを定義します。

$$D(L) = \{u \in \cap_{p>n} W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) : u, Lu \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Theorem 2.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を一様 C^1 級領域とする。この時, 作用素 $L : D(L) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ はセクトリアルであり、有界関数空間 $L^\infty(\Omega)$ において解析半群 $\{e^{tL}\}_{t \geq 0}$ を生成する。

レゾルベント方程式の解の存在と一意性の問題を解決すれば先ほどのアприオリレゾルベント評価と合わせて高階楕円型作用素がセクトリアルであるということが示されます。方針としましては、解の構成と一意性は次のように示しました。まず外力を半径を変えながら球領域でカットオフして、 $W^{m,p}$ 評価からレゾルベント方程式の近似解を構成します。そして得られた L^∞ アприオリ評価と組み合わせてアприオリ評価を示す際に行ったコンパクト性の議論とほぼ同様に、近似解の列のある部分列が広義一様収束することを示します。後は得られた極限関数がレゾルベント方程式の解であることを示せば存在が示されます。またアприオリ評価と方程式の線型性から一意性が得られます。以上から楕円型作用素がセクトリアルであることが分かり、ダンフォード積分を用いて半群を構成し解析半群の理論を用いて半群の解析性を示しました。

参考文献

- [1] S-S. Byun, S. Ryu, Gradient estimates for higher order elliptic equations on nonsmooth domains, J. Differential Equations 250(2011) 243-263.
- [2] H. Heck, M. Hieber, K. Stavrakidis, L^∞ -estimates for parabolic systems with VMO-coefficients, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S,3, 299-309(2010).
- [3] M. Hieber, Gaussian estimates and holomorphy of semigroups on L^p spaces, J. London Math. Soc. (2)54(1996) 148-160.
- [4] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995.
- [5] K. Masuda, On the generation of analytic semigroups by elliptic differential operators with unbounded coefficients. unpublished note, (1972).
- [6] V. Maz'ya, M. Mitrea, and T. Shaposhnikova, The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients, J. D'analyse Mathematique, Vol. 110(2010) 167-239.
- [7] Y. Miyazaki, Higher order elliptic operators of divergence form in C^1 or Lipschitz domains, J. Differential Equations, **230**(2006) 174-195.
- [8] H. B. Stewart, Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators. Trans. Amer. Math. Soc., **199**(1974), 141-162.
- [9] T. Suzuki, Analyticity of semigroups generated by higher order elliptic operators in spaces of bounded functions on C^1 domains, (submitted).
- [10] K. Yosida, On holomorphic Markov process, Proc. Japan Acad., **42**(1966), 313-317.

Remarks on the strong maximum principle involving p -Laplacian

Xiaojing Liu, Toshio Horiuchi

January 7, 2015

Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 1$). By Δ_p we denote the p -laplace operator defined by

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad (0.1)$$

In this article, we shall study the strong maximum principle on the following quasilinear operator

$$-\Delta_p + a(x)Q(\cdot). \quad (0.2)$$

Here $1 < p < \infty$, $N \geq 1$, $a \in L^1(\Omega)$ and $Q(\cdot)$ is a nonlinear term satisfying the following properties:

[Q₀] : $Q(t)$ is a strictly increasing and continuous function such that $Q(0) = 0$ and $t \cdot Q(t) > 0$ on $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Moreover we assume in Theorem 1

[Q₁] :

$$\limsup_{|t| \rightarrow 0} \frac{|Q(t)|}{|t|^{p-1}} < \infty. \quad (0.3)$$

Now let us recall some relating known results on the strong maximum principle assuming that $Q(t) = |t|^{p-2}t$ for simplicity. The classical strong maximum principle for a Laplacian asserts that if u is smooth, $u \geq 0$ and $-\Delta u \geq 0$ in a domain (a connected open set) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, then either $u \equiv 0$ or $u > 0$ in Ω . The same conclusion holds when $-\Delta u$ is replaced by $-\Delta + a(x)$ with $a \in L^s(\Omega)$, $s > N/2$. Later these results were extended to the quasilinear operators $-\Delta_p u + a(x)u^{p-1}$ with $1 < p < \infty$, $a \in L^s(\Omega)$, $s > N/p$. These are consequences of a weak Harnack's inequality. See [.....] and [...] for $p = 2$ and [...] for $p > 1$. Another formulation of the same fact says that if $u(x) = 0$ for some point $x \in \Omega$, then $u \equiv 0$ in Ω .

However a similar conclusion does not hold when $a \notin L^s$, for any $s > N/p$.

Example 1. Let B_1 be a unit ball in $\mathbf{R}^N$ with a center being 0 and

$$\begin{cases} u = |x|^\alpha, \alpha > (p - N + 1)/(p - 1), \\ a(x) = c(p, \alpha)|x|^{-p}, \\ c(p, \alpha) = \alpha^{p-1}(\alpha p - \alpha - p + N - 1). \end{cases} \quad (0.4)$$

Then we see $0 \leq a \notin L^{N/p}(B_1)$ and $-\Delta_p u + a(x)u^{p-1} = 0$ in B_1 . Clearly $u(0) = 0$ but $u \not\equiv 0$ in B_1 .

If u vanishes on a larger set, one may conclude that $u \equiv 0$ under some weaker condition on a . When $p = 2$, such a result was obtained by B enilan-Brezis [] in the case where $a \in L^1(\Omega)$ and $\operatorname{supp} u$ is a compact subset of Ω . This maximum principle has been further extended by Ancona []. Later a more direct proof was given by Brezis - Ponce [] in the split of PDE's.

In the present paper we further study the case where $p \in (1, \infty)$ adopting a nonlinearity $Q(t)$ in stead of $|t|^{p-2}t$. Now we describe our main result:

Theorem 1. Let $N \geq 1$, $1 < p < \infty$ and $p^* = \max(0, p - 1)$. Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^N$. Let u be a measurable function on Ω , $u \geq 0$ a.e. in Ω such that $u \in L^1(\Omega)$, $Q(u) \in L^1(\Omega)$, $|\nabla u| \in L_{loc}^{p^*}(\Omega)$ and $\Delta_p u$ is a Radon measure on Ω . Then we have the followings:

1. There exists $\tilde{u} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ quasicontinuous such that $u = \tilde{u}$ a.e. in Ω .
2. Let $a \in L^1(\Omega)$, $a \geq 0$ a.e. in Ω . If

$$-\Delta_p u + a(x)Q(u) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad (0.5)$$

in the following sense

$$\int_E \Delta_p u \, dx \leq \int_E aQ(u) \, dx \quad \text{for every Borel set } E \subset \Omega, \quad (0.6)$$

and if $\tilde{u} = 0$ on a set of positive p -capacity in Ω , then $u = 0$ a.e. in Ω .

Remark 0.1. 1. In the section 2 the definitions of quasicontinuity and p -capacity denoted by $C_p(E, \Omega)$ are given together with their fundamental properties.

2. In (0.4), $u = |x|^\alpha$ satisfies $-\Delta_p u + a(x)u^{p-1} = 0$ in B_1 . If $p > N$, then $C_p(\{0\}, B_1) > 0$ holds. But we note that $a \notin L^1(B_1)$.

Remark 0.2. Let us set $Q(t) = |t|^{q-2}t$ for $q > 1$ which clearly satisfies $[\mathbf{Q}_0]$. Then the condition $[\mathbf{Q}_1]$ is satisfied if and only if $q \geq p$. In this case Example 2 below shows the necessity of the condition $[\mathbf{Q}_1]$.

In order to study the necessity of the condition $[\mathbf{Q}_1]$ in Theorem, let us introduce another condition $[\mathbf{Q}_2]$.

$[\mathbf{Q}_2]$: There exists a $q \in (1, p)$ such that we have

$$\liminf_{|t| \rightarrow 0} \frac{|Q(t)|}{|t|^{q-1}} > 0 \quad (0.7)$$

Then we have the following.

Example 2. We assume that $\Omega = B_1$, the conditions $[\mathbf{Q}_0]$ and $[\mathbf{Q}_2]$, and we fix a nonnegative integer $m \leq N - 1$.

Let $\mathcal{M}_0 = \{0\}$ and let $\mathcal{M}_m \subset \mathbf{R}^N$ for $m > 0$ be an m dimensional linear subspace defined by

$$\mathcal{M}_m = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^N : y_{m+1} = y_{m+2} = \dots = y_N = 0\}, \quad (0.8)$$

and we put $K_m = \mathcal{M}_m \cap \overline{B_{1/2}}$. Let us set

$$d_m(x) = \text{dist}(x, \mathcal{M}_m) \equiv \sqrt{\sum_{k=m+1}^N x_k^2}. \quad (0.9)$$

Then clearly $d_m \in C^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \mathcal{M}_m)$ and $|\nabla d_m(x)| = 1$ in $\mathbf{R}^N \setminus \mathcal{M}_m$. Now we construct a null solution U for (0.2) in B_1 of the form

$$U(x) = d_m(x)^\alpha \quad (0.10)$$

as before. By a direct calculation we have

$$-\Delta_p U + a(x)Q(U) = 0 \quad \text{in } B_1, \quad (0.11)$$

where

$$a(x) = \frac{\Delta_p U}{Q(U)} = \frac{U^{q-1}}{Q(U)} \alpha^{p-1} (d_m \Delta d_m + (\alpha - 1)(p - 1)) d_m^{\alpha(p-q)-p}.$$

Here we note that

$$d_m(x) \Delta d_m(x) = N - m - 1. \quad (0.12)$$

By virtue of $[\mathbf{Q}_2]$ we have for a sufficiently large $\alpha > 0$

$$0 \leq a(x) \leq C d_m(x)^{\alpha(p-q)-p} \in L^1(B_1), \quad \text{for some positive constant } C.$$

Clearly $U = 0$ on $K_m \subset \mathcal{M}_m$ and $U \not\equiv 0$.

Now we choose a nonnegative interger m so that $m > N - p$.

Then it follows from Lemma 1(2) that $C_p(K_m, B_1) > 0$ provided that $1 < p < N$. If $p > N$, then we set $m = 0$ and $K_0 = \mathcal{M}_0 = \{0\}$ so that we have $C_p(\{0\}, B_1) > 0$. Lastly we assume $1 < p = N$. Again it follows from Lemma 1(2) that we have $C_{N-\eta}(K_1, B_1) > 0$ for a sufficiently small $\eta > 0$. Hence $C_N(K_1, B_1) > 0$ by a Hölder inequality.

Lemma 1. Let p satisfy $1 < p < N$ and let E be a compactum in B_1 .

1. Assume that $H_{N-p+\varepsilon}(E) > 0$ for some $\varepsilon > 0$. Then $C_p(E, B_1) > 0$.
2. Assume that a nonnegative integer m satisfies $N - p < m (\leq N - 1)$. Then $C_p(K_m, B_1) > 0$, where $K_m = \mathcal{M}_m \cap \overline{B_{1/2}}$.

Here by $H_d(E)$ for $0 \leq d \leq N$ we denote a d -dimensional Hausdorff measure.

Proof: The assertion 1 is a fundamental property of capacity. For instance see [; Proposition 3.1].

Since $\dim \mathcal{M}_m = m$, we see $H_{N-p+\varepsilon}(K_m) > 0$ for a sufficiently small $\varepsilon > 0$. Hence the assertion 2 is a direct consequence of the previous one. $\square$

Then we have the following.

Proposition 0.1. Let us set $Q(t) = |t|^{q-2}t$ for $1 < q$. Then, in the hypotheses of theorem 1 the condition $[\mathbf{Q}_1]$ is necessary.

Proof: If $1 < q < p$, then Q satisfies $[\mathbf{Q}_2]$ and we already have the counter-examples. $\square$

Definition 0.1. Definitions of $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ and $W^{1,p}(\Omega)$ and p -capacity.

$L_{loc}^1(\Omega)$ -functions are an important class of distributions, but we can usefully refine that class by studying functions whose distributeonal derivatives are also $L_{loc}^1(\Omega)$ -function. This class is denoted by $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Furthermore, just as $L_{loc}^p(\Omega)$ is related to $L_{loc}^1(\Omega)$ we can also define the class of functions $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ for each $1 \leq p \leq \infty$. Thus,

$$W_{loc}^{1,p} = \{f : \Omega \rightarrow C : f \in L_{loc}^p(\Omega) \text{ and } \partial_i f, \text{ as a distribution in } D'(\Omega), \\ \text{is an } L_{loc}^p(\Omega)\text{-fuction for } i = 1, \dots, n\}.$$

Definition 0.2. The p -capacity of a compact set $\Sigma \subset \Omega$ is defined as

$$C_p(\Sigma, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 1 \text{ in some neighborhood of } \Sigma \right\}.$$

Definition 0.3. In this paper we shall consider the operators defined by

$$L_p(u) = \Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

Definition 0.4. We recall that a function $v: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ is quasicontinuous if there exists a sequence of open subsets (ω_n) of Ω such that $v|_{\Omega \setminus \omega_n}$ is continuous $\forall n \geq 1$ and $\operatorname{cap} \omega_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, where $\operatorname{cap} \omega_n$ denotes the H^1 -capacity of ω_n .

Bibliography

A.Ancona[1], Une propriété d'invariance des ensembles absorbants par perturbation d'un opérateur elliptique, Comm.PDE4(1979),p321-337.

P.Bénilan and H.Brezis[1], Nonlinear problems related to the Thomas-Fermi equation, to appear.

J.Deny[1], Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels, Séminaire de Théorie du Potentiel, dirigé par M.Brelot, G. Choquet et J.Deny; 9^{ème} année, 1964/65, n°1

T.Kato[1], Schrödinger operators with singular potentials. Israel J.Math.13(1972),p135-148.

H.Lewy and G.Stampacchia[1], On the regularity of the solution of a variational inequality, Comm.Pure Appl.Math.22(1969),153-188.

G.Stampacchia[1], "Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus", Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1966.

N.Trudinger[1], Linear elliptic operators with measurable coefficients, Ann. Scuola Norm.Sup. Pisa27(1973),p265-308.

Elliott H. Lieb and Michael Loss, Analysis, 1997, p132.

Louis Dupaigne and Augusto C.Ponce, Singularities of Positive Supersolutions in Elliptic PDEs, 2-Some remarks about the p-capacity.

HAÏM BREZIS AND AUGUSTO C. PONCE, Remarks on the strong maximum principle.

NEIL S, TRUDIGER, linear elliptic operators with measurable coefficients (1973)p265-308.

GUIDO STAMPACCHIA, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus(1965)p189-257.

Scattering problem for semilinear wave equation with a potential

谷口 晃一 中央大学大学院理工学研究科 修士課程 2 年

1 導入

次の半線形波動方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで $p > 1$ とし, ポテンシャル $V(x)$ は次を満たす非負な実数値可測関数とする.
 $c_0, \epsilon_0 > 0$ に対して

$$0 \leq V(x) \leq \frac{c_0}{|x|^2(|x|^{\epsilon_0} + |x|^{-\epsilon_0})}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

が成り立つとし, さらに, $V(x) \in C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $0 < \alpha < 1$ と仮定する. ここで, $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の局所 Hölder 連続な関数の空間である. 本講演では, Georgiev-Visciglia [1] によって示された全空間におけるポテンシャル付き波動方程式に対する Strichartz 評価を用いて, 初期値問題 (1.1) の時間大域解の存在と散乱問題を考える.

2 Besov 空間

本研究では, 斉次 Besov 空間を用いて時間大域解の存在の結果を記す. 以下, 斉次 Besov 空間を導入する. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を Schwartz 空間とし, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の双対空間とする. また $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を Littlewood-Paley の 2 進単位分解とする:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &\geq 0, \quad \text{supp } \hat{\phi} \subset \{\xi : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \quad \hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(|\xi|) \\ \hat{\phi}_j(\xi) &= \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1 \quad (\xi \neq 0). \end{aligned}$$

ここで, $\hat{\phi}$ は ϕ の Fourier 変換である.

Definition 2.1 (斉次 Besov 空間). “ $1 \leq p, q \leq \infty, s < d/p$ ” あるいは “ $1 \leq p \leq \infty, q = 1, s = d/p$ ” とする. このとき, $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)}$ を

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\phi_j * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^q \right\}^{1/q} \quad (2.1)$$

と定義し, 斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ を

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{S}' \mid f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j * f \text{ in } \mathcal{S}', \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\} \quad (2.2)$$

と定義する.

Remark 2.1. 通常, 斉次 Besov 空間は,

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \mid \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\} \quad (2.3)$$

と定義する. ここで, $\mathcal{P}$ は多項式全体のなす線形空間である. $f \in \mathcal{S}'$ に対して, $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ はノルムの条件を満たしていない. 実際, 任意の $f \in \mathcal{P}$ に対して, $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = 0$ となる. このような事情から斉次 Besov 空間を定義する場合は, (2.3) のように $\mathcal{S}'$ ではなく $\mathcal{S}'$ の部分集合 $\mathcal{P}$ で $\mathcal{S}'$ を割った, 商空間 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ で考えなければならない (澤野 [3], Triebel [4] を参照). しかしながら, (2.3) で定義された Besov 空間は商空間であるため, そのままでは偏微分方程式に応用することが出来ない. そのため, (2.2) で定義された Besov 空間を導入する必要がある. “ $1 \leq p, q \leq \infty, s < d/p$ ” あるいは “ $1 \leq p \leq \infty, q = 1, s = d/p$ ” という条件の下で, (2.2) で定義された Besov 空間と (2.3) で定義された Besov 空間が Banach 空間として同型であることが知られている (Kozono-Yamazaki [2], 澤野 [3] を参照).

以下, $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ は (2.3) で定義された Besov 空間とする.

3 Strichartz 評価式

この節では, (1.1) の局所可解性や大域的挙動の研究において重要な道具である Strichartz 評価式について述べる. (1.1) の分散型評価式と Strichartz 評価式はすでに Georgiev-Visciglia [1] によって示されている.

指数の組 (s, θ, p) が “許容指数組” であるとは, 次を満たすときをいう:

$$0 < s < 3, \quad 2 < \theta, q < \infty, \quad \frac{1}{\theta} = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - s, \quad 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \leq s.$$

Lemma 3.1 (Strichartz 評価, [1]). $0 \leq s < 3/2$ とし, (s, θ, q) を許容指数組, θ', q' は $1/\theta + 1/\theta' = 1/q + 1/q' = 1$ を満たす実数とする. 次の非斉次波動方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = F & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

の解 u に対して次が成り立つ.

$$\|u\|_{L^\theta \dot{B}_{q,2}^0} + \|u\|_{L^\infty \dot{H}^s} \leq C(\|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s-1}} + \|F\|_{L^{\theta'} \dot{B}_{q',2}^{2s-1}}).$$

4 主結果

Strichartz 評価を用いて縮小写像の原理を適用することで (1.1) の局所可解性を得ることができる. さらにエネルギー空間 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ 上では, エネルギー不等式が成り立ち, それを用いることで時間局所解を時間大域的に延長できる. また, 非線形項 $|u|^{p-1}u$ の指数 p が Sobolev 臨界指数のときは, 初期値を十分小さくとれば, (1.1) の大域可解性を得ることができる. このことを次の定理にまとめる.

p_s を空間 3 次元における Sobolev 臨界指数とする:

$$p_s = 1 + \frac{4}{3-2s}.$$

Theorem 4.1 (時間大域解). $1/2 \leq s < 3/2$ とする.

(i) $1 < p < p_s$ かつ $p \in \mathbb{N}$ のとき, ある許容指数組 $(1, \theta, q)$ が存在し, 任意の初期値 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ に対してある時刻 $T > 0$ が存在し, 初期値問題 (1.1) の時間局所解 u が $C((-T, T); \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\theta((-T, T); \dot{B}_{q,2}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ で一意的存在する. 特に, $s = 1$ のときは $T = \infty$ とすることができる.

(ii) $p = 1 + 4/(3-2s) \in \mathbb{N}$ のとき, 十分小さい初期値 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ に対して, 初期値問題 (1.1) の時間大域解 u が $C(\mathbb{R}; \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^6(\mathbb{R}; \dot{B}_{\frac{18}{5},2}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ で一意的存在する.

次に, エネルギー空間上で初期値問題 (1.1) の解が次の線形波動方程式:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = w_0(x), \partial_t w(x, 0) = w_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4.1)$$

の解に漸近することを示す. E をエネルギー空間 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ とし, エネルギーノルムを

$$\|u(t)\|_E \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{2} \left\{ \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right\} \right]^{1/2},$$

により定義する. $U(t)$ を (1.1) の解作用素, $U_0(t)$ を (4.1) の解作用素とする :

$$U(t)\mathbf{f} = (u(t), \partial_t u(t)), \quad U_0(t)\mathbf{f} = (w(t), \partial_t w(t)) \quad \text{for any } \mathbf{f} \in E.$$

エネルギー空間 E の部分集合 E_R を

$$E_R \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{f} = (u_0, u_1) \in E : \|\mathbf{f}\|_E \leq R\},$$

により定義する.

Theorem 4.2 (波動作用素の存在). ある定数 $R > 0$ が存在し, 次の (i)–(ii) が成り立つ.

(i) 任意の $\mathbf{f} = (u_0, u_1) \in E_R$ に対して, 次を満たす $\mathbf{f}^\pm \in E$ が存在する:

$$\|U(t)\mathbf{f} - U_0(t)\mathbf{f}^\pm\|_E \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \pm\infty).$$

(ii) 波動作用素 $W_\pm : E_R \rightarrow E$ を

$$W_\pm \stackrel{\text{def}}{=} s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_0(-t)U(t) : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}^\pm$$

で定義する. このとき, 波動作用素 $W_\pm$ は E_R から $\text{Ran}(W_\pm)$ への全単射である.

本研究は, 今回述べた時間大域解, 散乱問題の結果を外部領域に拡張することを目指としている.

参考文献

- [1] V. Georgiev and N. Visciglia, *Decay estimates for the wave equation with potential*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 7-8, 1325–1369.
- [2] H. Kozono and M. Yamazaki, *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), no. 5-6, 959–1014.
- [3] 澤野 嘉宏, ベゾフ空間論, 日本評論社, 2011.
- [4] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Monogr. Math., vol. 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

波束変換を用いた散乱理論の展開*

米山 泰祐

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士1年

E-mail: t.yoneyama226@gmail.com

1 導入

本研究では, 次の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u - V(t, x)u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(t_0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで, V に「短距離型」と呼ばれる以下の仮定をする.

仮定 (A). $V(t, x)$ は $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の可測な実数値関数で, ある $\delta > 1$ があって

$$|V(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-\delta}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

となる $C > 0$ が存在する.

上記の仮定のもとでは, $u(t_0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ から (1) の解 $u(t) \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ への対応は一意に定まる (K. Kobayasi [6] 参照) ので, 写像 $u_0 \mapsto u(t)$ を $U(t, t_0)$ と書き, (1) に対する発展作用素と呼ぶ. また, 自由 Schrödinger 作用素を $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ とする. これらの作用素を用いて波動作用素を定義する.

定義 1. (波動作用素) 次の式の右辺の強極限が存在するとき,

$$W_{\pm} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t)e^{\frac{1}{2}it\Delta}$$

とおき, $W_{\pm}$ を波動作用素と呼ぶ.

本研究では以下のことを示すことができた.

定理 1. (A) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し, $L^2(\mathbb{R}^n)$ での $t \rightarrow \pm\infty$ のときの

$$U(0, t)e^{\frac{1}{2}it\Delta}u_0$$

の極限が存在する. すなわち, 波動作用素 $W_{\pm}$ が存在する.

*本研究は指導教員である加藤 圭一先生との共同研究に基づくものである

本研究では、時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式に対する波動作用素の存在および完全性について波束変換という変換を用いて考える。ポテンシャルが時間に依存しない場合は、古くから [1], [7] などにより波動作用素の存在が示されている (Cook-Kuroda の方法)。V. Enss [2] は古典軌道の振る舞いを考えることにより、波動作用素の存在に対する別の証明を与えた。その後、D. R. Yafaev [8] は時間に依存するポテンシャルに対しての波動作用素の存在および完全性を示した。本研究では波束変換を用いて、発展作用素を積分方程式で表し、それらを評価していくことで、時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式に対する波動作用素の存在を示し、D. R. Yafaev の結果 [8] に対する別証明を与える。また、本研究では短距離型の条件 ($\delta > 1$) を仮定しているが、 $0 < \delta \leq 1$ のときは上記の波動作用素は存在しないことが知られている。しかし、 $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ の部分を適当に修正した修正波動作用素の存在が H. Kitada-K. Yajima [5] により示されている。

2 波束変換

本研究の証明で用いる波束変換についての性質を述べる。

定義 2. (Wave packet transform)

$\varphi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ とする。このとき $f \in \mathcal{S}'$ に対し、 φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x, \xi)$ を

$$W_\varphi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

で定める。

波束変換には次のような性質が成り立つ。

命題 1. $\varphi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'$ とする。このとき次が成立する。

- (i) $W_\varphi f(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.
- (ii) u, φ が t にも依存する場合

$$\begin{aligned} W_{\varphi(t)}[\partial_x f](t, x, \xi) &= -i\xi W_{\varphi(t)}[f](t, x, \xi) + W_{\partial_x \varphi(t)}[f](t, x, \xi), \text{ in } \mathcal{S}', \\ W_{\varphi(t)}[\partial_t f](t, x, \xi) &= \partial_t W_{\varphi(t)}[f](t, x, \xi) - W_{\partial_t \varphi(t)}[f](t, x, \xi), \text{ in } \mathcal{S}'. \end{aligned}$$

- (iii) $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ならば、 $W_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ であり、

$$\begin{aligned} (W_\varphi f, W_\psi g)_{L^2(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)} &= \overline{(\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}} (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= (\psi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. [3] 参照。 □

3 証明のアイデア

本研究では, K. Kato – M. Kobayashi – S. Ito [4] と同様に φ を時間発展させることにより, 証明を行う. 以降, $\varphi_0 \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする.

$\varphi(t) = e^{\frac{1}{2}i(t-t_0)\Delta}\varphi_0$ に対し, (1) を波束変換する. 命題 1 より, 部分積分や積の微分を用いることで

$$\begin{aligned} W_{\varphi(t)}[\Delta u](t, x, \xi) &= \int \overline{\varphi(t, y-x)} \Delta u(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= \int \Delta \overline{\varphi(t, y-x)} u(y) e^{-iy\xi} dy \\ &\quad + \int (-2i\xi \cdot \nabla_y) \overline{\varphi(t, y-x)} u(y) e^{-iy\xi} dy - |\xi|^2 \int \overline{\varphi(t, y-x)} u(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= W_{\Delta\varphi(t)} u(t, x, \xi) + 2i\xi \cdot \nabla_x W_{\varphi(t)} u(t, x, \xi) - |\xi|^2 W_{\varphi(t)} u(t, x, \xi). \end{aligned}$$

$W_{\varphi(t)}[\partial_t u](t, x, \xi) = i\partial_t W_{\varphi(t)} u(t, x, \xi) + W_{i\partial_t \varphi(t)} u(t, x, \xi)$ であるから,

$$(2) \quad \begin{cases} \left(i\partial_t + i\xi \cdot \nabla_x - \frac{1}{2}|\xi|^2 \right) W_{\varphi(t)} u(t, x, \xi) = W_{\varphi(t)}[V(t)u](t, x, \xi), \\ W_{\varphi_0} u(0, x, \xi) = W_{\varphi_0} u_0(x, \xi). \end{cases}$$

と変換できる. (2) の右辺を非斉次項と見なし, 特性曲線の方法を用いると,

$$\begin{aligned} W_{\varphi(t)}[U(t, 0)u_0](t, x, \xi) &= e^{-i\frac{1}{2}t|\xi|^2} W_{\varphi_0} u_0(x - t\xi, \xi) \\ &\quad - i \int_0^t e^{-i\frac{1}{2}(t-s)|\xi|^2} W_{\varphi(s)}[V(s)u](s, x - (t-s)\xi, \xi) ds \end{aligned}$$

と表せる. 一方, 自由 Schrödinger 作用素を波束変換したものは

$$W_{\varphi(t)}[e^{-\frac{1}{2}it\Delta}u_0](t, x, \xi) = e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} W_{\varphi_0} u_0(x + t\xi, \xi)$$

と表せる.

このとき, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\begin{aligned} (U(0, t)e^{it\Delta}u_0, \psi) &= (u_0, e^{-it\Delta}U(t, 0)\psi) \\ &= C_{\Phi, \varphi_0}(W_{\Phi}u_0, W_{\varphi_0}[e^{-it\Delta}U(t, 0)\psi]) \end{aligned}$$

と変形し, 上の 2 式を用いると

$$\begin{aligned} W_{\varphi_0}[e^{-it\Delta}U(t, 0)\psi](x, \xi) &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} W_{\varphi(t)}[U(t, 0)\psi](x + t\xi, \xi) \\ &= W_{\varphi_0}\psi(x, \xi) - i \int_0^t e^{i\frac{1}{2}s|\xi|^2} W_{\varphi(s)}[V(s)\psi](s, x + s\xi, \xi) ds. \end{aligned}$$

第 1 項は t に依っていないので, u_0, φ_0 をうまく取ることによって, 第 2 項の可積分性を導く. これにより波動作用素の存在が示せる. 可積分性を導く際, 粒子の古典軌道を考え, それに沿う部分と沿わない部分に分けて議論する必要があるが, 波束変換によって変換された関数は相空間 $(x - \xi \text{ 空間})$ 上の関数となるので, その場合分けを容易に行えるのが本研究の特徴である.

参考文献

- [1] J. Cook, Convergence to the Møller wave matrix. *J. math. Phys.* 36 (1957), 82–87.
- [2] V. Enss, Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, *Commun. Math. Phys.* 61 (1978), 285–291.
- [3] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications. *Tohoku Math. J.* (2) 64 (2012), no. 2, 223–231.
- [4] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, *SUT Journal of Mathematics* Vol. 47, No. 2 (2011), 175–183.
- [5] H. Kitada, K. Yajima, A scattering theory for time-dependent long-range potentials, *Duke Math. J.* 49, (1982), 341–376.
- [6] K. Kobayasi, On a theorem for a linear evolution equation of hyperbolic type, *J. Math. Soc. Japan* 31 (1979), 647–654.
- [7] S. Kuroda, On the existence and the unitary property of the scattering operator. *Nuovo Cimento, X. Ser.* 12 (1959), 431–454.
- [8] D. R. Yafaev, On the violation of unitarity in time-dependent potential scattering, *Soviet Math. Dokl.* 19 (1978), 1517–1521 (English trans, from Russian).

準線形波動方程式の初期値問題の可解性

富澤 佑季乃 (中央大学)*

概 要

準線形波動方程式の初期値問題について論じる。Banach 空間における非自励微分方程式の初期値問題は、ある条件を満たす距離に似た汎関数を設定することで局所解および大域解の存在と一意性を示せる。本文では、この抽象的結果を準線形波動方程式に応用した場合の具体例を紹介する。

本結果は、小林良和教授（中央大学）と田中直樹教授（静岡大学）との共同研究に依るものである。

1. 導入：準線形波動方程式

次の準線形波動方程式の初期値問題を考える: $t \in [0, \infty)$ と $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x v, \\ \partial_t v = \partial_x \sigma(t, u) - \gamma v, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \end{cases} \quad (\text{IVP}; 0, (u_0, v_0))$$

ただし γ は正の定数であり, $\sigma(\cdot, \cdot)$ は $[0, \infty) \times \mathbf{R}$ 上の滑らかな実数値関数で次を満たす:

- (i) $\sigma(t, 0) = 0$ かつ, 正の定数 δ_0 が存在して, $(t, r) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$ に対して $\sigma_r(t, r) \geq \delta_0$.
- (ii) 正の定数 L_0 が存在して, $t \in [0, \infty)$ に対して $\|\sigma_r(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq L_0$, $\|\sigma_{rr}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq L_0$ かつ $\|\sigma_{rrr}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq L_0$.
- (iii) 連続な可積分関数 $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在して, $t \in [0, \infty)$ に対して $\|\sigma_{tr}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq h(t)$.

この偏微分方程式の問題は、常微分方程式の形に書き直す事で可解性が示される。

2. 準備：非自励微分方程式と解の存在

$(X, \|\cdot\|)$ を実 Banach 空間とする. $-\infty < a < b \leq \infty$ とし, $\Omega \subset [a, b) \times X$ を $t \in [a, b)$ に対して $\Omega(t) := \{x \in X : (t, x) \in \Omega\} \neq \emptyset$ を満たす集合とする. $A: \Omega \rightarrow X$ を関数とする. $(\tau, z) \in \Omega$ を与えて, 次の非自励微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t, u(t)), & \tau \leq t < b, \\ u(\tau) = z. \end{cases} \quad (\text{IVP}; \tau, z)$$

$J \subset [a, b)$ を $[\tau, c]$ または $[\tau, c)$ の形をした部分区間とする. X -値連続関数 $u: J \rightarrow X$ が J 上で微分可能, $t \in J$ に対して $(t, u(t)) \in \Omega$, $u(\tau) = z$ かつ $u'(t) = A(t, u(t))$ を満たすとき, u は $(\text{IVP}; \tau, z)$ の J 上の(局所)解と言う. $(\text{IVP}; \tau, z)$ の $[\tau, b)$ 上の解は大域解と言う. ここで次の条件を考える.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A12, 47J35

キーワード: Nonautonomous differential equations, initial-value problems, metric-like functionals, evolution operators

* 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学科

e-mail: tomizawa@gug.math.chuo-u.ac.jp

- (Ω1) (連続性条件) A は Ω の上から X への写像として連続である.
- (Ω2) (閉性条件) $n = 1, 2, \dots$ に対して $(t_n, x_n) \in \Omega$ とする. もし $n \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{R}$ 内で $t_n \uparrow t \in [a, b]$ かつ X 内で $x_n \rightarrow x$ ならば, $(t, x) \in \Omega$ となる.
- (Ω3) (劣接線条件) $(t, x) \in \Omega$ に対して $\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(x + hA(t, x), \Omega(t+h)) = 0$ となる. ただし $d(x, S)$ は $x \in X$ から $S \subset X$ までの距離を表わす.
- (Ω4) (消散条件) 連続関数 $\omega : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ が存在して, $t \in [a, b]$ と $x, y \in \Omega(t)$ に対して次が成り立つ.

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (V(t+h, x+hA(t, x), y+hA(t, y)) - V(t, x, y)) \leq \omega(t)V(t, x, y).$$

ただし $V(t, \cdot, \cdot)$ は次の条件 (V1)–(V4) を満たし, $t \in [a, b]$ をパラメーターとする $X \times X$ 上の汎関数の族である:

- (V1) $L > 0$ が存在して, $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X$, $t \in [a, b]$ に対して次が成り立つ:

$$|V(t, x, y) - V(t, \hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|).$$

- (V2) すべての $t \in [a, b]$, $x \in \Omega(t)$ に対して $V(t, x, x) = 0$.

$n = 1, 2, \dots$ に対して $t_n \in [a, b]$, $(x_n, y_n) \in \Omega(t_n) \times \Omega(t_n)$ とする.

- (V3) もし $n \rightarrow \infty$ のとき $t_n \rightarrow t \in [a, b]$ かつ $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \Omega(t) \times \Omega(t)$ ならば, $n \rightarrow \infty$ のとき $V(t, x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(t_n, x_n, y_n)$ となる.

- (V4) もし $n \rightarrow \infty$ のとき $t_n \rightarrow t \in [a, b]$ かつ $V(t_n, x_n, y_n) \rightarrow 0$ ならば, $n \rightarrow \infty$ のとき $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ となる.

(Ω1)–(Ω4) を仮定する. このとき, 初期値問題 (IVP; τ, z) の解の一意性や存在はそれぞれ次で示される.

定理 1 (解の一意性). $[\tau, c] \subset [a, b]$ かつ $i = 1, 2$ に対して $z_i \in \Omega(\tau)$ とする. 各 $i = 1, 2$ に対して u_i は (IVP; τ, z_i) の $[\tau, c]$ 上の解とする. このとき $t \in [\tau, c]$ に対して

$$V(t, u_1(t), u_2(t)) \leq \exp\left(\int_{\tau}^t \omega(s) ds\right) V(\tau, z_1, z_2).$$

特に $z_1 = z_2$ ならば, $t \in [\tau, c]$ に対して $u_1(t) = u_2(t)$.

定理 2 (局所解の存在). $(\tau, z) \in \Omega$ とする. R と M は正の数で $\tau + R < b$ かつ $|s - \tau| < R$ と $\|y - z\| < R$ を満たす $(s, y) \in \Omega$ に対して $\|A(s, y)\| \leq M$ を満たすとする. $T \in (0, R/(M+1))$ とする. このとき (IVP; τ, z) の $[\tau, \tau+T]$ 上の一意解 u が存在して, $t, s \in [\tau, \tau+T]$ に対して $\|u(t) - u(s)\| \leq M|t - s|$ を満たす.

定理 3 (大域解の存在). C を Ω の連結成分とし, $c := \sup\{t \in [a, b] : C(t) \neq \emptyset\}$ とする. このとき各 $(\tau, z) \in C$ に対して (IVP; τ, z) の $[\tau, c]$ 上の一意解が存在して, 区間 $[\tau, c]$ は解が存在する最大区間である. 特に Ω が連結であるとき, $(\tau, z) \in \Omega$ に対して (IVP; τ, z) は一意な大域解をもつ.

図 1: Ω の連結成分 C と局所解

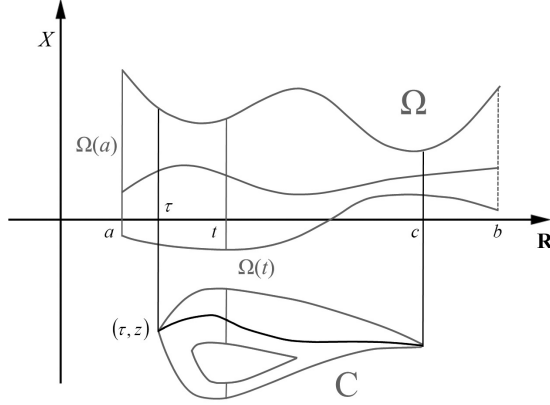
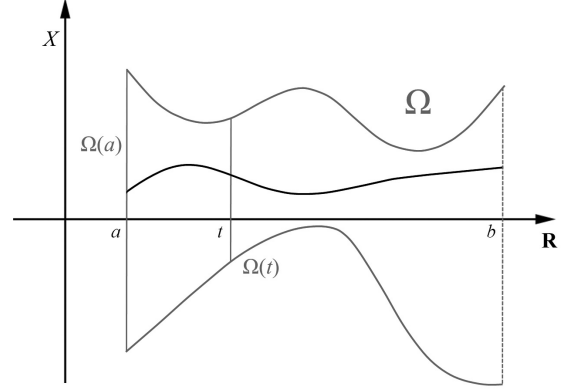


図 2: 自身が連結な Ω と大域解



3. 結果：準線形波動方程式の可解性

3.1. 部分集合 Ω

空間 $X = L^2(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})$ とし、ノルムを $\|(u, v)\| := (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2)^{1/2}$ とする。 $(u, v) \in H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$ と $t \in [0, \infty)$ に対して汎関数 $H : [0, \infty) \times H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} H(t, u, v) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^u \sigma(t, r) dr + \frac{1}{2} v^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_r(t, u) (\partial_x u)^2 + (\gamma u + \partial_x v)^2) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_r(t, u) (\partial_x^2 u)^2 + (\gamma \partial_x u + \partial_x^2 v)^2) dx. \end{aligned}$$

このとき定数 $C_0 \geq c_0 > 0$ が存在して、 $(u, v) \in H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$ と $t \in [0, \infty)$ に対して

$$c_0 \|(u, v)\|_{H^2 \times H^2}^2 \leq H(t, u, v) \leq C_0 \|(u, v)\|_{H^2 \times H^2}^2$$

を満たす。また $(t, u, v) \in [0, \infty) \times H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$ に対して汎関数 $\hat{H} : [0, \infty) \times H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する：

$$\hat{H}(t, u, v) := \exp \left(-\frac{1}{c_0} \int_0^t h(s) ds \right) H(t, u, v).$$

初期値問題 (IVP; $0, (u_0, v_0)$) に対して γ と $\sigma(\cdot, \cdot)$ のみに依存する連続な非減少関数 $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在して、 $g(0) = 0$ かつ「ある条件」を満たす。ここで小さい数 $R_0 > 0$ を次を満たすようにとる：

$$\text{もし } r \geq 0 \text{ かつ } r^2 \leq \frac{R_0}{c_0} \exp \left(\frac{1}{c_0} \int_0^\infty h(s) ds \right) \text{ ならば } g(r) < \gamma \delta_0.$$

このとき部分集合 $\Omega \subset [0, \infty) \times X$ を次で定義する：

$$\Omega := \{(t, (u, v)) \in [0, \infty) \times (H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})) : \hat{H}(t, u, v) \leq R_0\}.$$

3.2. 汎関数 $V(t, \cdot, \cdot)$

汎関数 V を次で定義する: $(u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in X$ と $t \in [0, \infty)$ に対して

$$V(t, (u, v), (\hat{u}, \hat{v})) := \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{v} - v)^2 dx + \left(\int_u^{\hat{u}} \sqrt{\sigma_r(t, r)} dr \right)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

これは性質 (V1)–(V4) を満たす. 特に各 $t \in [0, \infty)$ に対して $V(t, \cdot, \cdot)$ は X 上の距離であり, $(u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in X$ に対して

$$\min\{1, \sqrt{\delta_0}\} \|(u, v) - (\hat{u}, \hat{v})\| \leq V(t, (u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \leq \max\{1, \sqrt{L_0}\} \|(u, v) - (\hat{u}, \hat{v})\|.$$

3.3. (IVP; $0, (u_0, v_0)$) の可解性

$(t, (u, v)) \in \Omega$ に対して

$$A(t, (u, v)) := (\partial_x v, \partial_x \sigma(t, u) - \gamma v)$$

と定義する. このとき $A : \Omega \rightarrow X$ は条件 $(\Omega 1)$ – $(\Omega 4)$ を満たす. 定理 1, 定理 2 と定理 3 より, 初期値問題 (IVP; $0, (u_0, v_0)$) は (u_0, v_0) が小さいときに一意的な大域解を持つ. さらに次の補題が得られる:

補題 1 (準波動方程式の可解性). $\|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \leq \sqrt{R_0/C_0}$ を満たす任意の $(u_0, v_0) \in H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$ に対して (IVP; $0, (u_0, v_0)$) の一意的な大域解 $(u(\cdot), v(\cdot))$ が存在して,

$$(u(\cdot), v(\cdot)) \in C^1(0, \infty; L^2(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R})) \cap L^\infty(0, \infty; H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})).$$

参考文献

- [1] T. Iwamiya, *Global existence of solutions to nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Hiroshima Math. J., **13** (1983), no. 1, 65–81.
- [2] S. Kato, *Some remarks on nonlinear ordinary differential equations in a Banach space*, Nonlinear Anal., **5** (1981), no. 1, 81–93.
- [3] N. Kenmochi and T. Takahashi, *Nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Anal., Theory, Methods & Applications, **4** (1980), no. 6, 1109–1121.
- [4] Y. Kobayashi and N. Tanaka, *Semigroups of Lipschitz operators*, Adv. Differential Equations, **6** (2001), no. 5, 613–640.
- [5] Y. Kobayashi, N. Tanaka and Y. Tomizawa, *Nonautonomous differential equations and Lipschitz evolution operators in Banach spaces*, submitted.
- [6] V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell and R. W. Mitchell, *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **220** (1976), 103–113.
- [7] R. H. Martin Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 399–414.
- [8] A. Matsumura, *Global existence and asymptotics of the solutions of the second-order quasilinear hyperbolic equations with the first-order dissipation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **13** (1977), no. 2, 349–379.
- [9] H. Murakami, *On non-linear ordinary and evolution equations*, Funkcial. Ekvac., **9** (1966), 151–162.

On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a Stokes curve of loop type

高橋 甫宗 (近畿大総合理工)

1. はじめに

次の1次元定常的Schrödinger方程式を考える.

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x, \eta)\right)\psi(x, \eta) = 0 \quad (1)$$

ここで, η はラージパラメータであり, $Q(x, \eta) = Q_0(x) + \eta^{-1}Q_1(x) + \cdots + \eta^{-n}Q_n(x)$ とする. 各 $Q_i(x)$ はリーマン球面上のある開集合で定義された有理型関数である. 完全WKB解析はこのように, 大きなパラメータを含んだ微分方程式の大域解析を行うための有効な手段の一つであり, ここ30年ほどのうちに急速な発展を遂げてきた[KT]. これまでの具体的な結果としては, 超幾何微分方程式のパラメータについての解の漸近挙動や古典的手法では不可能であった2階Fuchs型微分方程式のモノドロミー行列の計算が可能なものになったことなどが挙げられる. これらの結果を支えているのが「微分方程式の標準形への変換理論」である(以下では単に変換論という). 完全WKB解析は次節に現れるWKB解と呼ばれる形式解とBorel総和法を組み合わせることで, 真の解の情報を引き出すというものであるが, そのためにはBorel和が意味をもたない場所(Borel変換の特異点)を見極めなければならない. ポテンシャル $Q(x, \eta)$ がある仮定をみたしているとき, そのWKB解のBorel変換の特異点の位置は一目でわかるものではないが, 変換論と超局所解析の組み合わせによって標準形と呼ばれる方程式のBorel変換を観察すればよいことになる. 次節以降ではStokes曲線(これもまた後に定義される)がループを描く場合において, ループを含むある単連結領域における変換論がテーマとなる. なお, 本研究は京都大学数理解析研究所の岩木耕平氏および近畿大学の青木貴史氏との共同研究に含まれる.

2. 準備

2.1. WKB解

方程式(1)において, $S(x, \eta) = \psi'/\psi$ とおいて変換することで次のRiccati方程式が得られる:

$$\frac{dS}{dx} + S^2 = \eta^2 Q(x, \eta)$$

この方程式の形式解を $S = \sum_{j=-1}^{\infty} \eta^{-j} S_j$ の形で探す. そして得られた η^{-1} に関する形式的べき級数解をさらに変形し直すことで

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx)$$

という表示を得る. ただし, S_{odd} は形式解の η についての奇数次部分である. この形式解のことをWKB解と呼ぶ. ここで a は $Q_0(x)$ の1位の零点である. 完全WKB解析ではこの零点のことを「単純変わり点」と呼ぶ. 注意すべきは, このWKB解は一般に発散級数ということである. そこで, 解析的解での議論をするために次のBorel総和法を用いる.

2.2. Borel 総和法

定義 α を $\alpha \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ をみたす実数とすると、 $z > 0$ に対する次の形の (z^{-1} に関する) 形式級数

$$f = \exp(\zeta_0 z) \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-\alpha-i} \quad (2)$$

(ζ_0, f_i は定数) に対して、その Borel 変換 $f_B(\zeta)$ を次式で定義する。

$$f_B(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{\Gamma(\alpha+i)} (\zeta + \zeta_0)^{\alpha+i} \quad (3)$$

ただし、 Γ はガンマ関数。さらに次の Laplace 積分

$$\int_{-\zeta_0}^{\infty} \exp(-\zeta z) f_B(\zeta) d\zeta \quad (4)$$

が意味をもつとき、この積分を形式級数 f の Borel 和と呼ぶ。さらに f_i に対して定数 C, A が存在して $|f_i| \leq i! C^i A$ が成り立ち (Borel 変換可能性)、Borel 変換 f_B が ζ 平面内の $\{\zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(\zeta + \zeta_0) = 0, \operatorname{Re}(\zeta + \zeta_0) > 0\}$ を含む領域に解析接続でき、積分 (??) が十分大きな z に対して意味をもつとき、 f は Borel 総和可能であるという。

WKB 解の場合を考えてみる。まず上で定義した WKB 解 ψ は

$$\psi_{\pm} = \exp(\pm a(x)\eta) \sum_{i \geq -1} g_i(x) \eta^{-i-\frac{1}{2}}$$

という形に表現されることに注意すれば、その Borel 変換及び Borel 和は次のようになる：

$$\begin{aligned} \psi_{\pm, B} &= \sum_{i \geq 0} \frac{g_i(x)}{\Gamma(i + \frac{1}{2})} (y \pm a(x))^{i-\frac{1}{2}} \\ \tilde{\psi}_{\pm} &= \int_{\mp a(x)}^{\infty} \exp(-y\eta) \psi_{\pm, B} dy \end{aligned}$$

ここで、 $a(x) = \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx$ である。これらは上述の Borel 総和法の定義において $\zeta = y$, $\zeta_0 = \pm a(x)$, $\alpha = 1/2$, $f_i = g_i(x)$ であると思えばよい。この Borel 和は方程式 (1) の解析的解を与えている。この Borel 和が定義できるのはどのようなときか、その考察には次の Stokes 曲線概念が必要である。

2.3. Stokes 曲線

定義 Stokes 曲線とは方程式

$$\operatorname{Im} \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx = 0$$

によって表される曲線である。

Stokes 曲線は各変わり点から 3 本発生し、変わり点どうしをつなぐ場合に「Stokes 曲線が退化する」という。例えば $Q(x) = x$ のときの Stokes 曲線は変わり点が原点で、そこから等間隔に 3 本の半直線が出る (図 1)。

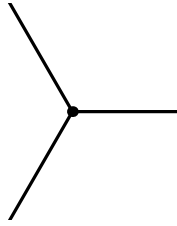


図 1

先程の Borel 和は Stokes 曲線が非退化で、変わり点全てが単純なときに各 Stokes 曲線で区切られた各々の領域 (Stokes 領域という) で Borel 総和可能である [V].

3. 標準形への変換理論

ここでは、方程式 (1) の代わりに独立変数を $\tilde{x}$ とした

$$\left(-\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \eta^2 Q(\tilde{x}, \eta) \right) \tilde{\psi}(\tilde{x}, \eta) = 0 \quad (5)$$

という方程式を考える. ただし, $Q(\tilde{x}) = Q_0(\tilde{x}) + \eta^{-1}Q_1(\tilde{x}) + \cdots + \eta^{-n}Q_n(\tilde{x})$ であると, さらに以下の仮定をみたすものとする:

- $Q_i(\tilde{x}) (0 \leq i \leq n)$ はある原点を含む開集合 U で定義された有理型関数である
- $Q_0(\tilde{x})$ は原点に十分近い点 $p_0 \in U$ を単純変わり点にもつ
- $Q_0(\tilde{x})$ は原点に 2 位の極を持ち $Q_i(\tilde{x}) (i \geq 1)$ は原点を高々 2 位の極にもつ
- U において $Q_0(\tilde{x})$ は他の極や零点を持たない
- $\sqrt{Q_0}$ の原点における留数は純虚数である

これらの仮定のもとでは、方程式 (??) の Stokes 曲線は変わり点から発生し、原点を迂回して再び変わり点に戻ってくるようなループの形を描く (図 2).

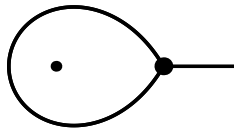


図 2

このループ部分を含む十分小さな円環状領域での変換は既に構成されている [Ta]. この主結果は、上述のようなループ型の Stokes 曲線が生じているような方程式 (??) の WKB 解は、以下の変形 Bessel 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 \frac{x+c}{4x^2} \right) \varphi(x, \eta) = 0 \quad (6)$$

の WKB 解とループ型の Stokes 曲線を含むある円環領域上で定義された (ある形式級数により与えられる) 変数変換で移りあうことであった (この (??) を (??) の標準形と

呼ぶ). さらにこれに加えて我々は [Ta] の結果を改良し, 円環領域だけでなく, ループ型 Stokes 曲線の内部を含む単連結領域全体での変換を構成することに成功した [AIT].

定理 上述の仮定のもとで, ループ型 Stokes 曲線とその内側の領域を含むある単連結領域 U , および U 上の正則函数を係数とする Borel 変換可能な形式級数 $x(\tilde{x}, \eta) = \sum_{j \geq 0} x_j(\tilde{x}) \eta^{-j}$ が存在し, 次が成り立つ:

$$\tilde{\psi}_{\pm}(\tilde{x}, \eta) = \left(\frac{\partial x(\tilde{x}, \eta)}{\partial \tilde{x}} \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\pm}(x(\tilde{x}, \eta), \eta)$$

ここで, $\tilde{\psi}_{\pm}(\tilde{x}, \eta)$ は上述の変わり点で正規化された (??) の WKB 解, $\varphi_{\pm}(x, \eta)$ は同様に変わり点で正規化された (??) の WKB 解である. ただし, c は複素定数であり,

$$c = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\gamma} \sqrt{Q_0(\tilde{x})} d\tilde{x} \right)^2$$

という形で定められる. ここで, γ は U に含まれる原点を反時計回りに回る閉曲線である.

この定理と Voros 係数の Borel 和の解析, 超局所微分作用素などを用いることで一般的な方程式 (??) の WKB 解 $\tilde{\psi}_{\pm}$ の Borel 変換の特異点情報が標準形である (??) のそれを観察することで得られるのである.

参考文献

- [AIT] Aoki. T, Iwaki. K, and Takahashi. T, Exact WKB analysis of Schrödinger equations with a Stokes curve of loop type. in preparation.
- [KT] Kawai, T. and Takei, Y., Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory, Translation of Mathematical Monographs, vol. 227, AMS, 2005.
- [Ta] Takahashi. T, On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a Stokes curve of loop type. to appear.
- [T] Takei Y., Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B10** (2008), 205-224.
- [V] Voros, A., The return of the quartic oscillator, The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), 211-338.

非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理の別証明

李正勲 (名古屋大学)*

2015年03月03日

概 要

この講演では非アルキメデスのグリーン関数を用いた非アルキメデスの力学系におけるモンテルの定理の別証明を紹介する。

1. 導入

P. Montel は [Mont16] で複素平面内の領域上に定義された正則関数の族が一様有界であれば、正規族であることを示した。この結果は、特に、複素力学系理論でジュリア集合の性質を調べる時、非常に大事な役割を果たす。この講演では複素力学系理論に関して詳しく述べないが、興味のある方々には [Miln06] を参照されたい。

L-C. Hsia は [Hs00] で複素力学系理論でのモンテルの定理の類似として非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理を証明し、その応用としてジュリア集合の基本的な性質を調べた。ここで非アルキメデスの力学系理論とは完備かつ非アルキメデスのノルム付き代数的閉体上の射影直線とその体上の有理式写像の組を考える力学系理論である。非アルキメデスの力学系理論の基礎に関しては第2章で、非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理に関しては第3章で詳しく述べる。

この講演の一つの目標は L-C. Hsia が [Hs00] で用いた方法とは別の方法で非アルキメデスのモンテルの定理の証明することである。そこで重要な道具が S. Kawaguchi と J. H. Silverman によって導入された非アルキメデスのグリーン関数である。彼らは [KS09] で複素力学系理論でのグリーン関数の類似として、非アルキメデスの力学系理論でのグリーン関数を導入し、ファトール集合と緊密な関連があることを示した。非アルキメデスのグリーン関数の基礎に関しては第4章で詳しく述べる。また、この講演では複素力学系理論でのグリーン関数に関して詳しく述べないので、興味のある方々には [BH83] を参照されたい。

2. 非アルキメデスの力学系理論

この章では、非アルキメデスの力学系理論の基礎知識に関して述べる。さらに興味のある方々には [Silv07] を参照されたい。

まず、 K を完備かつ非アルキメデスのノルム $|\cdot|$ 付き代数的閉体とし、(K 上の) 射影直線 $\mathbb{P}_K^1$ に以下のように定義された球面距離 ρ を定義する：

$$\rho(z, w) := \frac{|z - w|}{\max\{1, |z|\} \cdot \max\{1, |w|\}} \quad (z, w \in K)$$

位相空間としての性質をまとめると以下のようになる。

2010 Mathematics Subject Classification: 37P40

キーワード：非アルキメデスの力学系理論、非アルキメデスのグリーン関数

* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科

e-mail: m12003v@math.nagoya-u.ac.jp

命題 2.1. 射影直線は球面距離に関して完備距離空間であるが、非コンパクトかつ完全非連結である。

また、射影直線 $\mathbb{P}_K^1$ から自分自身への (K 上の) 有理式写像 f を考える。このとき、与えられた初期値 z_0 に対する点列 $\{f^n(z_0)\}_{n \geq 0}$ の振る舞いを調べることを非アルキメデスの力学系理論の一つの目標にする。また、射影直線 $\mathbb{P}_K^1$ と有理式写像 f の組 $(\mathbb{P}_K^1, f)$ を非アルキメデスの力学系と呼ぶ。

与えられた非アルキメデスの力学系 $(\mathbb{P}_K^1, f)$ のファトール集合 $\mathcal{F}_f$ を写像の族 $\{f^n\}_{n \geq 0}$ の同程度連続性を満たす最大の開集合と定義し、ジュリア集合 $\mathcal{J}_f$ をファトール集合の補集合と定義する。ただし、ここで同程度連続性は射影直線の球面距離に対する同程度連続性を考える。

非アルキメデスの力学系理論でのファトール集合とジュリア集合も以下のような性質を持つ。

命題 2.2. 写像 $f: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ を有理式写像とする。このとき、ファトール集合とジュリア集合は完全不変である。すなわち、

$$f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f \quad \text{と} \quad f(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$$

が成り立つ。

命題 2.2 は非アルキメデスの力学系 $(\mathbb{P}_K^1, f)$ を二つの力学系 $(\mathcal{F}_f, f)$ と $(\mathcal{J}_f, f)$ に分けられることを意味する。すなわち、与えられた初期値がファトール集合に入るかジュリア集合に入るかによって、その軌道全体がファトール集合に入るかジュリア集合に入るかが決まる。ゆえに、二つの独立した力学系を理解することが全体力学系の理解に繋がる。

3. 非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理

この章では、非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理とその応用としてジュリア集合の基本的な性質を見る。さらに興味のある方々には [Silv07] または [Hs00] を参照されたい。

まず、非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理を紹介する。

定理 3.1. 写像 $f: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ を次数 2 以上の有理式写像とする。また、 U を射影直線 $\mathbb{P}_K^1$ の開集合とする。もし、ある相異なる射影直線の元 α と β が存在して、

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) \cap \{\alpha, \beta\} = \emptyset.$$

を満たすならば、有理式写像の反復合成からなる写像の族 $\{f^n\}_{n \geq 0}$ は球面距離に関して U 上同程度連続である。

注 3.2. L-C. Hsia のモンテルの定理はより緩い条件で成り立つ。興味のある方々には [Hs00, Theorem 2.2] を参照されたい

非アルキメデスの力学系理論でのモンテルの定理を応用し次のようなジュリア集合の性質を導くことができる。

系 3.3. 写像 $f: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ を次数 2 以上の有理式写像とする。このとき、次の 1 から 4 が成り立つ。

1. ジュリア集合 $\mathcal{J}_f$ は内部点を持たない。
2. ジュリア集合 $\mathcal{J}_f$ が空集合か非可算集合である。
3. ジュリア集合 $\mathcal{J}_f$ は孤立点を持たない。
4. 任意のジュリア集合の元の逆軌道はジュリア集合の中で稠密である。すなわち、任意の $z_0 \in \mathcal{J}_f$ に対して、

$$\mathcal{J}_f = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\{z_0\})}$$

が成り立つ。

注 3.4. 有理式写像のジュリア集合は空集合であることもある。

4. 非アルキメデスのグリーン関数

この章では、非アルキメデスのグリーン関数を紹介し、ファトール集合との関係を見る。さらに、興味のある方々には [Silv07] と [KS09] を参照されたい。

S. Kawaguchi と J. Silverman は [KS09] で非アルキメデスのグリーン関数を以下のよう

に定義した。

定義 4.1. 写像 $f: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ を次数 d の有理式写像とし、 $F: K \times K \setminus \{0\} \rightarrow K \times K \setminus \{0\}$ を f の一つのリフトとする。このとき、(非アルキメデスの) グーリン関数 G_F を

$$G_F: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[z_1, z_2] \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \cdot \log(|F^n(z_1, z_2)|) - \log(|z_1, z_2|)$$

と定義する。ただし、ここで $|z_1, z_2|$ は $\max\{|z_1|, |z_2|\}$ を意味する。

次の定理は非アルキメデスのグリーン関数とファトール集合との関連性を示す。

定理 4.2. 写像 $f: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ を次数 d の有理式写像とし、 $F: K \times K \setminus \{0\} \rightarrow K \times K \setminus \{0\}$ を f の一つのリフトと、 z を $\mathbb{P}_K^1$ の一つの元と固定する。このとき、次の二つの主張は同値である。

1. グーリン関数 G_F は z のある近傍上で定数関数である。
2. 有理式写像 f は z のある近傍上で球面距離に対して同程度連続である。

定理 4.2 の証明. [KS09, Theorem 6] を参照されたい。 □

参考文献

- [BH83] B. Branner and J. H. Hubbard, *The iteration of cubic polynomials. I. The global topology of parameter space*, Acta Math. 160 **3–4** (1988), pp. 143–206.
- [Hs00] L-C. Hsia, *Closure of periodic points over a non-Archimedean field*, J. London Math. Soc. (3) **62** (2000), pp. 685–700.
- [KS09] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Nonarchimedean Green functions and dynamics on projective space*, Math. Z. 262 **1** (2009) pp. 173–197.
- [Mont16] P. Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **33** (1916), pp. 223–302.

- [Miln06] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Third edition, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [Silv07] J. H. Silverman, *The arithmetic of dynamical systems*, Springer, New York, 2007.

場の量子論のモデルにおける縮退度の評価について

船川大樹 *

北海道大学博士課程 2 年

【概要】

物理系を線形作用素で表現し、その作用素を解析することで元の物理系の性質を調べることは場の量子論での研究方法の一つである。物理系の性質の一つとし、系の安定性がある。これは基底状態と呼ばれるベクトル (作用素のスペクトルの下限に対する固有ベクトル) の存在によって保障される。では基底状態の住んでいる空間 (固有空間) の次元はいくつなのかという疑問も当然湧いてくる。場の量子論ではこの次元の数を縮退度と呼び、本講演は縮退度を上から評価する。

1 モチベーション

本研究は九州大学の廣島氏が 2005 年に行なった研究 [H] の部分的な拡張である。場の量子論において基底状態の存在性を示すこと、及び縮退度を出すことは重要な研究の一つとなっている。基底状態の存在性の証明は [AH][Ht][DG][GLL] などで様々な手法が得られてきた。縮退度についてもいくつか計算方法はあるが、一般論は数少ない。上記の [H] によってボーズ場の種類が少ない場合 (相互作用項が自由ハミルトニアンに対して相対有界な場合) は縮退度を評価する方法が得られた。しかし、ボーズ場が沢山ある場合については未だ分からない。ボース場の種類が多くても、扱う作用素がボソン粒子のみで構成されている場合は汎関数積分の手法から縮退度も評価できる可能性がある。(ボース場の種類が多い例として [W] のモデルがある。) しかし、フェルミオンも考慮した場合は (現段階では) 汎関数積分表示ができないため、縮退度についても分からない。よって、フェルミオンとボソンが共存し、なおかつボーズ場が大量にいる系 (例えば、Wess-Zumino モデル) では縮退度を計算する一般論は得られていない。今回は自由なハミルトニアン H_0 と相互作用 $\{H_j\}_{j=1}^N$ 達によって作られるハミルトニアン

$$H := H_0 + \sum_j^N g_j H_j$$

を考える。(後々定義を与えるが、 H_0 には場が考慮されている。) $\{g_j\}_{j=1}^N$ は結合定数と呼ばれる実数パラメータである。

Definition 1 $\mathcal{K}$ をヒルベルト空間、 T を $\mathcal{K}$ 上の線形作用素であるとする。 T の定義域を $D(T)$ と書く。さらに T は下に有界な自己共役作用素であるとする。このとき、

$$E_0(T) := \inf \sigma(T)$$

を T の最低エネルギーと呼び、 $E_0(T)$ が固有値の場合、 $E_0(T)$ における固有ベクトルを基底状態と呼ぶ。また、基底状態における固有空間の次元

$$m(T) := \dim \ker(T - E_0(T))$$

* E-mail: funakawa@math.sci.hokudai.ac.jp

を T の縮退度と呼ぶ. 特に $m(T) = 1$ のとき, T の縮退度は一意的であるという. 本講演ではある条件下に対して, 不等式 $m(H) \leq m(H_0)$ を得る.

2 各定義

2.1 フォック空間

ボソン (力を伝える粒子) とフェルミオン (素材となる粒子) が住む空間としてボソンフォック空間, フェルミオンフォック空間がある. まず, $\mathcal{K}$ をヒルベルト空間とする. また, $\otimes_s^n \mathcal{K} (\otimes_a^n \mathcal{K})$ を $\mathcal{K}$ の n 重 (反) 対称テンソル積とする. このとき, ボソン (フェルミオン) フォック空間を次で定義する.

$$\mathcal{F}_b(\mathcal{K}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{K}, \quad \mathcal{F}_f(\mathcal{K}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_a^n \mathcal{K}$$

$\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ は $(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)})_{\otimes_s^n \mathcal{K}}$ を内積として, ヒルベルト空間となっている. ただし, 本紙では内積空間 $\mathcal{K}$ 上の内積 $(f, g)_{\mathcal{K}}$ は f に対して反線形で g に対して線形としている. さて $S_n : \otimes^n \mathcal{K} \rightarrow \otimes_s^n \mathcal{K}$ を対称化作用素とする. 任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して, $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ 上の生成作用素 $a^*(f)$ を次のように定義する.

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}), \quad n \geq 1$$

また, $(a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$ とする. $\Omega_b := \{1, 0, \dots\} \in \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ をボソンフォック真空と呼び, $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ 上のボソン有限粒子部分空間を

$$\mathcal{F}_b^{fin}(\mathcal{M}) := \mathcal{L}\{a^*(f_1) \cdots a^*(f_n)\Omega_b, \Omega_b \mid f_j \in \mathcal{M}, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

と定義する. 本紙ではこの空間を有限粒子部分空間と呼ぶことにする. $a^*(f)$ の定義域は次で与えられる.

$$D(a^*(f)) := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_b(\mathcal{K}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \| (a^*(f)\Psi)^{(n)} \|_{\otimes_s^n \mathcal{K}}^2 < \infty \right\}$$

更に消滅作用素 $a(f)$ は生成作用素 $a^*(f)$ の共役作用素として定義する. $a^*(f)$ と $a(g)$ の定義域は有限粒子部分空間を含んでおり, また不変にしている. 更に, 有限粒子部分空間上で正準交換関係を満たしている.

$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)_{\mathcal{K}}, \quad [a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0$$

ここで $[A, B] = AB - BA$ である. T を $\mathcal{K}$ 上の作用素とする. その $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ 上の第 2 量子化作用素 $d\Gamma_b(T)$ を

$$d\Gamma_b(T) := \left(\oplus_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n (I \otimes \cdots \otimes I \otimes T \otimes I \otimes \cdots \otimes I) \right) \mid \hat{\otimes}^n D(T) \right)_{\mathcal{F}_b(\mathcal{K})}$$

と定義する. ただし, 式中の T は j 番目にあり, 最後の $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ は簡約の意味である.

以上の議論において, 対称化作用素 S_n の定義にある対称テンソル積 $\otimes_s$ を反対称テンソル積 $\otimes_a$ に変えた場合, フェルミオンフォック空間上にも生成 (消滅) 作用素 $b^*(f)$, $b(f)$ や第 2 量子化作用素 $d\Gamma_f(T)$ を考えることができる. (正確な定義はここでは省略する.) 重要なことはフェルミオンフォック空間上の生成・消滅作用素 $b^*(f)$, $b(f)$, $f \in \mathcal{K}$ は有限粒子空間上で以下の反交換関係を満たすことである:

$$\{b(f), b^*(g)\} = (f, g)_{\mathcal{K}}, \quad \{b(f), b(g)\} = \{b^*(f), b^*(g)\} = 0. \quad \text{ただし, } \{A, B\} := AB + BA.$$

2.2 ハミルトニアン の定義

$\mathcal{H} := \oplus^{\mu} L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{K} := \oplus^{\mu} L^2(\mathbb{R}^d)$ とし, E, ω を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の非負単射な実関数とする. さらにこの ω は $\{k \in \mathbb{R}^d \mid \omega(k) = 0\}$ のルベグ測度は 0 となり, $\omega \in C^3(\mathbb{R}^d \setminus K)$, $\frac{\partial \omega}{\partial k_n}(k) \neq 0$, $(n \in \{1, \dots, d\}, k = (k_n)_{n=1}^d \in \mathbb{R}^d \setminus K)$ となる $K \subset \mathbb{R}^d$ が存在するよ

うにとる. E も同様にとる. この関数による掛け算作用素を再び E, ω と書く. 自由ハミルトニアン H_0 は次で定義された $\mathcal{F} := \mathcal{F}_f(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ 上の線形作用素である:

$$H_0 := d\Gamma_f(\oplus^\vee E) \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\oplus^\mu \omega) \quad \text{on } \mathcal{F} := \mathcal{F}_f(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$$

この時, H_0 は非負な自己共役作用素である. また, $\{H_j\}_{j=1}^N$ を $\mathcal{F}_f(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ 上の対称作用素とする. さて, フルハミルトニアン H は自由ハミルトニアンに相互作用項 H_j を加えて次のように定義する:

$$H := H_0 + \sum_{j=1}^N g_j H_j.$$

ここで g_j ($j = 1, \dots, N$) は結合定数と呼ばれる実数である. H は当然, 結合定数をパラメータとする作用素と見ることができ. よって, 強調したいときに限り H のことを $H(g)$ と書く. (意味は同じである.) 今回は縮退度を解析するため, H はすでに基底状態を持つとする:

(A.1): ある数 $g_G \in \mathbb{R}$ が存在し, 各 $j = 1, \dots, N$ に対して $|g_j| \leq g_G$ が成り立つとき, H は下に有界な自己共役作用素であり, さらに基底状態 φ_g を持つ.

一般的にヒルベルト空間 $\mathcal{L}$ 上の作用素 A, B について, $\mathcal{D} \subset D(A) \cap D(B) \cap D(A^*) \cap D(B^*)$ を満たす $\mathcal{L}$ に稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ に対して, 弱交換子は次で定義される:

$$[A, B]_W^{\mathcal{D}}(\Psi, \Phi) := (A^* \Psi, B \Phi) - (B^* \Psi, \Phi), \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{D}$$

(A.2): 任意の $f \in \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{K}$ と各 $j \in \{1, \dots, N\}$ に対して, 次を満たす作用素 $T_{jf}(k) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ と $T_{jb}(k) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ が存在する:

$$[b(f) \otimes I, H_j]_W^{D(H)}(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(k)(\Psi, T_{jf}(k)\Phi)dk, \quad [I \otimes a(g), H_j]_W^{D(H)}(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(k)(\Psi, T_{jb}(k)\Phi)dk$$

さらに, 任意に $\Psi \in D(H)$ と $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d \setminus \tilde{K})$ をとる. ここで, $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^d$ は可測集合で, $K \subset \tilde{K}$ と $|\tilde{K}| = 0$ を満たすものである. このとき, $T_{jb}(k)$ は次を満たす:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(k)(\Psi, e^{-is(H-E_0(H)+\omega(k))} T_{jb}(k)\varphi_g) \right| \in L^1([0, \infty), ds).$$

T_{jf} も同様な性質を満たすとする. (T_{jf} の場合は上の $\omega(k)$ を $E(k)$ に変える.)

3 主結果

$g := (g_1, \dots, g_N)$ と略す. 次の仮定は結合定数を小さくすると, 最低エネルギーは自由ハミルトニアンの最低エネルギー ($E_0(H_0) = 0$ に注意) に収束するという仮定である:

(A.3): $\lim_{g \rightarrow 0} E_0(H(g)) = 0$.

また, 以下の2つの条件は [H] の「相互作用項が自由ハミルトニアンに対して相対有界」という条件を書き換えたものである.

(A.4): $\{1, \dots, N\}$ の部分集合 M で以下を満たすものが取れる: 各 $j \in \{1, \dots, N\}$ と $\# = f$ or b に対して, $f_{1,j}, f_{2,j} \in D(\omega^{-1})$ を満たす $L^2(\mathbb{R}^d)$ 関数 $f_{1,j}, f_{2,j}$ が存在し, 次の相対有界性を満たす:

$$\begin{aligned} \|T_{j\#}(k)\Psi\| &\leq f_{1,j}(k)\|H_0\Psi\| + f_{2,j}\|\Psi\| \quad j \in \{1, \dots, N\} \setminus M \quad a.e. k \in \mathbb{R}^d, \\ \|T_{j\#}(k)\Psi\| &\leq \varepsilon f_{1,j}(k)\|H_j\Psi\| + f_{2,j}\|\Psi\| \quad j \in M \quad a.e. k \in \mathbb{R}^d \quad (\forall \varepsilon > 0). \end{aligned}$$

(A.5): 各 $j \in M \cup \{0\}$ に対して $g \rightarrow 0$ の極限で収束する数 $c_j(g), d_j(g)$ が存在し, 次の相対有界性を満たす:

$$\|g_j H_j \Psi\| \leq c_j(g)\|H\Psi\| + d_j(g)\|\Psi\| \quad (\text{ただし, } g_0 = 1.)$$

(A.4) は場の量子論でよく見るモデル（相互作用項が生成作用素や消滅作用素で書かれているモデル）については、満たされるであろう条件である。(A.5) は相互作用は全体のハミルトニアンについて相対有界であり、係数が収束することで相互作用項の大きさが $g \rightarrow 0$ の極限で発散していないことを意味している。

Theorem 1 (A.1)-(A.5) を仮定する。このとき、定数 g_D が存在し、 $|g| \leq g_D$ ならば次の不等式が成立する：

$$m(H(g)) \leq m(H_0)$$

(A.1) より、 $m(H(g)) \geq 1$ 。また、自由ハミルトニアンは第 2 量子化作用素だけから作られていたので、 $m(H_0) = 1$ 。よって、上の不等式により、 $m(H(g)) = 1$ が得られる：

Corollary 1 (A.1)-(A.5) を仮定する。このとき、定数 g_D が存在し、 $|g| \leq g_D$ ならば次の不等式が成立する：

$$m(H(g)) = 1$$

4 応用例

応用例の一つとして、次のハミルトニアンの縮退度が 1 であることが分かる。

$$\begin{aligned} H_{WZ} = & d\Gamma_f(E_m) \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\omega_m) + g \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{SP}(x) (\bar{\psi}(x)\psi(x) \otimes A_1(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \otimes A_2(x)) dx \\ & + mg \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{SP}(x) I \otimes A_1(x) (A_1(x)^2 + A_2(x)^2) dx + \frac{1}{2} g^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{SP}(x) I \otimes (A_1(x)^2 + A_2(x)^2)^2 dx. \end{aligned}$$

このハミルトニアンは Wess-Zumino モデルと呼ばれる超対称性を満たす基本的なモデルを作用素化したものである。(残念なことに空間切断 χ_{SP} を入れているため、上記の作用素は超対称性を満たさない。しかし、フェルミオンを考慮し、さらに相互作用項が自由ハミルトニアンに対して相対有界でないため、このハミルトニアン自体の解析は有用である。) 本紙ではこのハミルトニアンの詳細な定義は省略する。

Theorem 2 H_{WZ} が基底状態をもつ条件の下で、十分小さな結合定数 $g \in \mathbb{R}$ に対して、 H_{WZ} の縮退度は一意的である。すなわち、定数 g_D が存在し、 $|g| \leq g_D$ を満たす全ての g について、

$$m(H_{WZ}) = 1$$

が成立する。

参考文献

- [AH] Arai, A.; Hirokawa, M. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. J. Funct. Anal. 151 (1997), no. 2, 455-503.
- [DG] Dereziński, J.; Gerard, C. Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. Rev. Math. Phys. 11 (1999), no. 4, 383-450.
- [GLL] Griesemer, M; Lieb, Elliott H.; Loss, M. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. Invent. Math. 145 (2001), no. 3, 557-595.
- [H] Hiroshima, F. Multiplicity of ground states in quantum field models, applications of asymptotic fields. J. Funct. Anal. 224 (2005), 431-470.
- [Ht] Hidaka, T. Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation. J. Math. Phys. 52 (2011), no. 2, 022102, 21 pp.
- [W] Wada, K. Spectral analysis of a massless charged scalar field with spacial cut-off. arXiv:1405.3773 [math-ph] (2014).

複素スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群について

和田 和幸 (北大理)*

2015/3/4

1 導入

複素スカラー場の相互作用を記述するハミルトニアンが生成する熱半群について考察する。下に有界な自己共役作用素を考える。スペクトルの下限が固有値となっている場合、その固有空間の次元が1次元かどうかを調べたいことがある。一意的に存在する為の十分条件として Perron-Frobenius の定理がよく知られている。Perron-Frobenius の定理を述べるにあたり、“正値性改良”と呼ばれる有界作用素のクラスが非常に重要である。シュレディンガー作用素や実スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群は大体の場合“正値性改良”であることが多い事が知られている。これはシュレディンガー作用素や実スカラー場のハミルトニアンの相互作用を記述する部分が大体“関数”になっている為である。しかし複素スカラー場のハミルトニアンを考える場合、状況が一変し“微分作用素”に相当する作用素が相互作用項として入ってくる。この場合“正値性改良”かどうかはまだ未解決である。複素スカラー場の相互作用を記述するハミルトニアンに対してその熱半群の正値改良性を考える理由は、固有空間が1次元である場合、その全電荷が0である事が即座に従うからである。このレポートでは、あるクラスの複素スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群が“正値性改良型”より弱い“正値性保存型”である事を報告する。

2 正値性保存作用素, 正値性改良作用素

二つの測度空間 $(X, \mathcal{F}, d\mu)$, $(Y, \mathcal{G}, d\nu)$ を用意し、その上のヒルベルト空間 $L^2(X, d\mu)$, $L^2(Y, d\nu)$ を考える。

定義 1(正値性保存型作用素, 正値性改良型作用素)

T を $L^2(X, d\mu)$ から $L^2(Y, d\nu)$ への有界な線形作用素とする。

(1) T が正値性保存であるとは、任意の $f \in L^2(X, d\mu)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$ に対し、 $Tf \geq 0$, ν -a.e. が成立する事をいう。

(2) T が正値性改良であるとは、任意の $f \in L^2(X, d\mu)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$ に対し、 $Tf > 0$, ν -a.e. が成立する事をいう。

正値性保存と正値性改良の違いは恒等的に0でない関数を T で写した先の関数が非負か、真に正の関数かの違いであるが、その違いは重要である。Perron-Frobenius の定理は以下に述べられる。

定理 2(Perron-Frobenius の定理)

(M, dm) を σ -有限な測度空間とし、 T を $L^2(M, dm)$ 上の下に有界な自己共役作用素とする。 T のスペクトルの下限が固有値になっており、 e^{-tT} は正値性改良であるとする。この時 T のスペクトルの下限の固有空間は1次元であり、対応する固有ベクトルは殆ど至る所正の関数としてとる事ができる。

例 3(正値性保存作用素, 正値性改良型作用素)

(1) Δ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で作用する d -次元 Laplacian とする。この時 $e^{t\Delta}$, $(t > 0)$ は正値性改良である。

(2) V を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で作用する、下に有界な実数値関数による掛け算作用素とする。この時 e^{-tV} , $(t > 0)$ は正値性保存である。

* E-mail; wadakazu(at)math.sci.hokudai.ac.jp

(3) $V \in C(\mathbb{R}^d)$ で下に有界な関数とする. この時, $e^{-t(-\Delta+V)}$, ($t > 0$) は正値性改良型作用素である.

シュレディンガー作用素の生成する熱半群は Feynman-Kac の公式と呼ばれる, ブラウン運動の実現する確率空間の上の積分として表示する事が可能である. この公式を用いてシュレディンガー作用素の性質を導く事が可能である. 次の章で量子場の場合を考察する.

3 ガウス超過程と複素スカラー場のハミルトニアン

この章でガウス超過程に関する基本事項と, 主に考察するハミルトニアンの定義をする. $\mathcal{K}$ を可分な実ヒルベルト空間とする.

定義 4(ガウス超過程)

$\{\Phi(f)|f \in \mathcal{K}\}$ を $\mathcal{K}$ を添え字集合とする, (Q, Σ, μ) 上の確率変数の族とする. $\{\Phi(f)|f \in \mathcal{K}\}$ がガウス超過程であるとは,

(1) $\phi(f)$ は平均 0 で, $f, g \in \mathcal{K}$ に対し共分散が

$$\int_Q \phi(f)\phi(g)d\mu = \frac{1}{2}\langle f, g \rangle_{\mathcal{K}}.$$

で与えられるガウス型確率変数である.

(2)

$$\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g), \quad \text{a.s.}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{K}).$$

(3) Σ は $\{\phi(f)|f \in \mathcal{K}\}$ を可測にさせる最小の σ -集合体である.

添え字のヒルベルト空間を複素係数まで広げる為に, $\mathcal{K}$ の複素化である $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ を導入する. $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ に対し, 確率変数 $\phi(f)$ を,

$$\phi(f) := \phi(f_1) + i\phi(f_2)$$

と定める. (Q, Σ, μ) 上の 2 乗可積分関数全体のなす複素ヒルベルト空間を $L^2(Q, d\mu)$ とし, それを $\mathcal{H}$ と表す事にする. Wiener - Ito - Segal 分解により, $\mathcal{H}$ は次のように直和分解される事が知られている.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

$$\mathcal{H}_n := \overline{\text{L.H.}\{:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):|f_j \in \mathcal{K}, j = 1, \dots, n\}}, \quad \mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$$

ここで集合 A に対し, $\text{L.H.}\{A\}$ で A の生成する部分空間を表し, $\overline{A}$ で集合 A の $\mathcal{H}$ によるノルム閉包を表すとする. $:\cdots:$ は確率変数の Wick 積を表し, 以下で帰納的に定義される. $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}$ とする.

$$:\phi(f_1): := \phi(f),$$

$$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): := \phi(f_1) : \phi(f_2)\cdots\phi(f_n) : - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \langle f_1, f_j \rangle : \phi(f_2)\cdots\phi(\hat{f}_j)\cdots\phi(f_n) :.$$

ここで, $\hat{}$ は省略するという記号である. 次に $\mathcal{K}$ 上の非負の自己共役作用素 ω を導入する. この時 ω の第二量子化作用素 $d\Gamma_s(\omega)$ を次の性質を満たす作用素の閉包として定義する.

$$d\Gamma_s(\omega) : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : := \sum_{j=1}^n : \phi(f_1)\cdots\phi(\omega f_j)\cdots\phi(f_n) :,$$

$$d\Gamma_s(\omega)1 = 0.$$

$d\Gamma_s(\omega)$ は $\mathcal{H}$ 上の非負の自己共役作用素となり、様々な性質が良く分かっている。 T を $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ 上の縮小作用素とする。この時、 $\mathcal{H}$ 上の縮小作用素 $\Gamma(T)$ を次を満たす作用素として定める。

$$\begin{aligned}\Gamma(T) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) &:= \phi(Tf_1) \cdots \phi(Tf_n) ; \\ \Gamma(T)1 &= 1.\end{aligned}$$

$f \in \mathcal{K}$ に対し、 $\pi(f)$ を次で定める。

$$\pi(f) := \Gamma(i)\phi(f)\Gamma(-i)$$

$\{\phi(f), \pi(g) | f, g \in \mathcal{K}\}$ は無限自由度の正準交換関係を満たす事が知られている。

例 5

実ヒルベルト空間として簡単な $\mathbb{R}$ を考える。この時、あるユニタリ変換 U で次の性質を満たすものが存在する。

$$\begin{aligned}U : L^2(Q, d\mu) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ U\phi(1)U^{-1} &= x, \quad U\pi(1)U^{-1} = -i\frac{d}{dx}\end{aligned}$$

従って、 $f \in \mathcal{K}$ に対し、 $\phi(f)$ は無限自由度の空間における位置作用素、 $\pi(f)$ は無限自由度の空間における運動量作用素 と思う事が出来る。 $L^2(\mathbb{R})$ において、位置作用素と運動量作用素がフーリエ変換によって関係づけられていた事を思い出すと、 $\Gamma(i)$ は無限自由度の空間における”フーリエ変換” と思える。

$\langle f, g \rangle_{\mathcal{K}} = 0$ とする。今回考察するハミルトニアン H は以下のものである。

$$H := d\Gamma_s(\omega) + \left(\phi(f)^2 + \pi(g)^2 \right)^k, \quad (k = 1, 2).$$

このハミルトニアンは複素スカラー場の非自明な相互作用の中で扱いやすいものである。空間の自由度まで込めた相互作用モデルの解析は [4] でなされている。これまで調べられてきた実スカラー場のハミルトニアンとの違いは $\pi(g)$ の項がある点である。実スカラー場のハミルトニアンが生成する半群も場合もシュレディンガー作用素と同様に、確率空間上の積分として表示する事が出来る。実スカラー場の結果は [1], [3] を参照されたい。

4 主結果

補題 6

(1) $\mathcal{H}$ を複素ヒルベルト空間とし、 A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする。すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して e^{itA} が正値性保存作用素ならば、 e^{-tA^2} は正値性保存作用素である。

(2) A を非負の自己共役作用素とする。 f を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とし、 $\inf_{x \in [0, \infty)} |f(x)| < \infty$ とする。 $e^{-tf(A)}$ が正値性保存作用素とする。

$$F(x) := \int_0^x f(y)dy$$

で F を定めるならば、 $e^{-tF(A)}$ も正値性保存作用素である。 $\langle f, g \rangle_{\mathcal{K}} = 0$ より、 $\phi(f), \pi(g)$ は強可換である。 $e^{-it\pi(g)}$ が正値性保存である事は分かっているので [3], 上の補題の系として次が得られる。

系 7

$e^{-t\pi(g)^2}, e^{-t(\phi(f)^2 + \pi(g)^2)^k}, (k = 1, 2, \dots)$ は正値性保存作用素である。

$d\Gamma_s(\omega)$ は正値性保存作用素なので、次の定理が得られる。これが本レポートにおける主結果である。

定理 8

H は $\mathcal{H}$ 上の正値性保存作用素である。

5 終わりに

導入部分でも説明したように、今回考察したハミルトニアンが正值性改良であるかどうかはまだ未解決問題である。もとより、 $\pi(f)$ の作用素の性質についてこれまであまり研究されていない為に $\pi(f)$ の性質についても調べていく必要があると考えられる。[2] では同じ複素スカラー場のハミルトニアンの性質について考察されているが、相互作用の定義を少し変更している為、 $\pi(g)$ は登場せず、 $\phi(f)$ のみが相互作用項に現れる。この時ハミルトニアンは正值性改良作用素になるが、元々複素スカラー場が持っていた全電荷保存則が壊れているので、どのような物理量が保存されているのかが不明である。今回導入したハミルトニアンは $\pi(g)$ が相互作用素項に含まれており扱いが難しくなっているが、全電荷保存則が成り立っている為、基底状態が存在した場合にどの全電荷の空間に属しているかという興味深い問が考えられる。この意味で今回のハミルトニアンの更なる解析を進めていきたいと考えている。

参考文献

- [1] 新井 朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, (2010)
- [2] C. Gérard, “Spectral and Scattering Theory of Space-cutoff Charged $P(\varphi)_2$ Models”, Lett. Math. Phys, **92**, 197-220, (2010).
- [3] V. Betz, F. Hirishima, J. Lörinczi, “*Feynman-Kac type theorems and Gibbs measures on path space*”, DeGruyter, Germany, (2011)
- [4] K. Wada, “Spectral analysis of a massless charged scalar field with spacial cut-off ”, arXiv:1405.3773 [math-ph] (2014).

準相対論的な Pauli-Fierz 模型のスペクトル解析

日高建* (九州大学大学院数理学研究院)

1 はじめに

本研究は、九州大学の廣島文生先生との共同研究に基づくものである。粒子と量子場が相互作用をする系を考える。非相対論的 Pauli-Fierz 模型は、量子電磁力学の模型で、非相対論的な粒子と量子輻射場 A がミニマル結合したものである。粒子は、 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上シュレーディンガー作用素 $-\frac{1}{2M}p^2 + V$ に従うとする。ここで、 M は粒子の質量であり、 $p = -i\nabla$ は粒子の運動量、 V は外部ポテンシャルである。また、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上で作用する自由場のハミルトニアンを H_f とする。このとき、非相対論的 Pauli-Fierz 模型の全ハミルトニアンは、 $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{H}$ 上で

$$H_{PF} = \frac{1}{2M} (p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

となる。[Hir00, Hir02, HH08] において、 H_{PF} は $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素であることが示されている。ハミルトニアンのスペクトルの下限を基底エネルギーといい、それに対応する固有ベクトルを基底状態という。基底エネルギーがハミルトニアンの固有値でなければ、基底状態は存在しない。非相対論的 Pauli-Fierz 模型のハミルトニアン H_{PF} は基底状態をもつことが [BFS99, GLL01, Hir99] 等で証明されている。

一方、準相対論的な Pauli-Fierz 模型は、量子輻射場 A と準相対論的なシュレーディンガー作用素 $\sqrt{p^2 + M^2} + V$ に従う粒子がミニマル結合した模型である。[KMS11, KM12] において、静止質量 M が正の場合に H が基底状態をもつことは既に示されている。ハミルトニアンの自己共役性と基底状態の存在を $M = 0$ の場合も含めて示すことが目的である。

2 準備

複素ヒルベルト空間 $W = \oplus_{d=1}^{d-1} L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(W) = \oplus_{n=0}^{\infty} [\otimes_s^n W]$ で与えられる。ここで、 $\otimes_s^n$ は n 重対称テンソル積を表す。

*email: t-hidaka@math.kyushu-u.ac.jp

また, $\otimes_s^0 W = \oplus^{d-1} \mathbb{C}$ とする. $\mathcal{F}$ のベクトルは $(\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots), \Psi^{(n)} \in \otimes_s^n W$ と表せる. $\Omega = (1, 0, \dots) \in \mathcal{F}$ をボソnfock真空という. 次に, フォック空間上の重要な作用素を導入する. $f \in W$ によって均された (ボソン) 生成作用素 $a^\dagger(f)$ と (ボソン) 消滅作用素 $a(f)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} D(a^\dagger(f)) &= \left\{ \Psi \in \mathcal{F} \mid \sum_{n=1}^{\infty} n \|S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)})\|^2 < \infty \right\}, \\ (a^\dagger(f)\Psi)^{(n)} &= \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1, \quad (a^\dagger(f)\Psi)^{(0)} = 0, \\ a(f) &= (a^\dagger(f))^*. \end{aligned}$$

ここで, $D(T)$ は線形作用素 T の定義域を表す. $a(f)$ と $a^\dagger(f)$ は次の正準交換関係を満たす:

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_W, \quad [a(f), a(g)] = 0 = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)].$$

$\tilde{f} = (0, \dots, 0, \overset{r\text{-th}}{f}, 0, \dots, 0) \in W$ に対して, $a^r(f) = a(\tilde{f})$ と表す. 稠密に定義された W 上の可閉作用素 T に対して, 第二量子化作用素 $d\Gamma(T)$ を

$$d\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty} [\otimes^n T^{(n)}]$$

によって定義する. ここで, $T^{(n)}$ は

$$T^{(0)} = 0, \quad T^{(n)} = \overline{\sum_{k=1}^n 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{k\text{-th}}{T} \otimes 1 \dots \otimes 1}_{|\otimes_s D(T)}}$$

である.

2.1 準相対論的な Pauli-Fierz 模型

準相対論的な Pauli-Fierz 模型における状態ヒルベルト空間を $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}$ とする. 静止質量が $M \geq 0$ のとき準相対論的なシュレーディンガー作用素は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で

$$\sqrt{p^2 + M^2} + V \tag{2.1}$$

によって与えられる. 外部ポテンシャル V に以下の仮定をする.

Definition 2.1 次の条件 (1) を満たす V の集合を V_{rel} , (2) を満たす V の集合を V_{conf} とする.

(1) $D(\sqrt{p^2 + M^2}) \subset D(V)$ であり, ある $0 \leq a < 1$ と $b \geq 0$ が存在して,

$$\|Vf\| \leq a\|\sqrt{p^2 + M^2}f\| + b\|f\|$$

が任意の $f \in D(\sqrt{p^2 + M^2})$ に対して成立する.

(2) $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ は非負であり, $\mu = 1, \dots, d$ に対して $D_\mu V, D_\mu^2 V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. さらに, $D(V) \subset D(|x|)$.

運動量 $k \in \mathbb{R}^d$ におけるボソン 1 個のエネルギーを表す関数を $\omega(k)$ とする.

Assumption 2.2 $\omega \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \nabla \omega \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \inf_{k \in \mathbb{R}^d} \omega(k) = m \geq 0, \lim_{|k| \rightarrow \infty} \omega(k) = \infty$.

この仮定における $m > 0$ はボソンの仮想的な質量を表す. 自由場のハミルトニアン H_f は W 上の掛け算作用素 $\oplus^{d-1} \omega$ の第二量子化作用素として与えられる. 従って,

$$H_f = d\Gamma(\oplus^{d-1} \omega).$$

d 次元偏光ベクトル $e^r(k) = (e_1^r(k), \dots, e_d^r(k))$ は, $k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と $r = 1, \dots, d-1$ に対して $e^r(k) \cdot e^s(k) = \delta_{rs}$ と $k \cdot e^r(k) = 0$ を満たすベクトルとして与えられる. $\hat{\varphi}$ を以下の仮定を満たす紫外切断関数とする.

Assumption 2.3 $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \omega\sqrt{\omega}\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d), \hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$.

各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, 量子輻射場 $A(x) = (A_1(x), \dots, A_d(x))$ は $\mathcal{F}$ 上で次のように与えられる.

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{d-1} \left\{ a^{\dagger r} \left(\frac{\hat{\varphi} e_\mu^r e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) + a \left(\frac{\hat{\varphi}(-\cdot) e_\mu^r e^{ik \cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) \right\}.$$

$\hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$ ならば $A_\mu(x)$ は本質的に自己共役である. 自己共役拡大も同じ記号 $A_\mu(x)$ で表すことにする. $\mathcal{H}$ は $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F} dx = L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{F})$ と同一視できる.

次に, ミニマル相互作用 $p \rightarrow p \otimes \mathbb{1} - A$ を導入して全ハミルトニアンを定義する. $(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ の本質的自己共役性について次のことが知られている.

Proposition 2.4 *Assumption 2.2 と 2.3 を満たすとする. このとき, $D(p^2 \otimes \mathbb{1}) \cap C^\infty(\mathbb{1} \otimes N)$ 上で $(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ は本質的に自己共役である. ここで, $C^\infty(\mathbb{1} \otimes N) = \cap_{n=1}^\infty D(\mathbb{1} \otimes N^n)$ である.*

$(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ の自己共役拡大も同じ記号で表す. スペクトル分解定理によって自己共役作用素 $\sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2}$ を定義する. 準相対論的な Pauli-Fierz 模型は $\mathcal{H}$ 上で

$$H = \sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2} + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f,$$

$$D(H) = D(\sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2}) \cap D(V \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_f).$$

によって定義される.

$$\mathcal{H}_{\text{fin}} = L.H.\{f \otimes \Omega, f \otimes a^\dagger(h_1) \cdots a^\dagger(h_n) \Omega | h_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, n, n \geq 1\}.$$

とおく.

3 主定理

Theorem 3.1 $V \in V_{\text{conf}} \cup V_{\text{rel}}$ とし, *Assumption 2.2* と *2.3* を満たすとする. このとき, H は下に有界な作用素で, $D(|p|) \cap D(V) \cap D(H_f)$ 上で自己共役, $\mathcal{H}_{\text{fin}}$ 上で本質的に自己共役である.

Theorem 3.2 $m > 0$, $V \in V_{\text{conf}}$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ とし, *Assumption 2.2* と *2.3* を仮定する. $\sigma_{\text{ess}}(H)$ を H の本質的スペクトルとする. このとき, すべての $M \geq 0$ に対して $\sigma_{\text{ess}}(H) = [E + m, \infty)$ が成立する. また, 基底状態は一意的である. 即ち, E を H の基底エネルギーとすると,

$$\dim \ker(H - E) = 1.$$

参考文献

- [BFS99] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation fields, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.
- [GLL01] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.
- [HH08] D. Hasler and I. Herbst, On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), 787–800.
- [Hir99] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661–674.
- [Hir00] F. Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants *Comm. Math. Phys.* **211**, (2000), 585–613.
- [Hir02] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. H. Poincaré* **3** (2002), 171–201.
- [KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: the semi-relativistic Pauli-Fierz operator *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 375–407.
- [KM12] M. Könenberg and O. Matte, Ground states of semi-relativistic Pauli-Fierz and no-pair Hamiltonians in QED at critical Coulomb coupling, arXiv:1106.1393.

拡張した量子ハイゼンベルク模型の鏡映正值性を用いた解析

井元隆史 (北海道大学理学院数学専攻修士 2 年)

1 導入

統計力学は量子力学というミクロな性質から目に見えるようなマクロな現象を導くものである. その中でも特徴的なものが相転移である. この相転移には身近なものでは物質が固体, 液体, 気体の 3 つの相を温度と気圧によって変化するものなど様々なものがある. その中でもよく研究されているのは物質の磁性についてのものである. 相転移が統計力学で厳密に表現できることが初めて証明されたのは 1944 年のオンサーガーの 2 次元古典イジング模型の厳密解を求めたことである. それ以降様々な模型に対して相転移の存在は証明されたが, 今回扱うのは 4 次の項が含まれるような拡張した量子ハイゼンベルク模型についてである (主定理の項を参照). ここでは, 本公演で用いる基本的な統計力学の定義と量子ハイゼンベルク模型, 2 次の項まで含まれるような模型について述べる.

1.1 基本的な準備

まず本公演並びにこのレポートでは, ν 次元正方格子 $\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu | 0 \leq \alpha_1 \leq L_1 - 1, \dots, 0 \leq \alpha_\nu \leq L_\nu - 1\}$ 上で相互作用を最隣接のみのものを扱う. スピン $\tilde{S}_\alpha^{(j)}$ を $[\tilde{S}_\alpha^{(j)}, \tilde{S}_\alpha^{(k)}] = i\epsilon_{jkl}\tilde{S}_\alpha^{(l)}$ をみたすような作用素とする. ここで, $S_\alpha^{(j)} = \tilde{S}_\alpha^{(j)}$ ($j = 1, 3$), $S_\alpha^{(2)} = (-i)\tilde{S}_\alpha^{(2)}$ となるような $S_\alpha^{(j)}$ を考える. ただし ϵ_{jkl} を完全対称テンソルとする. また, 逆温度, 分配関数, 期待値を次のように定義する.

逆温度

$$\beta := \frac{1}{k_B T} \quad (k_B : \text{ボルツマン定数}, T : \text{温度})$$

分配関数

$$Z := \text{Tr}[\exp(-\beta H)]$$

期待値

$$\langle A \rangle_{\Lambda, \beta} := Z^{-1} \text{Tr}[A \exp(-\beta H)]$$

1.2 Duhamel 二点相関関数

ここで, 本レポートには登場しないが本公演において使う定義なので Duhamel 二点相関関数を以下のように定義する.

$$(A, B) := Z^{-1} \int_0^1 \text{Tr} \left[e^{x\beta H} A e^{-(1-x)\beta H} B \right] dx \quad (A, B : n \times n \text{ 行列}) \quad (1)$$

1.3 熱力学極限

熱力学極限 (無限体積極限) を以下のように定義する.

$$\langle A \rangle_\beta := \lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \langle A \rangle_{\Lambda, \beta} \quad (2)$$

1.4 長距離秩序

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle S_0 S_x \rangle > 0 \quad (3)$$

をみたすとき, 長距離秩序が存在するという. 特に長距離秩序が存在すれば自発磁化の存在が言え相転移が存在することが知られている.

1.5 具体的な模型

定義 1.1. 量子ハイゼンベルク模型のハミルトニアンを

$$H_1 = - \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{j=1}^n J_1 S_\alpha^{(j)} S_{\alpha+\delta_m}^{(j)} \quad (4)$$

と定義する.

このような模型についての相転移の存在は十分温度が低いとき J.Dyson,E.Lieb,B.Simon[1] によって鏡映正値性を用いて証明された. この模型の応用として等方 XY 模型 ($J^{(1)} = J^{(3)} = 1, J^{(2)} = 0$ のハイゼンベルク模型と同じ) がある.

定理 1.2. (J.Dyson,E.Lieb,B.Simon[1]) $\nu \geq 3$ のスピン $\frac{1}{2}$ の XY 模型は最隣接の正方格子は十分温度が低いとき相転移が存在する.

初めに定義した一般的なスピン $\tilde{S}_\alpha^{(i)}$ の反強磁体模型については上の模型を以下のように変換すればよい.

$$S_\alpha^{(i)} \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \tilde{S}_\alpha^{(i)} \quad (i = 1, 3) \quad (5)$$

$$S_\alpha^{(2)} \rightarrow i \tilde{S}_\alpha^{(2)} \quad (6)$$

以上の反強磁性体模型の相転移の存在も J.Dyson,E.Lieb,B.Simon[1] によって定義 1.1 の模型の証明を拡張して証明された.

定理 1.3. (J.Dyson,E.Lieb,B.Simon[1]) 反強磁性的量子ハイゼンベルク模型に, 十分大きな β に対して, $\nu \geq 3, S = 1, \frac{3}{2}, 2 \dots$ または, $S = \frac{1}{2}$ で ν が十分大きいとき長距離秩序が存在する. したがって, 相転移の存在も存在する.

※強磁性的ハイゼンベルク模型の相転移の存在は未解決問題である.

また, 2 次の項もある場合については D.Ueltschi によって 2014 年 [2] で触れられている.

定義 1.4. 記号は定義 1.1 と同じものとする.

$$H_2 = - \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{j=1}^n \left(J_1 S_\alpha^{(j)} S_{\alpha+\delta_m}^{(j)} + J_2 (S_\alpha^{(j)} S_{\alpha+\delta_m}^{(j)})^2 \right) \quad (7)$$

本公演ではこれらの定理の証明の手法を用いて4次の項までが存在する模型についての考察を解説する.

2 主結果

ここでの記号の定義は導入と同じものとする.

$$H = \sum_{\alpha \in \Lambda} \left(-J_1 \sum_{m=1}^v \sum_{j=1}^n S_{\alpha}^{(j)} S_{\alpha+\delta_m}^{(j)} - J_2 \sum_{m=1}^v \sum_{j=1}^n (S_{\alpha}^{(j)} S_{\alpha+\delta_m}^{(j)})^2 - J_4 \sum_{m=1}^v \sum_{j=1}^n (S_{\alpha}^{(j)} S_{\alpha+\delta_m}^{(j)})^4 \right) \quad (8)$$

※ここで $J_1, J_2, J_4 (> 0)$ は相互作用定数とする.

ハミルトニアンが (8) のような形になっている模型に対しても長距離秩序が存在することを鏡映正值性の方法を用いて量子ハイゼンベルク模型の解析 [1] を参考にして考察する.

参考文献

- [1] F. J. Dyson, E. H. Lieb, and B. Simon J. Stat. Phys. 18:335 (1978).
- [2] D.UeltschiarXiv:1406.2366 (2014).

d 次元水素用原子ハミルトニアン の 自己共役性

浅原 啓輔 北海道大学大学院理学院数学専攻

1 Introduction

水素用原子ハミルトニアン H はクーロンポテンシャル $V_c(x) = -\frac{Ze^2}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$ を用いて

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V_c$$

と表される. ここで $h, m, Z, e > 0$ はそれぞれプランクの定数の 2π 倍, 電子の質量, 原子番号, 電気素量を表す定数であり, Δ は 3 次元の一般化されたラプラシアン, V_c はクーロンポテンシャルによる掛け算作用素を表す. このハミルトニアン H が $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上で自己共役であることは良く知られている [1]. そこで今回は一般の d 次元でも同様に V_c, H を定義し, それが $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で自己共役になるかを調べる. 即ち $d \in \mathbb{N}$ に対して

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V_c, \quad V_c(x) = -\frac{Ze^2}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

とする. ただしここでの Δ は d 次元の一般化されたラプラシアンである. $-\Delta$ は自己共役である [2] ことから摂動論の観点から H の自己共役性を考える. そのため以下 2 節で必要な定義をし, 3 節で自己共役性に関する基本的な定理を紹介し, 4 節で主結果を述べる.

2 Definition

まず摂動論の観点から論じるために必要な定義をする.

2.1 相対的有界性

$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ は Banach 空間とし A, B は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線形作用素であり. 次の①②を満たすものとする:

$$\textcircled{1} D(A) \subset D(B) \quad \textcircled{2} \exists a, b \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \|B\psi\|_{\mathcal{K}} \leq a\|A\psi\|_{\mathcal{K}} + b\|\psi\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \psi \in D(A)$$

このとき B は A に関して相対有界であるといい, a を B の A -限界という. ここで $D(A)$ は A の定義域を表し, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ はそれぞれ $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ のノルムを表す. また B が A に関して相対有界でさらに

$$\textcircled{2}' \forall \epsilon > 0, \exists b_\epsilon \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \|B\psi\|_{\mathcal{K}} \leq \epsilon\|A\psi\|_{\mathcal{K}} + b_\epsilon\|\psi\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \psi \in D(A)$$

を満たすとき B は A に関して無限小といい $B \ll A$ と表す.

B が A に関して相対有界であることは B の A に対する”小ささ”を表している. 特に B が A に関して無限小であることは (B の A -限界を”十分小さく”とれるという意味で) B が A に対して”十分小さい”ことを意味する.

次に 4 節で用いるある関数空間のクラスを定義する.

2.2 L^p -空間の”和”

$0 < p, q \leq \infty, d \in \mathbb{N}$ に対して $L^p_{real}(\mathbb{R}^d)$ を $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ で実数値をとるもの全体とし, $L^p(\mathbb{R}^d) + L^q(\mathbb{R}^d)$ を $f = f_1 + f_2$ で $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^d), f_2 \in L^q(\mathbb{R}^d)$ となるもの全体とする. また $L^p_{real}(\mathbb{R}^d)$ と $L^q_{real}(\mathbb{R}^d)$ に対しても同様に空間の”和”を定義する.

また以下で $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値 Borel-可測関数 V に対して同じ記号 V でその関数による掛け算作用素を意味することとする. このとき特に V が実数値関数ならば掛け算作用素 V は自己共役であることが知られている [3].

3 Theorem

作用素 B が作用素 A に関して相対有界な場合の $A + B$ の自己共役性に関する基本的な定理を紹介する.

3.1 Kato-Rellich の定理 [1]

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間, $A: \mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, $B: \mathcal{H}$ 上の対称作用素 とする.

B は A に関して相対有界でその A -限界 a を $a < 1$ とする. このとき次が成り立つ:

① $A + B$ は自己共役 ② A の任意の芯上で $A + B$ は本質的自己共役

③ A は下に有界で $A \geq \gamma$ ($\gamma > -\infty$) ならば $A + B$ も下に有界で

$$A + B \geq \gamma - \max\left\{\frac{b}{1-a}, a|\gamma| + b\right\}.$$

ここで b は 2.1 ② のものである.

次に主結果を得るために用いた不等式を紹介する.

3.2 Hausdorff-Young の不等式 [4]

$1 \leq p \leq 2$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ とする. このとき $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\|\hat{f}\|_q \leq (2\pi)^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \|f\|_p$$

が成り立つ. ただし $\hat{f}$ は超関数の意味での f の Fourier 変換を意味する.

4 Main Result

まず 4.1 で掛け算作用素の意味で $-\Delta$ に関して無限小となる関数空間のクラスを求め、その具体的な応用としての主結果 4.2 を示す.

4.1 $d \geq 4$ とする. $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($p > \frac{d}{2}$) ならば $V \ll -\Delta$.

この 4.1 と $V_c \in L^p_{real}(\mathbb{R}^d) + L^\infty_{real}(\mathbb{R}^d)$ ($0 < p < d$)

また $d = 3$ のときを合わせて次を得る.

4.2

$d \geq 3$ ならば $V_c \ll -\Delta$ で, $H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V_c$ は自己共役.

更に 4.2 の応用例の一つとして次も成り立つ:

4.3 $d \geq 3, Z \in \mathbb{N}$ として

$$V_{C_j}(x) = V_C(x_j), V_{C_{ij}}(x) = V_C(x_i - x_j), x = (x_1, \dots, x_Z) \in (\mathbb{R}^d)^Z, i, j = 1, \dots, Z, i \neq j$$

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + \sum_{j=1}^Z V_{C_j} - \sum_{i < j} \frac{1}{Z} V_{C_{ij}}$$

とすると H は自己共役となる. ただしこのときの Δ は dZ 次元の一般化されたラプラシアンである. 特に $d = 3$ のときこの H は原子番号 Z の原子系の非相対論的ハミルトニアンである.

5 Research Question

4.3 のように $d = 3$ で自己共役性が知られている非相対論的ハミルトニアンで, クーロンポテンシャルを摂動として持つものは $d \geq 4$ の場合に拡張してもその自己共役性が期待できる. 一方 $d = 1, 2$ のときの H の自己共役性については上述の手法は全く使えない (即ち V_c が $-\Delta$ に関して相対有界とならない) ため別の視点からの考察が必要である.

参考文献

[1] 新井 朝雄, 量子現象の数理, 朝倉書店, 2006.

[2] 新井 朝雄・江沢 洋, 量子力学の数学的構造 II, 朝倉書店, 1999.

- [3] 新井 朝雄・江沢 洋, 量子力学の数学的構造 I, 朝倉書店,1999.
- [4] M.Reed and B.Simon, “Methods of Modern Mathematical Physics II:Fourier Analysis,Self-Adjointness”,Academic Press,1975.

パラレルセッション 会場D

時間作用素について

寺面 功哲

1 始めに

ここでは Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とその上の自己共役作用素 H に対して、 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T で、ある部分空間 $D \subseteq \mathcal{H}$ 上に於いて

$$[T, H] := (TH - HT) = \sqrt{-1} \quad (1.1)$$

を満たすものが存在するかを議論する。 H を系のエネルギーを表現する Hamiltonian だと思えば、 H に対して正準交換関係と不確定性関係を満たす T は物理的に時間を表す作用素だと言う事が出来る為、このような作用素 T は時間作用素と呼ばれる事がある。時間作用素に関しては [新井 06] に少し関連した記述があるので、そこでの議論も参照して載きたい。

2 準備

先ず、必要な用語と記法の確認をしておく。内積が定義されている線形空間 V が内積から誘導される自然な距離位相に関して完備であるとき、 V を Hilbert 空間と呼ぶ。以下、係数体は複素数とし、複素 Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ で表す事とする。今回の議論に於いては、特に断らない限り Hilbert 空間は無有限次元としておく。よく知られているように、可分（可算個の点からなる稠密な部分空間が存在するよう）な無有限次元 Hilbert 空間は全て二乗可積分空間 $L^2(\mathbb{R})$ と同型であり、位相空間としては $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同相である。

$\mathcal{H}$ 中の線形部分空間 D から $\mathcal{H}$ への線形写像の事を $\mathcal{H}$ 上の（線形）作用素と云う。Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A に対して、 A の定義域を $D(A)$ 、スペクトルを $\sigma(A)$ 、点スペクトル（ A の固有値全体からなる集合）を $\sigma_p(A)$ と書く事にする。 $\mathcal{H}$ 上の作用素 A に対して、 A の作用素ノルム $\|A\|$ を

$$\|A\| := \sup_{\psi \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|}$$

と定める。 $\|A\| < \infty$ となる作用素を有界作用素と云い、そうでないものを非有界作用素と云う。有界線形作用素の定義域は基本的に Hilbert 空間全体に拡張することが可能なので非有界線形作用素の定義域は常に $\mathcal{H}$ としておく。また、非有界作用素は定義域を全体に拡張する事は出来ないが、その内で興味があるのは定義域が稠密なもののみであるので、ここでは作用素 A の定義域 $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ は稠密としておく。

作用素 A の共役作用素 A^* を

$$\begin{aligned} D(A^*) &:= \{\psi \in \mathcal{H} \mid \text{ある } \psi' \in \mathcal{H} \text{ が存在して, 任意の } \phi \in D(A) \text{ に対して } \langle \psi, A\phi \rangle = \langle \psi', \phi \rangle\} \\ A^*\psi &:= \psi' \end{aligned}$$

と定める. A^* が A の拡張となるとき, 即ち,

$$D(A) \subseteq D(A^*) \text{ かつ } A\psi = A^*\psi \quad (\forall \psi \in D(A))$$

となるとき, A を対称作用素と云う. 対称作用素の中で, 特に $A = A^*$ となるものを自己共役作用素と云う. これはエルミート行列に相当するものでありスペクトル $\sigma(A)$ が実数の部分集合になる事で特徴づけられる. 紙数の都合上, 詳細については [新江 99a][黒田 80] 等を参照して戴きたい.

3 時間作用素

定義 3.1. 対称作用素 T が自己共役作用素 H の時間作用素であるとは, $\{0\}$ と異なる (稠密とは限らない) ある線形部分空間 $D \subseteq D(TH) \cap D(HT)$ が存在し, D 上で次の正準交換関係 (CCR) を満たす事である.

$$TH - HT = \sqrt{-1},$$

つまり, 任意の $\psi \in D$ に対して $[T, H]\psi = \sqrt{-1}\psi$ が成立する事である.

正準交換系を満たす作用素の性質として, 次の定理がよく知られている (詳しくは [新江 99b, 定理 3.24] を参照の事)

定理 3.2. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, A, B を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素で, 稠密な部分空間 $D \subseteq D(AB) \cap D(BA)$ 上で交換関係

$$[A, B] = \lambda$$

を満たすものとする. このとき, A, B の少なくとも一方は非有界である.

有限次元線形空間上の線形写像は全て有界である為, 上記の定理から有限次元線形空間を考えても, 稠密な線形部分空間上で CCR を満たす作用素は存在しない. 従って, CCR を考える際は基本的に無限次元の Hilbert 空間を扱う必要があり, 少なくとも一方の作用素は非有界となる.

さて, まずは自己共役作用素に対して時間作用素が存在するかが気になるところである. しかし, この間には CCR が成立する部分空間 D に稠密性を課さなければ凡そ肯定的に答える事が出来る.

定理 3.3. H を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. もし H が定義域 $D(H)$ 上で定数でなければ, H に対する時間作用素 T が存在して, ある部分空間 D 上で式 (1.1) を満たす.

この定理から時間作用素は殆んどの場合に存在するのだが、この定理で構成される時間作用素はあまり良いものではない。従って、CCR の条件が成立する部分空間 D は稠密か余次元が有限なものとしておいた方がよいかもしれない。上記の定理に於いて部分空間 D は稠密である必要が無かった為に、いつでも時間作用素が存在するのだが、 D が稠密である場合はそれほど簡単ではない。スペクトルが離散固有値のみの場合は次の定理が知られている。

定理 3.4. [AM08]

H を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で次の仮定を満たすとする。

(H.1) H は正の作用素で、そのスペクトルは全て単純離散固有値である。

(H.2) $\sigma(H) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表せるが、このとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E_n^2} < \infty$ 。

このとき、ある稠密な部分空間 D 上で正準交換関係 (1.1) を満たす H の時間作用素 T が存在する。

この定理から次の定理を導く事が出来る。

定理 3.5. H を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の非有界自己共役作用素とする。もし、 H のスペクトルが固有値のみかつ、重複度を込めて可算個、即ち、 $\sigma(H) = \sigma_p(H)$, $|\sigma(H)| \leq \aleph_0$ かつ、任意の $\lambda \in \sigma(H)$ に対して $\dim \ker(H - \lambda) \leq \aleph_0$ ならば、ある稠密な部分空間 D 上で正準交換関係 (1.1) を満たす H に対する時間作用素 T が存在する。

可算個の固有値のみからなるスペクトルをもつ非有界作用素の場合には時間作用素が存在する事が分った。連続スペクトルがある場合は難しそうなので、次にスペクトルが固有値のみの有界作用素の場合に時間作用素が存在するかが気になるところである。この場合は次の定理により、時間作用素が存在しない事が部分的に示される。

定理 3.6. $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を互いに直行する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の可算族、 $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}$ の中の有界点列とする。このとき、次の条件を満たす $H := \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i P_i$ に対する対称作用素 T は存在しない。

- (1) $D \subseteq \mathcal{H}$ は T の芯である。
- (2) D 上で正準交換関係 (1.1) を満たす。
- (3) ある $i \in \mathbb{N}$ が存在して $P_i(D) \cap D(\overline{T}) \neq \{0\}$ 。

注 3.7. もしも H が射影作用素、又は $H(\mathcal{H})$ が有限次元ならば上記の定理に於ける条件 (3) $P_i(D) \cap D(\overline{T}) \neq \{0\}$ は必要ない事が容易に分る。しかし、この条件が外せるかどうかはよく分らない。

参考文献

- [AM08] A. Arai and Y. Matsuzawa. Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum. *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), no. 8. 951–978.
- [新江 99a] 新井朝雄・江沢洋, 量子力学の数学的構造 I, 朝倉書店, 1999.
- [新江 99b] 新井朝雄・江沢洋, 量子力学の数学的構造 II, 朝倉書店, 1999.
- [新井 06] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉書店, 2006.
- [黒田 80] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.

Gray-Scott モデルのトランジェント軌道に対する共変 Lyapunov ベクトルの引き戻しによる数値解析

山口 崇幸

広島大学理学研究科数学専攻

1 はじめに

Gray-Scott モデルは, 適切なパラメータと初期値の軌道が自己複製パターンを示すことが知られている. この軌道は定常解に収束していくトランジェント軌道である. 本研究では, このような軌道の特徴づけるために定常解における線形化系の固有ベクトル (実固有ベクトルの場合, 共変 Lyapunov ベクトルに一致する) をトランジェント軌道に沿って引き戻したベクトルを数値的に求めたことで, 軌道の接空間の構造を特徴づけることを試みた.

Gray-Scott モデルは, 反応拡散方程式の 1 つであり, 次で与えられる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u - uv^2 + F(1 - u) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + uv^2 - (F + k)v \quad (2)$$

これは, 化学物質 U と V の化学反応 $U + 2V \rightarrow 3V$, $V \rightarrow P$ をモデルにしている. u と v はそれぞれ U と V の濃度を表し, D_u と D_v は対応する拡散係数である. また, F は U の流入, k は $V \rightarrow P$ の変化率を表す. 以下では, 1 次元の Gray-Scott モデルを考え, u, v は区間 $[0, L]$ で定義されているとする.

図 1 は 1 次元 Gray-Scott モデルの自己複製パターンを示す軌道の v を表示している. こ

の自己複製パターンは, サドル・ノード分岐の階層構造と極限点の余韻によって説明される [NU99, Uey99]. k を分岐パラメータとする. v の山の数 2 個, 4 個, ..., 10 個である定常解が現れるサドル・ノード分岐がほぼ同じパラメータで起こる. さらに, 各サドル・ノード分岐の 2 つの定常解の不安定多様体と安定多様体は, それぞれ異なる他のサドル・ノード分岐の定常解の安定多様体と不安定多様体に接続し, 階層構造をなしている.

このような条件の下で, 系がサドル・ノード分岐が起こるパラメータの少し前のパラメータである場合を考える. サドル・ノード分岐によって現れる定常解に近い状態の軌道は, 系のパラメータに関する連続性から軌道の変化量 (軌道の時間微分) は 0 に近い値をとる. そのため, 軌道はサドル・ノード分岐の定常解に近い値にしばらくとどまる. これは, 離散力学系における間欠性に対応し, 極限点の余韻と呼ばれる. さらに時間が経つと軌道は定常解から離れていき, サドル・ノード分岐の階層構造にしたがって次の定常解の近くに向かう. そこでまた極限点の余韻によりしばらくとどまる. このとき, 分岐図は図 2 のようになる. 図 1 の軌道の山が分裂するパターンはこのような仕組みにより引き起こされる.

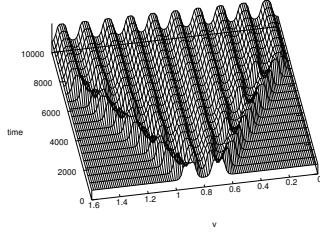


図1 自己複製パターンを示す1次元 Gray-Scott モデルの v の時間発展. パラメータは $D_u = 2 \times 10^{-5}$, $D_v = 10^{-5}$, $F = 0.04$, $k = 0.06075$, $L = 1.6$.

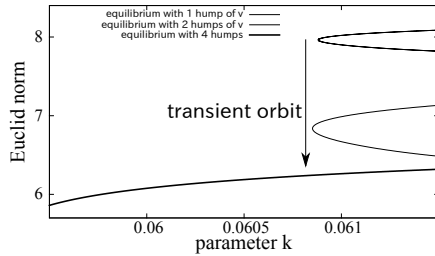


図2 v の山が2個から4個に変化するパターンを示す1次元 Gray-Scott モデルの軌道の近くの分岐図. 計算に用いたトランジェント軌道は, v の山が2個の定常解を生むサドル・ノード分岐の極限点の近くを通る.

2 固有ベクトルの引き戻し

トランジェント軌道に沿って定常解での線形化系の固有ベクトルを引き戻すために, 共変 Lyapunov ベクトルを求めるためのアルゴリズムである Ginelli et al. の方法 [GPT⁺07] を応用した. Ginelli et al. の方法は, まず接空間のベクトルを QR 分解しながら時間の正の方向に時間発展することによって収束させ, 次にそれらを時間の負の方向に引き戻して共変 Lyapunov ベクトルに収束させるアルゴリズムである. ベクトルを引き戻すときに, 正の方向の時間発展のときに得られる QR 分解の R を

用いることで効率的に行えるということがこのアルゴリズムの要点である.

本研究では, トランジェント軌道に沿って接空間のベクトルを QR 分解をしながら時間発展させた. 軌道が定常解に収束したところで, 十分に収束させて線形化系の固有ベクトル (共変 Lyapunov ベクトル) を求め, さらに引き戻しの段階をトランジェント軌道の部分まで適用した.

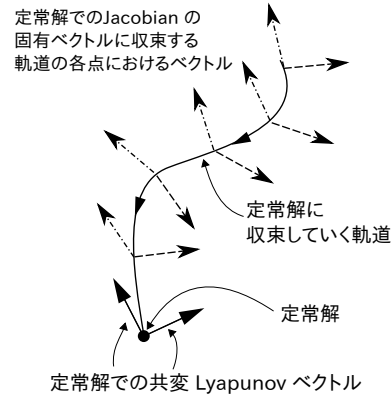


図3 トランジェント軌道に Ginelli et al. の方法を適用した場合に得られる接空間のベクトルの概念図.

その結果, 図3のような定常解の線形化系の固有ベクトルをトランジェント軌道に沿って引き戻したベクトルを得た. このベクトルは軌道の各点での接空間のベクトルである. 当然, このベクトルはトランジェント軌道に沿って時間発展すると収束先の定常解での線形化系の固有ベクトルに収束する.

3 Gray-Scott モデルに対する数値計算

Gray-Scott モデルに周期境界条件を課し, (1) と (2) を中心差分近似で常微分方程式に変換して軌道の計算を行った. u と v とともに 80 点に分割し, したがって系の次元は 160 である.

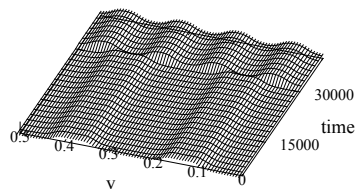


図 4 山が 2 個から 4 個に変化するパターンを示す 1 次元 Gray-Scott モデルの v の時間発展. パラメータは $D_u = 2 \times 10^{-5}$, $D_v = 10^{-5}$, $F = 0.04$, $k = 0.060851455688476566$, $L = 0.5$.

図 4 に示されているような v の山の数が 2 個から 4 個に変化する定常解に収束する軌道に対して解析を行った. L は 0.5 としており, u と v をそれぞれ 80 点に分割し, 時間の刻み幅は 0.5 とした. 時間がおおよそ 30000 のときに v の山の数が 2 個から 4 個に変化する軌道で, 分岐図においては図 2 に示されているように v の山の数が 2 個の定常解の極限点の近くを通り, 山の数が 4 個の定常解に収束する. この軌道を解析するために, 時間が 5000 から 35000 まで Ginelli et al. の方法で接空間のベクトルを求めた. 定常解の共変 Lyapunov ベクトルまたはその引き戻しは軌道の各点で系の次元だけ存在し, 160 個すべてのベクトルを数値的に求めた.

図 5 は, 数値計算によって得られた 1 番目の定常解での共変 Lyapunov ベクトル, つまり, 最大 Lyapunov 指数に対応している共変 Lyapunov ベクトルとその引き戻しを表示している. 得られたベクトルの各時刻の座標の値を区間 $[0, 1]$ にプロットし, ベクトルの時間発展を表示している. 図 6 は最大 Lyapunov 指数とその引き戻しから計算した有限時間 Lyapunov 指数の時間変化を表示している. この有限時間 Lyapunov 指数は, 山が分裂している 30000 付

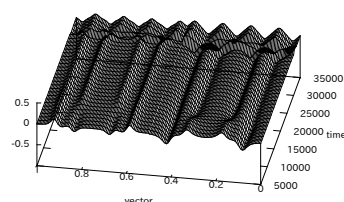


図 5 定常解における最大 Lyapunov 指数に対応する共変 Lyapunov ベクトルとその引き戻しの時間発展. 共変 Lyapunov ベクトルは u と v の次元を合わせた 160 次元の接空間のベクトルであり, 0.0 から 0.5 までは u に対応する 80 次元の座標, 0.5 から 1.0 までは v に対応する 80 次元の座標がプロットされている. 時間がおおよそ 30000 以上のときは定常解の共変 Lyapunov ベクトルになっており, それ以前の時間では時間発展で定常解の共変 Lyapunov ベクトルに収束していくベクトルである.

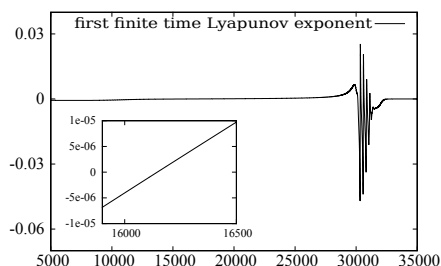


図 6 定常解における最大 Lyapunov 指数に対応する共変 Lyapunov ベクトルとその引き戻しから計算した有限時間 Lyapunov 指数. 時間が 25000 以前のトランジェント軌道の v の山が 2 個の状態のとき, 有限時間 Lyapunov 指数はおおよそ 16145 で符号が負から正に変化する.

近で激しく変化し, 分裂前と分裂後ではそれぞれほぼ一定の値をとる.

また, 図 5 から時間がおおよそ 16145 で有限時間 Lyapunov 指数の符号が負から正に変化していることがわかる. この時間は軌道が極限点に最も近づいた時間になっている. 実際,

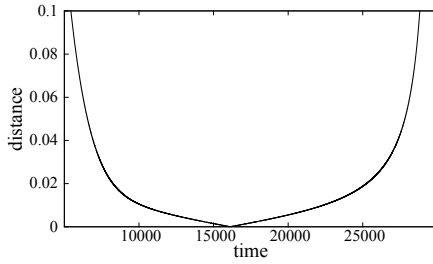


図7 トランジェント軌道と v の山が2個のサドル・ノード分岐の極限点の定常解との距離. 下の図は, 上の図の最小値付近の拡大図. トランジェント軌道は時間がおおよそ 16119 で極限点の定常解に最も近づいている.

図7はトランジェント軌道と v の山の数2個のサドル・ノード分岐の極限点付近の定常解との距離の時間変化を表示している. 時間がおおよそ 16119 のときにトランジェント軌道は, サドル・ノード分岐の極限点付近の定常解に最も近づくことがわかる. この時間は, 有限時間 Lyapunov 指数の符号が変わる時間とほぼ一致している.

この一致は, 有限時間 Lyapunov 指数は近似的には軌道の2階の時間微分に対応するので, サドル・ノード分岐が起こる1次元の常微分方程式で説明することができる. $\mu \in \mathbb{R}$ が分岐パラメータであるような次の1次元の常微分方程式

$$\dot{x} = x^2 - \mu, \quad x(0) = 0,$$

を考える. 軌道の2階の時間微分は $2x$ となるので, この場合の極限点である原点に近づくとときに符号が変わることがわかる.

引き戻しによって求めたベクトルの向き傾向を見るために, 1番目から5番目までの固有ベクトルの引き戻しのベクトルのすべての組に対して内積を計算した. これらのベクトルの角度はほとんど平行なときとほとんど直交なときに分かれていたので, 内積の絶対値の和をとり,

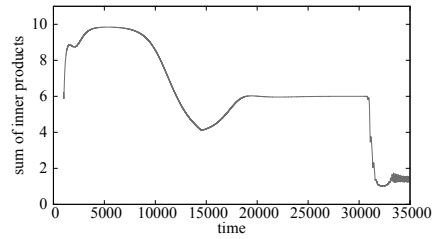


図8 1番目から5番目までの固有ベクトルの引き戻しのベクトルのすべての組に対する内積の絶対値の和.

傾向をグラフにした(図8). 内積の絶対値の和は, 時間が5,000から10,000の間と20,000から30,000までの間はほぼ一定の値をとり, おおよそ15,000で極小値をとる. v の山の数2個である時間が5,000から30,000の間であっても, 引き戻しのベクトルのなす角度が変わっていることがわかる.

参考文献

- [GPT⁺07] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chat  , R. Livi, and A. Politi, *Characterizing dynamics with co-variant lyapunov vectors*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007), no. 13, 130601.
- [NU99] Yasumasa Nishiura and Daishin Ueyama, *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D: Nonlinear Phenomena **130** (1999), no. 12, 73 – 104.
- [Uey99] Daishin Ueyama, *Dynamics of self-replicating patterns in the one-dimensional Gray-Scott model*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), no. 1, 175–210. MR 1673486 (99m:35110)

ON THE DESCENT OF MODULAR CALABI-YAU VARIETIES ARISING FROM THE CYNK-HULEK CONSTRUCTION

平川 義之輔 (Yoshinosuke Hirakawa)

慶應義塾大学大学院理工学研究科 後期博士課程 1 年 (hirakawa@a2.keio.jp)

ABSTRACT. 本稿では, 谷山-志村予想の高次元化への 1 つのアプローチとして, ある種の Calabi-Yau 多様体の L 関数と楕円 Hecke 固有新形式の L 関数との関係を主張する Mazur と van Straten の予想を紹介した後, 現在までに知られている結果の紹介, 及び最近筆者により得られた結果の紹介を行う.

1. Mazur と van Straten の予想

タイトルにある Calabi-Yau 多様体とは, 以下のような代数多様体のことである.

定義 1.1. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が (狭義の) Calabi-Yau 多様体であるとは, 以下の 2 つが成り立つことである.

$$(i) \Omega_X^i(X) = 0 \ (1 \leq i \leq n-1), \ (ii) \Omega_X^n(X) \simeq \mathbb{C}$$

また, 部分体 $F \subset \mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が Calabi-Yau 多様体であるとは, X の $\mathbb{C}$ への基底変換 $X_{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau 多様体となることである.

有理点を 1 つでも持つ 1 次元 Calabi-Yau 多様体は, 楕円曲線に他ならない. 谷山-志村予想とは, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に関する以下のような予想 (現在は定理) である.

定理 1.2. $\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線 E は保型的である. すなわち, 各 E に対して, ある重さ 2 の楕円 Hecke 固有新形式 f が存在し, $L(E, s) = L(f, s)$ が成り立つ.

谷山-志村予想の高次元 Calabi-Yau 多様体への拡張は極めて自然な問題であるが, この予想をより一般の代数多様体にも拡張した Langlands 予想の解決の見通しは立っていない. そこで, 保型的な Calabi-Yau 多様体を具体的に構成し, またそれらを考察することで, ある種の Calabi-Yau 多様体と楕円 Hecke 固有新形式との対応関係を理解することを試みる. これに対して, Mazur と van Straten により, 次のような予想が提示された.

予想 1.3. $\mathbb{Q}$ 係数 Fourier 展開を持つ重さ $n+1$ の任意の楕円 Hecke 固有新形式 f に対して, ある n 次元 Calabi-Yau 多様体 X , 及び部分モチーフ $t^n(X) \subset h^n(X)$ が存在し, $L(t^n(X), s) = L(f, s)$ が成り立つ. すなわち, f の L 関数は X の L 関数の因子として実現される.

注意 1.4. 楕円曲線の自然な高次元化には, Calabi-Yau 多様体以外にも Abel 多様体が知られているが, 予想 1.3 の Abel 多様体類似は一般には成立しないことを注意しておく. 例えば, $\mathbb{Q}$ 係数 Fourier 展開を持つ重さ 3 の楕円 Hecke 固有新形式で, その L 関数が $\mathbb{Q}$ 上の 2 次元 Abel 多様体の L 関数の因子としては決して得られないものが存在する. (cf. [ES])

$n \leq 2$ の場合には, 予想 1.3 を支持する結果が得られている.

定理 1.5. (i) 予想 1.3 は $n = 1$ のとき正しい.

(ii) ([ES]) Dirichlet L 関数に対する一般化された Riemann 予想を仮定すると, 予想 1.3 は $n = 2$ のとき正しい.

(i) は楕円曲線のモジュライ空間であるモジュラー曲線の Jacobi 多様体の考察, (ii) はある種の 2 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間である志村曲線, 及びそれでパラメタ付けられる楕円曲面族の考察が核心である. しかし, 高次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の構成は困難であり, 従って $n \leq 2$ の場合の方法を直接高次元化することも困難である.

2. Cynk と Hulek による帰納的な構成

一方で, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線のような保型的な代数多様体から代数幾何学的な操作を通じて Calabi-Yau 多様体を構成することができれば, もとの代数多様体の保型性を經由して Calabi-Yau 多様体の保型性を証明できる可能性がある. 実際, Cynk と Hulek は, 以下に述べる方法で保型的な高次元 Calabi-Yau 多様体の族を帰納的に構成することに成功した.

まず, 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 及びそれぞれの Abel 群構造に関する標準的な対合 ι_1, ι_2 に対して, 商多様体 $E_1 \times E_2 / \iota_1 \times \iota_2$ の極小特異点解消として 2 次元 Calabi-Yau 多様体 X_2 を得る. X_2 は自然に $E_1 / \iota_1 \times E_2 / \iota_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, その被覆変換を τ_2 とする. 次に, 楕円曲線 E_3 及び E_3 上の標準的な対合 ι_3 に対して, $X_2 \times E_3 / \tau_2 \times \iota_3$ の特異点解消として 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 を構成できる. X_3 も X_2 と同様に, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, 以下同様にして n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n を構成できる.

定理 2.1. ([CH]) $E_1, \dots, E_n$ を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線, $f_1, \dots, f_n$ をそれぞれ $L(E_i, s) = L(f_i, s)$ を満たす楕円 Hecke 固有新形式とする. このとき, 上で構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L\left(\bigotimes_{i=1}^n f_i, s\right) \quad (n : \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L\left(\bigotimes_{i=1}^n f_i, s\right) \quad (n : \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(\bigotimes_{i=1}^n f_i, s)$ は f_i に対応する Galois 表現のテンソル表現の L 関数を表す.

系 2.2. ([CH]) 定理 2.1 の仮定の下で, さらに $E_1, \dots, E_n$ はすべて $\mathbb{Q}$ 上同型で, 類数 1 の虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ 上で $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に虚数乗法を持つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(g_n, s)^{\binom{n}{0}} L(g_{n-2}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(g_1, s - \frac{n-1}{2})^{\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}} \quad (n : \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(g_n, s)^{\binom{n}{0}} L(g_{n-2}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(g_2, s - \frac{n-2}{2})^{\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}}} L(\chi_{-d}, s - \frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}} \\ \times \zeta(s - \frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}} \quad (n : \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(g_k, s)$, $L(\chi_{-d}, s)$, 及び $\zeta(s)$ は, それぞれ重さ $k+1$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に付随する Dirichlet L 関数, 及び Riemann ζ 関数を表す.

3. $\mathbb{Q}$ -楕円曲線と Weil 係数制限関手

定義 3.1. 代数体 F 上の楕円曲線 E が $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であるとは, E と $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な任意の楕円曲線と E 自身とが $\overline{\mathbb{Q}}$ 上同種であることである.

$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線は $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であるが, 逆は成り立たない. しかし, $\mathbb{Q}$ -楕円曲線は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とよく似た数論的な性質を持つ. 実際, 系 2.2 と全く同様に以下を証明することができる.

命題 3.2. H を虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の Hilbert 類体, E を $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に虚数乗法を持つ H 上の $\mathbb{Q}$ -楕円曲線, $E_1 = E, E_2, \dots, E_n$ を (重複を許した) E と $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な楕円曲線, ψ , 及び $\overline{\psi}$ をそれぞれ E/H から定まる H の Hecke 指標, 及びその複素共役とする. このとき, 定理 2.1 と同様に構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は H 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} L(h^n(X_n/H), s) &= L(\psi^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\psi^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\psi, s - \frac{n-1}{2})^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \\ &\quad \times L(\overline{\psi}^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\overline{\psi}^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\overline{\psi}, s - \frac{n-1}{2})^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \quad (n : \text{奇数}) \\ L(t^n(X_n/H), s) &= L(\psi^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\psi^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\psi^2, s - \frac{n-2}{2})^{\binom{n}{\frac{n-2}{2}}} \\ &\quad \times L(\overline{\psi}^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\overline{\psi}^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\overline{\psi}^2, s - \frac{n-2}{2})^{\binom{n}{\frac{n-2}{2}}} \\ &\quad \times \zeta_H(s - \frac{n}{2})^{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \quad (n : \text{偶数}, t^n(X_n/H) \subset h^n(X_n/H) : \text{部分モチーフ}) \end{aligned}$$

ただし, $L(\psi, s)$, 及び $\zeta_H(s)$ は, それぞれ ψ に付随する Hecke L 関数, 及び H 上の Dedekind ζ 関数を表す.

そこで, 楕円曲線そのものの定義体は $\mathbb{Q}$ に降下できなくとも, このように構成した Calabi-Yau 多様体 X_n が $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持てば, 系 2.2 では実現できなかった楕円 Hecke 固有新形式も X_n の L 関数の因子として実現できるであろうと期待される. 実際, Cynk と Schütt は以下の定理を証明した.

定理 3.3. ([CS]) $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の類数が 3 のとき, 命題 3.2 で楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から構成した 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 は $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^3(X_3/\mathbb{Q}), s) = L(g_3, s) L(\psi, s-1)$$

ただし, $L(g_3, s)$, 及び $L(\psi, s)$ は, それぞれ重さ $3+1=4$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, 及び $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から定まる Hecke 指標 ψ に付随する Hecke L 関数を表し, このような $L(g_3, s)$ は系 2.2 で得られたものたちとは重複しない.

定理 3.3 の証明の核心は, X_3 の構成に用いる楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2 \times E_3$ を, E の Weil 係数制限関手による像 $\text{Res}_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ と見なすことで, 多様体の定義体を H あるいは $\mathbb{Q}(j_E)$ から $\mathbb{Q}$ へ降下することである. しかし, 一般には Weil 係数制限関手によって直積型の多様体の定義体を降下できたとしても, 商多様体やその特異点解消の定義体を降下できるとは限らないため, Cynk と Schütt による降下法は 4 次元以上の場合には上手く機能しない.

4. 主結果

そこで、特異点解消を経由せず、高次元 Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成することを考える。以下では、Calabi-Yau 多様体上に帰納的に定まる不分岐対合を用いることで、特異点解消を経由することなく 2^p 次元 Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成し、かつ定義体を順次降下するという、筆者により得られた Calabi-Yau 多様体の構成方法を述べる。

$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_p = \mathbb{Q}$ を $[F_i : F_{i+1}] = 2$ かつ $\text{Gal}(F_i/F_{i+1}) = \langle \sigma_i \rangle$ なる代数体の降下列とし、 E を F 上の楕円曲線、 ι を E 上の標準的な対合とする。さらに、 E は F 上定義された位数 2 の点 P を含むと仮定する。まず、Weil 係数制限関手の関手性から、商多様体 $\text{Res}_{F_0/F_1}(E)/\iota \times \iota^{\sigma_0}$ の極小特異点解消 X_2 は F_1 上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体を定める。 $p = 1$ ならば、 X_2 が既に $\mathbb{Q}$ 上定義されているが、 $p \geq 2$ の場合はさらに定義体を降下したい。そこで、2 次元 Abel 多様体 $(\text{Res}_{F_0/F_1}(E))_{F_0} \simeq E \times E^{\sigma_0}$ 上の対合

$$(P_1, P_2) \mapsto (P_1 + P, -P_2 + P^{\sigma_0})$$

が誘導する $(X_2)_{F_0}$ 上の不分岐対合 ϵ_2 を考えると、 X_2 上の楕円曲面構造から ϵ_2 は F_1 上定義されることが分かる。従って、 F_2 上の滑らかな 4 次元射影代数多様体 $X_4 = \text{Res}_{F_1/F_2}(X_2)/\epsilon_2 \times \epsilon_2^{\sigma_1}$ を得るが、Cynk と Hulek による議論と同様にして X_4 が 4 次元 Calabi-Yau 多様体であることも分かる。さらに、構成から X_4 は $\text{Res}_{F_1/F_2}(X_2/\epsilon_2)$ の不分岐 2 重被覆と見なせるので、その被覆変換を ϵ_4 とすると、 $p \geq 3$ の場合にも同様に、 $X_8 = \text{Res}_{F_2/F_3}(X_4)/\epsilon_4 \times \epsilon_4^{\sigma_2}$ が F_3 上の 8 次元 Calabi-Yau 多様体であることが分かる。 $p \geq 4$ の場合にも、このようにして帰納的に構成した X_{2^p} が $\mathbb{Q}$ 上の 2^p 次元 Calabi-Yau 多様体であることが分かる。

以下が本稿の主結果である。

定理 4.1. E を $F = \mathbb{Q}(j_E)$ 上の $\mathbb{Q}$ -楕円曲線とする。また、 E は F 上に位数 2 の点を持ち、かつ $H = F(\sqrt{-d})$ 上で類数 2^p の虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に虚数乗法を持つと仮定する。このとき、上で構成された $\mathbb{Q}$ 上の 2^p 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^p} は、以下を満たす。

$$\begin{aligned} L(t^{2^p}(X_{2^p}/H), s) &= L(\psi^{2^p+1}, s)^{\binom{2^p}{0}} L(\psi^{2^p-1}, s-1)^{\binom{2^p}{1}} \cdots L(\psi^2, s-2^{p-1}+1)^{\binom{2^p}{2^{p-1}-1}} \\ &\quad \times L(\bar{\psi}^{2^p+1}, s)^{\binom{2^p}{0}} L(\bar{\psi}^{2^p-1}, s-1)^{\binom{2^p}{1}} \cdots L(\bar{\psi}^2, s-2^{p-1}+1)^{\binom{2^p}{2^{p-1}-1}} \\ &\quad \times \zeta_H(s-2^{p-1})^{\binom{2^p}{2^{p-1}}} (t^{2^p}(X_{2^p}/H) \subset h^{2^p}(X_{2^p}/H) : \text{部分モチーフ}) \end{aligned}$$

ただし、 ψ 及び $\bar{\psi}$ は E/H から定まる H の Hecke 指標及びその複素共役である。

今後は、 $t^{2^p}(X_{2^p}/H)$ を $\mathbb{Q}$ 上のモチーフに降下し、その L 関数を楕円 Hecke 固有新形式の L 関数で記述することで、定理 3.3 を高次元化することが課題である。

References

- [CH] S. Cynk and K. Hulek, Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds, *Canad. Math. Bull.*, **50** (4), 2007, 486-503.
- [CS] S. Cynk and M. Schütt, Generalized Kummer constructions and Weil restrictions, *Journal of Number Theory*, **129**, 2009, 1965-1975.
- [ES] N. D. Elkies and M. Schütt, Modular forms and K3 surfaces, *Advances in Mathematics*, **240**, 2013, 106-131.

ある微分方程式のモジュラー形式解と 楕円曲線の超特異多項式

中屋 智瑛（九州大学大学院数理学府）

概要

Serre 微分と呼ばれる微分作用素の類似物から $M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ の自己準同型を構成し, その固有関数と supersingular polynomial との関係を示すことができたのでそれを紹介する.

1 序

標数 $p > 0$ の体 K 上定義された楕円曲線 E に対し, 群 $E(\overline{K})$ が位数 p の元をもたないとき E は supersingular であるという. supersingular な楕円曲線 E の j 不変量は $\mathbb{F}_{p^2}$ に入ることが知られている. したがって E の同型類は有限個であり, その j 不変量を根にもつ monic 多項式

$$ss_p(j) = \prod_{\substack{E/\mathbb{F}_p \\ E:\text{supersingular}}} (j - j(E)) \in \mathbb{F}_p[j]$$

は supersingular polynomial と呼ばれる.

偶数 $k \geq 4$ に対して M_k を $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正則モジュラー形式のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする. k は

$$k = 12m + 4\delta + 6\varepsilon \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \delta \in \{0, 1, 2\}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}$$

と一意的に書け, $\dim M_k = m + 1$ が成り立つ. さらに任意の $f \in M_k$ に対し, $f/(E_4^\delta E_6^\varepsilon \Delta^m)$ は重さ 0 かつ $\mathfrak{H}$ 上正則より, 高々 m 次の $j(\tau)$ の多項式 $\tilde{f}$ を用いて

$$f(\tau) = E_4(\tau)^\delta E_6(\tau)^\varepsilon \Delta(\tau)^m \tilde{f}(j(\tau))$$

と書ける. ここで $E_k(\tau) \in M_k$ は Eisenstein 級数と呼ばれ, 次のようなフーリエ展開で定義される (B_k は k 番目のベルヌーイ数).

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^{k-1} \right) q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\})$$

また,

$$\Delta(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots,$$

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21497360q^2 + \cdots$$

は各々重さ 12 の尖点形式および楕円モジュラー関数である. $k = 2$ に対して,

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) q^n = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \log \Delta(\tau)$$

は $\mathfrak{H}$ 上正則だがモジュラー形式ではないことに注意しておく.

Eisenstein 級数と supersingular polynomial の間には次のような古典的な関係が知られている ($p - 1 = 12m + 4\delta + 6\varepsilon$).

Theorem 1 (Deligne). 素数 $p \geq 5$ に対して,

$$ss_p(j) \equiv j^\delta (j - 1728)^\varepsilon \tilde{E}_{p-1}(j) \pmod{p}.$$

また, supersingular polynomial は超幾何級数を用いて次のように書ける.

Theorem 2 (Deuring). 素数 $p \geq 5$ に対して,

$$ss_p(j) \equiv j^{m+\delta} (j - 1728)^\varepsilon {}_2F_1 \left(\frac{1}{12} + \frac{2\delta + 3\varepsilon}{6}, \frac{5}{12} - \frac{2\delta - 3\varepsilon}{6}; 1; \frac{1728}{j} \right) \pmod{p}.$$

さて, $f'(\tau) := (2\pi i)^{-1} df/d\tau = q df/dq$ とし, Serre 微分 $\partial_\Delta = \partial_{\Delta,k} : M_k \rightarrow M_{k+2}$ を次で定める.

$$\partial_\Delta(f)(\tau) := f'(\tau) - \frac{k}{12} \frac{\Delta'(\tau)}{\Delta(\tau)} f(\tau) = f'(\tau) - \frac{k}{12} E_2(\tau) f(\tau)$$

さらに Serre 微分を二回施した作用素 $\partial_\Delta^2 = \partial_{\Delta,k+2} \circ \partial_{\Delta,k} : M_k \rightarrow M_{k+4}$ を考える. $k \not\equiv 2 \pmod{3}$ に対して $\dim M_k = \dim M_{k+4}$ となることから, $M_{k+4} = E_4 \cdot M_k$ である. ゆえに $E_4^{-1} \partial_\Delta^2$ は M_k の自己準同型を与えるが, これは $k(k+2)/144$ を固有値の一つとして持つ. そこで固有値問題

$$\partial_\Delta^2(f) = \frac{k(k+2)}{144} E_4 f \tag{1}$$

において, その一意的な正規化された解を $F_{\Delta,k} \in M_k$ とする. このとき次が成り立つ.

Theorem 3 (Kaneko, Zagier). 素数 $p \geq 5$ に対して,

$$ss_p(j) \equiv j^\delta (j - 1728)^\varepsilon \tilde{F}_{\Delta,p-1}(j) \pmod{p}.$$

証明は (1) が

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6} E_2(\tau) f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12} E_2'(\tau) f(\tau) = 0$$

と書き直せることから, $k = p-1$ に対して $F_{\Delta, p-1}'' \equiv 0 \pmod{p}$, よって $F_{\Delta, p-1} \equiv 1 + O(q^p) \pmod{p}$ となることと $E_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ という事実から Theorem 1 を通じてなされる. また解は超幾何級数を用いて表示することもできる. 詳細は [1] を参照のこと.

また [2] では Serre 微分の代わりに, 微分作用素

$$\partial_{E_4}(f)(\tau) := f'(\tau) - \frac{k}{4} \frac{E_4'(\tau)}{E_4(\tau)} f(\tau), \quad \partial_{E_6}(f)(\tau) := f'(\tau) - \frac{k}{6} \frac{E_6'(\tau)}{E_6(\tau)} f(\tau)$$

を用いて構成した同様の固有値問題の, 正規化されたモジュラー形式解に対し次が成り立つことが示されている.

Theorem 4 (Baba, Granath). 素数 $p \geq 5$ に対して,

$$ss_p(j) \equiv j^\delta (j - 1728)^\varepsilon \tilde{F}_{E_4, p-1}(j) \equiv j^\delta (j - 1728)^\varepsilon \tilde{F}_{E_6, p-1}(j) \pmod{p}.$$

同じ方針でより一般的な形で微分作用素を構成しても, やはり supersingular polynomial との関係が得られるというのが主結果である.

2 主結果

$r, s, t \in \mathbb{Z}, 2r + 3s + 6t \neq 0$ に対して $g(\tau) := E_4(\tau)^r E_6(\tau)^s \Delta(\tau)^t$ とおく. さらに $k = 12m + 4\delta + 6\varepsilon$ とし, $1 \leq n \leq m$ なる整数 n に対して $t(k+1) \neq n(2r + 3s + 6t)$ であるとする. このとき

$$\partial_g(f)(\tau) = \partial_{g,k}(f)(\tau) := f'(\tau) - \frac{k}{4r + 6s + 12t} \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} f(\tau)$$

と定める. この作用素は M_k の元を M_{k+2} の元にうつすとは限らず, r, s, t の値によっては行き先が $\mathfrak{H}$ に極をもつ. そこで M_k の基底にこの作用素を二回作用させ, non-holomorphic term がどこから生じているかを具体的に計算する. それと打ち消しあうような項を加えることで M_k の自己準同型を構成できる. さらに適当な固有値を選んで固有値問題を考えると, それは以下のような微分方程式に書き換えることができる:

$$f'' - \frac{k+1}{u} \frac{g'}{g} f' + \frac{k(k+1)}{2u} \left(\frac{g'}{g} \right)' f + \frac{s(k+1)(k+2\varepsilon)}{8u} \frac{E_4(E_4^3 - E_6^2)}{E_6^2} f - \left\{ \frac{r(k+1)(k+2\delta)}{18u} - \frac{\delta(\delta-1)}{9} \right\} \frac{E_4^3 - E_6^2}{E_4^2} f = 0.$$

ここで $u = 2r + 3s + 6t$ である. モジュラー形式解を $F_{g,k}(\tau)$ とし, $F_{g,k}(i\infty) = 1$ と正規化する.

Theorem 5. 素数 $p \geq 5$ に対して, $u \not\equiv 0 \pmod{p}$ とすると

$$ss_p(j) \equiv j^\delta(j - 1728)^\varepsilon \tilde{F}_{g,p-1}(j) \pmod{p}.$$

証明は Theorem 3 と同様で, $k = p - 1$ に対して $F''_{g,p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ となることから示される (今の場合 $\delta \in \{0, 1\}$ であることに注意). また, $F_{g,k}(\tau)$ は超幾何級数を用いて具体的に表示することもできる.

$$F_{g,k} = E_4^{3m+\delta} E_6^\varepsilon {}_2F_1 \left(-\frac{k}{12} + \frac{2\delta + 3\varepsilon}{6}, \frac{5}{12} + \frac{(2r - 3s - 6t)(k + 1)}{12u} - \frac{2\delta - 3\varepsilon}{6}; 1 - \frac{t(k + 1)}{u}; \frac{1728}{j} \right)$$

これより $k = p - 1$ に対し $\tilde{F}_{g,p-1}(j) \pmod{p}$ は Theorem 2 の右辺に還元されるので, 確かに supersingular polynomial を与えている.

3 今後の課題

今のところ non-holomorphic term を消すという構成方法が, なぜ supersingular polynomial との関係を導くのかはよくわかっていない. また微分作用素を三回以上施して固有値問題を考えることもできる. 例えば [3] では $k \equiv 0 \pmod{4}$ のとき M_k の自己準同型

$$E_6^{-1}(\partial_\Delta^3(f) + cE_4\partial_\Delta(f))$$

の固有関数から構成される多項式が supersingular polynomial を与えることが示されている. あるいは $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に対しても同様の問題を考えることができるだろう.

参考文献

- [1] M. Kaneko, D. Zagier, Supersingular j -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. **7** (1998), 97–126
- [2] S. Baba, H. Granath, Orthogonal systems of modular forms and supersingular polynomials, International Journal of Number Theory, vol. 7, no. 1 (2011), 249–259
- [3] M. Kaneko, N. Todaka, Hypergeometric modular forms and supersingular elliptic curves, Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. **30** (2001), 79–83

Notes on the Hochschild homology dimension and truncated cycles

板垣 智洋 (東京理科大学) *

本講演の内容は眞田克典氏との共同研究 [7] に基づいている. 本講演では, 2 以上の整数 m に対して, m -truncated cycle をもつある多元環のクラスのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示す.

定義 1. 可換環 K 上の多元環 A に対して, 以下の複体 $C(A)$ を A の Hochschild complex という.

$$C(A) : \cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes(n+1)} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} A \rightarrow 0.$$

ただし, $\otimes$ は $\otimes_K$ を表し, $b : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A^{\otimes n}$ は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} b(x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n \\ &\quad + (-1)^n x_n x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n. \end{aligned}$$

可換環 K 上の多元環 A の n 次ホッホシルトホモロジー群は $HH_n(A) = H_n(C(A))$ で定義される.

特に, K 上の多元環 A が K 上 projective なとき, $HH_n(A) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A)$ である. ただし, A^e は A の包絡多元環 $A \otimes A^{\mathrm{op}}$ を表す. また, A の n 次ホッホシルトコホモロジー群は $HH^n(A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A)$ で定義される.

1989 年, Happel[6] は有限次元多元環のホッホシルトコホモロジーについて, その高次のホッホシルトコホモロジー群がすべて 0 であれば, 大域次元が有限であるかということを問題提起した. 後に Happel's question と呼ばれ, 2005 年に Buchweitz, Green, Madsen, Solberg[2] によって反例が挙げられ, 否定的に解決された. 2006 年, Han[5] はホッホシルトホモロジー次元 $\mathrm{HHdim} A = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid HH_n(A) \neq 0\}$ を用いて Happel's question のホモロジー版を予想し, monomial algebra に対して肯定的に解決している.

Bergh, Han, Madsen[3] は多元環のクイバーの組み合わせに着目して, この予想にアプローチしている. 具体的には, 以下で定義される m -truncated cycle を導入し, 2-truncated cycle をもつ多元環のホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示している. 結果として, 大域次元

* Email: j1112701@ed.tus.ac.jp

が有限な有限次元多元環が 2-truncated cycle を持たないことを示している. さらに, この主張が m -truncated cycle に対しても成り立つのではないかと予想し, monomial algebra に対しては肯定的に解決している.

定義 2 ([3]). K を可換環, m を 2 以上の整数とし, Q を有限クイバーとする. Bound quiver algebra KQ/I に対して, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_u$ が cycle となる矢の列 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ で, 全ての $i(1 \leq i \leq u)$ に対して

$$\alpha_i \cdots \alpha_{i+m-1} = 0, \quad \alpha_i \cdots \alpha_{i+m-2} \neq 0 \quad \text{in } KQ/I$$

を満たすものを m -truncated cycle という. ただし α の添え字は u を法としている.

K を可換環とし, Q を有限クイバーとする. R_Q を KQ の arrow ideal とする. Q_n を長さ n の path 全体の集合, Q_n^c を長さ n の cycle 全体の集合とすると, 位数 n の巡回群 $G_n = \langle t_n \rangle$ の Q_n^c 上の作用が $t_n(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$ で与えられる. Cycle γ に対して, $\text{per } \gamma$ を $\gamma = \delta^r$ を満たす δ の長さで最小なものとする.

Sköldberg[8] は可換環 K 上の truncated quiver algebra KQ/R_Q^m について, その射影分解を与え, ホッホシルトホモロジーの加群構造を決定している. 各ホッホシルトホモロジー群の生成元を具体的に表示すると, 以下の補題が得られる.

補題 3 ([7]). K を体とし, A を truncated quiver algebra KQ/R_Q^m とする. $\bar{\gamma} \in Q_{cm}^c/G_{cm}$ ($\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_{cm}, \alpha_1, \dots, \alpha_{cm} \in Q_1$) に対して, 以下は non-zero homology class に一致する:

$$\alpha_{(c-1)m+i+1} \cdots \alpha_{cm} \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \cdots \alpha_{(c-1)m+i} \in A \otimes_{KQ_0^e} \Gamma^{((c-1)m+1)}.$$

ただし, $i = 1, 2, \dots, \gcd(m, \text{per } \bar{\gamma}) - 1$ で $\Gamma^{(i)}$ は

$$\Gamma^{(i)} = \begin{cases} Q_{cm} & \text{if } i = 2c \ (c \geq 0), \\ Q_{cm+1} & \text{if } i = 2c + 1 \ (c \geq 0) \end{cases}$$

で与えられる. また, $\text{per } \bar{\gamma} = \text{per } \gamma$ とする.

補題 4 ([7]). K を体とし, A を truncated quiver algebra KQ/R_Q^m とする. $\bar{\gamma} \in Q_{cm+e}^c/G_{cm+e}$ ($1 \leq e \leq m-1, \gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_{cm+e}, \alpha_1, \dots, \alpha_{cm+e} \in Q_1$) に対して, 以下は non-zero homology class に一致する:

$$\alpha_{cm+1} \cdots \alpha_{cm+e} \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{cm} \in A \otimes_{KQ_0^e} \Gamma^{(cm)}.$$

これらの補題と Ames, Cagliero, Tirao[1] によって与えられている truncated quiver algebra の Sköldberg による射影分解 [8] と Cibils による射影分解 [4] の間の chain map を用いて, m -truncated cycle をもつある多元環のクラスのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示す.

以下が主結果である.

定理 5 ([7]). K を体, Q を有限クイバー, $I \subset KQ$ を R_Q^m に含まれるイデアルとする. KQ/I が m -truncated cycle $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ を含むとする. このとき, 次が成り立つ:

- (i) $\gcd(m, \text{per}(\alpha_1 \cdots \alpha_u)) \neq 1$ を仮定する. $un \equiv 0 \pmod{m}$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$\begin{aligned} & \alpha_{(c-1)m+2} \cdots \alpha_{cm} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_m \otimes \alpha_{m+1} \\ & \otimes \alpha_{m+2} \cdots \alpha_{2m} \otimes \alpha_{2m+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{(c-2)m+2} \cdots \alpha_{(c-1)m} \otimes \alpha_{(c-1)m+1} \end{aligned}$$

は $HH_{2c-1}(KQ/I)$ で 0 でない. ここで $c = un/m$ とする.

- (ii) e を $1 \leq e \leq m-1$ である整数とする. $un \equiv e \pmod{m}$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq j_1, \dots, j_c \leq m-2} \alpha_{2c+1+j_1+\dots+j_c} \cdots \alpha_{un} \\ & \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{1+j_1} \otimes \alpha_{2+j_1} \otimes \alpha_{3+j_1} \cdots \alpha_{3+j_1+j_2} \otimes \alpha_{4+j_1+j_2} \otimes \cdots \\ & \otimes \alpha_{2c-1+j_1+\dots+j_{c-1}} \cdots \alpha_{2c-1+j_1+\dots+j_c} \otimes \alpha_{2c+j_1+\dots+j_c} \end{aligned}$$

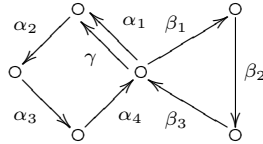
は $HH_{2c}(KQ/I)$ で 0 でない. ここで $c = (un - e)/m$ とする.

特に $\text{HHdim}(KQ/I) = \infty$ である.

系として以下を得た.

系 6 ([7]). K を体とし, Q を有限クイバー, I を R_Q^m に含まれる KQ の *admissible ideal* とする. 多元環 KQ/I が有限の大域次元を持つとき, Q は m -truncated cycles を持たない.

例 7 ([7]). 以下のクイバー Q とイデアル I で定まる bound quiver algebra KQ/I を考える:



$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} &= \beta_1 \beta_2 \beta_3 = \beta_3 \gamma \alpha_2 = 0, \\ \beta_2 \beta_3 \alpha_1 &= \beta_2 \beta_3 \gamma, \end{aligned}$$

$$I = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2}, \beta_1 \beta_2 \beta_3, \beta_3 \gamma \alpha_2, \beta_2 \beta_3 \alpha_1 - \beta_2 \beta_3 \gamma \rangle \quad (1 \leq i \leq 4).$$

ただし, α の添え字は 4 を法とする. このとき, $R_Q^6 \subset I \subset R_Q^3$ で, KQ/I は 3-truncated cycle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ をもつ. したがって, $\text{HHdim} KQ/I = \infty$. ゆえに, KQ/I の大域次元は無限大である.

参考文献

- [1] G. Ames, L. Cagliero and P. Tirao, *Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras*, J. Algebra 322(5)(2009), 1466–1497.
- [2] R.-O. Buchweitz, E. Green, D. Madsen and Ø. Solberg, *Finite Hochschild cohomology without finite global dimension*, Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 5-6, 805–816.

- [3] P.A. Bergh, Y. Han and D. Madsen, *Hochschild homology and truncated cycles*, Proc. Amer. Math. Soc. (2012), no. 4, 1133–1139.
- [4] C. Cibils, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra 56(3) (1989), 221–232.
- [5] Y. Han, *Hochschild (co)homology dimension*, J. Lond. Math. Soc. (2) 73 (2006), no. 3, 657–668.
- [6] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, in *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988)*, Lecture Notes in Mathematics 1404, Springer, Berlin, 1989, 108–126.
- [7] T. Itagaki, K. Sanada, *Notes on the Hochschild homology dimension and truncated cycles*, Arch. Math. 103 (2014), 219–228.
- [8] E. Sköldberg, *The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 1, 76–86.

ランダムピニング模型における相転移・臨界現象について

千野 由喜

1 ランダムピニング模型の紹介

ランダムピニング模型は元来、特定の媒質中にある高分子化合物の形状のモデル化として考え出された [5]. このモデルは高分子鎖をランダムウォークの軌跡、媒質をポテンシャルとして書き直すことで数理モデル化される. ランダムピニング模型は大きく homogeneous な場合と disordered な場合の二つに分けられる.

1.1 Homogeneous – 均質な場合

まずは、媒質が homogeneous な場合のランダムピニング模型を紹介しよう. ここではランダムウォーク S を再帰時間の分布によって特徴付ける. その分布は

$$K(n) := \mathbf{P}(\tau_i - \tau_{i-1} = n) = \frac{c_K}{n^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

で与え、 τ_i を i 番目の再帰時刻、 c_K を規格化定数とする. 簡単のため $K(\infty) = 0$ と、今回はしておく. 再帰時刻の列 $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は再生過程と呼ばれ、このモデルの解析において重要な役割を果たす ([2] が詳しい). 媒質については原点に対し時間一様にポテンシャルを置く. ウォークが原点に再帰する度にポテンシャルの効果でウォークは重みを増す（もしくは減らす）といったように考える. この効果の下でのウォークの振舞いを観察するための準備として、次の分配関数というものを定義する.

$$Z_{n,h} := \mathbf{E} \left[\exp \left\{ h \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k=0\}} \right\} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}} \right]. \quad (2)$$

統計力学では状態和と呼ばれるもので、全てのウォークのサンプルを含んでいる. 簡略化のため以下の記号を使っていく.

$$\delta_n := \mathbf{1}_{\{S_n=0\}}, \quad L_n := \sum_{k=1}^n \delta_k. \quad (3)$$

平衡状態を記述する（有限）Gibbs 測度は次のように書ける.

$$\frac{d\mathbf{P}_{n,h}}{d\mathbf{P}} = \frac{\exp \left\{ h \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k=0\}} \right\} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}}}{Z_{n,h}}. \quad (4)$$

（平衡）統計力学では、臨界現象を何らかの極限関数が解析性を失うことで特徴付ける. ここで言う極限とは無限体積極限のことであり、今回は $n \rightarrow \infty$ のことである. この極限関数として自由エネルギー $\mathbf{F}(h)$ を考える. 自由エネルギーは以下の等式の解として定められる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} K(n) \exp \{h - n\mathbf{F}(h)\} = 1. \quad (5)$$

再生定理を用いることにより,

$$\mathbf{F}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,h} . \quad (6)$$

であることが言える (証明については [6] もしくは [7] 参照). 分配関数に対するラプラス変換もしくは母関数を考えることで (5) 式による定義と (6) 式による定義の同値性を言うこともできる. 自由エネルギーを観察することによって臨界点 h_c が定まる. 母関数を用いた場合, この臨界点は母関数の収束半径にあたる.

$$h_c := \inf\{h \in \mathbb{R}; \mathbf{F}(h) > 0\} . \quad (7)$$

もし $h = 0$ ならば, 自明にランダムウォークのままで何も変化しない. しかし $h > 0$ ならば, 原点に再帰する度に重みを増すので原点付近に局在するウォークが実現されやすくなる. もちろん $h < 0$ ならば, ウォークは原点から離れるように振舞いやすくなる. このように局在相と非局在相の相転移の閾値として臨界点 $h_c = 0$ は特徴付けられる. これは直感にも合っていてとてもわかりやすい.

1.2 Disordered – 不均質な場合

この disordered な場合では媒質に対してランダムさ ω を加えて考える. つまり再帰する度にもらえた重みが毎回ランダムに変化する状況を考えている. ここで ω には本質的ではないが計算しやすくなるように, 次の仮定をしておく.

$$\omega = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ は独立同分布, } \mathbb{E}[\omega_1] = 0, \mathbb{E}[\omega_1^2] = 1, \mathbb{E}[e^{\beta\omega_1}] := M(\beta) < \infty, \beta \in \mathbb{R} . \quad (8)$$

$\mathbf{E}$ はウォークに関する期待値を表し, $\mathbb{E}$ は ω に関する期待値を表すとする. Disordered な場合では分配関数を次のように二通りに定めることができる.

$$Z_{n,h,\beta} := \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \sum_{k=1}^n (h + \beta\omega_k) \delta_k \right\} \delta_n \right] , \quad (9)$$

$$Z_{n,h,\beta}^a := \mathbb{E} [Z_{n,h,\beta}] . \quad (10)$$

一つ目を quenched, 二つ目を annealed と呼ぶ. Quenched な場合では媒質のランダムさがそのまま分配関数に反映されており, 分配関数自体が確率変数になっている. それに対して annealed な場合では, 媒質に対して平均を取ってしまったので平均場のような量になっている. さらに annealed な場合は独立性のおかげで計算が容易にでき, homogeneous な場合を少し平行移動したものになっていることがわかる.

$$\begin{aligned} Z_{n,h,\beta}^a &= \mathbb{E} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \sum_{k=1}^n (h + \beta\omega_k) \delta_k \right\} \delta_n \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ h \sum_{k=1}^n \delta_k \right\} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \beta \sum_{k=1}^n \omega_k \delta_k \right\} \right] \delta_n \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left\{ h \sum_{k=1}^n \delta_k \right\} \prod_{k=1}^n \mathbb{E} [\exp \{\beta\omega_k\}^{\delta_k} \delta_n] \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ h \sum_{k=1}^n \delta_k \right\} M(\beta)^{\sum_{k=1}^n \delta_k} \delta_n \right] = Z_{n,h+\log M(\beta)} \end{aligned}$$

この計算により annealed な場合の臨界現象は homogeneous な場合と同様に解析することができる. Quenched な場合に関しては, $\mathbb{E}[\log Z_{n,h,\beta}]$ の持つ優加法性と Kingman のエルゴード定理を用いることで次に定める自由エネルギーの存在性が言える.

$$\mathbf{F}(h, \beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,h,\beta} , \quad (11)$$

$$\mathbf{F}^a(h, \beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,h,\beta}^a = \mathbf{F}(h + \log M(\beta)) . \quad (12)$$

これにより，臨界点も

$$h_c(\beta) := \inf\{h \in \mathbb{R}; \mathbf{F}(h, \beta) > 0\} , \quad (13)$$

$$h_c^a(\beta) := \inf\{h \in \mathbb{R}; \mathbf{F}^a(h, \beta) > 0\} = -\log M(\beta) . \quad (14)$$

と定めることができる．対数の凸性から次の大小関係もわかる．

$$\mathbf{F}(h) \leq \mathbf{F}(h, \beta) \leq \mathbf{F}^a(h, \beta) , \quad (15)$$

$$h_c^a(\beta) \leq h_c(\beta) \leq h_c = 0 . \quad (16)$$

2 主要な結果

今現在得られている主な結果を紹介する．

定理 2.1 ([9], [3], [1]). $\beta > 0$ に対して，

$$h_c(\beta) \begin{cases} = h_c^a(\beta) \underset{\beta \downarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}\beta^2 & , \alpha \in (0, 1/2) \\ \underset{\beta \downarrow 0}{\sim} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \beta^2 & , \alpha > 1 \end{cases} \quad (17)$$

が成り立つ．ただし， $\mu = \mathbb{E}[\tau_1]$ とする．また， $h > h_c(\beta)$ に対して

$$\lim_{h \searrow h_c(\beta)} \frac{\mathbf{F}(h, \beta)}{\log(h - h_c(\beta))} \begin{cases} = 1/\alpha > 2 & , \alpha \in (0, 1/2) \\ \leq 2 & , \alpha \geq 1/2 \end{cases} \quad (18)$$

が言える．

(18) 式の 2 つ目の不等式は Smoothing 不等式と呼ばれ，[8] では ω がガウス型，[4] ではさらに一般の場合で示されている．

定理 2.2 ([7]). $\beta > 0$ に対して，ある定数 c がとれて

$$h_c(\beta) - h_c^a(\beta) \geq \begin{cases} c\beta^2 & \alpha > 1 \\ c\beta^2 / (\log(1 + \frac{1}{\beta}))^2 & \alpha = 1 \\ c\beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} & \alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \exp\left\{\frac{-1}{c\beta^4}\right\} & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (19)$$

が成り立つ．

この定理 2.2 は Fractional Moment Method(FMM:分数次積率法) と呼ばれる解析手法を用いて示される．

- **[Fractional moment estimate]**

分数次数 $\gamma \in (0, 1)$ を適切に選び，分配関数を 適切な距離(相関距離) で分割する．評価には $(1+x)^\gamma \leq 1+x^\gamma$, $x \geq 0$ を用いる

- **[Tilting(change of measure estimate)]**

Hölder の不等式を応用して， ω についての確率測度を 適切に取り直し，coarse graining によって分割された，相関距離の大きさのブロックでの分配関数を評価する

- **[Coarse graining estimate]**

相関距離で分割したブロック毎の分配関数の評価から全ての系の分配関数の評価に広げる

相関距離を k , 分数次数を γ として分配関数を coarse graining する

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\log Z_{n,h,\beta}] &= \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[\log(Z_{n,h,\beta})^\gamma] \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[\log(Z_{k,h,\beta} Z_{n-k,h,\beta})^\gamma] \\ &= \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[\log(Z_{k,h,\beta})^\gamma] + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[\log(Z_{n-k,h,\beta})^\gamma]\end{aligned}\tag{20}$$

この後, Jensen の不等式を用いて分配関数の分数次の積率を評価していくことになる. この手法の難しい点は, 分数次数 γ および相関距離 k を恣意的に与えなければ評価がうまくいかないところにある.

3 Discussion

定理 2.1 では $\alpha \in (0, 1/2)$ および $\alpha > 1$ における臨界点の振舞いが観察できる. しかしながら, $\alpha \in (1/2, 1)$ における臨界点の振舞いは現在に至るまでわかっていない. また, Smoothing 不等式では自由エネルギーの臨界点近くでの曲率の上限がわかっているだけにとどまり, その漸近挙動をつかむには至っていない. これらの定理で得られる結果は FMM を考えてもわかるように, ほとんどが annealed な場合の臨界点からのアプローチである. 下に凸で単調増加, 無限回微分可能な曲線 (自由エネルギー) の 0 との交点 (臨界点) を求めたいという目的に対して, 臨界点の下側である annealed な場合の臨界点からのアプローチはやや不自然に感じる. 自由エネルギーの属性から, 臨界点の上側である homogeneous な場合からのアプローチを考えるほうが直感的と言える. 講演では, どのようにしてこういったアプローチをするかを, その際に現れる問題点と共に議論していきたい.

参考文献

- [1] Kenneth S Alexander and Nikos Zygouras. Quenched and annealed critical points in polymer pinning models. *Communications in Mathematical Physics*, 291(3):659–689, 2009.
- [2] Søren Asmussen. *Applied probability and queues*, volume 51. Springer, 2003.
- [3] Quentin Berger, Francesco Caravenna, Julien Poisat, Rongfeng Sun, and Nikos Zygouras. The critical curves of the random pinning and copolymer models at weak coupling. *Communications in Mathematical Physics*, pages 1–24, 2013.
- [4] Francesco Caravenna and Frank den Hollander. A general smoothing inequality for disordered polymers. *Electronic communications in probability*, 18:1–15, 2013.
- [5] Michael E Fisher. Walks, walls, wetting, and melting. *Journal of Statistical Physics*, 34(5-6):667–729, 1984.
- [6] Giambattista Giacomin. *Random polymer models*, volume 200. World Scientific, 2007.
- [7] Giambattista Giacomin. *Disorder and Critical Phenomena Through Basic Probability Models: École D’Été de Probabilités de Saint-Flour XL–2010*, volume 40. Springer, 2011.
- [8] Giambattista Giacomin and Fabio Lucio Toninelli. Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Communications in mathematical physics*, 266(1):1–16, 2006.
- [9] Fabio Lucio Toninelli et al. Disordered pinning models and copolymers: beyond annealed bounds. *The Annals of Applied Probability*, 18(4):1569–1587, 2008.

信号処理理論のための超関数の積および畳み込み

秋田 大 (北海道大学大学院生命科学院)

E-mail: akitad@mail.sci.hokudai.ac.jp

一般的な信号処理の教科書では、信号が離散時間か連続時間かという点、周期的であるかどうかという点によって信号を分けて扱っている。これらを統一した概念で扱う方法として、デルタ関数を含む超関数として扱うことが考えられる。しかし、信号処理においては積と畳み込みの重要な定理が多用されるにも関わらず、従来の超関数の積と畳み込みの定義は信号処理の理論の要請を満足するものではない。そこで本発表では信号処理の理論に合う超関数の積と畳み込みの定義を提案する。

The Multiplication and the Convolution of Distributions for the Theory of Signal Processing

Dai Akita (Graduate School of Life Science, Hokkaido University)

In the theory of signal processing, signals are usually classified by 2 points: whether their domain is discrete time or continuous time and whether they have a period or not. To regard signals as distributions without the classification, we can consider using distributions including delta function. However, the conventional definition of multiplication and convolution for distributions does not satisfy the requirement of the theory of signal processing, whereas there are important theorems associated with multiplication and convolution in signal processing. In this presentation, multiplication and convolution of distributions which are suited to the theory of signal processing proposed.

1 信号の分類

信号は、一般的な信号処理の教科書では実数または整数を定義域として持つ実数値関数として定義される。信号の定義域は時間あるいは時刻と呼ばれ、時間が実数の場合は連続時間信号、時間が整数である場合は離散時間信号とよぶ。信号 f が離散時間信号であることを強調する際には、時刻 $t \in \mathbb{Z}$ について $f(t)$ という記法以外に $f[t]$ という表現を用いる。

このように、信号はその定義域によって連続時間であるか離散時間であるかという分類がなされるが、さらに周期性による信号の分類が行われる。つ

まり信号 f について $f(t - T) = f(t)$ となる $T > 0$ が存在する時、その信号は有限周期信号と呼ばれる。有限周期信号でない信号は無限周期信号と呼ぶ。

フーリエ変換に代表される時間ドメインから周波数ドメインに変換する手法はこれらの分類ごとに存在する [1]。連続時間有限周期信号ではそれはフーリエ級数展開であり、連続時間無限周期信号ではフーリエ変換、離散時間有限周期信号では離散フーリエ変換、離散時間無限周期信号では離散時間フーリエ変換である。

2 緩増加超関数による統一

連続時間信号と離散時間信号とはその定義域が異なる。しかし、離散時間信号 $f[t]$ を標準化周波数 T_s およびデルタ関数を用いて

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \delta(t - kT_s) \quad (1)$$

と書き表すと、連続時間ドメインにすることができ。ここで、デルタ関数 δ は

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \quad (2)$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad (a < 0 < b) \quad (3)$$

を満たすものとよく説明されるが³、数学的には超関数としての扱いが必要である。つまり、関数の連続線型汎関数^{*1}として扱う。デルタ関数の場合には、汎関数 $\delta: \varphi(x) \rightarrow \varphi(0)$ と考える。これは公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (4)$$

に対応する。

ただし、汎関数の定義域として任意の関数を考えるわけではない。超関数のフーリエ変換ができるためには、急減少関数を定義域とする必要がある。急減少関数とは、無限回微分可能な関数 f のうち、任意の非負整数 α, β に対して

$$\sup |x^\beta f^{(\alpha)}(x)| < \infty \quad (5)$$

を満たすものである。急減少関数の連続線型汎関数を緩増加超関数という。急減少関数の集合は $\mathcal{S}$ で、緩増加超関数の集合は $\mathcal{S}'$ で表し、 $\varphi \in \mathcal{S}$ が $F \in \mathcal{S}'$ で写される値を $\langle F, \varphi \rangle$ と書く。関数 f が、任意の急減少関数 φ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx < \infty \quad (6)$$

であるならば、

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (7)$$

^{*1} 汎関数：関数から実数あるいは複素数への写像

により関数を緩増加超関数としてみなす。離散時間信号 $f[t]$ は、その増加の仕方が高々多項式オーダーであれば式 (1) によって緩増加超関数とみなすことができる [2]。

緩増加超関数 F のフーリエ変換 $\mathcal{F}[F]$ は

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \quad (8)$$

と定義される。ただしここで右辺の $\mathcal{F}[\varphi]$ は急減少関数 φ のフーリエ変換である。4つに分類されている信号を緩増加超関数として表し、式 (8) に従ってフーリエ変換を計算すると、その分類に応じてフーリエ級数展開、関数のフーリエ変換、離散フーリエ変換、離散時間フーリエ変換が現れる [3]。つまり4つの信号の分類とそれに付随する4つのフーリエ変換は、1つの緩増加超関数という概念で統一することができるのである。

このようにフーリエ変換は緩増加超関数の概念で統一できたが、積と畳み込みについては未だ問題がある。信号処理において重要な公式として、積と畳み込みに関する次の関係式がある：

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g] \quad (9)$$

この公式で使われている畳み込みは、フーリエ変換同様4つの信号の分類に応じて別々のものが使われる [1]。しかし、そもそも緩増加超関数同士の畳み込みはかなり限定された超関数同士でしか定義されていないことが多く、4種類の畳み込みを包含する定義は提唱されていない。

また、離散時間信号として

$$f[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

を考えると積の問題が現れる。式 (1) に従って $f[n]$ を緩増加超関数とみなすと、 $f[n]$ は δ 関数となる。離散時間信号としては

$$f[n] \cdot f[n] = f[n] \quad (11)$$

となるべきであるが、これを超関数に翻訳すると $\delta \cdot \delta = \delta$ となる。超関数同士の積は畳み込み同様に限定された超関数同士でしか定義されておらず、

$\delta \cdot \delta$ が定義されている文献はほとんどない。文献 [4] では超準解析の観点から δ^2 が定義されているが、 $\delta^2 \neq \delta$ であり、この要請を満たさない。

3 δ 級数超関数と積

離散時間信号における積の要請 (11) は、つまるところ式 (1) において δ の係数の積を計算することである。そこで、関数も式 (1) の形式にすることを考える。緩増加超関数とみなせる関数 $f(t)$ に対して、

$$f_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^N} f\left(\frac{k}{2^N}\right) \delta\left(t - \frac{k}{2^N}\right) \quad (12)$$

という添え字つき超関数を考える。この時、

$$\begin{aligned} \langle f_N, \varphi \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^N} f\left(\frac{k}{2^N}\right) \varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt = \langle f, \varphi \rangle \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。つまり、 $f_N \rightarrow f$ ($N \rightarrow \infty$) であり、関数は δ の級数の極限として書けることになる。これで連続時間信号も離散時間信号も δ の級数という同じ形になったので、 δ の係数の積より新たな δ の級数を作り、それを超関数としての積と定義すればよい。

より具体的に定義を述べる。緩増加超関数 F が δ 級数超関数であるとは、次を満たす $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ および $h: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを言う：

- (I) $h(k; N)$ は強単調増加な関数であり、 N に依存するのであれば $h(k; N) = k/2^N$ 。
- (II) $f(t)$ は局所可積分であり、また集合 $\{h(k; N) | k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}\}$ の閉包を $B(h)$ とするとき、任意の t について

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x \in B(h) \\ 0 \leq x - t < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つ。

- (III) $\sup_k h(k+1; N) - h(k; N)$ は任意の N で有

限で、

$$C(N) = \frac{\sup_k h(k+1; N+1) - h(k; N+1)}{\sup_k h(k+1; N) - h(k; N)} \quad (15)$$

とすると、

$$F_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N f(h(k; N)) \delta(t - h(k; N)) \quad (16)$$

は $N \rightarrow \infty$ の極限で F に収束する。

F が δ 級数超関数であるとき、上の条件を満たす f, h の組により $F = (f, h)_\delta$ と書く。

例えば、離散時間信号 $f[n]$ であれば

$$f(t) = \begin{cases} f[t] & t/T_s \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (17)$$

と $h(k; N) = kT_s$ により、式 (1) の形になる。連続時間信号 $f(t)$ については、 $B(h) = \mathbb{R}$ として条件 (II) を満たすならば $f = (f, k/2^N)_\delta$ である。

2 つの δ 級数超関数 $F = (f, h_f)_\delta, G = (g, h_g)_\delta$ の積は、次のように定義すればよい。まず、 h_{fg} を $B(h_f) \cap B(h_g) = \mathbb{R}$ ならば $h_{fg} = k/2^N$ とし、そうでないならば N に関わらず

$$\{h(k; N) | k \in \mathbb{Z}\} = B(h_f) \cap B(h_g) \quad (18)$$

となるようにする。そして F, G の積を $FG = (fg, h_{fg})_\delta$ と定義するのである。 f, g はそれぞれ $B(h_f), B(h_g)$ 上では一意に定まるので、 fg も $B(h_{fg})$ 上で一意に定まる。

4 exp 級数超関数と畳み込み

積が定義されたので、公式 (9) が成り立つためには、畳み込みが

$$F * G = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G]] \quad (19)$$

となっていなくてはならない。この式には、 $\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G]$ という積が入っているので、ひとまず $\mathcal{F}[F] = (\hat{F}, h_F)_\delta, \mathcal{F}[G] = (\hat{G}, h_G)_\delta$ とする。す

ると,

$$\begin{aligned} F * G &= \mathcal{F}^{-1}[(\hat{F}\hat{G}, h_{FG})_\delta] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N \hat{F}\hat{G}(h_{FG}) \frac{1}{2\pi} e^{ih_{FG}t} \quad (20) \end{aligned}$$

となる (一部文字を省略した). 一方, $\mathcal{F}[F] = (\hat{F}, h_F)_\delta$ となるためには, F は

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N \hat{F}(h_F(k; N)) \frac{1}{2\pi} e^{ih_F(k; N)t} \quad (21)$$

となっていればよい. G も同様である. ここで, これら F, G のように, δ 級数超関数を定義する際に用いた条件 (I), (II), (III) を満たす s, h によって

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N s(h(k; N)) \frac{1}{2\pi} e^{ih(k; N)t} \quad (22)$$

と書き表される緩増加超関数 S のことを exp 級数超関数と呼び, $S = (s, h)_e$ と書くことにする. す

$$F * G = (\hat{F}, h_F)_e * (\hat{F}, h_G)_e = (\hat{F}\hat{G}, h_{FG})_e \quad (23)$$

となる. 積が δ の係数の掛け算であったのに対して, 畳み込みは複素指数関数の係数の掛け算となっている. この畳み込みの定義は F, G が周期的であるかどうかに関わらず, また通常は定義されない概周期関数の畳み込みもこの定義では扱うことが可能になる.

5 連続線型時不変システムのインパルス応答

この畳み込みの定義により, 信号処理におけるもう一つ重要な定理が導かれる. それが連続線型時不変システムのインパルス応答に関するものである. A を緩増加超関数の連続線型時不変システムであるとし, A のインパルス応答, つまり入力 δ である

時の出力 $A\delta$ を考える.

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{1}{2\pi}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{ikt}{2^N}} \varphi(t) dt \\ &= \langle (1, 1/2^N)_e, \varphi \rangle \quad (24) \end{aligned}$$

となるので, $\delta = (1, 1/2^N)_e$ である. よって,

$$A\delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{1}{2\pi} A e^{\frac{ikt}{2^N}} \quad (25)$$

となる. 複素指数関数は線型時不変システムの固有関数なので, $A e^{ikt} = a(k) e^{ikt}$ と置くと,

$$A\delta = (a, 1/2^N)_e \quad (26)$$

となる.

次に, 入力 $f \in \exp$ 級数超関数 $F = (f, h)_e$ である場合を考えると,

$$\begin{aligned} AF &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N f(h(k; N)) A e^{ih(k; N)t} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N f(h(k; N)) a(h(k; N)) e^{ih(k; N)t} \\ &= (fa, h)_e = (f, h)_e * (a, 1/2^N)_e = F * A\delta \quad (27) \end{aligned}$$

となる. 以上より, exp 級数超関数の入力に対しては, 入力とインパルス応答の畳み込みで出力が得られることが示された.

参考文献

- [1] 飯国洋二, “基礎から学ぶ信号処理”, 培風館 (2004).
- [2] M.J. ライトヒル, “フーリエ解析と超関数”, ダイヤモンド社 (1975).
- [3] D. W. Kammler, “A First Course in Fourier Analysis”, Cambridge University Press, 2nd ed. (2008).
- [4] T. Nitta and T. Okada, “Infinitesimal fourier transformation for the space of functionals”, Proceedings of the Conference on Differential & Difference Equations and Applications, pp. 871–883 (2006).

Asymptotic behavior of solutions of renewal equations in epidemiology

Yoichi Enatsu

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan
E-mail: yenatsu@ms.u-tokyo.ac.jp

1 Introduction

Epidemiological models have played a crucial role to qualitatively understand the behavior of disease transmission. One of the pioneering works is carried out by Anderson, May [1], in which an SIRS (Susceptible-Infected-Recovered-Susceptible) model is introduced by a system of ordinary differential equations. By means of the model describing the experiments of disease dynamics on mice population, the authors have succeeded to fit the data of mice infected with diseases caused by a bacterium and virus. Later, identifying the basic reproduction number, global dynamics of the model has also been obtained; a disease-free equilibrium is globally asymptotically stable if the basic reproduction number is less than or equals to 1 and an endemic equilibrium is globally asymptotically stable if the basic reproduction number is greater than 1. Based on their modelling methods, epidemic models are proposed in a more general framework of differential equations such as multi-dimensional and delayed models.

Recently, in terms of Volterra type integral equations, structured population models have widely been formulated to investigate the effect of differently aged individuals for infectious disease process (see, e.g., Diekmann et al. [2]). One of the structured models is formulated by *age of infection*, denoting the time that has elapsed since the infection has started. First, we denote by a the age of infection and define $\mathcal{F}(a)$ for a probability to be infected until his or her infection-age becomes a . The function $\mathcal{F}$ is assumed to be decreasing with $\mathcal{F}(0) = 1$. Let us denote by $b(t)$ the incidence rate (the number of newly infected individuals) at time t . Then the number of infected individuals at time t is given as follows.

$$I(t) := \int_0^\infty b(t-a)\mathcal{F}(a)da.$$

Second, let us denote by $\beta(a)$ the age-specific transmission coefficient of infected individuals. By the three functions $\mathcal{F}$, b and β , we obtain the following renewal equation:

$$b(t) = S(t) \int_0^\infty \beta(a)b(t-a)\mathcal{F}(a)da$$

with the variable $S(t)$ denoting the number of susceptible individuals at time t (see also Figure 1.1). Let us define $\mathcal{F}(a) = e^{-(\mu+\eta+\gamma)a}$. Here $\mu > 0$, $\eta > 0$ and $\gamma > 0$ denote the natural mortality rate, the disease-induced death rate and the recovery rate, respectively.

Adding the variable $R(t)$, the number of recovered individuals at time t , we investigate the asymptotic

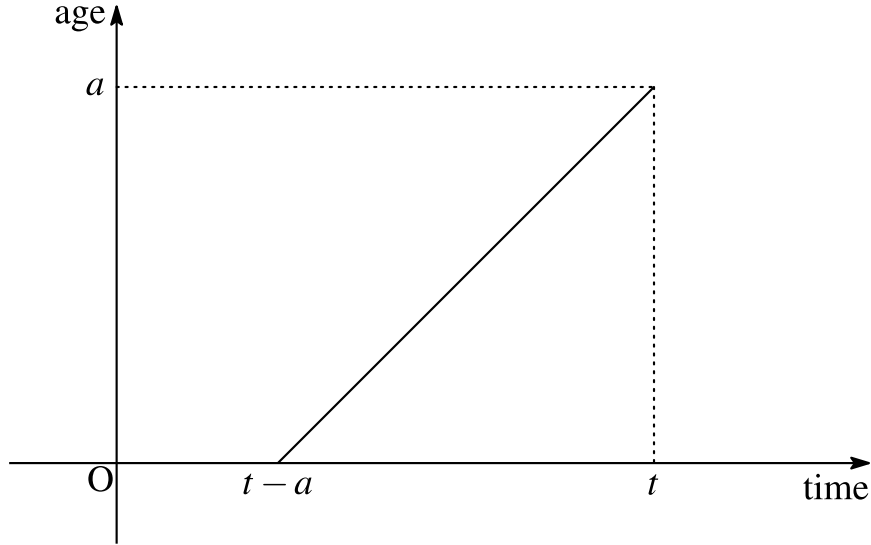


Figure 1.1: Infected individuals with infection age a at time t experience the incidence at time $t - a$.

behavior of the following model:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = B - S(t) \int_0^\infty \beta(a)b(t-a)e^{-(\mu+\eta+\gamma)a}da - \mu S(t) + \delta R(t), \\ b(t) = S(t) \int_0^\infty \beta(a)b(t-a)e^{-(\mu+\eta+\gamma)a}da, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma \int_0^\infty b(t-a)e^{-(\mu+\eta+\gamma)a}da - (\mu + \delta)R(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

with the initial conditions $(S(0), b(\theta), R(0)) = (s, \phi(\theta), r)$ for $\theta \in \mathbb{R}_-$. We assume that $(s, \phi, r) \in \mathbb{R}_+ \times L_\rho^1(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$, the space consists of all equivalence classes of measurable functions $\phi : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\|\phi\|_{L_\rho^1} = \int_0^\infty e^{-\rho a} |\phi(-a)| da < \infty$.

All new born are assumed to be susceptible. $B > 0$ denotes the birth rate of susceptible individuals and $\delta \geq 0$ denotes the rate of immunity loss of recovered individuals. Let us also assume that $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$. For system (1.1), the basic reproduction number R_0 , given as the dominant eigenvalue of a positive linear operator, is computed as

$$R_0 = B \int_0^\infty \beta(a) \mathcal{F}(a) da.$$

Let $F : \mathbb{R}_+ \times L_\rho^1(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ with

$$F(s, \phi, r) = \begin{pmatrix} B - \mu s - s \int_0^\infty \beta(a) \phi(-a) \mathcal{F}(a) da + \delta r \\ s \int_0^\infty \beta(a) \phi(-a) \mathcal{F}(a) da \\ \gamma \int_0^\infty \phi(-a) \mathcal{F}(a) da - (\mu + \delta) r \end{pmatrix}.$$

Then system (1.1) can be written as the following abstract form:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}S(t) \\ b(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) \end{pmatrix} = F(S(t), b(t), R(t)),$$

where $b_t : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ is given by $b_t(\theta) = b(t + \theta)$. One can prove that system (1.1) has a unique solution defined on $(0, \infty)$ by the similar proof in [7, Theorem 3.1] and $S(t), b(t), R(t) \geq 0$ for all $t > 0$. One can see that system (1.1) always has a disease-free equilibrium in X_+ . Furthermore, system (1.1) admits an endemic equilibrium in X_+ if and only if $R_0 > 1$. In this talk, we establish global stability of the endemic equilibrium and introduce a several open problems when the rate of immunity loss δ is positive.

2 Stability of the endemic equilibrium

We first consider the case where $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ satisfies the following assumption:

Assumption 2.1. For $h \in \mathbb{R}_+$, the function β satisfies

$$(H1) \quad \beta(0) = 0. \quad (H2) \quad \beta(a) \equiv \beta > 0 \text{ for } a > h. \quad (H3) \quad \beta \text{ is nondecreasing.}$$

We note that β is a function of bounded variation on $\mathbb{R}_+$ under the hypotheses (H1)-(H3).

Proposition 2.1. Let us assume that $h > 0$. Then it holds that

$$b(t) = S(t) \int_0^h \mathcal{F}(\tau) I(t - \tau) d\beta(\tau). \quad (2.1)$$

Here the integral in (2.1) is a Riemann-Stieltjes integral.

From Proposition 2.1, system (1.1) is expressed as a system of delay differential equations as follows.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = B - S(t) \int_0^\infty \beta(a) b(t - a) e^{-(\mu + \eta + \gamma)a} da - \mu S(t) + \delta R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = S(t) \int_0^h e^{-(\mu + \eta + \gamma)\tau} I(t - \tau) d\beta(\tau) - (\mu + \eta + \gamma) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma \int_0^\infty b(t - a) e^{-(\mu + \eta + \gamma)a} da - (\mu + \delta) R(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

By means of Lyapunov functional approach, it is proven that the endemic equilibrium of (2.2) is globally asymptotically stable when δ is small [3]. On the other hand, by monotone iterative methods, it is proven that the endemic equilibrium of (2.2) is globally asymptotically stable when δ is large [5].

In contrast to the case $\delta = 0$ (see Magal et al. [4]), due to the cyclicity of the model structure, there are still few results on the stability of the equilibria of system (1.1) when $\delta > 0$. Computing the Frechét derivative of F evaluated at the endemic equilibrium, the following result is obtained [6].

Theorem 2.1. Let us assume $R_0 > 1$. Then the endemic equilibrium is locally asymptotically stable.

We further elaborate our stability analysis when η, γ are age-specific and discuss open problems remained.

References

- [1] R.M. Anderson and R.M. May, Population biology of infectious diseases: Part I, *Nature* **280** (1979) 361-367.
- [2] O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. Huang, M. Kirkilionis, J.A.J. Metz and H.R. Thieme, On the formulation and analysis of general deterministic structured population models. II. Nonlinear theory, *J. Math. Biol.* **43** (2001) 157-189.
- [3] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Lyapunov functional techniques for the global stability analysis of a delayed SIRS epidemic model, *Nonlinear Anal. RWA.* **13** (2012) 2120-2133.
- [4] P. Magal, C.C. McCluskey and G.F. Webb, Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model, *Appl. Anal.* **89** (2010) 1109-1140.
- [5] Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata, Monotone iterative techniques to SIRS epidemic models with nonlinear incidence rates and distributed delays, *Nonlinear Anal. RWA.* **12** (2011) 1897-1910.
- [6] Y. Nakata, Y. Enatsu, H. Inaba, T. Kuniya, Y. Muroya and Y. Takeuchi, Stability of epidemic models with waning immunity, submitted.
- [7] Z. Zhang and J. Peng, A SIRS epidemic model with infection-age dependence, *J. Math. Anal. Appl.* **331** (2007) 1396-1414.

演算子の変換に基づく時間微分方程式の効率的な数値解法：

3 項間漸化式法の開発

赤間 知子 (上智大学 理工学部 物質生命理工学科)

1. 緒言

理論化学に基づくシミュレーションは、化学の分野において、実験と並んで重要な役割を担うようになりつつある。分子を構成する電子や原子核のダイナミクスは量子力学に従うため、時間依存 Schrödinger 方程式や量子 Liouville 方程式等を用いて記述できる。分子のような多体系の場合、時間依存 Schrödinger 方程式の自由度は膨大な数になるため、すべて取り扱うことは現実的でない。そこで、近似理論である時間依存 Hartree-Fock (time-dependent Hartree-Fock; TDHF)法や時間依存密度汎関数理論(time-dependent density functional theory; TDDFT)等が用いられている。これらの時間微分方程式を数値積分して解くという実時間発展(RT)法を用いたシミュレーションにより、電子や原子核のダイナミクスを追跡することができる。特に最近では、RT-TDHF/TDDFT 計算を用いた電子ダイナミクスの理論的研究が行われるようになってきた[1-5]。しかし、Runge-Kutta 法等の従来の数値積分法による RT-TDHF/TDDFT 計算では、時間発展演算子の計算に高いコストを要することが多く、これまで適用できる系が限られていた。一方、原子核の波動関数を追跡する核波束ダイナミクスの分野では、より効率的かつ高精度な時間発展法として、実核波束発展法[6,7]が開発されている。この方法は、Chebyshev 多項式の 3 項間漸化式に基づいて時間発展を行う方法であり、核波束を記述する時間依存 Schrödinger 方程式に適用され、計算コストの大幅な削減に成功している。そこで本研究では、実核波束発展法を参考に、3 項間漸化式(three-term recurrence relation; 3TRR)法を開発し、これを RT-TDHF/TDDFT 計算に適用して電子ダイナミクス計算の効率化を目指した[8,9]。

2. 3 項間漸化式法

時間依存 Schrödinger 方程式や量子 Liouville 方程式は、時間 t についての 1 階の微分方程式であり、次式のような形で表される。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \hat{A} \Psi(t) \quad (1)$$

ここで、 $\hbar$ はプランク定数である。時間発展する関数 $\Psi(t)$ と演算子 $\hat{A}$ は、時間依存 Schrödinger 方程式の場合は波動関数とハミルトニアン演算子、量子 Liouville 方程式の場合は密度行列と Liouville 演算子に相当する。演算子 $\hat{A}$ が時間非依存ならば(1)式の形式解は

$$\Psi(t) = \exp(-i\hat{A}t / \hbar) \Psi(0) \quad (2)$$

と表される。 $\Psi(0)$ は $\Psi(t)$ の初期値である。時刻 $t \pm \Delta t$ の関数は、

$$\begin{aligned} \Psi(t \pm \Delta t) &= \exp(-i\hat{A}(t \pm \Delta t) / \hbar) \Psi(0) \\ &= \exp(\mp i\hat{A}\Delta t / \hbar) \Psi(t) \\ &= \left\{ \cos(\hat{A}\Delta t / \hbar) \mp i \sin(\hat{A}\Delta t / \hbar) \right\} \Psi(t) \end{aligned} \quad (3)$$

と表される。ここで、最後の等号では Euler の公式を用いた。(3)式から

$$\begin{aligned}\Psi(t+\Delta t) &= 2\cos(\hat{A}\Delta t/\hbar)\Psi(t) - \Psi(t-\Delta t) \\ &= -2i\sin(\hat{A}\Delta t/\hbar)\Psi(t) + \Psi(t-\Delta t)\end{aligned}\quad (4)$$

が得られる。この式は、 $\Psi(t+\Delta t)$ と $\Psi(t)$ 、 $\Psi(t-\Delta t)$ の間の 3 項間漸化式になっており、 $\Psi(t)$ の時間発展を記述できるが、演算子は三角関数を含む複雑な形となる。

この 3 項間漸化式中の演算子を簡単な形にするため、演算子の変換を導入する。変換された新しい演算子 $f(\hat{A})$ に対する時間微分方程式と、そこから導かれる 3 項間漸化式を

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\Phi(t') = f(\hat{A})\Phi(t') \quad (5)$$

$$\Phi(t'+\Delta t') = -2i\sin(f(\hat{A})\Delta t'/\hbar)\Phi(t') + \Phi(t'-\Delta t') \quad (6a)$$

$$= -2i\sin(f(\hat{A})\Delta t'/\hbar)\Phi(t') + \Phi(t'-\Delta t') \quad (6b)$$

と表す。ここで、 t' と $\Phi(t')$ は演算子の変換に伴って変換された時間と関数である。この 3 項間漸化式中の演算子が簡単になるように、(6a) 式に対しては(7a)、(6b)式に対しては(7b)式のような変換を考える。

$$f(\hat{A}) = -\frac{\hbar}{\Delta t'}\cos^{-1}(a_s\hat{A}+b_s) \quad (7a)$$

$$f(\hat{A}) = \frac{\hbar}{\Delta t'}\sin^{-1}(a_s\hat{A}+b_s) \quad (7b)$$

ここで、 a_s と b_s はスケーリング係数であり、 $-1 \leq \langle a_s\hat{A}+b_s \rangle \leq 1$ を満たすように決める。エネルギーの次元を持つ演算子 $\hat{A}$ の固有値 A_n ($n=1,2,\dots$) も、同様の式で変換される。また、 $\Psi(t)$ と $\Phi(t')$ の時間以外の変数(例えば空間 $\mathbf{r}$)に依存する部分は、演算子の変換による影響を受けない。先行研究の実核波束発展法[6,7]では、(7a)式の変換を用いるが、本研究では(7b)式の変換を採用する。(6b)式に(7b)式を代入すると、最終的に

$$\Phi(t'+\Delta t') = -2i(a_s\hat{A}+b_s)\Phi(t') + \Phi(t'-\Delta t') \quad (8)$$

というシンプルな 3 項間漸化式が得られる。3 項間漸化式法では、(8)式を用いて $\Phi(t')$ と $\Phi(t'-\Delta t')$ から $\Phi(t'+\Delta t')$ を計算する、つまり変換された時間 t' 軸上での時間発展を記述する。得られた時間発展のデータに対して Fourier 変換等の周波数解析を行うことにより、変換された固有値 $f(A_n)$ ($n=1,2,\dots$) が得られる。変換されたエネルギーと時間についてそれぞれ逆変換を行うことで、元のエネルギーと時間についての情報が得られる。

3. 3 項間漸化式法の RT-TDHF 計算への適用

3.1 理論

電子ダイナミクスを記述する RT-TDHF 計算では、電子状態についての TDHF 方程式を実時間発展させて解く。TDHF 方程式は、時間依存 Schrödinger 方程式に対して平均場近似等を用いることにより得られ、次式で表される。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(\mathbf{r}, t) = \hat{F}(t) \psi_i(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

ここで、 $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ は分子軌道(1 電子の波動関数)、 $\hat{F}(t)$ は Fock 演算子であり $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ に依存している。分子軌道 $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ は既知の基底関数 $\{\phi_\mu(\mathbf{r})\}$ を用いて

$$\psi_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} C_{\mu i}(t) \phi_{\mu}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

と展開される。ここで、 $\mathbf{C}(t)$ は係数行列である。全電子密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i^{\text{occ}} |\psi_i(\mathbf{r}, t)|^2 = \sum_{\mu\nu} D_{\mu\nu}(t) \phi_{\mu}(\mathbf{r}) \phi_{\nu}^*(\mathbf{r}), \quad D_{\mu\nu}(t) = \sum_i^{\text{occ}} C_{\mu i}(t) C_{\nu i}^*(t) \quad (11)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{D}(t)$ は 1 電子密度行列である。(9)式の TDHF 方程式を量子 Liouville 方程式に相当する形に書き換えると、下記の密度行列の運動方程式が得られる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t) = [\mathbf{F}(t), \mathbf{D}(t)] = \hat{L} \mathbf{D}(t) \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{F}(t)$ は Fock 行列であり、 $[\mathbf{F}(t), \mathbf{D}(t)] = \hat{L} \mathbf{D}(t)$ となる様に演算子 $\hat{L}$ を定義した。(12)式の密度行列 $\mathbf{D}(t)$ の時間発展は電子ダイナミクスを反映している。演算子 $\hat{L}$ の時間依存性が無視できると仮定すると、3 項間漸化式法を適用することができる。演算子の変換は(13)式で定義され、時間発展を記述する 3 項間漸化式は(14)式となる。

$$f(\hat{L}) = \frac{\hbar}{\Delta t'} \sin^{-1}(a_s \hat{L} + b_s) \quad (13)$$

$$\mathbf{D}(t' + \Delta t') = -2i(a_s \hat{L} + b_s) \mathbf{D}(t') + \mathbf{D}(t' - \Delta t') \quad (14)$$

変換された時間軸上での密度行列 $\mathbf{D}(t')$ と双極子積分 $\langle \phi_i | \hat{\mathbf{r}} | \phi_j \rangle$ から分極ベクトル

$$\mathbf{P}(t') = - \sum_{ij} \langle \phi_i | \hat{\mathbf{r}} | \phi_j \rangle D_{ji}(t') \quad (15)$$

を計算し、これを周波数解析することにより変換されたエネルギー固有値が得られる。さらに逆変換することにより元のエネルギー固有値が得られる。電子ダイナミクスは電子の励起状態を含むため、得られたエネルギー固有値は励起エネルギーに対応する。

3.2 数値検証

(15)式の 3 項間漸化式に基づいて時間発展を行う RT-TDHF/TDDFT 計算プログラムを、量子化学計算パッケージ GAMESS[10]をベースに実装した。実装したプログラムを用いてホルムアルデヒド分子 CH_2O の RT-TDHF 計算を行い、3 項間漸化式法(以降 3TRR と表記)を検証した。すべての計算で MCP-dzp 基底関数系を用いた。時間発展の計算は、従来の研究でよく用いられてきた 4 次の Runge-Kutta 法(以降 RK4 と表記)または本研究で開発した 3TRR を用いて行い、 $t = 0-80$ フェムト秒(fs)について、時間刻み $\Delta t = 0.05$ a.u. (約 1.2 アト秒)で行った。3TRR で計算する際の初期値は RK4 を用いて近似的に評価し、スケーリング係数は $a_s = 0.05$, $b_s = 0$ とした。図 1 に分極ベクトル $\mathbf{P}(t)$ の x 成分の時間発展を示す。また、図 2 に分極ベクトルの Fourier 変換の虚部 $\text{Im}[\mathbf{P}(\omega)]$ として得られた吸収スペクトルを示す。吸収スペクトル中のピークが励起エネルギーに対応する。3TRR と RK4 による結果はほぼ完全に一致した。つまり、3TRR によって正しく時間発展を計算できていることがわかった。次に、

いくつかの小分子の計算時間を表 1 に示す。RK4 の場合に比べて、3TRR では 1 ステップ当たりの計算時間が約 4 分の 1 に削減された。このように、3 項間漸化式法を用いることにより、電子ダイナミクスを記述する RT-TDHF 計算を大幅に高速化することに成功した。

4. 結論

我々は、演算子変換により効率的な時間発展を可能にする 3 項間漸化式法を開発した。電子ダイナミクスを記述する RT-TDHF 計算に 3 項間漸化式法を適用して数値検証を行い、RT-TDHF 計算を大幅に高速化できることを示した。3 項間漸化式法は、(1)式の形を持つ他の微分方程式についても適用できるため、幅広い応用が期待される。

謝辞

本研究は、上智大学理工学部の南部教授との共同研究として行ったものです。また、本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費(24・5074)の助成を受けて実施されました。

参考文献

- [1] K. Yabana and G. F. Bertsch, *Phys. Rev. B* **54**, 4484 (1996).
- [2] K. Yabana, T. Nakatsukasa, J.-I. Iwata, and G. F. Bertsch, *Phys. Status Solidi B* **243**, 1121 (2006).
- [3] C. Y. Yam, S. Yokojima, and G. H. Chen, *J. Chem. Phys.* **119**, 8794 (2003).
- [4] F. Wang, C. Y. Yam, G. H. Chen, and K. Fan, *J. Phys. Chem.* **126**, 134104 (2007).
- [5] T. Akama and H. Nakai, *J. Chem. Phys.* **132**, 054144 (2010).
- [6] S. K. Gray and G. G. Balint-Kurti, *J. Chem. Phys.* **108**, 950 (1998).
- [7] G. G. Balint-Kurti, *Theor. Chem. Acc.* **127**, 1 (2010).
- [8] T. Akama, K. Sato, and S. Nanbu, *J. Comput. Chem. Jpn.* **13**, 184 (2014).
- [9] T. Akama, O. Kobayashi, and S. Nanbu, *J. Chem. Phys.*, *submitted*.
- [10] M. W. Schmidt, K. K. Baldridge, J. A. Boatz, S. T. Elbert, M. S. Gordon, J. H. Jensen, S. Koseki, N. Matsunaga, K. A. Nguyen, S. J. Su, T. L. Windus, M. Dupuis, and J. A. Montgomery, *J. Comput. Chem.* **14**, 1347 (1993).

e-mail: a.tomo__s-b_l-r@suou.waseda.jp

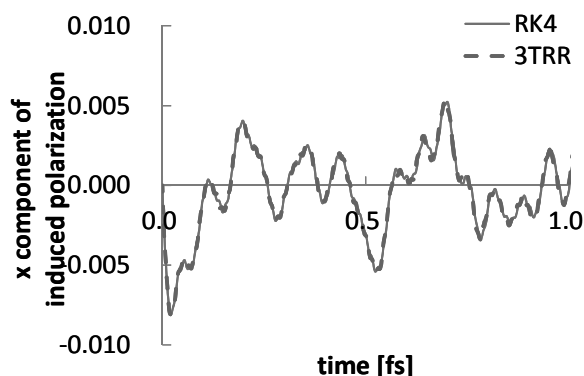


Figure 1. Time-evolution of induced polarization vector of formaldehyde obtained by RT-TDHF calculations with the 3TRR and RK4 methods (from ref. [8]).

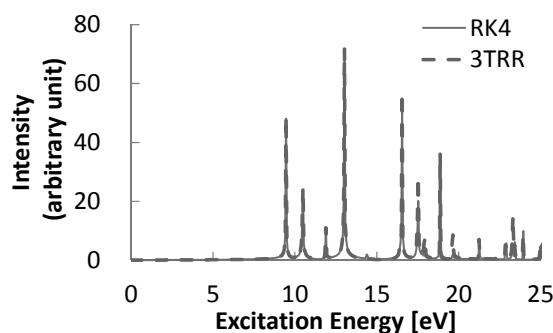


Figure 2. Absorption spectra of formaldehyde obtained by RT-TDHF calculations with the 3TRR and RK4 methods (from ref. [8]).

Table 1. CPU time of RT-TDHF calculations with the 3TRR and RK4 methods (from ref. [8]).

System	CPU time [sec]		Ratio
	RK4	3TRR	
H ₂	12.6	4.2	0.33
H ₂ O	63.2	16.9	0.270
CH ₂ O	335.0	85.6	0.2555
C ₆ H ₆	24041.7	6087.2	0.2532

(Xeon E5-2680 (2.70GHz), 1 core)

ベキ乗則を導く確率モデルと映画の統計データへの適用

山本 健 (中央大学理工学部)

1 はじめに

自然科学や社会科学において、様々な量がベキ分布にしたがうことが知られている [1]. ベキ分布とは、確率密度関数 (の裾) がベキ乗関数で表わされるような統計分布である. ベキ分布は裾での減衰が指数関数よりも緩慢であることから、正規分布や指数分布に比べてサイズの大きな事象が生じやすいという特徴がある. フラクタル [2] や臨界現象 [3] がベキ分布の研究の端緒である. フラクタル図形を直径 ε の円板で被覆するのに必要な最小個数 $N(\varepsilon)$ は、 ε が小さいところでベキ乗の依存性 $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}$ をもつ. ここに現れるベキ指数 D はフラクタル図形のフラクタル次元とよばれる. また、パーコレーション問題において占有率 p を大きくしていき臨界確率 p_c に近づけると、クラスターの平均サイズ S は $S \propto (p_c - p)^{-\gamma}$ というふるまいを示す (2次元のパーコレーションでは $\gamma = 43/18$ である). ベキ指数 γ は臨界指数とよばれるものの1つである. これらの例では、ベキ指数の値が図形や現象の特徴を定める. より複雑な現象も、ベキ分布を用いて分析が試みられている. たとえば、複雑ネットワークや経済物理学などの研究においてベキ分布は重要な役割をもつ.

ベキ分布の典型例が、1つの店舗で販売される各々の商品の売上の分布である. 売上額が s よりも大きな商品の割合が $P_{>}(s) \propto s^{-\beta}$ で表される. このようにサイズが s よりも大きな要素の割合を s の関数とみなした $P_{>}(s)$ を、本稿では**累積分布**とよぶ. 累積分布 $P_{>}(s)$ は確率密度関数を s より大きい範囲で積分したものである. ベキ指数 β は正であり、たとえばアマゾン (Amazon.com) の売上データでは $\beta = 1.1$ から 1.2 程度である [4]. 売上のベキ分布は、よく売れる少数の人気商品とほとんど売れない大多数のマイナーな商品の売上の間に大きな格差があることを意味する. (一方で、大多数のマイナーな商品の売上を足し上げると、店舗の総売上のうち無視できない割合を占めるという “ロングテール現象” [5] もベキ分布の帰結である.)

ベキ分布の中でも、累積分布のベキ指数が $\beta = 1$ である場合を特に**ジップの法則**とよぶ. 本来、ジップの法則とは、多数の要素 (データ) の集合において要素のサイズが順位に反比例するという経験則であり [6], $\beta = 1$ はこれと等価な表現である. 元々は文章中の単語の出現回数に関する統計的な関係として見出されたが、言語の統計以外にも地震のエネルギー ($\beta = 0.95$) [7] や科学論文の被引用数 ($\beta = 1.09$) [8] などがほぼジップの法則にしたがう. 上述したアマゾンの売上データもほぼジップの法則にしたがうといえる.

本研究では商品が売れていく様子を単純化した確率過程を提案し、定常なベキ分布が導かれることを紹介する. アメリカの映画の興行収入のデータを例にとり、提案したモデルが実際の分布をよく説明することを示す.

2 モデル

本研究では、ある1種類の商品の売上の時間変化に対するモデルとして、次の確率過程を考える：

$$x_{t+1} = \mu_t x_t, \quad (1a)$$

$$S_{t+1} = S_t + x_t. \quad (1b)$$

$t = 1, 2, \dots$ は離散的な時刻を表す. 初期条件は $x_1 = 1$, $S_1 = 0$ とする. 確率変数 x_t は t 期の売上を表す. 式 (1a) は、ある期間の売上が大きいほど次の期間でも売上が大きくなりやすいという正のフィードバックの効果を単純化したものである. さらに議論の単純化のため成長率 μ_t は各時刻 t で独立かつ

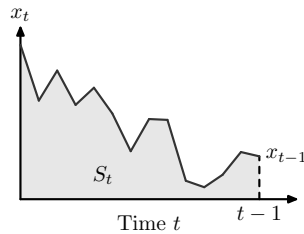


図 1 モデル (1) の模式図. x_t は式 (1a) にしたがって時間変化する. S_t は x_t のグラフと t 軸の間の面積に相当する.

同一の分布にしたがうものとする. 一方, 確率変数 S_t は各期間の売上 x_t を時刻 $t-1$ まで累計した量 ($S_t = x_1 + \dots + x_{t-1}$) である. 十分に大きな時刻 t において, S_t は商品の総売上を表す. モデル (1) を模式的に表したのが図 1 である. 各期間の売上 x_t の動きを t の関数としてグラフ化すると, 総売上 S_t は x_t のグラフより下側の面積に相当する.

式 (1) の解析 [9] によると, t が大きいとき S_t は定常な分布をもち, サイズが大きいく所でのべき的な裾 $P(S_t > s) \propto s^{-\beta}$ をもつ. 指数 $\beta (> 0)$ は条件

$$E(\mu_t^\beta) = 1 \quad (2)$$

により特徴づけられる. $E(\cdot)$ は期待値を表す. 特に, 成長率の期待値が 1 ($E(\mu_t) = 1$) である場合には $\beta = 1$ となり, ジップの法則が導かれる.

3 映画の興行収入との比較

シンプルな形の式 (1) が商品の売上を記述するモデルとして現実的なのかを, 実際のデータとの比較によって検討する. モデルは実際の売上プロセスを非常に単純化しているので, 売上データの詳細まで再現することは望めない. 一方, 売上がべき分布になることやべき指数の値は現象の詳細にはほとんど依存しないと考えられる (統計物理学の普遍性クラスという概念と関係する). 式 (2) から評価した指数 β が実際の値と近くなることが確認できれば, モデル (1) は実際の現象の重要なポイントを押さえていると期待される.

実際の売上データとして, アメリカの映画の興行収入を取り上げる. 式 (2) を用いて指数を評価するには成長率 μ_t に関する情報, つまり期間ごとの売上 x_t の情報が必要であるのだが, 映画の興行収入については必要なデータがオンラインで無料公開されている. 今回利用したデータベースは *The Numbers* および *Box Office Mojo* である [10].

直感的には, モデルの S_t は 1 つの映画作品の総収入額に対応すると考えられるのだが, この見方には少し問題がある. 一般に, 異なる映画の興行収入は統計的に同等とはいえない. とりわけ, 映画の経済的な規模が興行収入に関係し, 費用のかかった映画ほど大きな興行収入を得やすい [11]. 一方, モデル (1) は 1 つの商品の売上が成長率 μ_t のゆらぎによって確率的な値をとることを表す. したがって, 複数の映画の興行収入額からつくった分布はモデルにおける S_t の定常分布に対応しない. そこで, 興行収入を制作費で割って正規化した投資利益率 (return on investment, ROI) とよばれる量に注目する. ROI は映画の成功・失敗を測る指標である. ROI が 1 より大きければその映画は黒字 (制作費を上回る収入が得

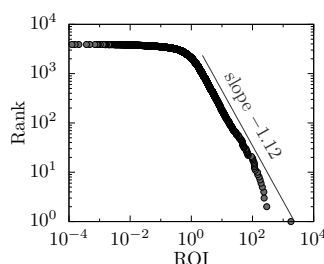


図 2 データベース *The Numbers* による ROI の累積分布. 分布の裾はべき指数 $\beta = 1.12$ のべき分布にしたがう.

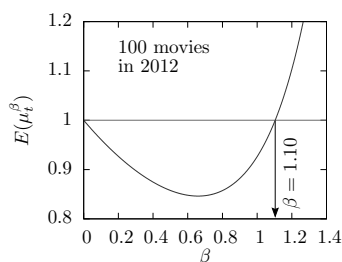


図 3 式 (2) を用いた指数 β の評価. $E(\mu_t^\beta)$ を β の関数として表示したグラフ. $E(\mu_t^\beta) = 1$ の解として $\beta = 1.10$ が得られる.

られた)であり, 1 より小さければ赤字である. ROI では映画ごとの規模の違いの影響が小さくなっていると考えられる.

映画の ROI の分布とモデルの S_t の定常分布を比較する. 図 2 はデータベース *The Numbers* のデータ (1915 年から 2014 年 4 月までの 3906 タイトル) による ROI の累積分布である. ROI が 1 より大きい裾の部分でベキ分布的な減衰がみられ, そのベキ指数は $\beta = 1.12 \pm 0.03$ と求められる. つまり, 黒字だった映画の ROI はおおむねジップの法則にしたがう. ちなみに, 興行収入額自体の分布では, ジップの法則はおろか明瞭なベキ分布すらみえない. (興行収入よりも ROI の方が統計的に単純な指標であるといえるかもしれない.)

次に, 映画の興行収入の推移がモデル (1) にしたがうと仮定し, 式 (2) を用いて指数 β を見積もってみる. 日ごとの興行収入のデータでは曜日の周期性 (週末に客数が伸びる) が強く現れるので, 週ごとのデータを用いた. 成長率 μ_t は, 映画が公開されて t 週目と $t+1$ 週目の興行収入の比 ($\mu_t = x_{t+1}/x_t$) として求める. データベース *Box Office Mojo* において, 2012 年に公開された映画の中でアメリカ国内の興行収入額の上位 100 作品について各週の μ_t を算出した. こうして得られた成長率を μ_t の標本値とし, β の関数として $E(\mu_t^\beta)$ を表したのが図 3 である. $E(\mu_t^\beta) = 1$ となるのは $\beta = 1.10$ であり, S_t の定常分布の裾は $P(S_t > s) \propto \beta^{-1.10}$ という形であると見積もられる. この結果は図 2 の指数 $\beta = 1.12$ ととても近い. よって, モデル (1) は映画が興行収入をあげる過程の特徴をよくとらえていると結論できる. 同様の計算により, 2012 年の興行収入額上位 200 作品のデータからは $\beta = 1.09$, 2010 年の上位 100 作品のデータからは $\beta = 1.08$ が得られた. したがって, 指数 β の見積もりは順位や年度にはほとんど依存しないと考えられる.

4 まとめと展望

本研究では, 商品の売上を模擬する確率モデル (1) を提案した. 確率変数 S_t は定常な分布をもち, その裾は式 (2) で特徴づけられる β を指数とするベキ分布にしたがう. 次に, この理論的な結果を映画の ROI のデータと比較した. 実際の ROI の累積分布は裾が $\beta = 1.12$ 程度のベキ分布であったのに対して, モデル (1) を仮定して評価したベキ指数は $\beta = 1.10$ であった. 式 (2) から見積もった指数が実際の値に近かったことから, 提案したモデル (1) が映画の集客の特徴をうまくとらえていると期待できる.

式 (1) は商品の売上のベキ分布を導く確率過程として, 簡素な形をしている. 本モデル化では, 口コミ・広告宣伝・消費者の嗜好・流行などの効果は個別には考慮されていない. これらはすべて確率変数 μ_t の中に押し込められている. このように単純化したモデルであっても, ベキ指数のような普遍性をもつ特徴はよく再現されている.

なお, 制作費のデータは興行収入額に比べて不正確な推定値である (正確な制作費は公開されていない). したがって ROI にも不正確さが含まれることに注意する. 映画以外の売上データでも本稿と同様の分析をおこない, モデル (1) の妥当性を検証することが必要である.

謝辞 本研究は科研費 (若手研究 (B), 課題番号 25870743) の補助を受けたものである.

参考文献

- [1] M. Buchanan, Ubiquity: Why Catastrophes Happen, Three Rivers Press, 2001; マーク・ブキャナン (水谷淳訳), 歴史は「べき乗則」で動く, 早川書房, 2009.
- [2] 松下貢, フラクタルの物理 (I), (II), 裳華房, 2002, 2004.
- [3] H. E. Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Oxford University Press, 1987; ユージン・スタンリー (松野孝一郎訳), 相転移と臨界現象, 東京図書, 1987.
- [4] T. Fenner, M. Levene, and G. Loizou, Physica A 389, 2416 (2010).
- [5] C. Anderson, The Long Tail, Hyperion, 2008; クリス・アンダーソン (篠森ゆりこ訳), ロングテール, 早川書房, 2009.
- [6] G. K. Zipf, Human Behavior and the Principle of Least Effort, Addison-Wesley, 1949.
- [7] P. Bak, K. Christensen, L. Danon, and T. Scalap, Phys. Rev. Lett. 88, 178501 (2002).
- [8] A. M. Petersen, H. E. Stanley, and S. Succi, Sci. Rep. 1, 181 (2011).
- [9] K. Yamamoto, Phys. Rev. E 89, 042115 (2014).
- [10] Box Office Mojo. <http://www.boxofficemojo.com/>
The Numbers. <http://www.the-numbers.com/>
- [11] R. J. Pan and S. Sinha, New J. Phys. 12, 115004 (2010).

イデアルの素分解におけるモジュラーアルゴリズムの応用

青山 暢

神戸大学理学研究科数学専攻

1 モジュラーアルゴリズム

代数計算の係数爆発を避けるために、係数を有限体に制限して計算した後に Hensel 構成や中国剰余定理を利用して正しい計算結果を復元するモジュラーアルゴリズムが用いられる.

定理 1. (Hensel 構成)

$f \in \mathbb{Z}[X]$, $p: f$ の先頭係数を割らない素数に対して

$$f \equiv g_1 h_1 \pmod{p}$$

と, 互いに素な $g, h \in \mathbb{Z}_p$ が存在するとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$f \equiv g_k h_k \pmod{p^k}$$

$$g_k \equiv g_1, h_k \equiv h_1 \pmod{p}$$

を満たす $g_k, h_k \in \mathbb{Z}_{p^k}[X]$ が存在する.

定理 2. (中国剰余定理)

$p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ が互いに素であり, それぞれに対し $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ が与えられているとき

$$n \equiv n_1 \pmod{p_1}, n \equiv n_2 \pmod{p_2}$$

を満たす n が $\text{mod } p_1 p_2$ において唯一存在する.

2 Laplagne アルゴリズム

Laplagne アルゴリズムは, 冗長成分を生じないイデアルの根基の素分解アルゴリズムである. このアルゴリズムは 0 次元イデアルの根基計算, 準素分解が比較的容易であることや, radical membership は根基を計算しなくても判定できることを利用している.

補題 3. $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$ と準素分解が与えられているとき, イデアル J に対して準素成分から適当に選択することで $I: J^\infty = \bigcap_{J \not\subseteq \sqrt{Q_i}} Q_i$ と準素分解することができる. 特に $I: g^\infty = \bigcap_{g \notin \sqrt{Q_i}} Q_i$ である.

命題 4. $MA \subset \min\text{Ass}(I)$, $\text{Int} = \bigcap_{P \in MA} P$ とおく. $g \in \text{Int} \setminus \sqrt{I}$ が存在するときに, $I: g^\infty =$

$\bigcap_{i=1}^m Q_i$ と, 極小準素分解が与えられていて, u を $I: g^\infty$ の極大独立集合とすれば, $Q_i \cap \mathbb{K}[u] = \{0\}$ を満たす準素成分について $\sqrt{Q_i} \in \min\text{Ass}(I)$ かつ $\sqrt{Q_i} \notin MA$ である.

命題 5. u を $I : g^\infty$ の極大独立集合として, 極小準素分解 $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$ が

$$Q_i \cap \mathbb{K}[u] = \{0\} \quad (1 \leq i \leq l), \quad Q_i \cap \mathbb{K}[u] \neq \{0\} \quad (l+1 \leq i \leq m)$$

であるとする. このとき

$$I\mathbb{K}(u)[x \setminus u] \cap \mathbb{K}[x] = \bigcap_{i=1}^l Q_i$$

と, 極小準素分解できる.

以上の命題により次の Laplagne アルゴリズムが得られる.

アルゴリズム 6. (Laplagne アルゴリズム)

Input: I

Output: I の 極小付属素イデアル全体 MA

$Int \leftarrow \langle 1 \rangle$

$MA \leftarrow \{\}$

while $Int \setminus \sqrt{I} \neq \{\}$ **do**

 choose $g \in Int \setminus \sqrt{I}$

$J \leftarrow I : g^\infty$

$u \leftarrow J$ の極大独立集合

$J \leftarrow \sqrt{J\mathbb{K}(u)[x \setminus u]}$

$PJ = \{P_1, \dots, P_n\} \leftarrow J$ の最小素分解

$PJ \leftarrow \{P_1 \cap \mathbb{K}[x], \dots, P_n \cap \mathbb{K}[x]\}$

$MA \leftarrow MA \cup PJ$

$Int \leftarrow Int \cap \bigcap_{P \in PJ} P$

end while

return MA

定理 7. アルゴリズム 6 は冗長成分を生じずに正しく動作する.

3 Padé 近似

モジュラーアルゴリズムによって求められた多項式 h を $\frac{a}{b} \equiv h \pmod{I}$ を満たす (a, b) で表すために Padé 近似という手法が用いられる.

定義 8. $a, b \in \mathbb{Q}[X], I : \mathbb{Q}[X]$ 上のイデアルが, 単項式 φ, ψ に対して *weak term order condition* (*wtoc*) を満たすとは, $LT(a) \leq \varphi, LT(b) \leq \psi$ かつ, 任意の $\rho \leq \varphi, \sigma \leq \psi$ であり $\rho, \sigma \notin LT(I)$ なる単項式 ρ, σ に対して $\rho\sigma \notin LT(I)$ が成り立つときを言い, (a, b, I) が *wtoc*(ρ, σ) を満足する, という.

定理 9. (a, b) が $\frac{a}{b} \equiv h \pmod{I}$ を満たす, 既約で互いに素な解であり (a, b, I) が *wtoc*(ρ, σ) を満足するとする. このとき順序に対するシフト $\omega = (\sigma, \rho)$ を与えると, (a, b) は $<_\omega$ について極小な解となる.

この定理を元に, $(h, 1)$ という自明な解から出発し, 得たい (a, b) についての条件を (ρ, σ) で与えることによって (a, b) を探していく.

参考文献

- [1] 佐々木建昭, 今井浩, 浅野孝夫, 杉原厚吉, 計算代数と計算幾何, 岩波書店, (1993).
- [2] S. Laplagne, *An algorithm for the computation of the radical of an ideal* , in Proc. ISSAC '06, (2006).
- [3] P. Fitzpatrick, J. Flynn, *A Gröbner Basis Technique for Padé Approximation*, J. Symb. Comp. **13**, 133-138, (1992).

切断イデアルに対応する半群環のstrongly Koszul性 について

柴田 和樹 (立教大学大学院理学研究科)*

1. Introduction

$G = ([n], E(G))$ を有限単純連結グラフとする. ここで, $[n] = \{1, \dots, n\}$ を頂点集合, $E(G)$ を辺集合とする. このとき, $[n]$ の2つの部分集合 $A, B (A \cup B = [n], A \cap B = \emptyset)$ に対し, $(0, 1)$ -ベクトル $\delta_{A|B}(G) \in \mathbb{Z}^{|E(G)|}$ を以下のように定義する:

$$\delta_{A|B}(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } |A \cap \{i, j\}| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (ij \in E(G)).$$

また,

$$X_G = \left\{ \begin{pmatrix} \delta_{A_1|B_1}(G) \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \delta_{A_N|B_N}(G) \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^{|E(G)|+1} \quad (N = 2^{n-1})$$

と置く. 次に, K を体とし, 多項式環 $K[q], K[s, T]$ を

$$\begin{aligned} K[q] &= K[q_{A_1|B_1}, \dots, q_{A_N|B_N}] \\ K[s, T] &= K[s, t_{ij} \mid ij \in E(G)] \end{aligned}$$

と定義する. このとき, 環準同型写像 π_G を

$$\pi_G : K[q] \rightarrow K[s, T] \quad q_{A_I|B_I} \mapsto s \cdot \prod_{\substack{|A_I \cap \{i,j\}|=1 \\ ij \in E(G)}} t_{ij}$$

と定める. このとき, $I_G = \ker \pi_G$ を G の切断イデアルといい, $R_G = K[q]/I_G$ を X_G のトーリック環という (see [5]). この R_G, I_G の環論的性質とグラフの組み合わせ論的構造を関連付ける結果が存在する.

Theorem 1.1 ([5]). 任意の逆辞書式順序に関し, I_G のイニシャルイデアルが squarefree であることと, G が K_5 -minor をもたず, G のすべての誘導サイクルの長さは4以下であることは同値.

Theorem 1.2 ([1]). 切断イデアル I_G が2次生成であることの必要十分条件は, G が K_4 -minor をもたないことである.

更に, ring graph に付随する切断イデアルは2次グレブナー基底をもつことも知られている (see [3]). しかし, 一般にいつ I_G が2次グレブナー基底をもつのかどうか自明な場合, ring graph 以外では知られていない.

* 〒171-8501 東京都豊島区西池袋3-34-1
e-mail: 12rc003c@rikkyo.ac.jp

2. Strongly Koszul algebras and clique sums

Strongly Koszul 代数は Herzog-Hibi-Restuccia によって定義された概念である (see [2]). 今回は同値な条件を strongly Koszul 代数の定義とする.

トーリック環 $R = K[u_1, \dots, u_n]$ が **strongly Koszul** であるとは, 以下の条件を満たすときにいう:

- 任意の $1 \leq i \neq j \leq n$ に対し, イデアル $(u_i) \cap (u_j)$ が 2 次生成.

一般的にトーリック環 R とその定義イデアル I に対し,

$$\begin{array}{c} I \text{ が 2 次グレブナー基底を持つ, or } R \text{ が strongly Koszul} \\ \Downarrow \\ R \text{ は Koszul} \\ \Downarrow \\ I \text{ は 2 次生成.} \end{array}$$

が成り立つことが知られている. 更に, 以下の予想が存在する.

Conjecture 2.1. トーリック環 R が strongly Koszul ならば, 定義イデアル I は 2 次グレブナー基底を持つ.

Proposition 2.2 ([2, Proposition 2.3]). P, R をトーリック環とし, Q を P, R のテンソル or Segre 積とする. このとき, Q が strongly Koszul であることと, P, R が strongly Koszul であることは同値である.

Proposition 2.3. 有限単純連結グラフ G に対し, R_G は strongly Koszul であるとする. このとき,

- (1) H_1 が G の contraction ならば, R_{H_1} は strongly Koszul;
- (2) H_2 が G の誘導部分グラフならば, R_{H_2} は strongly Koszul.

$G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ を $V_1 \cap V_2$ が 2 つのグラフの clique であるような有限連結グラフとする. このとき, $G_1 \# G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ を G_1, G_2 の **clique sum** という. また, $|V_1 \cap V_2| = k + 1 (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき, $G_1 \# G_2$ を **k-sum** とも呼ぶ.

Proposition 2.4. 切断イデアル I_{G_1}, I_{G_2} が 2 次生成 (resp. 2 次グレブナー基底をもつ) ならば, $I_{G_1 \# G_2}$ も 2 次生成 (resp. 2 次グレブナー基底をもつ).

Proposition 2.5. $R_{G_1 \# G_2}$ が strongly Koszul ならば, R_{G_1}, R_{G_2} も strongly Koszul である.

0-sum のときは, 上の命題の逆も成り立つ. しかし, 1-sum の場合は, 逆が成り立たないような例が存在する.

K_n を n 点完全グラフ, C_n を n サイクル, $K_{l_1, \dots, l_m}$ を完全 m -部グラフとする.

Example 2.6. $G_1 = C_3 \# C_3 (= K_4 \setminus e)$, $G_2 = C_4 \# C_3$, $G_3 = (K_4 \setminus e) \# C_3$ を図 1-3 のグラフとする. 初めに, $R_{C_3}, R_{C_4}, R_{G_1}$ はすべて strongly Koszul となる. しかし, R_{G_2}, R_{G_3} は共に strongly Koszul とはならない.

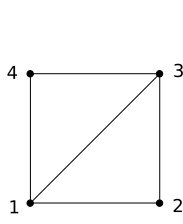


図 1: $C_3 \# C_3$

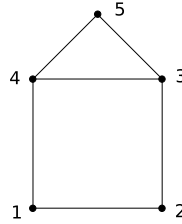


図 2: $C_4 \# C_3$

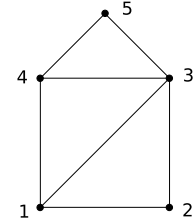


図 3: $(K_4 \setminus e) \# C_3$

3. 主結果

本講演の目的は

- I_G が 2 次グレブナー基底をもつことの十分条件
- R_G が strongly Koszul であるための必要十分条件

をグラフの言葉で表すことである。そのために、以下の 2 つの補題を紹介する。

Lemma 3.1. 有限単純グラフ G が 2-連結でないならば、 $G = G_1 \# \cdots \# G_s$ となる G の 2-連結成分 $G_1, \dots, G_s$ が存在する。ここで、 $\#$ を 0-sum とする。

Lemma 3.2. 有限単純 2-連結グラフ G に対し、以下は同値。

- (K_4, C_5) -minor をもたない;
- G は K_3 , $K_{2,n-2}$, $K_{1,1,n-2}$ ($n \geq 4$) のいずれか。

また、

- $I_{K_2} = I_{K_3} = \langle 0 \rangle$
- $R_{K_{1,1,n-2}} \cong R_{K_{1,n-2}} \otimes_K R_{K_{1,n-2}}$
- $R_{K_{1,n-2}}$ は R_{K_2} の $n - 2$ 個の Segre 積と同型

であることが従う。よって、 $K_{2,n-2}$ について調べれば良い。

$<$ を $q_{A|B} < q_{C|D}$ ($\min\{|A|, |B|\} < \min\{|C|, |D|\}$) をみたす $K[q]$ 上の逆辞書式順序とする。このとき、以下の定理が成り立つ。

Theorem 3.3 ([4]). $G = K_{2,n-2}$ を頂点集合 $V_1 \cup V_2$ 上の完全 2 部グラフとする。ここで、 $V_1 = \{1, 2\}$, $V_2 = \{3, \dots, n\}$ ($n \geq 4$) とする。このとき、切断イデアル I_G の $<$ に関するグレブナー基底は以下の二項式全体からなる：

$$\begin{aligned} q_{A|B}q_{E|F} - q_{\emptyset|[n]}q_{\{1,2\}|\{3,\dots,n\}} & \quad (1 \in A, 2 \in B) \\ q_{A|B}q_{C|D} - q_{A \cap C|B \cup D}q_{A \cup C|B \cap D} & \quad (1 \in A \cap C, 2 \in B \cap D, A \not\subset C, C \not\subset A) \\ q_{A|B}q_{C|D} - q_{A \cap C|B \cup D}q_{A \cup C|B \cap D} & \quad (1, 2 \in A \cap C, A \not\subset C, C \not\subset A) \end{aligned}$$

ここで、 $E = (B \cup \{1\}) \setminus \{2\}$, $F = (A \cup \{2\}) \setminus \{1\}$ とする。また、各二項式のイニシャル単項式は最初の単項式である。

以上より, 以下の結果を得る

Corollary 3.4 ([4]). 有限単純連結グラフ G が (K_4, C_5) -minor をもたないならば, I_G は 2 次グレブナー基底をもつ.

Theorem 3.5 ([4]). トーリック環 R_G が strongly Koszul であるための必要十分条件は, G が (K_4, C_5) -minor をもたないことである.

Corollary 3.6 ([4]). トーリック環 R_G が strongly Koszul ならば, I_G は 2 次グレブナー基底をもつ.

Corollary 3.7 ([4]). トーリック環 R_G が strongly Koszul ならば, $R_{G \setminus e}$ も strongly Koszul である. ここで, $G \setminus e$ は G の e での deletion とする.

Corollary 3.6 は Conjecture 2.1 の部分的な解決となっている.

参考文献

- [1] A. Engström, Cut ideals of K_4 -minor free graphs are generated by quadrics, *Michigan Math. J.*, **60** (2011), no. 3, 705-714.
- [2] J. Herzog, T. Hibi and G. Restuccia, Strongly Koszul algebras, *Math. Scand.*, **86** (2000), 161-178.
- [3] U. Nagel and S. Petrović, Properties of cut ideals associated to ring graphs, *J. Commutative Algebra* **1** (2009), no. 3, 547-565.
- [4] K. Shibata, Strong Koszulness of the toric ring associated to a cut ideal, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, to appear.
- [5] B. Sturmfels and S. Sullivant, Toric geometry of cuts and splits, *Michigan Math. J.*, **57** (2008), 689-709.

フロベニウス拡大と アウスランダー・ゴーレンス테인環

亀山 統胤 (信州大学大学院 総合工学系研究科)*

1. 導入

擬フロベニウス局所環や可換ゴーレンス테인局所環などの環は幅広く研究されている (e.g. [3], [8]). 本研究は, そういった環のクラスを含むアウスランダー・ゴーレンス테인局所環の構成を目的とするものである.

例えば

1. A型の正則 3次元多元環,
2. 標数0の体上のワイル多元環,
3. 有限次元リー代数の包絡多元環,
4. Sklyanin 多元環

等がアウスランダー・ゴーレンス테인環であることが知られている ([2], [4], [5], [11]).

本講演ではフロベニウス拡大の概念を使うことにより任意のアウスランダー・ゴーレンス테인局所環 R から体系的に別なアウスランダー・ゴーレンス테인局所環 A を作り出すことについて話をする.

2. 準備

まず初めに移入加群, 平坦加群の定義をし, それらを使いアウスランダー・ゴーレンス테인環の定義をする.

定義 2.1. R を環とする. R -加群 I が移入加群 (injective module) とは, 任意の単射準同型 $X \xrightarrow{\alpha} Y$ に対して, 次が全射になることである:

$$\mathrm{Hom}_R(Y, I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha, I)} \mathrm{Hom}_R(X, I)$$

定義 2.2. R を環とする. 右 R -加群 M が平坦加群 (flat module) とは, 左 R -加群の任意の完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y$ に対して, 次が完全列になることである:

$$0 \rightarrow M \otimes_R X \xrightarrow{M \otimes \alpha} M \otimes_R Y$$

定義 2.3. R -加群 M について, 各項 F_i が平坦加群である次のような完全列

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が存在するとき, これを長さ n の平坦分解という. このとき M の平坦次元 (flat dimension) は n 以下であるといつて, $\mathrm{flat\,dim}\,M \leq n$ と表す. さらに, n が $\mathrm{flat\,dim}\,M \leq n$ と

本研究は, (一財) 長野県科学振興会の助成を受け実施したものです.

*〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学大学院 総合工学系研究科

e-mail: kameyama@math.shinshu-u.ac.jp

なる最小の整数であるとき, M の平坦次元は n であるといい, $\text{flat dim } M = n$ で表す. また, 長さが有限の平坦分解が存在しない場合には, $\text{flat dim } M = \infty$ と定める. 同様に, 任意の R -加群 X について, 各 I_i が移入加群である次の完全列

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\lambda_0} I_0 \xrightarrow{\lambda_1} I_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{\lambda_n} I_n \rightarrow 0$$

を移入分解と呼び, 移入次元 (injective dimension) が定義される. また, 各 $\lambda_i(E_{i-1}) \hookrightarrow E_i$ が移入包絡と呼ばれる特別な準同型のとき, これを 極小移入分解と呼ぶ.

定義 2.4 (Björk). R を左かつ右ネーター環, $n \geq 0$, $I^\bullet$: R の極小移入分解とする. このとき

R が アウスランダー条件を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{flat dim } I^i \leq i$ (任意の $0 \leq i \leq n$).

R が アウスランダー・ゴーレンス테인環 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{inj dim } R = \text{inj dim } R^{\text{op}} < \infty$,
 R はアウスランダー条件を満たす.

中山・都筑 [9, 10] によるフロベニウス拡大の概念を, 我々の研究の場合に置き換えて定義する.

定義 2.5. A, R : 環に対し,

A は R の拡大環 $\stackrel{\text{def}}{\iff} A$ は R を部分環として含む (A/R と書くことにする).

A/R : フロベニウス拡大: $\stackrel{\text{def}}{\iff} (F1) A$: 有限生成左 R -加群;
 $(F2) A$: 有限生成射影右 R -加群;
 $(F3) A \cong \text{Hom}_R(A, R)$ (右 A -加群として).

命題 2.6. 任意のフロベニウス拡大 Λ/A , A/R に対して Λ/R もフロベニウス拡大である.

命題 2.7 (cf. [1]). フロベニウス拡大 A/R に対して次が成り立つ.

R : アウスランダー・ゴーレンス테인環

$\Rightarrow A$: アウスランダー・ゴーレンス테인環 かつ $\text{inj dim } A \leq \text{inj dim } R$.

定義 2.8. 本講演を通して,

$n \geq 2$, $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$: 集合に対して

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を G の巡回置換とする.

注意 2.9. $G \times G \rightarrow G, (i, j) \mapsto \pi^j(i)$ とすれば G は巡回群 (単位元は 0) となる.

では, 実際にアウスランダー・ゴーレンス테인局所環の構成についてみていく.

(q, χ) : 下記の (X1), (X2) を満たす二つ組

q : 整数

$\chi: G \rightarrow \mathbb{Z}$: 写像

をとる.

(X1) $q - \chi(n - j + i) \leq \chi(j) - \chi(i) \leq \chi(j - i)$ ($i < j$ である任意の $i, j \in G$);

(X2) $\chi(i) + \chi(n - i - 1) = \chi(n - 1)$ (任意の $i \in G$).

注意 2.10. $q \leq n$ かつ $\chi(i) = i$ (任意の $i \in G$) とすれば (X1), (X2) を満たす.

任意の $i, j \in G$ に対して次のように置く

$$\omega(i, j) = \begin{cases} \chi(i) + \chi(j) - \chi(\pi^j(i)) & (i + j < n), \\ \chi(i) + \chi(j) - \chi(\pi^j(i)) - q & (i + j \geq n) \end{cases}$$

補題 2.11. 次が成り立つ.

- (1) $\omega(i, j) \geq 0$ (任意の $i, j \in G$).
- (2) $\omega(0, i) = \omega(i, 0) = \chi(0) = 0$ (任意の $i \in G$).
- (3) $\omega(i, n - i - 1) = 0$ (任意の $i \in G$).

R を環とし, 条件 (*) を満たす三つ組み $(\sigma; c, t)$ ($\sigma \in \text{Aut}(R)$ であり $c, t \in R$) を持つものとする:

$$(*) \quad c, t \in R^\sigma \quad \text{かつ} \quad xc = c\sigma(x), \quad xt = t\sigma^q(x) \quad (\text{任意の } x \in R).$$

注意 2.12. 条件 (*) は以下のような場合に成り立つ:

- 1. $\sigma = \text{id}_R$ かつ $c, t \in Z(R)$ ($Z(R)$: 環 R の中心),
- 2. 任意の σ と $c = t = 0$.

上の環 R から具体的に環 A を構成する.

定義 2.13. A : 自由右 R -加群とし, その基底を $\{e_i\}_{i \in G}$ とする.

A 上の積を以下のように定義する:

- (M1) $e_i e_j = e_{\pi^j(i)} c^{\omega(i, j)} \quad (i + j < n)$
 $e_i e_j = e_{\pi^j(i)} t c^{\omega(i, j)} \quad (i + j \geq n);$
- (M2) $x e_i = e_i \sigma^{\chi(i)}(x)$ (任意の $x \in R$, 任意の $i \in G$).

3. 主定理

命題 3.1. 次が成り立つ.

- (1) A は結合的な環であり, 単位元は $1_A = e_0$ である.
- (2) A は R の拡大環になる. (単射環準同型 $R \rightarrow A, x \mapsto e_0 x$ を通して)
- (3) A/R はフロベニウス拡大である.

命題 3.2. $t \in \text{rad}(R)$ とする. このとき $R/\text{rad}(R) \xrightarrow{\sim} A/\text{rad}(A)$ が成り立つ.

($\text{rad}(R)$: 環 R のジャコブソン根基)

以上のことを使うことにより, 以下の主結果を得ることが出来た.

定理 3.3. $t \in \text{rad}(R)$ とする.

このとき,

A : アウスランダー・ゴーレンス테인局所環

$$\iff R: \text{アウスランダー・ゴーレンス테인局所環 かつ } \text{inj dim } R = \text{inj dim } A.$$

また, 計算により

$$t \in \text{rad}(R) \iff c \in \text{rad}(R) \text{ かつ } \omega(i, n-i) > 0 \text{ (任意の } i \neq 0 \text{)}.$$

が成り立つこともわかった.

よって, 上の定理は次のように言い換えられる.

定理 3.4. 次を仮定する

1. $c \in \text{rad}(R)$,
2. $n\chi(i) > iq$ (任意の $i \neq 0$).

このとき以下が成り立つ;

A : アウスランダー・ゴーレンステイン局所環

$$\iff R: \text{アウスランダー・ゴーレンステイン局所環 かつ } \text{inj dim } R = \text{inj dim } A.$$

講演では, 実際に環 R から新しい環 A を作った例を紹介するつもりである.

尚, 本講演は筑波大学・星野光男氏, 東京電機大学・古賀寛尚氏との共同研究 [7] に基づくものである.

参考文献

- [1] H. Abe and M. Hoshino, Frobenius extensions and tilting complexes, *Algebras and Representation Theory* **11**(3) (2008), 215–232.
- [2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Modules over regular algebras of dimension 3, *Invent. Math.* **106** (1991), no. 2, 335–388.
- [3] Y. Baba and K. Oshiro, *Classical Artinian rings and related topics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2009.
- [4] J. -E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Mathematical Library, **21**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.
- [5] J. -E. Björk, The Auslander condition on noetherian rings, in: *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988)*, 137–173, Lecture Notes in Math., **1404**, Springer, Berlin, 1989.
- [6] M. Hoshino and H. Koga, Auslander-Gorenstein resolution, *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no. 1, 130–139.
- [7] M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, Constructions of Auslander-Gorenstein local rings as Frobenius extensions, preprint.
- [8] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Translated from the Japanese by M. Reid, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [9] T. Nakayama and T. Tsuzuku, On Frobenius extensions I, *Nagoya Math. J.* **17** (1960), 89–110.
- [10] T. Nakayama and T. Tsuzuku, On Frobenius extensions II, *Nagoya Math. J.* **19** (1961), 127–148.
- [11] J. Tate and M. Van den Bergh, Homological properties of Sklyanin algebras, *Invent. Math.* **124** (1996), no. 1-3, 619–647.

ポスターセッション 会場E

類数が 3 で割れる二次体のある無限族の存在について

伊東杏希子 (神奈川大学)

本稿では、判別式の比が $m_1 : m_2$ となる二次体のペア $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 d}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 d}))$ のうち、イデアル類群の位数がともに 3 で割れるものについて得られた結果を述べる。

1 定義

本稿で用いる用語の定義を述べる。

定義 1. d を平方数でない整数とする。有理数体 $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{d}$ を含む最小の体を $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ と表し、「二次体」と呼ぶ。

二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ は、数の集合として

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

と書ける。二次体は実数体 $\mathbb{R}$ に含まれるかどうかで、大きく性質が異なる。

定義 2. $d > 0$ ならば、 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を「実二次体」と呼び、 $d < 0$ ならば、 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を「虚二次体」と呼ぶ。

次に、ノルム・トレース・整数環・分数イデアルの定義を述べる。これらをもとに、本稿の重要なキーワードである「イデアル類群」と「類数」の定義を述べたい。以降では、 k を二次体とする。

定義 3. 二次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の元 $\alpha = a + b\sqrt{d}$ に対し、 $N(\alpha) = \alpha\alpha'$ を α のノルムと呼び、 $T(\alpha) = \alpha + \alpha'$ を α のトレースと呼ぶ。

ここで、 α' は α の共役 $a - b\sqrt{d}$ を表すものとする。

定義 4. 集合

$$\mathcal{O}_k := \{\alpha \in k \mid N(\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ かつ } T(\alpha) \in \mathbb{Z}\}$$

を「 k の整数環」と呼ぶ。

定義 5. k の整数環 $\mathcal{O}_k$ の (0) と異なるイデアル I と k の 0 ではない元 β に対し、集合

$$\beta I := \{\beta\gamma \mid \gamma \in I\}$$

を「 k の分数イデアル」と呼ぶ。

k の分数イデアルの全体を $\mathcal{I}_k$ と書くことにする. $\mathcal{I}_k$ はイデアルの乗法に関してアーベル群をなす. k の 0 ではない元 δ から生成される分数単項イデアル $(\delta) := \delta\mathcal{O}_k$ の全体を $\mathcal{P}_k$ と書くことにする. $\mathcal{P}_k$ は $\mathcal{I}_k$ の部分群になる.

定義 6. 剰余群 $\mathcal{I}_k/\mathcal{P}_k$ を「 k のイデアル類群」といい, Cl_k と書く.

k のイデアル類群は有限アーベルになることが知られている. Cl_k の位数を「 k の類数」といい, $h(k)$ と書く. 定義から, $\mathcal{O}_k$ が単項イデアル整域になる時, k の類数は 1 となることが従う. 類数は, 整数環 $\mathcal{O}_k$ が単項イデアル整域からどのくらい離れているのかを測る指標であると言える.

2 二次体の類数の可除性

二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数を計算するアルゴリズムは知られていて, d の値が小さい場合には計算機で類数を計算できる. しかし, 計算機で扱える d の値の範囲には限度がある. そこで, d の値が大きい場合に二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数を調べる方法が研究されるようになった. このテーマにおけるアプローチの一つとして, 類数が与えられた自然数で割れるかどうかを調べるという研究分野 (類数の可除性) がある. 本稿では, 類数が 3 で割れる二次体を扱う.

二次体の類数について次のことが知られている.

定理 7. 与えられた自然数 n に対して, 類数が n で割れる実二次体, 虚二次体はそれぞれ無限に存在する.

類数が n で割れる二次体の無限族の具体的な構成により, この定理は示せる. 虚二次体の場合には T. Nagell[4], N. C. Ankeny and S. Chowla[1] など, 実二次体の場合には Y. Yamamoto[6], P. J. Weinberger[5] などによる結果が知られている.

3 先行研究

定理 7 をさらに進展させた研究は数多くある. 特に $n = 3$ の場合, 即ち, 類数が 3 で割れる二次体の場合に関する研究は盛んになされている. 2002 年, 小松亨氏は次の結果を示した.

定理 8 (小松, [3]). m を square-free な整数とする. この時, square-free な整数 d のうち, 以下の条件を満たすものが無限に存在する:

- (i) 二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数は 3 で割れる,
- (ii) 二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{md})$ の類数は 3 で割れる.

与えられた数で類数が割れる二次体の無限族をペアで構成していることに特徴がある. 定理 8 の証明中に, 所要の条件を満たす正の整数 d , 負の整数 d はそれぞれ無限に存在することが書かれているので, 条件を満たす実二次体同士のペアの無限族, 虚二次体同士のペアの無限族, 実二次体と虚二次体のペアの無限族のそれぞれの存在が示されている.

4 主結果とその背景

定理 7 をさらに進展させた研究テーマの一つに, 「与えられた数で類数が割れる虚二次体, 実二次体はどのくらいの割合で存在するか」を調べるという研究がある. この割合に関する研究として, 特に, Cohen-Lenstra Heuristics [2] と呼ばれる予想が知られている.

この予想によると, 与えられた奇素数 l で類数が割れる虚二次体の割合は

$$1 - \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{l^i}\right),$$

与えられた奇素数 l で類数が割れる実二次体の割合は

$$1 - \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{l^i}\right)$$

と期待されている.

この予想から, 類数が 3 で割れる虚二次体は約 44%, 類数が 3 で割れる実二次体は約 16% 存在することが期待される. これが正しいならば, 条件を多くして対象となる二次体を減らしても類数が 3 で割れるものは無限に存在する可能性が考えられる. 小松亨氏の結果をこのことに関連させて捉えることもできる. 実際, 定理 8 では, 類数が 3 で割れる二次体をペアで構成するという, 制約の多い中での無限族の構成に成功している. この結果に興味を持ち, 条件をさらに増やしても類数が 3 で割れる二次体のペアは無限に構成できるかということを考え, 次を示した.

主結果 9. m_1, m_2 を相異なる square-free な整数でかつ, $12 \nmid m_1 m_2$ を満たすものとする (ただし, 1 を含む). S_+, S_-, S_0 を互いに共通部分を持たない素数の有限集合でかつ, 2, 3 と $m_1 m_2$ の素因数を含まないものとする. この時, square-free な整数 d のうち, 以下の条件を満たすものが無限に存在する:

- (i) 二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 d})$ の類数は 3 で割れる,
- (ii) 二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 d})$ の類数は 3 で割れる,
- (iii) $\gcd(m_1 m_2, d) = 1$,
- (iv) 任意の $\eta \in S_+$ に対して, $\left(\frac{d}{\eta}\right) = 1$,
- (v) 任意の $\eta \in S_-$ に対して, $\left(\frac{d}{\eta}\right) = -1$,
- (vi) 任意の $\eta \in S_0$ に対して, $\left(\frac{d}{\eta}\right) = 0$.

ここで, $(\cdot)$ は Legendre 記号を表す. 定義は以下の通りである: 奇素数 p で割り切れない整数 a に対し, 合同式 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ が整数解 x を持つ時 $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ と書き, 合同式 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ が整数解 x を持たない時 $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ と書く. 整数 a が奇素数 p で割り切れる時 $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ と書く.

例 10. $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $S_+ = \{5\}$, $S_0 = \{503\}$ とすると, 主結果 9 より

$$\begin{aligned} & \# \left\{ d : \text{square-free な整数} \left| \begin{array}{l} 3 \mid h(\mathbb{Q}(\sqrt{7d})), 3 \mid h(\mathbb{Q}(\sqrt{11d})), \\ \gcd(77, d) = 1, \\ \left(\frac{d}{5}\right) = 1, \left(\frac{d}{503}\right) = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \# \left\{ d : \text{square-free な整数} \left| \begin{array}{l} 3 \mid h(\mathbb{Q}(\sqrt{7d})), 3 \mid h(\mathbb{Q}(\sqrt{11d})), \\ \gcd(77, d) = 1, \\ d \equiv 1006, 1509 \pmod{2515} \end{array} \right. \right\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となる. ここで, $h(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))$ は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数を表す.

例 10 では $d \equiv 1006, 1509 \pmod{2515}$ とあるので, 合同条件を満たす整数自体が 5,000 個につき 3, 4 個しか存在しない. その中で, 類数の可除性に関して所要の条件を満たすものが無限に存在することを示せた. S_+ , S_- , S_0 としてより大きな素数を含む集合を取るにより, 合同条件を満たす整数自体が非常に少ない中でも条件を満たすものが無限に存在することを確認できる.

参考文献

- [1] N. C. Ankeny and S. Chowla, On the divisibility of the class number of quadratic fields, *Pacific J. Math.* **5** (1955), 321–324.
- [2] H. Cohen and H. W. Lenstra, Heuristics on class groups of number fields, *Number Theory*, Springer Lecture Notes in Math. **1068** (1984), 33–62.
- [3] T. Komatsu, An infinite family of pairs of quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{mD})$ whose class numbers are both divisible by 3, *Acta Arith.*, **104** (2002), 129–136.
- [4] T. Nagell, Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **1** (1922), 140–150.
- [5] P. J. Weinberger, Real quadratic fields with class numbers divisible by n , *J. Number Theory* **5** (1973), 237–241.
- [6] Y. Yamamoto, On unramified Galois extensions of quadratic number fields, *Osaka J. Math.* **7** (1970), 57–76.

On algebraic K -theory of quasi-coherent modules over spectral schemes

Mariko OHARA (Tohoku University)*

1. The main results

This is a summary of the consequence in [8]. More precise arguments or definitions, one can see [8].

1.1. The back ground

The algebraic K -theory is one of the important invariants of algebraic varieties. When we consider the Waldhausen construction of algebraic K -theory, we can find that the concept of a model category naturally appears and essentially plays an important role, so that we reach the concept of ∞ -category developed by Lurie. Since the underlying ∞ -categories of model categories are equivalent if the model categories are Quillen equivalent, we can regard the ∞ -category as a homotopy invariant of the model structures. Also, the $\mathcal{G}$ -structured ∞ -topoi, the concept of the spectral schemes and their quasi-coherent sheaves are the one of the main topic of algebraic topology which is developed by Lurie.

1.2. Settings

Let $\mathcal{G}_{Zar}^{Sp}$ be the spectral Zariski geometry and $X \in \mathbf{Sch}(\mathcal{G}_{Zar}^{Sp})$ a spectral $\mathcal{G}_{Zar}^{Sp}$ -scheme.

We study K -theory of spectral schemes by using quasi-coherent sheaves. we define K -theory of X by

$$K(X) = \Omega|S_{\bullet}(QCoh(X)^{lf})|,$$

where $QCoh(X)^{lf}$ is the ∞ -category of the locally free sheaves defined in [6].

Let $\mathbf{CAlg}^{cn}$ be an ∞ -category of connective $\mathbb{E}_{\infty}$ -rings and $\mathbf{CAlg}^e$ a ∞ -subcategory of $\mathbf{CAlg}^{cn}$ which consists of connective coherent $\mathbb{E}_{\infty}$ -rings and the morphisms with the following condition: $R_1 \rightarrow R_2$ is a morphism of connective $\mathbb{E}_{\infty}$ -rings which induces an exact functor $\mathrm{Mod}_{R_1}^{proj} \rightarrow \mathrm{Mod}_{R_2}^{proj}$. Note that any Zariski open immersion $R \rightarrow R[x^{-1}]$ for $x \in \pi_0 R$ induces an exact functor. Then we obtain the Zariski (resp. Nisnevich) ∞ -topos $\mathcal{S}hv_{\mathcal{S}}(\mathbf{CAlg}^e)$ denoted by $\mathbf{CAlg}^{eZar}$ (resp. $\mathbf{CAlg}^{eNis}$).

Let R be a connective $\mathbb{E}_{\infty}$ -ring. We define a connective spectrum R^b to be the image of R under the morphism $\mathrm{Mod}_R \rightarrow \mathrm{Mod}_R^b$, where Mod_R^b is the ∞ -subcategory of Mod_R bounded by the t -structure. We call such a spectrum R^b *bounded* since it has only finitely non-zero homotopy groups. Note that $\mathrm{Mod}_{R^b}^{proj} \simeq (\mathrm{Mod}_R^{proj})^b$.

Let $\mathbf{CAlg}_{reg}^b$ be a ∞ -subcategory of $\mathbf{CAlg}^{cn}$ which consists of bounded coherent regular $\mathbb{E}_{\infty}$ -rings and the morphisms with the following condition: $R_1^b \rightarrow R_2^b$ is a morphism of connective $\mathbb{E}_{\infty}$ -rings such that the restriction of π_0 makes $\pi_0 R_2^b$ a finitely generated $\pi_0 R_1^b$ -module. Those morphisms induces exact functors. Then we obtain the Zariski (resp. Nisnevich) ∞ -topos $\mathcal{S}hv_{\mathcal{S}}(\mathbf{CAlg}_{reg}^b)$ denoted by $\mathbf{CAlg}_{reg}^{bZar}$ (resp. $\mathbf{CAlg}_{reg}^{bNis}$).

We define a functor

$$K : \mathbf{CAlg}^{eZar} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}} \text{ (resp. } \mathbf{CAlg}^{eNis} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}})$$

which carries an $\mathbb{E}_{\infty}$ -ring A to the K -theory $K(\mathrm{Spec}^g A)$ defined above.

Let us denote the sheafification of K by $\widetilde{K}$.

* e-mail: sa9m08@math.tohoku.ac.jp

1.3. The main theorem

We regard the K -theory as a functor K on the affine spectral schemes and prove that the group completion $\Omega B(BGL)$ represents the sheafification of K with respect to Zariski (resp. Nisnevich). Here, we define BGL to be a classifying space of a colimit of affine spectral scheme GL_n . We also prove $K(R^b) \simeq K(\pi_0 R^b)$ for the bounded connective spectrum R^b .

Theorem 1.1. *Let BGL be a classifying space of a colimit of affine spectral scheme GL_n and $\Omega B(BGL)$ the group completion. Let $\mathrm{CAlg}^{e\mathcal{G}}$ be either Zariski ∞ -topos CAlg^{eZar} or Nisnevich ∞ -topos CAlg^{eNis} .*

(i) *There is an equivalence of ∞ -groupoids:*

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Shv}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{CAlg}^{e\mathcal{G}})}(\mathrm{Spec}^g R, \Omega B(BGL)) \simeq \widetilde{K}(\mathrm{Spec}^g R).$$

(ii) $K(R^b) \simeq K(\pi_0 R)$ as a functor on $\mathrm{CAlg}_{\mathrm{reg}}^{bZar}$ (resp. $\mathrm{CAlg}_{\mathrm{reg}}^{bNis}$).

Let $K^f : \mathrm{CAlg}_{\mathrm{reg}}^{bZar} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathrm{CAlg}_{\mathrm{reg}}^{bNis} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}$) be a functor which carries an $\mathbb{E}_\infty$ -ring A to the K -theory KA of Elmendorf-Kriz-Mandell-May. Let us denote the sheafification of K^f by $\widehat{K}^f$. Then:

(iii) $\widehat{K}^f R^b \simeq K(R^b)$, and K is a sheaf on $\mathrm{CAlg}_{\mathrm{reg}}^{bZar}$ (resp. $\mathrm{CAlg}_{\mathrm{reg}}^{bNis}$).

1.4. Remarks

The sheafification makes no difference between objectwise group completion a functor $R \mapsto \Omega B(BGL(R))$ and the group completion of sheaf $R \mapsto (\Omega BBGL)(R)$.

The left hand side of Theorem 1.1(i) is equivalent to $\widehat{K}^f R$, so it gives a generalization of the consequence of Elmendorf-Kriz-Mandell-May [4, VI, Theorem 7.1] to the algebraic K -theory sheaf in certain ∞ -topos.

In bounded case, by combining Theorem 1.1(ii) and (iii), a functors K^f is characterized by π_0 -part of R^b .

2. Outline of the proof of Main results

In this section, we explain the outline of proof of Theorem 1.1(i). The key lemma is as follows.

Let R be an $\mathbb{E}_\infty$ -ring and Mod_R^{nproj} an ∞ -category of rank n projective R -modules in Mod_R^{cn} . We defined spectral affine group scheme GL_n . We regard $BGL_n(R)$ is a ∞ -groupoid which consists of the single object R and equivalences as morphisms.

Lemma 2.1. *Let $X : \mathrm{CAlg}_{\mathcal{G}}^{cn} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}$ be a spectral sheaf and $X \rightarrow BGL_n$ a morphism in $\mathrm{Shv}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{CAlg}_{\mathcal{G}}^{cn})$. Let $\mathrm{QCoh}(X)_n^{lf}$ be the ∞ -category of locally free sheaves of rank n . Then there is an equivalence of ∞ -groupoids;*

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Shv}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{CAlg}_{\mathcal{G}}^{cn})}(X, BGL_n) \simeq \mathrm{QCoh}(X)_n^{lf}.$$

Proof. Roughly speaking, for each point $x \in X$ and sufficiently small open $x \in \mathrm{Spec}^g A \rightarrow X$, we assign the stalk of the morphism $X \rightarrow BGL_n$ at x to the finitely generated free A -module $F(x)$. Then the sheaf condition gives a locally free sheaf F and a one-to-one correspondence.

By [6, Proposition 2.7.14], the sheafification of the functor X with respect to Zariski or Nisnevich topology does not change the ∞ -category $\mathrm{QCoh}(X)$. The functor BGL_n

is a hypercomplete sheaf with respect to those topology by [7, Theorem 6.1]. Therefore, it is sufficient to say that there is a one-to-one correspondence in Zariski case.

Now, we have $\text{Mod}_R^{nproj} \simeq \text{QCoh}(\text{Spec}^g R)_n^{lf}$. Take $M \in \text{Mod}_R^{nproj}$. Then $\pi_0 M$ is a locally free $\pi_0 R$ -module of finite rank. We can choose elements $x_1, \dots, x_m \in \pi_0 R$ such that they generate the unit ideal and each localization $(\pi_0 M)[x_i^{-1}]$ is a free module over $(\pi_0 R)[x_i^{-1}]$ of finite rank. It follows that $M[x_i^{-1}]$ is a free module over $R[x_i^{-1}]$. Thus, M is free locally with respect to the Zariski topology on $\text{Spec}^g R$ [6, Remark 2.7.30]. The lemma follows from the fact that, for a spectral sheaf X , $\text{QCoh}(X)_n^{lf}$ is glued up by affine cover in the ∞ -topos $\mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\text{CAlg}_g^{cn})$. $\square$

Proposition 2.2. *Let BGL be a classifying space of colimit of affine spectral schemes GL_n and $\Omega B(BGL)$ the group completion. Let $\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}}$ be either the Zariski ∞ -topos CAlg^{eZar} or the Nisnevich ∞ -topos CAlg^{eNis} . There is an equivalence of ∞ -groupoids:*

$$\text{Map}_{\mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}})}(\text{Spec}^g R, \Omega B(BGL)) = \tilde{K}(\text{Spec}^g R).$$

Proof. By [7, Lemma 3.21], we have an equivalence:

$$\text{colim}_n \text{Map}_{\mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}})}(\text{Spec}^g R, BGL_n) \simeq \text{Map}_{\mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}})}(\text{Spec}^g R, BGL).$$

By Lemma 2.1, we have an equivalence

$$\Omega B(BGL(R)) \simeq \Omega B((\text{Mod}_R^{proj})^{\simeq}),$$

where $(-)^{\simeq}$ denotes the maximal Kan complex. We can take the category of semi-finite R -modules. Since all w-cofibrations in Mod_R^{proj} is split and the homotopy category of Mod_R^{proj} is additive, by applying Waldhausen's additive K -theory to $\Omega B((\text{Mod}_R^{proj})^{\simeq})$, we obtain that $\Omega B((\text{Mod}_R^{proj})^{\simeq})$ is equivalent to the algebraic K -theory $K(\text{Mod}_R^{proj}) = K(\text{Spec}^g R)$ which is obtained by $S_{\bullet}$ construction.

On the other hand, we have an equivalence induced by Yoneda embedding;

$$\text{Map}_{\mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}})}(\text{Spec}^g R, \Omega B(BGL)) \simeq (\Omega BBGL)(R).$$

Consider the following commutative diagram of the ∞ -categories:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\Omega B} & \mathcal{P}(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}}) \\ \downarrow \widetilde{(-)} & & \downarrow \widetilde{(-)} \\ \mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\mathcal{S}hv(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}})) & \xrightarrow{\Omega B} & \mathcal{S}hv_{\mathfrak{S}}(\mathcal{S}hv(\text{CAlg}^{e\mathfrak{g}})). \end{array}$$

We have an equivalence $(\Omega BBGL)(R) \simeq \Omega B(BGL(R))$ if the objectwise group completion functor $R \mapsto \Omega B(BGL(R))$ is a spectral sheaf. $\square$

The space $\Omega B(BGL(R))$ has the same construction of the K -theory KR defined in [4] as a space by [4, Theorem 7.1].

References

- [1] C. Barwick and T. Lawson, *Regularity of structured ring spectra and localization in K -theory*, Preprint, available at [arxiv:1402.6038v2](https://arxiv.org/abs/1402.6038v2) (2014).
- [2] A. Blumberg, D. Gepner, and G. Tabuada, *A universal characterization of higher algebraic K -theory*, To appear in *Geometry and Topology*, available at [arxiv:1001.2282v4](https://arxiv.org/abs/1001.2282v4) (2014).
- [3] J. Blumberg and A. Mandell, *The localization sequence for the algebraic K -theory of topological K -theory*, *Acta Mathematica* **200** (2008), 155–179.
- [4] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May, *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. With an appendix by M. Cole. MR1417719 (97h:55006)
- [5] J. Lurie, *Higher algebra*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/~lurie/ (2011).
- [6] ———, *Quasi-Coherent Sheaves and Tannaka Duality Theorems*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/~lurie/ (2011).
- [7] ———, *Spectral Schemes*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/~lurie/ (2011).
- [8] M. Ohara, *Algebraic K -theory of quasi-coherent modules over spectral schemes and the representation in affine case*, Preprint, available at arxiv.org/abs/1411.2306 (2014).

等号付き多重ゼータ関数の非零領域

小野塚 友一 (名古屋大学)*

1. イントロダクション

近年、多くの数学者によって研究されている関数の一つとして多重ゼータ関数が挙げられる。多重ゼータ関数の中でも一番有名なのは次の Euler-Zagier 型多重ゼータ関数である。

$$\zeta_{EZ,k}(s_1, \dots, s_k) := \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \dots m_k^{s_k}}$$

そして今回発表する等号付き多重ゼータ関数は次のように定義される関数である。

$$\zeta_k^*(s_1, \dots, s_k) := \sum_{0 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \dots m_k^{s_k}}$$

この等号付き多重ゼータ関数は名前の通り、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の和の条件の不等号を等号付き不等号に置き換えた関数となっている。これらの関数は Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数や Apostol-Vu 型多重ゼータ関数といった多重ゼータ関数の一種である。これらの多重ゼータ関数を統一的に扱うために、ここではより一般化した関数として次の級数を考える。

$$F(s_1, \dots, s_k; f) := \sum_{m_1, \dots, m_k=1}^{\infty} \frac{f(m_1, \dots, m_k)}{m_1^{s_1} \dots m_k^{s_k}}$$

ただし $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{C}$ とする。これは Dirichlet 級数の多重化であるためここでは多重 Dirichlet 級数と呼ぶこととする。 $u_{EZ}, u^*: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ

$$u_{EZ}(m_1, \dots, m_k) := \begin{cases} 1 & (m_1 < m_2 < \dots < m_k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$
$$u^*(m_1, \dots, m_k) := \begin{cases} 1 & (m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

と定めると $F(s_1, \dots, s_k; u_{EZ}) = \zeta_{EZ,k}(s_1, \dots, s_k)$ 、 $F(s_1, \dots, s_k; u^*) = \zeta_k^*(s_1, \dots, s_k)$ が成り立つので、多重 Dirichlet 級数 F は確かに Euler-Zagier 型多重ゼータ関数や等号付き多重ゼータ関数の一般化となっていることがわかる。

f がある条件を満たすときに多重 Dirichlet 級数 F の非零領域を得ることができたので今回はその結果を紹介する。この結果を用いることで等号付き多重ゼータ関数の非零領域を得ることができる。

*e-mail: m11022v@math.nagoya-u.ac.jp

2. 結果

定理 2.1

f は $f(1, \dots, 1) \neq 0$ を満たし、更にある定数 $C > 0$ と $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ が存在して $|f(m_1, \dots, m_k)| \leq C m_1^{r_1} m_2^{r_2} \cdots m_k^{r_k}$ が $(1, \dots, 1)$ を除く全ての $(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$ について成り立っているものとする。 α_j を $\alpha_j > 1 + r_j$ ($j = 1, \dots, k$) と $\zeta(\alpha_1 - r_1) \zeta(\alpha_2 - r_2) \cdots \zeta(\alpha_k - r_k) \leq 1 + |f(1, \dots, 1)|/C$ を満たすようにとる。このとき多重 Dirichlet 級数 $F(s_1, \dots, s_k; f)$ は次の領域を非零領域としてもつ。

$$\{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_j) > 1 + \alpha_j \quad (j = 1, \dots, k)\}$$

また、ある級数 $F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$ が存在して次の関係を満たす。

$$(F(s_1, \dots, s_k; f))^{-1} = F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$$

定理 2.1 の中に関数 f^{-1} が登場するが、これは通常の意味での逆関数ではないことに注意しておく。(関数 f^{-1} は f が与えられれば明示的に求められる関数である。)

この定理は f がいくつかの条件を満たすときに一般の多重 Dirichlet 級数 F を考えたが、 f は同じ条件の下で、等号付き多重ゼータ関数の形の多重 Dirichlet 級数 F に制限して考えると求められる非零領域はより広くなる。そこで次のような集合を定義する。

$$\Omega^* := \{f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{C} \mid m_1 \leq \cdots \leq m_k \text{ を満たさないとき } f(m_1, \dots, m_k) = 0\}$$

もし $f \in \Omega^*$ なら多重 Dirichlet 級数 F は次のように書け、等号付き多重ゼータ関数の形の級数になっていることがわかる。

$$F(s_1, \dots, s_k; f) = \sum_{0 < m_1 \leq \cdots \leq m_k} \frac{f(m_1, \dots, m_k)}{m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k}}$$

こういった級数に対する非零領域は次の定理 2.2 で述べるように定理 2.1 より広く取れることがわかる。

定理 2.2

$f \in \Omega^*$ は定理 2.1 の条件を満たすものとし、 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は定理 2.1 と同様にとる。このとき多重 Dirichlet 級数 $F(s_1, \dots, s_k; f)$ は次の領域を非零領域としてもつ。

$$\{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1)) > l + \alpha_k(k-l+1) \quad (l = 1, \dots, k)\}$$

ただし $\alpha_k(l) = \alpha_l + \alpha_{l+1} + \cdots + \alpha_k$ ($l = 1, \dots, k$) とし $s_k(l)$ も同様に定める。またある級数 $F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$ ($f^{-1} \in \Omega^*$) が存在して次の関係を満たす。

$$(F(s_1, \dots, s_k; f))^{-1} = F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$$

この定理から次の系が導ける。

系

$f \in \Omega^*$ は $|f(1, \dots, 1)| = 1$ と $|f(m_1, \dots, m_k)| \leq 1$ を満たすものとする。このとき多重 Dirichlet 級数 $F(s_1, \dots, s_k; f)$ は次の領域を非零領域としてもつ。

$$\{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1)) > l + \alpha_k(k-l+1) \ (l=1, \dots, k)\} \quad (1)$$

ただし $\alpha_i > 1$ ($i=1, \dots, k$) は $\zeta(\alpha_1)\zeta(\alpha_2)\cdots\zeta(\alpha_k) \leq 2$ を満たすようにとる。

これにより等号付き多重ゼータ関数 $\zeta_k^*(s_1, \dots, s_k)$ は領域 (1) を非零領域にもつことがわかる。またこの系は $f \in \Omega^*$ 、 $|f(1, \dots, 1)| = 1$ 、 $|f(m_1, \dots, m_k)| \leq 1$ の3つの条件を満たしていればよいので、例えば次のような級数も領域 (1) を非零領域にもつことがわかる。

$$L_k^*(s_1, \dots, s_k) := \sum_{0 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k} \frac{\chi_1(m_1)\chi_2(m_2)\cdots\chi_k(m_k)}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_k^{s_k}}$$

ただし $\chi_1, \dots, \chi_k$ は Dirichlet 指標とする。

ではこれらの結果は等号付き多重ゼータ関数 $\zeta_k^*(s_1, \dots, s_k)$ のみでなく、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $\zeta_{EZ,k}(s_1, \dots, s_k)$ に適用できないのだろうか、という疑問が思い浮かぶが残念ながらそれはできない。なぜかというとは今まで紹介した定理や系を適用するための多重 Dirichlet 級数 $F(s_1, \dots, s_k; f)$ の関数 f の条件として $f(1, \dots, 1) \neq 0$ が必要だったが、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $F(s_1, \dots, s_k; u_{EZ}) = \zeta_{EZ,k}(s_1, \dots, s_k)$ の場合には $u_{EZ,k}(1, \dots, 1) = 0$ であるため定理や系の適用条件を満たさないからである。

Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の極小自由分解について

矢城 信吾 †

九州大学

概要

このポスターセッションでは、Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の分類と、ACM 曲線の極小自由分解について考察した結果について述べる。今回、このような機会を与えてくださった第 11 回 MCYR 運営委員会のみなさまに深く感謝いたします。

1 はじめに

Del Pezzo 曲面とは、非特異射影曲面で反標準因子 $-K_X$ が very ample であるような曲面をいう。このような曲面は

1. $\mathbb{P}^2$ 上の r 点ブローアップ ($0 \leq r \leq 6$) の $\mathbb{P}^{9-r}$ への埋め込み、または
2. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の Segre 埋め込み $\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^8$

に同型である。このような曲面については、幾何学的な観点からは古典的によく調べられてきた ([5])。さらに分類という立場では、 Δ 種数 1 の射影多様体の分類という立場で行われていた ([3])。一方で、代数的観点（特に極小自由分解の立場）からは、1990 年代に $\deg X = \text{codim } X + 2$ となる射影多様体の極小自由分解による考察が進んでいた ([7],[6])。今回、これらの曲面の中で Arithmetically Cohen-Macaulay であるような因子の型を決定し、それらの分類を行った。さらに、得られた因子の極小自由分解を求めた。それらの一例を紹介させていただく。以下、 k を標数 0 の代数的閉体とする。

Theorem 1.1. X を $\mathbb{P}^{9-r}$ 内の $9-r$ 次の Del Pezzo 曲面 ($0 \leq r \leq 6$)、 $\mathcal{L}$ を X 上の $(a; b_1, \dots, b_r)$ 型の可逆層 ($a, b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Z}, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r$) とし、 $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{-1}$ を X 上のイデアル層とする。このとき、任意の整数 n に対して、 $H^1(X, \bar{\mathcal{L}}(n)) = 0$ であるのは、次の表 1 の型となるのが必要十分条件である。ただし、 $X = \sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^8$ のときは、 $\mathcal{L}$ の型を (a, b) ($a \geq b$) とする。

Remark 1.2. $r = 6$ の場合について (i.e. すなわち $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 3 次曲面上の ACM な可逆層) は [8]、 $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるときの結果は [4] などを参照してください。

$r = 6$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r = 5$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{6,1})$	$(3m; m, m, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,1})$	$(3m; m, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,2})$	$(3m; m+1, m, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,2})$	$(3m; m+1, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,3})$	$(3m; m, m, m, m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,3})$	$(3m; m, m, m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,4})$	$(3m; m+1, m, m, m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,4})$	$(3m; m+1, m, m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,1})$	$(3m+1; m, m, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,1})$	$(3m+1; m, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,2})$	$(3m+1; m+1, m, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,2})$	$(3m+1; m+1, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,3})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,3})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,4})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,4})$	$(3m+2; m+1, m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$r = 4$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r = 3$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{4,1})$	$(3m; m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,1})$	$(3m; m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,2})$	$(3m; m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,2})$	$(3m; m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,3})$	$(3m; m, m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,3})$	$(3m; m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,4})$	$(3m; m+1, m, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,4})$	$(3m; m+1, m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,1})$	$(3m+1; m, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,1})$	$(3m+1; m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,2})$	$(3m+1; m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,2})$	$(3m+1; m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,3})$	$(3m+2; m+1, m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,3})$	$(3m+2; m+1, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,4})$	$(3m+2; m+1, m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,4})$	$(3m+2; m, m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$r = 2$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r = 1$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{2,1})$	$(3m; m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,1})$	$(3m; m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,2})$	$(3m; m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,2})$	$(3m; m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,3})$	$(3m; m, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,3})$	$(3m; m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,4})$	$(3m; m+1, m-1) \ (m \in \mathbb{Z})$		
$(B_{2,1})$	$(3m+1; m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{1,1})$	$(3m+1; m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{2,2})$	$(3m+1; m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{1,2})$	$(3m+1; m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{2,3})$	$(3m+1; m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$		
$(C_{2,1})$	$(3m+2; m+1, m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{1,1})$	$(3m+2; m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{2,2})$	$(3m+2; m+1, m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{1,2})$	$(3m+2; m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{2,3})$	$(3m+2; m, m) \ (m \in \mathbb{Z})$		
$r = 0$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$X = \sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{0,1})$	$(3m) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(D_{0,1})$	$(2m, 2m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{0,1})$	$(3m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(E_{0,1})$	$(2m+1, 2m) \ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{0,1})$	$(3m+2) \ (m \in \mathbb{Z})$	$(F_{0,1})$	$(2m+1, 2m+1) \ (m \in \mathbb{Z})$

表 1 ACM な可逆層の型

これらの型に分類することによって，Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の極小自由分解を構成する．まず，Del Pezzo 曲面の極小自由分解は次のようにかかる．

Theorem 1.3. [6] X を $\mathbb{P}^n$ 内の非退化な部分多様体で, $\dim X \geq 2$ かつ $\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ とする. X が ACM な射影多様体であるとき, X の極小自由分解は次のようになる.

$$0 \rightarrow S(-p-2) \rightarrow S(-p)^{\alpha_{p-1}} \rightarrow S(-(p-1))^{\alpha_{p-2}} \rightarrow \cdots \rightarrow S(-2)^{\alpha_1} \rightarrow S \rightarrow S_X \rightarrow 0.$$

ただし,

$$\alpha_i = i \binom{p}{i+1}_0 - \binom{p}{i-1}_0 \quad (\text{for } 1 \leq i \leq p-1)$$

であり, p は S_X の射影次元とする.

Del Pezzo 曲面は ACM 多様体であり, $\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ を満たす非退化非特異射影曲面であるから, 定理 1.3 が適用できる.

Theorem 1.4. (Mapping Cone [1],[2]) $\mathbf{F}_\bullet, \mathbf{G}_\bullet$ を複体とし, $\phi_i : F_i \rightarrow F_{i-1}, \psi_i : G_i \rightarrow G_{i-1}$ を *chain map* とする. $\gamma : F \rightarrow G$ とするとき複体 $\mathbf{H}_\bullet$ は次のように定義できる.

$$H_i := F_i \oplus G_{i+1}$$

とし,

$$\delta_i = \begin{pmatrix} -\phi_i & 0 \\ \gamma_i & \psi_{i+1} \end{pmatrix} : H_i \rightarrow H_{i-1}$$

この結果を用いて, $\bar{I}_C \subseteq S_X$ を S 加群として考え, 極小自由分解 $\mathbf{F}_\bullet$ を構成する. 次に, Del Pezzo 曲面 X 上の極小自由分解を $\mathbf{G}_\bullet$ とすることで, S_C の極小自由分解 $\mathbf{H}_\bullet$ を構成できる.

Example 1.5. X を $\mathbb{P}^{9-r}$ 内の $9-r$ 次 Del Pezzo 曲面とし, C を X 上の $A_{r,1}$ 型の因子とする. $I_C \subseteq S = k[x_0, \dots, x_{9-r}]$ としたとき, $S_C = S/I_C$ の極小自由分解は次のようになる.

1. $r = 6$ のとき

$$0 \rightarrow S(-(m+3)) \rightarrow S(-3) \oplus S(-m) \rightarrow S \rightarrow S_C \rightarrow 0..$$

ただし, $m \geq 1$ である.

2. $0 \leq r \leq 5$ のとき

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & & S(-(m+2)) & & & \\ & \longrightarrow & & S(-(p+2)) \oplus S(-(m+p))^{\alpha_{p-1}} & & & \\ & \longrightarrow & & S(-p)^{\alpha_{p-1}} \oplus S(-(m+p-1))^{\alpha_{p-2}} & & & \\ & \longrightarrow & & S(-(p-1))^{\alpha_{p-2}} \oplus S(-(m+p-2))^{\alpha_{p-3}} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & \longrightarrow & & S(-3)^{\alpha_2} \oplus S(-(m+2))^{\alpha_1} & & & \\ & \longrightarrow & & S(-2)^{\alpha_1} \oplus S(-m) & & & \\ & \longrightarrow & & S & & & \\ & \longrightarrow & & S_C & \longrightarrow & 0. & \end{array}$$

ただし, $m \geq 1$ である.

参考文献

- [1] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [2] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.
- [3] T. Fujita. *Classification Theory of Polarized Varieties*. Lecture note series. Cambridge University Press, 1990.
- [4] Salvatore Giuffrida and Renato Maggioni. On the resolution of a curve lying on a smooth cubic surface in $\mathbb{P}^3$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 331(1):181–201, 1992.
- [5] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer, 1977.
- [6] Le Tuan Hoa. On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3):241–250, 1993.
- [7] Le Tuan Hoa, Jürgen Stückrad, and Wolfgang Vogel. Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):203–231, 1991.
- [8] Masayuki WATANABE. On projective normality of space curves on a non-singular cubic surface in $\mathbb{P}^3$. *Tokyo Journal of Mathematics*, 04(2):331–341, 12 1981.

非一様電磁場中の単一荷電粒子に対する 量子論的数値解析

小坂 亘 及川 俊一 Poh Kam CHAN 亀井 恵斗

北海道大学大学院工学院

1 はじめに

電磁場中を運動する荷電粒子は、印加されている磁場と垂直な面内で回転運動（サイクロトロン運動）を行い、磁場の勾配や電場によってその回転中心が徐々にずれていく。このような荷電粒子について量子力学の観点から考える。すなわち、このサイクロトロン運動する荷電粒子について、非定常 Schrödinger 方程式を解くことを考える。一様磁場中や一様電磁場中の単一荷電粒子については解析的に解くことができる [1, 2]。しかし、一般的に、電磁場がある場合について、解析的に解くことは困難であることが多い。このようなとき、数値解析を用いて方程式を近似的に解くことが有効である。我々はすでに、一様電場 $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$ および非一様磁場 $\mathbf{B} = [0, B_0 y (1 - y/L_B)]$ 中の単一荷電粒子について、二次元非定常 Schrödinger 方程式を数値的に解き、荷電粒子の位置の分散 σ_r^2 、力学的運動量の分散 σ_p^2 が次式に従って時間発展することを得ている [2]。

$$\frac{d\sigma_r^2}{dt} = 4.014 \times \frac{\hbar v_0}{q B_0 L_B} \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_p^2}{dt} = 0.995 \times \frac{\hbar q B v_0}{L_B} \quad (2)$$

ここで、 y はデカルト座標系 (x, y, z) の y 座標、 t は時間、 q は荷電粒子の電荷、 B_0 は原点における磁場、 L_B は磁場の勾配長、 E_0 は電場、 v_0 は初期に粒子が持つ古典的な速さを示している。また、 $d\sigma_r^2/dt$ は荷電粒子の位置の分散の増加率であり、以下で位置の膨張率と呼ぶ。同様に、 $d\sigma_p^2/dt$ を力学的運動量の膨

張率と呼ぶ。この2式によって、磁場の勾配がある場合、時間とともに粒子の存在位置や運動の不確定性が増加していくことがわかる。また、磁場の勾配がない場合、すなわち $L_B \rightarrow \infty$ の場合はこれらの不確定性は時間とともに増加しないこともわかる。これは、電場と磁場がともに一様な場合の解析解から同じ結論が得られる。さらに、電場が含まれていないことから、一様電場では分散は時間発展しないことがわかる。しかしながら、一般には電場が一様であるというのは非常に限られた条件であり、非一様になった場合を考えることが必要である。本研究では、一次の勾配を持つ非一様な電場に対し、その荷電粒子の位置の膨張率、力学的運動量の膨張率はどのように時間発展するのかを調べた。

2 数値解析手法

電磁場中の単一荷電粒子についての非定常 Schrödinger 方程式は次式で与えられる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right] \psi \quad (3)$$

ここで、 $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ は位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ および時間 t を変数に持つ荷電粒子の波動関数、 $\hbar$ は換算プランク定数、 m は荷電粒子の質量、 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ はベクトルポテンシャル、 $V = V(\mathbf{r})$ はスカラーポテンシャルである。非一様電場および非一様磁場を与える、 $\mathbf{A}$ と V を次のように与えた。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[0, 0, -B_0 y \left(1 - \frac{y}{2L_B} \right) \right] \quad (4)$$

$$V(\mathbf{r}) = -E_0 y \left(1 - \frac{y}{2L_E}\right) \quad (5)$$

ここで、 L_B 、 L_E はそれぞれ磁場の勾配長、電場の勾配長と呼ばれる量であり、勾配の緩やかさを表現している。

初期の波動関数は次のようなガウス分布を仮定した。

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ell_B} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\ell_B^2} + i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right] \quad (6)$$

ここで、 ℓ_B は磁気長と呼ばれる量で、一様磁場中の荷電粒子に対する位置の標準偏差である。 $\mathbf{r}_0$ は初期における荷電粒子の古典的な位置であり、 $\mathbf{k}_0 = m\mathbf{v}_0/\hbar$ は初期波数である。

式 (3) を数値計算で解くにあたって、方程式内で用いられる変数について表 1 にある値で無次元化を行った。また、空間微分に関して中央差分法、時間積分に関して Crank-Nicolson 法を用いた。

得られた波動関数から位置の分散 $\sigma_r^2 = \langle \mathbf{r}^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle^2$ 、力学的運動量の分散 $\sigma_p^2 = \langle \mathbf{p}^2 \rangle - \langle \mathbf{p} \rangle^2$ を計算した。ただし、この力学的運動量の $\mathbf{p}$ とは $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla - q\mathbf{A}$ である。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は期待値の計算を示し、たとえば位置 $\mathbf{r}$ については、

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \mathbf{r} \psi d\mathbf{r} \quad (7)$$

で得られる。ただし、 ψ^* は ψ の複素共役を示す。

位置と力学的運動量の分散の時間発展を図 1、図 2 に示す。それぞれの図には、 B_0 や E_0 などの物理量の条件が同じで、 $L_B \rightarrow \infty$ すなわち一様磁場であるか、 $L_B = 10^4$ すなわち非一様磁場であるかのみ異なる、2 つの曲線がプロットされている。この両者はともに時間とともに振動している。ここで、最も分散が広がっているときに重要であると考え、この波のピークに注目する。磁場が一様でも非一様でも、その位置および力学的運動量の分散のピークは時間とともにわずかだが増加している。しかし、電場と磁場がともに一様のとき、どちらの分散も時間とともに変化しないことが解析的にわかっている。したがって、この増加は数値誤差である。この数値誤差

は非一様磁場かつ一様電場の場合にも、同程度含まれていると考えられる。この数値誤差を打ち消すため、式 (8) のように非一様磁場かつ一様電場の場合の分散と、一様磁場かつ一様電場の場合との分散の差 $\Delta\sigma_{\text{peak}}^2$ を取る。

$$\Delta\sigma_{\text{peak}}^2 = \sigma_{\text{peak.non-uniform}}^2 - \sigma_{\text{peak.uniform}}^2 \quad (8)$$

$\Delta\sigma_{\text{peak}}^2$ は時間に比例して増加し、その傾きが膨張率 $d\sigma_r^2/dt$ 、 $d\sigma_p^2/dt$ である。以上のように膨張率を得る操作を、非一様電場に対しても同様に行った。 L_E の値を 10^6 、 10^5 、 10^4 の 3 パターンについて、それぞれ B_0 や v_0 などの物理量が異なる場合の膨張率を計算し、式 (1)、式 (2) と比較した。

表 1: 規格化定数一覧

変数		規格化定数	単位
質量	m	1.6722×10^{-27}	kg
電荷	q	1.602×10^{-19}	C
速度	v	10	ms ⁻¹
磁束密度	B	10	T
電場	E	100	Vm ⁻¹
位置	r	1.0438×10^{-8}	m
時間	t	1.0438×10^{-9}	s
換算プランク定数	$\hbar$	1.7454×10^{-34}	Js

3 結果

図 3 および図 4 のそれぞれに、 E_0 、 B_0 、 L_E 、 L_B 、 v_0 の値が異なる場合の位置の膨張率 $d\sigma_r^2/dt$ 、力学的運動量の膨張率 $d\sigma_p^2/dt$ の計算結果をまとめた。いずれの条件の場合でも、膨張率の値は式 (1) および式 (2) にのるよう整理された。図中において、シンボルの違いは L_E の値の違いに相当し、 L_E の値のみが異なる条件同士ではすべて重なっている。 L_E が分散の時間発展に寄与するならば、式 (1) および式 (2) で示される直線から外れてプロットされるはずである。したがって、どちらの分散の時間発展も L_E に依存しないことが示された。

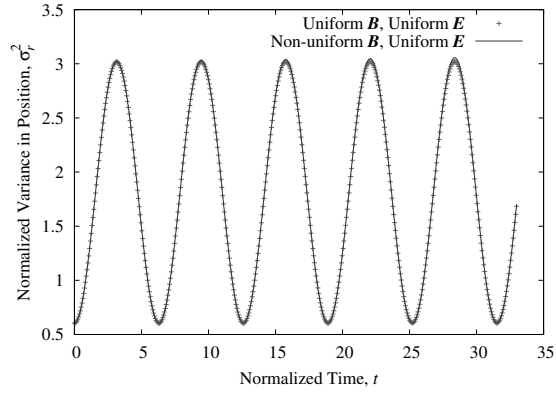


図 1: 位置の分散の時間発展。このとき、 $q = 1$ 、 $m = 1$ 、 $v_0 = 5$ 、 $E_0 = 10^{-4}$ 、 $B_0 = 1$ であり、Uniform B の場合は $L_B \rightarrow \infty$ 、Non-uniform B の場合は $L_B = 10^4$ である。

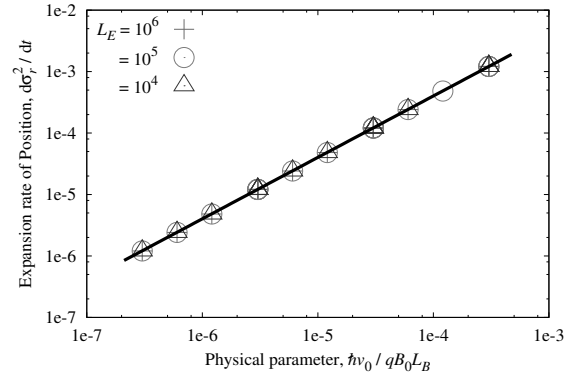


図 3: 位置の膨張率と物理量の組み合わせ $\hbar v_0 / q B_0 L_B$ の関係。図中の黒い実線は式 (1) を示し、3 パターンのシンボルの違いは L_E の値の違いに対応している。

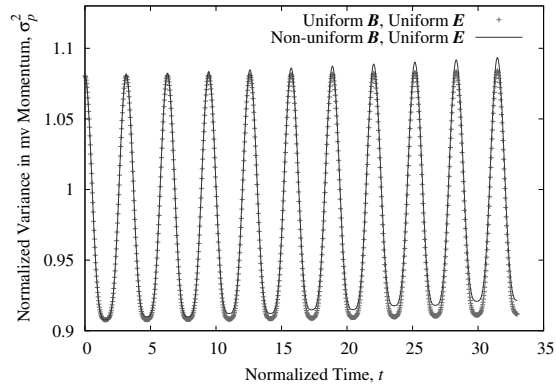


図 2: 力学的運動量の分散の時間発展。このとき、 $q = 1$ 、 $m = 1$ 、 $v_0 = 5$ 、 $E_0 = 10^{-4}$ 、 $B_0 = 1$ であり、Uniform B の場合は $L_B \rightarrow \infty$ 、Non-uniform B の場合は $L_B = 10^4$ である。

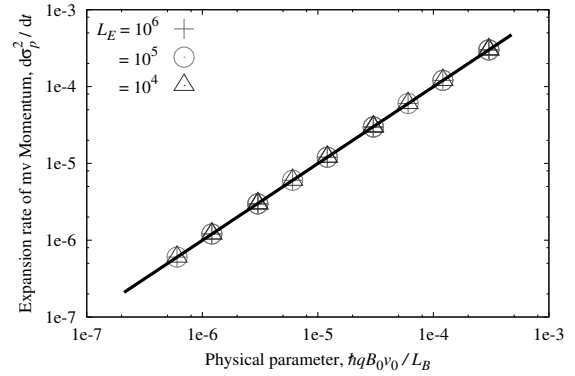


図 4: 力学的運動量の膨張率と物理量の組み合わせ $\hbar q B_0 v_0 / L_B$ の関係。図中の黒い実線は式 (2) を示し、3 パターンのシンボルの違いは L_E の値の違いに対応している。

4 まとめ

非一様な電磁場中を運動する単一荷電粒子について、二次元非定常 Schrödinger 方程式を数値的に解いた。そして、その荷電粒子の、位置および力学的運動量の分散の時間発展と電場の非一様性の関係を調べた。その結果、一次の傾きを持つ電場の場合、どちらの分散の時間発展においても、依存性はないことがわかった。

参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, 3rd ed., translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- [2] S. Oikawa, W. Kosaka and P. K. Chan, *Plasma Fusion Res*, **9**, 3401033 (2014).

Quantum Mechanical Diffusion of a Magnetized Particle in the Presence of a Field Particle in the Extended Gyration Cycle

Poh Kam CHAN and Wataru KOSAKA

Graduate School of Engineering, Hokkaido University, N-13, W-8, Sapporo 060-8628, Japan

Shun-ichi OIKAWA

Faculty of Engineering, Hokkaido University, N-13, W-8, Sapporo 060-8628, Japan

Abstract. We have developed a code to solve the two-dimensional time-dependent Schrödinger equation, for a magnetized proton in the presence of a fixed field particle and of a uniform magnetic field. In the relatively high-speed case, the fast-speed proton has the similar behaviors to those of classical theories. In the low-speed case the magnitudes both in mechanical momentum $mv = |m\mathbf{v}|$, where m is the mass and $\mathbf{v}$ is the velocity of the particle, and position $r = |\mathbf{r}|$ are appreciably decreasing with time. However, the kinetic energy $K = m\langle v^2 \rangle / 2$ and the potential energy $U = \langle qV \rangle$, where q is the electric charge of the particle and V is the scalar potential, do not show appreciable changes. This is because of the increasing variances, i.e. uncertainty, both in momentum and position. The increment in variance of momentum corresponds to the decrement in the magnitude of momentum: Part of energy is transferred from the directional (the kinetic) energy to the uncertainty (the zero-point) energy.

1 Introduction

We have shown in Ref. [1], that the quantum mechanical variance in position may reach the square of the interparticle separation in a time interval of the order of 10^{-4} sec for typical magnetically confined fusion plasmas with a number density of $n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ and a temperature of $T \sim 10 \text{ keV}$. After this time the wavefunctions of neighbouring particles would overlap, as a result the conventional classical analysis may lose its validity: Plasmas may behave like extremely-low-density liquids, not gases, since the *size* of each particle is of the same order of the interparticle separation.

In Refs. [2–4], we have also shown that for distant encounters in typical fusion plasmas of a temperature $T = 10 \text{ keV}$ and $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, the average potential energy $\langle U \rangle \sim 30 \text{ meV}$ is as small as the uncertainty in energy $\Delta E \sim 40 \text{ meV}$, and for a magnetic field $B \sim 3 \text{ T}$, the spatial size of the wavefunction in the plane perpendicular to the magnetic field is as large as the magnetic length $\ell_B \sim 10^{-8} \text{ m}$ which is much larger than the typical electron wavelength $\lambda_e \sim 10^{-11} \text{ m}$, and is around one-tenth of the average interparticle separation $\Delta \ell$.

2 Schrödinger Equation

We have solved the two-dimensional Schrödinger equation for a wavefunction ψ at position $\mathbf{r}$ and time t ,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \right] \psi, \quad (1)$$

where φ and $\mathbf{A}$ stand for the scalar and vector potentials, m and q the mass and electric charge of the particle under consideration, $i \equiv \sqrt{-1}$ the imaginary unit, and $\hbar = h/2\pi$ the reduced Planck constant. The initial condition for wavefunction at $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ with $\mathbf{r}_0$ being the initial centre of ψ , is given by

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ell_B} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2\ell_B^2} + i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right], \quad (2)$$

where the magnetic length ℓ_B is the initial standard deviation, and $\mathbf{k}_0 = m\mathbf{v}_0 / \hbar$ is the initial wavenumber vector. Here m is the mass of the particle under consideration, v_0 is the initial velocity of the corresponding classical particle.

By using the finite difference method in space with Crank-Nicolson scheme for the time integration, Eqs. (1) and (2) above become as

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2i\hbar} \mathbf{H}\right) \{\psi^{n+1}\} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2i\hbar} \mathbf{H}\right) \{\psi^n\}, \quad (3)$$

where $\mathbf{I}$ is a unit matrix, $\mathbf{H}$ the numerical Hamiltonian matrix, and $\{\psi^n\}$ stands for the discretized set of the two dimensional time-dependent wavefunction $\psi(x, y, t)$ at a discrete time $t_n = n\Delta t$ to be solved numerically.

We use successive over relaxation (SOR) scheme for time integration in our numerical calculation. Calculation is done on a GPU (Nvidia GTX-580: 512cores/3GB @1.54GHz) [1-6].

2.1 Electrostatic potential due to a field particle

Here we have assumed that the field particle is a quantum-mechanical particle centred at the origin with the wavefunction ψ_f similar to that given in Eq. (3), but is fixed in space and time, as

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\ell_B^2}\right)}{\sqrt{\pi}\ell_B} \times \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)}{\sqrt{\pi}\sigma_z}$$

where σ_z^2 is the variance in position in z -direction. In magnetically confined fusion plasmas, $\sigma_z \sim \hbar / mv_0 \ll \ell_B$ holds, so that the square of the second factor can be approximately the same as a Dirac delta function $\delta(z)$ centred at $z=0$. Thus the electrostatic potential ϕ_f in the x - y plane, due to the distributed charge is given by

$$\phi_f(R) \simeq \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0\ell_B^2} \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{R' e^{-(R'/\ell_B)^2}}{R+R'} K(M) dR',$$

where $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, q_f is an electric charge of the field particle, ϵ_0 is the vacuum permittivity, and $K(M)$ is the complete elliptic integral of the first kind with the parameter M being defined as $M \equiv 4RR'/(R+R')^2$ [8].

3 Numerical Results

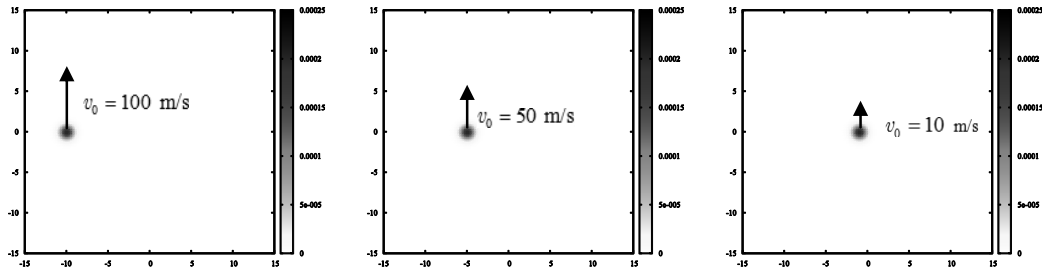
In our numerical calculation, we normalized the following parameters for analysis, as listed in Table 1. Lengths are normalized by cyclotron radius of a proton with a speed of 10 m/s in a magnetic field of 10 T. The cyclotron frequency in such a case is used for normalization of the time.

The magnetic length for a proton in $B=10$ T, $\ell_B \equiv \sqrt{\hbar/eB} \sim 10^{-8}$ m is a measure for the spread of a wave function in the plane perpendicular to the magnetic field. With these normalization, Planck constant $\hbar \sim 0.60$, initial uncertainty in position $\ell_B^2 \equiv \hbar/eB \sim 0.78^2$ and initial uncertainty in kinetic momentum $(3/2)\hbar eB \sim 0.91$ are order of unity. Note that the kinetic energy of a classical proton speed $v_0 \sim 27$ m/s in $B=10$ T corresponds to the uncertainty of the momentum. In the numerical results to be presented in the following subsections, the Schrödinger Equation is solved for the time duration of fifty cyclotron rotations by a proton.

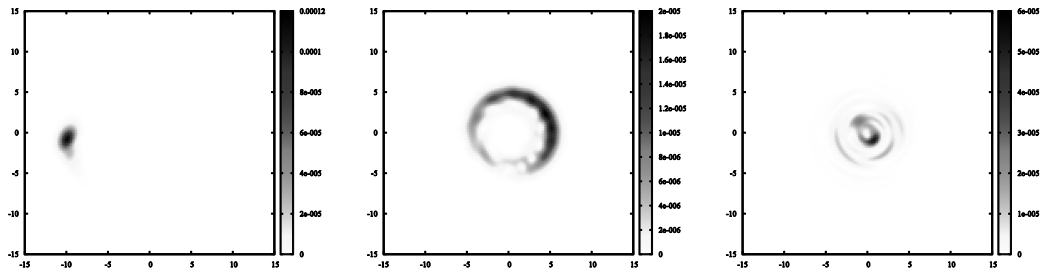
For low-speed case, $v_0 = 50$ m/s and $v_0 = 10$ m/s, initially the Probability Distribution Function (PDF) is a circular shape and changes to elongated shape at second gyration. This phenomenon extended further for each gyration. Eventually at the 40th gyration, the PDF of the particle tends to have almost uniformly distributes along the classical cyclotron orbit, as shown in Fig. 1, in which the width of the distribution is nearly the magnetic length of $\ell_B = \sqrt{\hbar/qB}$ as shown in Fig. 2.

Table 1 Normalized parameter for mass of the particle, charge, magnetic flux density, velocity, length and time.

Parameters	Normalization
Mass of the particle	$m = 1.6722 \times 10^{-27}$ kg
Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$ C
Magnetic flux density	$B = 10$ T
Velocity	$\bar{v} = 10$ m/s
Length	$\bar{\rho} = 1.04382 \times 10^{-8}$ m
Time	$\bar{t} = 1.04382 \times 10^{-9}$ s



Initial speed $v_0 = 100$ m/s Initial speed $v_0 = 50$ m/s Initial speed $v_0 = 10$ m/s
Fig. 1. Initial condition ($t = 0$) of Probability Density Function (PDF) of a single charged particle, in the presence of a fixed field particle at the origin.



Initial speed $v_0 = 100$ m/s Initial speed $v_0 = 50$ m/s Initial speed $v_0 = 10$ m/s
Fig. 2. The PDF of a single charged particle, in the presence of a fixed field particle at the origin, after 40 gyrations.

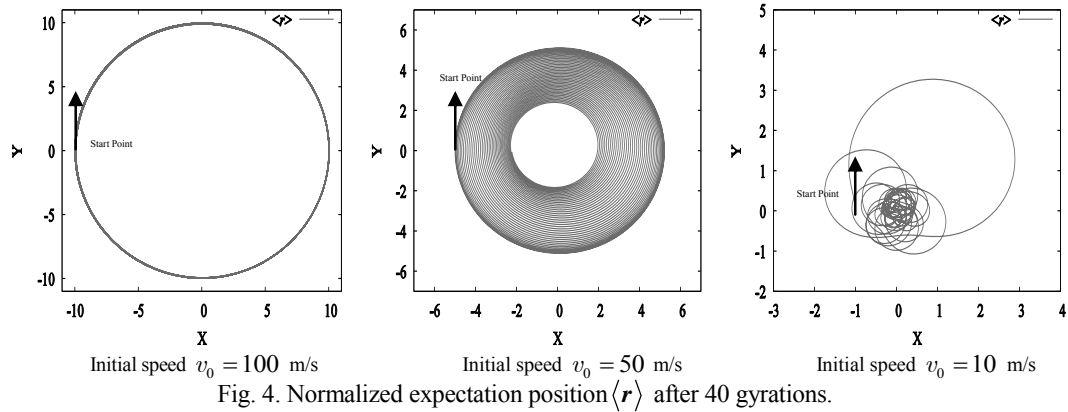
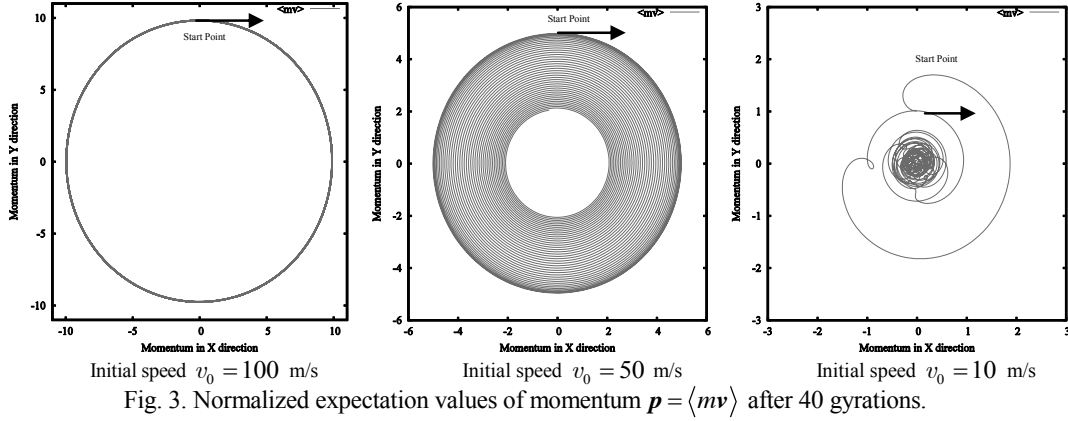
4 Summary

We have solved the two-dimensional time-dependent Schrödinger Equation for a magnetized proton in the presence of a fixed field particle with an electric charge of $2 \times 10^{-5} e$ and of a uniform magnetic field of $B = 10$ T. In the relatively high-speed case of $v_0 = 100$ m/s, the behaviours are similar to those of classical ones. However, in the low-speed case of $v_0 = 50$ m/s and $v_0 = 10$ m/s, the magnitudes both in momentum $mv = |m\mathbf{v}|$ and position $r = |\mathbf{r}|$ are appreciably decreasing with time as shown in Fig 3 and Fig 4. The kinetic energy $K = m \langle \mathbf{v}^2 \rangle / 2$

and the potential energy $U = \langle qV \rangle$ do not show appreciable changes except for a small amplitude oscillation, because of the increasing variances, i.e. uncertainty, both in momentum and position.

The increment in variance of momentum corresponds to the decrement in the magnitude of momentum: Part of energy is transferred from the directional (the kinetic) energy to the uncertainty (the zero-point) energy.

In summary, quantum-mechanical analyses are necessary for slow particles with mass m and charge q in the presence of magnetic field B , whose kinetic energy K is of the order of $\hbar q B / 2m$.



Acknowledgements

The authors would like to thank Prof. Y. Matsumoto and Prof. M. Itagaki for their fruitful discussions on the subject. Part of the SOR coding for a GPU was done by Dr. R. Ueda. This research was partially supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research (C), 21560061.

References

- [1] S. Oikawa, T. Shimazaki and E. Okubo, Plasma Fusion Res. **6**, 2401058 (2011).
- [2] S. Oikawa, T. Oiwa and T. Shimazaki, Plasma Fusion Res. **5**, S1050 (2010).
- [3] S. Oikawa, T. Oiwa and T. Shimazaki, Plasma Fusion Res. **5**, S2024 (2010).
- [4] S. Oikawa, T. Shimazaki and T. Oiwa, Plasma Fusion Res. **5**, S2025 (2010).
- [5] S. Oikawa, E. Okubo and P.K. Chan, Plasma Fusion Res. **7**, 2401106 (2012).
- [6] P.K. Chan, S. Oikawa, and E. Okubo, Plasma Fusion Res. **7**, 2401034 (2012).
- [7] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory, 3rd ed., translated from the Russian by J.B. Sykes and J.S. Bell (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- [8] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, 1965).

Holonomic modules associated with multivariate normal probabilities of polyhedra

小山 民雄 (東京大学 情報理工)

1 はじめに

ホロノミック勾配法は [3] において提案された, 数式処理を利用した数値計算の手法である. この手法では, 評価したい関数の満たす微分方程式を利用して数値計算を行う. 統計学に現れる様々な正規化定数や領域確率はパラメータの関数と見なすことができるので, その数値計算へのホロノミック勾配法の応用が期待される.

d 次元ユークリッド空間の有限個の半空間の共通部分として表される領域を多面体領域と呼ぶ. すなわち, 集合 $P \subset \mathbf{R}^d$ が多面体領域であるとは, 適当な実数 a_{ij}, b_j により $P := \{x \in \mathbf{R}^d : \sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j \geq 0 (1 \leq j \leq n)\}$ と書けることを言う. 多変量正規分布に従う確率ベクトル X が領域 P に値をとる確率を多面体領域の正規確率と呼ぶ. この確率を数値的に評価することは, 統計学の応用において重要とされている [2].

本研究では, 多面体領域の正規確率の数値計算にホロノミック勾配法を応用する際に必要となるホロノミック系と Pfaffian 系の明示的な表示を与えた.

2 数値計算の対象となる関数

多面体領域の正規確率の数値計算は, パラメータを適当に変換することにより, 標準正規分布の場合に帰着される. そこで, $(\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_j) \in \mathbf{R}^{d \times n} \times \mathbf{R}^n$ のある近傍 U で定義される関数

$$\varphi(a, b) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2\right) \prod_{j=1}^n H\left(\sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j\right) dx \quad (1)$$

について考える. ここで, $H(x)$ は Heaviside 関数で, $(a_{ij}, b_j) \in U$ とする. 多面体領域 P の facet を $F_1, \dots, F_n$ で表すことにし, $\mathcal{F} := \left\{J \subset [n] : \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset\right\}$ を P に付随する abstract simplicial complex と呼ぶことにする. 多面体領域 P が一般の位置にあるという仮定の下で, 上の式の被積分関数に現れる Heaviside 関数の積は, $(\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_j)$ の近傍で, x の関数として

$$\prod_{j=1}^n H\left(\sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j\right) = \sum_{J \in \mathcal{F}} \prod_{j \in J} \left(H\left(\sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j\right) - 1\right) \quad (2)$$

と分解されることが示せる [1]. この等式により, 式 (1) の積分は多面体領域の正規確率は,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2\right) \sum_{J \in \mathcal{F}} \prod_{j \in J} \left(H\left(\sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j\right) - 1\right) dx \quad (3)$$

と書き表すことが出来る．ここで, $H(x)$ は Heaviside 関数である．この式の右辺の各項が実解析関数であることを示すことが出来る．従って, この表示により, 式 (1) で定義される関数は領域

$$\{(a, b) \in \mathbf{C}^{d \times n} \times \mathbf{C}^n : \alpha_F(a) \neq 0 (F \in \mathcal{F})\}$$

に解析接続されることが分かる．ここで, $\alpha_F(a) := \left(\sum_{k=1}^d a_{ki} a_{kj} \right)_{i,j \in F}$ である．そこで, 式 (3) で定義される関数について注目することにする．

3 主結果

式 (3) の被積分関数の満たす holonomic module の積分加群を計算することにより, 次の定理を得る．

Theorem 1. 式 (3) で定義される関数を $g(a, b)$ とおく．集合 $J \subset [n]$ に対し, $g^J := \left(\prod_{j \in J} \partial_{b_j} \right) g$ とおくと, $(g^J)_{J \in \mathcal{F}}$ は次の微分方程式を満たす．

$$\left(\partial_{a_{ij}} - \sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_{b_k} \partial_{b_j} \right) g^J = 0 \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \quad (4)$$

$$\partial_{b_j} g^J - g^{J \cup \{j\}} = 0 \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \quad (5)$$

$$(b_j + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d a_{ij} a_{ik} \partial_{b_k}) g^J = 0 \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}), \quad (6)$$

$$g^J = 0 \quad (J \notin \mathcal{F}). \quad (7)$$

さらに, この微分方程式系が定める左 D 加群 M は holonomic module で, その holonomic rank は P の空でない面の個数に等しい．

さらに M の holonomic rank と Pfaffian 系は次で与えられる．

Theorem 2. holonomic module M の holonomic rank は多面体領域 P の空でない面の個数に等しい．すなわち, $\text{rank}(M) = |\mathcal{F}|$ が成り立つ．また, M に付随する Pfaffian 系は

$$\partial_{a_{ij}} g^J = \sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_{b_k} \partial_{b_j} g^J \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \quad (8)$$

$$\partial_{b_j} g^J = g^{J \cup \{j\}} \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \quad (9)$$

$$\partial_{b_j} g^F = - \sum_{k \in F} \alpha_F^{jk}(a) \left(b_k g^J + \sum_{\ell \in F^c} \alpha_{k\ell}(a) g^{J \cup k} \right) \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}). \quad (10)$$

により与えられる．ここで, $(\alpha_F^{ij}(a))_{i,j \in F}$ は $\alpha_F(a)$ の逆行列である．

4 証明の概要

式 (2) の右辺を g とおく。さらに、集合 $J \subset [n]$ に対し、 $g^J := \left(\prod_{j \in J} \partial_{b_j} \right) g$ とおくと、 $(g^J)_{J \in \mathcal{F}}$ は佐藤超関数として次の微分方程式を満たす。

$$\partial_{x_i} g^J = \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_{b_j} g^J \quad (1 \leq i \leq d, J \in \mathcal{F}), \quad (11)$$

$$\partial_{a_{ij}} g^J = x_i \partial_{b_j} g^J \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \quad (12)$$

$$\partial_{b_j} g^J = g^{J \cup \{j\}} \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \quad (13)$$

$$f_j g^J = 0 \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}). \quad (14)$$

多項式係数の微分作用素環 $D_{abx} := \mathbf{C}\langle a_{ij}, b_k, x_\ell, \partial_{a_{ij}}, \partial_{b_k}, \partial_{x_\ell} \rangle$ を考える。上の微分方程式系に自然な形に対応する D_{abx} -加群は、 $M_\chi := (\sum_{J \in \mathcal{F}} D_{abx} g^J) / N_\chi$ で与えられる。ここで g^J は不定元を表し、 N_χ は

$$\left(\partial_{x_i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_{b_j} \right) g^J \quad (1 \leq i \leq d, J \in \mathcal{F}), \quad (15)$$

$$(\partial_{a_{ij}} - x_i \partial_{b_j}) g^J \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \quad (16)$$

$$\partial_{b_j} g^J - g^{J \cup \{j\}} \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \quad (17)$$

$$f_j g^J, \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}). \quad (18)$$

で生成される $\sum_{J \in \mathcal{F}} D_{abx} g^J$ の部分 D_{abx} 加群である。特性多様体の次元を評価することにより、 M_χ はホロノミックであることが示せる。

微分作用素

$$\left(x_i + \partial_{x_i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_{b_j} \right) g^J \quad (1 \leq i \leq d, J \in \mathcal{F})$$

及び、(16),(17),(18) で生成される加群を N_q とおくと、 M_χ がホロノミックであることから、 $M_q := (\sum_{J \in \mathcal{F}} D_{abx} g^J) / N_q$ もホロノミックであることが従う。加群 M_q は、関数

$$\left(\prod_{j \in J} \partial_{b_j} \right) \bullet \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \sum_{J \in \mathcal{F}} \prod_{J \in F} \left(H \left(\sum_{i=1}^d a_{ij} x_i + b_j \right) - 1 \right) \quad (J \in \mathcal{F})$$

の満たす微分方程式系に対応する。

加群 M_q の変数 x_i に関する積分加群 $M_q / \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} M_q$ を計算すると、次を得る。すなわち、微分作用素環 $D_{ab} := \mathbf{C}\langle a_{ij}, b_k, \partial_{a_{ij}}, \partial_{b_k} \rangle$ を考える。自由 D_{ab} -加群 $\sum_{J \in \mathcal{F}} D_{ab} g^J$ の元

$$\left(\partial_{a_{ij}} - \sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_{b_k} \partial_{b_j} \right) g^J \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \quad (19)$$

$$\partial_{b_j} g^J - g^{J \cup \{j\}} \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \quad (20)$$

$$(b_j + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d a_{ij} a_{ik} \partial_{b_k}) g^J \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}). \quad (21)$$

が生成する部分加群を N とおくと、商加群 $M := \sum_{J \in \mathcal{F}} D_{ab} g^J / N$ は積分加群 $M_q / \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} M_q$ と同型である。特に、ホロノミック加群の積分加群は再びホロノミックになるから、 M はホロノミックである。

加群 M を線形微分方程式系と見なした時、関数

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \prod_{J \in \mathcal{F}} \left(H \left(\sum_{i=1}^d a_{ij} x_i + b_j \right) - 1 \right) dx \quad (J \in \mathcal{F})$$

は $|\mathcal{F}|$ 個の一次独立な解となる。このことから、 M のホロノミックランクは $|\mathcal{F}|$ 以上であることが従う。また、Pfaffian 系を具体的に構成することにより、 $\mathbf{C}(a, b) \otimes M$ が $g^J (J \in \mathcal{F})$ で張られることが言えるので、 M のホロノミックランクは $|\mathcal{F}|$ で上から抑えられることも言える。

References

- [1] T. Koyama, Holonomic modules associated with multivariate normal probabilities of polyhedra <http://arxiv.org/abs/1311.6905>, 2013, to appear in Funkcialaj Ekvacioj.
- [2] D. Q. Naiman and H. P. Wynn. Abstract tubes, improved inclusion-exclusion identities and inequalities and importance sampling. *The Annals of Statistics*, 25(5):1954–1983, 1997.
- [3] H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama, and A. Takemura. Holonomic gradient descent and its application to the Fisher-Bingham integral. *Advances in Applied Mathematics*, 47:639–658, 2011.

重みを考慮した不完全投影データからの CT 再構成法

北海道大学大学院工学院量子理工学専攻 栗田紘大

1. はじめに

CT は周方向からの投影データを基に、内部分布を求める方法であり、非破壊計測法の 1 つとして広く用いられている。一般に投影データは全周方向に対して得られるが、一部の方向からの投影データが得られない場合もある。例えば、干渉法と CT を組み合わせて屈折率分布を求める場合には、ミラーの配置の制約により図 1 のハッチング部のように全周方向のうち約半分の方向からの連続データしか得られない。この不完全投影データから再構成した分布はぼやけたものになる。そのような条件下を想定し、図 1 の $\theta=90^\circ$ のような新たに一つ入射ビームを加えることを考える。新たな入射ビームはビームが最も届きにくい方向から入射させ、重みを持たせることにより投影データが得られない角度域のビームをカバーさせれば、より鮮明な再構成分布が得られることが予想できる。このことを示すためシミュレーションを行った。

CT の再構成法は解析的手法、代数的手法が知られている[1]。解析的手法はフーリエ解析に基づく手法

である。これは、「実空間の分布 $f(x, y)$ の円柱座標系における 2 次元フーリエ変換 $F_f(d, \theta)$ は、 $f(x, y)$ を角度 θ の投影データ $X(r, \theta)$ を 1 次フーリエ変換した関数 $F_g(d, \theta)$ と等しい」とする投影切断面定に従う。解析的手法では、「投影データは角度方向について等間隔でかつ十分密にサンプリングされている」という条件が必要であり、投影角度が限定されている場合や投影角度のサンプリングが疎である場合は再構成できない[1]。代数的手法は、順問題と逆問題にフィードバックをかけながら繰り返し解くことで、目的とする測定対象に近づける手法である。この手法は、サンプリングデータが不完全であっても致命的なアーチファクトが発生しなく、雑音に強いなどの利点を持つ [2]。

本研究においては入射角が制限された不完全投影データを取り扱うため、代数的手法である逐次近似法を使用することにした。

2. 重み付き CT 再構成

本研究では元の測定対象の分布を $x-y$ 平面で表し、値は屈折率とする。また、順問題を解いた後に得られるグラフを **sinogram** と呼び、 $\theta-\xi$ で表す。ただし θ は光の入射角度[°]、 ξ はセンサーの位置[pixel]である。

2. 1 順解析

順解析では既知の内部分布 $f(x, y)$ の投影データとして、その光路 l に沿った積分である $X(\xi, \theta)$ を求める計算である。元の測定対象である $x-y$ 平面分布にある角度 θ_k から光が入射したものとし、その光路の積分を ξ 軸上に与える。

離散系では、 $x-y$ 平面分布を 1×1 の画素の集合

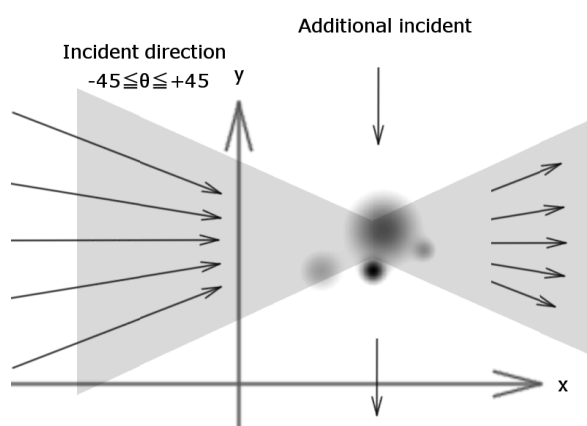


図 1 角度入射制限の概要図

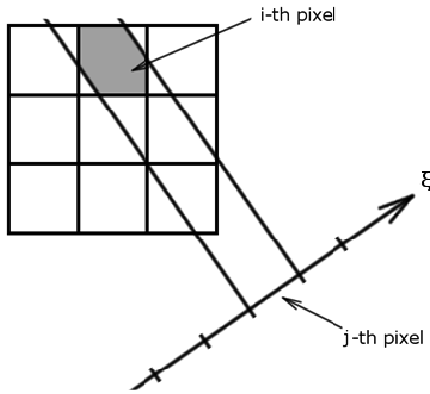


図2 i と j の関係

とみなし、それぞれの配列に屈折率 f_i の値を持つもの
と考える。ただし、 f_i は $x-y$ 平面分布の配列である。
また、センサーの位置 ξ も単位は pixel としている。
したがって、積分計算は以下の式で与えられる。

$$X_{j,k} = \sum_j \sum_{i \in L_{j,k}} a_{i,j,k} f_i \quad (1)$$

ただし $X_{j,k}$ は ξ 方向の配列であり、 $a_{i,j,k}$ は図2のハ
ッチング部分のように面積1の画素 i を角度 θ_k で ξ_j に
投影される幅1ピクセルのビーム $L_{j,k}$ が占める面積で
ある。

2.2 逆解析

逆解析は順解析で得られた $X_{j,k}$ を、順解析で通った
光路に沿って $x-y$ 平面分布に与える過程である。計
算は以下の式で与える。

$$f_j = \frac{\sum_k \sum_j a_{i,j,k} X_{j,k}}{N_k \cdot \sum_{i \in L_{j,k}} l_{j,k}} w_k \quad (2)$$

全体を k の個数 N_k で割っているのは再構成の整
合性を取るためである。また、光路 j の長さ l_k で割っ
ているのは再構成の整合性をとるためである。さら
に、特定方向 θ_k からの投影データ $X_{j,k}$ の再構成に対す
る重みを w_k で与えている。

2.3 再構成アルゴリズム

再構成アルゴリズムは逐次近似逆投影法を使用す
る。逐次近似逆投影法は以下の手順で行う。

- (i) $X_{j,k}^{(0)}$ (測定値)、 $f^{(0)} = B\{X_{j,k}^{(0)}\}$
- (ii) 投影 $X_{j,k}^{(m)} = F\{f_j^{(m-1)}\}$
- (iii) 投影データの規格化 $\widehat{X_{j,k}^{(m)}} = X_{j,k}^{(m)} / X_{j,k}^{(0)}$
- (iv) 比の逆投影 $\widehat{f_j^{(m)}} = B\{\widehat{X_{j,k}^{(m)}}\}$
- (v) $x-y$ 平面分布の更新 $f_j^{(m)} = \widehat{f_j^{(m)}} \cdot f_j^{(m-1)}$

ただし、 B は逆解析、 F は順問題、 $f_j^{(m)}$ は繰り返し m 回
目の $x-y$ 平面分布、 $X_{j,k}^{(m)}$ は繰り返し m 回目の
sinogram である。

一般的な逐次近似法の手順を説明する。まず $x-y$
平面分布を仮定し投影データを求め、その投影デー
タと収集された実測投影データが一致した場合、正
しいものとする。一方、仮定分布の正変換の結果が
実測投影データよりも小さい場合には $x-y$ 平面分
布の画素を上昇させていき、逆に正変換の結果が実測
投影データより大きい場合には $x-y$ 平面分布の画
素を小さくする。ここでの画素ごとの実測投影デー
タより大きいのか小さいかの判断は、画素ごとの差に
よって判断している。しかし当アルゴリズムでは手
順(iii)投影データ比で示している通り、商によって判
断している。このことによって、一般的な逐次近似
法よりも結果の収束が早まる結果となっている。ま
た、この繰り返し回数は経験的に決められることが
多い[3]。

この手法は手順(v)で示しているように $f_j^{(m-1)}$ に
 $\widehat{f_j^{(m)}}$ 係数をかけることで $x-y$ 平面分布を更新するた
め、最初の仮定断面を0から始めることはできな
い。一般的に逐次近似法ではそのため適当な一様分
布から出発することが多い。そのため繰り返し回数
が少ないと画素内での最小値と最大値の差があまり
出なく、コントラストの低い画像になってしまう。

しかし今回開発したプログラムでは収束をより早めるために一様分布ではなく、手順(ii)のように測定値に逆変換を施した $f^{(0)} = B\{X_{j,k}^{(0)}\}$ から開始している。

このため少ない繰り返し回数であっても高いコントラストの画像を生成することができる。

3. 重み付き CT 再構成の評価

再構成アルゴリズムの妥当性の評価のために、図3のような既知の分布に対する投影データを作成し、その再構成のシミュレーションを行った。投影データは、(a) 全周方向からの投影データ（完全投影データ）と、(b) 図1のハッチングのような不完全投影データと、(c) 不完全投影データ(b)に1方向からの投影データを追加したものを用意した。(a),(b),(c)それぞれアルゴリズムを6回適用させた後の分布を図4,5,6に示す。

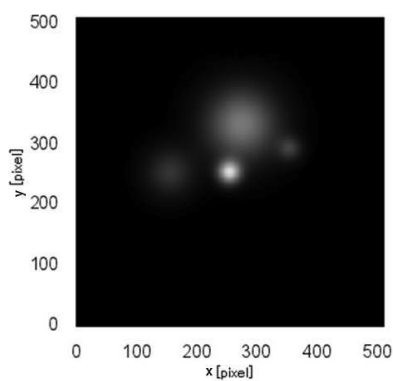


図3 真の内部分布

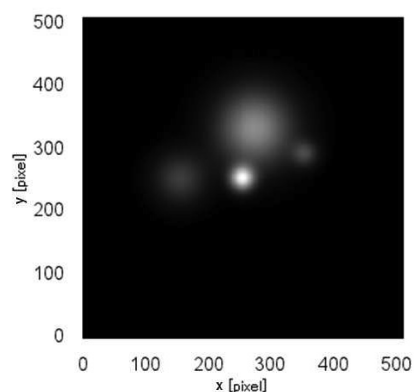
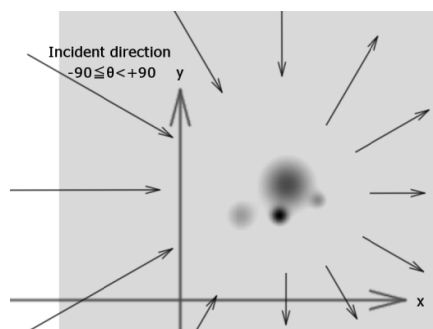


図4 完全投影データの再構成の分布

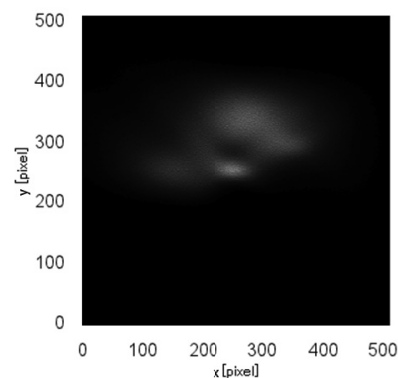
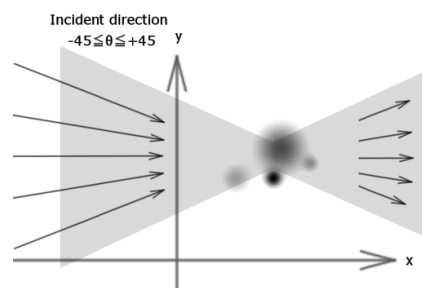


図5 不完全投影データの再構成の分布

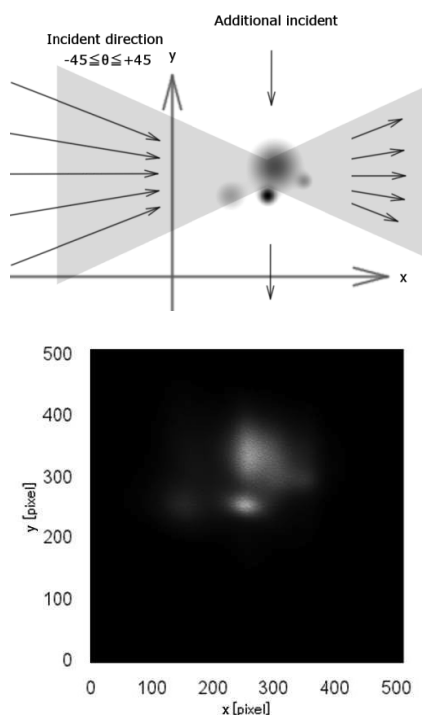


図 6 不完全投影データ(b)に 1 方向からの投影データを追加したものの再構成後の分布

シミュレーションの結果として、(a) の完全投影データの場合が最も分布の誤差が少なく、(c) の不完全投影データ(b)に 1 方向からの投影データを追加したものが次いで分布の誤差が少なく、(b) の不完全投影データの場合が最も分布の誤差が大きくなったことがわかった。このことから、新たな入射ビームによってより鮮明な再構成分布が得られることがわかった。

4. 結論

CT において一部の方向からの投影データが得られなかった場合、新たに一つ入射ビームを加える事で鮮明な再構成分布が得られることを示すことができた。

参考文献

- [1] Hiroshi URABE, Kotoko MORIKAWA, Koichi OGAWA: Comparison of Iterative Image Reconstruction Methods in Single Photon Emission CT, Med Imag Tech 18(1) ,

84-93,2000

- [2] 尾川 浩一: ECT における反復的画像再構成,日本放射線技術学会雑誌 56, p.890, 2000

- [3] 久保 直樹: フィルタ補正逆投影法・逐次近似法について, START 48, 13-15, 2012

吸脱着を持つ一次元非対称単純排他過程の動力学について

東京大学大学院 工学系研究科 一木 信吾
東京大学 先端科学技術研究センター 西成 活裕

概要

一次元非対称単純排他過程 (TASEP) とは、一次元格子上市を体積排除の効果を持つ多数の粒子が相互作用しながら非対称に移動する簡単なモデルである。このモデルは、車や生物などの自己駆動粒子の流れの解析において広く用いられている [1]。ここではさらに途中の格子が空いている場合にはある確率で粒子が吸着し、格子が粒子で埋まっている場合にはある確率で脱着するようなメカニズム (Langmuir Kinetics) を加えたモデル (TASEP-LK) の動力学について考察を行う。

1 TASEP-LK の定常状態

TASEP-LK の定常状態については M. R. Evans et al. で研究されている [2]。彼らの論文では前方のセルが状態 0 のときは、確率 1 で前方に進むと仮定しているが、ここでは一般化して確率 p で前方に進むものとしてまとめる。

ここでは、セル数が N の 1 次元開放系を考える。各セルは、0 または 1 を取ることにする。各セルの状態変数を τ_i とすると以下のとおりである。

$$\tau_i = 0 \quad \text{or} \quad 1.$$

もし前方のセルが 0 であれば確率 p で前方のセルへ移ることができるとする。さらに、セルが 0 のとき、確率 ω_A で 1 に変わり、セルが 1 のとき確率 ω_D で 0 に変わるものとする。このとき、 ω_A は吸着、 ω_D は脱着を表していると考えることができる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \xrightarrow{p} & 0 & 1. \\ * & 0 & \xrightarrow{\omega_A} & * & 1. \\ 1 & * & \xrightarrow{\omega_D} & 0 & *. \end{array}$$

さらに、境界部分には他と異なる仮定を置く。一番左のセルは、確率 α で 0 から 1 へ変化するとし、確率 ω_A は考えないこととする。

$$0 \xrightarrow{\alpha} 1.$$

一番右のセルは、確率 β で 1 から 0 へ変化するとし、確率 ω_D は考えないこととする。

$$1 \xrightarrow{\beta} 0.$$

セル i ($1 < i < N$) の平均的な状態確率密度 $\langle \tau_i \rangle$ の時間変化は以下のとおり表すことができる。ただし、 $\langle \cdot \rangle$ はある

分布における期待値を表す。

$$\frac{\partial \langle \tau_i \rangle}{\partial t} = p \langle \tau_{i-1}(1 - \tau_i) \rangle - p \langle \tau_i(1 - \tau_{i+1}) \rangle + \omega_A \langle 1 - \tau_i \rangle - \omega_D \langle \tau_i \rangle. \quad (1)$$

また、境界では以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tau_1 \rangle}{\partial t} &= -p \langle \tau_1(1 - \tau_2) \rangle + \alpha \langle 1 - \tau_1 \rangle - \omega_D \langle \tau_1 \rangle. \\ \frac{\partial \langle \tau_N \rangle}{\partial t} &= p \langle \tau_{N-1}(1 - \tau_N) \rangle + \omega_A \langle 1 - \tau_N \rangle - \beta \langle \tau_N \rangle. \end{aligned}$$

N を大きくとり、平均場近似を行う。つまり、 $\langle \tau_i(1 - \tau_{i+1}) \rangle$ を $\langle \tau_{i-1} \rangle (1 - \langle \tau_i \rangle)$ と置き換えて次の式を用いる。

$$\langle \tau_{i\pm 1} \rangle = \rho(x) \pm \frac{1}{N} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \dots$$

(1) は以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -p(1 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega_D N(K - \rho(K + 1)).$$

ただし、 $\tau = \frac{t}{N}$ 及び $K = \frac{\omega_A}{\omega_D}$ とした。ここで得られた偏微分方程式は良く知られた形をしているので以下のことがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= p(1 - 2\rho). \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= \omega_D N(K - (K + 1)\rho). \end{aligned}$$

$K = 1$ すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= -p(1 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega N(1 - 2\rho). \\ \frac{dx}{d\tau} &= p(1 - 2\rho). \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= \omega N(1 - 2\rho). \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $\omega = \omega_A = \omega_D$ とした。

さらに、定常状態の下でこの式を解く。つまり、(2) を次のように考える。

$$0 = (1 - 2\rho)(\omega N - p \frac{\partial \rho}{\partial x}).$$

これは簡単に解くことができ、 $\rho = \frac{1}{2}$, $\frac{\omega N}{p} x$ となる。

このモデルは、領域 $\alpha < \frac{1}{2}p$, $\beta < \frac{1}{2}p$ の一部で衝撃波が発生することが知られている。ここで言う衝撃波は一次元サイトの状態 1 の密度差が不連続になる点のことを言う。また、衝撃波の速さ v は以下になることが知られている。

$$v = \frac{\rho_r(1 - \rho_r) - \rho_l(1 - \rho_l)}{\rho_r - \rho_l} = 1 - \rho_l - \rho_r.$$

ただし、ここではセルの左側の密度を ρ_l 、右側の密度を ρ_r とした。定常状態では衝撃波の速さは 0 になるので $\rho_r = 1 - \rho_l$ という等式が成り立つことがわかる。

次に、衝撃波の位置を求める。(2) を x について両側から解く。(2) は、

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{p}{\omega N},$$

となるので、

$$\begin{aligned} x &= \int_{\alpha}^{\rho_l(x)} \frac{p}{\omega N} d\rho, \\ &= \frac{p}{\omega N} (\rho_l(x) - \alpha), \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} 1 - x &= \int_{\rho_r(x)}^{1-\beta} \frac{p}{\omega N} d\rho, \\ &= \frac{p}{\omega N} (1 - \beta - \rho_r(x)), \end{aligned}$$

となる。衝撃波の位置 x_{SW} を求めるため、これらの式と $\rho_r = 1 - \rho_l$ を用いて x について解くと、

$$x_{SW} = \frac{p(\beta - \alpha)}{2\omega N} + \frac{1}{2},$$

が得られる。境界の確率が同じ ($\alpha = \beta$) であるとする、

$$x_{SW} = \frac{1}{2},$$

となることがわかる。つまり、境界の確率が同じで、吸着 ω_A と脱着 ω_D が等しい際の定常状態では、衝撃波の位置は平均的に 1 次元サイトの中央に現れることがわかる。境界の確率が同じ ($\alpha = \beta$) であるとする、確率 p で前方に進むという条件は衝撃波の位置に影響しないことがわかる。逆に、境界の確率を変更すると確率 p による効果が現れ、衝撃波の位置が変わることがわかる。

2 TASEP-LK の非定常状態

ここでは上記で考察した TASEP-LK の非定常状態について取り上げる。特に非定常状態から定常状態へ移行するまでの時間について考察する。境界条件を変更した際に非定常状態から定常状態への移行時間がどのように変化するかを捉える。モデルの長さが一般の場合について考察することは難しいため、ここでは 3 セルの TASEP-LK に限ってまとめる。

2.1 確率推移行列

3 セル TASEP-LK の確率推移行列を求める。全てのセルの状態は以下の 8 パターンである。

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & P_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & P_6 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & P_7 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & P_8 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

確率推移行列を考える上で状態推移のアップデート方法は以下のとおりとする。

1. 各セルの状態から ω_A 及び ω_D を考える。
2. 各セルの状態から α , β 及び p を考える。

これらの状態推移を確率推移行列として表現すると以下のようになる。なお、立式の手順を確認し易くするため同類項をまとめずに記載する。

$$\begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & w_{17} & w_{18} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{25} & w_{26} & w_{27} & w_{28} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} & w_{36} & w_{37} & w_{38} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} & w_{45} & w_{46} & w_{47} & w_{48} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} & w_{55} & w_{56} & w_{57} & w_{58} \\ w_{61} & w_{62} & w_{63} & w_{64} & w_{65} & w_{66} & w_{67} & w_{68} \\ w_{71} & w_{72} & w_{73} & w_{74} & w_{75} & w_{76} & w_{77} & w_{78} \\ w_{81} & w_{82} & w_{83} & w_{84} & w_{85} & w_{86} & w_{87} & w_{88} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \\ w_{41} \\ w_{51} \\ w_{61} \\ w_{71} \\ w_{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)(1-\omega_A)(1-\omega_A) \\ \alpha(1-\omega_A)(1-\omega_A) \\ (1-\alpha)\omega_A(1-\omega_A) \\ (1-\alpha)(1-\omega_A)\omega_A \\ \alpha\omega_A(1-\omega_A) \\ \alpha(1-\omega_A)\omega_A \\ (1-\alpha)\omega_A\omega_A \\ \alpha\omega_A\omega_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ w_{32} \\ w_{42} \\ w_{52} \\ w_{62} \\ w_{72} \\ w_{82} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_D(1-\omega_A)(1-\omega_A) \\ (1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A)(1-\omega_A) \\ \omega_D\omega_A(1-\omega_A) + (1-\omega_D)p(1-\omega_A)(1-\omega_A) \\ \omega_D(1-\omega_A)\omega_A \\ (1-\omega_D)\omega_A(1-\omega_A) \\ (1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A)\omega_A \\ \omega_D\omega_A\omega_A + (1-\omega_D)p(1-\omega_A)\omega_A \\ (1-\omega_D)\omega_A\omega_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{13} \\ w_{23} \\ w_{33} \\ w_{43} \\ w_{53} \\ w_{63} \\ w_{73} \\ w_{83} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)\omega_D(1-\omega_A) \\ \alpha\omega_D(1-\omega_A) \\ (1-\alpha)(1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A) \\ (1-\alpha)\omega_D\omega_A + (1-\alpha)(1-\omega_D)p(1-\omega_A) \\ \alpha(1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A) \\ \alpha\omega_D\omega_A + \alpha(1-\omega_D)p(1-\omega_A) \\ (1-\alpha)(1-\omega_D)\omega_A \\ \alpha(1-\omega_D)\omega_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{14} \\ w_{24} \\ w_{34} \\ w_{44} \\ w_{54} \\ w_{64} \\ w_{74} \\ w_{84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)(1-\omega_A)\beta \\ \alpha(1-\omega_A)\beta \\ (1-\alpha)\omega_A\beta \\ (1-\alpha)(1-\omega_A)(1-\beta) \\ \alpha\omega_A\beta \\ \alpha(1-\omega_A)(1-\beta) \\ (1-\alpha)\omega_A(1-\beta) \\ \alpha\omega_A(1-\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{15} \\ w_{25} \\ w_{35} \\ w_{45} \\ w_{55} \\ w_{65} \\ w_{75} \\ w_{85} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_D\omega_D(1-\omega_A) \\ (1-\omega_D)\omega_D(1-\omega_A) \\ \omega_D(1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A) \\ \omega_D(1-\omega_D)p(1-\omega_A) + \omega_D\omega_D\omega_A \\ (1-\omega_D)(1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A) \\ (1-\omega_D)(1-\omega_D)p(1-\omega_A) + (1-\omega_D)\omega_D\omega_A \\ \omega_D(1-\omega_D)\omega_A \\ (1-\omega_D)(1-\omega_D)\omega_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{16} \\ w_{26} \\ w_{36} \\ w_{46} \\ w_{56} \\ w_{66} \\ w_{76} \\ w_{86} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_D(1-\omega_A)\beta \\ (1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A)\beta \\ \omega_D\omega_A\beta + (1-\omega_D)p(1-\omega_A)\beta \\ \omega_D(1-\omega_A)(1-\beta) \\ (1-\omega_D)\omega_A\beta \\ (1-\omega_D)(1-p)(1-\omega_A)(1-\beta) \\ \omega_D\omega_A(1-\beta) + (1-\omega_D)p(1-\omega_A)(1-\beta) \\ (1-\omega_D)\omega_A(1-\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{17} \\ w_{27} \\ w_{37} \\ w_{47} \\ w_{57} \\ w_{67} \\ w_{77} \\ w_{87} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)\omega_D\beta \\ \alpha\omega_D\beta \\ (1-\alpha)(1-\omega_D)\beta \\ (1-\alpha)\omega_D(1-\beta) \\ \alpha(1-\omega_D)\beta \\ \alpha\omega_D(1-\beta) \\ (1-\alpha)(1-\omega_D)(1-\beta) \\ \alpha(1-\omega_D)(1-\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{18} \\ w_{28} \\ w_{38} \\ w_{48} \\ w_{58} \\ w_{68} \\ w_{78} \\ w_{88} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_D\omega_D\beta \\ (1-\omega_D)\omega_D\beta \\ \omega_D(1-\omega_D)\beta \\ \omega_D\omega_D(1-\beta) \\ (1-\omega_D)(1-\omega_D)\beta \\ (1-\omega_D)\omega_D(1-\beta) \\ \omega_D(1-\omega_D)(1-\beta) \\ (1-\omega_D)(1-\omega_D)(1-\beta) \end{pmatrix}$$

2.2 緩和時間

緩和時間とは、非定常状態から定常状態に移行する時間である。ここでは、絶対値最大の固有ベクトルを求める方法について述べ、確率推移行列の第2固有値と緩和時間の関係を示す。

記号 2.1

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}$: 対角化可能な行列.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: $\mathbf{A}$ の固有値 *s.t.* $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$.
 ${}^t\mathbf{x}_1, {}^t\mathbf{x}_2, \dots, {}^t\mathbf{x}_n$: 各固有値に対する左固有値ベクトル.

定義 2.1 (左固有ベクトル)

${}^t\mathbf{A}$: $\mathbf{A}$ の転置行列.
 λ_i : ${}^t\mathbf{A}$ の固有値, $1 \leq i \leq n$.
 $\mathbf{x}_i$: 固有値 λ_i の固有ベクトル.

このとき、次の ${}^t\mathbf{x}_i$ を行列 $\mathbf{A}$ の左固有ベクトルと呼ぶ.

$${}^t\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \iff {}^t\mathbf{x}_i\mathbf{A} = \lambda_i{}^t\mathbf{x}_i.$$

さて、 $\mathbf{A}$ は対角化可能なので、初期ベクトル ${}^t\mathbf{v}$ を $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表すことができる.

$${}^t\mathbf{v} = v_1{}^t\mathbf{x}_1 + v_2{}^t\mathbf{x}_2 + \dots + v_n{}^t\mathbf{x}_n, \quad v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}.$$

この両辺に $\mathbf{A}^k$ を掛けると、

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{v}\mathbf{A}^k &= v_1{}^t\mathbf{x}_1\mathbf{A}^k + v_2{}^t\mathbf{x}_2\mathbf{A}^k + \dots + v_n{}^t\mathbf{x}_n\mathbf{A}^k, \\ &= v_1\lambda_1^k{}^t\mathbf{x}_1 + v_2\lambda_2^k{}^t\mathbf{x}_2 + \dots + v_n\lambda_n^k{}^t\mathbf{x}_n, \\ &= \lambda_1^k \left(v_1{}^t\mathbf{x}_1 + v_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k {}^t\mathbf{x}_2 + \dots + v_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k {}^t\mathbf{x}_n \right). \end{aligned}$$

となる. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$ より、 $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k$ の値は k が大きくなるにつれて 0 に近づく. よって、絶対値最大の固有ベクトルは以下のように示される.

$$\frac{1}{v_1} {}^t\mathbf{v} \left(\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{A} \right)^k \longrightarrow \mathbf{x}_1, \quad (k \longrightarrow \infty).$$

ここで考えている行列は確率推移行列である. それぞれの列の和が1になるため、ペロン=フロベニウスの定理より最大固有値は1になることが知られている. つまり固有値1における固有ベクトルがモデルの定常状態を表していることがわかる. さらに上で述べた手順から緩和時間についても情報が得られる. 最大固有値の固有ベクトルに収束するスピードに最も影響する項が2番目に大きい固有値の項である. つまり、第2固有値が大きいほど収束は遅く、小さいほど収束が速いことを表している.

2.3 数値計算例

ここでは境界の確率 α 及び β を変化させたときの以下2つの場合の第2固有値の計算結果を示す. 吸脱着がある場合と無い場合を比較する.

- TASEP, $p=1$.
- TASEP-LK, $p=1$, $\omega_A = \omega_D = 0.05$.

一方で第2固有値が0に収束するステップ数 n を求める. ここでは $y = 10^{-30}$ 以下になるステップ数を緩和時間と定義する. ここで定義された緩和時間は以下のように求めることができる.

$$y = \lambda_2^n, \quad n = \frac{\log y}{\log \lambda_2}.$$

記号 2.2 $\alpha_1 : \alpha = 0.1$, $\alpha_2 : \alpha = 0.2$, $\alpha_3 : \alpha = 0.3$, $\alpha_4 : \alpha = 0.4$, $\alpha_5 : \alpha = 0.5$, $\alpha_6 : \alpha = 0.6$, $\alpha_7 : \alpha = 0.7$, $\beta_1 : \beta = 0.1$, $\beta_2 : \beta = 0.2$, $\beta_3 : \beta = 0.3$, $\beta_4 : \beta = 0.4$, $\beta_5 : \beta = 0.5$, $\beta_6 : \beta = 0.6$, $\beta_7 : \beta = 0.7$.

2.3.1 TASEP, $p=1$

○ 第2固有値

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
β_1	0.941	0.899	0.843	0.778	0.707	0.629	0.544
β_2	0.899	0.882	0.844	0.795	0.736	0.669	0.593
β_3	0.843	0.844	0.821	0.785	0.737	0.679	0.610
β_4	0.778	0.795	0.785	0.759	0.721	0.672	0.611
β_5	0.707	0.736	0.737	0.721	0.692	0.652	0.599
β_6	0.629	0.669	0.679	0.672	0.652	0.619	0.575
β_7	0.544	0.593	0.610	0.611	0.599	0.575	0.538

○ 緩和時間

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
β_1	1142.5	651.8	404.4	275.2	198.9	149.0	113.6
β_2	651.8	550.5	408.3	300.9	225.7	172.0	132.1
β_3	404.4	408.3	351.2	284.6	226.2	178.5	140.0
β_4	275.2	300.9	284.6	249.9	210.8	173.6	140.2
β_5	198.9	225.7	226.2	210.8	187.5	161.2	134.6
β_6	149.0	172.0	178.5	173.6	161.2	144.2	124.7
β_7	113.6	132.1	140.0	140.2	134.6	124.7	111.4

2.3.2 TASEP-LK, $p=1$, $\omega_A = \omega_D=0.05$

○ 第2固有値

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
β_1	0.872	0.834	0.784	0.728	0.668	0.604	0.536
β_2	0.834	0.812	0.776	0.731	0.679	0.621	0.556
β_3	0.784	0.776	0.750	0.714	0.670	0.618	0.557
β_4	0.728	0.731	0.714	0.686	0.649	0.603	0.547
β_5	0.668	0.679	0.670	0.649	0.618	0.579	0.529
β_6	0.604	0.621	0.618	0.603	0.579	0.545	0.501
β_7	0.536	0.556	0.557	0.547	0.529	0.501	0.463

○ 緩和時間

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
β_1	504.1	379.4	284.1	218.0	171.3	137.1	110.8
β_2	379.4	331.6	272.0	220.1	178.3	144.9	117.7
β_3	284.1	272.0	240.2	205.1	172.4	143.5	118.2
β_4	218.0	220.1	205.1	183.2	159.7	136.6	114.6
β_5	171.3	178.3	172.4	159.7	143.7	126.3	108.3
β_6	137.1	144.9	143.5	136.6	126.3	113.9	99.9
β_7	110.8	117.7	118.2	114.6	108.3	99.9	89.6

TASEP 及び TASEP-LK の緩和時間を比べると吸脱着を導入した方が緩和時間が短くなることがわかる。吸脱着の導入により収束が速くなることは直感的にも納得できる結果である。また、片側の境界 α の確率を大きくしていくほど緩和時間の減衰は指数関数的な減衰より緩やかになることがわかる。

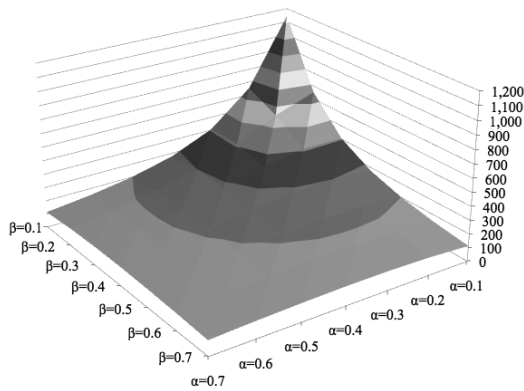


図1 TASEP, $p=1$, 緩和時間

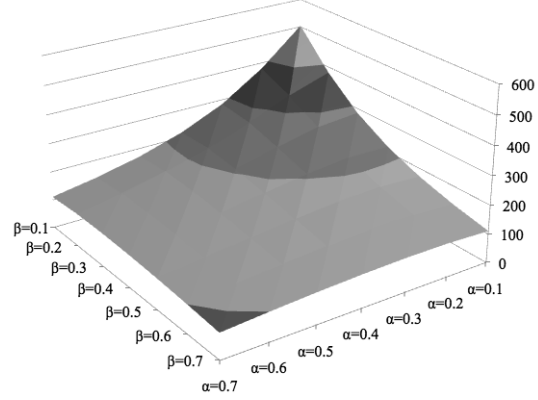


図2 TASEP-LK, $p=1$, 緩和時間

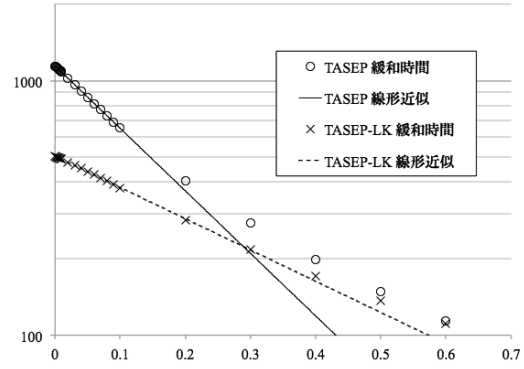


図3 $\beta = 0.1$, 横軸: $\alpha - \beta$, 縦軸: 緩和時間

3 結論

ここでは TASEP-LK についてまとめた。特に、3セルという最小のモデルを使って境界条件と緩和時間の関係を考察した。しかし、ここで述べたモデルは長さが短いため境界条件の影響を大きく受けている。そのため、一般の長さのモデルについても類似した結果が得られるのかどうか分析する必要がある。定常状態だけでなく、非定常状態についても詳しく分析することでモデルから現象の特徴をより正確に捉えることができると考えられる。

参考文献

- [1] A. Schadschneider, D. Chowdhury and K. Nishinari, Stochastic Transport in Complex Systems: From Molecules to Vehicles, Elsevier Science, 2010.
- [2] M. R. Evans, R. Juhász and L. Santen, Shock formation in an exclusion process with creation and annihilation, Phys. Rev. E 68, 026117, 2003.

パターン認識を用いたかたちと動きの数理解析

恩田将樹¹ 宮加谷直哉²

自由学園最高学部

概要 本発表では、パターン認識の応用として、(1) 毛筆文字の特徴と (2) サッカーゲームにおける戦術の2つの数理解析事例を紹介する。(1) 毛筆文字特有の筆先の柔らかさは、字形のみならず、はね・はらい・とめなどの筆法で生じる書き手特有の個性が表現されやすい。本発表では、画像に2値化、細線化、端点検出などの最適化をほどこすことで形状特徴を抽出する方法を紹介する。(2) サッカーゲームにおける得点の優位性を、勢力圏分割を示すボロノイ図によりモデル化することで議論する。本発表では、選手の向きを考慮したベクトルボロノイ図と、2番目に近い母点がどれかによって細分した2階ボロノイ図を用いて、おもにディフェンスの視点から、サッカーにおける定説の妥当性を検証する。

1 毛筆文字の数理解析

本章では、楷書体で書かれた毛筆文字を扱う。毛筆文字には、日常生活で使用されるペン字や硬筆にはない特徴（線の太さ）が存在する [5]。毛筆文字を定量的に扱う研究はいくつか存在する [9, 10] が、本章では、毛筆文字をデジタル画像処理することでパターン [6] としての特徴を抽出し、字形の端整度を評価するシステムの構築を目指す。

1.1 毛筆文字と楷書

毛筆文字の点画は10種類ある。1: 横画, 2: 縦画, 3: 折れ, 4: 斜画 (左払い), 5: 斜画 (右払い), 6: 右上払い, 7: 点, 8: そり, 9: 曲がり, 10: ひらがな, である。

毛筆文字の運筆法は3種類ある。1: 始筆と呼ばれる、ひとつの運筆の起点における筆の動きのこと。全体への出発点として、次の送筆、終筆を予約することを意味する。2: 送筆と呼ばれる、始筆の発展であり、終筆への途中の筆の動きとしての意向を含む動きのこと。3: 終筆と呼ばれる、線と形の発展の後を示し、運筆の完結として、始筆に呼応、次の運筆への暗示を含む動きのこと。

楷書体は習字の筆で文字の形、主に点と線を

崩さずに一画一画丁寧に書く書体である。その丁寧さから厳しさという雰囲気を出している。よく使われる書体に行書体があるが、こちらは楷書体の中で点や線を省略したり、つなげているため、楷書体より“崩した”文字の形となっている。

1.2 細線化

白と黒の色だけで表現された2階調の画像にすることを2値化という。2値化した習字の画像データをコンピュータで処理する。今回は、画像処理に統計処理パッケージRを用いた [2]。以下に細線化を用いた画像処理方法を述べる。必要に応じて、ひげ処理、端点抽出を実施することもある。これらにより、毛筆文字を定量化した特徴を抽出することが可能である。

細線化 (thinning, skeletonization) とは、2値化画像を幅1ピクセルの線画像に変換する処理のことをいう。細線化のアルゴリズムは、下記の6つの条件を満たした時に、画素1である白を画素0の黒に変換するものである。まず近傍の画素に図1.1のように名前をつける。着目する画素をP1とし、P1の近傍の画素をP2からP9とする。これらは2値画像なので、P1からP9は0または1の値である。

第1の段階では、P1が以下の4つの条件を

¹xxxabc.masa71@gmail.com

²naokimiyagani@yahoo.co.jp

同時に満たすときに P1 を白画素 1 から黒画素 0 へと置き換える。

- (1) $2 \leq N(P1) \leq 6$
- (2) $T(P1) = 1$
- (3) $P2 \times P4 \times P6 = 0$
- (4) $P4 \times P6 \times P8 = 0$

ここで、 $N(P1)$ は P2 から P9 のうち 1 であるものの数とし、 $T(P1)$ は P2 から順に P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P2 とたどったときの画素が 0 から 1 へと変わる回数である。条件 (3) と (4) は指定された 3 画素の席が 0 という意味である。第 2 の段階では、条件 (3) と (4) を次のように変更して、削る要素がなくなるまでこれを繰り返す。

- (3') $P2 \times P4 \times P8 = 0$
- (4') $P2 \times P6 \times P8 = 0$

P9	P2	P3
P8	P1	P4
P7	P6	P5

図 1.1 : 近傍

1.3 細線化処理後の特徴

図 1.2 は、実際に書かれたものを、 400×550 画像として取り込んで 2 値化したもの（左図）と、それに細線化を実施したもの（右図）である。



図 1.2 : 細線化処理前と処理後

今回、次の 3 つのことがわかった。(1) かすれ・かさなりがあらわれる、(2) 線質の差、(3) 書き手の実力が一点一画にあらわれる。

また、フォントの明朝体 (MS 明朝)、ゴシック体 (MS ゴシック)、楷書体 (EPSON 正楷書体 M)、行書体 (EPSON 行書体 M) を細線化してみると、(1) 手書きではあり得ないような入りがあったこと、(2) 明朝とゴシックの字形はほぼ同一の 2 つであったことが判明した。(2) に関しては、フォントは正方形の空間に最も広く見やすく字形が設定されているために線の太さに差があったとしても字形自体の設計には差がないのであろうと推察した。

1.4 書家の毛筆文字

顔真卿、王羲之、小野鷲堂、楮遂良、欧陽詢の 5 名の著名な書家の「永」の文字を細線化してみた。書家の書字した毛筆文字には、一点一画が明確にあらわれた。例えば、顔真卿は、右払いを強く表現する特徴を持つ書家であるが、細線化を実施すると顕著にその特徴があらわれた。

1.5 端点抽出

端点とは、線分の端に位置する点、すなわち $N(P1) = 1$ を満たす場所である。細線化された画像における単純な特徴のひとつが端点である。文字の入り・とめの部分に主に位置する。

1.6 未解決課題

筆の動きに特有の、交差点の抽出が困難である。

2 ボロノイ図を用いたサッカー戦術解析

本章ではサッカーの数理解析を行う。サッカーとは、ある決められた領域内を選手が自由に動き回り、蹴りあったボールを、相手のゴールに

入れることで得点するゲームである。サッカーでは、各選手が他の誰よりも早く到達できる範囲が、その選手の優勢領域となる。この優勢領域でフィールドを分割することで、ゲームの優位性を選手の幾何学的な位置関係から議論することを考える。また、経験的によいとされているサッカーの守備戦術を論理的に実証する。

2.1 ボロノイ図

2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内に指定された n 個の点の集合を $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ に対して、2点 P_i, P_j の距離を $d(P_i, P_j)$ と書き、 $R(S; P_i) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, P_i) < d(P, P_j), i \neq j\}$ と定める。 $R(S; P_i)$ は「 S の中で最も近いものは P_i である」という性質をもつ点 $P \in \mathbb{R}^2$ をすべて集めてできる集合となる。この $R(S; P_i)$ によって平面を分割した図をボロノイ図 (Voronoi diagram) という。ボロノイ図は、与えられた母点 S に対して、最近母点間の垂直二等分線となる線分で平面を分割することになるが、これらの線分をボロノイ辺と呼び、ボロノイ辺の交点をボロノイ点と呼ぶ。ボロノイ点は3母点からなる3角形の重心となる。分割された各領域をボロノイ領域と呼ぶ。以下にボロノイ図の例を示す。

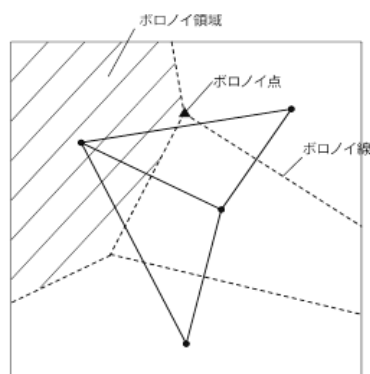


図 2.1 : ボロノイ図

2.2 ボロノイ図への応用

従来の研究 [2, 3, 7, 8] では、サッカーゲームを行う選手 22 人 (1 チーム 11 人) とボールの計

23 を分割の母点としてボロノイ図を作成する。今回は、実際の状況と近似した形を生み出すために 2 点アレンジを加えた。ひとつは、ボールを母点と考慮しないこと。もう 1 つはフィールドの 4 隅を母点として考慮することである。前者はボールの位置に対して、選手の動きを議論するためであり、後者はゴールキーパーの守備領域を適切に議論するためである。

今回は、サッカーゲームの展開のうち、シュートにつながる展開を考察する。したがって、ゲームを行う 2 チームを攻撃と守備という 2 つに区分することができる。攻撃はボールを保持しているチーム (on the ball team) と、守備はボールを保持していないチーム (off the ball team) ということもできる。攻撃はシュートを打つことを、守備はボールを奪うことを優先事項としていると言える。このため、攻撃の各選手はゴールに、守備の各選手はボールに方向を持って行動していると仮定する。このように、母点を攻撃と守備の 2 種類に分けて、それらにそれぞれゴールとボールにむかう向きを考慮したボロノイ図をベクトルボロノイ図 (vector Voronoi diagram) と呼ぶ。

2.3 2 階ボロノイ図

これまでのことから、サッカーゲームにおけるフィールドを、22 人の選手とフィールドの 4 隅の計 26 点を母点とするボロノイ分割で考えている。選手を表す母点は、攻撃と守備に区分されているが、とくに守備選手を考えよう。各守備選手のボロノイ領域は、その選手がもっとも早く到達できる領域であり、ゲームにおいて責任を持って守らなくてはならない領域である。ところが、その領域内には敵となる攻撃選手が攻めやすい場所がある。それを述べるために次の概念を導入する。

母点 $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ から 2 個 $T_2 = \{P_{i_1}, P_{i_2}\}$ を取り出す。そして $R(S; T_2) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, P_{i_1}) < d(P, P_{i_2}) < d(P, P_j), j \neq i_1, i_2\}$ と定める。 $R(S; T_2)$ は、 S の中で最も近いもの

は P_1 で、次に近いのが P_2 である領域を表す。この $R(S; T_2)$ によって平面を分割した図を 2 階ボロノイ図 (order-2 Voronoi diagram) という [4]。

2 階ボロノイ図により、各守備選手の守備領域を、攻撃に攻められやすい領域とそうでない領域に区分することができる。これは守備と攻撃を入れ替えることで、守備選手にボールを奪われやすい攻撃領域を定めることもできる。以下に 2 階ボロノイ図の例を示す。

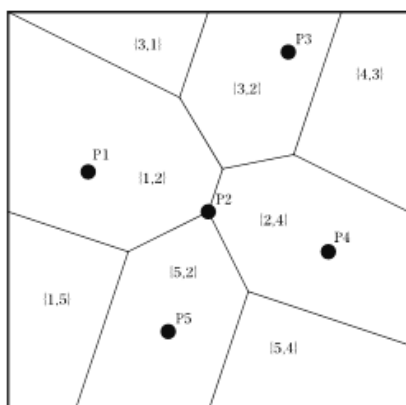


図 2.2 : ボロノイ図

2.4 解析手法

以上のことをまとめると、サッカーゲームにおける守備選手に対して、ボールの方向へのベクトルを考慮して (ベクトルボロノイ図)、守備領域に、攻撃にさらされやすい領域を特定する (2 階ボロノイ図) ことができる。この領域を脆弱な (vulnerable) 領域と呼ぶことにする。基本的にサッカーゲームは、攻撃領域から攻撃領域へボールが移動することで展開するが、攻撃選手からこの脆弱な領域にボールが移動すると、シュートに繋がる展開になっていく。したがって、守備の各選手は、脆弱な領域が生じないように守備陣形を整えることが大切となり、逆に脆弱な領域が広がるように攻められると失点につながる可能性が高くなる (図 2.3)。

ポスター発表では、これらのことを J リーグの実際のゲームから紹介する。データは 2014 年 12 月 6 日に行われた J リーグ 34 節、大宮対

大阪を用いて、この試合の大宮の 2 点目の得点を取り上げている。

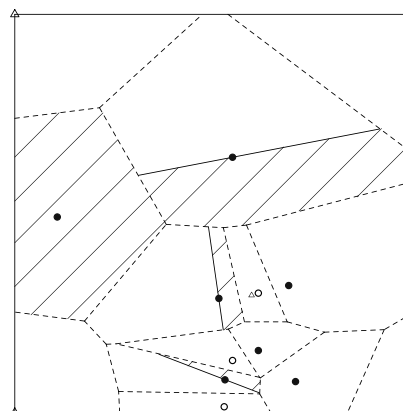


図 2.3 : 脆弱な守備領域

参考文献

- [1] 勝木健雄, R で学ぶデータサイエンス・デジタル画像処理, 井立出版株式会社, 2011.
- [2] S. Kim, Voronoi Analysis of a Soccer Game, modeling and control 9, 233–240, 2004.
- [3] キム チャンフン, Voronoi アルゴリズムを用いたサッカーゲーム分析, キーノートレクチャー 1, 日本フットボール学会 12th Congress, 2014.
- [4] 杉原厚吉, なわばりの数理モデル, 共立出版, 2009.
- [5] 花田峰堂ほか, 新装版書道技法講座<楷書>シリーズ, 二玄社, 1988+.
- [6] 平井有三, はじめてのパターン認識, 森北出版, 2012.
- [7] 藤原光・杉原厚吉, ボロノイ図を応用したスポーツチームワークの定量的評価, 電子情報通信学会技術研究報告 100, 145–152, 2001.
- [8] 藤原光・杉原厚吉, 優勢領域に基づいたスポーツチームワークの定量的評価 (画像処理, 画像パターン認識), 電子情報通信学会技術研究報告 J87-D-II, 818–828, 2004.
- [9] 古性淑子・平野光一・中村公計・小谷一孔, 感性情報に基づく毛筆漢字文字の美的評価, 電子情報通信学会技術研究報告 101, 81–88, 2001.
- [10] 松尾賢一・土本良樹, 毛筆文字の特徴量算出ツールの試作, 奈良工業高等専門学校研究紀要 43, 39–44, 2007.

枠付き曲線の縮閉線について

本多 俊一（室蘭工業大学大学院 数理システム工学専攻）

1 序論

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の枠付き曲線に対して縮閉線を定義し、その性質を考える。枠付き曲線とは曲線と動標構の組である。曲線に対して正則性は仮定しない。枠付き曲線は独立性を持つ正則空間曲線と単位接束上のルジャンドル曲線の拡張となっており、これらに類似した曲率を持つ。正則空間曲線に対する縮閉線の定義はいくつかあるが、それらには自然と特異点が出てくる。そこで、枠付き曲線に対して縮閉線を定義することにより、枠付き曲線の曲率を介してその性質を考えることができる。考える写像は滑らか (C^∞ 級) とする。

2 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の枠付き曲線

I を区間または $\mathbb{R}$ とする。写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ が次の3つの条件をみたすとき枠付き曲線と呼ぶ：

$$(1) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0, (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0, (3) \nu_1(t) \cdot \nu_2(t) = 0.$$

また、 (γ, ν_1, ν_2) が枠付き曲線であるような $(\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow S^2 \times S^2$ が存在するとき、 γ を枠付き曲線と呼ぶ。

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して $\boldsymbol{\mu}(t) := \nu_1(t) \times \nu_2(t)$ とすると $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の $\gamma(t)$ に沿う正の枠で、

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix},$$
$$\dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t)$$

を満たす。このとき、

$$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$$

である。この関数の組 (ℓ, m, n, α) を、枠付き曲線の曲率と呼ぶ。

ν_1, ν_2 の取り方には回転と鏡映による自由度がある。「枠付き曲線である」という性質は、パラメータの取り方や ν_1, ν_2 の取り方に依存しない。ただし、枠付き曲線の曲率は、パラメータの取り方や ν_1, ν_2 の取り方に依存することに注意しなければならない。

棒付き曲線の幾何的性質を考える為、棒付き曲線の合同を定義する。2つの棒付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して、 $X \in SO(3)$ 及び $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ が存在して、

$$\tilde{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) + \mathbf{x}, \quad \tilde{\nu}_1(t) = X(\nu_1(t)), \quad \tilde{\nu}_2(t) = X(\nu_2(t))$$

を満たすとき、2つの棒付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ は合同であると言う。

棒付き曲線は次の性質を持つ：

定理 1 (棒付き曲線の存在)([2])

$(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ を滑らかな写像とする。このとき、棒付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ で、 (ℓ, m, n, α) を曲率とするものが存在する。

定理 2 (棒付き曲線の一意性)([2])

2つの棒付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して、これらの曲率が一致するとする。このとき、2つの棒付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ は合同である。

特に、2つの棒付き曲線が合同な場合、それらの曲率は一致する。つまり、合同の差を除き、棒付き曲線の幾何的性質を曲率が定めている事が分かる。よって、この意味で棒付き曲線の曲率は、棒付き曲線の重要な不変量になっている。

3 棒付き曲線の縮閉線

フレネ棒 $\{T(t), N(t), B(t)\}$ を持つ正則空間曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ が $\kappa(t) \neq 0, \tau(t) \neq 0$ を満たすとき、その接触球の中心は次で与えられる ([1])：

$$E_v(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) - \frac{\dot{\kappa}(t)|\dot{\gamma}(t)|}{\kappa^2(t)\tau(t)}B(t).$$

本節で定義する棒付き曲線の縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ は正則空間曲線の接触球の中心 $E_v(\gamma)$ の拡張となっている。

棒付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) とその曲率 (ℓ, m, n, α) に対して、

$$f(t) := \ell(t)(m^2(t) + n^2(t)) + \begin{vmatrix} m(t) & n(t) \\ \dot{m}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定する。 $f(t) \neq 0$ ならば $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ が成り立つ。縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次で定義する：

定義 3 (棒付き曲線の縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$)

$$\mathcal{E}_v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\nu_1(t) + \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\nu_2(t)$$

このとき、縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ が再び $f^1(t) \neq 0$ を満たす棒付き曲線になることがわかる。実際、 $(\mathcal{E}_v(\gamma), \nu_1^1, \nu_2^1)$ は棒付き曲線である。ただし、

$$\nu_1^1(t) = \boldsymbol{\mu}(t), \quad \nu_2^1(t) = \frac{1}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}(m(t)\nu_1(t) + n(t)\nu_2(t)), \quad \boldsymbol{\mu}^1(t) = \nu_1^1(t) \times \nu_2^1(t)$$

とする。このとき、曲率は

$$\ell^1(t) = -\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}, \quad m^1(t) = 0, \quad n^1(t) = \frac{f(t)}{m^2(t) + n^2(t)},$$

$$\begin{aligned} \alpha^1(t) = & n(t) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)} \right) + \ell(t) \left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)} \right) \right) \\ & + m(t) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)} \right) - \ell(t) \left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)} \right) \right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$f^1(t) = -\frac{(f(t))^2}{(m^2(t) + n^2(t))^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

が成り立ち、自然に縮閉線の縮閉線が与えられることがわかる。

枠付き曲線の曲率は、パラメータの取り方や枠の取り方に依存するが、それらによって表示される縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ はパラメータの取り方や枠の取り方に依存しない。また、関数 $F: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \mathbf{v}) \mapsto (\gamma(t) - \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$ に対して

$$F(t, \mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{v}) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, \mathbf{v}) = 0$$

を満たすような $\mathbf{v}$ は枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) の $\mathcal{E}_v(\gamma)$ であることがわかる。これらは枠付き曲線の縮閉線を考える上で重要な性質である。

以下、縮閉線の縮閉線を考える。記号として $\mathcal{E}_v^0(\gamma)(t) := \gamma(t)$ と $\mathcal{E}_v^1(\gamma)(t) := \mathcal{E}_v(\gamma)(t)$ と置く。帰納的に自然数 k に対して、 $\mathcal{E}_v^k(\gamma)(t) := \mathcal{E}_v(\mathcal{E}_v^{k-1}(\gamma))(t)$ と定義し、

$$\begin{aligned} \nu_1^k(t) &= \begin{cases} \nu_1^1(t) & (k: \text{奇数}) \\ \boldsymbol{\mu}^1(t) & (k: \text{偶数}) \end{cases}, \quad \nu_2^k(t) = \begin{cases} \nu_2^1(t) & (k: \text{奇数}) \\ -\nu_2^1(t) & (k: \text{偶数}) \end{cases}, \\ \ell^k(t) &= \begin{cases} \ell^1(t) & (k: \text{奇数}) \\ n^1(t) & (k: \text{偶数}) \end{cases}, \quad n^k(t) = \begin{cases} n^1(t) & (k: \text{奇数}) \\ \ell^1(t) & (k: \text{偶数}) \end{cases}, \\ \alpha^k(t) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha^{k-1}(t) & n^{k-1}(t) \\ \dot{\alpha}^{k-1}(t) & \dot{n}^{k-1}(t) \end{vmatrix}}{\ell^{k-1}(t)(n^{k-1}(t))^2} \right) + \frac{\alpha^{k-1}(t)\ell^{k-1}(t)}{n^{k-1}(t)} \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

とする。このとき、次が成り立つ。

定理 4 (k -回の縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$)

k 回の枠付き曲線の縮閉線は $k = 1$ のとき $\mathcal{E}_v(\gamma)(t)$ で与えられ、 $k \geq 2$ のとき

$$\mathcal{E}_v^k(\gamma)(t) = \mathcal{E}_v^{k-1}(\gamma)(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha^{k-1}(t) & n^{k-1}(t) \\ \dot{\alpha}^{k-1}(t) & \dot{n}^{k-1}(t) \end{vmatrix}}{\ell^{k-1}(t)(n^{k-1}(t))^2} \nu_1^{k-1}(t) - \frac{\alpha^{k-1}(t)}{n^{k-1}(t)} \nu_2^{k-1}(t)$$

で与えられる。このとき、 $(\mathcal{E}_v^k(\gamma)(t), \nu_1^k(t), \nu_2^k(t))$ は枠付き曲線であり、その曲率は $(\ell^k(t), 0, n^k(t), \alpha^k(t))$ である。

例

3次元アステロイド $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ (図1) に対して, ν_1, ν_2 を次のように与える:

$$\nu_1(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-4\cos t, 4\sin t, 3).$$

このとき, (γ, ν_1, ν_2) は枠付き曲線であり,

$$\mu(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-3\cos t, 3\sin t, -4)$$

である事から, 枠付き曲線の曲率は

$$\ell(t) = \frac{4}{5}, \quad m(t) = \frac{3}{5}, \quad n(t) = 0, \quad \alpha(t) = 5\cos t \sin t$$

となる. このとき, 縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ (図2) は次の通りである:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_v(\gamma)(t) = & (\cos^3 t + \frac{25}{3}\cos t \sin^2 t + \frac{25}{3}\cos t(\cos^2 t - \sin^2 t), \\ & \sin^3 t + \frac{25}{3}\cos^2 t \sin t - \frac{25}{3}\sin t(\cos^2 t - \sin^2 t), \cos 2t - \frac{25}{4}(\cos^2 t - \sin^2 t)). \end{aligned}$$

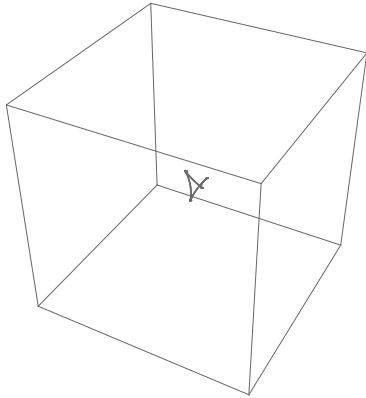


図1 3次元アステロイド $\gamma(t)$

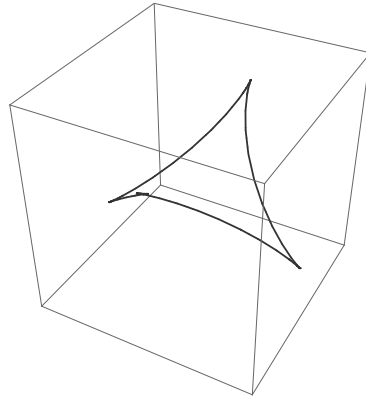


図2 3次元アステロイドの縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)(t)$

参考文献

- [1] D. Fuchs, Evolutes and Involutives of Spatial Curves, *Amer. Math. Monthly.* **120** (2013), 217-231.
- [2] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, to appear in *Advances in Geometry*.
- [3] S. Honda and M. Takahashi, Evolutes of framed curves in the Euclidean space, in preparation.

Integrability in the geodesic flow for the Berger metric

竹内 司 (東京理科大学大学院 理学研究科D3)*

1. はじめに

Hamilton 関数 H により与えられる $2n$ 次元相空間の運動において, n 個の第 1 積分 $G_1 = H, G_2, \dots, G_n$ があり, $\{G_i, G_j\} = 0$ かつ $\text{grad } G_1, \text{grad } G_2, \dots, \text{grad } G_n$ が 1 次独立であるとき, H を完全積分可能な Hamilton 関数と呼び, 完全積分可能な Hamilton 関数により与えられる力学系を可積分系と呼ぶ (cf. [1]). 可積分系の例としては, Kepler 問題, 剛体, 調和振動子などがよく知られている. 古典力学における可積分系の特徴付けとして Liouville-Arnold の定理があるが, 一方で S. De Filippo, G. Marmo, M. Salerno, G. Vilasi により可積分系の新たな特徴付けとして次の定理と定義が示されている.

定理 1 ([2]). 偶数次元多様体 $\mathcal{M}$ 上のベクトル場 X が次の条件を満たす不変な $(1, 1)$ -tensor field T を持つとする:

- (1) T の *Nijenhuis torsion* が消滅する.
- (2) T が対角化可能で固有値が 2 重非退化である.
- (3) 固有値は多様体上の停留点を持たない滑らかな関数である.

このとき, 次が成立する:

1. ある *symplectic form* ω と Hamilton 関数 H が存在し, X は ω に関する H の *Hamiltonian vector field* となる.
2. X は *separable* である.
3. H は ω の *Poisson bracket* に関し完全積分可能である.

定義 1 ([2]). 上記の定理における対角化可能で不変な $(1, 1)$ -tensor field T を $\mathcal{M}$ 上のベクトル場 X の *recursion operator* と呼ぶ. すなわち, T が X の *recursion operator* であるとき, 次の条件を満足する. ただし, λ は T の固有値.

$$\mathcal{L}_X T = 0, \quad \mathcal{N}_T = 0, \quad \deg \lambda = 2, \quad (d\lambda)_p \neq 0, \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

また, recursion operator T の特徴として, $n = \dim \mathcal{M}/2$ としたとき, T の k 乗の各トレース $\text{Tr}(T^k)$ ($1 \leq k \leq n$) はそれぞれ互いに関数独立な保存量となることが知られている (例えば, [4], [5]).

先行研究ではいくつかの力学系に対し recursion operator が構成されている. しかし, これらの例は物理的な対象であり, 数学的な考察はあまりされていなく, 幾何学的な意味づけも十分にされていない.

本研究では, 微分幾何学的な立場から, リーマン多様体の測地流に対し recursion operator を具体的に構成し, Hamilton 関数の完全積分可能性を示す. この測地流に対しての recursion operator の構成はこれまでの先行研究とは異なる新しい構成例である. また, Kepler 問題において, Marmo-Vilasi ([4]) で得られた recursion operator T とは異なる recursion operator T_0 を構成することで, 特定のベクトル場に対し recursion operator が一意には定まらないことを具体的に示した.

2. Kepler 問題による Recursion operator の非一意性

$T^*(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ 上の Kepler 問題におけるベクトル場 X は, 極座標表示により

$$X = \frac{1}{m} \left[p_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{p_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^3} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial}{\partial p_r} + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial p_\theta} \right] - \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial p_r}$$

* 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3 東京理科大学大学院 理学研究科
e-mail: 1112702@ed.tus.ac.jp

で表される。ただし、 k は中心力の強さを表し、 m は中心力のもとで移動する物質の質量である。このとき、ベクトル場 X は自然な symplectic form ω を

$$\omega = dp_r \wedge dr + dp_\vartheta \wedge d\vartheta + dp_\varphi \wedge d\varphi$$

としたとき、Hamilton 関数

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{k}{r}$$

に対し Hamiltonian vector field である。

2.1. Marmo-Vilasi ([4]) による構成

Marmo-Vilasi ([4]) は action-angle coordinate を用いて recursion operator を構成した。action-angle coordinate (J, φ) は、

$$\begin{aligned} J_1 &= -\sqrt{p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} + \sqrt{2mk} \left(\frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} - p_r^2 \right)^{-1/2}, \\ J_2 &= \sqrt{p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} - p_\phi, \quad J_3 = p_\phi. \\ \varphi_1 &= -\frac{\{-m^2 k^2 r^2 + 2mkr(J_1 + J_2 + J_3)^2 - (J_1 + J_2 + J_3)^2(J_2 + J_3)^2\}^{1/2}}{(J_1 + J_2 + J_3)^2} \\ &\quad + \arcsin \frac{mkr - (J_1 + J_2 + J_3)^2}{(J_1 + J_2 + J_3)\sqrt{(J_1 + J_2 + J_3)^2 - (J_2 + J_3)^2}}, \\ \varphi_2 &= \varphi_1 - \arcsin \frac{\{mkr - (J_2 + J_3)^2\}(J_1 + J_2 + J_3)}{\sqrt{(J_1 + J_2 + J_3)^2 - (J_2 + J_3)^2}} - \arcsin \frac{(J_2 + J_3) \cos \theta}{\sqrt{(J_2 + J_3)^2 - J_3^2}}, \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + \arcsin \frac{J_3}{\sqrt{(J_2 + J_3)^2 - J_3^2} \tan \theta} \end{aligned}$$

であり、上記の X , ω , H は

$$\begin{aligned} X &= \frac{2mk^2}{(J_1 + J_2 + J_3)^3} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \right), \\ \omega &= \sum_h dJ_h \wedge d\varphi_h, \quad H = -\frac{mk^2}{(J_1 + J_2 + J_3)^2}. \end{aligned}$$

ここで、対角化可能な $(1, 1)$ -tensor field T を

$$T = \sum_{h,k} \left(({}^t\mathcal{S})^h_k \frac{\partial}{\partial J_h} \otimes dJ_k + \mathcal{S}^h_k \frac{\partial}{\partial \varphi_h} \otimes d\varphi_k \right) \quad (1)$$

とおけば、 $\mathcal{L}_X T = 0$, $\mathcal{N}_T = 0$ を満足し、recursion operator であることが得られる。ただし、

$${}^t\mathcal{S} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 - J_3 & J_3 - J_2 \\ J_2 & J_1 + J_3 & J_2 \\ J_3 & J_3 & J_1 + J_2 \end{pmatrix}.$$

2.2. 先行研究と異なる構成

Marmo-Vilasi ([4]) と異なる recursion operator をスケーリングされた Runge-Lenz-Pauli ベクトルを用いて構成する. スケーリングされた Runge-Lenz-Pauli ベクトル D は

$$D = \frac{1}{\sqrt{-2mH}} \left\{ p \times L - mk \frac{q}{r} \right\}.$$

ただし, p は運動量ベクトル, q は位置ベクトル, $L = q \times p$ は角運動量ベクトル, H は非正値関数である. ここで, l_i を L の各成分, D_i を D の各成分とし,

$$P_1 = \sqrt{\frac{m}{-H}}, \quad P_2 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2, \quad P_3 = l_3$$

とおけば,

$$\{P_i, P_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

が成り立つ. これより,

$$\omega = dP_1 \wedge d\alpha_1 + dP_2 \wedge d\alpha_2 + dP_3 \wedge d\alpha_3$$

となる $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在する. このとき, ベクトル場 X は $X = \frac{2m}{P_1^3} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}$ となり,

$$T_0 = \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathcal{S}}^i_i \left(\frac{\partial}{\partial P_i} \otimes dP_i + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \otimes d\alpha_i \right), \quad \tilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

とおけば, $\mathcal{L}_X T_0 = 0$, $\mathcal{N}_{T_0} = 0$ より T_0 は recursion operator となる.

ここで, 先行研究で得られた (1) の recursion operator を座標系 (P, α) により表現すれば,

$$T = \sum_{i,j=1}^3 \left(\mathcal{A}^i_j \frac{\partial}{\partial P_i} \otimes dP_j + \mathcal{B}^i_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \otimes dP_j + \mathcal{C}^i_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \otimes d\alpha_j \right).$$

ただし, $\mathcal{A}^i_j = \sum_{h,k=1}^3 ({}^t\mathcal{S})^h_k \frac{\partial P_i}{\partial J_h} \frac{\partial J_k}{\partial P_j}$, $\mathcal{B}^i_j = \sum_{h,k=1}^3 \left(({}^t\mathcal{S})^h_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial J_h} \frac{\partial J_k}{\partial P_j} + \mathcal{S}^h_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial P_j} \right)$, $\mathcal{C}^i_j = \sum_{h,k=1}^3 \mathcal{S}^h_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_j}$ であり, 特に $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} kP_1 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^2_1 & \mathcal{A}^2_2 & \mathcal{A}^2_3 \\ kP_3 & 0 & 2P_3 - kP_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathcal{A}^2_1 &= k \left\{ \sqrt{\frac{k^2 P_1^2}{2} - P_2} \left(2kP_1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 P_1^2}{2} - P_2} \right) - 2kP_1 P_3 \right\}, \\ \mathcal{A}^2_2 &= kP_1 - 2 \sqrt{\frac{k^2 P_1^2}{2} - P_2} + 2P_3, \\ \mathcal{A}^2_3 &= 4 \sqrt{\frac{k^2 P_1^2}{2} - P_2} \left(2P_3 - \sqrt{\frac{k^2 P_1^2}{2} - P_2} \right). \end{aligned}$$

以上により, [4] と異なる recursion operator T_0 が得られた. したがって, 特定のベクトル場に対する recursion operator の非一意性が得られた.

3. Berger metric の測地流の Hamilton 関数に対する構成

[3] により, Berger metric が³

$$g(v, w) = \langle v, w \rangle + \beta \langle v, iz \rangle \langle w, iz \rangle, \quad \beta > -1$$

で定義されており, $z = (z_1, z_2) \in S^3$, $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in T_z S^3$, $\langle v, w \rangle = \operatorname{Re}(v \cdot \bar{w})$ である. 本研究では, g の測地流の Hamilton 関数を不変にする Hamiltonian G -action について考察し, その moment map を用いて g の測地流に対する recursion operator を構成する. 具体的には, Hamilton 関数

$$H = \alpha \langle X, X \rangle + \beta \langle X, iz \rangle^2$$

に対し, 以下のように τ と σ を取れば H と互いに可換な Poisson bracket が得られる:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \{ \alpha \langle (X_1, -X_2), iz \rangle + \beta(|z_1|^2 - |z_2|^2) \langle X, iz \rangle \}, \\ \sigma &= \frac{1}{2} \alpha (-\bar{X}_1 z_2 + X_2 \bar{z}_1) + i\beta \bar{z}_1 z_2 \langle X, iz \rangle. \end{aligned}$$

ただし, $\tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{C}$ であり, これらは moment map の構成により得られた関数である. しかし, $\{\tau, \sigma\}$ は 0 でない. そこで新たな関数 κ を

$$\kappa = \tau^2 + \operatorname{Re}(\sigma)^2 + \operatorname{Im}(\sigma)^2$$

と定めることで

$$\{H, \tau\} = 0, \quad \{H, \kappa\} = 0, \quad \{\tau, \kappa\} = 0$$

が得られる. これより, 対角化可能で不変な $(1, 1)$ -tensor field T を

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{S} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

とおけば, $\mathcal{L}_X T = 0$, $\mathcal{N}_T = 0$ より T は recursion operator となる. 以上により, Berger metric から得られる Hamilton 関数における可積分性が得られた.

参考文献

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mechanics **60**, Springer, New York 1978.
- [2] S. De Filippo, G. Marmo, M. Salerno and G. Vilasi, *A New Characterization of Completely Integrable Systems*, Nuovo Cimento B **83** (1984) 97–112.
- [3] K. Kikuchi, *S^1 -Equivariant CMC Surfaces in the Berger Sphere and the Corresponding Lagrangians*, Advances in Pure Mathematics **3** (2013) 259–263.
- [4] G. Marmo and G. Vilasi, *When Do Recursion Operators Generate New Conservation Laws?*, Phys. Lett. B **277** (1992) 137–140.
- [5] G. Vilasi, *Hamiltonian Dynamics*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

ジェネリックなベクトル場の生成系における 一般化されたサブリーマン多様体上の 異常測地線の性質について

行野 亘(ゆくの わたる)*

北海道大学理学院数学専攻

0 はじめに

サブリーマン多様体とは、 C^∞ 多様体と、その多様体の接束の部分束 (接分布) と、その上のリーマン計量の3つ組のことである。このサブリーマン多様体では、2点を結ぶ最短測地線はリーマン多様体の場合とは異なり、驚くべきことに、計量によらず接分布のみから決まる測地線 (異常測地線) が存在することがある。実際、Montgomery は [M] で異常極値的曲線であり、かつ、最短測地線であるような例を具体的に構成した。さらに、数人の著者が“サブリーマン多様体において異常極値的曲線は最短測地線になることはない”という誤った結果を書いていたので、いくつかの誤った証明が書かれた論文のリストを Montgomery は [M] で提示した。このことが、Agrachev, Sarychev [AS] や Liu, Sussmann [LS] などの多くの研究者に影響を与えた。

その後、Belláiche は [B] でサブリーマン多様体の概念を一般化した。この一般化されたサブリーマン多様体は、ベクトル場の系が必ずしも多様体上至るところで一次独立と限らない場合でも定義することができる。もし、ベクトル場が多様体上至るところで一次独立の場合、その系は多様体の接束の部分束を生成し、一般化されたサブリーマン計量は“通常の意味の”サブリーマン計量と一致する。

本ポスターセッションでは、一般化されたサブリーマン多様体上で、異常極値的曲線について考え、得られた結果について紹介する。

以後、特に断りのない限り、 M を n 次元 C^∞ 多様体とし、 M 上の点 x における M の接空間を $T_x M$ で表し、また、 M の接束を TM で表すものとする。すなわち、 $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ とする。 $X = (X_1, \dots, X_m)$ を、 M 上の m 個のベクトル場の系とする。

1 一般化されたサブリーマン計量

与えられた点 $x \in M$ に対して、 $L_x \subset T_x M$ を、 $X_1(x), \dots, X_m(x)$ で生成される $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。すなわち、 $L_x = \langle X_1(x), \dots, X_m(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ とする。

定義 1.1. $L \subset TM$ を $L = \bigcup_{x \in M} L_x$ とする。そのとき、 $g: L \rightarrow \mathbb{R}$ が一般化されたサブリーマン計量 (generalized Sub-Riemannian metric) であるとは、以下の条件を満たすことである:

*yukuwata@math.sci.hokudai.ac.jp

$$g(w) = g(x, v) = \min \{ (u_1)^2 + \cdots + (u_m)^2 \mid v = u_1 X_1(x) + \cdots + u_m X_m(x) \}.$$

ここで, $w = (x, v)$ は $L \subset TM$ の自然な座標である: $x \in M, v \in L_x$.

Remark $M \ni x$ に対して, 線形写像 $\sigma_x : \mathbb{R}^m \rightarrow L_x$ を, $\sigma(u) = u_1 X_1(x) + \cdots + u_m X_m(x), u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ によって定義する。そのとき, σ_x の, $\mathbb{R}^m$ における $\text{Ker}(\sigma_x)$ の直交補空間 $\text{Ker}(\sigma_x)^\perp$ への制限 $\sigma|_{\text{Ker}(\sigma)^\perp}$ は線形同型写像になり, その逆写像 $(\sigma|_{\text{Ker}(\sigma)^\perp})^{-1} : L_x \rightarrow \text{Ker}(\sigma_x)^\perp$ を利用することにより, 一般化されたサブリーマン計量 g は, $g(w) = g(x, v) = \|(\sigma|_{\text{Ker}(\sigma)^\perp})^{-1}(w)\|^2, w = (x, v) \in L$ と表される。

Remark もし $X = (X_1, \dots, X_m)$ が M 上一次独立ならば, $L \subset TM$ は TM の部分束になり, L は TM の m 次元分布 (**distribution**) と呼ばれる。このとき, $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ は標準内積になるので, 3つ組 (M, L, g) は“通常の意味の”サブリーマン多様体に一致する。

定義 1.2. 絶対連続な曲線 $x : [0, T] \rightarrow M$ が X -許容的曲線 (**admissible curve**) であるとは, 殆ど至るところの点 $x \in M$ に対して, $\dot{x}(t) \in L_{x(t)}$ であるときに言う。このとき, $d_{CC} : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が一般化されたカルノー・カラテオドリ (**Carnot-Carathéodory**) 距離であることを次で定義する: 任意の2点 $p, q \in M$ に対して,

$$d_{CC}(p, q) = \inf \left\{ \int_{[0, T]} \sqrt{g(x(t), \dot{x}(t))} dt \mid \begin{array}{l} x : [0, T] \rightarrow M : X\text{-許容的曲線} \\ x(0) = p, x(T) = q \end{array} \right\}.$$

Remark もし $X = (X_1, \dots, X_m)$ が一次独立ならば, 全ての X -許容的曲線 $x : [0, T] \rightarrow M$ に対して, 唯一つの L^∞ (可測, かつ, 本質的有界) 曲線 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ が存在して, 次の条件 $(\star)$ を満たす:

$$\dot{x}(t) = u_1(t)X_1(x(t)) + \cdots + u_m(t)X_m(x(t)) \cdots (\star).$$

$X = (X_1, \dots, X_m)$ が一次独立とは限らない場合は, 一意ではないが, 条件 $(\star)$ を満たすような L^∞ 曲線 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ が存在する。この曲線 u を, x の X -許容制御 (**admissible control**) と呼ぶ。このとき,

$$\int_{[0, T]} \sqrt{g(x(t), \dot{x}(t))} dt = \int_{[0, T]} \sqrt{u_1(t)^2 + \cdots + u_m(t)^2} dt.$$

が成り立ち, $\int_{[0, T]} \sqrt{g(x(t), \dot{x}(t))} dt$ を, X -許容的曲線 x の長さと呼ぶ。

定義 1.4. X -許容的曲線 $x : [0, T] \rightarrow M$ が最短測地線 (**minimizing geodesic**) あるいは最短曲線 (**minimizer**) であるとは, 次の条件を満たすときに言う:

$$d_{CC}(x(0), x(T)) = \int_{[0, T]} \sqrt{g(x(t), \dot{x}(t))} dt.$$

2 最適制御問題

$\mathcal{U}_{x_0, x_1}^T \subset L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ を初期点 $x_0 \in M$ と終点 $x_1 \in M$ を固定した X -許容的曲線 $x : [0, T] \rightarrow M, x(0) = x_0, x(T) = x_1$ を持つような X -許容制御全体とする。エネルギー汎関数 $C : \mathcal{U}_{x_0, x_1}^T \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$C(u) = \int_{[0,T]} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_i(t)^2 dt, \quad u \in \mathcal{U}_{x_0, x_1}^T$$

で定義し, $C(u)$ を最小にする最適制御問題を考える。ここで, X -許容制御 $u^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ が最適制御 (**optimal control, minimal control**) であるとは, 全ての X -許容制御 $u \in \mathcal{U}_{x_0, x_1}^T$ に対して, $C(u^*) \leq C(u)$ であるときを言う。

Remark この問題は, Cauchy-Schwarz の不等式によって, 長さ $\ell : \mathcal{U}_{x_0, x_1}^T \rightarrow \mathbb{R}$ を最小化する問題と同値であるが知られている:

$$\ell(u) = \int_{[0,T]} \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i(t)^2} dt, \quad u \in \mathcal{U}_{x_0, x_1}^T.$$

この最適制御問題におけるハミルトン (**Hamilton**) 関数 $H : (T^*M \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $(z; u; p_0) = (x, p; u; p_0) \in (T^*M \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}$ に対して, 次で定義する:

$$H(x, p; u; p_0) = \sum_{i=1}^m u_i \langle p, X_i(x) \rangle + p_0 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_i^2 \right).$$

ここで, (x, p, u) は, T^*M の正準座標 (x, p) を持つ, $T^*M \times \mathbb{R}^m$ の局所座標である。このとき, ポントリャーギン (**Pontryagin**) の最大値原理を利用することにより, 次が成り立つ。

定理 2.1. $x_0, x_1 \in M$ とする。 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ を X -許容制御し, $x : [0, T] \rightarrow M$ を $x(0) = x_0, x(T) = x_1$ を満たす X -許容的曲線とする。そのとき, もし u が最適制御, つまり, x が最短測地線ならば, ある絶対連続な曲線 $z : [0, T] \rightarrow T^*M$ と, 実数 $p_0 \leq 0$ の組 (z, p_0) が存在して, $x = \pi \circ z$ と z は以下の方程式 (**) を満たす。 T^*M の正準座標が (x, p) であるような, $T^*M \times \mathbb{R}^m$ の任意の局所座標 $(x, p; u) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_m)$ に対して,

$$(**): \begin{cases} (1) \quad \dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t), p(t), u(t); p_0) \quad (1 \leq i \leq n) & \text{for a.e. } t \in [0, T] \\ (2) \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t); u(t); p_0) \quad (1 \leq i \leq n) & \text{for a.e. } t \in [0, T] \\ (3) \quad \frac{\partial H}{\partial u_j}(x(t), p(t); u(t); p_0) = 0 \quad (1 \leq j \leq m) & \text{for a.e. } t \in [0, T] \\ (4) \quad (p(t), p_0) \neq 0. & \text{for every } t \in [0, T] \end{cases}.$$

ここで, $\pi : T^*M \rightarrow M$ は自然な射影とする。

定義 2.2. $z : [0, T] \rightarrow T^*M$ が正常 X -陪極値的曲線 (**normal X-bi-extremal**) であるとは, $p_0 < 0$ であるときを言う。 $x : [0, T] \rightarrow M$ が正常 X -極値的曲線 (**normal X-extremal**) であるとは, 正常 X -陪極値的曲線を持つときを言う。一方, $z : [0, T] \rightarrow T^*M$ が異常 X -陪極値的曲線 (**abnormal X-bi-extremal**) であるとは, $p_0 = 0$ であるときを言う。 $x : [0, T] \rightarrow M$ が異常 X -極値的曲線 (**abnormal X-extremal**) であるとは, 異常 X -陪極値的曲線を持つときを言う。

Remark このハミルトン関数の定式化は“通常の意味での”サブリーマン幾何における X -正常陪極値的曲線のハミルトン形式と一致する。

定義 2.3. X -異常極値的曲線 $x : [0, T] \rightarrow M$ が強異常 (strictly abnormal) であるとは, 正常 X -陪極値的曲線の射影でないときを言う。

Remark 極値的曲線 $x : [0, T] \rightarrow M$ の中には, 正常かつ異常なものも存在することが起こり得る。また, Montgomery [M], Kupka, や Liu, Sussmann [LS] などによって, 強異常であって, 最短測地線である例が与えられている。

3 主結果

$\text{VF}(M)^m$ を n 次元 C^∞ 多様体 M 上の m 個の C^∞ ベクトル場の組からなる空間とし, $\text{VF}(M)^m$ にはホイットニー C^∞ 位相が入っているものとする。

先行結果 [CJT08] $2 \leq m \leq n$ と仮定する。そのとき, $\text{VF}(M)^m$ の開かつ稠密な部分集合 G が存在して, もし, $X = (X_1, \dots, X_m)$ が G に含まれ, $x : [0, T] \rightarrow M$ が初期点 $x_0 \in M$ と終点 $x_1 \in M$ に関する非自明な X -異常極値的曲線ならば, x は必ず強異常である。

$D = (d_1, \dots, d_m)$ を m 個の整数の組とし, $\text{VF}_{\text{poly}}^D(\mathbb{R}^n)$ を, 各 i ($1 \leq i \leq m$) に対して, $\mathbb{R}^n$ 上の多項式ベクトル場 Q_i の次数が d_i 以下であるような $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ 全体とする。 $\text{VF}_{\text{poly}}^D(\mathbb{R}^n)$ には, 通常のエウクリッド位相が入っているものとする。

主結果 ([Y]) $2 \leq m \leq n$ とする。 $D = (d_1, \dots, d_m)$ が不等式 “ $\min\{d_1, \dots, d_m\} \geq 3n + 2$ ” を満たしていると仮定する。そのとき, $\text{VF}_{\text{poly}}^D(\mathbb{R}^n)$ の開かつ稠密な部分集合 H が存在して, もし, $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ が H に含まれ, $x : [0, T] \rightarrow M$ が初期点 $x_0 \in M$ と終点 $x_1 \in M$ に関する非自明な Q -異常極値的曲線ならば, x は必ず強異常である。

参考文献

- [AS] A.Agrachev, A.Sarychev, *Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13, 1996.
- [B] A.Belliaiche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in Sub-Riemannian Geometry, Progress in Math. 144, Birkhäuser, pp. 1-78, (1996).
- [CJT08] Y.Chitour, F.Jean, and E.Trélat, *Singular trajectories of control-affine systems*, SIAM J.Control Optim., Vol.47, No.2 (2008), pp.1078-1095.
- [LS] W.S.Liu, H.J.Sussmann, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions*, Memoirs AMS 118, no.564, 1995.
- [M] R.Montgomery, *Abnormal Minimizers*, SIAM J.Control and Optim. Vol.32, No.6 (1994), pp.1605-1620.
- [Y] W.Yukuno, *Abnormal geodesics in generalized subriemannian geometry*, Ph.D.thesis, Hokkaido University, (2014).

自由境界の外力項付き曲率流方程式に対する 解の挙動と最大存在時刻

可香谷隆 (北海道大学)

1 Introduction

平均曲率流方程式は界面の動きを記述するモデルの一つとして知られ、例えば金属の焼き鈍しなどに応用されている [3]. 平均曲率流方程式は以下のようなモデルである. まず, $\Gamma(t)$ を時刻 t における $\mathbb{R}^n$ 内の向き付け可能で滑らかな超曲面とする. このとき, $\Gamma(t)$ の各点に対して法線方向に対する動く速さ V と平均曲率 H が定義でき, 平均曲率流方程式は $V = H$ と記述される. $\Gamma(t)$ が閉曲面の場合には, 例えば [5, 6] などによって解析されている. また, 定数 C を用いた外力項付き平均曲率流 $V = H + C$ は超電動理論などに応用されている [2].

本研究では以下の自由境界の外力項付き曲率流方程式を考察する.

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} + C\sqrt{1+u_x^2}, & -\xi_1(t) < x < \xi_2(t), t > 0, \\ u_x(-\xi_1(t), t) = \tan \alpha_1, & t > 0, \\ u(-\xi_1(t), t) = \xi_1(t) \tan \beta_1, & t > 0, \\ u_x(\xi_2(t), t) = \tan \alpha_2, & t > 0, \\ u(\xi_2(t), t) = \xi_2(t) \tan \beta_2, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\xi_{01} \leq x \leq \xi_{02}, \\ \xi_1(0) = \xi_{01}, & \xi_2(0) = \xi_{02}, \end{cases} \quad (1)$$

ただし,

$$\begin{cases} \beta_i \in (0, \frac{\pi}{2}) (i = 1, 2), & \alpha_1 \in (-\beta_1, \frac{\pi}{2}), & \alpha_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \beta_2), \\ C \neq 0 \text{ is a constant, } & \xi_{01}, \xi_{02} > 0, \\ u_0 \in C^{1+\alpha}([-\xi_{01}, \xi_{02}]), & (u_0)_x(-\xi_{01}) = \tan \alpha_1, & (u_0)_x(\xi_{02}) = \tan \alpha_2, \\ u_0(-\xi_{01}) = \xi_{01} \tan \beta_1, & u_0(\xi_{02}) = \xi_{02} \tan \beta_2. \end{cases}$$

この方程式は $u(x, t), \xi_1(t), \xi_2(t)$ が未知関数となっている. 本研究においては $\Gamma(t) = \{(x, u(x, t)); -\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t)\}$ と表記できる. この表記を用いると

$$V = \frac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}}: \text{速さ}, \quad H = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}: \text{曲率}.$$

が得られ, 以下が成り立つ.

$$V = H + C \iff u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} + C\sqrt{1+u_x^2}.$$

$C = 0$ の場合の (1) の解の局所存在性は, [1] を応用することによって得られる. ここで, 方程式 (1) の解 (u, ξ_1, ξ_2) に対して以下を定義する.

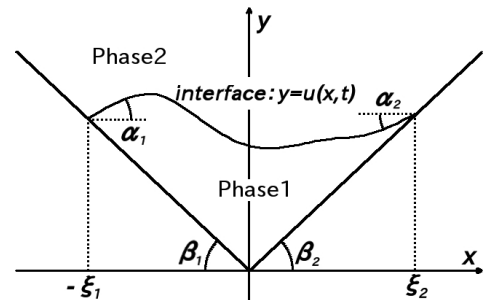


Figure 1: 時刻 t における u のグラフ

$$\begin{aligned} D(t) &:= \int_{-\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u(x, t) dx - \frac{1}{2}(\xi_1^2(t) \tan \beta_1 + \xi_2^2(t) \tan \beta_2), \\ L(t) &:= \int_{-\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \sqrt{1+u_x^2} dx. \end{aligned}$$

$D(t)$ は時刻 t における図 1 の Phase1 の面積を表し, $L(t)$ は時刻 t における u のグラフの長さを表す. また, この $D(t)$ に対して,

$$\frac{d}{dt}D(t) = \alpha_2 - \alpha_1 + CL(t) \quad (2)$$

が成り立つ. これにより, $C = 0$ の場合には α_1, α_2 の値のみに依存して解の挙動が変わることが予測され, 実際に以下の結果が知られている.

- (I) $\alpha_2 > \alpha_1$ のとき, 時刻 $t \rightarrow \infty$ で ξ_1, ξ_2 は発散, u は一様に発散し, 解は前向き自己相似解に漸近する [1].
- (II) $\alpha_2 = \alpha_1$ のとき, 時刻 $t \rightarrow \infty$ で u は定常解に収束する [4].
- (III) $\alpha_2 < \alpha_1$ のとき, ある有限時刻 $T > 0$ が存在し, 時刻 $t \rightarrow T$ で $u(0, \cdot), \xi_1, \xi_2$ は 0 に収束し, 解を後ろ向き自己相似解のオーダーでスケール変換したものが定常解に収束する [4].

2 Self-similar solutions

$C \neq 0$ の場合, 方程式 (1) に対する自己相似解は存在しないため, 外力項がない場合と曲率項がない場合の自己相似解について考察する. $C = 0$ の場合, 方程式 (1) に対する時刻 $t \rightarrow T$ で原点に収縮する後ろ向き自己相似解は

$$u(x, t) = \sqrt{2(T-t)}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{2(T-t)}}\right), \quad \xi_i(t) = \sqrt{2(T-t)}q_i \quad (i = 1, 2)$$

と書き表せ, $\phi(y), q_1, q_2$ は以下を満たす.

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{1 + (\phi')^2} - y\phi' + \phi &= 0, \quad -q_1 < y < q_2, \quad q_1, q_2 > 0 \\ \phi'(\mp q_i) &= \tan \alpha_i, \quad \phi(\mp q_i) = q_i \tan \beta_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

また, 曲率項がない方程式

$$\begin{cases} u_t = C\sqrt{1+u_x^2}, & -\xi_1(t) < x < \xi_2(t), \quad t > 0, \\ u_x(\mp \xi_i(t), t) = \tan \alpha_i, & t > 0, \quad i = 1, 2, \\ u(\mp \xi_i(t), t) = \xi_i(t) \tan \beta_i, & t > 0, \quad i = 1, 2, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\xi_{01} \leq x \leq \xi_{02}, \\ \xi_1(0) = \xi_{01}, \quad \xi_2(0) = \xi_{02} \end{cases}$$

に対する時刻 $t \rightarrow \infty$ で発散する前向き自己相似解は

$$u(x, t) = (t+1)\psi\left(\frac{x}{t+1}\right), \quad \xi_i(t) = (t+1)r_i \quad (i = 1, 2)$$

と書き表せ, $\psi(y), r_1, r_2$ は以下を満たす.

$$\begin{aligned} C\sqrt{1 + (\psi')^2} + y\psi' - \psi &= 0, \quad -r_1 < y < r_2, \quad r_1, r_2 > 0 \\ \psi'(\mp r_i) &= \tan \alpha_i, \quad \psi(\mp r_i) = \tan \beta_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

3 Main results

まず, 解析的半群を用いて以下の解の局所存在性定理を得た.

Theorem 3.1. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha, \xi_{01}, \xi_{02}, u_0$ に依存した時刻 $T > 0$ が存在して, 方程式 (1) は解

$$\begin{aligned} u &\in C^{1,0}(Q_1) \cap C^{2,1}(Q_2), \\ \xi_i &\in C[0, T] \cap C^1(0, T] \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

を持つ. ただし, $Q_1 = \{(x, t); -\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t), t \in [0, T]\}$, $Q_2 = \{(x, t); -\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t), t \in (0, T]\}$.

Theorem 3.1 より以下のいずれかを満たす時刻 T^* まで解の存在性が保証される.

(I) $\xi_1(t) + \xi_2(t) \rightarrow 0$ or ∞ as $t \rightarrow T_*$.

(II) $\|u(\cdot, t)\|_{C^{1+\alpha}} \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow T_*$.

以降 $\alpha_1 + \beta_1, \beta_2 - \alpha_2 \leq \pi/2$ 又は u_0 が凸関数を仮定する. このとき, $0 < \xi_1(t) + \xi_2(t) < \infty$ が成り立っている限り, $\|u(\cdot, t)\|_{C^{1+\alpha}} < \infty$ が得られる. この事実を用いると, 以下の挙動分類, 漸近挙動, 解の最大時刻に関する定理が得られる.

Theorem 3.2. $C > 0, \alpha_1 \leq \alpha_2$ のとき, (u, ξ_1, ξ_2) は大域解であり, $t \rightarrow \infty$ とすると $\xi_i(t) \rightarrow \infty, u(x, t) \rightarrow \infty$ (uniformly) が成り立つ. さらに, $\alpha_2 = \alpha_1$ のとき $t \rightarrow \infty$ とすると $(\frac{1}{t}u(ty, t), \xi_1/t, \xi_2/t) \rightarrow (\psi(y), q_1, q_2)$ が成り立つ.

Theorem 3.3. $C > 0, \alpha_1 > \alpha_2$ かつ

$$D(0) > \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\pi - \beta_1 - \beta_2)}{2C^2}$$

のとき, (u, ξ_1, ξ_2) は大域解であり, $t \rightarrow \infty$ とすると $\xi_i(t) \rightarrow \infty, u(x, t) \rightarrow \infty$ (uniformly) が成り立つ. さらに, $t \rightarrow \infty$ とすると $(\frac{1}{t}u(ty, t), \xi_1/t, \xi_2/t) \rightarrow (\psi(y), q_1, q_2)$ が成り立つ.

Theorem 3.4. $C > 0, \alpha_1 > \alpha_2$ かつ

$$E(0) < \frac{(1 - M)(\alpha_1 - \alpha_2)}{C}$$

のとき, (u, ξ_1, ξ_2) はある有限時刻 $T < \infty$ まで存在し, $t \rightarrow T$ とすると $\xi_1(t), \xi_2(t), u(0, t) \rightarrow 0$ が成り立つ. ただし,

$$M := \max \left\{ \frac{\cos(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos(\beta_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})}, \frac{\cos(\beta_2 - \alpha_2)}{\cos(\beta_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})} \right\} \in (0, 1)$$

とする. さらに, $t \rightarrow T$ とすると任意の $0 < \beta < 1$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}} u(y\sqrt{2(T-t)}, t) &\rightarrow \phi(y) \text{ in } C^{1+\beta}(\text{weakly in } H^2), \\ \frac{\xi_i(t)}{\sqrt{2(T-t)}} &\rightarrow p_i \text{ as } t \rightarrow T \end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 3.5. $C < 0, \alpha_1 = \alpha_2$ のとき, (u, ξ_1, ξ_2) はある有限時刻 $T < \infty$ まで存在し, $t \rightarrow T$ とすると $\xi_1(t), \xi_2(t), u(0, t) \rightarrow 0$ が成り立つ.

次の定理に使う関数を定義する. 任意の $R > 0$ に対して関数 f_R を以下のように定義する.

$$f_R(x) := -\sqrt{R^2 - (x - C_1 R)^2} + C_2 R \text{ for } C_3 R \leq x \leq C_4 R.$$

ただし定数 C_i は α_i, β_i に依存したある定数とする.

Theorem 3.6. $C < 0, \alpha_1 < \alpha_2$ のとき, (u, ξ_1, ξ_2) は大域解であり, u は定常解 $f_{-1/C}$ に漸近する.

References

- [1] Y.-L. Chang, J.-S. Guo and Y. Kohsaka, *On a two-point free boundary problem for a quasilinear parabolic equation*, Asymptot. Anal. **34** (2003), pp333–358.
- [2] K. Deckelnick, C.M. Elliott and G. Richardson, *Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex*, Nonlinearity **10** (1997), pp655–678.

- [3] 儀我 美一, 界面ダイナミクス-曲率の効果-, Technical Report Series of Department of Mathematics, Hokkaido University **56** (1998).
- [4] J.-S. Guo and B. Hu, *On a two-point free boundary problem*, Quart. Appl. Math. **64** (2006), pp413–431.
- [5] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984), pp237–266.
- [6] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **31** (1990), pp285–299.

Quantum Estimation Theory of Quantum Statistical Mechanics

大澤 進 (北海道大学大学院理学院)

1 量子推定理論の基礎

物理系を表すヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とし、 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素全体を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ とおく。正則な密度作用素からなる n パラメーターモデル $\{\rho_\theta; \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\}$ を扱う。真の状態は $\{\rho_\theta\}$ の中にあることがわかっているが、 θ が未知であるという状況で、パラメーター推定問題を考える。

定義 1 状態 ρ における $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ を次のように定義する。

$$\langle A, B \rangle_\rho := \frac{1}{2} \text{Tr} \rho (BA^* + A^*B).$$

定義 2 対称対数微分 $L_{\theta,j}^s$, ($j = 1, \dots, n$) は次の式で定義される。

$$s - \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta^j} = \frac{1}{2} (\rho_\theta L_{\theta,j}^s + L_{\theta,j}^s \rho_\theta), \quad L_{\theta,j}^s = L_{\theta,j}^{s*}, \quad \text{Tr} \rho_\theta L_{\theta,j}^s = 0.$$

定義 3 *SLD-Fisher* 情報行列は以下の式で定義される。

$$J_\theta^s = [\langle L_{\theta,j}^s, L_{\theta,k}^s \rangle_{\rho_\theta}].$$

θ の推定と $\mathbb{R}^n$ 上に値をとる測定を同一視する。

定義 4 $E_\theta[M]$ を期待値ベクトルとする。測定 M が以下の条件を特定の点 θ で満たすとき、 M は θ で局所不偏であるという。

$$E_\theta[M] = \theta,$$

$$[\frac{\partial}{\partial \theta^k} E_\theta[M]]^j = \delta_k^j, \quad (j, k = 1, \dots, n).$$

定理 1 (量子 *Cramér-Rao* 不等式) M を θ で局所不偏な測定とし、 $V_\theta[M]$ を M の共分散行列とする。このとき以下の不等式が成り立つ。

$$V_\theta[M] \geq (J_\theta^s)^{-1}.$$

2 正準分布における外場の推定理論

正準分布している物理系の密度作用素は

$$\rho = (\text{Tre}^{-\beta H})^{-1} e^{-\beta H}$$

と表される。ここで、 β は逆温度、 H は系のハミルトニアンである。系に外場が加えられた場合を考える。系が平衡状態に至った場合、系のハミルトニアンと密度作用素は、

$$\tilde{H} = H + \sum_{j=1}^n h_j X_j, \quad \tilde{\rho} = (\text{Tre}^{-\beta \tilde{H}})^{-1} e^{-\beta \tilde{H}}$$

となる。ここで、 X_j ($j = 1, \dots, n$) は外場、 h_j ($j = 1, \dots, n$) は結合定数である。ここでは結合定数の推定問題を考察する。

定義 5 A をヒルベルト空間 K 上の線形作用素とする。集合 $C^\infty(A) := \cap_{n=1}^\infty D(A^n)$ の元を A に対する C^∞ ベクトルという。

定義 6 ベクトル $\psi \in C^\infty(A)$ について、ある $t > 0$ があって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n \psi\|}{n!} t^n < \infty \quad (1)$$

であるとき、 ψ を A の解析ベクトルという。もし、すべての $t > 0$ に対して、(1) が成り立つならば、 ψ は A の全解析ベクトルという。 A の全解析ベクトル全体を $\mathfrak{E}(A)$ で表す。

補題 1 A をヒルベルト空間 K 上の自己共役作用素とする。このとき $\mathfrak{E}(A)$ は稠密である。

定理 2 可分なヒルベルト空間 H の稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ 上で $[\tilde{H}, X_j] = 0$ がすべての j に対して成り立ち、また以下の仮定 1 が成り立っているものとする。このとき $\mathcal{D}$ 上で $L_{h,j}^s = \frac{1}{2kT} \Delta X_j$ である。ここで k はボルツマン定数、 T は温度である。対応する *SLD-Fisher* 情報行列要素は

$$J_{ij}^s = \frac{1}{(2kT)^2} \text{Tr} \tilde{\rho} (\Delta X_i \Delta X_j + \Delta X_j \Delta X_i) = \frac{1}{(2kT)^2} \cdot \frac{1}{2} (\chi_{ij} + \chi_{ji})$$

である。ただし、 χ_{ij} は

$$\chi_{ij} := \frac{\partial}{\partial h_j} \text{Tr} \tilde{\rho} X_i$$

で定義される。

仮定 1 (i) $H, X_j, \tilde{H}, \tilde{H}'_k := H - \sum_{j \neq k}^n h_j X_j$ ($j, k = 1, \dots, n$) は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である。

(ii) $e^{-\beta\tilde{H}}, X_j e^{-\beta\tilde{H}}, X_j X_k e^{-\beta\tilde{H}}$ ($j, k = 1, \dots, n$) は任意の $\beta > 0$ に対してトレース・クラス作用素である。

(iii) $\mathcal{D} \subset \mathfrak{E}(\tilde{H}) \cap_{j,k=1}^n D(X_j X_k)$ であり、 $\mathcal{D}$ は任意の $\beta > 0$ について $e^{-\beta\tilde{H}}$ の不変部分空間である。

(iv) $I \subset R^2$ を任意のコンパクト集合とすると、数列 $\{M_{j;k;I;m}\}_{m=1}^\infty$ が存在して以下の条件を満たす。

$$(iv-i) M_{j;k;I;m} \geq 0.$$

$$(iv-ii) \sum_{m=1}^\infty M_{j;k;I;m} < \infty.$$

(iv-iii) $\mathcal{D}$ の元からなる $\mathcal{H}$ の C. O. N. S. $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ が存在して、任意の $m \in \mathbb{N}$ と $(h_j, h_k) \in I$ に対して $|\langle e_m, X_j X_k e^{-\beta\tilde{H}} e_m \rangle| \leq M_{j;k;I;m}$ が成り立つ。

Example 1

$$H = \sum_{j=1}^N -\frac{\Delta_i}{2m}, \quad X_{jk} = V(|y_j - y_k|), \quad \tilde{H} = H + \sum_{j < k} h_{jk} X_{jk}.$$

ここで、 $\Delta_i := \frac{\partial^2}{\partial x_{i1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{i2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{i3}^2}$ であり、 x_i は正準分布している系の粒子の座標、 y_j は熱浴の粒子の座標、 V はポテンシャルを表す。

Example 2 (Ising Model)

$$H = -J \sum_{j=1}^{m-1} I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes \sigma_j^3 \otimes \sigma_{j+1}^3 \otimes I_2 \cdots \otimes I_2, \quad X = \sum_{j=1}^m I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes \sigma_j^3 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2,$$

$$\tilde{H} = H + hX.$$

ここで、

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (j = 1, \dots, m)$$

である。

定理 3 $[\tilde{H}, X_j] \neq 0$ であるが、 $i[\tilde{H}, X_j]$ ($j = 1, \dots, n$) が $\tilde{H}$ と X_k ($k = 1, \dots, n$) と強可換な自己共役作用素であるとき仮定 1 の (ii)、(iv) および仮定 2 のもとで 対称対数微分と対応する SLD-Fisher 情報行列は定理 2 と同じ形となる。

仮定 2 (v) $\tilde{H}, X_j, C_j, \tilde{H} + X_j$ ($j = 1, \dots, n$) は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である。ただし $C_j := -i[\tilde{H}, X_j]$ である。

(vi) $X_j + iC_j + \tilde{H}$ ($j = 1, \dots, n$) は有界線形作用素である。

(vii) 稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathfrak{E}(H) \cap_{j=1}^n \mathfrak{E}(X_j) \cap_{j=1}^n \mathfrak{E}(\tilde{H} + X_j) \cap_{j=1}^n \mathfrak{E}(C_j) \cap_{k,l=1}^n D(X_k X_l)$ が存在して、任意の実数 x, y に対して $e^{xX_j}, e^{y\tilde{H}}, X_j, e^{\pm \frac{i}{2}x^2 C_j}, e^{y\tilde{H}'_j}$ ($j = 1, \dots, n$) の不変部分空間である。

Remark 1 定理 2, 3 において 1 パラメーターモデルの, 量子 Cramér-Rao 不等式は

$$\sqrt{\frac{V_h[M](\text{Tr} \Delta X)^2}{2}} \geq kT$$

となる。これは、測定の分散と外場の分散の積の下限が典型的な平衡状態のエネルギー kT で表現されることを示している。

参考文献

- [1] C. W. Helstrom, “Quantum Detection and Estimation Theory,” Academic Press, 1976.
- [2] A. Holevo, “Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory,” North-Holland, 1982.

作用素環による McKay 対応の拡張

北川めぐみ

お茶の水女子大学理学部数学科

1 有限群の線形表現

1.1 線形表現に関する一般的なこと

V を複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とし、 $GL(V)$ を V からそれ自身への上への同型写像全体のなす群とする。 V が n 個の元よりなる有限基底 (e_i) を持つとする。 $GL(V)$ の元である任意の線形写像 $a: V \rightarrow V$ が同型写像ということは、 a の行列式が零でないことと同値である。このようにして、群 $GL(V)$ は、 n 次可逆正方行列全体のなす群と同一視される。

今 G を有限群とし、その単位元を 1 、その演算を $(s, t) \mapsto st$ とする。 G の V における線形表現とは、 G から群 $GL(V)$ の中への準同型写像 ρ である。言い換えれば、各元 $s \in G$ に、 $GL(V)$ の元 $\rho(s)$ を対応させて、等式

$$s, t \in G \text{ に対して、} \rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

が成立するとき、写像 ρ を線形表現というのである。 $\rho(s)$ の代わりにしばしば ρ_s とも書く。 ρ が与えられたとき、 V を G の表現空間（または単に表現）という。 V が有限次元で、その次元を n とするとき、 n を考えている表現の次数と呼ぶ。

ρ, ρ' を同じ群 G の、それぞれベクトル空間 V, V' におけるふたつの線形表現とする。これらの表現が同値である（または同型である）とは、等式

$$\text{各 } s \in G \text{ に対し、} \tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau$$

を満たすような線形同型写像 $\tau: V \rightarrow V'$ が存在することをいう。

群 G の 1 次の表現は、準同型写像 $\rho: V \rightarrow \mathbf{C}^*$ である。ここで、 $\mathbf{C}^*$ は 0 でない複素数全体のなす乗法群を表す。 G の各元は有限位数だから、 ρ の値 $\rho(s)$ は 1 の冪根であり、特に $|\rho(s)| = 1$ を得る。各 $s \in G$ に対し $\rho(s) = 1$ とおくと、 G のひとつの表現を得る。これは単位表現と呼ばれる。

$\rho: G \rightarrow GL(V)$ を線形表現とし、 W を V の部分ベクトル空間とする。 W は G の作用で安定（または不変、あるいは保たれるともいう）とする。すなわち、 $x \in W$ のとき、各 $s \in G$ に対して $\rho_s x \in W$ となるものとする。このとき ρ_s の W への制限 ρ_s^W は W からそれ自身の上への同型写像であり、明らかに $\rho_{st}^W = \rho_s^W \cdot \rho_t^W$ が成立する。従って、写像 $\rho: G \rightarrow GL(W)$ は G の W における線形表現である。 W を V の部分表現という。

$\rho: G \rightarrow GL(V)$ を、 G の線形表現とする。 $V \neq 0$ で、 V のどの部分ベクトル空間も G で保たれないとき (V と 0 を除いて)、 ρ は既約または単純であるという。第二の条件は、 V は二つの表現の直和でない (自明な分解 $V = 0 \oplus V$ を除いて) という事と同値である。任意の表現は、既約表現の直和である。

V_1, V_2 をふたつのベクトル空間とする。 v_1 及び V_2 のテンソル積とは、ベクトル空間 W であって、次の二条件を満たす、 $V_1 \times V_2$ から W への写像 $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ を持つものをいう。

- (i) $x_1 \cdot x_2$ は変数 x_1, x_2 の各々に関して線形である。
- (ii) (e_{i_1}) を V_1 のひとつの基底、 $(\tilde{e}_{i_2})$ を V_2 のひとつの基底としたとき、積 $e_{i_1} \cdot \tilde{e}_{i_2}$ のなす族は W の基底である。

このような空間 W が存在して、ただ一つ (同型を除いて) であり、これを $V_1 \otimes V_2$ と表す。

今、 $\rho^1: G \rightarrow GL(V_1)$ 及び $\rho^2: G \rightarrow GL(V_2)$ をある群 G の二つの線形表現とする。 $s \in G$ とし、 $GL(V_1 \otimes V_2)$ の元 ρ_s を、条件

$$x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \text{ に対して } \rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho_s^1(x_1) \cdot \rho_s^2(x_2)$$

により定義する。この ρ_s を

$$\rho_s = \rho_s^1 \otimes \rho_s^2$$

と書く。 ρ_s 達は G の $V_1 \otimes V_2$ における線形表現を定義し、これを与えられた表現のテンソル積と呼ぶ。

1.2 表現の指標

$\rho: G \rightarrow GL(V)$ を有限群 G の、ベクトル空間 V における線形表現とする。各 $s \in G$ に対して

$$\chi_\rho(s) = \text{Tr}(\rho_s)$$

とおく。(Tr(ρ_s) は ρ_s の行列表示のトレースを表す。) このようにして得られた G 上の複素数値関数 χ_ρ を、表現 ρ の指標と呼ぶ。

$\rho: G \rightarrow GL(V)$ を、指標 χ の線形表現とし、 V' を V の双対空間とする。 $x \in V, x' \in V'$ のとき、線形形式 x' の x における値を $\langle x, x' \rangle$ により表す。 $\rho': G \rightarrow GL(V')$ を、 $\langle x, \rho'_s x' \rangle = \langle \rho_s^{-1} x, x' \rangle$ により定めると、 ρ' は

$$s \in G, x \in V, x' \in V' \text{ に対し、 } \langle \rho_s x, \rho'_s x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

を満たす線形表現であり、一意である。これを ρ の反傾表現と呼び、その指標は χ^* である。

シューアの補題 $\rho^1: G \rightarrow GL(V_1)$ 及び $\rho^2: G \rightarrow GL(V_2)$ を G の二つの既約表現とする。 f を、各 $s \in G$ に対し $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ を満たすような V_1 から V_2 への線形写像とする。このとき、

- (1) ρ^1 と ρ^2 とが同型でなければ、 $f = 0$ を得る。
- (2) $V_1 = V_2, \rho^1 = \rho^2$ ならば、 f は相似写像 (すなわち恒等写像 1 のスカラー倍) である。

φ, ψ を G 上に二つの複素数値関数とすると、

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t)^*, g \text{ は } G \text{ の位数}$$

とおくと、これは一つの内積である。この内積を用いて指標について、既約表現の指標は一つの正規直交系をなすことが示される。更に、 G 上の中心関数全体のなすベクトル空間を H とすると、 G の異なる既約表現の指標全体は H の正規直交基底をなす。

1.3 コンパクト群への拡張

位相群 G とは、位相をもつ群で、その位相に関して積 $s \cdot t$ 及び逆 s^{-1} が連続となるものをいう。このような群 G は、その位相がコンパクト空間の位相であるとき、コンパクト群と呼ばれる。例えば、直交群 $O(n)$ 、ユニタリ群 $U(n)$ 、コンパクトシンプレクティック群 $Sp(n)$ 、回転群 $SO(n)$ 、特殊ユニタリ群 $SU(n)$ はコンパクト群である。それらの閉部分群もまたコンパクト群である。

G をコンパクト群とし、 V を複素数体上の有限次元ベクトル空間とすると、 G の V における線形表現とは、連続な準同型写像 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ をいう。連続性の条件は、 $\rho_s x$ が二変数 $s \in G, x \in V$ の連続関数であることと同値である。このような表現は、有限次元ユニタリ表現の直和に同型であることが証明されるので、考察を有限次元ユニタリ表現に限ってよいのである。

有限群の表現の性質の大部分は、コンパクト群の表現に拡張される。それらを示すために、有限の和をとる代わりに、Haar 測度 dt に関する積分をとることでおきかえればよい。

2 McKay 対応

G を特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の閉部分群とする。 G が有限群であると仮定する。 ρ を自然表現、すなわち G から $GL(2, \mathbb{C})$ への埋め込み写像によって定まる 2 次元の表現とし、 ρ_i を G の既約表現全体の集合で ρ_0 を単位表現とするものとし、さらに $\rho \otimes \rho_j$ の既約表現への分解を $\rho \otimes \rho_j = \sum n_{ij} \rho_j$ とする。このとき行列 (n_{ij}) を考えると、 n_{ij} は $\rho \otimes \rho_j$ に含まれる ρ_j の回数であることから非負整数であり、 d_i を ρ_i の次元とおくとき、 $(d_1, d_2, \dots)$ は行列 (n_{ij}) の固有ベクトルである。よって Perron–Frobenius の固有ベクトルであることから、行列 (n_{ij}) のノルムは 2 と分かる。

ρ_i を頂点で表し、行列 (n_{ij}) を、 $n_{ij} = 1$ ならば頂点 ρ_i と頂点 ρ_j をつなぐという関係を表す行列とすると、これよりグラフ Γ が得られる。それを McKay グラフと呼ぶ。McKay 対応 [1] は、このような群の McKay グラフ Γ が、拡張された Dynkin 図形と一対一対応することを示している。行列 (n_{ij}) についての議論により、拡張された Dynkin 図形のうちこの対応で現れるのは A, D, E 型のみで、 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 の 5 種類である。それぞれのグラフに対応する群は、巡回群 C_n 、 $SO(3)$ の部分群とみなしたときの二面体群 D_n 、4 次交代群 A_4 、4 次対称群 S_4 、5 次交代群 A_5 である。交代群や対称群は、正多面体の双対性を利用して見つけることができる。

次に G が有限とは限らないコンパクト群とする。このとき、 G の既約表現 ρ_i は無限個存在する

ので、McKay グラフも無限個の頂点を持つものを考えることになる。 G が有限群の場合と同様に、拡張された Dynkin 図形のうちこの対応で現れるのは A, D, E 型とわかるが、このうち、 A, D 型は頂点が無限個のものを考える。すると、 A 型は頂点が両側とも無限に続く場合と、片側だけ無限に続く場合の 2 通り考えられて、対応する群はそれぞれ円周群 $U(1)$ と、特殊ユニタリ群 $SU(2)$ とわかる。 D 型は片側だけ頂点が無限に続くグラフが考えられて、それに対応する群は、行列

$$V = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と円周群 $U(1)$ の元によって生成される群である。よって G がコンパクト群のとき、 G が有限群の場合に挙げられた群に追加してこれら 3 種類の群を考えられる。

参考文献

- [1] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, in *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, 183–186, Proc. Sympos. Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI. MR0604577 (82e:20014)
- [2] R. Steinberg, Finite subgroups of SU_2 , Dynkin diagrams and affine Coxeter elements, *Pacific J. Math.* **118** (1985), no. 2, 587–598. MR0789195 (86g:20016)
- [3] A. Wassermann, Ergodic actions of compact groups on operator algebras. III. Classification for $SU(2)$, *Invent. Math.* **93** (1988), no. 2, 309–354. MR0948104 (91e:46093)

索引

■ア行

青山 暢, 271
赤間 知子, 263
秋田 大, 255
浅原 啓輔, 225
荒川 智匡, 113
李 正勲, 205
板垣 智洋, 247
一木 信吾, 317
伊東 杏希子, 285
稲葉 和正, 19
今田 充洋, 139
井元 隆史, 221
植松 哲也, 105
江夏 洋一, 259
大泉 嶺, 3
大澤 進, 341
大森 源城, 167
緒方 勇太, 151
小川 駿, 43
小川 泰朗, 27
奥田 喬之, 135
小野塚 友一, 293
小原 まり子, 289
恩田 将樹, 321
■力行
可香谷 隆, 337
門田 慎也, 73
亀山 統胤, 279
川本 昌紀, 35
北川 めぐみ, 345
久野 恵理香, 171
栗田 紘大, 313
黒田 匡迪, 101
鍬田 英也, 159
小坂 亘, 301
小塚 菜美, 147
小鳥居 祐香, 51
古牧 弘幸, 85
小山 民雄, 309
■サ行
佐藤 敬志, 163
柴田 和樹, 275
鈴木 拓也, 181

鈴木 雄太, 77
隅田 大貴, 131
Suriajaya Ade Irma, 81

■タ行

高橋 甫宗, 201
高橋 良輔, 143
竹内 司, 329
谷口 晃一, 189
田端 亮, 93
千野 由喜, 251
Chan Poh Kam, 305
土谷 昭善, 89
寺西 功哲, 231
寺本 圭佑, 127
DEOLINDO・SILVA JORGE・LUIZ, 123
冨澤 佑季乃, 197

■ナ行

中島 規博, 59
中屋 智瑛, 243
野本 文彦, 117

■ハ行

畑中 美帆, 155
服部 至宏, 69
日高 建, 217
平川 義之輔, 239
船川 大樹, 209
本多 俊一, 325

■マ行

町田 夏久子, 177
百瀬 康弘, 97

■ヤ行

矢城 信吾, 297
山口 崇幸, 235
山下 達也, 109
山本 健, 267
行野 亘, 333
米山 泰祐, 193

■ラ行

劉 曉静, 185

■ワ行

渡辺 朋成, 11
和田 和幸, 213